تدریس کامل تمام مباحث ریاضیات پایه

عزیزانی که لازمه یک دانش آموز رشته ریاضی و تجربی

بلد باشه برای این پتونه پایه های ریاضیش رو

مسلط نیست و برای ورود به فصل های بعد و حل مسائل و

مشکلات و کنکور دچار مشکل میشه کلی نکته داریم همگی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

درس اول : آشنایی کامل با مجموعه های اعداد و بازه ها

تقریباً اولین چیزهایی که در طبیعت با آن‌ها سر و کار داریم شمارش است. یه دونه؟ دوتا؟ سه تا و...

به این عددها که برای شمارش اعداد طبیعی. مثلاً یکی از اولین لحظات ذوق کردن بچه ها را لحظه‌ایه که بچه‌ها می‌تونن تا 10 بشمرن. پس اولین مجموعه اعداد شکل گرفت

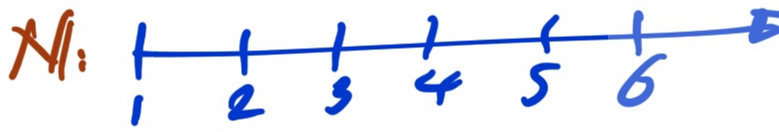
Natural numbers : $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

اون سه نقطه یعنی این مجموعه تمام نداره و تا بی‌نهایت می‌تونی بشمری و همچنین

به این جور مجموعه‌ها که تک‌تک اعضاش رو نمی‌شه مشخص کرد می‌گن مجموعه‌های نامتناهی.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

همه مجموعه های اعداد بر محور هم دارن و محور اعداد طبیعی اینه :



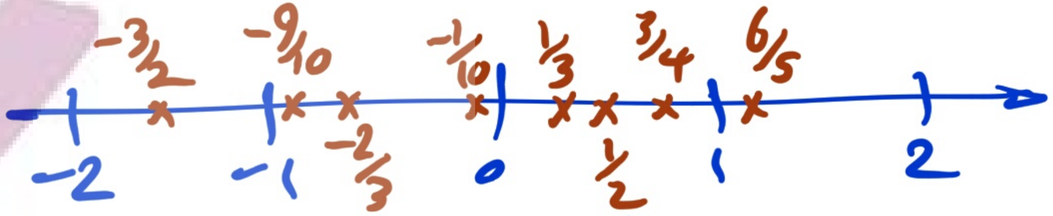
اگر عدد صفر رو به این مجموعه اضافه کنیم میشه اعداد حسابی

با اضافه شدن اعداد منفی می رسیم به مجموعه اعداد صحیح

حالا اگر این محور رو عرض رود خونه تصور کنیم اعداد صحیح مثل سنگ هایی هستن که می شه
با روش گذاشت و بسختی از عرض رود خونه عبور کرد. فضاهای خالی بین سنگ ها خیلی زیاده.
اعداد گویا متولد شدن. مثلاً بین (0,1) اعدادی مثل $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{4}$ ، ...
پیدا میشه که فضاهای خالی بین هر دو عدد صحیح رو به حد کامل پر میکنن ولی پر نمیکنن.

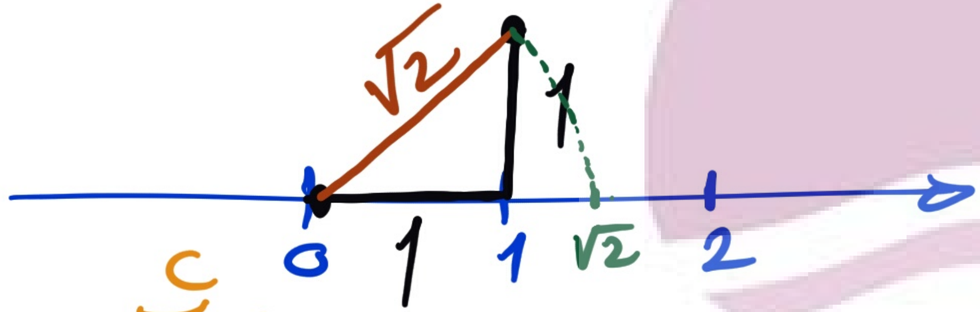
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\mathbb{Q} = \{ p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \}$$



البته مجموعه اعداد گویا تمام اعداد صحیح را هم شامل میشه یعنی ۰ و ۱ و ۱- و ... گویا هستن.

