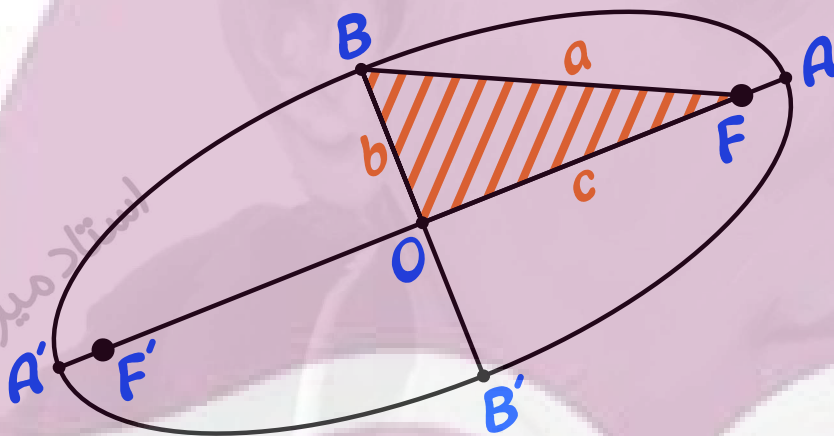
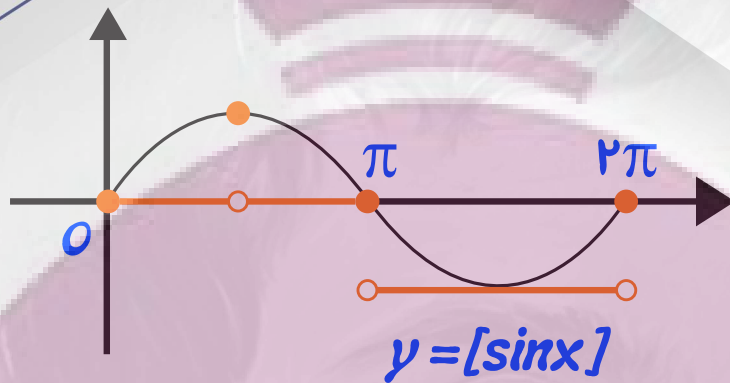
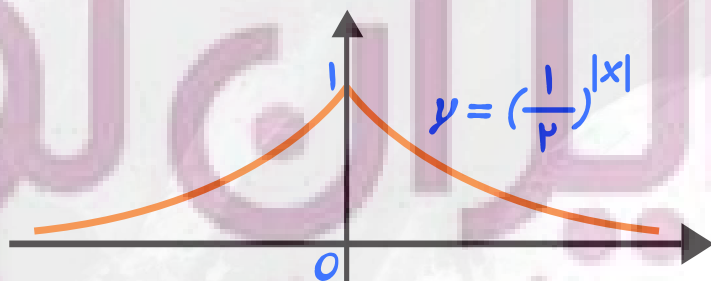


امیر هوشنگ انصاری

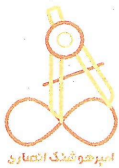


ریاضیات

مبحث: قدرمطلق و جزء صحیح



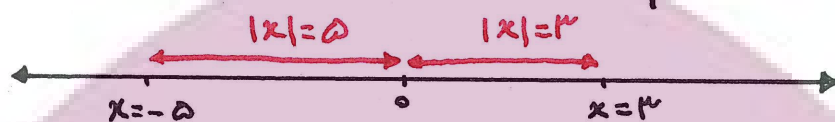
امیر هوشنگ انصاری



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

① تعریف قدر مطلق: روی محور اعداد حقیقی عدد x را در نظر بگیریم، مهم نیست x در قسمت مثبت یا منفی محور است، فاصله x از مبدأ مختصات را قدر مطلق x می نامیم و با $|x|$ نشان می دهیم.



* پس $|x|$ یک فاصله است و فاصله هم هیچ زمانی منفی نمی شود.

② تابع قدر مطلق

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{مثلاً } f(x) = |3x+1| = \begin{cases} 3x+1, & 3x+1 \geq 0 \\ -(3x+1), & 3x+1 < 0 \end{cases}$$

در حالت کلاسیک به فرم زیر می نویسیم:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

③ خواص ابتدایی قدر مطلق

الف) $|x| = |-x|$

ب) $\sqrt[n]{x^n} = |x| \quad (n \in \mathbb{N})$

پ) $|x \cdot \Delta| = |x| \cdot |\Delta|$

ت) $\left| \frac{x}{\Delta} \right| = \frac{|x|}{|\Delta|}$

ث) $|x^n| = |x|^n \quad (n \in \mathbb{N})$

ج) $x^2 = \Delta^2 \Rightarrow |x| = |\Delta| \Rightarrow x = \pm \Delta$



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

④ تعیین فاصله دو نقطه روی محور اعداد حقیقی

مهم است دو نقطه a و b روی محور برداریم یک حلوتر از دیگری است. در هر شرایطی فاصله دو نقطه a و b را با $|a-b|$ یا $|b-a|$ نشان می‌دهیم.



نمونه ۱) $|x-3|=4 \iff$ فاصله x از ۳ برابر ۴ است $\iff x = -1 \text{ یا } 7$

نمونه ۲) $|x-5|=2 \iff$

نمونه ۳) $|x+2|=1 \iff$

نمونه ۴) $|x-2| + |x-5| = 4 \iff$

نمونه ۵) $|x+3| - |x-2| = 5 \iff$

⑤ حذف قدر مطلق در عبارت‌های جبری

در این عبارت جبری اگر قدر مطلق داشته باشیم، همین تیرین روش برای حذف قدر مطلق، تعیین علامت است.

نمونه ۱) $f(x) = x|x-2| + |x^2-1|$

مثال ۱) تابع $f(x) = |x^2-2x-1| + |x^2-4|$ در بازه‌ی $[a, b]$ بصورت $f(x) = mx+n$ نمایش داده می‌شود، واسطه‌ی حسابی m ، b برداریم است؟

۳ (ع)

-۱ (ک)

۱ (پ)

-۳ (د)

(حل)

توشه ای برای موفقیت



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

مثال ۲) تابع $f(x) = |12x - 6| + 2|x + 1| + 1$ در بازه $[a, b]$ مقدار ثابت c است، $a + b + c$ کدام است؟

-۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

حل

تذکره مهم: در توابع قدر مطلق هر منطقه ای که شده، قسمت مساوی هم به آن اضافه می شود

مثال ۳) اگر $x^2 < x + 2$ باشد، مساحت بین نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ و محور x ها و خط $x = \frac{4}{3}$ کدام است؟

۱ (۴)

۳، ۵ (۳)

۱، ۵ (۲)

۴ (۱)

حل

④ نمودار توابع قدر مطلق:

الف) نمودار تابع $f(x) = a|bx + c| + d$

ب) نمودار $f(x) = 2 - 3|\frac{x}{2} - 1|$ (نمودار)

ج) نمودار $f(x) = -1 + \frac{1}{2}|3 - x|$ (نمودار)

پیران نوشتن
توشه ای برای موفقیت



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

ب) نمودار مجموع یا تفاضل قدر مطلق عبارت‌های خطی

نموده ۱) $y = |x-1| + |x| - x$

نموده ۲) $y = |x-1| + 2|x-2|$

مثال ۳) کدام نرینه درباره تابع $f(x) = x + |x-1| - 3|x|$ صحیح است؟
 ۱) می نیمم تابع برابر ۱ است
 ۲) ماکزیمم تابع برابر ۱ است
 ۳) ماکزیمم برابر ۲- است
 حل:

ب) نمودار تابع $f(x) = |x-a| + |x-b|$

نموده ۱) $f(x) = |x+3| + |x-1|$

نموده ۲) $f(x) = |x-a| + |x-b|$

رشته‌های داخل دو قدر مطلق را پیدا کرده و روی محور x نشان می‌دهیم. سپس به اندازه $|a-b|$ از محور x فاصله گرفته و خط افقی رسم می‌کنیم. حالا بصورتی نسبت به طول می‌سازیم، اگر می‌خواهیم معادله دو شاخه‌ی کناری را پیدا کنیم، در شاخه سمت راستی هر دو قدر مطلق با مثبت و در شاخه سمت چپی هر دو قدر مطلق با منفی خارج می‌شوند.



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

نکته حالب از نمودار تابع $f(x) = |x-a| + |x-b|$

مثال ۴) مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $f(x) = |x+1| + |x+3|$ و خط $y=4$ کدام است؟

۸ (ع)

۶ (ب)

۵ (د)

۴ (ا)

(ج)

مثال ۵) مجموعه ریشه‌های معادله $|x-2| + |x-4| = 5$ کدام است؟

۸ (ع)

۶ (ب)

۴ (د)

۲ (ا)

(ج)

ت) نمودار تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$

نمودار $y = |x+3| - |x-1|$

ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها را پیدا کرده و در داخل تابع واری هم تا عرض آنها معلوم شود. به این ترتیب نقاط نوشته‌ای بدست می‌آید. در دستگاه مختصات این نقاط را هم وصل کرده و از طرف دو خط افقی شیب



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

مثال ۶) طول خط شکسته نمودار تابع $f(x) = |x| - |x-1|$ در بازه $3 < x < 3 - \sqrt{5}$ را بیابید

۴) $5 + \sqrt{5}$

۳) $3 + \sqrt{3}$

۲) $5 - \sqrt{5}$

۱) $3 - \sqrt{3}$

حل ۲

ت) روش کلی همه نمودارهای توابع قدر مطلق:

تعیین علامت، بازه بندی، حذف قدر مطلق ها، رسم ضابطه ها در بازه های مربوط

* در توابع مدروف موارد قبلی محترم است از این روش استفاده کنید و این روش را در مواردی به کار ببرید، ظاهر توابع قدر مطلق با آشنا باشد.

۱) نمودار $f(x) = x|x-1|$

۲) نمودار $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \cdot \sqrt{x+3}$

ج) نمودار تابع $y = |f(x)|$

۱) نمودار $y = |x| \cdot |x-1|$

۲) نمودار $y = |2^x - 1|$

مثال ۷) معادله $2|\cos x| - 3 = 0$ در فاصله $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

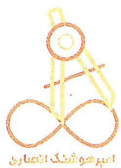
۴) ۴

۳) ۳

۲) ۲

۱) صفر

حل ۲



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

مثال ۸) مساحت محدود به نمودار $y = |x-2|$ و محور x ها در بازه $(-4, 4)$ کدام است؟
۵ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

حل ۲

ج) نمودار $y = f(|x|)$

نمودار $y = 2^{|x|}$

نمودار $y = \sin|x|$ $-\pi \leq x \leq \pi$

نمودار $y = x^2 - 2|x|$

مثال ۹) مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟
۲ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

حل ۲

مثال ۱۰) مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{4}{3}x$ کدام است؟
۴ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

حل ۲

ایران تفتت
توشه ای برای موفقیت



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

مثال ۱۱) مساحت محدود بین دو نمودار $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = 8 - |x-5|$ کدام است؟

۲۸ (۴)

۲۴ (۳)

۳۶ (۲)

۱۸ (۱)

حل

مثال ۱۲) اگر مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$ دامنه تابع باصنایطی $f(x) = x^2 + 3x$ باشد، آن تابع را

$(\frac{9}{4}, 10)$ (۴)

$[0, 15)$ (۳)

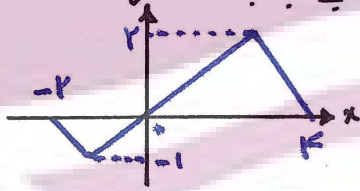
تابع باصنایطی $y = |f(x)|$ کدام است؟

$(2, 15)$ (۲)

$(-2, 10)$ (۱)

حل

مثال ۱۳) اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، معادله $|f(x-2)| = 1$ چند جواب دارد؟



۴ (۲)

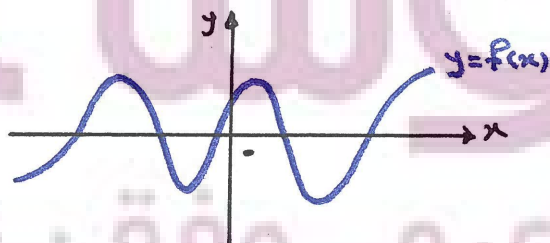
۲ (۱)

۸ (۴)

۶ (۳)

حل

مثال ۱۴) اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد معادلات $f(1|x|) = 0$ ، $|f(x)| = 0$ ، $f(-1|x|) = 0$



و $|f(1|x|)| = 0$ به ترتیب چندرشته دارد؟

$2, 4, 4, 5$ (۲)

$4, 5, 5, 5$ (۱)

$4, 4, 5, 4$ (۴)

$4, 4, 4, 4$ (۳)

حل



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

⑦ تعیین محدوده $|ax+b|$ از روی محدوده x :

نمونه ۱) $-4 < x < -1 \Rightarrow ? < |2x-1| < ?$

نمونه ۲) $0 < x \leq 5 \Rightarrow ? < |4x+8| < ?$

نمونه ۳) $1 \leq x \leq 4 \Rightarrow ? < |x-2| < ?$

نکته مهم

مسئله ۱۵) اگر $1 < x < 3$ -، آنگاه بردار $f(x) = 3 - 2|x+1|$ بازه $[a, b]$ است. واسطه حسابی a, b کدام است؟

۳ (۴)

-۴ (۳)

۲ (۲)

-۵ (۱)

جواب

مسئله ۱۶) بردار $f(x) = |12x-2|$ (بر بازه $0 < x < 3$) -، کدام است؟

۳ (۴) $[0, 1]$

۳ (۳) $[1, 2]$

۲ (۲) $(0, 1)$

۱ (۱) $[0, 2]$

جواب



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

⑧ نامساوی مثلثی:

$$|\odot + \Delta| \leq |\odot| + |\Delta| \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

نمونه ۱) $x=5$
 $y=3$

نمونه ۲) $x=5$
 $y=-3$

نمونه ۳) $x=-5$
 $y=-3$

نسخه هم:

$x, y \geq 0$ \longleftrightarrow علامت یک
لااقل یکی صفر $|x+y| = |x| + |y|$

$x, y < 0$ \longleftrightarrow مختلف علامت $|x+y| < |x| + |y|$

مثال ۱۷) در کدام نرینه نامساوی $|x-1| + |x+1| > 2|x|$ برقرار است؟

$x = \pm 1$ (۱)

$|x| < 1$ (۲)

$|x| > 1$ (۳)

$|x| > 1$ (۴)

حل:

مثال ۱۸) حدود x کدام باشد تا نمودار تابع $f(x) = \frac{|x-2| + |x|}{|x-1|}$ بالای خط $y=2$ قرار گیرد؟

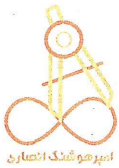
$(-1, 3)$ (۱)

$(-1, 1)$ (۲)

$(0, 1)$ (۳)

$(1, 3)$ (۴)

حل:



④ معادلات و امعادلات قدرمطلق:

الف) معادلات به فرم $|ax+b| = |cx+d|$ این معادله با معادله $ax+b = \pm(cx+d)$ معادل است

نمونه ۱) $|3x-1| = |2-x| \Rightarrow 3x-1 = \pm(2-x) \Rightarrow x = \frac{3}{4}$ و $x = -\frac{1}{4}$

ب) معادلات به فرم $|ax+b| = \Delta$ این معادله با معادله $ax+b = \pm\Delta$ معادل است با این شرط که $\Delta \geq 0$ باشد. پس جواب های بدست آمده را در این شرط آزمایش می کنیم.

نمونه ۱) $|3x-1| = 2-x \Rightarrow 3x-1 = \pm(2-x) \Rightarrow x = \frac{3}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$

شرط $2-x \geq 0$ را فراموش نکنید.
 $2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$
 $x = \frac{3}{4} \text{ OK}$
 $x = -\frac{1}{4} \text{ OK}$

پس هر دو قابل قبولند.

نمونه ۲) $|2-x| = 3x-1 \Rightarrow 2-x = \pm(3x-1) \Rightarrow x = \frac{3}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$

شرط $3x-1 \geq 0$ فراموش نشود.
 $3x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$
 $x = \frac{3}{4} \text{ OK}$
 $x = -\frac{1}{4} \text{ NK}$

پس یک جواب قابل قبول است.

مثال ۱۹) معادله $|x^2-2x-1| = |x^2-2x+3|$

(۱) درجه متناظر دارد (۲) ریشه مضاعف دارد

(حل)

(۳) بی شمار ریشه دارد (۴) ریشه حقیقی ندارد

مثال ۲۰) معادله $x^2-2x-1 = |x^2-2x+3|$

(۱) درجه متناظر ندارد (۲) ریشه مضاعف دارد

(حل)

(۳) بی شمار ریشه دارد (۴) ریشه حقیقی ندارد



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

پایه نامعادله های $|a| < a$, $|a| > a$:

$$|a| < a \iff -a < a$$

$$|a| > a \iff \begin{cases} a > a \\ a < -a \end{cases}$$

«*یا همان باشد a باید همیشه باشد*»

* اگر a ، منفی یا صفر باشد چه اتفاقی می افتد؟

$|x| < -2$ \iff $|x| < 0 \rightarrow$ *واضع است که جواب ندارد*

$|x| > -2$ \iff $|x| > 0 \rightarrow$ *$x \in \mathbb{R}$ و واضع است که بی شمار جواب دارد*

مثال ۲۱) مجموعه جواب نامعادله $|x-2| > x^2-2x$ کدام است؟

۱) $(-1, 1)$ ۲) $(-1, 2)$ ۳) $(0, 2)$ ۴) $(1, 2)$

حل

مثال ۲۲) چند عدد صحیح «نامعادله» $\frac{1}{|x-11|} > \frac{1}{3}$ صدق می کند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

حل

مثال ۲۳) مجموعه جواب نامعادله $|x^3+27| < x^2-3x+9$ کدام است؟

۱) $(2, 4)$ ۲) $(0, 3)$ ۳) $(-4, 0)$ ۴) $(-4, -2)$

حل



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ اژدها

مثال ۲۴) در کدام بازه نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ بالای سهمناک اول یاسم قرار دارد؟

(۱, ۳) (۴)

(۱, ۲) (۳)

(۰, ۳) (۲)

(۰, ۱) (۱)

(حل)

مثال ۲۵) مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| - |2x + 1|$ کدام بازه است؟ **خارج ۹۵**

(۱, ۲) (۴)

(-۱, ۲) (۳)

(-۱, ۱) (۲)

(-۲, ۱) (۱)

(حل)

ت) نامعادله $|A| < |B|$

$$|A| < |B| \iff A^2 < B^2 \iff A^2 - B^2 < 0 \iff (A-B)(A+B) < 0$$

مثال ۱) $|x+1| < |3x-1|$

مثال ۲) $|x^2-x-1| < |x^2+x+1|$

مثال ۲۶) مجموعه جواب نامعادله $|\frac{2x-5}{x+2}| > 3$ شامل چند عدد صحیح است؟

۷ (۴)

۹ (۳)

۱ (۲)

۱۵ (۱)

(حل)



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

مثال ۲۷) نمودار تابع $f(x) = \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} \right|$ در بازه $(a, +\infty)$ پایین تر از خط $y=1$ قرار دارد. کمترین مقدار a کدام است؟

(۴) -۷

(۳) -۱

(۲) $-\frac{1}{7}$

(۱) صفر

حل

ث) حل معادله و نامعادله به کمک تعیین علامت و بازه بندی

اگر معادلات و نامعادلات قدر مطلق شباهتی به موارد قبلی نداشته از راه تعیین علامت حل کنید. بهرحال این روش برای همه حالات جواب است اما مقرون به صرفه نیست.

مثال ۲۸) مجموع ریشه های معادله $x^2 - 12 = x|x - 2|$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۵

(۲) ۶

(۱) ۷

حل

مثال ۲۹) مجموع ریشه های معادله $x + |x - 1| = \sqrt{2x + 5}$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) $-\frac{1}{3}$

(۱) $-\frac{5}{3}$

حل

پیران توشه
توشه ای برای موفقیت



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

مثال ۳۰) چند عدد طبیعی x ، در معادله $3x - 2 > |x - 4|$ صدق نمی کند؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

حل

مثال ۳۱) مجموعه جواب معادله $7 < |x - 3| < 12$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

۷ (۴)

۸ (۳)

۹ (۲)

۱۰ (۱)

حل

ج) حل معادلات و نامعادلات به کمک رسم نمودار

مثال ۳۲) معادله $k = |x - 4| + |x - 3|$ دارای ۳ ریشه حقیقی است، حدود k کدام است؟

(۰, ۴) (۴)

[۰, ۴] (۳)

[۰, ۲] (۲)

(۰, ۲) (۱)

حل

مثال ۳۳) مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{x} < |x - 1|$ یک بازه است، نقطه میانی این بازه کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

حل



مبحث: قدر مطلق

تهیه و تنظیم: امیر هوشنگ انصاری

مثال ۳۴) اگر مجموع جواب نامعادله $|x+1| - 1 < |x^2-2x|$ بازه (a, b) باشد، طول وسط این بازه؟

۲ (ع)

۱/۵ (ک)

۱۲۲

۰/۵ (۱)

(حل)

مثال ۳۵) اگر معادله $|x+3| - |x-5| = 3k-7$ فاقد جواب باشد، حد در k نام است؟

$k < -2$ یا $k > 4$ (ع)

$k < -1$ یا $k > 3$ (ک)

$k < -2$ یا $k > 3$ (پ)

$k < \frac{1}{3}$ یا $k > 5$ (۱)

(حل)

مثال ۳۶) برای هر x در بازه (a, b) نمودار تابع $y = \sqrt{2x+5}$ ، بالای نمودار تابع $y = |x-1| + x$ قرار می‌گیرد، بیشترین مقدار $b-a$ نام است؟

۴ (ع)

۳ (ک)

$\frac{9}{2}$ (پ)

$\frac{7}{4}$ (۱)

(حل)

پیران نونته
توشه ای برای موفقیت



ج) نوشتن نامعادله قدر مطلق که جوابش بازه (a, b) یا $(b, +\infty) \cup (-\infty, a)$ است

$a < x < b \Rightarrow |x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$

نمونه $-3 < x < 5 \Rightarrow |x - 1| < 4$

$(-\infty, a) \cup (b, +\infty) \Rightarrow |x - \frac{a+b}{2}| > \frac{b-a}{2}$
مثل قبلی محل کنید، فقط جهت نامعادله را عوض کنید

نمونه $(-\infty, 4) \cup (10, +\infty) \Rightarrow |x - \frac{4+10}{2}| > \frac{10-4}{2} \Rightarrow |x - 7| > 3$

مثال ۳۷) معادله جواب نامعادله $1 < \frac{2x-3}{x+1} < 4$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱۳ (ع)

۱۲ (ب)

۱۱ (د)

۱۰ (ا)

حدا

مثال ۳۸) نامساوی $2 < 3x + a < 4$ با نامساوی $|x - 2| < \frac{1}{p}$ معادله است. حاصل $\frac{a+b}{2}$ چیست؟

$-\frac{13}{2}$ (ع)

$-\frac{11}{2}$ (ب)

$-\frac{9}{2}$ (د)

$-\frac{7}{2}$ (ا)

حدا

ایران تونته
توشه ای برای موفقیت

جزوه صحیح

تعریف تابع جزوه صحیح: تابع $f(x) = [x]$ هر عدد صحیح خود آن عدد را نسبت می دهد و بزرگترین عدد صحیح قبل از آن را نسبت می دهد.

عدد غیر صحیح، بزرگترین عدد صحیح قبل از آن را نسبت می دهد.

(نمونه) $[-\pi] = -4$ ، $[-۰.۰۰۰۰۱] = -1$ ، $[۳.۹۹۹] = ۳$

سنت (۱) مقدار عبارت $A = [\sqrt[۳]{۱}] + [\sqrt[۳]{۲}] + \dots + [\sqrt[۳]{۳۰}]$ را بیابید؟

۴۸ (۱) ، ۵۷ (۲) ، ۵۹ (۳) ، ۴۷ (۴)

حل:

سنت (۲) اگر $x^۲$ مقدار $f(x) = [x^۳] - [-x^۴]$ را بیابید؟

۱ (۱) صفر (۲) ، ۱ (۲) ، -۱ (۳) ، ۲ (۴)

حل:

سنت (۳) بزرگترین $f(x) = [\sin x + \cos x]$ شامل چند عدد صحیح است؟

۳ (۱) ، ۴ (۲) ، ۵ (۳) ، ۶ (۴)

حل:



سؤال (۴) اگر انتهای یکمان زاویه α در ربع سوم داشته باشد حاصل $[\sin \alpha] + [\cos \alpha]$ کدام است؟

- (۱) ۰
 - (۲) ۱
 - (۳) -۱
 - (۴) -۲
- حل:

سؤال (۵) اگر $[\frac{x^2}{4}] = 2$ نگاه حاصل $[x]$ شامل چند عدد است؟

- (۱) ۲
 - (۲) ۴
 - (۳) ۵
 - (۴) ۶
- حل:

خواص جزء صحیح

خاصیت ① $[x] = n \iff n \leq x < n+1 \quad (n \in \mathbb{Z})$

* دقت کنید که این خاصیت دو طرفه است (یعنی شرط لازم و کافی است):

$[x] = 3 \implies 3 \leq x < 4$

$7 \leq x < 8 \implies [x] = 7$

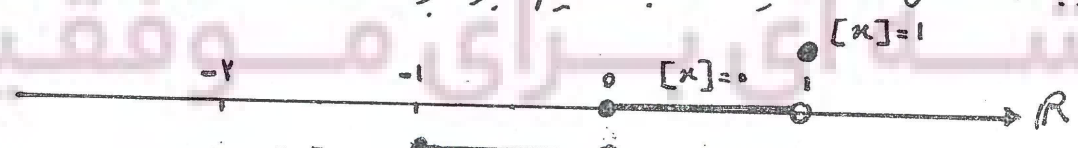
* دقت کنید که این خاصیت در هر بازه بسته بسته و کران پایین بسته است.

مثلاً $x \in [-2, 1] \implies y = [x] = ?$

باید بازه را به قطعه‌های کوچکی که هر کدام بین دو عدد متوالی هستند تبدیل کنیم پس حاصل جزء صحیح را بیابیم:

- $-2 \leq x < -1 \implies y = [x] = -2$
- $-1 \leq x < 0 \implies y = [x] = -1$
- $0 \leq x < 1 \implies y = [x] = 0$
- $x = 1 \implies y = [x] = 1$

که البته اگر به صورت افقی روی محور این کار را انجام می‌دهیم به نظر می‌آید:



سؤال 6) اگر $\left[\frac{1-4x}{x} \right] = -2$ مقدار $[-x]$ کدام است؟

1) -2
 2) -1
 3) 1
 4) 2

حل:

سؤال 7) اگر $\left[\frac{1-x}{x} \right] = 1$ آن گاه تعداد مقادیر ممکن برای عبارت $[12x]$ کدام است؟

1) 1
 2) 2
 3) 3
 4) 4

حل:

سؤال 8) اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد حاصل $\left[\sqrt{4n^2 + 12n + 3} \right]$ کدام است؟

1) $2n$
 2) $2n+1$
 3) $2n-1$
 4) $2n+2$

حل:

سؤال 9) برای هر عدد صحیح n مقدار $\left[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} \right]$ کدام است؟

1) n
 2) $n+1$
 3) $n-1$
 4) $2n-1$

حل:

سؤال 10) برای هر عدد صحیح $n > 2$ حاصل $2 \left[\sqrt{n^2 - 2n} \right] - \left[\sqrt{4n^2 - 4n + 1} \right]$ کدام است؟

1) 1
 2) 2
 3) 3
 4) 4

حل:

اول سوال:

سوال (۱۱) آنر: $(1+\sqrt{3})^7 + (1-\sqrt{3})^7 = 1136$ آن گاه مقدار $[(1+\sqrt{3})^7]$ کدام است؟

(۱) ۱۱۳۵
(۲) ۱۱۳۶
(۳) ۱۱۳۷
(۴) ۱۱۳۴

حل:

سوال (۱۲) معادله $2[x] + 1x = 15$ چندرشته دارد؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) بی شمار
(۴) صفر

حل:

سوال (۱۳) معادله $[x + \sqrt{x}] - \sqrt{x} = 4$ چند جواب دارد؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

حل:

سوال (۱۴) معادله $[x] = 4x$ چند جواب دارد؟

(۱) یک
(۲) دو
(۳) سه
(۴) بی شمار

حل:

سؤال ۱۵) مجموعه جواب نامعادله $(|x|+2)([x]-3) < 0$ کدام است؟
 (۱) $(-\infty, 4)$ (۲) $(-\infty, 3]$ (۳) $(-\infty, 4]$ (۴) $(-\infty, 3)$
 حل:

سؤال ۱۶) تمام دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{[x]-1} + \sqrt{3-[x]}$ کدام است؟
 (۱) $1 < x < 4$ (۲) $1 < x < 3$ (۳) $1 < x \leq 3$ (۴) $1 \leq x < 4$
 حل:

خاصیت ۲: $x-1 < [x] \leq x$

خاصیت ۳: $x \geq n \iff [x] \geq n$ (نمونه) $x \geq 3 \iff [x] \geq 3$

خاصیت ۴: $0 \leq x - [x] < 1$ (نمونه) $-7.2 - [-7.2] = 0.8$
 $-5 - [-5] = 0$
 عبارت $p(x) = x - [x]$ اجزای اعشاری عدد x می‌باشد

خاصیت ۵: $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

اثبات) $x-1 < [x] \leq x \xrightarrow{+} -x-1 < [-x] \leq -x \xrightarrow{+} -1 < [x] + [-x] \leq 0 \rightarrow [x] + [-x] = 0 \text{ یا } -1$

خاصیت ۴: (سیم خاصیت ۵)

$$[-x] = -[x] \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$[-x] = -[x] - 1 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

سنت ۱۷) بد تابع $f(x) = x - 3\left[\frac{x}{3}\right]$ کدام است؟

۱) $(0, 3]$ ۲) $[0, 3)$ ۳) $(0, +\infty)$ ۴) $(-\infty, 3]$

حل:

تذکره مهم: بد تابع $f(x) = x - n\left[\frac{x}{n}\right]$ همواره برابر است با:

سنت ۱۸) اگر $x - [x] = \frac{1}{2}$ باشد مقدار $2x - [2x]$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل:

سنت ۱۹) بساز سه تایی $f(x) = \sqrt{[x]x} + [x] - [-x]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) x ۳) $2x$ ۴) $3x$

حل:

سنت ۲۰) حاصل $x - \left[x + \frac{1}{2}\right]$ کدام است از اعداد زیر نمی تواند باشد؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) حاصل ۳) صفر ۴) $-\frac{1}{2}$

حل:

خاصیت ۷: $[x+n] = [x] + n \quad n \in \mathbb{Z}$ ، $[x+[x]] = [x] + [x] = 2[x]$

سنت ۲۱) $[x+2[x]] + [x-2[x]] = 3$ باشد. مقدار x کدام است؟
 (۱) $(3, 4)$ (۲) $(1, \frac{4}{3})$ (۳) $(\frac{4}{3}, \frac{7}{3})$ (۴) فاقد جواب
 حل:

سنت ۲۲) $[x] - [-x] = 5$ میسر جواب معادله؟
 (۱) $(2, 3)$ (۲) $(2, 3)$ (۳) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ (۴) $\{\frac{5}{2}\}$
 حل:

خاصیت ۸: $[x+y] = \begin{cases} [x] + [y] & \text{اگر } \{P(x) + P(y)\} < 1 \\ [x] + [y] + 1 & \text{اگر } 1 \leq \{P(x) + P(y)\} < 2 \end{cases}$

نمونه) $x=1,3 \quad y=2,5 \rightarrow [x+y] = [x] + [y]$
 $x=1,7 \quad y=2,8 \rightarrow [x+y] = [x] + [y] + 1$

خاصیت ۹: $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$
 $[nx] = [x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}]$

خاصیت ۱۰:

$$\left[\frac{x}{n} \right] = \left[\frac{[x]}{n} \right] \quad n \in \mathbb{N}$$

(نمونه)

$$\left[\frac{\sqrt{150}}{5} \right] = \left[\frac{[\sqrt{150}]}{5} \right] = \left[\frac{12}{5} \right] = 2$$

سؤال: حد در صغیر طبیعی در اعدادی $[x+\delta] < [2x]$ صدق کند؟

پاسخ: $\delta < \frac{1}{2}$

رسم نمودار تابع $y = [f(x)]$

① $y = [x] \quad -2 \leq x < 2$

② $y = [x^2] \quad -2 < x < 2$

③ $y = [1/x] \quad -1 < x \leq 3$

$$\textcircled{۴} \quad y = [\sin x] \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\textcircled{۵} \quad y = x - [x]$$

$$\textcircled{۶} \quad y = [x] + [-x]$$

$$\textcircled{۷} \quad y = x + [x]$$

$$\textcircled{۸} \quad y = \left[\frac{x}{3} \right] \quad x \in (-4, 4)$$

تذکره مهم: نمودار تابع $y = [nx]$ پله‌ای است
طول پله‌ها $\frac{1}{|n|}$ است و ارتفاع پله‌ها ۱ واحد است.

$$\textcircled{۹} \quad y = x \left[\frac{x}{3} \right] \quad x \in [0, 6)$$

۱۰) $y = |x + 1| + \left[\frac{x}{2} \right] \quad -2 < x < 4$

سؤال ۲۴) نمودار تابع $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$ در بازه $(-2, 4)$ از چند پاره خط مسطح تشکیل شده است؟ (سه گزینه ۱۸۶)

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

حل:

سؤال ۲۵) نمودار تابع $y = 2\left[\frac{-x}{3}\right] + 1$ در بازه $(-7, 8)$ شامل چند پاره خط است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

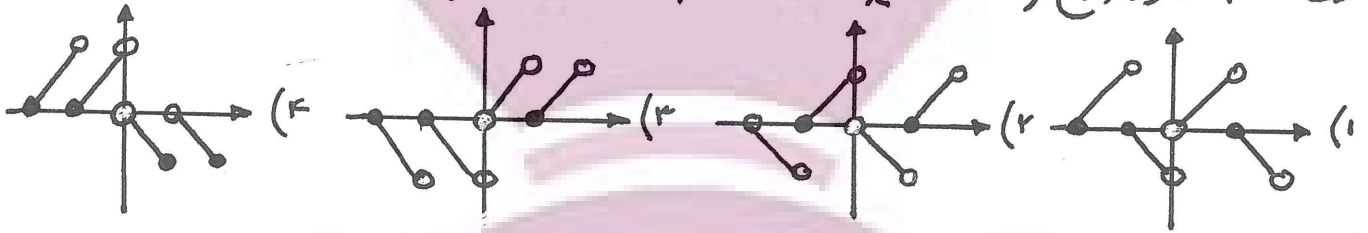
حل:

سؤال ۲۶) نمودار تابع $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] - 3\left[\frac{x}{3}\right]$ در فاصله $(4, 10)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟

۱) ۳ پاره خط برابر
۲) ۳ پاره خط برابر
۳) ۴ پاره خط برابر
۴) ۴ پاره خط برابر

حل:

سنت ۲۷) نمودار تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}(x - [x])$ در بازه $(-2, 2)$ به کدام صورت است؟



حل:

سنت ۲۸) نمودار $y = [e^x]$ در بازه $(-\infty, 1)$ از چند قطعه تشکیل شده است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

حل:

سنت ۲۹) نمودار $y = [\log_2 x]$ در بازه $(\frac{1}{4}, 4)$...

۲) ۴ پارچه خط موازی با طول نامبر است

۴) ۳ پارچه خط موازی با طول نامبر است

۱) ۴ پارچه خط موازی با طول برابر است
۲) ۳ پارچه خط موازی با طول برابر است

حل:

ایران توانمند

توسعه ای برای موفقیت

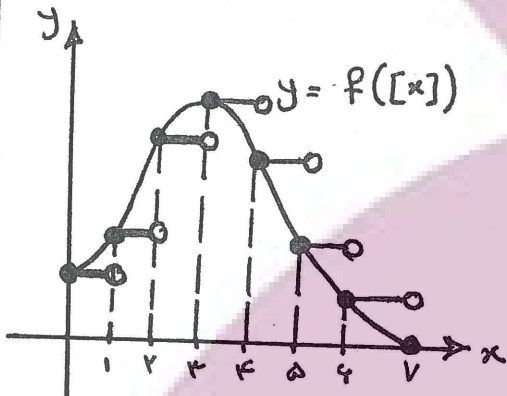
سنت ۱۵) مساحت بین نمودار $f(x) = [x] - [-x]$ و محور x در بازه $(0, 2)$ را بیابید؟
 ۱) ۴
 ۲) ۵/۲
 ۳) ۳/۵
 ۴) ۴/۵
 حل:

سنت ۳۱) مجموع طول پاره خطهای نمودار تابع $f(x) = x[x] + 1$ در بازه $(-1, 1)$ را بیابید؟
 ۱) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$
 ۲) $\sqrt{2} + 1$
 ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$
 ۴) $\sqrt{2} + 2$
 حل:

سنت ۳۲) اگر مساحت کدو در بین نمودار $f(x) = [2x]$ و محور x را در بازه $(-1, 1)$ و مساحت کدو در بین نمودار $f(x) = 2[x]$ و محور x را در همان بازه B فرض کنیم، $A - B$ را بیابید؟
 ۱) $-\frac{1}{2}$
 ۲) صفر
 ۳) $\frac{1}{2}$
 ۴) $\frac{2}{3}$
 حل:



رسم نمودار توابع $y = f([x])$



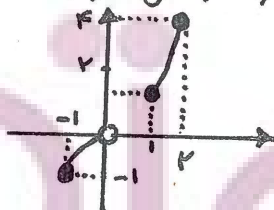
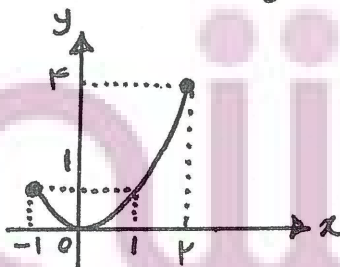
- (۱) نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم
- (۲) خطوط $x = k$ را تا $(k, f(k))$ رسم کرده و محل تلاقی آن‌ها با نمودار تابع f را پررنگ می‌کنیم
- (۳) در هر نقطه تلاقی خطوط موازی محور y ها یا به خط افقی به طول \perp واحد در جهت راست نقطه تلاقی رسم می‌کنیم.

نکته ۳۳) نمودار توابع را در بازه‌ای خواسته شده رسم کنید.

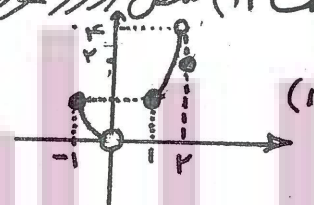
الف) $y = [x]^2 \quad -1 < x < 3$

ب) $y = [x]^2 - [x] \quad -2 < x < 3$

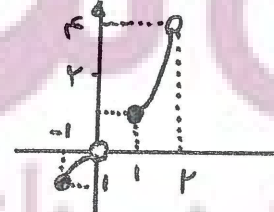
نکته ۳۴) شکل زیر دو نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار $g(x) = \frac{f(x)}{[x]}$ را رسم کنید؟



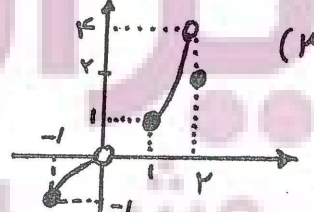
(۲)



(۱)



(۳)



(۲)

حدا:

۱) اگر مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{3x+4} > 2|x-1| - x$ بازه (a, b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟

۴ (۴)

$\frac{7}{4}$ (۳)

۳ (۲)

$\frac{5}{4}$ (۱)

حل:

۲) در کدام بازه از مقادیر x ، نمودار تابع $f(x) = 5 - |x-1|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = |2x|$ است

$(-\frac{2}{3}, 2)$ (۴)

$(-\frac{4}{3}, 2)$ (۳)

$(-\frac{2}{3}, 1)$ (۲)

$(-\frac{4}{3}, 1)$ (۱)

حل:

۳) نمودار تابع $y = 4 - |x-1|$ در بازه‌ی (a, b) بالاتر از خط $2y + x = 5$ قرار دارد، بزرگ‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

حل:

۴) کدام گزینه در مورد ریشه‌های معادله $|x^2 - 1| + |x| = 2x$ صحیح است؟

۴) یک ریشه مثبت دارد

۳) ریشه ندارد

۲) یک ریشه مثبت دارد

۱) دو ریشه مثبت دارد

حل:

۵) مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع های $y = |x-1| + x$ و $y = 4 - |x-1|$ چند است؟
 (۱) ۴,۵ (۲) ۵ (۳) ۵,۵ (۴) ۶

حل:

۶) حدود k نام باشد تا خط $y = k$ نمودار تابع $y = x^2 - 4|x-1| - 1$ را در بیشترین تعداد نقاط ممکن قطع کند؟
 (۱) $-1 < k < 0$ (۲) $0 < k < 1$ (۳) $1 < k < 2$ (۴) $-1 < k < 1$

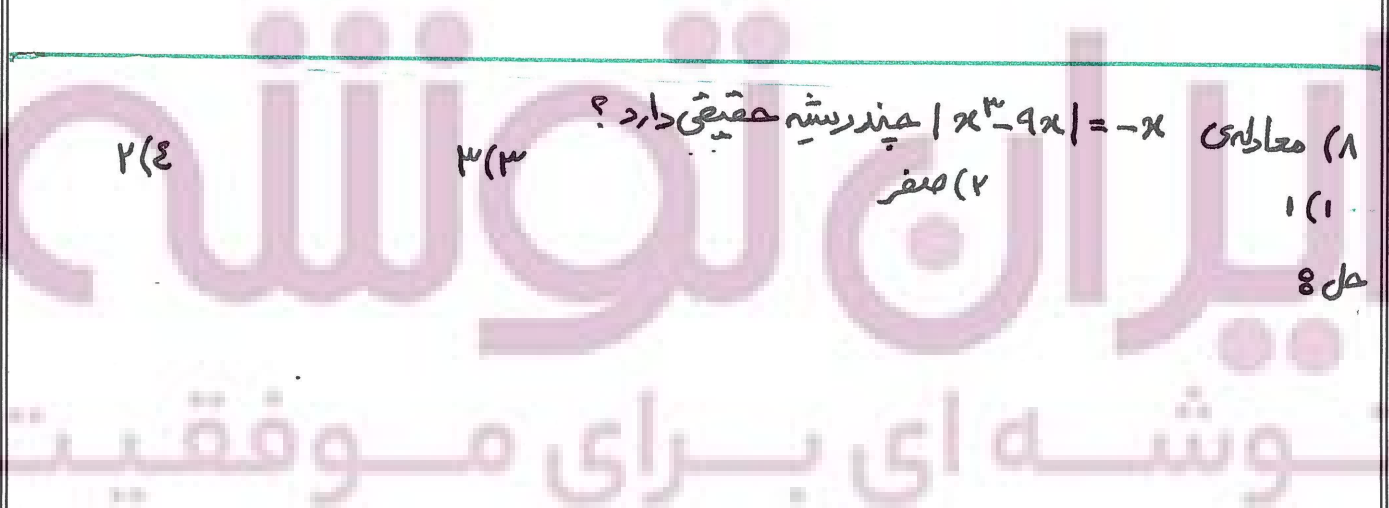
حل:

۷) معادله $|x - \sqrt{x}| + x = \sqrt[4]{1-x^2}$ چند جواب دارد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

حل:

۸) معادله $|x^3 - 9x| = -x$ چند ریشه حقیقی دارد؟
 (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۳ (۴) ۲

حل:



۹) معادله $|x+1| = x+1$ چند ریشه دارد؟

۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴) صفر

حل: ۱

۱۰) مجموع ریشه های معادله $x^2 = |x-1| + 3$ به صورت $\frac{3-\sqrt{a}}{b}$ نوشته می شود، مقدار ab ؟

۱۸ (۱)
-۱۲ (۲)
۳۴ (۳)
-۲۴ (۴)

حل: ۱

۱۱) مجموع جواب معادله $|x^2+5| - |x^2-20| = |x^2-20| - |2x^2+5|$ به صورت بازه $[a, b]$ است، مقدار ab ؟

-۲ (۱)
-۳ (۲)
-۵ (۳)
۵ (۴)

حل: ۱

۱۲) مجموعه جواب نامعادله $|x+3| < |x-1|$ به صورت بازه (α, β) می باشد، مقدار $\alpha-2\beta$ ؟

-۱ (۱)
-۲ (۲)
-۳ (۳)
-۴ (۴)

حل: ۱

۱۳) نمودار تابع $f(x) = \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} \right|$ در بازه $(\alpha, +\infty)$ پایین‌تر از خط $y=1$ قرار دارد.
 کمترین مقدار α را نام است؟
 (۱) صفر
 (۲) $\frac{1}{7}$
 (۳) -1
 (۴) -7
 حل: ۳

۱۴) مجموعه جواب نامعادله $x < \left| \frac{x+8}{2x+1} \right|$ شامل چند عدد صحیح است؟
 (۱) صفر
 (۲) ۲
 (۳) ۵
 (۴) بی‌شمار
 حل: ۳

۱۵) مجموعه جواب نامعادله $|x+1| < |x^2-1|$ شامل چند عدد صحیح است؟
 (۱) ۵
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴
 حل: ۳

۱۶) مجموعه جواب نامعادله $7 < |x-3| < 9$ ، شامل چند عدد صحیح است؟
 (۱) ۱۰
 (۲) ۹
 (۳) ۸
 (۴) ۷
 حل: ۳

۱۷) دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{|x-2| x(x-3)}$ شامل چند عدد صحیح مثبت؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
 حل:

۱۸) به ازای چند مقدار x صحیح، مقدار تابع $y = \frac{|x+8|}{|1-2x|+|7+3x|}$ برابر بیشترین مقدار ممکن است؟
 (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
 حل:

۱۹) اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $A = \frac{x^2 - x + 1}{|x^2 - 1| + |x - 2|}$ باشد، دقیق ترین محدوده A کدام است؟
 (۱) $A > 0$ (۲) $0 < A < 1$ (۳) $0 < A < 1$ (۴) $A > 1$
 حل:

۲۰) طول خط شکسته نمودار تابع $y = |x-1| - |x-3|$ در بازه $3 < x < 5$ کدام است؟
 (۱) $3 - \sqrt{5}$ (۲) $5 - \sqrt{5}$ (۳) $3 + \sqrt{5}$ (۴) $5 + \sqrt{5}$
 حل:

۲۱) اگر حاصل ضرب جواب‌های معادله $|x+1| + |x-2| = k$ برابر ۶- باشد، k کجا است؟

۵، ۵ (۴)

۵ (۳)

۴، ۵ (۲)

۴ (۱)

حل: ۵

۲۲) معادله $|2x+2| + 2|x-2| = m$ در بیشه دارد، اگر تفاضل دوریشه برابر ۴ باشد، m نام است

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۱۰ (۱)

حل: ۵

۲۳) برد تابع $f(x) = \frac{6}{|x| + |x-2|}$ بصورت بازه $(a, b]$ است، $a+b$ نام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

حل: ۵

۲۴) اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{۵۶}{|x-2| + |x-k|}$ برابر ۸ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای k ؟

۲ (۴)

۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

حل: ۵

ایران توشه

توشه ای برای موفقیت

(۲۵) در تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار $f(-\frac{1}{p} f(\sqrt{3}))$ را بیابید؟ (۹۰)

۱) $\frac{1}{75}$ (۱)
 ۲) $\frac{2}{25}$ (۲)
 ۳) $\frac{1}{5}$ (۳)
 ۴) $\frac{2}{75}$ (۴)

حل:

(۲۶) اگر $f(x) = [-x]$ باشد، $f(x + f(x))$ را بیابید؟

۱) صفر (۱)
 ۲) $x - [x]$ (۲)
 ۳) $[x] + [-x]$ (۳)
 ۴) $x + [-x]$ (۴)

حل:

(۲۷) دو تابع $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفرکند، اگر $g(f(x)) = -2$ باشد

۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۱)
 ۲) \mathbb{Z} (۲)
 ۳) \mathbb{R} (۳)
 ۴) \emptyset (۴)

حل:

(۲۸) با توجه به تساوی $(1 + \sqrt{2})^7 + (1 - \sqrt{2})^7 = 478$ حاصل $[(1 + \sqrt{2})^7]$ را بیابید؟

۱) ۴۷۷ (۱)
 ۲) ۴۷۸ (۲)
 ۳) ۴۷۹ (۳)
 ۴) ۴۸۰ (۴)

حل:

۲۹) اگر n عدد طبیعی باشد، حاصل $\left[\frac{4n+1}{n+2} \right]$ چند مقدار متفاوت دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

حل:

۳۰) حاصل $[5\sqrt{4}] + [\sqrt{99} + \sqrt{101}]$ برابر کدام است؟

۳۲ (۴)

۳۱ (۳)

۳۰ (۲)

۲۹ (۱)

حل:

۳۱) اگر بدانیم $[3x] = 3[x] + 1$ ، بردار $f(x) = x - [x]$ کدام است؟

$\frac{1}{3} < A < 1$ (۴)

$\frac{1}{3} < A < \frac{2}{3}$ (۳)

$0 < A < \frac{1}{3}$ (۲)

$0 < A < \frac{1}{3}$ (۱)

حل:

۳۲) اگر $y + 6\left[\frac{x}{3}\right] = 2x$ باشد، وقتی $x \in \mathbb{R}$ ، مجموعه مقادیر ممکن برای y کدام است؟

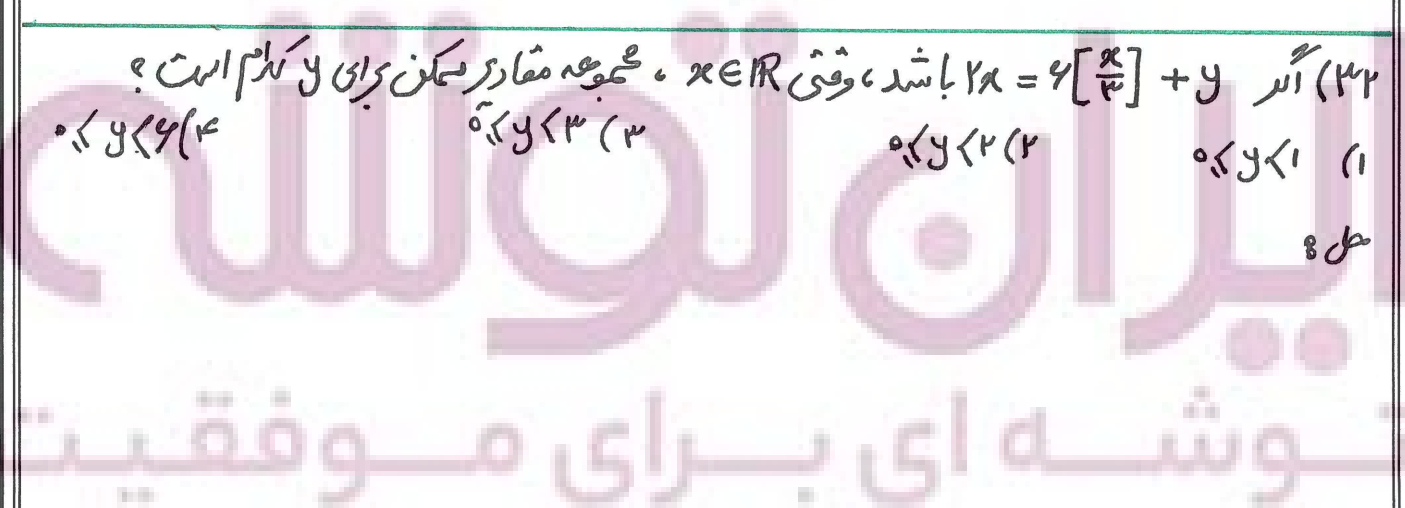
$0 < y < 4$ (۴)

$0 < y < 3$ (۳)

$0 < y < 2$ (۲)

$0 < y < 1$ (۱)

حل:



۳۳) حاصل $[2x - 4 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor]$ برای مقادیر مختلف x ، چند مقدار مختلف برای پذیرد؟

- ۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵
- پاسخ: ۴

۳۴) معادله $\lfloor \frac{5x+4}{4} \rfloor = \frac{2x+1}{2}$ چند ریشه دارد؟

- ۱) بی شمار
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴
- پاسخ: ۲

۳۵) دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{-(1+x)([2x]-4)}$ بازوی $(-\infty, a)$ است، a برابر است؟

- ۱) $\frac{4}{3}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{5}{3}$
- پاسخ: ۲

۳۶) مجموع جواب نامعادله $|[x]-1| \leq 3$ بازوی $[a, b)$ است، بیشترین مقدار $b-a$ برابر است؟

- ۱) ۵
۲) ۴
۳) ۷
۴) ۶
- پاسخ: ۴

(۳۷) نمایش هندسی تابع $y = |x| + [x]$ در فاصله $1 < x < 2$ کدام است؟
 (۱) دوپاره خط با شیب‌های برابر و اندازه‌های برابر
 (۲) دوپاره خط با شیب‌های نابرابر و اندازه‌های برابر
 (۳) دوپاره خط با شیب‌های برابر و اندازه‌های نابرابر
 (۴) دوپاره خط با شیب‌های نابرابر و اندازه‌های نابرابر
 حل:

(۳۸) نمودار $y = [1-x-1]$ در بازه‌ی $(-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟
 (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴
 حل:

(۳۹) نمودار $y = 2x - [2x]$ در بازه‌ی $(1, 3)$ شامل n پاره خط به طول L است، مربع (n, L) ؟
 (۱) $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 2)$
 (۲) $(2, \sqrt{5})$
 (۳) $(1, \sqrt{5})$
 (۴) $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 2)$
 حل:

(۴۰) کدام عدد در مرتبه تابع $y = x + [x]$ نیست؟
 (۱) $3\sqrt{2}$
 (۲) $\frac{9}{2}$
 (۳) $3\sqrt{3}$
 (۴) ۴
 حل:

