

۱

تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 3|$ روی بازه $[-2, \frac{3}{4}]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۲
(۴) ۳

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵ ۷

۲

در تمام گزینه‌ها هر نقطه دلخواه از \mathbb{R} یک نقطه بحرانی y است، به جز

(۱) $y = [x - [x]]$
(۲) $y = \left[\frac{|x|}{|x| + 1} \right]$
(۳) $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$
(۴) $y = \tan x \cdot \cot x$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

۳

کمترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2$ در بازه $[-1, 3]$ چقدر است؟

- (۱) صفر
(۲) -۱
(۳) -۳
(۴) -۴

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵ ۷

۴

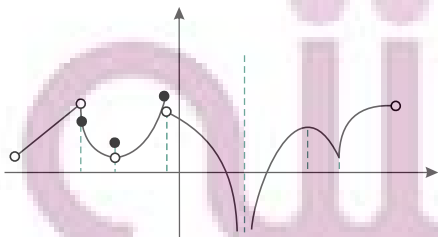
تابع f در نقطه c دارای مینیمم است و مشتق راست دارد. الزاماً این مشتق چگونه است؟

- (۱) مثبت
(۲) منفی
(۳) نامنفی
(۴) نامثبت

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۵

باتوجه به نمودار زیر، تابع چند ماکزیمم نسبی و چند نقطه بحرانی دارد؟



- (۱) ۵ - ۴
(۲) ۵ - ۳
(۳) ۶ - ۳
(۴) ۶ - ۴

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵ ۷

۶ نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x}{1-x^2}$ بر کدام بازه صعودی است؟

- (۱) $(-2, 0)$ (۲) $(-\infty, -2)$
(۳) $(0, 2)$ (۴) $(-2, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۷ اگر $x = 2$ طول نقطه اکسترم موضعی تابع $y = 3x - \frac{a}{x}$ باشد، مقدار ماکسیم موضعی آن کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) -۱۲
(۳) ۶ (۴) -۶

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

۸ تابع $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ روی کدام بازه صعودی است؟

- (۱) $(1, +\infty)$ (۲) $(-2, 1)$
(۳) $(0, 2)$ (۴) $(-1, 1)$

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

۹ از نقطه‌ای واقع در ربع اول و روی خط $y = \frac{6-x}{2}$ دو عمود بر محورهای مختصات وارد می‌کنیم، ماکزیم مساحت چهار ضلعی پدیدآمده کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۴/۵
(۳) ۵ (۴) ۵/۵

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

۱۰ اگر $A(3, 2), B(1, -1), C(x, 0)$ و $CA + CB$ مینیمم باشد، x کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{3}$
(۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

۱۱ بیشترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در بازه $[-1, 2]$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) ۴

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴

۱۲ مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = |x^2 - 4|$ چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲
(۳) صفر (۴) -۴

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

مقدار مینیمم نسبی تابع $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ کدام است؟

۱۳

(۱) صفر

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) -۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نمودار تابع $f(x) = |x - 3| |x|$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱۴

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی شمار

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۵

در تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ اگر x در بازه $(\frac{3}{4}, 3)$ تغییر کند، مقادیر y در کدام بازه تغییر می‌کنند؟

۱۵

(۱) $[-1, 18]$

(۲) $(\frac{17}{8}, 19)$

(۳) $[-1, 19]$

(۴) $[-1, 19)$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

اگر تابع $f(x) = 2x^2 + \frac{a}{3x}$ دارای \max نسبی باشد، حدود a کدام است؟

۱۶

(۱) $-4 < a < 4$

(۲) $a > 0$

(۳) $a < 0$

(۴) هیچ مقدار a

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۵

ماکزیمم تابع با ضابطه $f(x) = -|x| \cos x$ در بازه $[-1, 1]$ کدام است؟

۱۷

(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\cos 1$

(۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

غلظت یک داروی شیمیایی در خون t ساعت پس از تزریق از رابطه $C(t) = \frac{3t^2}{t^3 + 4}$ به دست می‌آید. بیشترین غلظت این دارو در خون چند ساعت پس از تزریق خواهد بود؟

۱۸

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

(۴) $\sqrt[3]{9}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در بین تمام مستطیل‌ها با محیط ثابت ۱۴ بیشترین مساحت کدام است؟

۱۹

(۱) ۴۹

(۲) $\frac{49}{4}$

(۳) ۱۲

(۴) ۱۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

۲۰

اختلاف مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ روی بازه $[-\frac{1}{p}, 2]$ چقدر است؟

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶۷

۲۱

تابع f روی بازه (a, b) تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است؟

(۱) هر نقطه بحرانی، نقطه اکسترمم نسبی است.

(۲) هر نقطه اکسترمم نسبی، نقطه بحرانی است.

(۳) در هر نقطه بحرانی، مشتق تابع صفر است.

(۴) در هر نقطه اکسترمم نسبی، مشتق تابع صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۲۲

مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه $[-4, 3]$ ، کدام است؟

۲۷ و -۴۵ (۲)

۲۴ و -۱۸ (۱)

۳۶ و -۲۷ (۴)

۲۷ و -۳۶ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۳

مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & ; -3 < x < 0 \\ \sqrt{x} & ; 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$ کدام اند؟

۲ - صفر (۲)

۹ - صفر (۱)

(۴) \max و \min مطلق ندارد.

(۳) \max مطلق ندارد.

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵۷

۲۴

اگر $f(1) = 3$ یک مقدار اکسترمم موضعی تابع $y = ax + \frac{b}{x+1}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵۹

ایران توتنه
توشه ای برای موفقیت

$$f(x) = x|x^2 - 3|$$

بحرانی \Rightarrow مشتق‌ناپذیر \Rightarrow نقاط زاویه‌دار $\left\{ \begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{array} \right.$

همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازه نیز بحرانی هستند، پس $\left\{ -\sqrt{3}, -1, 1, -2, \frac{3}{4} \right\}$ نقاط بحرانی روی بازه $\left[-2, \frac{3}{4} \right]$ هستند.

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۵

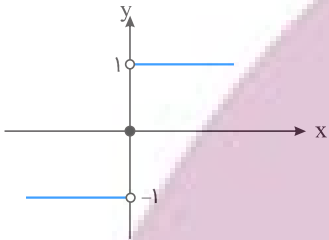
ایران توانسته
توشه‌ای برای موفقیت

$$\text{گزینه ۱: } y = \left[\underbrace{x - [x]}_{\in \mathbb{Z}} \right] = [x] - [x] = 0$$

تابع ثابت $y = 0$ است و همه نقاط \mathbb{R} بحرانی هستند.
گزینه ۲) تابع ثابت $y = 0$ است و همه $x \in \mathbb{R}$ بحرانی است.

$$y = \left[0 \leq \frac{|x|}{|x|+1} < 1 \right] = 0$$

$$\text{گزینه ۳: } y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$



همه اعداد $x \in \mathbb{R}$ بحرانی است با مشتق صفر است و در $x = 0$ هم تابع ناپیوسته و مشتق ناپذیر و بحرانی است.

$$\text{گزینه ۴: } y = \tan x \cdot \cot x = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \sin x} = 1$$

همه $x \in \mathbb{R} - \{x = \frac{k\pi}{2}\}$ بحرانی هستند. نقاط $x = \frac{k\pi}{2}$ که $k \in \mathbb{Z}$ بحرانی نیستند، چراکه در دامنه نیستند.

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \xrightarrow{f'=0} x = 0, 2$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -4 \\ y = -4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{\min} = -4$$

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵۷

ایران توفیق
توشه ای برای موفقیت

باتوجه به اینکه تابع f در نقطه $x = c$ مشتق راست دارد پس حتماً در همسایگی راست این نقطه تعریف شده است. نقطه $x = c$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین به ازای هر x عضو همسایگی راست این نقطه داریم:

$$\begin{cases} x > c \\ f(x) \geq f(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - c > 0 \\ f(x) - f(c) \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

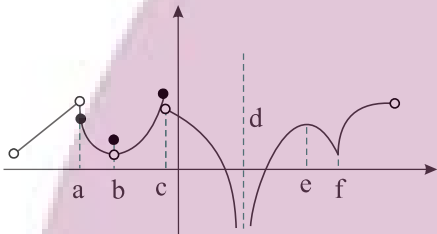
طبق تعریف مشتق راست در نقطه $x = c$ داریم:

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \stackrel{(*)}{\geq} f'_+(c) \geq 0$$

بنابراین مشتق راست تابع f در نقطه $x = c$ الزاماً نامنفی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

max نسبی: b, c, e
نقاط بحرانی: a, b, c, e, f



مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه تابع روی این بازه پیوسته و $f'(x) > 0$ باشد.

گام دوم

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط \mathbb{R} به جز دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ تعریف شده است. داریم:

$$y = \frac{x}{1 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{(1 - x^2) - (-2x)x}{(1 - x^2)^2} = \frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$$

تابع y' به ازای تمام نقاط عضو دامنه تعریف تابع y ، مثبت است؛ بنابراین کافی است بازه‌ای را انتخاب کنیم که هیچ‌کدام از دو مقدار $x = \pm 1$ درون بازه نباشد، باتوجه به گزینه‌ها، نمودار تابع روی بازه $(-\infty, -2)$ صعودی است.

توشه ای برای موفقیت

$$y' = 3 + \frac{a}{x^2} \Rightarrow y'(2) = 3 + \frac{a}{4} = 0 \Rightarrow a = -12$$

$$\Rightarrow y' = 3 - \frac{12}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	-2	0	2
y'	+	-	-
y	-12		12

نقطه $(-2, -12)$ نقطهٔ ماکسیمم نسبی است.

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶۹

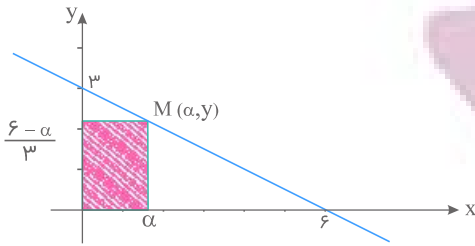
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

x	-1	1
f'(x)	-	+
f(x)	↘	↗

تابع روی بازه $(-1, 1)$ صعودی است.

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶۹

ایران توانسته
توشه ای برای موفقیت



نقطه دلخواهی به مختصات $M(\alpha, \frac{6-\alpha}{3})$ روی خط $y = \frac{6-x}{3}$ در نظر می‌گیریم و مساحت مستطیل نشان داده شده را برحسب α می‌یابیم، سپس ماکزیمم سطح را پیدا می‌کنیم:

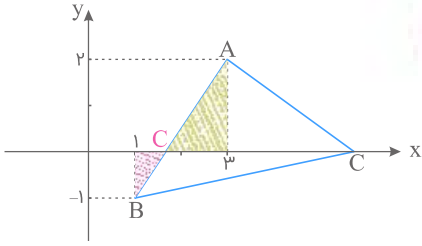
$$S = \alpha \left(\frac{6-\alpha}{3} \right) = \frac{1}{3} (6\alpha - \alpha^2)$$

طول نقطه‌ای که مساحت به ازای آن حداکثر می‌شود $\alpha = 3$ $S' = \frac{1}{3} (6 - 2\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 3$

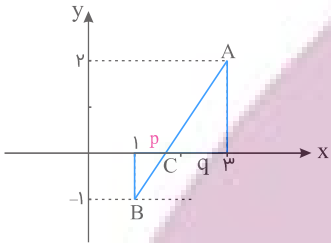
$$S_{\max} = (3) \left(\frac{6-3}{3} \right) = \frac{9}{3} = 3$$

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

ایران توانسته
توشه‌ای برای موفقیت



حتماً لازم نیست فاصله C از A و C از B را بنویسیم و مجموع آن را مینیمم کنیم. واضح است که اگر A و C و B در یک راستا قرار بگیرند، $CA + CB$ مینیمم می‌شود و BA به صورت یک خط مستقیم درمی‌آید.



دو مثلث نشان داده شده متشابه‌اند. فاصله C تا $x = 1$ را p و فاصله C تا $x = 3$ را q در نظر می‌گیریم:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{p}{2 = p + q} = \frac{1}{2 + 1 = 3}$$

$$p = \frac{2}{3} \Rightarrow x_C = 1 + p = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

راه دیگر این بود که معادله خط AB را نوشته و طول برخورد با محور x ها را بیابیم.

تالیفی مدرسه ریاضی سلامیان

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \xrightarrow{f'=0} x = 1 \quad \text{بحرانی}$$

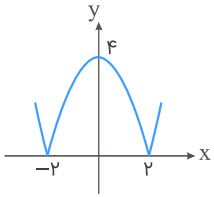
همچنین ابتدا و انتهای بازه هم نقاطی بحرانی هستند. چون $f(1) = -2$ ، $f(-1) = 2$ و $f(2) = 2$ پس ماکزیمم f در این بازه برابر ۲ است.

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴

ایران توشه

توشه ای برای موفقیت

$$f(x) = |x^2 - 4|$$



باتوجه به شکل کمترین مقدار تابع صفر است.

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	0	
y'	-	+
y	min	

مینیمم تابع در $x = 0$ رخ می‌دهد و برابر است با:

$$y(0) = -1$$

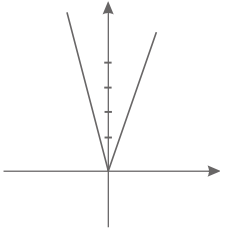
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ایران توانسته
توشه‌ای برای موفقیت

$$f(x) = |x - 3|x|| = \begin{cases} |-2x| = 2x & ; x \geq 0 \\ |4x| = -4x & ; x < 0 \end{cases}$$



$x = 0$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است.

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۵

در واقع برد تابع را خواسته وقتی $x \in [-\frac{3}{2}, 3]$ است:

$$y = x^3 - 3x + 1$$

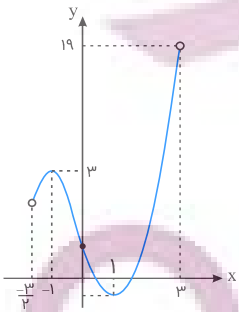
$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\frac{3}{2}$	-1	1	3
$f(x) = x^3 - 3x + 1$	$\frac{17}{8}$	3	-1	19

$$\min = -1 \quad \max = 19$$

$$R_f = [-1, 19]$$

دقت داریم که چون $x = 3$ در بازهٔ داده شده نیست، عرض آن نقطه یعنی ۱۹ هم در مجموعه مقادیر y ها نیست.



$$f(x) = 2x^2 + \frac{a}{3x} \Rightarrow f'(x) = 4x - \frac{a}{3x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{12x^3 - a}{3x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{a}{12}}$$

x	$\sqrt[3]{\frac{a}{12}}$
f'	- +
	↙ ↘
	min

این تابع در $x = \sqrt[3]{\frac{a}{12}}$ دارای min نسبی است و max نسبی ندارد پس هیچ مقداری برای a یافت نمی‌شود.

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۵

گزینه ۱

۱۷

می‌دانیم به ازای $-1 \leq x \leq 1$ همواره $\cos x > 0$ است؛ از طرفی به ازای هر x ، $|x| \geq 0$ است بنابراین به ازای $x \in [-1, 1]$ نامساوی $-|x| \cos x \leq 0$ برقرار است. می‌دانیم بیشترین مقدار یک عبارت نامثبت برابر صفر است، بنابراین در بازه $[-1, 1]$ به ازای $x = 0$ ، ماکزیمم مقدار تابع $f(x)$ برابر صفر خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

گزینه ۲

۱۸

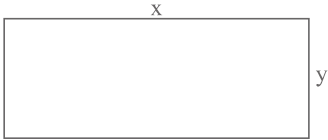
$$C'(t) = \frac{6t(t^3 + 4) - 3t^3(3t^2)}{(t^3 + 4)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 3t(2t^3 + 8 - 3t^3) = 0 \Rightarrow t^3 = 8 \Rightarrow t = 2$$

بیشترین غلظت

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

ایران توانسته
توشه ای برای موفقیت



$$\text{محیط} = 2(x + y) = 14 \Rightarrow x + y = 7$$

ماکزیم مساحت وقتی رخ می‌دهد که $x = y = \frac{7}{2}$ باشد:

$$\text{Max}(S) = \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

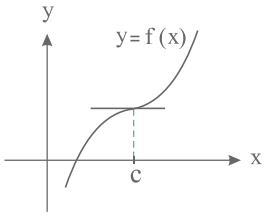
$$f'(x) = -6x^2 + 6x \xrightarrow{f'=0} x = 0, 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

$$\text{max} - \text{min} = 1 - (-4) = 5$$

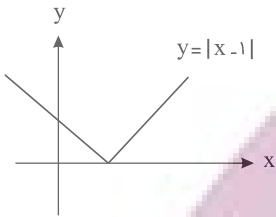
مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶۷

ایران توانسته
توشه ای برای موفقیت

با آوردن مثال نقض، گزینه‌های نادرست را رد می‌کنیم.
گزینه اول: نقطه $x = c$ در نمودار زیر، یک نقطه بحرانی است اما اکسترم نسبی نیست.



گزینه سوم: نقطه $x = 1$ در تابع $y = |x - 1|$ یک نقطه بحرانی است اما مشتق تابع در این نقطه تعریف نشده است.



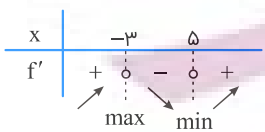
گزینه چهارم: نقطه $x = 1$ اکسترم نسبی تابع $y = |x - 1|$ است اما مشتق تابع در این نقطه برابر با صفر نیست.
بنابراین هر نقطه اکسترم نسبی، قطعاً یک نقطه بحرانی تابع است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

نقاط بحرانی تابع را در فاصله $[-4, 3]$ به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 15$$

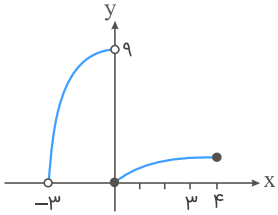
$$\xrightarrow{f'(x)=0} x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3) = 0$$



نقاط بحرانی تابع در بازه $[-4, 3]$ = $-3, -4, 3$

$$\left. \begin{aligned} f(-4) &= -\frac{64}{3} - 16 + 60 = \frac{68}{3} \\ f(-3) &= \frac{(-3)^3}{3} - 9 + 45 = 27 \\ f(3) &= \frac{3^3}{3} - 9 - 45 = -45 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{x \in [-4, 3]} \begin{cases} y_{\min} = -45 \\ y_{\max} = 27 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & ; -3 < x < 0 \\ \sqrt{x} & ; 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



min مطلق: صفر
max مطلق: ندارد.

مدارس برتر ایران علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵ ۷

$$y' = a - \frac{b}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} y(1) = 3 \Rightarrow a + \frac{b}{4} = 3 \\ y'(1) = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

پس $a + b = 5$ است.

مدارس برتر ایران ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵ ۹

ایران توانمند
توشه ای برای موفقیت