گفتیم که هنوز جای خالی داریم. مثلاً اگر یاره خطی بطول یک در نظر بگیریم محور اعداد گویا محدود نیست و یک سگمنت قائم الزاویه مساوی با اضلاع زیر رسم میکنیم



طول وتر براساس رابطه فیثاغورث میشه $\sqrt{2}$ که

هیچ عدد گویایی نمیتونه نشون داده بشه. پس به اعداد

مثل $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ و ... گویا نیست که

با کمک به اعداد گویا عرض بیشتر رو حتی در کامل نمیکنن.

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

به این مجموعه اجتماع گویا و گنگ میگن اعداد حقیقی

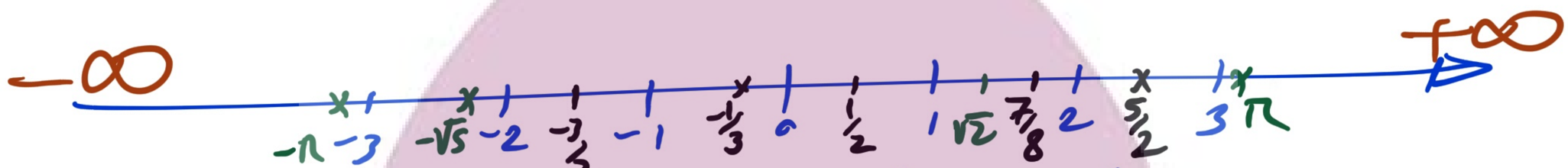
فیثاغورث

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{2}$$

اجتماع اعداد گنگ با کویا میشه مجموعه اعداد حقیقی که با $\mathbb{R}$ نمایش داده میشه. این محور از منفی بی‌نهایت $(-\infty)$ شروع میشه و تا مثبت بی‌نهایت $(+\infty)$ ادامه داره.



به قطعات این محور بازه گفته میشه که در واقع فاصله بین دو عدد و یا فاصله یک عدد تا $+\infty$ و یا از $-\infty$ تا یک عدده. اگر بخوایم کل فاصله بین دو عدد مثلا 0 تا $\frac{1}{2}$ رو روی محور اعداد حقیقی نشون بدیم میشه

$0 < x < 1$

$x \in (0,1)$

عضو

اعدادهای بین صفر و یک تعدادشون بی‌نهایت تا وجود داره

تو ریاضی به جای اینکه بگیم عددها میگیم x یا y یا z یا ...

توشه ای برای موفقیت

این بازه $(0,1)$ کل اعداد توی تونل بین دو عدد صحیح متوالی رو نشون میده ولی حدود اعداد 0 و 1 عضو بازه نیستن. به همین خاطر بهش میگن بازه باز $0 < x < 1$ روی محور اعداد حقیقی اینطوری نشون میدن:

بازه‌ای که مرزهاش جزو بازه باشن: $[0,1]$ حالا اگر حدود 0 و 1 جزو بازه نباشن یعنی xهای بین صفر و یک که $0 < x < 1$ بهش میگن بازه باز: $(0,1)$

یعنی xهای بین صفر و یک که $0 \leq x < 1$ بهش میگن بازه $[0,1)$ یا برعکس: $(0,1]$

بازه‌های نامتناهی هم داریم:

$x > -1$ یا $(-1, +\infty)$ یعنی xهای بزرگتر از -1

$x \leq 2$ یا $(-\infty, 2]$ یعنی xهای کوچکتر مساوی 2

توانا برای موفقیت

حیطه‌ی بین بازه‌ها مجدد هستن پس قوانین مجموعه‌ها هم براشون برقراره.

① اجتماع ($\cup$): از اسمش مشخصه که تو تا بازه‌ها هم جمع میشن.

$(-1,2] \cup (1,5] = (-1,5]$

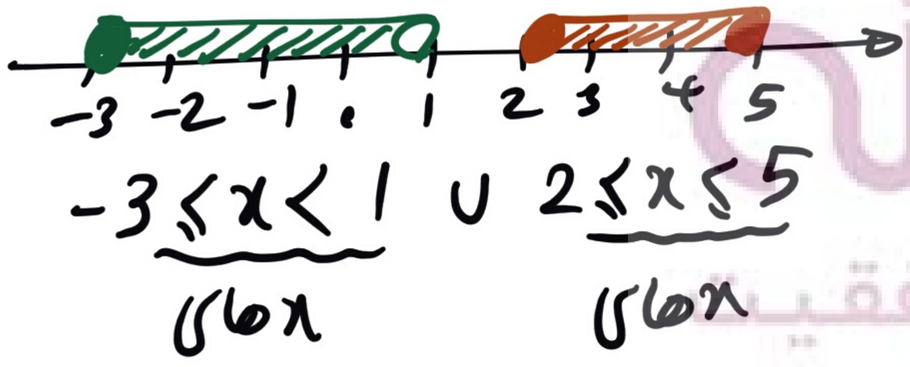
② اشتراک ($\cap$): اینکه مثل مجموعه دیگه. جاهایی که بین هردو بازه مشترکه:

$(-1,2] \cap (1,5] = (1,2]$

وقتی اشتراک وجود نداره ($\emptyset$)

بعضی مجموعه‌ها اشتراک نداشتن و بصورت اجتماع دو بازه هستن:

$[-3,1) \cup [2,5]$



$-3 \leq x < 1 \quad \cup \quad 2 \leq x \leq 5$

(اجتماع) (اجتماع)

اجتماع رو برچسب روی کوتیم به این صورت هم نشون میدیم:

$[-3,5] - (1,2) \rightarrow$ (منهای)

بعضی از بازه $[-3,5]$ بازه $(1,2)$ رو حذف کردیم و بیرون گذاشتیم.

درس دوم : کلیه قوانین و اتحادهای جبری برای ورود به مباحث پیوسته

با فرض اینکه ۴ عمل اصلی را بلدید می‌ریم سراغ اعمال جبری با متغیرها و قوانین توان در پی. به هر عبارتی که به صورت Ax^n باشه یک Monomial یا یک جمله‌ای گفته می‌شه که $A \in R$ و $n \in W$. مثلاً $2x^3$ یا $-3x$ یا $\frac{1}{3}x^2$ یا $\sqrt{5}x^7$ همگی یک Monomial هستن. راستی در توان صفر، شه متغیر از بین می‌ره یعنی x به توان صفر می‌شه ۱ و دیگه x نمی‌بینی و فقط ساده‌ترین Monomial باقی می‌مونه که همون عدد ثابته. مثلاً 2 یا $\frac{1}{5}$- یا $\sqrt{7}$

ایران تشنه
توشه ای برای موفقیت

حالا سوالی که اینجا برای بچه‌هایی که بیشتر توجه می‌کنن پیش میاد اینه که مگه توان می‌تونه بیشتر منفی یا کسری باشه؟! در پاسخ باید بگم که متأسفانه بله.

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$ مثلاً $\longrightarrow$ $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ، $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ، $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

$$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$$ مثلاً $\longrightarrow$ $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x^1} = \sqrt{x}$ $\rightarrow$ معمولاً نمی‌نویسیم

$x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3}$: 5 و فرجه x به توان 3 و فرجه 5 ، $x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ و مخرج رادیکال

توجه کنید عبارت‌هایی که تا الان با محاسبات رادیکال‌ها آشنا شدیم، برگردیم به ادامه صحبت‌مون در مورد قوانین حاکم بر عبارات جبری.

توسعه ای برای موفقیت

اگر بین دو یا Monomial علامت جمع یا تفریق بیاوریم که ترجمه کردن در جبر می‌شود Binomial

مثلاً $2x+1$ یک دوجمله‌ای درجه اول چون توان جمله رهبر یک است. x^2-5x یک دوجمله‌ای درجه دوم و x^3+7 یک دوجمله‌ای درجه سوم. مسلماً اگر یک Monomial را به هیچ اضافه‌ای نکنیم باز هم یک جمله‌ای است.

مثلاً $3x^2-7x+4$ یک سه جمله‌ای درجه دوم است.

کلاً به این عبارت‌ها Poly nomial یا چند جمله‌ای گفته می‌شود.

مثلاً $5x^2-2x^3+7x+\frac{1}{9}$ یک چهار جمله‌ای درجه 3 است. البته فرم نوشتاری استاندارد نیست چون جمله رهبر باید اول باشد پس ما مجبوریم: $-2x^3+5x^2+7x+\frac{1}{9}$

اگر بخواهیم در جمله رو درهم ضرب کنیم نیازی به انتزی داریم مثلاً $(-2x)(3x)=-6x^2$

* قوانین توان و رادیکال و تعریف قدرمطلق

① $a^n \times a^m = a^{n+m}$

② $\frac{a^n}{a^m} = a^n \div a^m = a^{n-m}$

③ $(a^n)^m = a^{nm}$

④ $a^n \times b^n = (ab)^n$

⑤ $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

⑥ $(\sqrt{x})(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$

⑦ $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$

پس می‌گوییم قدرمطلق x که همواره مقداری بزرگتر مساوی صفر دارد.

⑧ $(\sqrt[m]{x^a})(\sqrt[m]{x^b}) = \sqrt[m]{x^{a+b}}$

مثلاً $\Rightarrow (\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x^2}) = \sqrt[3]{x^3} = x^{3/3} = x$

⑨ $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

مثلاً $\Rightarrow \sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$

$\sqrt{13} \neq 2 + 3$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

اتحادهای جبری

تا الان رسیدیم به اتحادهای جبری و اثبات هندسی همراه با مثال‌های عددی

a ضربدر a چی میشه؟! میشه aa که کاشکی a^2 بهش a به توان 2.

حالا $(a+b)$ ضربدر $(a+b)$ چی میشه؟! میشه $(a+b)^2$ که کاشکی به توان 2

آره نخوایم یه جمله رو در دو جمله ضرب کنیم در واقع این جمله رو در هر توزیع و پخش کنیم که به این خاصیت هم کاشکی توزیع پذیری. مثلاً a ضربدر $(b+c)$ اینجوری میشه:

$$a \times (b+c) = a(b+c) = ab + ac$$

حالا اگه هر دو جمله‌ای باشن چی؟!

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

یه خاصیت خیلی کاربردی دیگه هم توی جمع و ضرب داریم به اسم جابجایی

$a+b=b+a$ ، $a\times b=b\times a \Rightarrow ab=ba$

* بچه‌ها برای $a\times b$ تو نوشتار حرفه‌ای ضرب هیچی ننویسن و مستقیم همون ab رو بنویسن ضرب.

$$(a+b)+(b+a)=(a+b)+(a+b)=2(a+b)$$
$$ab+ba=ab+ab=2ab$$

1 اتحاد اول: مربع دوجمله‌ای

$$(a+b)(a+b)=\underbrace{aa}_{a^2}+\underbrace{ab+ba}_{2ab}+\underbrace{bb}_{b^2} \Rightarrow (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

به این می‌گن اتحاد اول

ابزار توشه
توشه ای برای موفقیت

$(a-b)(a-b) = \underbrace{aa}_{a^2} + \underbrace{a(-b)+(-b)a}_{-2ab} + \underbrace{(-b)(-b)}_{b^2} \Rightarrow (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$: هم، ⊖، ⊕ بله

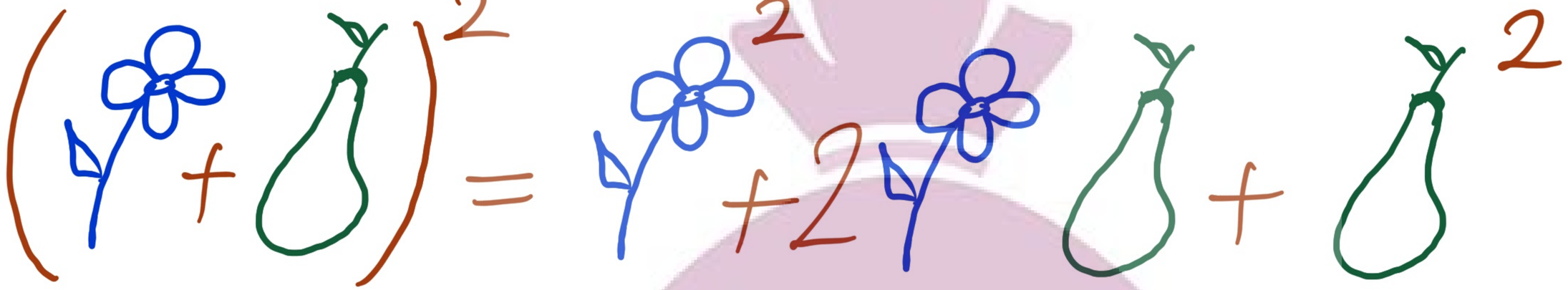
این شد قرن کامل اتحاد اول. دقت کنید این نه فرمول! و نه یک معادله معمولی.

یک معادله معمولی براساس درجش می‌تونه از صفر تا n تا ریشه داشته باشه یعنی

به ازای یک مقدار مقدارِ متناهی برقرار باشه (معادله درجه یک یک جواب داره؛ درجه 2

حداکثر به ازای 2 تا عدد برقراره یعنی داخل گیومه $x^2-2x=0$ فقط اعداد صفر و 2 توش صدق می‌کنن)

ولی اتحاد هیچ وقت. عنی بهای ۵ رط ؟ گل و گلای هم بهار کار درست در میاره.



حالا متوجه منظورم شدی؟ بجای a و b هر چیزی بذاری باز درست میشه. به همین خاطر بهش میگن اتحاد جبری (Algebric Union). البته از چپ به راست بهش میگیم بسط و صدالبته از راست به چپ بهش میگیم تجزیه:

$$(a+b)^2 \xrightarrow{\text{بسط}} a^2+2ab+b^2$$
$$a^2+2ab+b^2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (a+b)^2$$

بجای a و b می‌تونی هر عدد، متغیر یا هر چیزی رو مستقیم بذاری. معروف‌ترین کاربردهای اتحاد دوم تو ریاضی اینجاست:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

1) $(x\pm1)^2 = x^2 \pm 2x + 1$

2) $(x\pm2)^2 = x^2 \pm 4x + 4$

3) $(x\pm3)^2 = x^2 \pm 6x + 9$

4) $(2x\pm1)^2 = 4x^2 \pm 4x + 1$

من اسم این ۴ تا رو گذاشتم مربع کامل های مهم و معروف.

۲ اتحاد دوم : مکعب دو جمله ای (توان 3)

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$

حالا باید این دو تا رو بهم توزیع کنیم یعنی :

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\Rightarrow (a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

بهترین مثال برای این اتحاد $(x\pm1)^3$ هست که خیلی پرکاربرده.

ایران تحقیق
توشه ای برای موفقیت

$(x\pm1)^3 = x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1$ و $(x\pm2)^3 = x^3 \pm 6x^2 + 12x \pm 8$

این فرمای بالا خیلی معروفه، و تجزیه‌شون روهم باید بلد باشین غیر از این روش:

x^3+3x^2+3x+1 سریع تبدیل کنید $\longrightarrow (x+1)^3$

$x^3+3x^2+3x+7 = x^3+3x^2+3x+1+6 = (x+1)^3+6$

$x^3-3x^2+3x-3 = x^3-3x^2+3x-1-2 = (x-1)^3-2$

۳ اتحاد سوم: ضرب

$$(a+b)(a-b) = \underbrace{aa}_{a^2} \underbrace{-ab+ba}_{ab-ab} \underbrace{-bb}_{b^2}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

این اتحاد خیلی کاربردیه و حتی تو فاکتور گرفتن کسرها و خیلی از مباحث جبری جزو پراستفاده‌ترین اتحادهاست. سعی کنم برای آشنایی هرچه بیشتر چشمانتون بهترین مثال‌هاش رو اینجا براتون بنویسم البته از سمت تجزیه!

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ ؛ $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$

$x^6 - 1 = (x^3-1)(x^3+1)$ ؛ $x - 1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ ؛ $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴ چاق و لاغر

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$

$$\Rightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

و به همین ترتیب

$$\Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

مثال‌های مهم:

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) \quad ; \quad x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

$$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4) \quad ; \quad x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$$

اگر لازم بود:

$$x-1 = (\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

5 اتحاد آخر: جمله مشترک

این اتحاد در ۹۹٪ موارد برای تجزیه و حل معادله استفاده می‌شود ولی بسطش هم جویه ولی نه مقیاسی

$$(x+a)(x+b) = x^2+bx+ax+ab = x^2+(a+b)x+ab$$

مجموع ضرب‌شون ضرب‌شون

یعنی وقتی ضرب ما کنار اول مجموعشون طبقاً ضرب‌شون !!!

$$(x+2)(x+3) = x^2+(\text{مجموع})x+\text{ضرب‌شون} = x^2+5x+6$$

$$(x-5)(x+4) = x^2+(\text{مجموع})x+\text{ضرب‌شون} = x^2-x-20$$

ولی بیشتر سمت تجزیه کاربرد داره بچه‌ها:

$$x^2+7x+12 = (x+4)(x+3)$$

مجموع ضرب‌شون — ضرب‌شون → اول ضرب

* نکته مهم اینکه در مرحله اول جمله ولی تو مرحله اول از ضرب کمک بگیر و بعد با جمع چک کن.

الگوریتم بسیار مفید با توجه به مثال صفحه قبل:

حالا اگه گفته بود x^2-x-12 اتفاقا جواب‌ها 4 و 3 خواهد بود نه ± 4 چون مجهول ما بود (-1) شده.

ممکنه بعد از پیدا کردن ضرب تعدادی مجهول رو با اعداد یک رقمی درست کنی و لو نباشه که مواری سراغ حدرقمی: مثلاً وقتی هیچ کاره $x^2+18x+72$ اول نگاه ممکنی به ضرب‌شون که شده 72 و ناخودآگاه یاد 8 و 9 می‌افتی. بعد می‌بینی مجموعشون نمی‌تونه 18 باشه. پس مواری سراغ سه حدرقمی و از 11 شروع میکنی. 11 ضربدر چی 72 نمیشه ولی 12×6 میشه.

$$\Rightarrow x^2+18x+72 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x+12)(x+6)$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

واکاوی تکنیک در مورد آی دی ها

حالا چند مثال خوب:

$x^2+15x+36 = (x+12)(x+3)$

$x^2+27x+72 = (x+3)(x+24)$

$x^2+6x-55 = (x+11)(x-5)$

همونطور که گفتم آی دی ها بیشتر برای حل سوالات کاربرد دارن و علی الخصوص این اتفاق. دقت کنید جواب های سوالات تریبیع اعدادی هستن که برای یکی کردن جاهای خالی دنبال پیدا کنی. مثال رو ببین:

$x^2+x-6=0 \Rightarrow (x+3)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$

جاهای خالی شده یکی هاشتن دنبال اشتباه نکردی که. دو تا عدد 3 و 2- بودن و نه 3- و 2.

بچه‌ها گاهی عزیزای من نمیدونن چرا 2- دنبال دو کامل کردن دی جوابهای سوالات تریبیع نبودن:

$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases}$

دو تا عددها 3 و 5 ولی جوابهای ما در

توشه ای برای موفقیت

درس سوم : حل معادلات و نامعادلات درجه ۱ و ۲

۱- معادله و نامعادله درجه یک :

مثال ①: $x-1=0 \Rightarrow x=1$

مثال ②: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

مثال ③: $-x+2=0 \Rightarrow x=2$

مثال ④: $3x-2=0 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

مثال ⑤: $3x+5>0$

$\Rightarrow 3x>-5 \Rightarrow x>-\frac{5}{3}$

مثال ⑥: $2x-1<0$

$\Rightarrow 2x<1 \Rightarrow x<\frac{1}{2}$

مثال ⑦: $-2x+1<0$

$\Rightarrow 2x>1 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$

مثال ⑧: $7-3x<0$

$\Rightarrow 3x>7 \Rightarrow x>\frac{7}{3}$

۱- تابع درجه یک یا خطی :

$f(x)=ax+b$

$a \neq 0$ شیب

b عرض از مبدأ

$y=kx$ ← اگر $b=0$ باشد

شیب = رشد عرضی / رشد طولی $= m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

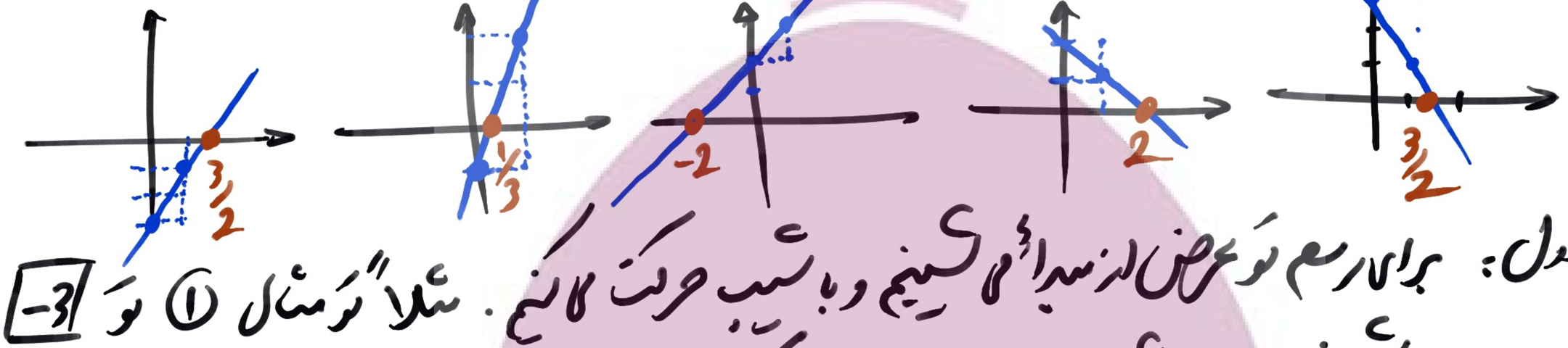
یعنی شیب خط یعنی به ازای هر یک واحد که طول بگیریم چند واحد عرض می‌گیریم.

مثلاً اگر شیب خطی 2 شده یعنی به ازای هر یک واحد که طول بگیری 2 تا بالا می‌رود.

و اگر شیب خطی $\frac{1}{3}$ شد یعنی به ازای هر یک واحد که طول بگیری 3 تا سمت راست می‌رویم.

ایران توفیق
توشه ای برای موفقیت

1) $y=2x-3$ 2) $y=3x-1$ 3) $y=x+2$ 4) $y=-x+2$ 5) $y=-2x+3$



تذکر اول: برای رسم توابع درجه اول از سمت چپ شروع می‌کنیم و با شیب حرکت می‌کنیم. مثلاً برای مثال ① تابع -3 را می‌بینیم روی شیب 2 هستیم یک واحد طول می‌رویم و دو واحد بالا. بعد هم وصل می‌کنیم.

تذکر دوم: بهترین نقطه برای خط یا هر نمودار درجه‌ای ریشه‌هاست یعنی محل برخورد با محور xها. منظور از علامت تابع، علامت y یا عرض نقاط نه قبل و بعد از ریشه در جدول تعیین می‌کنیم. برای مثال‌های 1، 2 و 3 چون از ریشه به بعد مثبت و برای مثال‌های 4 و 5 چون از ریشه به بعد منفی در واقع قبل و بعد ریشه علامت عوض می‌شود.

2- معادله درجه 2 :

$$ax^2+bx+C=0$$

اگر a و c هم علامت شد
اول شک کن ؛ بعدا چک کن

اگه مختلف العلامات
حتما دو تا ریشه مختلف العلامات

فرم کامل

راه اول

دیدن رابطه بین ضرایب

if $a+b+C=0$

$x_1=1$ ، $x_2=C/a$

$3x^2-7x+4=0$

$x_1=1$ ، $x_2=4/3$

if $a+C=b$

$x_1=-1$ ، $x_2=-C/a$

$3x^2+8x+5=0$

$x_1=-1$ ، $x_2=-5/3$

راه دوم

تجزیه

برای زمانهایی که Δ یا رابطه ای نمی بینی و ضریب ها هم بزرگ:

$x^2-9x+20=0$

$(x-4)(x-5)=0$

$x=4$ ، $x=5$

راه کلی : $\Delta=b^2-4ac$

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

واسه وقتایی که چاره ای نداری

$2x^2-3x-2=0$

$\Delta=(-3)^2-4(2)(-2)=25$

$x_1,x_2=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2(2)}$

$x_1=2$ ، $x_2=-1/2$

فرم ناقص

یا حالت ! $b=0$

$ax^2+C=0$

$4x^2-9=0$

$4x^2=9$ دوتا قرینه

$x^2=9/4 \Rightarrow x=\pm 3/2$

$x^2+3=0$

$x^2=-3$

یا جواب ندارد

حالت ؟ $C=0$

$ax^2+bx=0$

$3x^2+5x=0$

$x(3x+5)=0$

$x=0$ ، $x=-5/3$

بین این دوتا ریشه همیشه یکیش صفره.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$f(x)=ax^2+bx+c$

بهترین شکل کلی تندی نمودار سهمی

۲- تابع درجه دو یا سهمی

$\alpha+\beta=S$

$S=-b/a$

$\alpha\beta=P$

$P=c/a$

$a>0$

$a<0$

$\Delta>0$

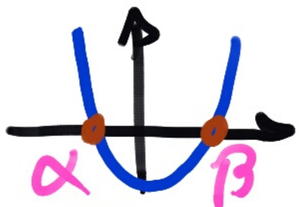
$\Delta=0$

$\Delta<0$

$\Delta>0$

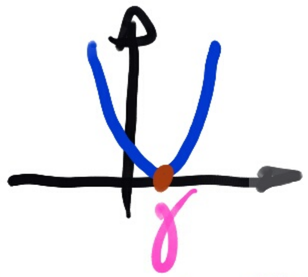
$\Delta=0$

$\Delta<0$



بین دو ریشه

مثبت

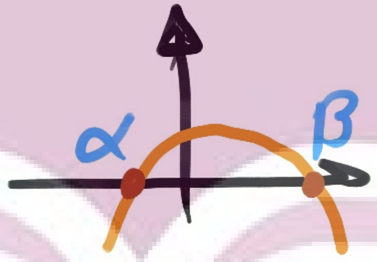


هم‌ریشه

نامثبت

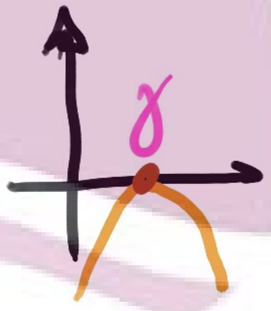
هم‌ریشه

مثبت



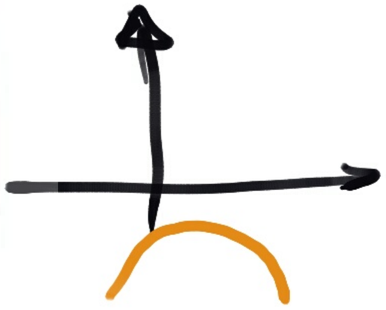
بین دو ریشه

مثبت



هم‌ریشه

نامثبت



هم‌ریشه

منفی

* α و β را دارد هستند ولی به کار ما در این نصف چون علامت قبل و بعد آن تغییر نمی‌کند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

اولین کاربرد این 6 تا شکل حل نامعادله درجه دوم که خیلی خیلی مهمه و باعث آسیل بچه‌ها.

میتونی بجرأت بگی ته حل 90-80 درصد سختی کار رسیدن به چنین نامعادله‌ای: $x^2-5x+4<0$

مهمترین سوال آموزشی: عبارت داخل مستطیل خبره یا سوال؟!

باید بگم قطعاً سوال چون دارم میبینم که این همه نکته و توجه‌های معقیه نیز زیر مجموعه‌هاست؟ شما باید اول کدشو برو تا پیدا کنی. پس اول معادله رو حل کن

$x^2-5x+4<0$

گام اول: معادلش کن $\rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=4 \end{cases}$

گام دوم: شناسایی کن $\rightarrow$ $\Rightarrow$ جواب بین دو ریشه

* حالا اگه می‌پرسید کجاها مثبته جواب می‌شه خارج دو ریشه.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

درس بعدی درجه ۲ برای تحلیل معادلات درجه دومیه که توشون یه مجهول مثل m هست.
من اسمشون رو گذاشتم مسائل m دار و به ۳ دسته تقسیمشون کردم.

دسته اول

۵ نقطه

برازای کدام مقادیر m

$(2m-1)x^2+6x+m-2=0$

دارای دو ریشه حقیقی متمایز؟

$\Delta > 0$

$(6)^2-4(2m-1)(m-2)>0$

$36-4(2m^2-5m+2)>0$

$9-2m^2+5m-2>0$

$2m^2-5m-7<0$

$-1<m<3.5$

دسته دوم

۵ ، ۵

برازای کدام مقادیر m

$y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$

همواره پایین محورها؟

$a<0$ ، $\Delta<0$

$1-m<0 \Rightarrow m>1$ (I)

$4(m-3)^2-4(1-m)(-1)<0$

$(m-3)^2+1-m<0$

$m^2-7m+10<0$

$(m-5)(m-2)<0$

$2<m<5$ اشتراک (I) $\rightarrow 2<m<5$

دسته سوم

S ، P ، ۵

برازای کدام مقادیر m

$(m-6)x^2-2mx-3=0$

دارای دو ریشه حقیقی مثبت؟

$S>0$: $\frac{2m}{m-6}<0 \Rightarrow m<0$ یا $m>6$ (مثبت)

$P>0$: $\frac{-3}{m-6}>0 \Rightarrow m-6<0$ (اول) $\Rightarrow m<6$

$\Delta>0$: $4m^2-4(m-6)(-3)>0$

$m^2+3m-18>0$

$(m+6)(m-3)>0$ ، ۵

$m>3$ یا $m<-6$

ایران توشه
توشه‌ای برای تفاوت

S و P از کجا اومده بیرون؟

بعضی از معادلات درجه دوم دلت شون مربع کامل نیست و جواباشون گنده ولی بارغ از شکل جواباشون میشه‌ی مجموع و ضربشون رو مستقیم درست بیاری. ازاین به بعد می‌گیم معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه‌هاش α و β.

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=\beta \end{cases} \quad \text{if } \alpha>\beta$$

$$\Rightarrow x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \longrightarrow \alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\ \beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

مجموع ریشه‌ها یعنی $\alpha+\beta$ رو با S که شون می‌گیم و ضربشون یعنی $\alpha\beta$ رو با P.

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-b/a$$

$$P=\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=c/a$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت