ایران توشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود گام به گام
- دانلود آزمون گاج و قلم چی و سنجش
- دانلود فیلم و مقاله انگلیسی
- کنکور و مشاوره

IranTooshe.Ir

@irantooshe

IranTooshe

سؤالات موضوعی فصل اول درس هندسه ۲

فصل یک هندسه ۲

استدلال استقرایی

۱ — خرداد ۹۳ — ۰/۷۵ نمره

باستفاده از استدلال استقرایی و رسم چند ضلعی های محدب تا ۵ ضلعی جدول زیر را کامل کرده و رابطه ای که مجموع زاویه های داخلی یک n ضلعی محدب را بیان می کند ، بیابید.

تعداد ضلع ها	۳	۴	۵	....	n
مجموع زاویه های داخلی	۱۸۰	۳۶۰	?		?

۲ — شهریور ۹۴ — ۰/۷۵ نمره

وسط ضلع های چهارضلعی های زیررا به طورمتوالی به هم وصل کنید و با استفاده ازاستدلال استقرایی ، ویژگی های شکل حاصل را حدس بزنید . الف) مستطیل ب)مربع ج) متوازی الاضلاع

۳ — خرداد ۹۲ — ۱/۲۵ نمره

با رسم چند ضلعی های محدب تا شش ضلعی و رسم قطر های مربوط به هر رأس :

الف)جدول مقابل را کامل کنید.

تعداد ضلع ها	۳	۴	۵	۶	...	n
تعداد قطر های رسم شده از یک رأس	۰	۱	۲	؟	...	؟

ب)به کمک استدلال استقرایی بالا، رابطه ای برای تمام قطر های n ضلعی محدب بیابید.

۴ — دی ۹۲ — ۱ نمره

الف) یک مثلث متساوی الاضلاع به دقت رسم نمایید . وسط ضلع ها را پیدا کرده و به هم وصل کنید .

ب) سه مثلثی را که در گوشه ایجاد می شود ، نگه دارید و مثلث میانی را با سیاه کردن حذف کنید .

این فرآیند را روی سه مثلث دیگر تکرار کنید و با استفاده از استدلال استقرایی جدول زیر را کامل کنید.

(در مرحله ۲ شکل را رسم کنید.)

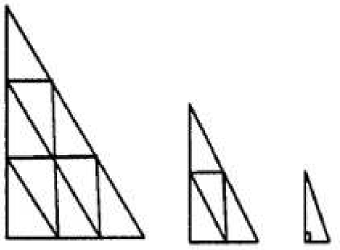
مرحله	۰	۱	۲	...	n
تعدادمثلث ها	۱	؟	؟	...	؟

ایران توشه
توسعه ای برای موفقیت

تهیه کننده : سارا فرهادی دبیر ریاضی شهرستان مسجد سلیمان

۵	مثلثهای شکلهای ۱ ، ۲ ، ۳ باهم متشابه و مثلثهای کوچک همه باهم همنهشت هستند.با توجه به شکل های زیر و با استفاده از استدلال استقرایی جدول زیر را کامل کنید.	خرداد ۹۱	۰/۵ نمره

شماره ی شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مثلثهای کوچک	۱	۴	۹	؟	...	؟

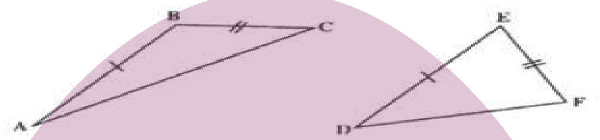


(۳) (۲) (۱)

استدلال استنتاجی

۱	قضیه: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید،اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع رو به رو به زاویه ی بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه روی زاویه ی کوچکتر.	خرداد ۹۰	۱/۲۵ نمره
۲	قضیه : ثابت کنید در هر مثلث ، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است .	شهریور ۹۳	۱/۵ نمره
۳	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است. سپس آن مقدار ثابت را به دست آورید.	خرداد ۹۰	۱ نمره
۴	قضیه : ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،آنگاه زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگتر ،بزرگتراست از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچکتر .	شهریور ۹۱	۱/۲۵ نمره
۵	درمثلث متساوی الساقین ABC ، نقطهٔ دلخواه P روی امتداد قاعدهٔ BC قرار دارد . ثابت کنید تفاضل فاصله های نقطهٔ P از دو ساق آن مقداری ثابت است .	خرداد ۹۴	۱ نمره
۶	قضیه : ثابت کنید در هر مثلث نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می کند.	شهریور ۹۰	۱/۷۵ نمره
۷	ثابت کنید مجموع فاصله های هر نقطه داخل مثلث از سه رأس ، از نصف مجموع سه ضلع مثلث بزرگتر است .	شهریور ۹۴	۱/۲۵ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸	باستفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید اگر از یک نقطه ی اختیاری روی قاعده یک مثلث متساوی الساقین دو خط به موازات دو ساق رسم کنیم تا آنها را قطع کند،آنگاه مجموع طول پاره خط های ایجاد شده برابر طول ساق مثلث خواهد بود.	خرداد ۹۲	۱ نمره
۹	در مثلث ABC میانه AM و نیمسازهای دو زاویه $A\hat{M}B$ و $A\hat{M}C$ را رسم کنید ، این دو نیمساز اضلاع AB و AC را قطع می کنند ، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید.سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC باهم موازی اند.	دی ۹۲	۱ نمره
۱۰	قضیه ی لولا: ثابت کنید اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند و زاویه بین این دو ضلع در مثلث اول بزرگتر از زاویه بین دو ضلع دوضلع نظیر از مثلث دوم باشد ، آن گاه ضلع سوم از مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم از مثلث دوم است . 	دی ۹۱	۱/۷۵ نمره
۱۱	از تقاطع نیمساز های زاویه های داخلی یک مستطیل ، یک مربع پدید می آید . رابطه ی بین طول ضلع این مربع و اضلاع مستطیل را به دست آورید.	دی ۹۰	۰/۷۵ نمره
۱۲	ثابت کنید در هر مثلث ، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچکتر است.	دی ۹۰	۱ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال نقض

۱	برای رد حدس های کلی زیر مثال نقض ارائه دهید : الف) اگر دو زاویه مکمل یکدیگر باشند ، آنگاه هر دو زاویه قائمه هستند . ب) اگر دو مثلث هم مساحت باشند ، آنگاه همنهشت هستند .	دی ۹۳	۰/۵ نمره
۲	الف)هر دو مثلث همنهشت دارای مساحت های برابر هستند.	خرداد ۹۲	۰/۲۵ نمره
۳	درستی یانادرستی جملات زیر را مشخص کنید: الف) هر زاویه ی خارجی یک چند ضلعی لزوما" از هر زاویه ی داخلی آن بزرگتر است. ب)از هرنقطه خارج دایره می توان دو مماس بر آن دایره رسم کرد.	شهریور ۹۲	۰/۲۵ نمره

تهیه کننده : سارا فرهادی دبیر ریاضی شهرستان مسجد سلیمان

۴	درستی یا نادرستی جملات زیر را معلوم کنید. الف)نقطه ی همرسی میانه های مثلث ، مرکز ثقل آن است.	شهریور ۹۰	۰/۲۵ نمره

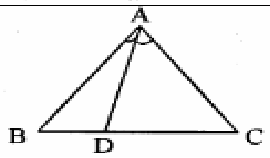
قضیه های شرطی

۱	الف) هر مربعی متوازی الاضلاع است . چهار ضلعی ABCD مربع است . <u>نتیجه</u> : چهار ضلعی ABCD متوازی الاضلاع است.	خرداد ۹۰	۰/۲۵ نمره

عکس قضیه

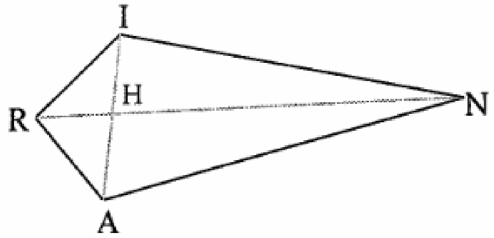
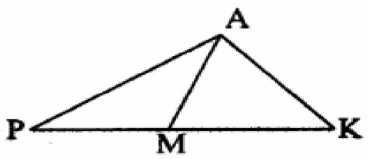
۱	سه ضلع مثلثی ۷ ، ۱۲ و ۱۶ سانتی مترند ، اندازه ی پاره خطها یی که نیمساز درونی زاویه ی کوچکتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد را تعیین کنید .	خرداد ۹۳	۱ نمره
۲	سه پاره خط با طول های $6x$، $x+7$ و $4(x-1)$ داده شده اند.اگرمجموع این طول ها ۳٦ باشد،آیا این پاره خط ها می توانند ضلع های یک مثلث باشند؟تو ضیح دهید.	دی ۹۲	۰/۷۵ نمره

اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف

۱	قضیه: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید.اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع رو به رو به زاویه ی بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه روی زاویه ی کوچکتر.	خرداد ۹۳	۱ نمره
۲	(عکس قضیه لولا): به روش برهان خلف ثابت کنید اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگرنظیر به نظیرمساوی باشند و ضلع سوم مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم مثلث دوم باشد ، آنگاه زاویه ی بین دو ضلع از مثلث اول بزرگتر از زاویه ی بین دو ضلع نظیر ازمثلث دوم است .	دی ۹۳	۱ نمره
۳	مثلث ABC متساوی الاضلاع است . اگر BD < DC، ثابت کنید $B\hat{A}D < D\hat{A}C$ 	خرداد ۹۱	۱ نمره
۴	در مثلث ABC و $A'B'C'$ اگر $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ و $\widehat{A} = \widehat{A'}$، ثابت کنید $BC \neq B'C'$. (برهان خلف)	دی ۹۱	۱ نمره

ایران توشه
توشـــه ای بـــرای مـــوفقـیـت

سئوالات موضوعی فصل اول درس هندسه ۲

۵	قضیه : با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند ، ضلع رو به رو به زاویه بزرگتر ، بزرگتر از ضلع رو به رو ی زوایه کوچکتر است .	خرداد ۹۳	۱ نمره
۶	در چهار ضلعی IRAN ،دو قطر RN و IA یکدیگر را در H قطع می کنند. با استفاده از برهان خلف نشان دهید اگر RA=RI و NI≠NA آنگاه RN نیمساز زاویه IRA نیست. 	شهریور ۹۰	۱ نمره
۷	در مثلث PAK،نقطه ی M روی ضلع PK قرار دارد. ثابت کنید اگر PM=AK آنگاه AP > MK . 	خرداد ۹۱	۱ نمره

مکان هندسی

۱	قضیه: ثابت کنید سه نیمساز زاویه های داخلی هر مثلث همرسند .	شهریور ۹۱	۱ نمره
۲	قضیه : ثابت کنید عمود منصف های ضلع های هر مثلث همرسند .	دی ۹۳	۱/۲۵ نمره
۳	قضیه : ثابت کنید سه ارتفاع هر مثلث همرسند . (راهنمایی : از رأسهای مثلث خط هایی به موازات سه ضلع مثلث رسم کنید تا مثلث جدیدی تشکیل شود .)	خرداد ۹۴	۱/۵ نمره
۴	ثابت کنیدنیمسازیک زاویه،مکان هندسی نقطه ای درصفحهٔآن زاویه است که فاصلهٔ آن ازدوضلع زاویه برابر باشد .	دی ۹۱	۱/۲۵نمره
۵	در هر یک از موارد زیر مکان هندسی نقطه ای از صفحه رابه دست آورده وشکل مربوط به آن را رسم کنید. الف) مکان هندسی مرکز دایره ای که در خارج یک دایره ی داده شده واقع است وروی محیط آن می غلتد. ب) مکان هندسی مرکز دایره هایی که در یک نقطه ی مشخص بر یک خط داده شده مماس باشد.	شهریور ۹۱	۱/۵ نمره

تهیه کننده : سارا فرهادی دبیر ریاضی شهرستان مسجد سلیمان

۶	ابتدا مکان هندسی را تعریف کنید سپس مکان هندسی نقطه ای از صفحه را پیدا کنید که از یک خط داده شده ی d به فاصله ی $\frac{۱}{۲}$ باشد.	دی ۹۰	۱/۲۵ نمره

ترسیم با کمک خط کش و پرگار

۱	زاویه ی XOY داده شده است . با استفاده از خط کش و پر گار روی نیم خط $O'X'$ زاویه ای به رأس O' و مساوی زاویه ی XOY رسم کنید.	خرداد ۹۳	۱ نمره
۲	مربعی رسم کنید که پاره خط مفروض DE قطر آن باشد .(روش رسم را توضیح دهید) D———E	شهریور ۹۳	۱ نمره
۳	از مثلث ABC اندازه های $AC = b$ و $AB = c$ و طول ارتفاع $AH = h_a$ معلوم است. مثلث را رسم کنید . (روش رسم را توضیح دهید)	دی ۹۳	۱ نمره
۴	خط d و نقطهٔ A غیر واقع بر آن ، داده شده اند. نقطه ای روی خط d تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم R باشد. باتوجه به اندازهٔ R روی تعداد جواب های مسأله بحث کنید .	شهریور ۹۴	۱/۲۵ نمره
۵	با استفاده ازخط کش و پرگار خطی موازی یک خط از یک نقطه ی خارج آن خط رسم کنید.(مراحل رسم را توضیح دهید.)	خرداد ۹۲	۰/۷۵ نمره

ایران توشه
توشـــه ای بـــرای مـــوفقـیـت

۶	دو نقطه A و B وخط d در یک صفحه واقعند. نقطه ای روی خط d بیابید که از دو نقطه ی A و B به یک فاصله باشد.مساله چند جواب دارد؟(بحث کنید)	شهریور ۹۰	۱ نمره
۷	با استفاده از خط کش و پرگار خطی موازی یک خط از یک نقطه ی خارج آن خط رسم کنید . (مراحل رسم را توضیح دهید.)	دی ۹۰	۰/۷۵ نمره

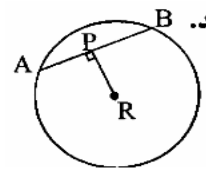
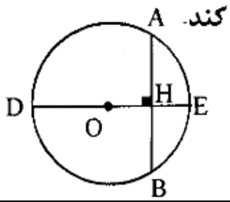
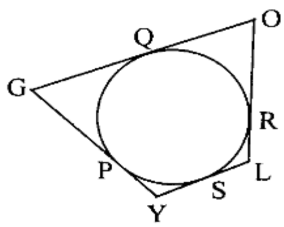
گروه ریاضی متوسطه ی دوم استان خوزستان

با همکاری سارا فرهادی

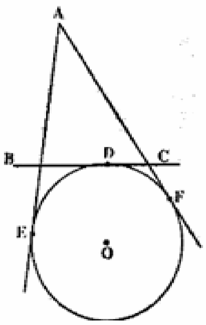
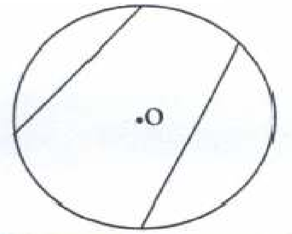
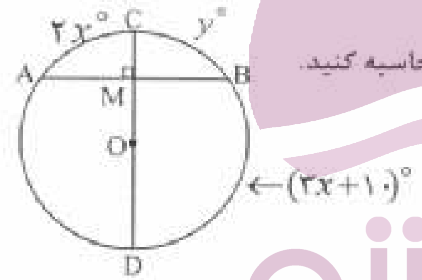
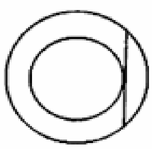
دبیر ریاضی شهرستان مسجد سلیمان

فصل دوّم هندسه ۲

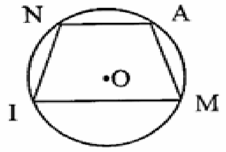
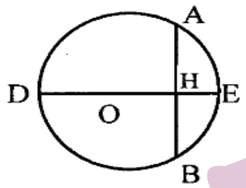
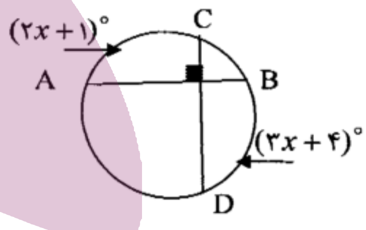
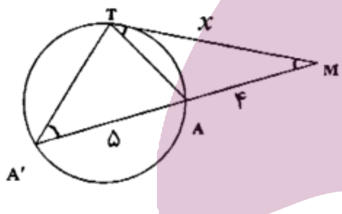
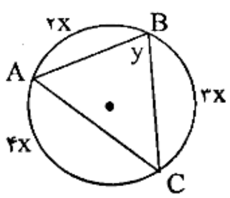
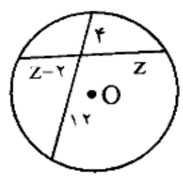
زاویه مرکزی ، وتر و مماس

۱	قضیه : ثابت کنید طول مماس های رسم شده بر یک دایره از هر نقطه ی خارج آن باهم برابرند .	شهریور ۹۳	۱ نمره
۲	دایره ی $C(O,۵)$ ونقطه ی M به فاصله ی $۵\sqrt{۲}$ از مرکز دایره ی C داده شده است . MT و MT' در نقاط T و T' بر این دایره مماسند . الف) طول مماس های MT و MT' را به دست آورید . ب) نوع چهار ضلعی $OTMT'$ را با ذکر دلیل مشخص کنید .	خرداد ۹۳	۱/۲۵ نمره
۳	با توجه به شکل رو به رو اگر طول شعاع ۱۰ و ٦ = PR ، آنگاه طول AP و AB را به دست آورید. 	دی ماه ۹۳	۱ نمره
۴	شعاعهای دو دایرهٔ هم مرکز ۱۰ و ۶ سانتی متر هستند . اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگتر را که بر دایرهٔ کوچکتر مماس است پیدا کنید .	شهریور ۹۱	۱ نمره
۵	دایرهٔ C (O , R) ونقطهٔ M واقع در خارج این دایره داده شده اند ، از نقطهٔ M بر این دایره دو مماس رسم کنید .(مراحل رسم را توضیح دهید)	خرداد ۹۲	۱/۲۵ نمره
۶	قضیه: ثابت کنید در هر دایره ، قطر عمود برهر وتر،آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند. 	شهریور ۹۴	۱ نمره
۷	دایرهC(O,R)داده شده است.مکان هندسی نقطه ای راتعیین کنیدکه مماسهای رسم شده از این نقطه بر دایره ، بر هم عمود باشند.	خرداد ۹۲	۱/۲۵ نمره
۸	ضلع های چهار ضلعی محیطی GOLY بردایره مماسند، ثابت کنید: GO + LY = OL + GY 	خرداد ۹۲	۱/۲۵ نمره
۹	قضیه: ثابت کنیددریک دایره،ازدو وتر نابرابر،آن که بزرگتر است، به مرکزدایره نزدیکتر است،و بعکس .	دی ۹۲ نمره	۱/۲۵

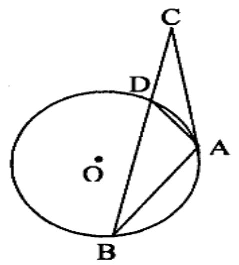
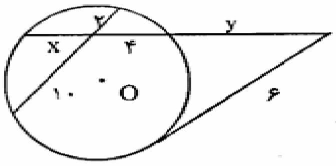
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰	خط های AE ، AF و BC به ترتیب در نقطه های E، F و D بر دایره (O) مماس هستند.مماس BC ، خط های AE و AF را به ترتیب در نقطه های B و C قطع کرده است . ثابت کنید با تغییر مکان نقطه ی D روی دایره بین دو نقطه ی ثابت E و F ، محیط مثلث ABC ثابت می ماند. 	دی ماه ۹۲	۱ نمره
۱۱	قضیه:ثابت کنید در یک دایره ،از دو وتر نابرابر ،آن که بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است و بالعکس . 	دی ۹۱	۱/۲۵ نمره
۱۲	زاویه ی بین دو مماس رسم شده از نقطه ی A بر دایره ی $C(O,5)$ ،برابر °۶۰ است. طول پاره خط OA را به دست آورید.	دی ماه ۹۱	۱/۲۵ نمره
۱۳	قطر CD در نقطه ی M بر وتر AB از دایره ای به مرکز O عمود است . اگر $\widehat{AC}=2x^\circ$ ، $\widehat{BC}=y^\circ$ و $\widehat{BD}=(3x+10)^\circ$ باشد، x و y را محاسبه کنید. 	دی ماه ۹۱	۱ نمره
۱۴	شعاع های دو دایره ی هم مرکز ۶ و ۱۰ سانتی متر هستند. اندازه ی وتری از دایره ی بزرگتر را که بر دایره ی کوچکتر مماس است پیدا کنید. 	شهریور ماه ۹۱	۱ نمره
۱۵	از هرنقطه خارج دایره می توان دو مماس بر آن دایره رسم کرد.	خرداد ۹۱	۰/۷۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ردیف	سوال	تاریخ	نمره
۱۶	در دایره ی (O) ،چهار ضلعی AMIN محاط شده است و داریم NI=AM نشان دهید: AN∥MI 	شهریور ۹۲	۱/۵ نمره
۱۷	قضیه: ثابت کنید در هر دایره قطر عمود برهر وتر،آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند. 	شهریور ۹۴	۱ نمره
۱۸	وضعیت دو دایره نسبت به هم را در حالت های زیر تعیین کنید. الف) $R=1+\sqrt{2}$ ، $R'=\sqrt{2}-1$ ، $d=1$ ب) $R=\frac{1}{3}$ ، $R'=\frac{1}{2}$ ، $d=\frac{5}{6}$	دی ماه ۹۰	۰/۵ نمره
۱۹	مقدار x را در هر یک از شکل های زیر بدست آورید.  (الف)  (ب)	دی ماه ۹۰	۱ نمره
۲۰	قضیه : ثابت کنید طول مماس های رسم شده بر یک دایره از هر نقطه ی خارج آن با هم برابرند.	شهریور ۹۳	۱ نمره
۲۱	قضیه : ثابت کنید طول مماس های رسم شده بر یک دایره از هر نقطه ی خارج آن باهم برابرند .	شهریور ۹۳	۱ نمره
۲۲	با توجه به شکلهای زیراندازه ی x و y را در شکل(الف) و اندازه ی z را در شکل (ب) تعیین کنید . (الف)  (ب) 	دی ماه ۹۳	۲ نمره

خط های قا طع و مماس نسبت به دایره

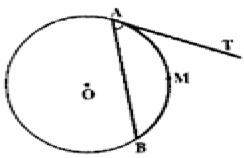
۱	در دایره ی(O) مماس AC و وتر AB بایکدیگر مساوی اند. خط BC دایره را درنقطه ی D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC متساوی الساقین است. 	خرداد ۹۱	۱ نمره
۲	در شکل زیر مقدار های x و y را بدست آورید. 	شهریور ۹۳	۱ نمره
۳	قضیه:ثابت کنید اگر از یک نقطه ،یک مماس ویک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، قطعه ای از خط مماس محصور بین آن نقطه و نقطه تماس ، واسطه ی هندسی بین دو قطعه ی قاطع است.	دی ماه ۹۱	۱ نمره

وضع دو دایره نسبت به هم

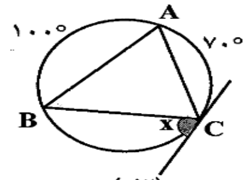
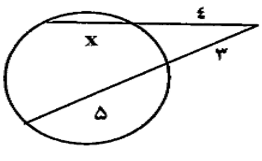
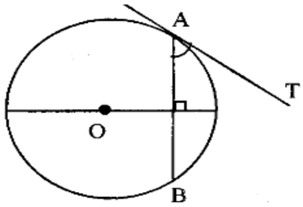
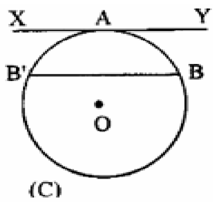
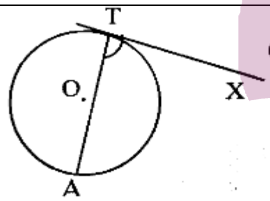
زاویه محاطی

۱	قضیه: ثابت کنید در هر چهار ضلعی محاطی ،زاویه های رو به رو مکمل یکدیگرندو به عکس.	شهریور ۹۱	۱/۲۵ نمره
۲	با استفاده از تعریف زاویه ی محاطی ، نشان دهید مجموع زاویه های داخلی هر مثلث 180° است .	دی ماه ۹۰	۰/۷۵ نمره

زاویه ظلی

۱	قضیه: باتوجه به شکل ثابت کنید در دایره (O) اندازه هر زاویه ی ظلی برابربا نصف کمان رو به روی ان است . 	خرداد ۹۰	۱/۲۵ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲	مقدار x را در هریک از شکل های زیر بدست آورید  (الف)  (ب)	شهریور ماه ۹۰	۱/۲۵ نمره
۳	زاویه ی ظلی TAB در دایره ی به مرکز O داده شده است . با استفاده از ویژگی قطر عمود بر وتر ، ثابت کنید که $\widehat{TAB} = \frac{\widehat{AB}}{۲}$ 	خرداد ۹۳	۱/۵ نمره
۴	خط XY در نقطه ی A بردایره ی (C) مماس است، وتر 'BB از دایره را موازی XY رسم کرده ایم . ثابت کنید : $\widehat{AB} = \widehat{AB'}$ 	شهریور ۹۳	۱ نمره
۵	**قضیه : ثابت کنید اندازه هر زاویه ی ظلی برابر با نصف کمان رو به روی آن است .**	دی ماه ۹۳	۱/۵ نمره
۶	اگر اندازهٔ زاویهٔ ظلی ATX مساوی $(۲\alpha - ۶)^\circ$ و اندازهٔ کمان $\widehat{AT}$ برابر $(۳\alpha + ۳۳)^\circ$ باشد ، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ ATX را بیابید . 	شهریور ۹۴	۱ نمره

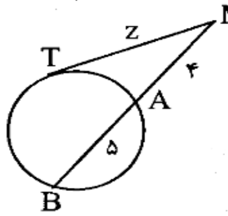
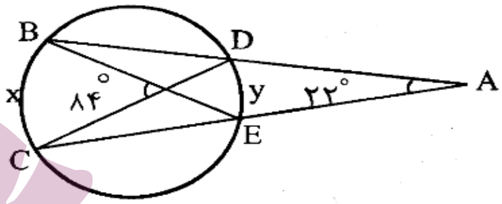
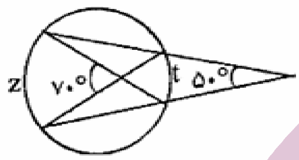
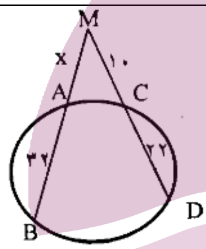
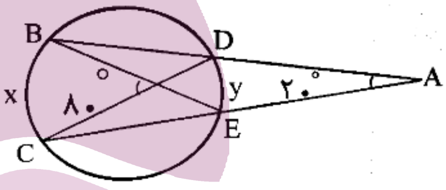
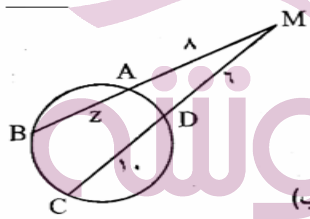
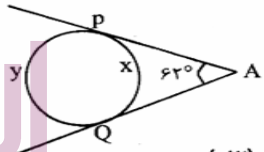
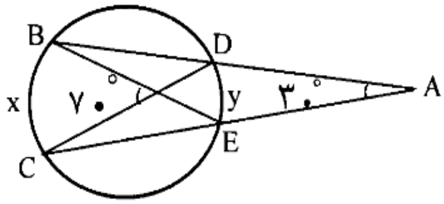
کمان در خور یک زاویه

۱	**کمان در خور زاویهٔ ۹۰° روبه رو به یک پاره خط مانند AB ، دایره ای .... است.**	خرداد ۹۴	۰/۲۵ نمره
۲	پاره خط AB به طول $\sqrt{۲}$ سانتی متر و کمان در خور زاویهٔ ۴۵° روبه رو به این پاره خط مفروض است.شعاع دایره ای را که این کمان در خور بخشی از آن است و فاصلهٔ مرکز این دایره از پاره خط AB را تعیین کنید.	شهریور ۹۴	۱ نمره
۳	پاره خط AB به طول $۳\sqrt{۲}$ سانتی متر و کمان در خور زاویه ی ۴۵°روبه رو به این پاره خط مفروض است.شعاع دایره ای را که این کمان در خور بخشی از آن است و فاصله مرکز این دایره از پاره خط AB را تعیین کنید.	شهریور ۹۰	۱ نمره
۴	**پاره خط AB به طول ۴ سانتی متر داده شده است.کمان در خور زاویه ی ۳۰° روبرو به این پاره خط مفروض است. شعاع دایره ای را که این کمان درخور بخشی از آن است و فاصله ی مرکز این دایره از پاره خط AB را تعیین کنید.**	خرداد ۹۱	۱ نمره

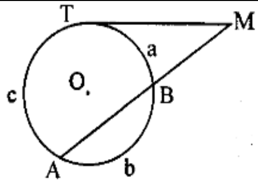
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵	پاره خط AB به طول ٦ سانتی متر و کمان در خور زاویه ی 30° روبه رو به این پاره خط مفروض است.شعاع دایره ای را که این کمان در خور بخشی از آن است و فاصله مرکز این دایره از پاره خط AB را تعیین کنید.	شهریور ۹۳	۱ نمره

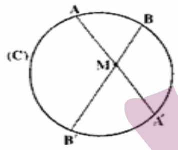
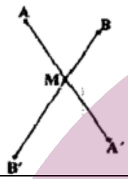
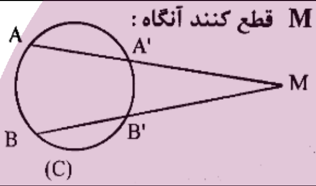
زاویه بین دو وتر

۱	در شکل (الف) مقدار های yوx و درشکل (ب) مقدار z را بدست آورید.  (ب)  (الف)	دی ماه ۹۲	۱/۵ نمره
۲	در شکل زیر مقدار z و t را بیابید. 	خرداد ۹۰	۱ نمره
۳	در هر یک از شکل های زیر x وy را بیا بید.  (ب)  (الف)	شهریور ۹۱	۱/۷۵ نمره
۴	با توجه به شکل های زیر مقدار x و y و z را بیابید.  (ب)  (الف)	شهریور ۹۰	۱/۵ نمره
۵	قضیه: ثابت کنید اندازه ی زاویه ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می شود برابر نصف مجموع اندازه ی دو کمانی از دایره است که به ضلع ها وامتداد ضلع ها ی آن زاویه محدودند.	شهریور ۹۰	۰/۷۵ نمره
۶	در شکل زیر x وy را بیا بید. 	خرداد ۹۰	۱ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ردیف	سوال	تاریخ	نمره
۷	خط مماس بردایره در نقطهٔ T وامتداد وتر AB در نقطهٔ M متقاطعند. با فرض $\widehat{TB}=a$ ، $\widehat{BA}=b$ ، $\widehat{AT}=c$ و $\frac{a}{۱}=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۵}$ اندازهٔ زاویهٔ M را تعیین کنید. 	خرداد ۹۴	۱ نمره

رابطه طولی در دایره

ردیف	سوال	تاریخ	نمره
۱	قضیه : از نقطه ی M واقع در داخل دایره (C) دو وتر دلخواه AA' و BB' رسم شده اند . ثابت کنید: $MA\times MA'=MB\times MB'$ 	شهریور ۹۲	۱/۲۵ نمره
۲	عکس قضیه (رابطه طولی در دایره):ثابت کنیداگر دو پاره خط AA' و BB' در نقطه M یکدیگر را طوری قطع کنند که $MA\times MA'=MB\times MB'$ آنگاه چهار نقطه ی A ، A' ، B و B' روی یک دایره اند. 	دی ماه ۹۰	۱/۲۵ نمره
۳	ثابت کنید اگر امتداد وتر های AA' و BB' ازدایرهٔ (C) یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند آنگاه : $MA\times MA'=MB\times MB'$ 	خرداد ۹۴	۱/۲۵ نمره

ترسیمهای هندسی

ردیف	سوال	تاریخ	نمره
۱	دو دایره ی به شعاع ۹ و ۴ سانتی متر، مماس برون هستند . مقدار x را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی آنها برابر $۵x+۲$ باشد .	خرداد ۹۳	۱ نمره
۲	مقدار a را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های ۸ و ۳ وخط المرکزین $d=۱۳$ ، برابر $۵a-۳$ باشد .	شهریور ۹۴	۰/۷۵
۳	طول خط المرکزین دردو دایره متقاطع به شعاع های ٤ و٣ سانتی متر برابر ٦سانتی متر است . طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به دست آورید.	خرداد ۹۰	۰/۵ نمره
۴	مقدار a را چنان بیابید که اندازه ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های ۸ و۲ وخط المرکزین d=۱۰، برابر ۳a-۱ باشد.سپس تعیین کنید این دو دایره چند مماس مشترک داخلی دارند.	شهریور ۹۰	۱ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵	شکل زیر نشان دهنده ی دو دایره ی مماس برون است. الف)این شکل دارای چند مماس مشترک خارجی و چند مماس مشترک داخلی است؟ ب)اگر $R=۴$ و $R'=۹$ آنگاه اندازه ی مماس مشترک خارجی آنها را به دست آورید.  	خرداد ۹۱	۱/۲۵

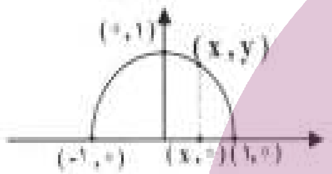
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

فصل سوم هندسه ۲

نگاشت

۱	نقاط $A(۶,۱)$، $B(۸,۳)$، $C(۶,۵)$ و $D(۴,۳)$ رأس های یک مربع هستند. الف) مربع و تصویرش را تحت انتقال $T(x,y)=(x-۵\,,\,y-۲)$ رسم کنید. ب) طول و شیب ضلع AB و تصویرش را به دست آورده و با هم مقایسه کنید. پ) آیا تبدیل ایزو متری است؟چرا؟	خرداد ماه ۹۱	۲ نمره
۲	نقاط $A(۳,۰)$، $B(۵,۰)$ و $C(۳,۴)$ رأس های یک مثلث هستند. الف) تصویر مثلث ABC را تحت تبدیل $D(x,y)=(-y+۲\,,\,x-۲)$ بدست آورده و رسم کنید. ب) تصویر مثلث ABC را ابتدا تحت دوران $R(x,y)=(-y\,,\,x)$ پیدا کرده وآن را $A'B'C'$ بنامید. سپس تصویر $A'B'C'$ را تحت انتقال $T(x,y)=(x+۲\,,\,y-۲)$ تعیین کنید. نتیجه به دست آمده را با نتیجهٔ (الف) مقایسه کنید.	خرداد ۹۴	۲ نمره
۳	نقاط $O=(۰,۰)$ و $P=(۶,-۲)$ و $Q=(۷\,,\,۱)$ رأس های یک مثلث هستند. الف) نمودار مثلث OPQ و تصویرش تحت تبدیل $R(x\,,\,y)=(-y\,,x)$ را رسم کنید. ب) طول و شیب ضلع PQ از مثلث OPQ و ضلع $P'Q'$ از مثلث تصویر را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.	دی ماه ۹۰	۱/۷۵ نمره
۴	نقاط $A(۱,۱)$، $B(۴,۲)$، $C(۳,۵)$ و $D(۰,۴)$ رأس های یک مربع هستند. الف) مربع و تصویرش را تحت انتقالی که رأس A رابرروی رأس B تصویرمی کند، رسم کنید. ب) قاعده ی نگاشت این انتقال را بنویسید.	دی ماه ۹۱	۱/۵ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ردیف	سؤال	تاریخ	بارم
۵	نقاط $O=(0,0)$ و $P=(-2,6)$ و $Q=(7,1)$ رأس های یک مثلث هستند. الف)ابتدا مختصات تصویراین نقاط را تحت تبدیل $R(x\ ,\ y)=(-y\ ,x)$ تعیین کنید سپس نمودار مثلث OPQ و تصویرش را رسم کنید. ب) طول و شیب ضلع PQ از مثلث OPQ و ضلع $P'Q'$ از مثلث تصویر را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.	دی ماه ۹۲	۲ نمره
۶	مفاهیم زیر را تعریف کنید : الف) چند ضلعی محیطی ب) نگاشت پ) صفحه عمود منصف یک پاره خط	دی ماه ۹۳	۱/۵ نمره
۷	نقاط $A(1\ ,\ 3)$ ، $B(5\ ,5)$ و $C(6,3)$ رأس های یک مثلث هستند. الف) مثلث و تصویرش تحت تبدیل $D(x\ ,y)=(2x\ ,2y)$ را رسم کنید. ب) طول ضلع AB و تصویرش را به دست آورده و با هم مقایسه کنید. پ)خط هایی که نقطه های نظیر را به هم وصل می کنند،نسبت به هم چه وضعی دارند؟	دی ماه ۹۳	۱/۷۵ نمره
۸	تبدیل تصویر قائم نیم دایرهٔ داده شده روی محور x ها را در نظر بگیرید. الف) تصویر $(0,1)$ و $(-1,0)$ چیست ؟ ب) $(\frac{1}{2}\ ,\ 0)$ تصویر چه نقطه ای است ؟  	دی ماه ۹۴	۱/۲۵ نمره
۹	نقاط A (۳و۲) و B (-۱و۴) را درنظر بگیرید. الف)مختصات تصویر نقاط A و B را تحت تبدیل $R(x,y)=(-y,-x)$ بدست آورید. ب) طول‌پاره خط AB و تصویرش و همچنین شیب خط AB و تصویرش را بدست آورده وبا هم مقایسه کنید.	شهریور ماه ۹۰	۱/۲۵ نمره
۱۰	نقاط نقاط $A(1,3)$ ، $B(5,5)$ و $C(6,3)$ رأس های یک مثلث هستند. الف) مثلث و تصویرش تحت تبدیل $D(x,y)=(2x\ ,2y)$ را رسم کنید. ب) طول ضلع AB و تصویرش را به دست آورده و با هم مقایسه کنید. پ)خط هایی که نقطه های نظیر را به هم وصل می کنند،نسبت به هم چه وضعی دارند؟	شهریور ماه ۹۱	۱/۷۵ نمره
۱۱	نقاط $A(2,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(5,4)$ و $D(1,2)$ رأس های یک مستطیل هستند. الف) مستطیل و تصویرش را تحت بازتاب $T(x,y)=(x\ ,\ -y)$ رسم کنید. ب) طول و شیب ضلعAB و تصویرش را به دست آورده و با هم مقایسه کنید. پ) آیا تبدیل ایزو متری است؟چرا؟	شهریور ماه ۹۲	۲ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲	نقاط $A(3,3)$ ، $B(1,-1)$ و $C(-2,2)$ رأس های یک مثلث هستند . **الف) مختصات تصویر این مثلث را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+2,-y)$ بدست آورید .** **ب) آیا این تبدیل ایزومتری است ؟ چرا ؟** **پ) در این تبدیل شیب خط حفظ می شود یا خیر ؟ چرا؟**	شهریور ۹۳	۱/۵ نمره
۱۳	مختصات نقطه ای را به دست آورید که تصویر آن تحت تبدیل $T(x,y)=(x,y-2)$ نقطهٔ $(0,-3)$ باشد .	شهریور ۹۴	۰/۷۵ نمره
۱۴	تبدیل $T(x,y)=(2x+1,2y)$ را در نظر بگیرید: الف) تصویر نقاط $A(1,2)$ و $B(0,0)$ را تحت تبدیل T به دست آورید . ب)طول AB و تصویر آن را محاسبه کنید . ج) آیا تبدیل T ایزو متری است ؟چرا؟	شهریور ۹۴	۱/۵ نمره

انتقال

۱	معادله تصویر خط $3x-2y-6=0$ تحت تبدیل انتقال $T(x,y)=(x-3,\ y+1)$ را به دست آورید.	شهریور ۹۲	۱/۲۵
۲	نقاط $A(-3,5)$ ، $B(1,3)$ داده شده است ، ضابطه ی انتقالی را بنویسید که A را روی B تصویر کند .	خرداد ۹۳	۰/۷۵ نمره
۳	خط $3y-2x=6$ و تصویرش را تحت انتقال $T(x,y)=(x+4,\ y-2)$ رسم کنید . سپس معادله ی خط تصویر را به دست آورید.	دی ماه ۹۰	۰/۷۵ نمره
۴	قضیه : با استفاده از ویژگیهای تبدیل انتقال، ثابت کنید اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند ، زاویه های نظیر برابر خواهند بود .	دی ماه ۹۴	۱ نمره

بازتاب

۱	**الف)خط به معادله ی $y=x-4$ و تصویرش را تحت بازتاب نسبت به محور y ها رسم کنید .** **ب) معادله ی خط تصویر را بنویسید .**	شهریور ۹۳	۱/۷۵ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

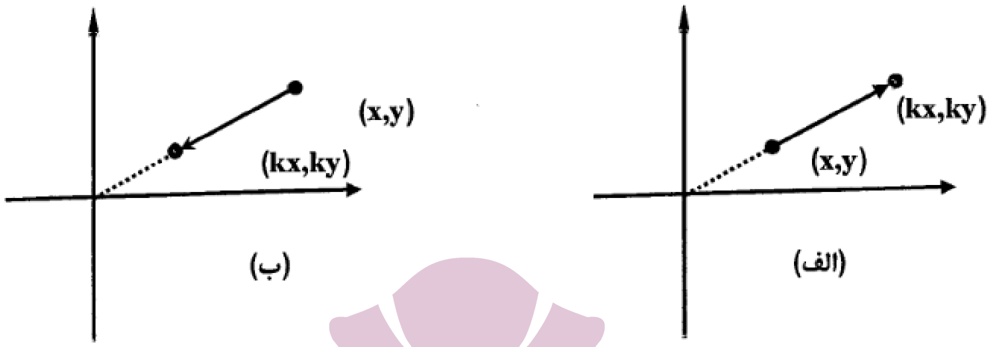
۲	تحت یک بازتاب نقطهٔ (۱- , ۳-) روی نقطهٔ (۵ , ۳) تصویر شده است ، معادلهٔ محور بازتاب را بنویسید .	خرداد ۹۴	۱ نمره

دوران

تجانس

۱	نقاط A(-۲ ,۲) ، B(۲ , ۲) و C(۲ , ۴) رأس های یک مثلث هستند . الف) مثلث ABC و تصویرش را تحت تجانس $D(x,y)=(\frac{۳}{۲}x\,,\ \frac{۳}{۲}y)$ رسم کنید . ب) مساحت مثلث ABCرا بدست آورده، سپس به کمک و یژگیهای تجانس مساحت تصویرمثلثABCرا محاسبه کنید . پ) این تجانس انقباض است یا انبساط ؟ چرا؟	خردادماه ۹۳	۲ نمره
۲	تحت تجانس به مرکز (۰,۰) نقطهٔ A (۴ , ۲) روی نقطهٔ A'(۲ , ۱) تصویر شده است ، ضابطهٔ تجانس را بنویسید و نوع آن را مشخص کنید .	خرداد ماه ۹۴	۰/۷۵ نمره
۳	نقاط A(۶,۰)، B(۶,۶) و C(۰ , ۶) رأس های یک مثلث هستند. الف)مثلث وتصویرمجانس آن رابادرنظر گرفتن (۰,۰) به عنوان مرکزتجانس و $\frac{۱}{۳}$ به عنوان عامل مقیاس رسم کنید. ب)این تجانس انبساط است یا انقباض؟چرا؟	دی ماه ۹۱	۱/۵ نمره
۴	نقاط A(۳ ,۳) ، B(-۲ , ۱) و C(۴ , -۲) راس های یک مثلث هستند . الف) مثلث ABC و تصویرش را تحت تجانس $D(x,y)=(\frac{۱}{۲}x\,,\ \frac{۱}{۲}y)$ رسم کنید . ب) نسبت مساحت تصویر مثلث ABC را به مساحت مثلث ABC بنویسید . ج) این تجانس انقباض است یا انبساط ؟	دی ماه ۹۴	۱/۷۵ نمره
۵	سه مورد از ویژگی های تبدیل تجانس را بنویسید.	دی ماه ۹۰	۰/۷۵ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ردیف	سوال	تاریخ	نمره
۶	خط به معادله $L:۳x-۲y-۱۲=۰$ و تصویرش را تحت تبدیل تجانس $D(x,y)=(\frac{۱}{۲}x,\frac{۱}{۲}y)$ رسم کنید. سپس معادله ی خط تصویر را به دست آورید.	خرداد ۹۱	۱/۵ نمره
۷	باتوجه به تبدیل تجانس تعیین کنید کدام یک از شکل های زیر انقباض و کدام یک انبساط است. 	شهریور ۹۰	۰/۵ نمره

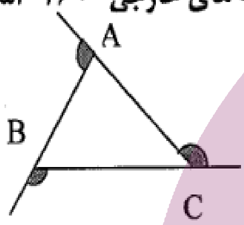
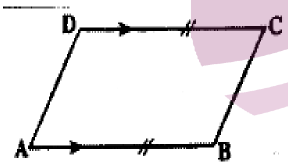
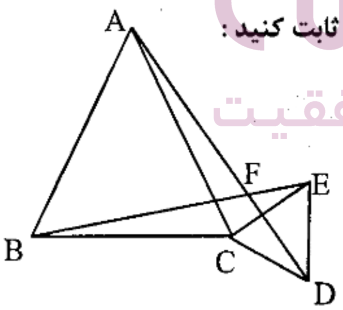
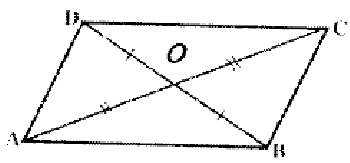
تبدیل یافته خط و معادله آن

ردیف	سوال	تاریخ	نمره
۱	تحت یک باز تاب،تصویر خط $x+y-۳=۰$ ، خط $x+y+۳=۰$ است،معادله ی محور تقارن را بنویسید.	دی ماه ۹۱	۱ نمره
۲	خط $۲x-y+۴=۰$ مفروض است.معادله ی تصویر خط را تحت باز تاب نسبت به خط $y=-x$ به دست آورده سپس آنها را رسم کنید.	دی ماه ۹۲	۱/۷۵ نمره
۳	معادله تصویر خط $l:۲x+۶y-۱۲=۰$ را تحت بازتاب نسبت به محور x ها به دست آورید .	خرداد ۹۰	۱/۲۵ نمره
۴	معادله تصویر خط $۳x - y + ۶ = ۰$ تحت دوران $R(x,y) = (-y,x)$ را به دست آورید.	شهریور ۹۱	۱/۲۵ نمره
۵	معادله تصویر خط $L:۳x-y-۲=۰$ تحت دوران $۲۷۰°$ حول $O(۰,۰)$ را بنویسید.	خرداد ۹۳	۱/۲۵ نمره
۶	معادلهٔ تصویر خط $L: ۲x + y = ۶$ تحت دوران $R(x,y) = (-y,x)$ را به دست آورید .	دی ماه ۹۴	۱ نمره

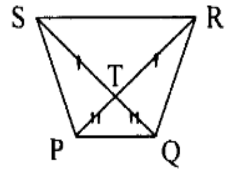
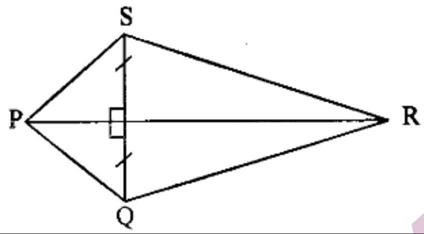
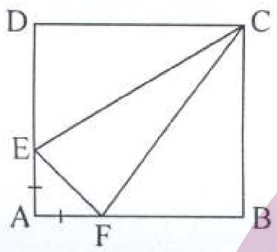
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷	خط $x-3y+6=0$ مفروض است.معادله ی تصویر خط را تحت دوران به مرکز $O(0,0)$ و زاویه ی 270° به دست آورید.	دی ماه ۹۴	۱نمره
۸	خط به معادله $L: 3x-y+6=0$ و تصویرش تحت دوران $R(x,y)=(-x,-y)$ را رسم کرده سپس معادله ی خط تصویر را به دست آورید.	شهریور ۹۰	۱/۲۵ نمره
۹	معادله تصویر خط $L: 3x-2y=6$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=-x$ را به دست آورید.	دی ماه ۹۰	۱/۵ نمره

اثبات با استفاده از ویژگی تبدیل ها

۱	با استفاده از ویژگی های تبدیل انتقال ، ثابت کنید در مثلث دلخواه ABC مجموع زاویه های خارجی 360° است.  	شهریور ۹۰	۱/۲۵ نمره
۲	در چهار ضلعی ABCD ، اگر $AB \parallel DC$ و $AB=DC$ ، با استفاده از تبدیل انتقال ثابت کنید: $AD \parallel BC$ و $AD=BC$  	شهریور ۹۱	۱/۵نمره
۳	مثلث ABC و مثلث ECD متساوی الاضلاع هستند.باستفاده از تبدیل دوران ثابت کنید : $AD=BE$ و $A\hat{F}B=60^\circ$  	شهریور ۹۲	۱/۲۵ نمره
۴	قطرهای چهار ضلعی ABCD یکدیگر را نصف کرده اند. با استفاه از ویژگی های تبدیل دوران ثابت کنید ABCD یک متوازی الاضلاع است.  	خرداد ۹۰	۱/۵ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵	در شکل زیر PR و QS قطرها، PT=QT و RT=ST. با استفاده ازتبدیل بازتاب ثابت کنید : $\Delta QPR \cong \Delta PQS$ 	خرداد ۹۲	۱/۲۵ نمره
۶	در شکل روبرو PR عمود منصف QS است. با استفاده از ویژگی های تبدیل بازتاب ثابت کنید: $\widehat{SPR} = \widehat{QPR}$ 	خرداد ۹۳	۱ نمره
۷	چهار ضلعی ABCD یک مربع است وAE=AF ،با استفاده ازویژگی های تبدیل بازتاب ثابت کنید:CE=CF 	خرداد ۹۰	۱ نمره
۸	قضیه : با استفاده از ویژگیهای تبدیل بازتاب ثابت کنید زاویه های رو به رو به ضلع های مساوی در مثلث متساوی الساقین با یکدیگر برابرند .	دی ماه ۹۱	۱ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

