« به نام خدا »

فصل اول ریاضی نهم:

09133395099

ویژگی های مجموعه: ① اعضای مجموعه باید مشخص و معین باشند.

② اعضای مجموعه باید غیر تکراری و متمایز باشند و اعضای تکراری یک بار به حساب می آیند.

③ در مجموعه ترتیب قرار گیری اعضا مهم نمی باشد.

مثال: کدام عبارت های زیر یک مجموعه را مشخص می کنند؟

الف) چهار شاعر ایرانی ← مجموعه نیست زیرا نام چهار شاعر مشخص و معین نیست و ویژگی اول را ندارد.

ب) سیاره های منظومه شمسی ← مجموعه است زیرا سیاره های منظومه شمسی مشخص و معین می باشند.

پ) عدد های طبیعی زوج یک رقمی ← مجموعه است زیرا این اعداد مشخص هستند می شوند: ۲، ۴، ۶، ۸

قرارداد: اعضای مجموعه را داخل { } قرار می دهیم و برای نام گذاری مجموعه ها از حروف بزرگ انگلیسی استفاده می کنیم.

مثال $A = \{۵, ۶, ۷, ۸\}$

نمادها

نماد عضو بودن: $\in$ ←مثال $۵ \in A$

(عدد ۵ عضو مجموعه A است)

نماد عضو نبودن: $\notin$ ←مثال $۹ \notin A$

(عدد ۹ عضو مجموعه A نیست)

مجموعه تهی: اگر در مجموعه ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعه تهی می نامیم، با نماد $\emptyset$ یا $\{\ \}$ نشان می دهیم.

تذکر: مجموعه تهی با مجموعه های $\{\emptyset\}$ و $\{0\}$ که هر کدام یک عضو دارند متفاوت است.

مجموعه یک عضوی: هر مجموعه ای که فقط یک عضو دارد را مجموعه یک عضوی می نامند.

مثال: کدام یک از عبارت های زیر، مجموعه تهی، کدام یک مجموعه یک عضوی است؟

الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶: بین ۵ و ۶ عددی طبیعی وجود ندارد لذا این مجموعه هیچ عضوی ندارد و یک تهی است.

ب) عددهای صحیح ۱- و ۱: فقط تنها عدد صحیح بین ۱- و ۱، ۰ است بنابراین یک مجموعه یک عضوی $\{0\}$ داریم.

پ) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اول باشند: عدد ۳ تنها عدد یک رقمی مضرب ۳ است که اول است؛ پس یک مجموعه یک عضوی $\{3\}$ داریم.

نمایش مجموعه ها با استفاده از نمودار ون:

مجموعه ها را می توان با استفاده از منحنی های بسته نمایش داد، به عنوان مثال مجموعه $A=\{a,b,c\}$ را با نمودار ون به صورت روبه رو نمایش می دهیم:

تساوی مجموعه ها: دو مجموعه A و B برابرند هرگاه هر عضو A، عضوی از B، و هر عضو B، عضوی از A باشد و می نویسیم: $A=B$

نکته: اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که در A نباشد

مجموعه A با مجموعه B برابر نیست و می‌نویسیم: $A \neq B$

به عنوان مثال دو مجموعه $A=\{1,1,2\}$ و $B=\{1,2\}$ با هم برابرند.

مثال: x و y را طوری تعیین کنید تا دو مجموعه A، B برابر باشند:

$A=\{7, x+1, 2\}$ $\qquad$ $B=\{y-1, 7, 5\}$

حل) عدد ۷ عضو هر ۲ مجموعه است پس برای اینکه $A=B$ شود عدد ۲ باید عضو

مجموعه B باشد که به جای y-1 باید قرار بگیرد، عدد ۵ هم باید عضو مجموعه باشد که به جای x+1

قرار می‌گیرد:

$x+1=5 \rightarrow \boxed{x=4}$ ✓
$y-1=2 \rightarrow \boxed{y=3}$ ✓
$\Rightarrow A=B=\{2,5,7\}$

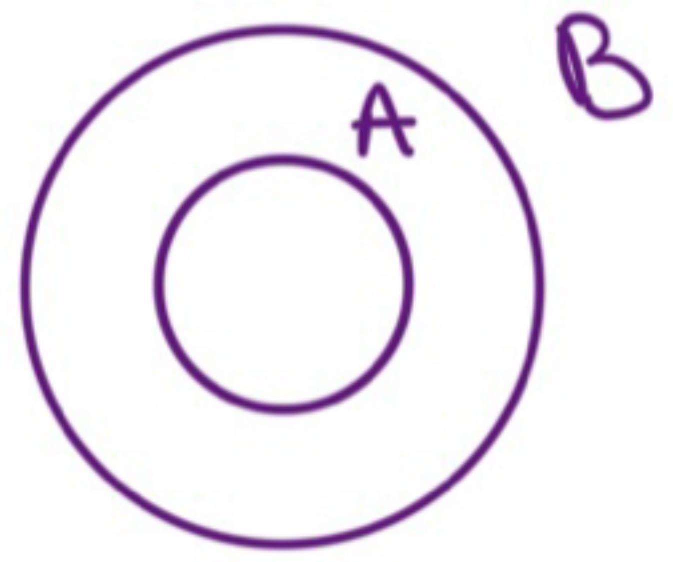
زیر مجموعه: دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید:

$A=\{3,5,7\}$
$B=\{2,3,5,7\}$

همان طور که می‌بینید هر عضو مجموعه A در مجموعه B هست بنابراین می‌گوییم:

مجموعه A زیر مجموعه B است و می‌نویسیم: $A \subseteq B$

نماد زیر مجموعه



نمایش $A \subseteq B$ به صورت نمودار ون

نماد $\not\subseteq$: نماد $\not\subseteq$ نشانه زیر مجموعه نبودن است؛ در مجموعه بالا عدد ۲

در مجموعه B است اما داخل A نیست بنابراین مجموعه B زیر مجموعه A نیست و داریم:

$B \not\subseteq A$

نکات: ① هر مجموعه‌ای زیر مجموعه خودش است؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای

دلخواه باشد داریم: $A \subseteq A$

② مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه دلخواهی مانند A است؛ یعنی: $\emptyset \subseteq A$

۳) اگر $A \subseteq B$ باشد و $B \subseteq A$ آنگاه $A = B$

۴) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ باشد آنگاه $A \subseteq C$

نوشتن زیرمجموعه‌های یک مجموعه:

می‌خواهیم تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{-1, 0, 1\}$ را بنویسیم:

۱) زیرمجموعه بدون عضو (تنها زیرمجموعه صفر عضوی، ϕ است): ϕ

۲) زیرمجموعه‌های یک عضوی: $\{-1\}, \{0\}, \{1\}$

۳) زیرمجموعه‌های دو عضوی: $\{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}$

۴) زیرمجموعه‌های سه عضوی: $\{-1, 0, 1\}$

بنابراین تمام زیرمجموعه‌های A به صورت مقابل است: $\phi, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}$

* A یک مجموعه ۳ عضوی است و ۸ زیرمجموعه دارد.

تعداد زیرمجموعه‌ها:

اگر مجموعه A، n عضو داشته باشد، آنگاه 2^n زیرمجموعه دارد.

مثال) $A = \{0, 1, 2, \{\phi\}\} \Rightarrow n = 4 \Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌ها $= 2^4 = 16$ ✓

نمایش ریاضی مجموعه اعداد:

یکی دیگر از روش‌های نمایش اعداد استفاده از مجموعه و نمادهای ریاضی است.

مثال) مجموعه اعداد طبیعی زوج $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ که همه مضرب ۲ هستند به صورت $2k$ که در آن k یک عدد طبیعی است نمایش داده می‌شوند پس می‌توانیم بنویسیم:

مجموعه اعداد زوج $= E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

دقت کنیم که علامت «|» خوانده می‌شود به طوری که

* مجموعه‌های اعداد طبیعی فرد، اعداد حسابی با نمادهای ریاضی به صورت زیر می‌باشد:

مجموعه اعداد فرد $= O = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

مجموعه اعداد حسابی $= \mathbb{W} = \{k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

مثال) مجموعه زیر را با نوشتن عضوها مشخص می‌کنیم:

$A = \{x^2+1 \mid x \in \mathbb{Z} ,\ -2 \leq x \leq 1\}$

① اول از قسمت زرد رنگ مقادیر x را به دست می‌آوریم: $x = -2, -1, 0, 1$

② بعد مقادیر به دست آمده را به جای x در قسمت قرمز رنگ می‌گذاریم:

$x^2+1 \xrightarrow{x=-2} 5$

$x^2+1 \xrightarrow{x=-1} 2$

$x^2+1 \xrightarrow{x=0} 1$

$x^2+1 \xrightarrow{x=1} 2$

$\Rightarrow A = \{5, 2, 1\}$

مجموعه اعداد گویا:

به هر عدد کسری به صورت $\frac{a}{b}$ که در آن a، b عددهای صحیح باشند، $b \neq 0$ باشد، عدد گویا می‌گوییم.

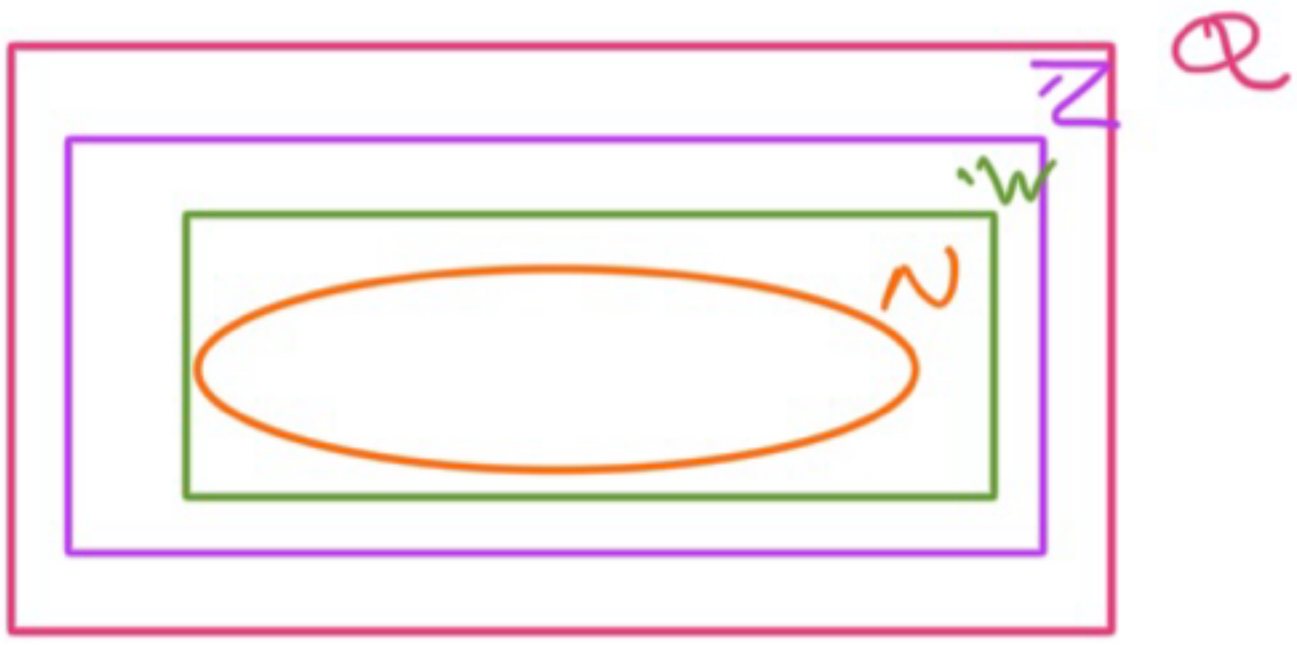
* مجموعه اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم.

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$: نمایش اعداد گویا با نمادهای ریاضی

نکات:

① هر عدد صحیحی، یک عدد گویا است. مثل $-5, 2, 3, \ldots$

② با توجه به مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ رابطه زیر برقرار است:



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

مثال)

الف) هر عدد زوج طبیعی، عددی صحیح است.

↲ درست است، زیرا اعداد طبیعی زوج زیر مجموعه اعداد صحیح است.

ب) عددی حسابی وجود دارد که طبیعی نیست.

↲ درست است، زیرا صفر عددی حسابی است ولی عدد طبیعی نیست.

پ) عددی صحیح وجود دارد که گویا نیست.

↲ نادرست است زیرا $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ بنابراین تمام اعداد صحیح یک عدد گویا می‌باشند.

ت) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح است.

↲ درست است، زیرا اعداد $\dots, \pm2, \pm1, 0$ گویا و هم چنین عدد صحیح می‌باشند.

اشتراک، اجتماع، تفاضل مجموعه‌ها:

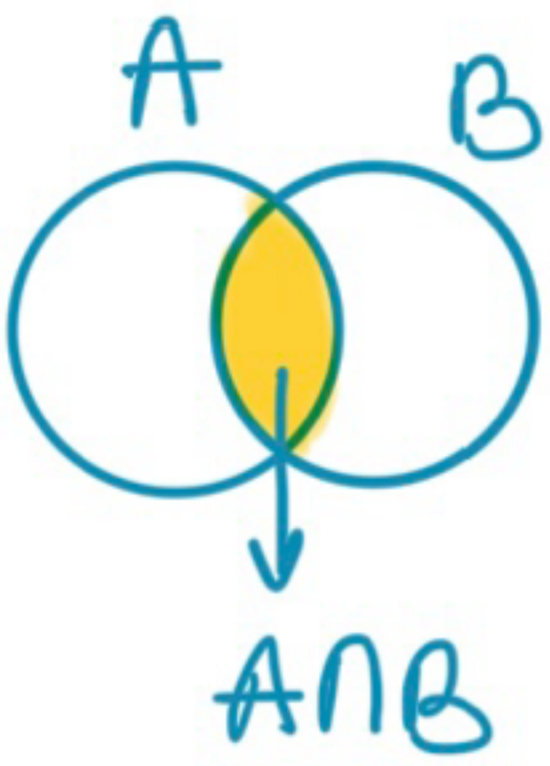
اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه A و B شامل همه عضوهایی است که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشند.

اجتماع دو مجموعه A، B را $A \cup B$ نشان می‌دهیم.

نمودار ون اجتماع دو مجموعه A و B

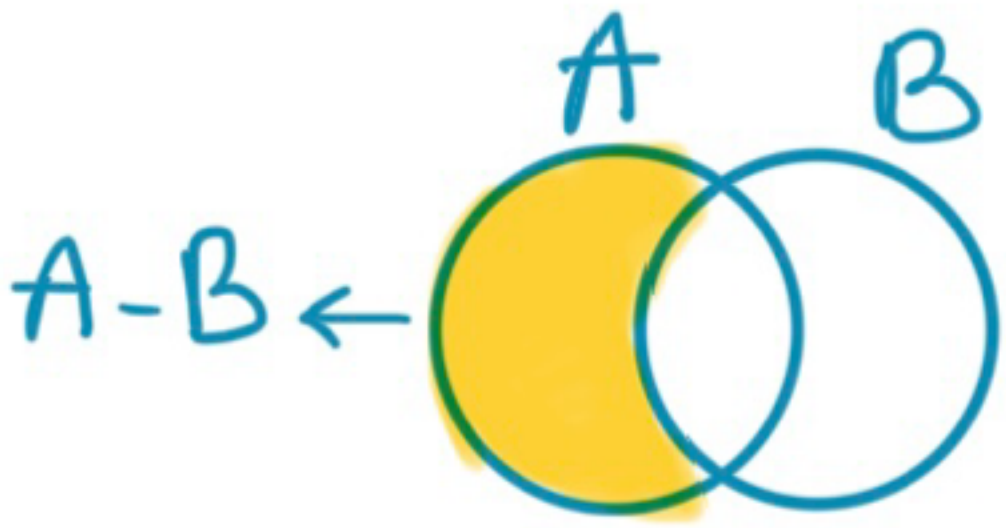
اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه A و B شامل همه عضوهایی است که هم عضو A و هم عضو B باشند.

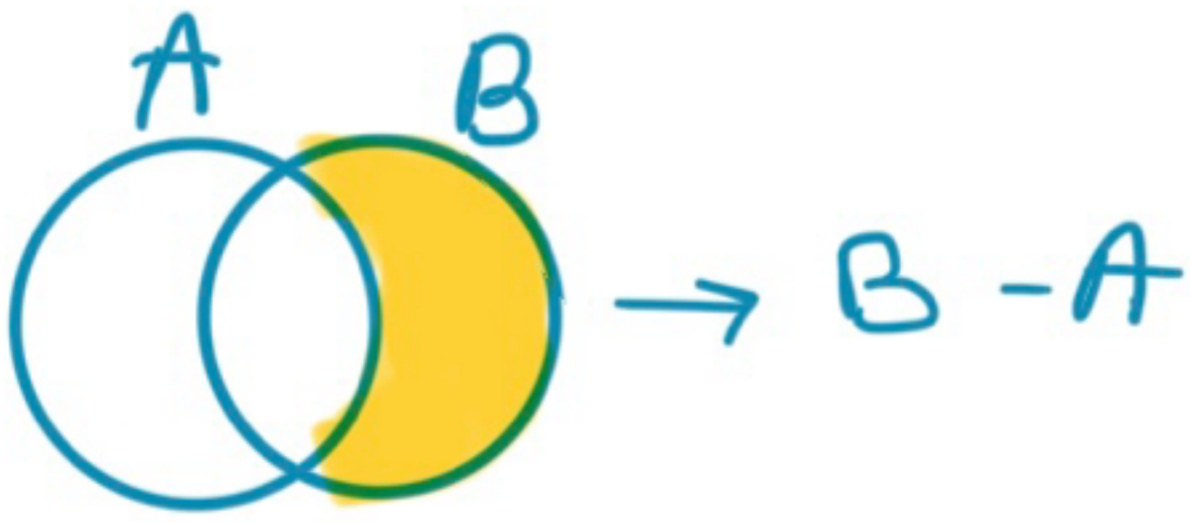
اشتراک ۲ مجموعه A و B را با $A\cap B$ نشان می‌دهیم.



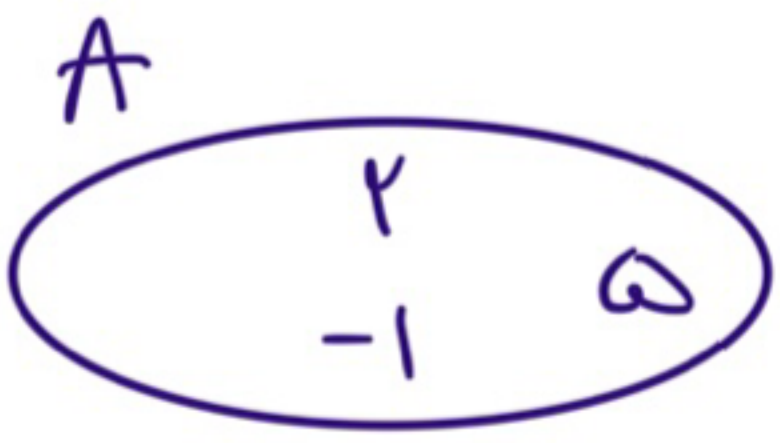
نمودار ون اشتراک
۲ مجموعه A و B

تفاضل دو مجموعه: مجموعه $A-B$ (بخوانید A منهای B) شامل همه عضوهایی است که عضو مجموعه A باشند ولی عضو مجموعه B نباشند.





(امتحان نهایی ریاضی هفتم اصفهان ۱۴۰۲)



الف) مجموعه $B=\{3,5\}$ را به نمودار روبه‌رو اضافه کنید:

$A\cup B=\{-1,2,3,5\}$

ب) با توجه به نمودار به دست آمده مجموعه‌های زیر را با اعضا نشان دهید:

$A-B=\{-1,2\}$ → از اعضای A، عضوهای B را برمی‌داریم.

$A\cap B=\{5\}$ → تنها عضو مشترک مجموعه A و B ۵ است.

(امتحان نهایی ریاضی هفتم اصفهان ۱۴۰۱)

اگر $A=\{1,0\}$ و $B=\{1,2,3\}$ و $C=\{2,4\}$ باشد، اعضای مجموعه زیر را مشخص کنید.

$(B-A)\cap C=\{2\}$

جواب:

۱) $B-A=\{2,3\}$ → عضوهایی که در B باشند ولی در A نباشند.

امتحان نهایی ریاضی نهم امتحان ۱۴۰۱

اگر $A=\{۱,۰\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ و $C=\{۲,۴\}$ باشد، اعضای مجموعه زیر را مشخص کنید.

$$(B-A)\cap C=\{۲\}$$

جواب:

۱) $B-A=\{۲,۳\}$ → عضوهایی که در B باشند ولی در A نباشند.

۲) $\{۲,۳\}\cap\underbrace{\{۲,۴\}}_{C}=\{۲\}$

احتمال

8 برای به دست آوردن احتمال هر پیشامد از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{احتمال رخ دادن پیشامد}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه‌ی حالت‌های ممکن}}$$

$$P(A)=\frac{n(A)\to \text{مطلوب}}{n(S)\to \text{کل}}$$

مثال) در پرتاب یک تاس احتمال‌های زیر را به دست آورید:

الف) احتمال آمدن عدد اول:

$n(S)=$ کل حالات $=۶$

$A=$ اول بودن $=\{۲,۳,۵\}$ $\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}$

↳ $n(A)=۳=$ تعداد اعضای A

ب) احتمال آمدن عدد بزرگتر مساوی ۵:

$n(S)=$ کل حالات $=۶$

$A=$ بزرگتر مساوی ۵ بودن $=\{۵,۶\}$ $\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

↳ $n(A)=۲=$ تعداد اعضای A

مثال) در پرتاب ۲ تاس احتمال های زیر را به دست آورید:

الف) احتمال اینکه تاس اول عدد فرد، تاس دوم عدد کوچکتر از ۳ بیاید:

$$n(S) = \underbrace{6 \times 6}_{\text{چون ۲ تاس داریم}} = 36 = \text{کل حالت ها}$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(3,1),(3,2),(5,1),(5,2)\}$$

$$\to n(A) = 6$$

$$\underset{\text{احتمال}}{P(A)} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ب) احتمال اینکه مجموع هر ۲ عدد تاس ۶ شود:

$$A = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$$

$$\to n(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

(امتحان نهایی خرداد اصفهان ۱۴۰۱)

یک تاس و یک سکه را پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه عدد رو شده عدد اول و سکه پشت بیاید چقدر است؟

$$n(S) = \underset{\text{تعداد حالات سکه}}{2} \times \underset{\text{تعداد حالات تاس}}{6} = 12$$

$$A = \{(2,\text{پ}),(3,\text{پ}),(5,\text{پ})\} \to n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$