فصل چهارم هندسه ۲

خط وصفحه در فضا

۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید. الف)دو خط در فضا که یکدیگر را قطع نکنند لزوما" موازی هستند. ب) اگر خطی بر صفحه ای عمود باشد ،بر هر خط از آن صفحه نیز،عمود است. پ) اگر خطی بر یکی از دو صفحه ی موازی عمودباشد،بر دیگری هم عمود است. ت)از هر نقطه خارج یک خط در فضا ،یک و تنها یک خط به موازات آن خط می گذرد.	دی ماه ۹۲	۱ نمره
۲	عبارات زیر را با کلمات مناسب پر کنید : الف) اگر .... نقطه ی متمایز از خطی ، در یک صفحه باشند ، آن خط به تمامی در آ ن صفحه قرار می گیرد . ب) دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی گیرند ، دو خط .... می گویند . پ) اگر صفحه ای دو صفحه ی موازی را قطع کند ، آنگاه فصل مشترکها با هم .... هستند . ت) خط L برصفحه ی P عمود است اگر و تنها اگر ، بر دو خط .... از صفحه یP عمود باشد .	دی ماه ۹۳	۱ نمره
۳	وضعیت نسبی خط و صفحه در فضا را بنویسید .(سه حالت)	دی ماه ۹۳	۰/۷۵نمره
۴	عبارت های زیر را با کلمات مناسب پر کنید : الف)در هر صفحه حد اقل .... نقطه وجود دارد که بر یک خط قرار ندارند . ب) از هردو نقطهٔ متمایز در فضا .... صفحه می گذرد . ج) اگردوخط متقاطع از صفحه ای با دوخط متقاطع از صفحهٔ دیگری دوبه دوموازی باشند،آن دوصفحه .... هستند. د) اگر دو صفحهٔ P و P' بر هم عمود باشند ، هر خط عمود بر صفحهٔ P با صفحهٔ P' .... است .	دی ماه ۹۴	۱ نمره
۵	اگر سه خط L_1، L_2، L_3 دو به دو متقاطع باشند ،ثابت کنید این سه خط در یک صفحه قرار دارند و یا همرسند .	دی ماه ۹۴	۱/۲۵نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶	جاهای خالی را بطور مناسب پر کنید. الف) اگر قسمتی از یک شکل باکل شکل متشابه باشد ، آن شکل .... نامیده می شود . ب) از هر نقطه مانند Aدرفضا............ صفحه می گذرد که بر خطی مانند L عمود باشد. پ) از هردو نقطه ی متمایز در فضا .... صفحه می گذرد. ت) حد اقل .... نقطه در فضا وجود دارد که در یک صفحه قرار ندارد.	خرداد ۹۲	۱ نمره
۷	جاهای خالی را بطور مناسب پرکنید : الف) حداقل .... نقطه در فضا وجود داردکه بر یک صفحه قرارندارند. ب) از هر دو نقطه ی متمایز در فضا .... صفحه می گذرد. پ) اگر دو صفحه بر هم عمود باشند هر خط عمود بر یکی ،با دیگری .... است. ت) از دو خط متمایز موازی .... صفحه می گذرد.	شهریور ۹۲	۱ نمره
۸	درستی و یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید : الف) دو خط در فضا که یکدیگر را قطع نکنند لزوماً موازی هستند. ب) در هر مکعب مستطیل هریال با یک و تنها یک وجه آن موازی است. پ) عکس قضیه ی تالس در فضا برقرار نیست . ت) اگر خطی بر صفحه ای عمود باشد ، بر هر خط از آن صفحه نیز ، عمود است.	دی ماه ۹۱	۱/۲۵ نمره
۹	واژه های زیر را تعریف کنید : الف) نگاشت ب) دو خط متنافر	شهریور ۹۴	۱ نمره
۱۰	درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید . الف) اگر چند صفحه در فضا روی دو خط، پاره خطهای متناظر متناسب ایجاد کرده باشند، لزوماً آن صفحه‌ها موازی هستند. ب) اگر خطی بر یکی از دو صفحهٔ موازی عمود باشد، بر دیگری هم عمود است . ج) اگر سه خط در فضا دو به دو متقاطع باشند، لزوماً همرسند . د) از هر نقطهٔ خارج یک خط در فضا ، یک و تنها یک خط به موازات آن خط می گذرد . ه) اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد ، بر دیگری هم عمود است .	شهریور ۹۴	۱/۲۵ نمره
۱۱	جاهای خالی را به طور مناسب پرکنید. الف) در تبدیل انتقال $T(x\ ,\ y)=(x-۳\ ,y+۲)$ بردار انتقال برابر با ...... است. ب) در هر صفحه حد اقل ...... نقطه وجود دارد که بر یک خط قرار ندارند. ج) اگر دو صفحه متمایز یک نقطه مشترک داشته باشند ، آنگاه در یک ...... مشترک خواهند بود.	دی ماه ۹۲	۱ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲	درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید. الف) هر زاویه ی خارجی یک چند ضلعی ، از هر زاویه ی داخلی آن بزرگتر است . ب)تبدیل بازتاب جهت شکل را حفظ نمی کند. پ)اگر دو خط متقاطع باشندتحت یک بازتاب نیمساز زاویه ی تشکیل شده بین خط و تصویرش محور تقارن است. ت)اگردو صفحه ی P و 'P برهم عمود باشند،هر خط عمود بر صفحه ی P بر صفحه ی 'P نیزعمود است.	خرداد ماه ۹۱	۱نمره
۱۳	اگر سه خط L_1 ، L_2 و L_3 دو به دو متقاطع باشند ،ثابت کنیداین سه خط در یک صفحه قرار دارند و یا همرسند .	خرداد ۹۱	۱/۲۵ نمره
۱۴	الف)دوخط متنافر را تعریف کنید. ب) نشان دهید اگر خطی بر صفحه ای عمود باشد ،بر هر خط از آن صفحه نیز،عمود است.	شهریور ۹۲	۱ نمره
۱۵	جاهای خالی را بطور مناسب پرکنید : الف)در هر صفحه حداقل .... نقطه وجود داردکه بر یک خط قرارندارند. ب)دو خط عمود بریک صفحه با هم .... هستند. پ)سه خط دو به دو متقاطع که در یک صفحه قرار ندارند لزوما" با هم .... هستند. ت)در یک مکعب مستطیل هر دو وجه مجاور آن .... هستند.	خرداد ۹۲	۱ نمره
۱۶	عبارات زیر را با کلمات مناسب پر کنید : الف) صفحه ای را که در وسط یک پاره خط برآن عمود باشد، صفحه ی .... آن پاره خط، می نامیم . ب) اگر دو صفحه متمایز یک نقطه مشترک داشته باشند ، آنگاه در یک .... ، مشترک خواهند بود . پ) اگر L و 'L دو خط متنافر باشند ، یک و تنها یک .... شامل L و جود دارد که با 'L موازی باشد . ت) اگر دو صفحه ی P و 'P بر هم عمود باشند ، هر خط عمود بر صفحه ی P با صفحه ی 'P .... است .	خرداد ۹۳	۱نمره
۱۷	از نقطه ی A خارج از خط L ، یک صفحه عمود بر L بگذرانید . ثابت کنید این صفحه یکتا است .	خرداد ۹۳	۱/۵ نمره
۱۸	عبارات زیر را با کلمات مناسب پر کنید : الف) کمان در خور زاویهٔ 90° روبه رو به یک پاره خط مانند AB ، دایره ای .... است. ب) تبدیل نگاشتی .... از صفحه به روی خودش است . ج) حداقل .... نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه قرار ندارند. د) محل تقاطع دو صفحه .... آن دو صفحه نامیده می شود .	خرداد ۹۴	۱ نمره

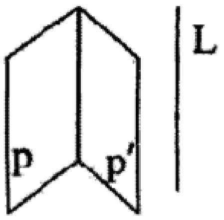
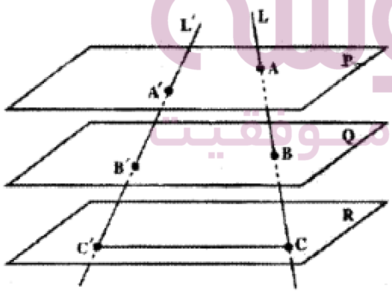
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

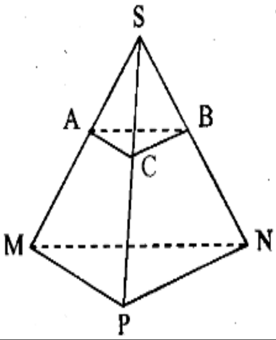
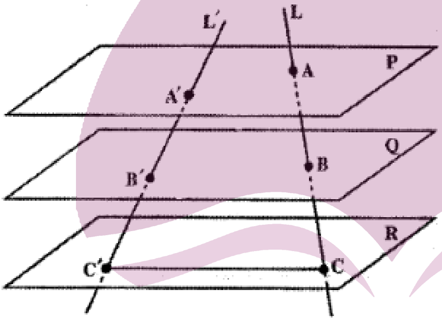
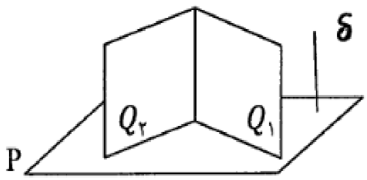
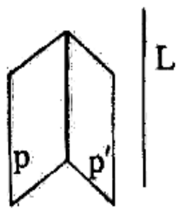
۱۹	درستی و یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید : الف) هر صفحه، با یک نقطه از آن ، و یک خط عمود بر آن ، مشخص می شود . ب) در هر مکعب مستطیل هریال با یک و تنها یک وجه آن موازی است. ج) اگر P و Q دو صفحهٔ عمود بر هم باشند ، هر کدام شامل خطی است که بر دیگری عمود است .	خرداد ۹۴	۰/۷۵ نمره
۲۰	جاهای خالی را به طور مناسب پرکنید. الف) از هر نقطه مانند A در فضا .... خط می گذرد که با صفحه ای مانند P موازی باشد . ب)اگر دو خط غیر موازی در دو صفحه ی متمایزو موازی قرارداشته باشند آنگاه با هم............ هستند. پ) صفحه ای که در وسط یک پاره خط برآن عمود باشد، صفحه ی .... آن پاره خط، می نامیم .	دی ماه ۹۰۰	۰/۷۵ نمره
۲۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید. الف)دو خط در فضا که یکدیگر را قطع نکنند لزوما" موازی هستند. ب) اگر خطی بر صفحه ای عمود باشد ،بر هر خط از آن صفحه نیز،عمود است. ج) اگر خطی بر یکی از دو صفحه ی موازی عمودباشد،بر دیگری هم عمود است. د)اگر سه خط در فضا دو به دو متقاطع باشند لزوما"همرسند. ه)از هر نقطه خارج یک خط در فضا ،یک و تنها یک خط به موازات آن خط می گذرد.	شهریور ۹۳	۱ نمره
۲۲	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. الف)اگرچند صفحه در فضا روی دو پاره خط ، پاره خط های متناظرمتناسب ایجاد کرده باشند ،لزوما" آن صفحه ها موازی نیستند. ب)اگر L و L' دوخط متنافر باشند،هیچ صفحه ای شامل L وجود ندارد که با L' موازی باشد. پ)دو صفحه ی عمود بر یک خط ، بر هم عمودند. ت)اگر خط L با یکی از خط های صفحه ی P موازی باشد،آنگاه ، خط L با صفحه ی P موازی است.	خرداد ۹۳	۱ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

خط ها و صفحات موازی

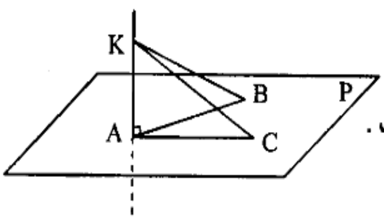
۱	قضیه :ثابت کنید اگر خط L با یکی از خط های صفحه ی P موازی باشد ، آنگاه، خط L با صفحه ی P موازی است .	خرداد ۹۳	۱/۵ نمره
۲	الف) اگر چند صفحه در فضا روی دو خط، پاره خطهای متناظر متناسب ایجاد کرده باشند، آیا لزوماً آن صفحه ها موازی هستند؟ ب) برای رد حدس کلی زیر با استفاده ازرسم شکل و توضیح آن ، یک مثال نقض ارائه کنید . در فضا، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند لزوماً دیگری را نیز قطع می کند .	خرداد ۹۳	۱ نمره

۳	قضیه: ثابت کنید اگر خط L با صفحهٔ P موازی باشد ، هر صفحه که ازL بگذرد و با P متقاطع باشد،P را در یک خط موازی L قطع می کند.	خرداد ۹۲	۱/۲۵ نمره
۴	از نقطهٔ A خارج صفحهٔ P ، خطی موازی P رسم کنید . (مراحل رسم را توضیح دهید)	دی ماه ۹۲	۱ نمره
۵	ثابت کنید اگر خطی با دو صفحه ی متقاطع ، موازی باشد . آنگاه ، با فصل مشترک آن ها موازی است . 	شهریور ۹۳	۱/۲۵ نمره
۶	ثابت کنید اگر خط L برصفحه ی P عمود باشد ،آنگاه هر خطی که بر خط L عمود باشد با صفحه ی P موازی است .	دی ماه ۹۰	۱/۲۵ نمره
۷		خرداد ۹۳	۱/۵ نمره
۸	ثابت کنید اگر صفحه ای با یکی ازدوخط موازی ،موازی باشد با دیگری هم موازی است.	دی ماه ۹۱	۱/۲۵
۹	قضیه(تالس در فضا):ثابت کنیداگر P ، Q وRسه صفحه موازی باشند و دوخط L و'Lاین صفحه ها را به ترتیب درنقطه های B،A و C و 'B'،A و 'C قطع کنند،آنگاه:  $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$	دی ماه ۹۲	۱/۷۵ نمره
۱۰	نشان دهید اگرخط L بر صفحه یP عمود باشد ، آنگاه هر خط که بر خط L عمود باشد با صفحه ی P موازی است .	دی ماه ۹۲	۱/۲۵ نمره
۱۱	ابتدا از نقطه A خارج صفحه P، خطی موازی Pرسم کنید. (روش رسم را توضیح دهید) سپس مشخص کنید چند خط می توان از یک نقطه ی مفروض موازی یک صفحه ی مفروض گذراند.	دی ماه ۹۲	۱

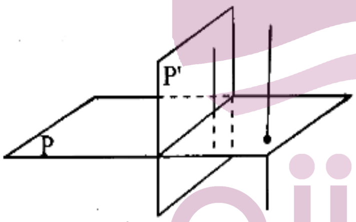
ردیف	سوال	تاریخ	نمره
۱۲	قضیه:ثابت کنید اگر خط L با صفحه ی P موازی باشد ،هر صفحه که از L بگذرد و با P متقاطع باشد،P را در یک خط موازی L قطع می کند.	خرداد ۹۴	۱/۵ نمره
۱۳	ثابت کنید در یک هرم ، وسط یال های آن ، در یک صفحه موازی قاعده قرار دارند. 	شهریور ماه ۹۲	۱/۲۵ نمره
۱۴	ثابت کنید ،اگردو صفحه با صفحهٔ سومی موازی باشند ، خودشان با هم موازیند .	دی ۹۱	۱ نمره
۱۵	قضیه(تالس در فضا):اگر P ، Q وRسه صفحه موازی باشند و دوخط L وL' این صفحه ها را به ترتیب درنقطه های A،B و C و A'، B' و C' قطع کنند،آنگاه: $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$. 	دی ماه ۹۲	۱/۷۵ نمره
۱۶	اگر دو صفحه متقاطع Q_1 و Q_2 بر صفحه Pعمود باشند،ثابت کنید فصل مشترک دو صفحه Q_1 و Q_2 بر صفحه Pعمود است. (راهنمایی:یک خط δ عمود برصفحه Pدر نظر بگیرید.وضعیت خط δ نسبت به دوصفحه Q_1 و Q_2 چگونه است) 	شهریور ۹۴	۱ نمره
۱۷	ثابت کنید اگر خطی با دو صفحه ی متقاطع ،موازی باشد ،آنگاه با فصل مشترک آن ها موازی است. 	شهریور ۹۳۰	۱/۲۵ نمره

۱۸	برای رد حدس های کلی زیر با استفاده ازرسم شکل و توضیح آن یک مثال نقض ارائه کنید. الف) در فضا، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند لزوما" دیگری را نیز قطع می کند. ب)اگر دو خط در دو صفحه ی موازی قرار داشته باشند لزوما" این دو خط موازی هستند.	شهریور ۹۱	۱/۵ نمره
۱۹	از نقطه ی A خارج از صفحه یP ، یک صفحه موازی با صفحه ی P بگذرانید . (روش ترسیم را توضیح دهید)	شهریور ۹۳	۱ نمره
۲۰	ثابت کنید خطی که با یکی از دو صفحه ی موازی ، موازی است با دیگری هم موازی است .	شهریور ۹۳	۰/۷۵ نمره
۲۱	قضیه: ثابت کنید اگر خط L با یکی ازخط های صفحهٔ P موازی باشد ، آنگاه ، خط L با صفحهٔ P موازی است .	خرداد ۹۳	۱/۵ نمره
۲۲	قضیه: ثابت کنید اگر خط L با یکی از خطهای صفحه P موازی باشد ، آنگاه، خط L با صفحه P موازی است.	خرداد ۹۳	۱/۵ نمره
۲۳	اگر O نقطه ای خارج از صفحه ای مانندP باشد ، ثابت کنید کلیه خطهای گذرنده از O که با P موازی هستند دریک صفحه موازی P قرار دارند.	خرداد ۹۰	۱/۲۵ نمره
۲۴	ثابت کنید دو صفحه P و'P موازی هستند اگر و تنها اگرهر خط واقع بریکی از این صفحه ها ،با صفحه ی دیگر موازی باشد.	خرداد ۹۱	۱ نمره
۲۵	ثابت کنید که اگر دو صفحه موازی باشند ، هر خط واقع بر یکی از این صفحه ها ، با صفحه دیگر موازی است . آیا عکس مطلب نیز درست است ؟ یعنی اگر هر خط از صفحه مفروضی ، با صفحه مفروض دیگر موازی باشد ، آیا آن دو صفحه موازیند ؟	خرداد ۹۲	۱/۲۵ نمره

خط ها و صفحه های عمود برهم

۱	فرض کنید A ، B و C سه نقطه از صفحهٔ P باشند که بر یک خط قرار ندارند و AB = AC . اگر K نقطه ای خارج از صفحهٔ P باشد که KB = KC و خط KA بر خط AB عمود باشد ، ثابت کنید خط KA برصفحهٔ P عمود است . 	خرداد ۹۴	۱ نمره

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲	روش رسم هریک از موارد زیر را توضیح دهید. الف) از نقطه ی A روی خط L ، صفحه ای بر خط L عمود کنید. ب) از نقطه ی A خطی رسم کنید که بر صفحه ی P عمود باشد.	دی ماه ۹۰	۲ نمره
۳	ثابت کنید اگر L و 'L دوخط متنافرباشند،ازهرنقطه ی A یک وتنهایک خط می گذردکه برL و 'L عموداست.	دی ماه ۹۴	۱/۲۵ نمره
۴	**ثابت کنیداگر خطی بر یکی از دو صفحه ی موازی عمود باشد ، بر دیگری هم عمود است.**	شهریور ۹۰	۱/۵ نمره
۵	**اگر خط L بر صفحه ی P عمود نباشد ، صفحه ای از خط L بگذرانید که بر P عمود باشد.**	شهریور ۹۲	۰/۵ نمره
۶	**از نقطهٔ A روی خط L ، صفحه ای بر خط L عمود کنید.(روش رسم را توضیح دهید)**	شهریور ۹۳	۱ نمره
۷	اگر دو صفحهٔ P و 'P بر هم عمود باشند ، ثابت کنید هر خط عمود بر صفحهٔ P با صفحهٔ 'P موازی است .  	شهریور ۹۴	۰/۷۵ نمره
۸	از نقطه ی A خارج از خط L ، یک صفحه عمود بر L بگذرانید . ثابت کنید این صفحه یکتا است .	خرداد ۹۳	۱/۵ نمره
۹	از نقطه ی A خطی رسم کنید که بر صفحه ی P عمود باشد.(روش رسم را توضیح دهید)	خرداد ۹۲	۱نمره
۱۰	ثابت کنید اگر L و L' دو خط متنافر باشند ، از هر نقطه A یک و تنها یک خط می گذرد که بر L و L' عمود است .	دی ۹۴	۱/۲۵ نمره

فصل اول هندسه ۲

استدلال استقرایی

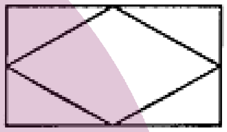
۱ — خرداد ۹۳

رسم شکل (۰/۲۵)

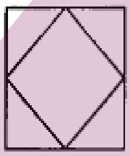
تعداد ضلع ها	۳	۴	۵	....	n
مجموع زاویه های داخلی	۱۸۰	۳۶۰	۳×۱۸۰=۵۴۰ (۰/۲۵)	....	$۱۸۰(n-۲)$ (۰/۲۵)

۲ — شهریور ۹۴

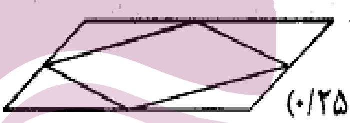
الف) لوزی (۰/۲۵)



ب) مربع(۰/۲۵)



ج) متوازی الاضلاع(۰/۲۵)



ص۵

۳ — خرداد ۹۲

الف)

رسم شکل (۰/۵)

تعداد ضلع ها	۳	۴	۵	۶	....	n
تعداد قطرهای رسم شده از یک راس	۰	۱	۲	۳ (۰/۲۵)	....	$n-۳$ (۰/۲۵)

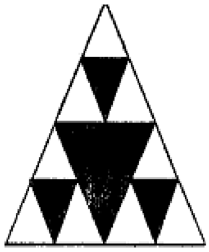
ب) (۰/۲۵) $\frac{n(n-۳)}{۲}$ = تعدادقطرهای n ضلعی محدب

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴

مرحله	۰	۱	۲	...	n
تعدادمثلث ها	۱	۳	۹	...	3^n

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)



رسم شکل (۰/۲۵)

دی ۹۲

۵

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	....	n
تعداد مثلث های کوچک	۱	۴	۹	۱۶	....	n^2

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

خرداد ۹۱

استدلال استنتاجی

۱

فرض: $\hat{A} > \hat{B}$ حکم: $BC > AC$

برهان خلف : فرض می کنیم $AC \geq BC$ (۰/۲۵) دو حالت زیر را در نظر می گیریم :

الف) $AC = BC$ در این حالت مثلث متساوی الساقین است . پس $\hat{A} = \hat{B}$ که این خلاف فرض است . (۰/۵)

ب) $AC > BC$ در این حالت با توجه به قضیه لولا $\hat{A} < \hat{B}$ که این نیز خلاف فرض است. (۰/۵)

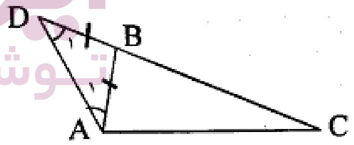
پس فرض خلف باطل است و حکم درست می باشد.

خرداد ۹۰

۲

برهان : ضلع BC را از راس B امتداد می دهیم وبه اندازه ی AB روی آن جدا می کنیم تا نقطه ی D به دست آید .سپس D را به A وصل می کنیم. (۰/۲۵) بنا بر این در مثلث ABD داریم:

$BD = AB \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_1$ (۰/۲۵)



همچنین درمثلث ADC داریم:

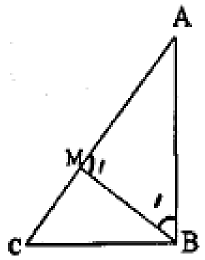
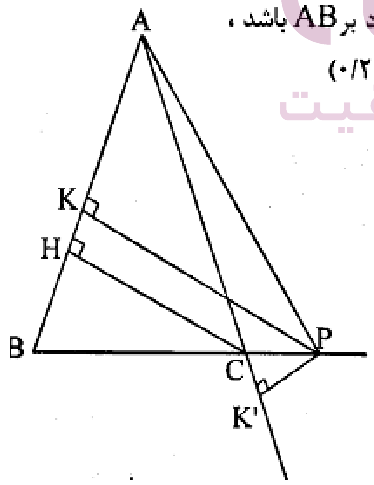
$DC = DB + BC \Rightarrow DC = AB + BC$ (۰/۲۵)

با توجه به شکل $D\hat{A}C > \hat{A}_1$ (۰/۲۵) بنابر این $D\hat{A}C > \hat{D}_1$ (۰/۲۵) در نتیجه $DC > AC$ (۰/۲۵)

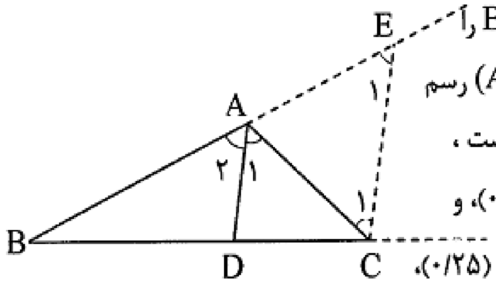
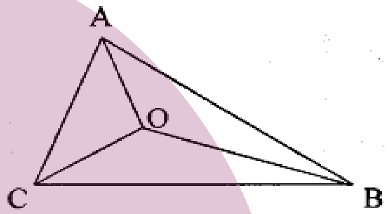
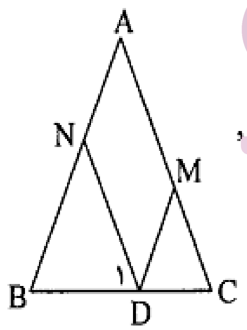
بنابراین $AB + BC > AC$

شهریور ۹۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

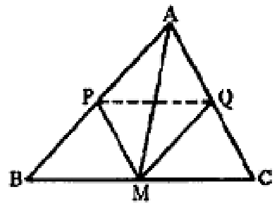
۳	فرض کنیم M نقطه ای دلخواه درون مثلث متساوی الاضلاع $\overset{\triangle}{ABC}$ باشد از M به رأس های A ، B و C وصل می کنیم . (۰/۲۵)اگر h ارتفاع مثلث ABC باشد داریم . $S_{ABC}=S_{AMC}+S_{AMB}+S_{BMC}$ (۰/۲۵) پس : (۰/۲۵) $\frac{1}{2}h\times BC=\frac{1}{2}MH\times BC+\frac{1}{2}MH'\times AC+\frac{1}{2}MH''\times AB$ چون که $AB=AC=BC$ پس $h=MH+MH'+MH''$ (۰/۲۵) بنابراین مجموع فواصل نقطه ی M از اضلاع ، مقدار ثابت h می باشد	خرداد ۹۰
۴	فرض: $AC>AB$ و حکم: $\hat{B}>\hat{C}$ برهان : چون طبق فرض $AC>AB$ بنابراین پاره خط AM را به اندازه ی AB روی AC جدا می کنیم (۰/۲۵) وازنقطه ی M به B وصل می کنیم. چون AB=AM پس مثلث ABM متساوی الساقین است، در نتیجه: $\hat{B}_1=\hat{M}_1$ (۰/۲۵) (۱) ازطرفی چون زاویه ی M_1 یک زاویه ی خارجی مثلث MBC است در نتیجه از هر یک از زاویه های داخلی غیر مجاورش بزرگ تر خواهد بود. بنا براین $\hat{M}_1>\hat{C}$ (۰/۲۵) (۲) باتوجه به دو رابطه ی (۱)و(۲)⇐ $\hat{B}_1>\hat{C}$ (۰/۲۵) (۳) ازطرفی نقطه ی M بین دو نقطه ی A و C واقع است، بنابراین BM نیم خطی داخل زاویه ی B است و در نتیجه زاویه ی B_1 جزیی از زاویه ی B است، یعنی $\hat{B}>\hat{B}_1$ (۴) از مقایسه ی(۳) و (۴) نتیجه می شود: $\hat{B}>\hat{C}$ (۰/۲۵) 	شهریور ۹۱
۵	فرض می کنیم در مثلث متساوی الساقین ABC ، AB = AC = a و CH ارتفاع وارد بر AB باشد ، رأسA را به P وصل کرده عمود های PK وPK' را بر دو ساق مثلث رسم می کنیم (۰/۲۵) بنابر این : $S\overset{\triangle}{ABC}=S\overset{\triangle}{ABP}-S\overset{\triangle}{ACP}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow\frac{1}{2}CH\times AB=\frac{1}{2}PK\times AB-\frac{1}{2}PK'\times AC$ (۰/۲۵) $\frac{1}{2}CH\times a=\frac{1}{2}a(PK-PK')\Rightarrow CH=PK-PK'$ (۰/۲۵) ص۲۲ 	خرداد ۹۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶	 برهان : فرض کنیم AD نیمساز داخلی زاویه A باشد ضلع های BA و BC را امتداد می دهیم و از راس C خطی به موازات نیمساز زاویه ی A (یعنیAD) رسم می کنیم تا امتدادBA را در E قطع کند.(۰/۲۵) چون AD موازی CE است ، اگر AC را به عنوان خط مورب در نظر بگیریم آنگاه : (۱) $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (۰/۲۵)، و اگر BE را به عنوان خط مورب آنها در نظر بگیریم آنگاه : (۲) $\hat{A}_2 = \hat{E}_1$ (۰/۲۵)، از طرفی طبق فرض مسأله ، AD نیمساز است در نتیجه : (۳)$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$،حال از رابطه های (۱)،(۲) و (۳) می تـوان نتیجـه گرفت : $\hat{C}_1 = \hat{E}_1$ (۰/۲۵)، پس مثلث AEC متساوی الساقین است و (۴) $AE = AC$ (۰/۲۵)، در مثلـث BEC، AD موازی EC است ، پس طبق قضیه ی تالس داریم : (۵) $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC}$ (۰/۲۵)، با توجه به رابطه ی (۴) اگر در رابطه ی (۵) به جای AE مساوی آن AC را جایگزین کنیم ، خواهیم داشت : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ (۰/۲۵) که حکم ثابت می شود .	شهریور ۹۰
۷	$\overset{\triangle}{AOB}: OA+OB > AB$ (۰/۲۵) $\overset{\triangle}{AOC}: OA+OC > AC$ (۰/۲۵) $\overset{\triangle}{BOC}: OB+OC > BC$ (۰/۲۵)  از جمع سه تا مساوی بالا داریم: $۲(OA+OB+OC) > AB+AC+BC \rightarrow OA+OB+OC > \frac{AB+AC+BC}{۲}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)	شهریور ۹۴
۸	 $ND \parallel AC , BC$ مورب $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}$ (۰/۲۵) $,\hat{B} = \hat{C}$ (طبق فرض) $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B} \Rightarrow \overset{\triangle}{BND}$ (متساوی الساقین) $\Rightarrow BN = DN$ (۰/۲۵) $ANDM$ (متوازی الاضلاع) $\Rightarrow AN = DM$ (۰/۲۵) $\Rightarrow DN + DM = AN + BN \Rightarrow DN + DM = AB$ (۰/۲۵)	خرداد ۹۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹ — دی ۹۲



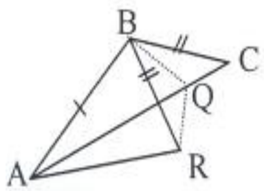
$\overset{\Delta}{AMC} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MQ} \frac{MA}{MC} = \frac{AQ}{QC}$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{MC = MB} \frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB}$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC$ (۰/۲۵)

$\overset{\Delta}{AMB} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MP} \frac{MA}{MB} = \frac{AP}{PB}$ (۰/۲۵)

۱۰ — دی ۹۱

برهان: چون $A\hat{B}C > D\hat{E}F$، ازرأس B پاره خط BR را طوری رسم می کنیم که $A\hat{B}R = D\hat{E}F$ و $BR = EF$ باشد.(۰/۲۵) اگر AR را رسم کنیم، چون $\overset{\Delta}{ABR} \cong \overset{\Delta}{DEF}$ (ض زض) بنابر این $AR = DF$ (۰/۲۵). از طرفی $BC = EF$ پس $BC = BR$ (۰/۲۵) حال نیمساززاویه $R\hat{B}C$ را رسم می کنیم تاضلع AC را در نقطه Q قطع کند. (۰/۲۵)بارسم QR چون $\overset{\Delta}{BQR} \cong \overset{\Delta}{BQC}$ (ض زض) پس $QR = QC$ (۰/۲۵).حال می توان نوشت:

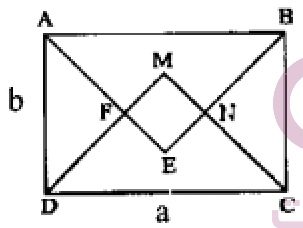


$\overset{\Delta}{AQR} \longrightarrow AQ + QR > AR$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{QR=QC} AQ + QC > DF$

$\to AC > DF$ (۰/۲۵)

۱۱ — دی ۹۰

مثلث های DMC و AFD قائم الزاویه ی متساوی الساقین هستند.داریم :

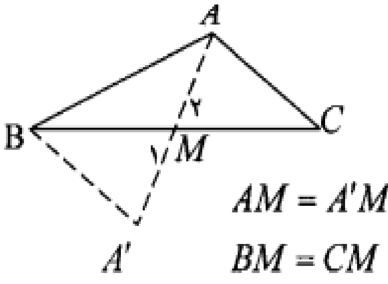
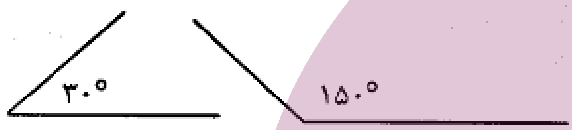
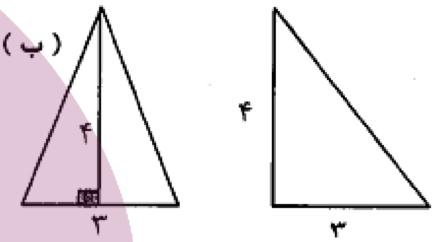


$DF^2 = \frac{b^2}{2} \Rightarrow DF = \frac{b}{\sqrt{2}}$ (۰/۲۵)

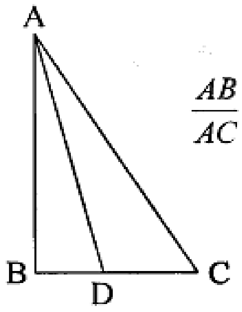
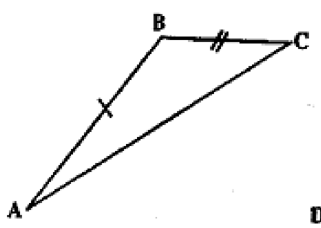
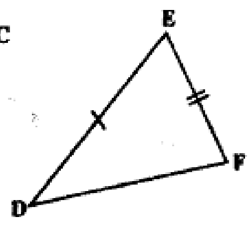
$DM^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow DM = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow FM = DM - DF = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$ (۰/۲۵)

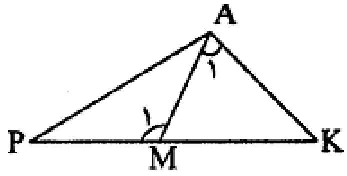
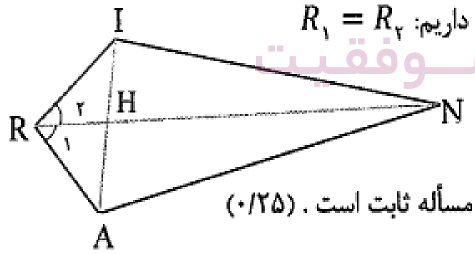
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲	میانه ی AM را از طرف M به اندازه ی AM امتداد می دهیم تا نقطه ی A' به دست آید و از A' به B وصل می کنیم (۰/۲۵)  $\left.\begin{array}{l} AM = A'M \\ BM = CM \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{AMC} \cong \overset{\Delta}{A'MB} \Rightarrow AC = BA' \quad (1) \quad (۰/۲۵)$ $\overset{\Delta}{ABA'} : \underset{(۰/۲۵)}{AA' < AB + BA'} \xrightarrow{(1)} \underset{(۰/۲۵)}{2AM < AB + AC} \Rightarrow AM < \frac{AB + AC}{2}$	دی ۹۰
	مثال نقض	
۱	(الف) (۰/۲۵)  (ب) (۰/۲۵)  	دی ۹۳
۲	الف) درست (۰/۲۵)	خرداد ۹۲
۳	الف) نادرست (۰/۲۵) ب)درست (۰/۲۵)	شهریور ۹۲
۴	الف) درست (۰/۲۵)	شهریور ۹۰
	قضیه های شرطی	
۱	الف) درست (۰/۲۵)	خرداد ۹۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

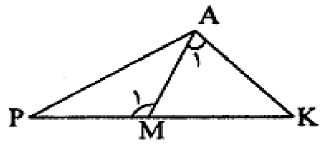
	## عکس قضیه	
۱	AD نیمساز زاویه A است بنا براین :  $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{۱۲}{۱۶}=\frac{BD}{۷-BD}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow BD=۳$ (۰/۲۵) $DC=۷-۳=۴$ (۰/۲۵)	خرداد ۹۳
۲	با توجه به قضیه ی وجود مثلث $۶x+(x+۷)+۴(x-۱)=۳۶ \Rightarrow x=۳$ (۰/۲۵) $\left.\begin{matrix} ۶x=۱۸ \\ x+۷=۱۰ \\ ۴(x-۱)=۸ \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} ۱۰+۸>۱۸ & (\text{غ}) \\ ۱۸+۸>۱۰ & (\text{ص}) \\ ۱۸+۱۰>۸ & (\text{ص}) \end{matrix}\right.$ (۰/۲۵) بنابراین این سه پاره خط نمی توانند اضلاع یک مثلث باشند.(۰/۲۵)	دی ۹۲
	## اثبات غیر مستقیم یا برهان خلف	
۱	فرض: $A>B$ حکم : $BC>AC$ **برهان خلف : فرض می کنیم حکم برقرار نباشد . بنا بر این $BC \le AC$ (۰/۲۵) حال اگر :** **الف) $BC=AC$ در این حالت مثلث متساوی الساقین است . پس $\hat{A}=\hat{B}$ که این خلاف فرض است . (۰/۲۵)** **ب) $BC<AC$ در این حالت با توجه به قضیه ثابت شده $\hat{A}<\hat{B}$ که این نیز خلاف فرض است. (۰/۲۵)** **پس فرض خلف باطل است و حکم درست می باشد. (۰/۲۵)**	خرداد۹۳
۲	فرض کنیم $AB=ED, BC=EF, AC>DF$ می خواهیم ثابت کنیم $B>E$.برهان خلف : فرض می کنیم حکم درست نباشد یعنی $\hat{B}\le\hat{E}$ (۰/۲۵)   ۱) اگر $\hat{B}=\hat{E}$ با توجه به فرض دو مثلث همنهشت می شوند. پس $AC=DF$ (۰/۲۵) ۲) اگر $\hat{B}<\hat{E}$ با توجه به فرض و قضیه لولا نتیجه می شود $AC<DF$ (۰/۲۵) درهردو حالت نتایج به دست آمده با فرض مسئله تناقض دارد.پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است .(۰/۲۵)	دی ۹۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳	 با توجه به قضیه ی لولا (۰/۲۵) $\overset{\Delta}{AMP}, \overset{\Delta}{AMK} : \left.\begin{array}{l} PM = AK \\ AM = AM \\ \hat{M}_1 > \hat{A}_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{(۰/۷۵)} AP > MK$ (زاویه ی خارجی)	خرداد ۹۱
۴	فرض کنیم $BC = B'C'$ (فرض خلف) (۰/۲۵) $\begin{cases} BC = B'C' \\ AC = A'C' \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \text{(ض ض ض)}\ \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}' \text{ (۰/۲۵)} \\ AB = A'B' \end{cases}$ طبق فرض $\hat{A} \neq \hat{A}'$ پس به تناقض رسیدیم یعنی فرض خلف باطل وحکم درست است پس $BC \neq B'C'$ (۰/۲۵)	دی ۹۱
۵	فرض: $A > B$ حکم: $BC > AC$ **برهان خلف : فرض می کنیم حکم برقرار نباشد . بنا بر این $BC \leq AC$ (۰/۲۵) حال اگر :** **الف) $BC = AC$ در این حالت مثلث متساوی الساقین است . پس $\hat{A} = \hat{B}$ که این خلاف فرض است . (۰/۲۵)** **ب) $BC < AC$ در این حالت با توجه به قضیه ثابت شده $\hat{A} < \hat{B}$ که این نیز خلاف فرض است. (۰/۲۵)** **پس فرض خلف باطل است و حکم درست می باشد. (۰/۲۵)**	خرداد ۹۳
۶	برهان خلف : فرض کنیم RN نیمساز زاویه ی ARI باشد . (۰/۲۵) بنابراین داریم: $R_1 = R_2$  در نتیجه: $\overset{\Delta}{RIN} \cong \overset{\Delta}{RAN}$ (ض ز ض) (۰/۲۵)، پس IN=AN که این با فرض مسأله تناقض دارد (۰/۲۵)، بنابراین فرض خلف باطل و حکم مسأله ثابت است . (۰/۲۵)	شهریور ۹۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷



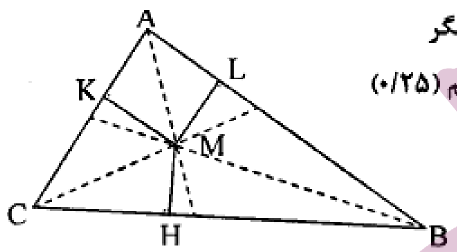
$$\overset{\Delta}{AMP},\overset{\Delta}{AMK}:\ \left.\begin{array}{l} PM = AK \\ AM = AM \\ \hat{M}_1 > \hat{A}_1 \ \text{(زاویه ی خارجی)} \end{array}\right\} \xrightarrow{(۰/۷۵)} AP > MK$$

با توجه به قضیه ی لولا (۰/۲۵)

خرداد ۹۱

مکان هندسی

۱



در مثلث ABC نیمسازهای زاویه های B و C رارسم می کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. از M برضلع های AB، AC و BC عمودمی کنیم (۰/۲۵) تا به ترتیب آنها را در نقاط K، L و H قطع نمایند.

$$\left.\begin{array}{l} \text{روی نیمساز زاویه ی B است } M \longrightarrow MH = ML \\ \text{روی نیمساز زاویه ی C است } M \longrightarrow MH = MK \end{array}\right\} (۰/۲۵) \Rightarrow ML = MK \quad (۰/۲۵)$$

بنا براین نقطه ی M روی نیمساز $\hat{A}$ نیز قرار دارد. (۰/۲۵)یعنی M نقطه ی همرسی هر سه نیمساز است.

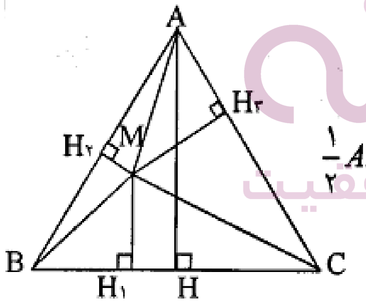
شهریور ۹۱

۲

فرض کنیم M نقطه ای دلخواه درون مثلث متساوی الاضلاع ABC باشد از M به راس های A ، B و C وصل می کنیم .

اگر AH ارتفاع مثلث ABC و MH_1 ، MH_2 و MH_3 فاصله های نقطه ی M از سه ضلع مثلث باشد.(۰/۵)

بنابراین :



$$S_{ABC} = S_{BMC} + S_{AMB} + S_{AMC} \quad (۰/۲۵)$$

$$\frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} MH_1 \times BC + \frac{۱}{۲} MH_2 \times AB + \frac{۱}{۲} MH_3 \times AC \quad (۰/۲۵)$$

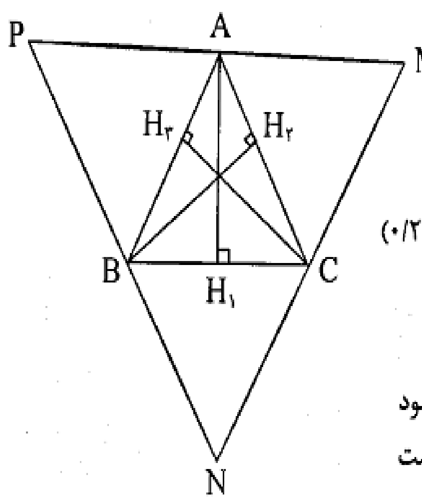
چون که $AB = AC = BC$ پس $AH = MH_1 + MH_2 + MH_3$ (۰/۲۵)

بنابراین مجموع فواصل نقطه ی M از اضلاع ، مقدار ثابت AH می باشد.

دی ۹۳

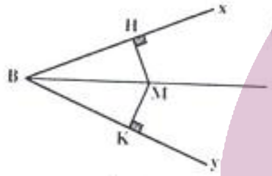
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

<table>
<tr>
<td>۳</td>
<td>
از رأس های A , B و C به ترتیب خطهایی موازی ضلعهای BC , AC و AB از مثلث ABC رسم می کنیم تا مثلث MNP حاصل شود . چهار ضلعی AMCB متوازی الاضلاع است . در نتیجه AM=BC (۱) (۰/۲۵) واز طرف دیگر چهار ضلعی ACBP نیز متوازی الاضلاع است در نتیجه AP=BC (۲) از رابطه های (۱)و(۲) نتیجه میشود PA=AM(۰/۲۵) یعنی AH_1 ازوسط PM میگذرد واز طرف دیگر چون $AH_1 \perp BC$ و BC || PM پس $AH_1 \perp PM$ (۰/۲۵)، درنتیجه AH_1 عمود منصف ضلع PM می با شد.(۰/۲۵)با همین روش ثابت میشود BH_2 عمود منصف ضلع PN وCH_3 عمود منصف ضلع MN از مثلث MNP است ومی دانیم که سه عمود منصف اضلاع هر مثلث همرسند.(۰/۲۵) در نتیجه ارتفاع های AH_1 وBH_2 وCH_3 همرسند . ص۳۷

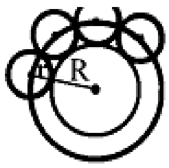


رسم شکل (۰/۲۵)
</td>
<td>خرداد۹۴</td>
</tr>
<tr>
<td>۴</td>
<td>
مرحله اول :نقطه M را روی نیمساز زاویه $X\hat{B}Y$ در نظر می گیریم از M خطهایی بر ضلع های BX و BY عمود می کنیم تا آنها را به ترتیب در H و K قطع کنند دو مثلث قائم الزاویه ی $\overset{\Delta}{BMH}$ و $\overset{\Delta}{BMK}$ به حالت تساوی وتر و یک زاویه ی تند همنهشت هستند، پس $MH = MK$ (۰/۵)

مرحله دوم : اگر نقطه ی M از دو ضلع BX و BY به فاصله ی یکسان باشد.چون دو مثلث قائم الزاویه ی $\overset{\Delta}{BMH}$ و $\overset{\Delta}{BMK}$ به حالت تساوی وتر و یک ضلع قائمه همنهشت هستند . پس $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (۰/۵) یعنی خطی که از B و M می گذرد نیمساز زاویه $X\hat{B}Y$ است .

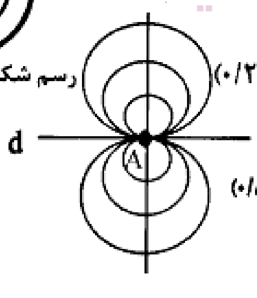


رسم شکل(۰/۲۵)
</td>
<td>دی ۹۱</td>
</tr>
<tr>
<td>۵</td>
<td>
الف)باتوجه به شکل مکان هندسي مورد نظر دایره ای به مرکز O وبه شعاع R+r است. (۰/۲۵)



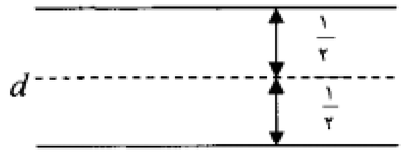
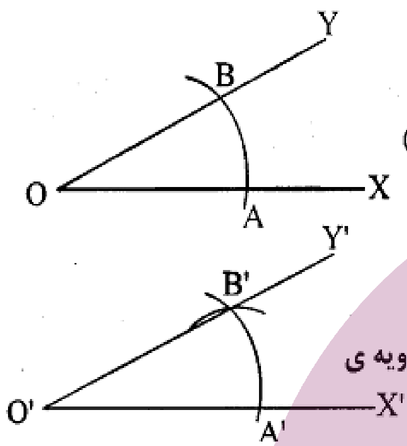
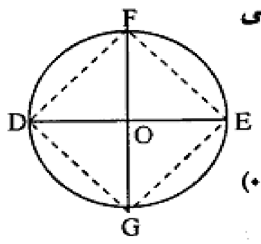
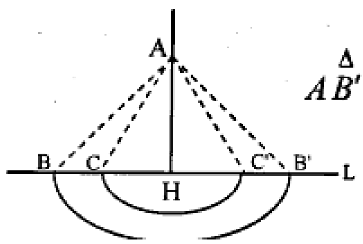
رسم شکل (الف)(۰/۵)

ب) باتوجه به شکل مکان هندسي مورد نظرخط عمود بر d درنقطه ی A است.(۰/۲۵)

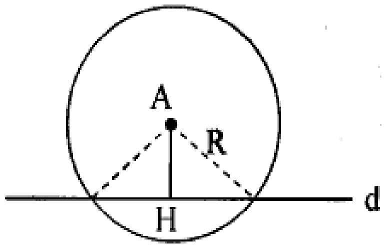
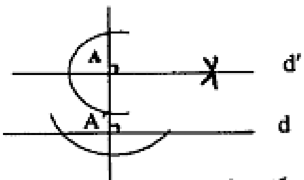
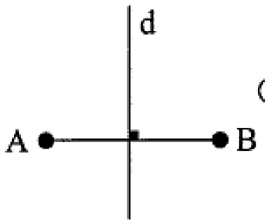
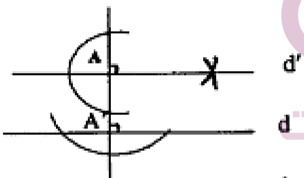


رسم شکل (ب)(۰/۵)
</td>
<td>شهریور ۹۱</td>
</tr>
</table>

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶	مکان هندسی، مجموعه ی همه ی نقطه های صفحه یا فضا است که دارای ویژگی مشترکی هستند. یعنی هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است و هر نقطه که آن ویژگی رادارد عضواین مجموعه می باشد.(۰/۵) مکان هندسی مطلوب دو خط راست به موازات خط d وبه فاصله $\frac{1}{2}$ از آن می باشد. (۰/۲۵)  (رسم شکل (۰/۵))	دی ۹۰
	ترسیم با کمک خط کش وپرگار	
۱	زاویه XOY داده شده است . به مرکز O وشعاع دلخواه کمانی می زنیم تا OX و OY رادر نقاط A و B قطع کند.نیم خط O'X' را رسم وبه همان شعاع وبه مرکز O' کمان دوم را می زنیم تا O'X' را در A' قطع کند (۰/۲۵) سپس به مرکز A' وشعاعی به طول AB کمان دیگری می زنیم تا کمان دوم را در نقطه ی B' قطع کند O' را به B' وصل کرده امتداد میدهیم تا نیم خط O'Y' حاصل شود. زاویه ی X'O'Y' جواب مسآله است(۰/۲۵) زیرا دو مثلث OAB و O'A'B' بنا به تساوی سه ضلع همنهشتند پس دو زاویه ی فوق برابرند. (۰/۲۵)  رسم شکل (۰/۲۵)	خرداد ۹۳
۲	ابتدا پاره خط DE و عمود منصف آن را رسم می کنیم (۰/۲۵) از نقطه O وسط DE کمانی به مرکز O و به شعاع R=OD می زنیم(۰/۲۵) این کمان عمود منصف را در دو نقطه ی F و G قطع می کند . چهار ضلعیDFEG مربع است.(۰/۲۵)  رسم شکل (۰/۲۵)	شهریور ۹۳
۳	روش رسم : خط L را رسم می کنیم. روی نقطه دلخواه H از خط L عمود $AH=h_a$ را رسم می کنیم (۰/۲۵) به مرکز A و به شعاع AB=c دایره ای رسم می کنیم تا خط L را در نقاط B و B' قطع کند . (۰/۲۵) سپس به مرکز A و به شعاع AC=b دایره دیگری رسم می کنیم تا خط L را در نقاط C و C' قطع کند . (۰/۲۵) مثلث ABC مثلث مطلوب است . تذکر : (در صورتی که یکی از مثلث های $\overset{\Delta}{ABC}$ ، $\overset{\Delta}{AB'C}$ ، $\overset{\Delta}{ABC'}$ یا $\overset{\Delta}{AB'C'}$ به عنوان جواب بیان شود. کافیست)  رسم شکل (۰/۲۵)	دی ۹۳

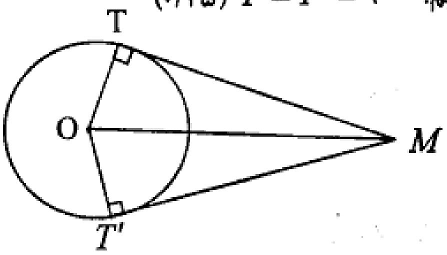
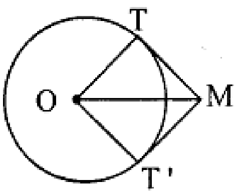
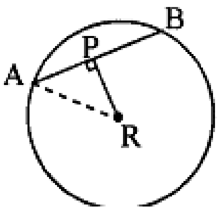
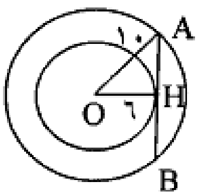
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

شهریور ۹۴	دایره ای به شعاع R وبه مرکز A را رسم می کنیم (۰/۲۵).محل برخورداین دایره با خط d جواب مسأله است. (۰/۲۵) فرض می کنیم عمود AH فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d باشد . $AH > R$ مسأله جواب ندارد (۰/۲۵) $AH = R$ مسأله یک جواب دارد.(۰/۲۵) $AH < R$ مسأله دو جواب دارد.(۰/۲۵) ص ۴۲ 	۴
خرداد ۹۲	مساله راحل شده فرض می کنیم . می دانیم که دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند . ابتدا از نقطه ی A بر خط d عمودی رسم می کنیم(۰/۲۵) تا آن را در نقطه ی A' قطع کند. سپس از نقطه ی A خطی عمود بر AA' رسم می کنیم(۰/۲۵) و آن را d' می نامیم . خط d' همان خط مطلوب است.  شکل (۰/۲۵)	۵
شهریور ۹۰	ابتدا دو نقطه یA و B را به هم وصل کرده ، سپس عمود منصف آن را رسم می کنیم . (۰/۲۵) محل تقاطع پاره خط AB با خط d جواب مسا له است. ۱- اگر عمود منصف پاره خط AB بر خط d منطبق شود مسأله بیشمار جواب دارد . (۰/۲۵) ۲-گر عمود منصف پاره خط AB با خط d متقاطع باشد ، محل تقاطع آنها جواب مسأله است و مسأله یک جواب دارد . (۰/۲۵) ۳-اگر عمود منصف پاره خط AB با خط d موازی و غیر منطبق بر d باشد ، مسأله جواب ندارد . (۰/۲۵) 	۶
دی ۹۰	مساله راحل شده فرض می کنیم . می دانیم که دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند . ابتدا از نقطه ی A بر خط d عمودی رسم می کنیم(۰/۲۵) تا آن را در نقطه ی A' قطع کند. سپس از نقطه ی A خطی عمود بر AA' رسم می کنیم(۰/۲۵) و آن را d' می نامیم . خط d' همان خط مطلوب است.  شکل (۰/۲۵)	۷

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

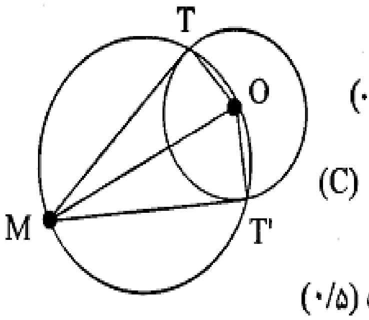
فصل دوم هندسه ۲

زاویه مرکزی ،وتر ومماس

۱	چون شعاع در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است نتیجه می گیریم: $\hat{T}=\hat{T}'=۹۰^\circ$ (۰/۲۵) $\begin{cases}\hat{T}=\hat{T}'=۹۰^\circ\\ OT=OT' \quad (۰/۵)\\ OM=OM\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{OMT}\cong\overset{\Delta}{OMT'}$ $\Rightarrow MT=MT'$ (۰/۲۵) 	شهریور ۹۳
۲	الف) $\overset{\Delta}{OTM}: OT\perp MT \Rightarrow O\hat{T}M=۹۰^\circ$ (۰/۲۵) $\Rightarrow MT=\sqrt{OM^۲-OT^۲}=\sqrt{۵۰-۲۵}=۵$ (۰/۲۵) ب) $\Rightarrow MT=MT'=۵$ (۰/۲۵) $\left.\begin{matrix}MT=MT'=OT=OT'=۵\\ T=۹۰^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow OTMT'$ مربع است (۰/۲۵) رسم شکل (۰/۲۵)	خرداد ۹۳
۳	$\overset{\Delta}{APR}: \hat{P}=۹۰^\circ \Rightarrow AR^۲=AP^۲+PR^۲ \Rightarrow ۱۰۰=۳۶+AP^۲$ $\Rightarrow AP=۸$ (۰/۵) چون شعاع عمود بروتر، وتر را نصف می کند (۰/۲۵) پس AB= ۱۶ (۰/۲۵) 	دی ۹۳
۴	AB وتری از دایره ی بزرگتر بر دایره ی کوچکترمماس است . بنابراین شعاع OH برAB عمود است. بنابراین پس AH=HB(۰/۲۵) $AH^۲=OA^۲-OH^۲ \to AH^۲=۱۰^۲-۶^۲$ (۰/۲۵) $\to AH^۲=۶۴ \to AH=۸ \xrightarrow{(۰/۲۵)} AB=۱۶$ (۰/۲۵) 	شهریور ۹۱

ایران توشته
تــوشــه ای بــرای مــوفقـیـت

۵



نقطهٔ M را به O مرکز دایرهٔ (C) وصل کرده ، دایرهٔ به قطر OM را رسم می کنیم.

تادایرهٔ(C) را درنقاط T و T' قطع کند . زاویه های $O\hat{T}M = O\hat{T'}M = 90^\circ$ (۰/۲۵)

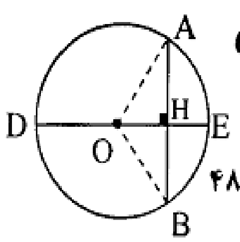
زیرا زاویه های محاطی و روبه رو به قطر هستند(۰/۲۵) پس در نتیجه

MT در نقطهٔ T و MT' در نقطهٔ T' بر دایرهٔ (C) مماسند . (۰/۲۵)

رسم شکل (۰/۵)

خرداد ۹۲

۶



برهان: از مرکز دایره به نقاط A و B وصل می کنیم . (۰/۲۵)در مثلث متساوی الساقین $\overset{\triangle}{OAB}$

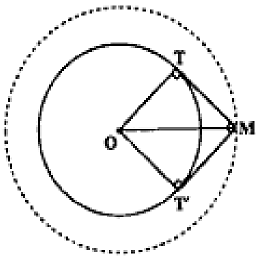
می دانیم ارتفاع OH نیمساز رأس $\hat{O}$ (۰/۲۵)و میانه ضلع AB نیز است. (۰/۲۵) بنابراین :

$AH = HB$ و $A\hat{O}E = B\hat{O}E$ بنابراین : $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BE}$ (۰/۲۵) .

ص ۴۸

شهریور ۹۴

۷



فرض می کنیم مساله حل شده باشد و M یکی از نقطه هایی باشد که از آن ، دو مماس

عمود برهم MT و MT' بر دایره ی $C(O,R)$ را ر سم شده است.از O به نقطه های

تماس T و T' و صل می کنیم. چهار ضلعی $OTMT'$ مر بع است.(۰/۲۵)

زیرا چهار ر زاویه ی قائمه دارد و دو ضلع مجاورش نیز برابرند .

$(OT = OT' = R)$(۰/۲۵)دراین مربع $OM = R\sqrt{2}$ (۰/۲۵) مقدار ثابتی است.

مکان هندسی نقطه ی M دایره ای به مرکز O و شعاع $R\sqrt{2}$ است. (۰/۲۵)

رسم شکل (۰/۲۵)

خرداد ۹۲

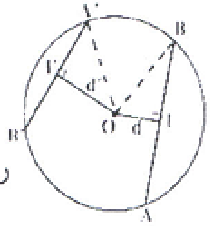
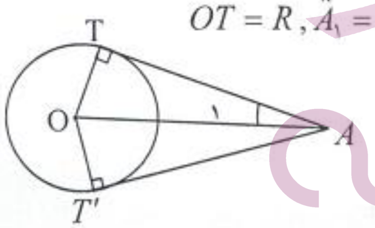
۸

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}OQ = OR\\ GQ = GP\end{cases}\\ \\ \begin{cases}YS = YP\\ LS = LR\end{cases}\end{array}\right\}\text{(۰/۵)} \Rightarrow OQ + GQ + YS + LS = OR + GP + YP + LR\ \text{(۰/۵)}$$

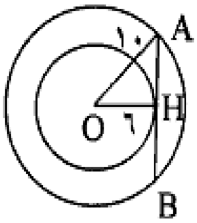
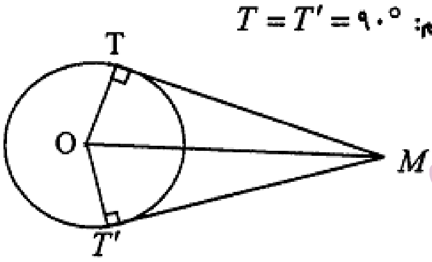
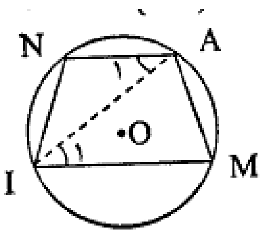
$$\Rightarrow OG + YL = OL + GY\ \text{(۰/۲۵)}$$

خرداد ۹۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹	برهان: از مرکز دایره عمودهای OH و OH' را به وترهای $AB=l$ و $A'B'=l'$ وارد می کنیم . می دانیم شعاع عمود بریک وتر آن رانصف می کند ($OH=d$ و $OH'=d'$) $\overset{\Delta}{OHB}: OB^2 = OH^2 + HB^2 \quad \Rightarrow R^2 = d^2 + \frac{l^2}{4}$ (۰/۲۵) $\overset{\Delta}{OH'A'}: OA'^2 = OH'^2 + H'A'^2 \quad \Rightarrow R^2 = d'^2 + \frac{l'^2}{4}$  رسم شکل (۰/۲۵) $l > l' \Leftrightarrow l^2 > l'^2$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow R^2 - \frac{l^2}{4} < R^2 - \frac{l'^2}{4}$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow d^2 < d'^2 \Leftrightarrow d < d'$ (۰/۲۵) (درصورتی که اثبات یک طرفه نوشته شده باشد (۰/۲۵)کسرشود.)	دی ۹۱
۱۰	می دانیم که طول مماس های رسم شده از نقطه ای خارج یک دایره با هم برابر است . محیط مثلث $= AB + AC + BC = AB + AC + \underbrace{BD + DC}_{(0/25)} = AB + AC + BE + CF$ (۰/۵) $= \underbrace{AE + AF}_{(0/25)} = 2AE$ بنابراین محیط مثلث ABC مستقل از نقطه ی D بوده و مقدار آن ثابت است .	دی ۹۲
۱۱	تکراری همانند سوال ۹	دی ۹۱
۱۲	$OT = R, \hat{A}_1 = 30$ (۰/۲۵) $\Rightarrow OT = \frac{OA}{2}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow OA = 2R \Rightarrow OA = 10$ (۰/۲۵) 	دی ۹۱
۱۳	$2x = y$ $2(3x+10) + 4x = 360^\circ$ (۰/۵) $\Rightarrow 10x = 340 \Rightarrow x = 34^\circ$ (۰/۲۵) و $y = 68^\circ$ (۰/۲۵)	دی ۹۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴	AB وتری از دایره ی بزرگتر بر دایره ی کوچکترمماس است . بنابراین شعاع OH بر AB عمود است. بنابراین AH=HB(۰/۲۵) پس  $AH^۲ = OA^۲ - OH^۲ \to AH^۲ = ۱۰^۲ - ۶^۲$ (۰/۲۵) $\to AH^۲ = ۶۴ \to AH = ۸ \xrightarrow{(۰/۲۵)} AB = ۱۶$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۱
۱۵	چون شعاع در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است نتیجه می گیریم: $T = T' = ۹۰^\circ$  $\begin{cases} \hat{T} = \hat{T}' = ۹۰^\circ \\ OT = OT' \\ OM = OM \end{cases}$ (۰/۵) $\Rightarrow \overset{\Delta}{OMT} \cong \overset{\Delta}{OMT'}$ $\Rightarrow MT = MT'$ (۰/۲۵)	خرداد ۹۱
۱۶	از A به I وصل می کنیم (۰/۲۵) با توجه به رابطه ی $AM=NI$ نتیجه می گیریم $\widehat{NI}=\widehat{AM}$ (۰/۲۵)  داریم: $\begin{cases} \hat{A}_۱ = \frac{\widehat{NI}}{۲} \\ \hat{I}_۱ = \frac{\widehat{AM}}{۲} \end{cases}$ زاویه محاطی(۰/۵) $\longrightarrow \hat{A}_۱ = \hat{I}_۱$ (۰/۲۵) طبق عکس قضیه خطوط موازی و خط مورب $AM \parallel NI$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۲
۱۷	تکراری همانند سوال۶	شهریور ۹۴
۱۸	الف) متداخل (۰/۲۵) ب) مماس برون(۰/۲۵)	دی ۹۰
۱۹	الف) $\frac{۲x+۱+۳x+۴}{۲} = ۹۰^\circ$ (۰/۲۵) $\to ۵x+۵ = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۳۵^\circ$ (۰/۲۵) ب) $x^۲ = ۴ \times ۹$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = ۶$ (۰/۲۵)	دی ۹۰
۲۰	تکراری همانند سوال ۱	شهریور ۹۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

<table>
<tr><td>۲۱</td><td>تکراری همانند سوال ۱</td><td>شهریور ۹۳</td></tr>
<tr><td>۲۲</td><td>

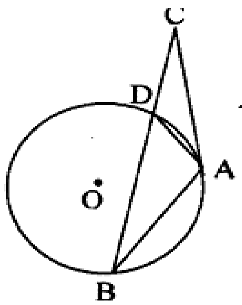
الف) $\begin{cases} ۲x+۳x+۴x=۳۶۰(۰/۲۵) \Rightarrow x=۴۰(۰/۲۵) \\ y=\frac{۴x}{۲}(۰/۲۵) \Rightarrow y=۲x \Rightarrow y=۸۰(۰/۲۵) \end{cases}$

ب) $۴\times۱۲=z(z-۲) \quad (۰/۵)$

$z^۲-۲z-۴۸=۰ \Rightarrow (z-۸)(z+۶)=۰(۰/۲۵) \Rightarrow$

$z=۸ \quad ,z=-۶ \Rightarrow z=۸$ ق ق $(۰/۲۵)$

</td><td>دی ۹۳</td></tr>
<tr><td></td><td>خط های قاطع ومماس نسبت به دایره</td><td></td></tr>
<tr><td>۱</td><td>

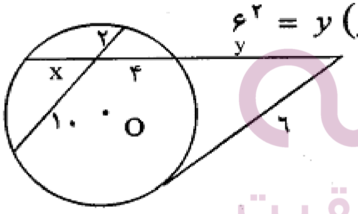


$\overset{\Delta}{ABC}: \begin{cases} AC=AB \Rightarrow \hat{B}=\hat{C} \quad (۰/۲۵) \\ \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \text{ محاطی } (۰/۲۵) \Rightarrow D\hat{A}C=\hat{C} \Rightarrow DC=DA \quad (۰/۲۵) \\ D\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \text{ ظلی } (۰/۲۵) \end{cases}$

</td><td>خرداد ۹۱</td></tr>
<tr><td>۲</td><td>

$۴\times x=۲\times۱۰(۰/۲۵) \Rightarrow x=۵ \quad (۰/۲۵)$

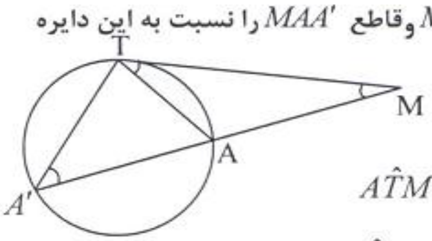
$۶^۲=y(y+۹)(۰/۲۵) \Rightarrow y^۲+۹y-۳۶=۰ \Rightarrow y=۳(۰/۲۵)$



</td><td>شهریور ۹۳</td></tr>
<tr><td>۳</td><td>

برهان: دایره ی C و نقطه ی M را خارج آن درنظر می گیریم .مماس MT وقاطع MAA' را نسبت به این دایره رسم می کنیم،از T به A و A' وصل می کنیم.

دو مثلث $\overset{\Delta}{MAT}$ و $\overset{\Delta}{MA'T}$ متشابهند زیرا :



رسم شکل (۰/۲۵)

$\left.\begin{array}{l} A\hat{T}M=A\hat{A'}T=\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} \\ \hat{M}=\hat{M} \end{array}\right\} (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{MT}{MA}=\frac{MA'}{MT} \quad (۰/۲۵)$

$\Rightarrow MT^۲=MA.MA' \quad (۰/۲۵)$

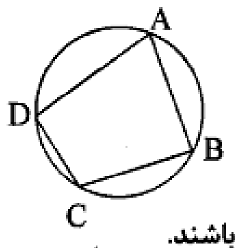
</td><td>دی ۹۱</td></tr>
</table>

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

وضع دو دایره نسبت به هم

زاویه محاطی

۱ — شهریور ۹۱

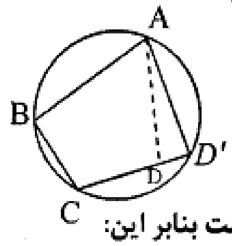


باتوجه به قضیه ی زاویه ی محاطی داریم:

$$\hat{B}+\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{ABC}}{۲}\xrightarrow{(۰/۲۵)}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ \quad (۰/۲۵)$$

به روش مشابه ثابت می شود $\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ (۰/۲۵)

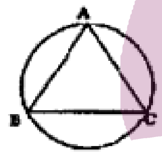
عکس قضیه:فرض کنیم در چهار ضلعی ABCD، هردو زاویه ی روبه رو مکمل یکدیگر باشند.



یعنی (۱) $\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ و (۲) $\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$ بر سه نقطه ی AوBوCیک دایره می گذرد ، (۰/۲۵)ثابت می کنیم که این دایره از نقطه ی D نیز می گذرد.

اثبات(برهان خلف):اگر این دایره از راس D نگذرد،نقطه ی برخورد خط CD با دایره را D' می نامیم (۰/۲۵)واز D' به A وصل می کنیم.چون چهار ضلعی $ABCD'$ محاطی است بنابر این: (۳) $\hat{B}+\hat{D'}=۱۸۰^\circ$ از رابطه (۲)و(۳)نتیجه می شود که(۴) $\hat{D}=\hat{D'}$ (۰/۲۵)چون زاویه ی D زاویه خارجی مثلث ADD'است،بنابراین:(۵) $\hat{D}>\hat{D'}$ که رابطه ی (۵) با رابطه ی(۴) در تناقض است. (۰/۲۵)در نتیجه فرض ما که دایره از راس D نمی گذردنادرست ،وحکم قضیه برقرار است.

۲ — دی ۹۰



$$\hat{C}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB} \quad \text{و} \quad \hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC} \quad \text{و} \quad \hat{B}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC} \qquad (۰/۲۵)$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}) \qquad (۰/۲۵)$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\frac{۱}{۲}(۳۶۰^\circ)=۱۸۰^\circ \qquad (۰/۲۵)$$

زاویه ظلی

۱ — خرداد ۹۰

زاویه ی ظلی $B\hat{A}T$ را در دایره ی به مرکز O در نظر می گیریم قطر AD از این دایره را رسم می کنیم و از D به نقطه B وصل می نمائیم (۰/۲۵)زاویه ی $A\hat{B}D$ محاطی روبرو به قطر مساوی ۹۰° است پس

$A\hat{D}B+D\hat{A}B=۹۰$ (۰/۲۵) (۱) از طرفی $D\hat{A}B+B\hat{A}T=۹۰^\circ$ (۰/۲۵) (۲)

از رابطه (۱)و(۲) نتیجه می شود $B\hat{A}T=A\hat{D}B$ (۰/۲۵) اما می دانیم $A\hat{D}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ پس $B\hat{A}T=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ (۰/۲۵)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲ — شهریور ۹۰

(توجه : به اصلاحیه پایان راهنمای تصحیح توجه شود.)

الف) $\widehat{BC} + ۱۰۰^\circ + ۷۰^\circ = ۳۶۰^\circ \xRightarrow{(۰/۲۵)} \widehat{BC} = ۱۹۰^\circ$

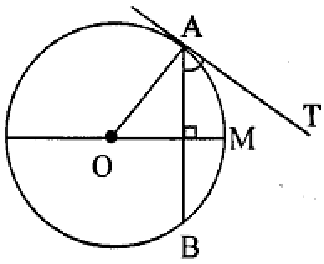
(زاویه ظلی) $\hat{x} = \frac{\widehat{BC}}{۲} \xRightarrow{(۰/۲۵)} \frac{۱۹۰^\circ}{۲} = ۹۵^\circ$ $(۰/۲۵)$

ب) $۴\left(۴ + x\right) = ۳\left(۳ + ۵\right) \xRightarrow{(۰/۲۵)} ۴ + x = ۶ \xRightarrow{(۰/۲۵)} x = ۲$

---

۳ — خرداد ۹۳

زاویه ی ظلی $B\hat{A}T$ را در دایره ی به مرکز O در نظر می گیریم شعاع OA از این دایره را رسم می کنیم .



می دانیم شعاع در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است . پس

$(۰/۲۵)$ $\quad O\hat{A}B + B\hat{A}T = ۹۰^\circ$ $\quad (۱)$

قطر عمود بر هر وتر ، آن وتر و کمانهای نظیر آن وتر را نصف میکند .

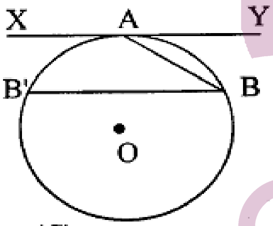
پس $\frac{\widehat{AB}}{۲} = \widehat{AM}$ (۰/۲۵)واندازه زاویه مرکزی $A\hat{O}M = \widehat{AM} = \frac{\widehat{AB}}{۲}$ (۰/۲۵) (۲)

از طرفی (۳) (۰/۲۵) $\quad O\hat{A}B + A\hat{O}M = ۹۰^\circ$

از رابطه (۱)و(۳) نتیجه می شود $B\hat{A}T = A\hat{O}M$ (۰/۲۵) با توجه به (۲) نتیجه می شود $B\hat{A}T = \frac{\widehat{AB}}{۲}$ (۰/۲۵)

---

۴ — شهریور ۹۳



(C)

A را B وصل می کنیم زاویه ی BAY ظلی و زاویه ی ABB' محاطی هستند بنا بر این

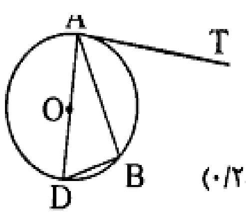
$A\hat{B}B' = \frac{\widehat{AB'}}{۲} (۰/۲۵),\ B\hat{A}Y = \frac{\widehat{AB}}{۲} (۰/۲۵)$

باتوجه به فرض $BB' \parallel XY$ و AB مورب، پس

$A\hat{B}B' = B\hat{A}Y\ (۰/۲۵) \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AB'} (۰/۲۵)$

---

۵ — دی ۹۳



رسم شکل (۰/۲۵)

زاویه ی ظلی $B\hat{A}T$ را در دایره ی به مرکز O در نظر می گیریم

قطر AD از این دایره را رسم می کنیم و از D به نقطه B وصل می نمائیم. (۰/۲۵)

زاویه ی $A\hat{B}D$ محاطی روبرو به قطر مساوی ۹۰° است پس

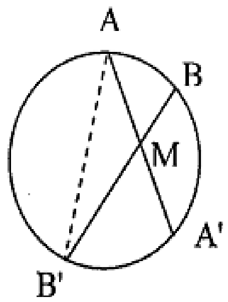
(۱) (۰/۲۵) $\quad A\hat{D}B + D\hat{A}B = ۹۰$ $\quad$ از طرفی (۲) (۰/۲۵) $\quad D\hat{A}B + B\hat{A}T = ۹۰^\circ$

از رابطه (۱)و(۲) نتیجه می شود $B\hat{A}T = A\hat{D}B$ (۰/۲۵) اما می دانیم $A\hat{D}B = \frac{\widehat{AB}}{۲}$ (۰/۲۵) پس $B\hat{A}T = \frac{\widehat{AB}}{۲}$

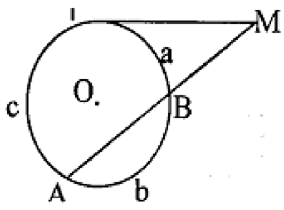
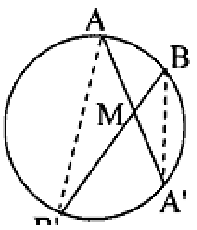
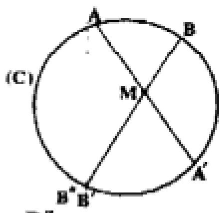
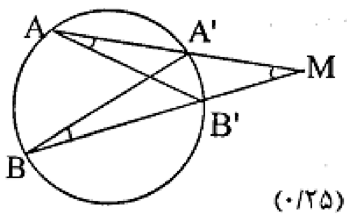
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶	چون اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی مساوی نصف اندازهٔ کمان رو به روی آن است.:(۰/۲۵) پس داریم: $A\hat{T}X = \frac{AT}{۲} \rightarrow ۲\alpha - ۶ = \frac{۳\alpha + ۳۳}{۲}$ (۰/۲۵) $\rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$ (۰/۲۵) [redacted] ص ۶۱ $\Rightarrow A\hat{T}X = ۸۴^\circ$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۴
	کمان درخور یک زاویه	
۱	الف) به قطر AB (۰/۲۵)	خرداد ۹۴
۲	$R = \frac{a}{۲\sin\alpha} \xRightarrow{(۰/۲۵)} R = \frac{\sqrt{۲}}{۲\sin ۴۵} = ۱$ (۰/۲۵) $OH = R\|\cos\alpha\| \xRightarrow{(۰/۲۵)} OH = ۱\|\cos ۴۵\| = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۴
۳	$R = \frac{a}{۲\sin\alpha} \xRightarrow{(۰/۲۵)} R = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})} = ۳$ (۰/۲۵) $OH = R\|\cos\alpha\| \xRightarrow{(۰/۲۵)}$ OH $= ۳\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۰
۴	$R = \frac{a}{۲\sin\alpha}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow R = \frac{۴}{۲\sin ۳۰} = ۴$ (۰/۲۵) $OH = R\|\cos\alpha\|$ (۰/۲۵) $\Rightarrow OH = ۴\|\cos ۳۰\| = ۲\sqrt{۳}$ (۰/۲۵)	خرداد ۹۱
۵	$R = \frac{a}{۲\sin\alpha} \xRightarrow{(۰/۲۵)} R = \frac{۶}{۲\sin ۳۰} = ۶$ (۰/۲۵) $OH = R\|\cos\alpha\| \xRightarrow{(۰/۲۵)} OH = ۶\|\cos ۳۰\| = ۳\sqrt{۳}$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۳
	زاویه بین دو وتر	

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱	الف) $\begin{cases}\frac{x+y}{2}=84\\ \frac{x-y}{2}=22\end{cases}\xrightarrow{(0/5)}\begin{matrix}x=106\\ y=62\end{matrix}$ (۰/۵) ب) $z^{2}=4\times9\ (0/25)\rightarrow z=6\ (0/25)$	دی ۹۲
۲	$50^{\circ}=\frac{z-t}{2}(0/25)\Rightarrow z-t=100^{\circ}$ و $70^{\circ}=\frac{z+t}{2}(0/25)\Rightarrow z+t=140^{\circ}$ $\Rightarrow t=20^{\circ}(0/25)$ و $z=120^{\circ}(0/25)$	خرداد ۹۰
۳	(الف) $\begin{cases}\frac{x+y}{2}=80\\ \frac{x-y}{2}=20\end{cases}\xrightarrow{(0/5)}\begin{matrix}x+y=160\\ x-y=40\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}x=100\\ y=60\end{matrix}$ (۰/۵) (ب) $x(x+32)=10\times32\xrightarrow{(0/25)}x^{2}+32x-320=0\rightarrow\begin{cases}x=8\\ x=-40\end{cases}$ (ق ق)(۰/۲۵) ، (غ ق ق) (۰/۲۵)	شهریور ۹۱
۴	ب) $4(4+x)=3(3+5)\xrightarrow{(0/25)}4+x=6\xrightarrow{(0/25)}x=2$	شهریور ۹۰
۵	برهان :پاره خط 'AB رارسم می کنیم . زاویه ی AMB زاویه ی خارجی مثلث 'AMB است. (۰/۲۵)  پس: (۰/۲۵) $\hat{AMB}=A\hat{B'}M+B'\hat{A}M$ $\hat{AMB}=A\hat{B'}B+A'\hat{A}B'$ وچون: (۰/۲۵) $A\hat{B'}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ و $A'\hat{A}B'=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{2}\Rightarrow A\hat{M}B=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{2}$ بنابراین حکم ثابت شد.	شهریور ۹۰
۶	$\begin{cases}\frac{x+y}{2}=70\\ \frac{x-y}{2}=30\end{cases}\xrightarrow{(0/5)}\begin{matrix}x+y=140\\ x-y=60\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}x=100\\ y=40\end{matrix}$ (۰/۵)	خرداد ۹۰

ایران نوشته
توسعه ای برای موفقیت

۷	$\begin{cases} b=۴a \\ c=۵a \\ a+b+c=۳۶۰.(۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow ۱۰a=۳۶۰ \Rightarrow a=۳۶(۰/۲۵), c=۱۸۰(۰/۲۵)$ $M=\frac{c-a}{۲}=\frac{۱۴۴}{۲}=۷۲(۰/۲۵)$ ص ۷۳  	خرداد ۹۴
	رابطه طولی در دایره	
۱	برهان: از A به'B واز B به 'A وصل می کنیم،دو مثلث 'AMB و 'BMA متشابه اند. (۰/۲۵) زیرا: $\begin{cases} A\hat{M}B' = A'\hat{M}B \\ \hat{A}=\hat{B}=\frac{A'B'}{۲} \end{cases} (۰/۵) \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{MB'}{MA'} \ (۰/۲۵)$ $\Rightarrow MA \times MA' = MB \times MB'$ تکمیل شکل (۰/۲۵)  	خرداد ۹۲
۲	بر سه نقطه ی A ، B و A' یک دایره می گذرانیم(۰/۲۵) (دایره C) اگر این دایره از نقطه ی B' بگذرد،حکم ثابت است(۰/۲۵).اما اگر این دایره از B' نگذرد، خط MB را در نقطه ی دیگری مانند B'' قطع خواهد کرد.در این صورت خواهیم داشت: $MA \cdot MA' = MB \cdot MB''$ (۰/۲۵) از مقایسه ی این رابطه با فرض قضیه ، نتیجه می شود $MB' = MB''$ (۰/۲۵) و این نشان میدهد که B'' بر B' منطبق است (۰/۲۵) یعنی دایره ای که بر سه نقطه ی A ، B و A' گذشته است،از نقطه ی B' نیز می گذرد. پس چهار نقطه ی A ، A' ، B و B' روی یک دایره واقع هستند.  	دی ۹۰
۳	ابتدا A را به 'B و B رابه 'A وصل می کنیم . دو مثلث 'AMB و A'MB متشابه اند.(۰/۲۵) زیرا : $\begin{cases} \hat{A}=\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \text{ زاویهٔ محاطی} \\ \hat{M} \text{ مشترک} \end{cases} (۰/۵) \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{MB'}{MA'}(۰/۲۵) \Rightarrow$ $MA \times MA' = MB \times MB'$ رسم شکل (۰/۲۵) ص ۷۶  	خرداد ۹۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱	$R=۹,\ R'=۴ \Rightarrow d=۱۳\ (۰/۲۵)$ $TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}\quad (۰/۲۵)$ $۵x+۲=\sqrt{۱۳^{۲}-(۹-۴)^{۲}}$ $۵x+۲=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲\quad (۰/۲۵)$ $\Rightarrow x=۲\quad (۰/۲۵)$	خرداد ۹۳
۲	$R=۳ \qquad TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}\quad (۰/۲۵)$ $R'=۸ \qquad ۵a-۳=\sqrt{۱۳^{۲}-(۸-۳)^{۲}}\quad (۰/۲۵)$ $d=۱۳ \qquad ۵a-۳=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲ \Rightarrow a=۳\quad (۰/۲۵)$	شهریور ۹۴
۳	$TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}\ (۰/۲۵) \Rightarrow TT'=\sqrt{۳۶-۱}\ (۰/۲۵) \Rightarrow TT'=\sqrt{۳۵}$	خرداد ۹۰
۴	$TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}\ (۰/۲۵) \Rightarrow ۳a-۱=\sqrt{۱۰۰-۳۶}\ (۰/۲۵)=۸ \Rightarrow a=۳\ (۰/۲۵)$ این دو دایره یک مماس مشترک داخلی دارند . (۰/۲۵) زیرا مماس برون هستند.(d=R+ R')	شهریور ۹۰
۵	**یک مماس مشترک داخلی (۰/۲۵) و دو مماس مشترک خارجی (۰/۲۵) دارد.** $R=۴ \qquad TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}\quad (۰/۲۵)$ $R'=۹ \qquad TT'=\sqrt{(R+R')^{۲}-(R-R')^{۲}}\quad (۰/۲۵)$ $TT'=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲\quad (۰/۲۵)$	خرداد ۹۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

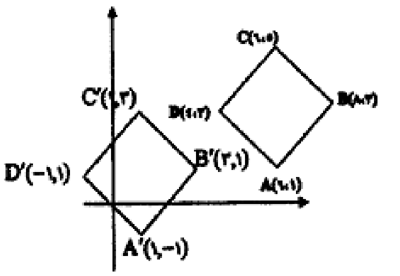
تهیه کننده:احمد عچرش کلاس سوم ریاضی دبیرستان امام حسین (ع) باوی

نگاشت

۱ — خرداد ۹۱

الف) $T(x,y)=(x-5\,,\,y-2)$

$$\left.\begin{array}{l} A(6,1)\rightarrow A'(1,-1)\\ B(8,3)\rightarrow B'(3,1)\\ C(6,5)\rightarrow C'(1,3)\\ D(4,3)\rightarrow D'(-1,1)\end{array}\right\}\ (0/25)$$



رسم شکل (۰/۵)

ب) $$\left.\begin{array}{l} AB=\sqrt{(8-6)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\\ A'B'=\sqrt{(3-1)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\end{array}\right\}(0/25)\Rightarrow AB=A'B'\quad(0/25)$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\dfrac{3-1}{8-6}=1\\ m_{A'B'}=\dfrac{1-(-1)}{3-1}=1\end{array}\right\}(0/25)\quad\Rightarrow m_{AB}=m_{A'B'}\ (0/25)$$

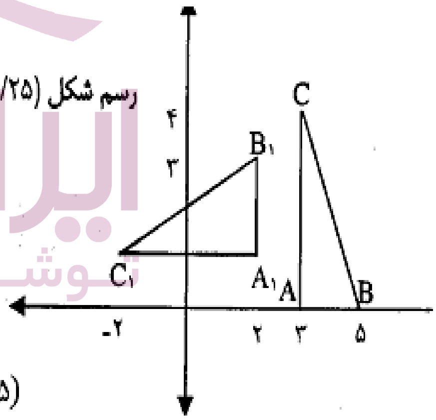
ج) بله ،چون تبدیل انتقال ایزومتری است.(۰/۲۵)

۲ — خرداد ۹۴

$D(x,y)=(-y+2\,,\,x-2)$

الف) $$\left\{\begin{array}{l} A(3,0)\xrightarrow{D}A_1(2,1)\\ B(5,0)\xrightarrow{D}B_1(2,3)\ \ (0/5)\\ C(3,4)\xrightarrow{D}C_1(-2,1)\end{array}\right.$$

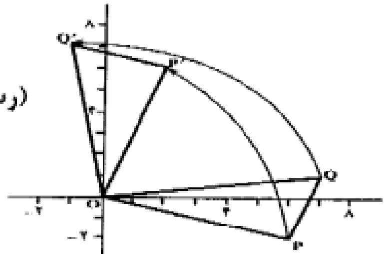
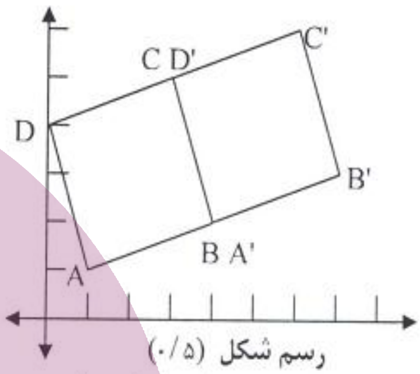
رسم شکل (۰/۲۵)



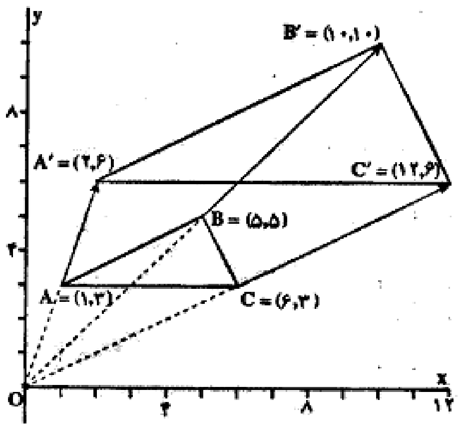
ب) $$\left\{\begin{array}{l} A\xrightarrow{R}A'(0,3)\\ B\xrightarrow{R}B'(0,5)\ \ (0/5)\\ C\xrightarrow{R}C'(-4,3)\end{array}\right.\ ,\ \left\{\begin{array}{l} A'\xrightarrow{T}(2,1)=A_1\\ B'\xrightarrow{T}(2,3)=B_1\ \ (0/5)\\ C'\xrightarrow{T}(-2,1)=C_1\end{array}\right.$$

نتیجهٔ ترکیب دوران R وانتقال T با تبدیل D یکسان است . (۰/۲۵) ص ۱۱۰

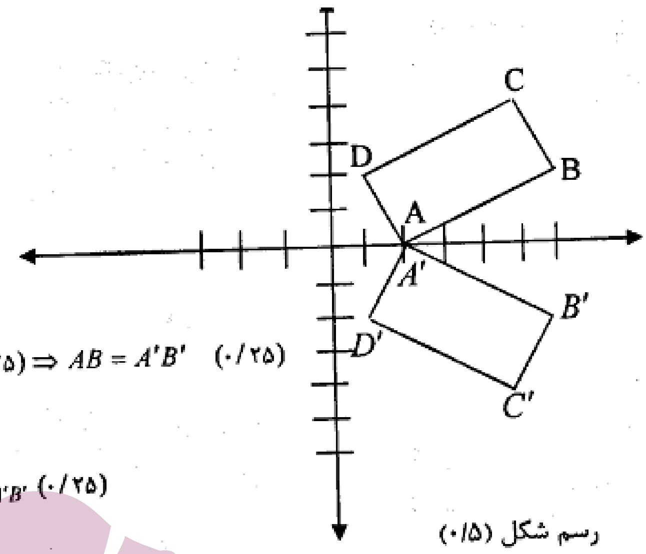
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

دی	پاسخ	ردیف
دی ۹۰	$R(x,y)=(-y,x)$ $O(۰,۰)\to O'(۰,۰)$ $P(۶,-۲)\to P'(۲,۶)$ (۰/۲۵) $Q(۷,۱)\to Q'(-۱,۷)$ (رسم شکل(۰/۵))  $\lvert PQ\rvert=\sqrt{(۷-۶)^۲+(۱+۲)^۲}=\sqrt{۱۰}$ (۰/۲۵) $\lvert P'Q'\rvert=\sqrt{(-۱-۲)^۲+(۷-۶)^۲}=\sqrt{۱۰}$ $\Rightarrow \lvert PQ\rvert=\lvert P'Q'\rvert$ (۰/۲۵) تحت این دوران طول پاره خط ها ثابت می ماند. $m_{PQ}=\frac{۱+۲}{۷-۶}=۳\quad ,m_{P'Q'}=\frac{۷-۶}{-۱-۲}=-\frac{۱}{۳}$ (۰/۲۵) شیب خط ها ثابت نمی ماند (۰/۲۵)	۳
دی ۹۱	الف) $\overrightarrow{AB}=(۳,۱)$ (۰/۲۵) $A(۱,۱)\to A'(۴,۲)$ $B(۴,۲)\to B'(۷,۳)$ $C(۳,۵)\to C'(۶,۶)$ $D(۰,۴)\to D'(۳,۵)$ (۰/۵)  رسم شکل (۰/۵) ب)(بردار انتقال) $\overrightarrow{AB}=(۳,۱)\longrightarrow T(x,y)=(x+۳,\ y+۱)$ (۰/۲۵)	۴
دی ۹۲	تکراری همانند سوال ۳	۵
دی ۹۳	الف) هرگاه همه ی ضلع های یک چند ضلعی بر یک دایره مماس باشند ، چند ضلعی را محیطی می نامند .(۰/۵) ب) یک نگا شت از D به R، یک عمل نظیر سازی است که به هر عضو مجموعه D یک و تنها یک عضو از مجموعه R را نظیر می کند. (۰/۵) پ)صفحه ی عمود منصف یک پاره خط، مکان هندسی نقطه هایی ازفضا است که از دو سر آن پاره خط، به یک فاصله اند.(۰/۵)	۶

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷	 الف) $D(x,y)=(2x,2y)$ $A(1,3)\to A'(2,6)$ $B(5,5)\to B'(10,10)$ $C(6,3)\to C'(12,6)$ (۰/۵) رسم شکل (۰/۵) ب) $AB=\sqrt{(5-1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ $A'B'=\sqrt{(10-2)^2+(10-6)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow A'B'=2AB$ (۰/۲۵) پ) این خط ها درمرکز تجانس همرسند.(۰/۲۵)	دی ۹۳
۸	الف) $T(x,y)=(x,0)\Rightarrow T(0,1)=(0,0)$ (۰/۲۵) و $T(-1,0)=(-1,0)$ (۰/۲۵) ب) $T(x,y)=(\frac{1}{2},0)=(x,0)\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ (۰/۲۵) $x^2+y^2=1\Rightarrow$ $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۰/۲۵) ، $y=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ غ ق ق (۰/۲۵)	دی ۹۴
۹	$R(x,y)=(-y,-x)$ $A(2,3)\xrightarrow{R}A'(-3,-2)$, $B(-1,4)\xrightarrow{R}B'(-4,1)$ (./۲۵) $AB=\sqrt{(-1-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ $A'B'=\sqrt{(-4+3)^2+(1+2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ (./۲۵) $\rightarrow$ $AB=A'B'$ (./۲۵) $m_{AB}=\frac{4-3}{-1-2}=-\frac{1}{3}$, $m_{A'B'}=\frac{1+2}{-4+3}=-\frac{3}{1}$ (./۲۵) $\rightarrow m_{AB}\neq m_{A'B'}$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۰
۱۰	تکراری همانند سوال ۷	شهریور ۹۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱	الف) $T(x,y)=(x,-y)$ $A(2,0)\to A'(2,0)$ $B(6,2)\to B'(6,-2)$ $C(5,4)\to C'(5,-4)$ $D(1,2)\to D'(1,-2)$ $(0/25)$  ب) $AB=\sqrt{(6-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ $A'B'=\sqrt{(6-2)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ $(0/25)\Rightarrow AB=A'B'$ $(0/25)$ $m_{AB}=\frac{2-0}{6-2}=\frac{1}{2}$ $m_{A'B'}=\frac{-2-0}{6-2}=-\frac{1}{2}$ $(0/25)$ $\Rightarrow m_{AB}\neq m_{A'B'}$ $(0/25)$ رسم شکل (۰/۵) ج) بله ،چون تبدیل باز تاب ایزومتری است.(۰/۲۵)	شهریور ۹۲
۱۲	الف) $T(x,y)=(x+2,-y)$ $A(3,3)\to A'(5,-3)$ $B(1,-1)\to B'(3,1)$ $(0/5)$ $C(-2,2)\to C'(0,-2)$ ب) $\lvert AB\rvert=\sqrt{(3-1)^2+(3+1)^2}=2\sqrt{5}$ $\lvert A'B'\rvert=\sqrt{(5-3)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{5}$ $(0/25)$ بله این تبدیل ایزومتری است.(۰/۲۵) پ) $m_{AB}=\frac{-1-3}{1-3}=2,\quad m_{A'B'}=\frac{1+3}{3-5}=-2$ $(0/25)$ خیرشیب حفظ نمی شود. (۰/۲۵)	شهریور ۹۳
۱۳	$T(x,y)=(x,y-2)=(-3,0)$ $(0/25)$ $\Rightarrow x=-3$ $(0/25)$, $y=2$ $(0/25)$	شهریور ۹۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴ — شهریور ۹۴

$T(x,y)=(۲x+۱,۲y)$

(الف)

$$\begin{cases} A(۱,۲)\xrightarrow{T}A'(۳,۴) \\ B(۰,۰)\xrightarrow{T}B'(۱,۰) \end{cases} \quad (۰/۵)$$

(ب)

$$|AB|=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۵} \qquad (۰/۲۵)$$

$$|A'B'|=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow |AB|\neq|A'B'| \qquad (۰/۲۵)$$

ج)تحت این دوران طول پاره خط ها ثابت نمی ماند . پس ایزو متری نیست.(۰/۲۵) ص۸۸

انتقال

۱ — شهریور ۹۲

$L: ۳x-۲y-۶=۰$

$T(x,y)=(x-۳\,,\,y+۱)$

$A(۰\,,-۳)\xrightarrow{T}A'(-۳,-۲) \quad (۰/۲۵)$

$B(۲,\,۰)\xrightarrow{T}B'(-۱,۱) \quad (۰/۲۵)$

$$m'=\frac{۱+۲}{-۱+۳}=\frac{۳}{۲} \quad (۰/۲۵)\Rightarrow L': y-۱=\frac{۳}{۲}(x+۱) \quad (۰/۵)\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

۲ — خرداد۹۳

$T(x,y)=(x+h,y+k) \quad (۰/۲۵)$

$$A(-۳,۵)\to B(۱,۳)\Rightarrow \begin{cases} -۳+h=۱ \\ ۵+k=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=۴ \\ k=-۲ \end{cases} \quad (۰/۵)$$

$\Rightarrow T(x,y)=(x+۴,y-۲)$

۳ — دی ۹۰

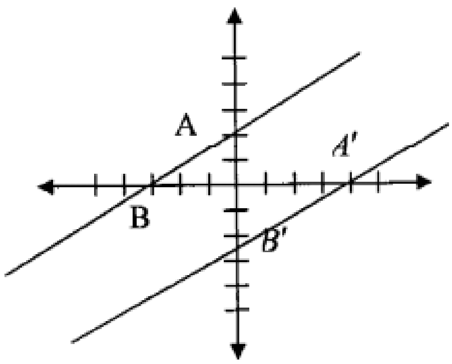
$T(x,y)=(x+۴,y-۲) \quad ; \quad ۳y-۲x=۶$

$A=(۰,۲)\xrightarrow{T}A'(۴,۰) \quad (۰/۲۵)$

$B=(-۳,۰)\xrightarrow{T}B'(۱,-۲) \quad (۰/۲۵)$

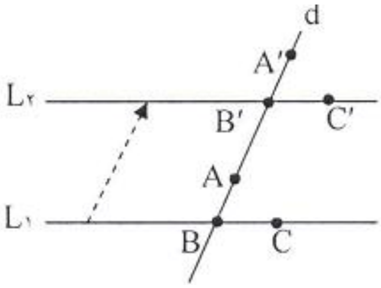
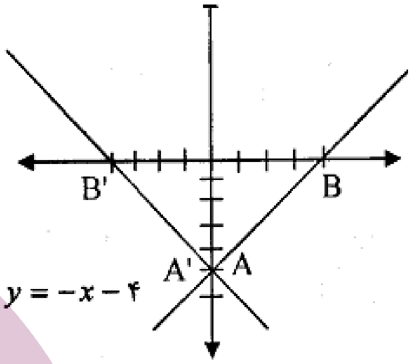
$$m'=\frac{-۲-۰}{۱-۴}=\frac{۲}{۳} \quad (۰/۲۵)$$

$$y-۰=\frac{۲}{۳}(x-۴) \quad (۰/۲۵)\Rightarrow ۳y-۲x+۸=۰$$



(رسم شکل (۰/۵))

ایران توشه
تــوشـــه ای بـــرای مــوفقیـت

۴	با توجه به شکل ، تحت انتقالی به موازات خط مورب d که خط L_1 را بر L_2 می نگارد(۰/۲۵) خواهیم داشت $A \to A'$ و $B \to B'$ و $C \to C'$ (۰/۲۵) بنابراین $A\hat{B}C \to A'\hat{B}'C'$ (۰/۲۵) $A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$ یعنی زاویه های متناظر برابرند(۰/۲۵) ص ۱۲۴  	دی ۹۴
	بازتاب	
۱	 رسم شکل (۰/۵) $y = x - ۴$ $T(x , y) = (-x , y)$ (۰/۲۵) $A(۰ , -۴) \xrightarrow{T} A'(۰ , -۴)$ (۰/۲۵) $B(۴ , ۰) \xrightarrow{R} B'(-۴ , ۰)$ (۰/۲۵) $m' = \frac{۴}{-۴} = -۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow L' : y - ۰ = -۱(x + ۴)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y = -x - ۴$	شهریور ۹۳
۲	نقطهٔ $A(-۳ , -۱)$ تحت بازتاب نسبت به خط L روی $B(۳ , ۵)$ تصویر شده است ، بنا بر این : وسط AB $M = (۰,۲)$ (۰/۲۵) , $m_{AB} = \frac{۵-(-۱)}{۳-(-۳)} = ۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow m_L = -۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow L : y - ۲ = -x$ (۰/۲۵)	خرداد۹۴
	دوران	
	تجانس	

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ — خرداد ۹۳

الف)

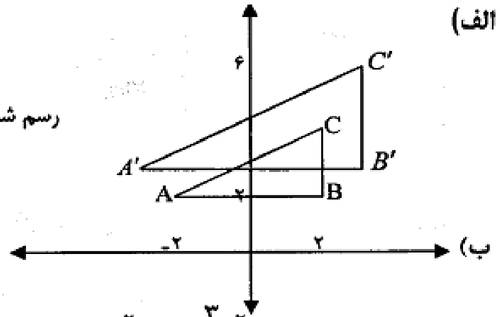
$D(x,y)=(\frac{3}{2}x,\frac{3}{2}y)$

$A(-2,2)\to A'(-3,3)$

$B(2,2)\to B'(3,3)$ (۰/۲۵)

$C(2,4)\to C'(3,6)$

رسم شکل (۰/۵)



ب)

$|AB|=\sqrt{(2+2)^2+(2-2)^2}=4$ (۰/۲۵)

$|BC|=\sqrt{(2-2)^2+(4-2)^2}=2$

$S=\frac{4\times 2}{2}=4$ (۰/۲۵), $S'=k^2S=(\frac{3}{2})^2S\Rightarrow S'=9$ (۰/۲۵)

پ) تجانس، انبساط است (۰/۲۵) چون $k>1$ (۰/۲۵).

---

۲ — خرداد ۹۴

$(4\to 2\quad ,2\to 1)\Rightarrow k=\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

$D(x,y)=(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y)$ (۰/۲۵)

نوع آن انقباض است (۰/۲۵)

---

۳ — دی ۹۱

الف)

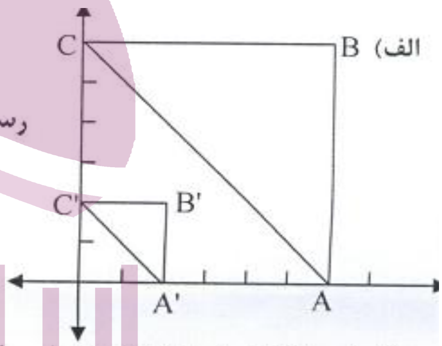
$D(x,y)=(\frac{1}{3}x,\frac{1}{3}y)$

$A(6,0)\to A'(2,0)$

$B(6,6)\to B'(2,2)$ (۰/۵)

$C(0,6)\to C'(0,2)$

رسم شکل (۰/۵)



ب) تجانس انقباض است (۰/۲۵) زیرا $0<K<1$ (۰/۲۵)

---

۴ — شهریور ۹۰

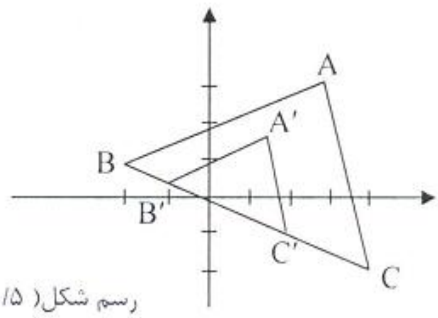
الف) $D(x,y)=(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y)$

$A(3,3)\to A'(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

$B(-2,1)\to B'(-1,\frac{1}{2})$ (۰/۷۵)

$C(4,-2)\to C'(2,-1)$

ب) $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^2=\frac{1}{4}$ (۰/۲۵)

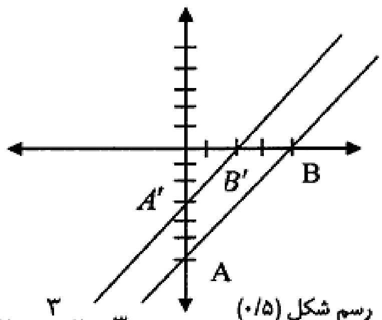


رسم شکل (۰/۵)

ج) این تجانس انقباض است. (۰/۲۵)

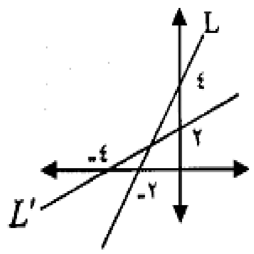
ص ۱۱۶

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵	سه مورد از ویژگی های زیر بیان شود:(هر مورد ۰/۲۵) ۱. تجانس شیب خط را حفظ می کند. ۲. تحت تجانس ،مرکز تجانس ثابت می ماند. ۳. تجانس طول را حفظ نمی کند.(مگر در حالتی که $K=1$) ۴. تجانس طول را با ضریب K و مساحت را باضریب K^2 تغییر می دهد. ۵. خط هایی که نقطه های نظیر را به هم وصل می کنند ،در مرکز تجانس همرسند.	دی ۹۰
۶	$L: 3x-2y-12=0$ $D(x,y)=(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y)$ $A(0,-6)\xrightarrow{D}A'(0,-3)$ (۰/۲۵) $B(4,0)\xrightarrow{D}B'(2,0)$ (۰/۲۵) $m'=\frac{0+3}{2-0}=\frac{3}{2}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow L': y-0=\frac{3}{2}(x-2)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-3$  رسم شکل (۰/۵)	خرداد ۹۱
۷	شکل (الف) انبساط (۰/۲۵) شکل (ب) انقباض (۰/۲۵)	شهریور ۹۰
	تبدیل یافته خط و معادله آن	
۱	نقطه های $A(0,3)$ و $A'(0,-3)$ به ترتیب دو نقطه ی دلخواه ازدو خط داده شده هستند. (۰/۲۵)و محور تقارن از نقطه ی P وسط AB موازی این دو خط می گذرد و چون دو خط موازیند پس : شیب محور تقارن $=m=m'=-1$ (۰/۲۵) $P=(\frac{X_A+X_B}{2},\frac{Y_A+Y_B}{2})=(0,0)$ (۰/۲۵) معادله محور تقارن: $Y-Y_P=(-1)(X-X_P)\to Y-0=(-1)(X-0)$ (۰/۲۵) $\to Y=-X$	دی ۹۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲ — دی ۹۲



$L:۲x-y+۴=۰$

$R(x,y)=(-y,-x)$

$A(۰,۴)\xrightarrow{R}A'(-۴,۰)\quad(۰/۲۵)$

$B(-۲,۰)\xrightarrow{R}B'(۰,۲)\quad(۰/۲۵)$

$m'=\frac{۲-۰}{۰-(-۴)}=\frac{۱}{۲}\quad(۰/۲۵)\Rightarrow L':y-۰=\frac{۱}{۲}(x+۴)\quad(۰/۵)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+۲$

رسم شکل (۰/۵)

۳ — خرداد ۹۰

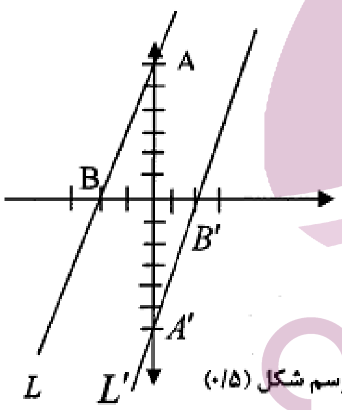
$T(x,y)=(x,-y)\quad(۰/۲۵)$

$A\in l\Rightarrow A=(۰,۲)\xrightarrow{T}A'=(۰,-۲)\quad(۰/۲۵)$

$B\in l\Rightarrow B=(۶,۰)\xrightarrow{T}B'=(۶,۰)\quad(۰/۲۵)$

$m_{A'B'}=\frac{y_{A'}-y_{B'}}{x_{A'}-x_{B'}}=\frac{-۲-۰}{۰-۶}(./۲۵)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y-۰=\frac{۱}{۳}(x-۶)(./۲۵)\quad\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x-۲$

۴ — شهریور ۹۱



رسم شکل (۰/۵)

$L:۳x-y+۶=۰$

$R(x,y)=(-x,-y)$

$\left.\begin{array}{l}A(۰,۶)\xrightarrow{R}A'(۰,-۶)\\B(-۲,۰)\xrightarrow{R}B'(۲,۰)\end{array}\right\}(۰/۲۵)$

$m_{AB}=\frac{۰+۶}{۲-۰}=۳\quad(۰/۲۵)\Rightarrow L':y-۰=۳(x-۲)\quad(۰/۲۵)\Rightarrow y=۳x-۶$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵ — خرداد ۹۳

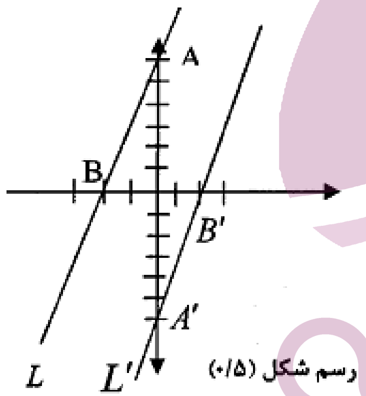
$L:۳x-y-۲=۰$

$R(x,y)=(y,-x)\quad(۰/۲۵)$

$A(۰,-۲)\xrightarrow{R}A'(-۲,۰)\quad(۰/۲۵)$

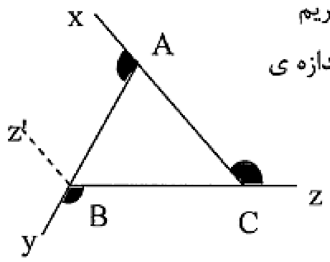
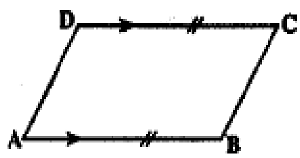
$B(۱,۱)\xrightarrow{R}B'(۱,-۱)\quad(۰/۲۵)$

$m'=\frac{-۱-۰}{۱-(-۲)}=\frac{-۱}{۳}\quad(۰/۲۵)\Rightarrow L':y-۰=\frac{-۱}{۳}(x+۲)\quad(۰/۲۵)\Rightarrow y=\frac{-۱}{۳}x-\frac{۲}{۳}$

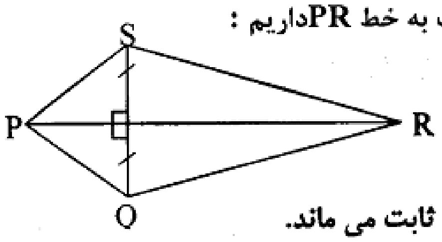
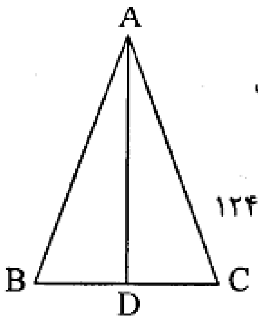
۶	$L: ۲x+y=۶ \qquad R(x,y)=(-y,x)$ $\left.\begin{matrix} A(۰,۶)\xrightarrow{R}A'(-۶,۰) \\ B(۳,۰)\xrightarrow{R}B'(۰,۳) \end{matrix}\right\}(۰/۵)$ $m_{A'B'}=\frac{۳-۰}{۰+۶}=\frac{۱}{۲} \quad (۰/۲۵)\Rightarrow L': y-۰=\frac{۱}{۲}(x+۶) \quad (۰/۲۵)\Rightarrow ۲y=x+۶$	دی ۹۴
۷	$R(x,y)=(y,-x) \quad (۰/۲۵)$ $x-۳y+۶=۰$ $A\in L\Rightarrow A=(۰,۲)\xrightarrow{R}A'(۲,۰) \quad (۰/۲۵)$ $B\in L\Rightarrow B=(-۶,۰)\xrightarrow{R}B'(۰,۶) \quad (۰/۲۵)$ $m_{A'B'}=\frac{۶-۰}{۰-۲}=-۳ \quad (۰/۲۵)$ $y-۰=-۳(x-۲) \ (۰/۲۵) \Rightarrow y=-۳x+۶$	شهریور ۹۰
۸	رسم شکل (۰/۵) $L: ۳x-y+۶=۰$ $R(x,y)=(-x,-y)$ $\left.\begin{matrix} A(۰,۶)\xrightarrow{R}A'(۰,-۶) \\ B(-۲,۰)\xrightarrow{R}B'(۲,۰) \end{matrix}\right\}(۰/۲۵)$ $m_{A'B'}=\frac{۰+۶}{۲-۰}=۳ \quad (۰/۲۵)\Rightarrow L': y-۰=۳(x-۲) \quad (۰/۲۵)\Rightarrow y=۳x-۶$	شهریور ۹۱
۹	$L: ۳x-۲y=۶$ $T(x,y)=(-y,-x) \quad (۰/۲۵)$ $A(۰,-۳)\xrightarrow{R}A'(۳,۰) \quad (۰/۲۵)$ $B(۲,۰)\xrightarrow{R}B'(۰,-۲) \quad (۰/۲۵)$ $m'=\frac{-۲-۰}{۰-(۳)}=\frac{۲}{۳} \quad (۰/۲۵)\Rightarrow L': y-۰=\frac{۲}{۳}(x-۳) \quad (۰/۲۵)\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x-۲$	دی ۹۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

اثبات با استفاده از ویژگی تبدیل ها

۱	ابتدا 'BZرا موازی AXرسم می کنیم سپس بردار ABرابردار انتقال درنظر می گیریم،تحت این انتقال زاویه ی BAXبه زاویه ی 'YBZمنتقل می شود. (۰/۲۵) همچنین بردارCBرابردارانتقال دیگری درنظرمی گیریم که تحت این انتقال زاویه یZCA به 'CBZمنتقل می شود. (۰/۲۵) می دانیم که انتقال اندازه ی زاویه راحفظ می کند. (۰/۲۵) پس داریم:  $B\hat{A}X \xrightarrow{AB} Y\hat{B}Z'$ $Z\hat{C}A \xrightarrow{CB} C\hat{B}Z'$ $Y\hat{B}C + C\hat{B}Z' + Y\hat{B}Z' = ۳۶۰^\circ$ (۰/۲۵) $Y\hat{B}C + Z\hat{C}A + B\hat{A}X = ۳۶۰^\circ$ (۰/۲۵)	شهریور ۹۰
۲	**بردار $\overrightarrow{AB}$ را به عنوان بردار انتقال در نظر می گیریم.(۰/۲۵)چون ABوDC موازی ومساویندبنابراین تحت این انتقال** $A \xrightarrow[(۰/۲۵)]{} B$ **و** $D \xrightarrow[(۰/۲۵)]{} C$ **یعنی پاره خط AD بر پاره خط BC تصویر می شود(۰/۲۵)و چون انتقال ایزومتری است(۰/۲۵) وشیب خط را حفظ می کند(۰/۲۵) پس:** AD∥ BC و AD=BC  	شهریور ۹۱
۳	تحت یک دوران ۶۰ حول نقطه ی C (۰/۲۵) ، مثلث ACDروی مثلث BCE تصویر می شود. (۰/۲۵)بنابراین $AD \to BE$ (۰/۲۵) و ضلع AD با BE زاویه ۶۰° قطع می کند. (۰/۲۵)چون طول تحت دوران حفظ می شود پس AD=BE (۰/۲۵) وهمچنین $A\hat{F}B = ۶۰^\circ$.	شهریور ۹۲
۴	$\begin{cases} OC = OA \\ A\hat{O}C = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow$ (تحت دوران ۱۸۰ به مرکز O) $A \longrightarrow C$ و $C \longrightarrow A$ (۰/۲۵) $\begin{cases} OB = OD \\ B\hat{O}D = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow$ (تحت دوران ۱۸۰ به مرکز O) $B \longrightarrow D$ و $D \longrightarrow B$ (۰/۲۵) **بنابراین (۰/۲۵)** $B\hat{A}C \longrightarrow D\hat{C}A$ **چون دوران اندازه زاویه راثابت نگه می داردپس** (۰/۲۵) $B\hat{A}C = D\hat{C}A$ **بنابراین (۰/۲۵)** $AB \parallel CD$ **به همین ترتیب** $D\hat{A}C = B\hat{C}A$ **می باشد بنابراین** $AD \parallel CB$ (۰/۲۵) **پس چهار ضلعی** $ABCD$ **متوازی الاضلاع است.**	خرداد ۹۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵	عمود منصف SR را به عنوان محور باز تاب در نظر می گیریم(۰/۲۵) با توجه به شکل تحت این باز تاب: $\begin{cases} S\to R\\ P\to Q\\ Q\to P\end{cases}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ $\begin{cases} SP\to RQ\\ SQ\to RP\\ PQ\to QP\end{cases}$ (۰/۲۵) $\xrightarrow[(۰/۲۵)]{\text{بازتاب ایزو متری است}}$ $\begin{cases} SP=RQ\\ SQ=RP\\ PQ=QP\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{QPR}\cong\overset{\Delta}{PQS}$ (۰/۲۵)	خرداد ۹۲
۶	PR را به عنوان محور تقارن در نظر می گیریم.(۰/۲۵)تحت بازتاب نسبت به خط PRداریم :  $\begin{Bmatrix} S\to Q\\ P\to P\\ R\to R\end{Bmatrix} \xrightarrow{(۰/۲۵)} S\hat{P}R \to Q\hat{P}R$ (۰/۲۵) $\Rightarrow S\hat{P}R = Q\hat{P}R$ (۰/۲۵) اندازه ی زاویه ی تحت بازتاب ثابت می ماند.	خرداد ۹۳
۷	فرض ABCD مربع وAE=AF حکم:CE=CF برهان: قطر AC که نیمساز زاویه ی مربع نیز می باشد را رسم می کنیم. (۰/۲۵)در مثلث متساوی الساقین AEF نیمساز عمود منصف قاعده ی EFنیز هست. (۰/۲۵)بنابراین طبق این تبدیل داریم: $\begin{rcases} C\to C\\ E\to F\end{rcases}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow CE \longrightarrow CF$ چون بازتاب محوری ایزو متری است (۰/۲۵)پس $CE = CF$	دی ۹۱
۸	در مثلث ABC ، AB=AC ونیمساز زاویهٔ A ، ضلع BC را در D قطع می کند . تحت بازتاب نسبت به خط AD(۰/۲۵) ، خطی که شامل پاره خط AB است ، روی خطی که شامل پاره خط ACاست تصویر می شود . (۰/۲۵)چون AB=AC پس $B\to C$.(۰/۲۵) بنا بر این $\hat{B}=\hat{C}$ (۰/۲۵) یعنی زاویه های مقابل به ضلعهای مساوی در مثلث متساوی الساقین برابرند . ص۱۲۴ 	خرداد ۹۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

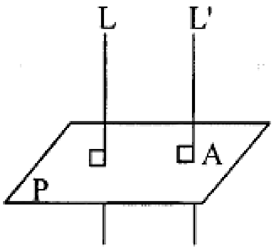
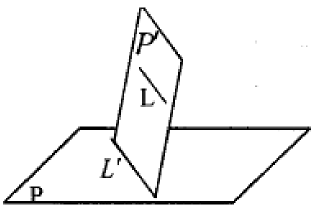
فصل چهارم هندسه ۲

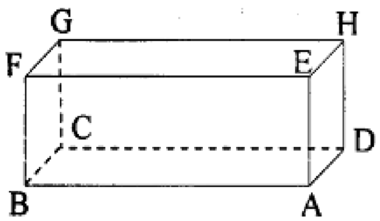
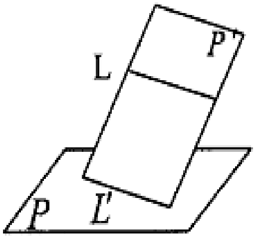
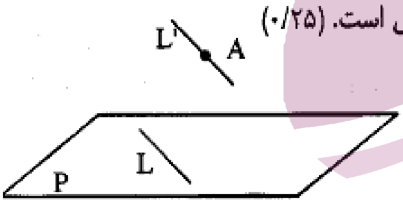
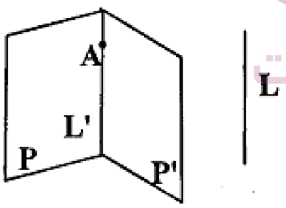
خط وصفحه در فضا

۱	الف) نادرست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) ج) درست (۰/۲۵) د) درست (۰/۲۵)	دی ۹۲
۲	الف) دو (۰/۲۵) ب) متنافر (۰/۲۵) پ) موازی(۰/۲۵) ت) غیر موازی (۰/۲۵)	دی ۹۳
۳	۱-خط وصفحه موازیند(۰/۲۵) ۲- خط برصفحه منطبق است (۰/۲۵) ۳- خط وصفحه متقاطع اند(۰/۲۵)	دی ۹۳
۴	الف) سه (۰/۲۵)ص ۱۳۱ ب) بی شمار (۰/۲۵) ص ۱۳۲ ج) موازی (۰/۲۵) ص ۱۴۳ د) موازی (۰/۲۵)ص ۱۵۷	دی ۹۴
۵	از دو خط L_1 و L_2 صفحه ی P را می گذرانیم(۰/۲۵) اگر L_3 در صفحه ی P باشد، حکم برقرار است (۰/۲۵) درصورتی که L_3 در صفحه ی P نباشد. چون L_3 با L_1 و L_2 متقاطع است.پس صفحه یP را در نقطه ی مشترک L_1 و L_2 قطع می کند.(۰/۲۵)زیرا در غیر این صورت باید صفحه را در دو نقطه ی متمایز قطع کند.(۰/۲۵) یعنی L_3 به تمامی در صفحه ی P قرار می گیرد.که این خلاف فرض است. (۰/۲۵)	دی ۹۴
۶	الف) خود -متشابه ب) یک وتنها یک پ) بی شمار ت) چهار	شهریور ۹۰
۷	الف)چهار ب)بی شمار پ)موازی ت)یک وتنها یک	شهریور ۹۲

۸	الف) نادرست (۰/۲۵) ب)نادرست (۰/۲۵) پ)درست(۰/۲۵) ت)درست (۰/۲۵)	دی ۹۱
۹	۲- یک نگاشت از D به R ، یک عمل نظیر سازی است که به هر عضو مجموعه D یک و تنها یک عضو از مجموعه ی R را نظیر می کند. (۰/۵) ۳- دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی گیرند ، دو خط متنافر می نامیم . (۰/۵)	شهریور ۹۴
۱۰	الف)نادرست (۰/۲۵)ص۱۴۵ ب) درست (۰/۲۵) ص۱۵۴ ج)نا درست (۰/۲۵) ص۱۳۸ د)درست (۰/۲۵)ص۱۳۶ ه)درست (۰/۲۵)ص۱۴۶	شهریور ۹۴
۱۱	الف)(۲و۳-) (۰/۲۵) ب) سه (۰/۲۵) ج) خط (۰/۲۵)	خرداد ۹۰
۱۲	الف)نادرست (۰/۲۵) ب)درست (۰/۲۵) پ)درست (۰/۲۵) ت)نادرست(۰/۲۵)	خرداد ۹۱
۱۳	تکراری همانند سوال ۵	خرداد ۹۱
۱۴	الف)دو خط در فضا راکه دریک صفحه قرار نمی گیرند ، دو خط متنافر می گوییم.(۰/۵) ب)فرض کنید خط L برصفحه ی P عمود است وآن را در نقطه ی A قطع کرده است. فرض کنید L' خط دلخواهی در صفحه ی P باشد. از نقطه ی A در صفحه ی P خط L'' رابه موازات L' رسم می کنیم. (۰/۲۵) از آنجا که L بر L'' عمود است و L' با L'' موازی است، L بر L' هم عمود است. (۰/۵)	خرداد ۹۱
۱۵	الف) سه(۰/۲۵) ب) موازی(۰/۲۵) پ) همرس(۰/۲۵) ت) برهم عمود(۰/۲۵)	خرداد ۹۲
۱۶	الف) عمود منصف (۰/۲۵) ب) خط (۰/۲۵) پ) صفحه (۰/۲۵) ت)موازی (۰/۲۵)	خرداد ۹۳

ایران توشه
توشــه ای بــرای مــوفقیـت

۱۷	از نقطه ی A خارج خط L خط L' را موازی L رسم می کنیم (۰/۲۵) نقطه ی A روی خط L' است . طبق مسأله حل شده صفحه ی P را از نقطه ی A بر L' عمود می کنیم (۰/۲۵) صفحه ی P بریکی از دو خط موازی عمود است پس بر دیگری یعنی L نیز عمود است . (۰/۲۵) اگر صفحه ی P' نیزاز A گذشته و بر L عمود باشد با P موازی خواهد بود. (۰/۲۵) بنا براین P و P' بر هم منطبق اند پس P یکتا ست . (۰/۲۵)  رسم شکل (۰/۲۵)	خرداد۹۳
۱۸	الف) به قطر AB (۰/۲۵) ص۶۴ ب) یک به یک (۰/۲۵) ص۸۵ ج) چهار(۰/۲۵)ص ۱۳۱ د) فصل مشترک (۰/۲۵)ص۱۳۲	خرداد۹۴
۱۹	الف)درست (۰/۲۵)ص۱۵۳ ب) نادرست (۰/۲۵) ص۱۵۴ ج) درست (۰/۲۵) ص۱۵۵	خرداد۹۴
۲۰	الف)بی شمار(۰/۲۵) ب)متنافر(۰/۲۵) پ)عمود منصف(۰/۲۵)	دی ۹۰
۲۱	الف)نادرست (۰/۲۵)ص۱۴۵ ب) درست (۰/۲۵) ص۱۵۴ ج)نا درست (۰/۲۵) ص۱۳۸ د)درست (۰/۲۵)ص۱۳۶ ه)درست (۰/۲۵)ص۱۴۶	شهریور۹۳
۲۲	الف) درست (۰/۲۵) ب)نادرست (۰/۲۵) پ)نادرست (۰/۲۵) ت) درست(۰/۲۵)	خرداد۹۳
	خط ها و صفحات موازی	
۱	اگر خط L در صفحه P باشد حکم برقرار است.(۰/۲۵) فرض کنیم خط L در صفحه P قرار ندارد . اگر L' خطی از صفحه P باشد که با L موازی است ، L و L' متمایزند .صفحه ا ی را که از این دو خط موازی می گذرد P' می نامیم. (۰/۲۵)فصل مشترک دو صفحه P و P' همان خط L' است . (۰/۲۵) اگر خط L صفحه ی P را قطع کند محل تقاطع روی فصل مشترک این دو صفحه قرار دارد ، (۰/۲۵) یعنی دو خط L و L' متقاطع خواهند شد که خلاف فرض است . (۰/۲۵)پس خط L صفحه P را قطع نمی کندوبا آن موازی است. (۰/۲۵) 	خرداد۹۳

۲	الف)خیر ،عکس تالس در فضا برقرار نیست. (۰/۲۵) ب)در مکعب مستطیل رسم شده ،خطوط AB و EF موازی هستند وخط EH خط EF راقطع کرده است ولی خط EH خط AB را قطع نکرده است.(۰/۵) رسم شکل (۰/۲۵)  	خرداد۹۳
۳	برای اثبات این قضیه دو حالت موازی بودن یک خط و یک صفحه در فضارا در نظر می گیریم. الف)خط L در صفحه ی P قرار ندارد.فرض کنیم P' صفحه گذرنده از L باشد که P را در خط L' قطع می کند. (۰/۲۵) L و L' هر دو در صفحه ی P' هستند ویکدیگر را قطع نمی کنند (۰/۲۵)زیرا از متقاطع بودن L و L' نتیجه می شود که خط L صفحه ی P را قطع می کند.که این خلاف فرض است. (۰/۲۵)پس باهم موازیند. (۰/۲۵) ب)خط L در صفحه ی P قرار دارد.پس در این حالت هر صفحه ی P' متمایز از P که از L می گذرد صفحه ی P را در همان خط L قطع می کند. (۰/۲۵)و درستی قضیه روشن است.  	خرداد۹۲
۴	در صفحه ی P خط دلخواه L را رسم می کنیم. (۰/۲۵) سپس از نقطه ی A ، خط 'L را موازی L رسم می کنیم . (۰/۲۵) 'L با یکی از خط های صفحه ی P موازی است ، پس خط 'L با صفحه ی P موازی است. (۰/۲۵) بیشمار خط از نقطه A به موازات صفحه ی P می توان رسم کرد . (۰/۲۵)  	دی ۹۲
۵	فرض می کنیم خط L موازی دو صفحه ی متقاطع P و 'P باشد. از یک نقطه ی فصل مشترک مانند A خط 'L راموازی L رسم می کنیم.(۰/۲۵) چون خط L با صفحه یP موازی است ،خط 'L به تمامی در صفحه یP قرار دارد. (۰/۵) بااستدلالی مشابه خط 'L به تمامی در صفحه ی 'P قرار دارد.(۰/۲۵) پس 'L همان فصل مشترک دو صفحه ی متقاطع P و 'P است که با خط L نیز موازی است. (۰/۲۵)  	شهریور ۹۳

ایران توشه

<table>
<tr>
<td>۶</td>
<td>

خط L را عمود بر صفحه P و خط L' را عمود بر خط L در نظر می گیریم. از نقطه ی A روی خط L خط L'' راموازی L' رسم می کنیم. (۰/۲۵)بنابراین $L'' \perp L$. صفحه ی شامل L و L'' را Q می نامیم . (۰/۲۵)فصل مشترک P و Q را L_1 می نامیم. بنابراین

$$\begin{matrix}L\perp L''\\ L\perp L_1\end{matrix} \Rightarrow L_1 || L'' \Rightarrow L_1 || L' \qquad (۰/۵)$$

یعنی L' با یکی از خطوط صفحه ی P موازی است پس با P موازی است. (۰/۲۵)

</td>
<td>دی ۹۰</td>
</tr>
<tr>
<td>۷</td>
<td>تکراری همانند سوال ۱</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>۸</td>
<td>

از نقطه A صفحه P را عمود بر خط L رسم می کنیم. (۰/۲۵) همچنین از نقطه A صفحه Q را بر خط L' عمود رسم می کنیم. (۰/۲۵) فصل مشترک صفحه های P و Q یعنی خط Δ جواب مسئله است. (۰/۲۵) زیرا

$$\left.\begin{matrix}L\perp P\Rightarrow L\perp\Delta\\ L'\perp Q\Rightarrow L'\perp\Delta\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$ Δ برهر دو خط L و L' عمود است. (۰/۲۵)

صفحه های P و Q برهم منطبق نیستندزیرا درغیر این صورت L و L' متنافر نیستندواین خلاف فرض است. (۰/۲۵)

خط Δ منحصر به فرد است زیرا صفحه های P و Q منحصر به فرد هستند. (۰/۲۵)

</td>
<td>دی ۹۱</td>
</tr>
<tr>
<td>۹</td>
<td>

برهان: طبق شکل خط'AC را رسم می کنیم.این خط صفحه Q رادر نقطه ای مانند M قطع می کند.صفحه گذرنده از دو خط متقاطع 'AC و AC را P_1 و صفحه گذرنده از دو خط متقاطع 'AC و 'A'C را P_2 می نامیم.(۰/۲۵)

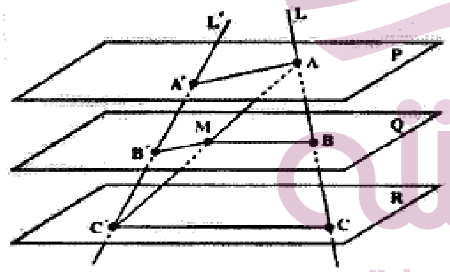
دو خط 'CC و BM در صفحه ی P_1 موازیند . (۰/۲۵) در صفحه ی P_1 با استفاده از قضیه تالس داریم :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{MC'} \qquad (۰/۲۵)$$

همچنین دو خط 'AA و 'MB در صفحه ی P_2 موازیند . (۰/۲۵)

و در صفحه ی P_2 با استفاده از قضیه ی تالس داریم : $\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{AM}{MC'}$ (۰/۲۵

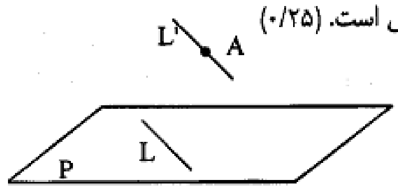
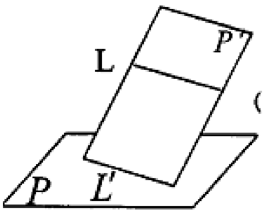
از این دو تناسب نتیجه می شود : (۰/۲۵) $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$



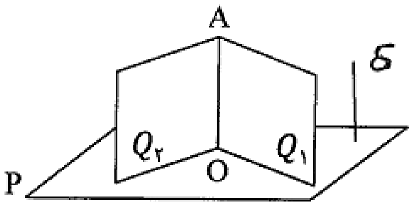
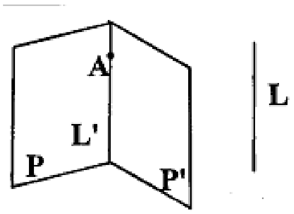
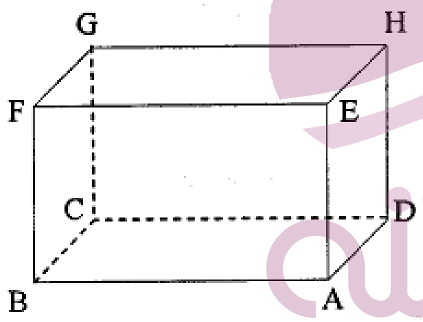
تکمیل شکل (۰/۲۵)

</td>
<td>دی ۹۲</td>
</tr>
</table>

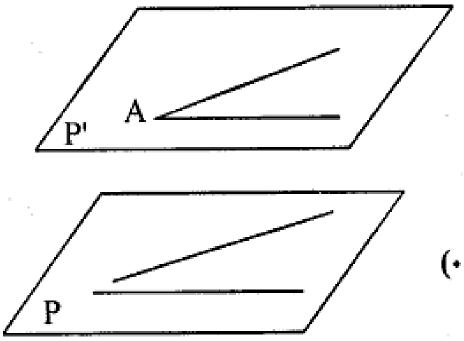
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰	خط L را عمود بر صفحه P و خط L' را عمود بر خط L در نظر می گیریم. از نقطه ی A روی خط L خط L'' راموازی L' رسم می کنیم. (۰/۲۵) بنابراین $L \perp L''$. صفحه ی شامل L و L'' را Q می نامیم. (۰/۲۵)فصل مشترک P و Q را L_1 می نامیم. بنابراین $\begin{matrix} L \perp L'' \\ L \perp L_1 \end{matrix} \Rightarrow L_1 \| L'' \Rightarrow L_1 \| L'$ (۰/۵) یعنی L' با یکی از خطوط صفحه ی P موازی است پس با P موازی است. (۰/۲۵)	دی ۹۲
۱۱	در صفحه ی P خط دلخواه L را رسم می کنیم. (۰/۲۵) سپس از نقطه ی A ، خط 'L را موازی L رسم می کنیم . (۰/۲۵) 'L با یکی از خط های صفحه ی P موازی است ، پس خط 'L با صفحه ی P موازی است. (۰/۲۵) بیشمار خط از نقطه A به موازات صفحه ی P می توان رسم کرد . (۰/۲۵) 	دی ۹۲
۱۲	برای اثبات این قضیه ، دو حالت موازی بودن یک خط و یک صفحه در فضارا در نظر می گیریم. الف)خط L در صفحه P قرار ندارد . فرض کنیم ′P صفحه گذرنده از L باشد که P را در خط ′L قطع می کند . (۰/۲۵) رسم شکل (۰/۲۵) L و هر ′L دو در صفحه ′P هستند ویکدیگر را قطع نمی کنند . (۰/۲۵) زیرا از متقاطع بودن L و ′L نتیجه می شود که خط L صفحه ی P را قطع می کند ،که این خلاف فرض است. (۰/۲۵) پس باهم موازیند . (۰/۲۵) ب)خط L در صفحه P قرار دارد . پس در این حالت هر صفحه ′P متمایز از P که از L می گذرد ، صفحه P را در همان خط L قطع می کند . (۰/۲۵)و درستی قضیه روشن است. ص۱۳۹	خرداد۹۴
۱۳	$\frac{SA}{AM}=\frac{SC}{CP}=1 \Rightarrow AC \| MP$ (۰/۵) $\frac{SC}{CP}=\frac{SB}{BN}=1 \Rightarrow BC \| NP$ (۰/۵) چون دوخط متقاطع از صفحه ی مثلث ABC با دو خط متقاطع از مثلث MNP موازی است پس این دو صفحه با هم موازی هستند.(۰/۲۵)	شهریور ۹۲
۱۴	فرض کنیم دو صفحه P و Q با صفحه R موازی باشند . فرض خلف اگر P با Q موازی نباشد (۰/۲۵) آنگاه P صفحهQ را قطع می کند. از طرفی چون صفحه Q موازی با R است،پس صفحه P صفحه R را نیز قطع می کند. (۰/۵) و این خلاف فرض است. (۰/۲۵)پس $P \| Q$. ص ۱۴۷	دی ۹۴

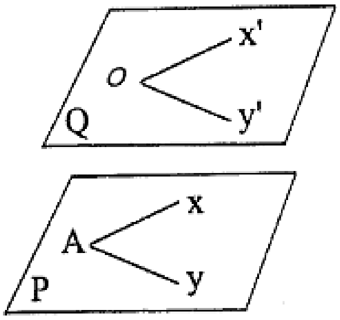
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵	تکراری همانند سوال ۹	دی ۹۲
۱۶	اگر دو صفحه ی متقاطع Q_1 و Q_2 برصفحه ی P عمود باشند و AO فصل مشترک آنها باشد ، خط δ عمود بر صفحه P را در نظر می گیریم می دانیم δ به موازات صفحه های Q_1 و Q_2 می باشد(۲۵/.). بنابراین خط δ به موازات خط AO است (۲۵/.)پس خط AO برعمود P است. (۲۵/.)  	شهریور ۹۰
۱۷	فرض می کنیم خط L موازی دو صفحه ی متقاطع P و P' باشد. ز یک نقطه ی فصل مشترک مانند A خط L' راموازی L رسم می کنیم.(۰/۲۵) چون خط L با صفحه ی P موازی است ،خط L' به تمامی در صفحه ی P قرار دارد. (۰/۵) با استدلالی مشابه خط L' به تمامی در صفحه ی P' قرار دارد.(۰/۲۵) پس L' همان فصل مشترک دو صفحه ی متقاطع P و P' است که با خط L نیز موازی است. (۰/۲۵)  	شهریور ۹۳
۱۸	الف)در مکعب مستطیل رسم شده ،خطوط AB و EF موازی هستند وخط EH خط EF راقطع کرده است ولی خط EH خط AB را قطع نکرده است.(۰/۵)  رسم شکل (۰/۵) ب) در مکعب مستطیل بالا صفحه های ABCD و EFGH موازی هستندو خط AB درصفحه ی ABCD قرار داردو خط EH درصفحه ی EFGH قرار دارد و AB موازی EH نیست.(۰/۵) (در صورتی که دانش آموز دو شکل رسم کرده باشد برای هر کدام (۰/۲۵) منظور شود.)	شهریور ۹۱

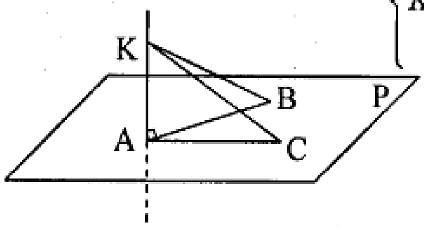
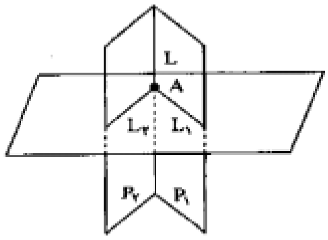
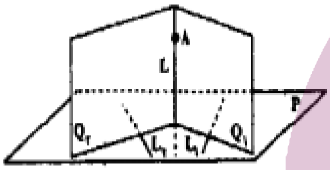
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۹	ازنقطه ی A ،دو خط متمایز موازی صفحه ی P رسم می کنیم (۰/۲۵) صفحه ی گذرانده از این دو خط جواب مسئله است.(۰/۲۵) زیرا دو خط غیر موازی ازآن با دو خط غیر موازی از صفحه ی P موازی است. (۰/۲۵) رسم شکل (۰/۲۵) 	شهریور۹۳
۲۰	P و P' دو صفحه ی موازی هستند و خط L با صفحه ی P موازی می باشد. فرض می کنیم L با P' موازی نباشد (فرض خلف)(۰/۲۵) در اینصورت قطعاً خط L صفحه ی موازی آن یعنی P را نیز قطع خواهد کرد.(۰/۲۵) واین خلاف فرض است. پس حکم برقرار است یعنی $L \parallel P'$ است .(۰/۲۵)	شهریور۹۳
۲۱	تکراری همانند سوال۱	شهریور۹۳
۲۲	تکراری همانند سوال۱	شهریور۹۳

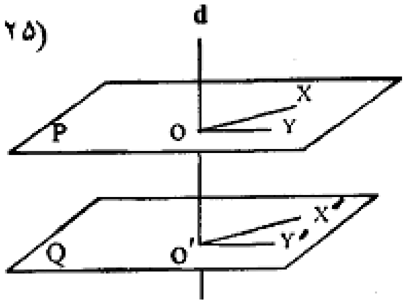
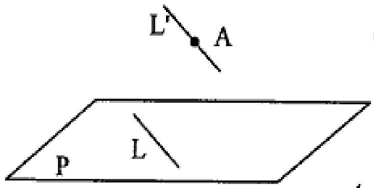
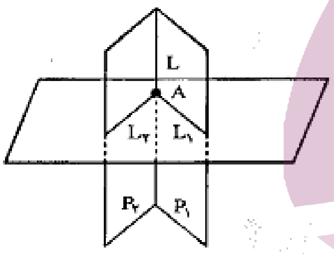
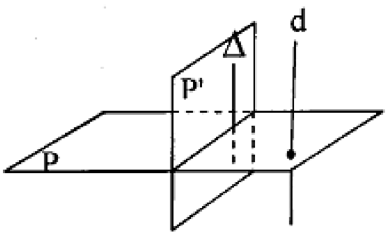
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳	دو خط AX و AY را در صفحه ی P در نظر می گیریم . (۰/۲۵) از نقطه O خطوط OX' و OY' را موازی خطوط AX و AY رسم می کنیم سپس صفحه Q گذرنده از دو خط OX' و OY' را رسم می نماییم (۰/۲۵) بنابراین صفحه P با صفحه Q موازی خواهد بود. (۰/۲۵) هر خطی که از نقطه O بگذرد با صفحه P موازی باشد در صفحه Q قرار می گیرد (۰/۲۵) زیرا درغیراین صورت صفحه Q را قطع می کند. بنابراین صفحه P راکه موازی باصفحه Q است نیز قطع می کند (۰/۲۵)  	خرداد ۹۰
۲۴	فرض کنیم $P \parallel P'$ و $d \subset P$ اگر خط d باصفحه ی P' متقاطع باشدپس صفحه ی P باصفحه ی P' متقاطع خواهد بودکه این خلاف فرض است پس $d \parallel P'$. (۰/۲۵)بعکس فرض کنیم هر خط مانند d از صفحه ی P باصفحه ی P' موازی باشد. (۰/۲۵) اگر صفحه ی P باصفحه ی P' متقاطع باشد آنگاه در یک خط مانند L مشترک خواهند بود(۰/۲۵) اگر خط d در صفحه P متقاطع باL درنقطه ی A رسم شودخط d صفحه ی P' رادرنقطه ی A قطع کرده است که این خلاف فرض است. (۰/۲۵)پس $P \parallel P'$	خرداد ۹۱
۲	دو صفحه موازی P و P' و خط L روی P را در نظر می گیریم . فرض خلف : اگر L با P' موازی نباشد در نتیجه در نقطه ای مثل A آن را قطع می کند (۰/۲۵)چون P شامل L است پس $A \in P$ (۰/۲۵) چون $A \in P'$ پس P و P' در نقطه A مشترکند (۰/۲۵)واین با موازی بودن P و P' درتناقض است (۰/۲۵) پس فرض خلف باطل و حکم برقراراست. عکس مطلب نیز درست است .(۰/۲۵)	خرداد ۹۲
	خط ها وصفحه های عمود بر هم	

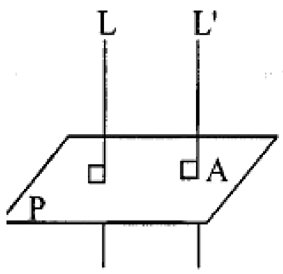
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

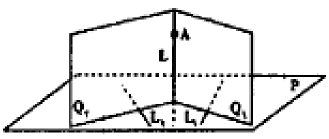
۱	$\begin{cases} AB = AC \\ KB = KC \Rightarrow \overset{\Delta}{KAB} \cong \overset{\Delta}{KAC}\ (۰/۵) \Rightarrow K\hat{A}B = K\hat{A}C = ۹۰^\circ\ (۰/۲۵) \\ KA \quad \text{ضلع مشترک} \end{cases}$  بنابراین KA عمود بر دو خط غیر موازی AB و AC در صفحه P می باشد پس بنا بر قضیهٔ اساسی تعامد KA بر صفحه P عمود است .(۰/۲۵) ص۱۵۴	خرداد ۹۴
۲	الف)می توانیم از خط L بی شمار صفحه بگذرانیم.(۰/۲۵) دو صفحه ی متمایزاز این صفحه ها را P_1 و P_2 می نامیم.از نقطه ی A در صفحه ی P_1، خط L_1 را عمود بر L رسم می کنیم(۰/۲۵).به طور مشابه،از نقطه ی A در صفحه P_2، خط L_2 را عمود بر L رسم می کنیم. (۰/۲۵)خط های L_1 و L_2 متقاطع اند.وخط L بر هر دوی آنها عمود است.طبق قضیه اساسی تعامد، خط L بر صفحه گذرنده از L_1 و L_2 نیز عمود است. (۰/۲۵)این صفحه همان صفحه مطلوب است.  ب)دو خط غیر موازی L_1 و L_2 را در صفحه ی P در نظر می گیریم(۰/۲۵) از نقطه ی A صفحه ی Q_1 را عمود بر L_1 (۰/۲۵) و صفحه ی Q_2 را عمود بر L_2 (۰/۲۵) رسم می کنیم.این دو صفحه متقاطع اند : فصل مشترک آنها را L می نامیم. طبق قضیه اساسی تعامد ، L بر صفحه ی P عمود است (۰/۲۵)و L همان خط مطلوب است.  	دی ۹۰
۳	از نقطهٔ A صفحهٔ P را عمود بر خط L و صفحهٔ Q را عمود برخط L′ رسم می کنیم(۰/۲۵). فصل مشترک صفحه های P و Q یعنی خط Δ جواب مسئله است.(۰/۲۵) زیرا : $\left.\begin{array}{l} L \perp P \Rightarrow L \perp \Delta \\ L' \perp Q \Rightarrow L' \perp \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow$ Δ برهر دو خط L و L′ عمود است. (۰/۲۵) صفحه های P و Q بر هم منطبق نیستند زیرا در غیر این صورت L و L′ متنافر نیستند و این خلاف فرض است. (۰/۲۵) خط Δ منحصر به فرد است زیرا صفحه های P و Q منحصر به فرد هستند. (۰/۲۵) ص۱۵۵	دی ۹۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴	برهان : فرض می کنیم خط d بر صفحه P عمود باشد و $P \parallel Q$. دو خط متقاطع OX و OY را در صفحه P در نظر می گیریم (۰/۲۵) و $O'X'$ و $O'Y'$ را موازی OX و OY در صفحه Q رسم می کنیم (۰/۲۵) $d \perp P \Rightarrow \begin{cases} d \perp OX \Rightarrow d \perp O'X' \ \text{(۰/۲۵)} \\ d \perp OY \Rightarrow d \perp O'Y' \ \text{(۰/۲۵)} \end{cases} \Rightarrow d \perp Q \ \text{(۰/۲۵)}$ 	شهریور ۹۱
۵	در صفحه ی P خط دلخواه L را رسم می کنیم سپس از نقطه ی A ، خط L' را موازی L رسم می کنیم . (۰/۲۵) L' با یکی از خط های صفحه ی P موازی است ، پس خط L' با صفحه ی P موازی است. (۰/۲۵) بیشمار خط از نقطه A به موازات صفحه ی P می توان رسم کرد . (۰/۲۵)  تکمیل شکل (۰/۲۵)	شهریور ۹۲
۶	الف)می توانیم از خط L بی شمار صفحه بگذرانیم.(۰/۲۵) دو صفحه متمایزاز این صفحه ها راP_1 و P_2 می نامیم.از نقطه A در صفحه P_1، خط L_1 را عمود برL رسم می کنیم(۰/۲۵).به طور مشابه،از نقطه A در صفحه P_2، خط L_2 را عمود بر L رسم می کنیم. (۰/۲۵)خط های L_1 و L_2 متقاطع اند.وخط L بر هر دوی آنها عمود است.طبق قضیهٔ اساسی تعامد، خط L بر صفحه گذرنده از L_1 و L_2 نیز عمود است. (۰/۲۵)این صفحه همان صفحه مطلوب است. ص۱۵۲ 	شهریور ۹۳
۷	فرض کنیم $P \perp P'$ و $d \perp P$ باشد . چون $P \perp P'$ پس خطی مانند Δ در صفحه P' قراردارد به طوری که $\Delta \perp P$ باشد (۰/۲۵) داریم : $\begin{cases} \Delta \perp P \\ d \perp P \end{cases} \Rightarrow d \parallel \Delta \ \text{(۰/۲۵)} \Rightarrow d \parallel p' \ \text{(۰/۲۵)}$ 	شهریور ۹۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

<table>
<tr>
<td>۸</td>
<td>از نقطه ی A خارج خط L خط L' را موازی L رسم می کنیم (۰/۲۵)
نقطه ی A روی خط L' است .
طبق مسأله حل شده صفحه ی P را از نقطه ی A بر L' عمود می کنیم (۰/۲۵)
صفحه ی P بر یکی از دو خط موازی عمود است پس بر دیگری
یعنی L نیز عمود است . (۰/۲۵)
اگر صفحه ی P' نیز از A گذشته و بر L عمود باشد با P موازی خواهد بود. (۰/۲۵)
بنا براین P و P' بر هم منطبق اند پس P یکتا ست . (۰/۲۵)


رسم شکل (۰/۲۵)</td>
<td>خرداد ۹۳</td>
</tr>
<tr>
<td>۹</td>
<td>دو خط غیر موازی L_1 و L_2 را در صفحه ی P در نظر می گیریم(۰/۲۵)
از نقطه ی A صفحه ی Q_1 را عمود بر L_1(۰/۲۵) و صفحه ی Q_2
را عمود بر L_2(۰/۲۵) رسم می کنیم.این دو صفحه متقاطع اند ؛
فصل مشترک آنها را L می نامیم. طبق قضیه اساسی
تعامد ، L بر صفحه ی P عمود است (۰/۲۵)و L همان خط مطلوب است.
</td>
<td>خرداد ۹۲</td>
</tr>
<tr>
<td>۱۰</td>
<td>از نقطهٔ A صفحهٔ P را عمود بر خط L و صفحه Q را عمود برخط L' رسم می کنیم(۰/۲۵).
فصل مشترک صفحه های P و Q یعنی خط Δ جواب مسئله است. (۰/۲۵) زیرا :
$\left.\begin{array}{l} L\perp P\Rightarrow L\perp\Delta \\ L'\perp Q\Rightarrow L'\perp\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow$ Δ برهر دو خط L و L' عمود است. (۰/۲۵)
صفحه های P و Q بر هم منطبق نیستند زیرا در غیر این صورت L و L' متنافر نیستند و این خلاف فرض است. (۰/۲۵)
خط Δ منحصر به فرد است زیرا صفحه های P و Q منحصر به فرد هستند. (۰/۲۵) ص۱۵۵</td>
<td>دی ۹۴</td>
</tr>
</table>

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت