بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفترچه پاسخ

آزمون ۹ تیرماه ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی (نظام جدید)

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲ و ریاضی پایه	کاظم اجلالی-سیدرضا اسلامی-محسن بهرام‌پور-عادل حسینی
	هندسه و آمار و ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-حنانه اتفاقی-محمد خندان-سوگند روشنی-محمد صحت‌کار-احمدرضا فلاح-مهرداد ملوندی
	فیزیک	خسرو ارغوانی‌فرد-عبدالرضا امینی‌نسب-زهره آقامحمدی-محمدعلی راست‌پیمان-معصومه شریعت‌ناصری-سعید طاهری‌بروجنی پوریا علاقه‌مند-مسعود قره‌خانی-مصطفی کیانی-غلامرضا محبی-امیراحمد میرسعید
	شیمی	صلاح الدین ابراهیمی-محمدرضا پورجاوید-یاسر راش-فرزاد رضایی-محمدرضا زهره‌وند-رضا سلیمانی-میلاد شیخ‌الاسلامی‌خیاوی مسعود طبرسا-امیرحسین طیبی‌سودکلایی-رسول عابدینی‌زواره-محمد عظیمیان‌زواره-محمدپارسا فراهانی-فاضل قهرمانی‌فرد امیرحسین مسلمی-محمد نکو-سیدرحیم هاشمی‌دهکردی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی‌پایه	هندسه	آمارواحتمال وریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	کاظم اجلالی سیدرضا اسلامی	امیرحسین ابومحبوب	سوگند روشنی	بابک اسلامی	امیر حاتمیان
گروه ویراستاری	مهدی ملارمضانی	عادل حسینی	عادل حسینی	حمید زرین کفش زهره آقامحمدی	محمدحسن محمدزاده مقدم جواد سوری لکی علیرضا گندمی
		ویراستار استاد: مهرداد ملوندی	ویراستار استاد: مهرداد ملوندی	ویراستار استاد: مصطفی کیانی	
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	بابک اسلامی	امیرحسین مسلمی
مستندسازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	احسان صادقی	سمیه اسکندری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	محمد اکبری	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضیات

۱- **گزینهٔ «۲»** *(سیدرضا اسلامی)*

از مساحت نیم‌دایره‌ها هر بار ٪۷۵ کم می‌شود، یعنی مساحت نیم‌دایره ٪۲۵ یعنی $\frac{۱}{۴}$ مرحلهٔ قبل است، پس قطر نیم‌دایره‌ها، دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۲}$ می‌سازند:

$$\text{مساحت نیم‌دایرهٔ اول} = ۲\pi \Rightarrow ۴\pi = \pi r^۲$$

$$\text{قطر نیم‌دایرهٔ اول } ۴ = ۲r \Rightarrow r = ۲$$

اگر فاصلهٔ متحرک تا محور yها را در برخورد nام، S_n در نظر بگیریم:

$$S_n = a_۱ + a_۲ + ... + a_n = ۴(\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}}) = ۸(۱-\frac{۱}{۲^n})$$

از $S_n > ۷/۹۹$ محدودهٔ n را می‌یابیم:

$$۸(۱-\frac{۱}{۲^n}) > ۷/۹۹ \Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲^n} > \frac{۷/۹۹}{۸}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲^n} < \frac{۱}{۸۰۰} \Rightarrow ۲^n > ۸۰۰ \Rightarrow n \geq ۱۰$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

با توجه به تعریف مشتق، مقدار حد مورد نظر همان مشتق تابع fog در نقطهٔ $x = ۰$ است. از طرف دیگر داریم:

$$(fog)'(۰) = g'(۰)f'(g(۰)) \overset{g(۰)=-۱}{=\!=\!=} g'(۰)f'(-۱)$$

حال مقادیر $g'(۰)$ و $f'(-۱)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = ۲x + \sqrt{x^۲+۱} \Rightarrow f'(x) = ۲ + \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$\Rightarrow f'(-۱) = ۲ - \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$g(x) = ۲x - \sqrt{x^۲+۱} \Rightarrow g'(x) = ۲ - \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$\Rightarrow g'(۰) = ۲$$

در نهایت داریم:

$$(fog)'(۰) = ۲(۲ - \frac{۱}{\sqrt{۲}}) = ۴ - \sqrt{۲}$$

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۸۰ و ۹۴ تا ۹۶)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(سیدرضا اسلامی)*

از این‌که خط $y = ۳x - ۱$ در $x = ۱$ بر نمودار f مماس است، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} x = ۱ \\ y = ۲ \\ m = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(۱) = ۲ \\ f'(۱) = ۳ \end{cases}$$

در این مرحله، محاسبهٔ شیب مماس بر نمودار تابع $y = ۲f(x^۳ - ۷)$ ضروری است:

$$y' = ۲(۳x^۲)f'(x^۳-۷) \xrightarrow{x=۲} y' = ۲۴f'(۱) = ۲۴ \times ۳ = ۷۲$$

از آنجا که طول نقطهٔ B، $۰/۲۵$ کمتر از A است، از عرض نقطهٔ A به اندازهٔ $۷۲ \times ۰/۲۵ = ۱۸$ کم می‌کنیم تا به جواب برسیم:

$$y_A = ۲f(۲^۳ - ۷) = ۲f(۱) = ۴$$

$$\Rightarrow y_B = ۴ - ۱۸ = -۱۴$$

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحهٔ ۹۶)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴- **گزینهٔ «۴»** (محسن بهرام‌پور)

$$f'(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{x-8}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{4}{3}(\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2}})$$

در تابع صعودی $f'(x)\geq 0$ است:

$$\Rightarrow x-2\geq 0\Rightarrow x\geq 2 \qquad (1)$$

$$f''(x)=\frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}+\frac{16}{9x\sqrt[3]{x^2}}=\frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}(1+\frac{4}{x})$$

تقعر نمودار رو به پایین است، پس $f''<0$ است:

$$\xrightarrow{f''<0} 1+\frac{4}{x}<0\Rightarrow \frac{4}{x}<-1\Rightarrow -4<x<0 \qquad (2)$$

اشتراک دو بازهٔ (۱) و (۲) تهی است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۹)

۵- **گزینهٔ «۳»** (محسن بهرام‌پور)

تابع g در $x=-2$ مماس قائم دارد، پس طول نقطه عطف نمودار این تابع برابر ۲- است، این یعنی طول نقطه عطف نمودار تابع f نیز ۲- است. از طرفی طول نقطه عطف نمودار f برابر $x=-\frac{a}{3}$ است، پس داریم:

$$-\frac{a}{3}=-2\Rightarrow a=6$$

عرض نقطه عطف تابع f برابر $f(-2)$ است:

$$f(-2)=(-2)^3+6(-2)^2+2(-2)-4=8$$

$g(-2)$ هم باید برابر همین مقدار باشد:

$$g(-2)=b=8$$

$$\Rightarrow a-b=6-8=-2$$

(حسابان ۲- مشتق و کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۸۸ و ۱۳۱)

۶- **گزینهٔ «۲»** (کاظم اجلالی)

توجه کنید که $\sqrt{3}<2<\sqrt[3]{9}$، بنابراین داریم:

$$\log_3\sqrt{3}<\log_3 2<\log_3\sqrt[3]{9}\Rightarrow \frac{1}{2}<\log_3 2<\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}<-\log_3 2<-\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{3}<1-\log_3 2<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2<\frac{1}{1-\log_3 2}<3\Rightarrow -3<-\frac{1}{1-\log_3 2}<-2$$

$$\Rightarrow [\frac{-1}{1-\log_3 2}]=-3$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحهٔ ۸۶)

۷- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

$x_0=\log_3\frac{3}{4}$ صفر تابع است:

$$\Rightarrow a\times 3^{b\log_3\frac{3}{4}}-1=a(3^{\log_3\frac{3}{4}})^b-1=0$$

طبق ویژگی $m^{\log_m^n}=n$ داریم:

$$3^{\log_3\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}\Rightarrow a(\frac{3}{4})^b-1=0\Rightarrow a=(\frac{4}{3})^b \qquad (*)$$

مختصات نقطهٔ $(1,1)$ هم در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$\Rightarrow a(3^b)-1=1\xrightarrow{*}(\frac{4}{3})^b\times 3^b=2$$

$$\Rightarrow 4^b=2\Rightarrow b=\frac{1}{2}\xrightarrow{*}a=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

در نهایت داریم:

$$ab=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵ و ۸۶)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{kx+۱}=x+۱ \xrightarrow{\text{توان } ۳} kx+۱=x^۳+۳x^۲+۳x+۱$$

$$\Rightarrow x^۳+۳x^۲+(۳-k)x=x(x^۲+۳x+۳-k)=۰$$

یک جواب معادله $x=۰$ است. در حالت‌های زیر معادله فقط یک جواب دیگر دارد:

الف) معادلهٔ $x^۲+۳x+۳-k=۰$ جواب مضاعف داشته باشد:

$$\Rightarrow \Delta=۹-۴(۳-k)=۴k-۳=۰ \Rightarrow k=\frac{۳}{۴}$$

در این حالت جواب دیگر معادله $x=-\frac{۳}{۲}$ است.

ب) یکی از جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۳x+۳-k=۰$، $x=۰$ باشد:

$$\xrightarrow{x=۰} ۳-k=۰ \Rightarrow k=۳$$

در این حالت نیز جواب دیگر معادله $x=-۳$ است. پس مجموع مقادیر قابل قبول برای k برابر $\frac{۱۵}{۴}=\frac{۳}{۴}+۳$ است.

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

در معادلهٔ داده شده داریم:

$$S=\alpha+\beta=۴\ ,\ P=\alpha\beta=-۲$$

حال چون جواب‌های یک معادله در خود معادله صدق می‌کنند، داریم:

$$\alpha^۲-۴\alpha-۲=۰ \Rightarrow \alpha^۲-۲=۴\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{۶۴}{(\alpha^۲-۲)^۲}=\frac{۶۴}{۱۶\alpha^۲}=\frac{۴}{\alpha^۲}$$

از طرفی از رابطهٔ $P=\alpha\beta=-۲$ استفاده می‌کنیم و می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۱}{\alpha}=-\frac{\beta}{۲} \Rightarrow ۴(\frac{۱}{\alpha^۲})=۴(\frac{\beta^۲}{۴})=\beta^۲$$

به طریق مشابه $\frac{۶۴}{(\beta^۲-۲)^۲}=\alpha^۲$ است.

پس هدف پیدا کردن معادله‌ای است که جواب‌های آن $\alpha'=\alpha^۲$ و $\beta'=\beta^۲$ باشد:

$$\Rightarrow \begin{cases} S'=\alpha'+\beta'=\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=۲۰ \\ P'=\alpha'\beta'=\alpha^۲\beta^۲=P^۲=۴ \end{cases}$$

پس معادلهٔ مورد نظر به صورت زیر است:

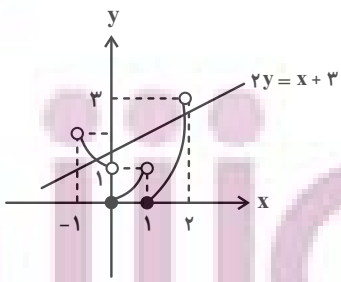
$$\xrightarrow{x^۲-S'x+P'=۰} x^۲-۲۰x+۴=۰ \Rightarrow x^۲+۴=۲۰x$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۷ تا ۹)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

تابع $f(x)=x^۲-[x]$ را در بازهٔ $(۲\ ,\ -۱)$ و همچنین خط $y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & ;\ -۱<x<۰ \\ x^۲ & ;\ ۰\le x<۱ \\ x^۲-۱ & ;\ ۱\le x<۲ \end{cases}$$



با توجه به نمودارهای بالا، دو تابع در بازهٔ $(۲\ ,\ -۱)$ دو نقطهٔ مشترک دارند.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(سیدرضا اسلامی)*

برای محاسبهٔ $f^{-1}(1)$، مقدار تابع f را برابر ۱ قرار می‌دهیم:

$$5x-9=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2)=1 \Rightarrow f^{-1}(1)=2$$

برای محاسبهٔ $g^{-1}(-4)$، فرض نخست را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$(f^{-1}og)(\frac{5x+1}{2x+1}) = 2x^3+x$$

$$\xrightarrow{f} g(\frac{5x+1}{2x+1}) = f(2x^3+x) \qquad (I)$$

برای این‌که حاصل g و در نتیجه حاصل f برابر ۴- شود، داریم:

$$5x-9=-4 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(3)=-4$$

حال در رابطهٔ I، $x=1$ را قرار می‌دهیم:

$$g(2)=f(3)=-4 \Rightarrow g(2)=-4 \Rightarrow g^{-1}(-4)=2$$

پس حاصل نهایی برابر $4=2+2$ است.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۵۷ تا ۷۰)

۱۲- **گزینهٔ «۴»** *(سیدرضا اسلامی)*

در این دایرهٔ مثلثاتی، طول نقطهٔ B همان $\cos 2\alpha$ است، پس:

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{5}{9} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع دوم}} \cos\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{3}$$

در نتیجه جواب نهایی برابر است با:

$$2\cos^3\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1)$$

$$= \cos\alpha . \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}(\frac{1}{9}) = -\frac{\sqrt{5}}{27}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(کاظم اجلالی)*

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a\sin(b\pi x + \frac{7\pi}{2}) + 1 = -a\cos(b\pi x) + 1$$

از روی نمودار معلوم است که نصف دورهٔ تناوب (فاصلهٔ بین یک ماکزیمم با مینیمم متوالی‌اش) تابع برابر ۴ و ماکزیمم آن برابر ۳ است. پس:

$$\frac{1}{2}T = 4 \Rightarrow T = 8 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 8 \Rightarrow |b| = \frac{1}{4}$$

$$1 + |-a| = 3 \Rightarrow |a| = 2$$

بنابراین $|ab| = \frac{1}{2}$.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحهٔ ۲۷)

۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(محسن بهرام‌پور)*

$$\frac{\cos 6x}{\cos 2x} = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x \quad ; \quad \cos 2x \neq 0$$

$$\Rightarrow \cos 6x = \cos 2x \cos 4x$$

با نوشتن $\cos 6x$ به صورت $\cos(4x+2x)$ داریم:

$$\cos 4x\cos 2x - \sin 4x\sin 2x = \cos 4x\cos 2x$$

$$\Rightarrow \sin 2x \sin 4x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x(2\sin 2x\cos 2x) = 2\sin^2 2x\cos 2x = 0$$

$$\xrightarrow{\cos 2x \neq 0} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های بازهٔ $[0, 2\pi]$ عبارتند از: صفر، $\frac{\pi}{2}$، π، $\frac{3\pi}{2}$ و 2π که مجموع آن‌ها برابر 5π است.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

تابع‌های $y=ax^۲+bx+۱۶$ و $y=\sqrt{۴x-x^۲}-۲$ در تمام نقاط بازهٔ $(۰\ ,۴)$ حد دارند، پس تابع f در تمام نقاطی از این بازه که حد مخرج صفر نشود، حد دارد. پس باید نقاطی که مخرج $f(x)$ صفر می‌شود را معین کنیم:

$$\sqrt{۴x-x^۲}-۲=۰\Rightarrow\sqrt{۴x-x^۲}=۲\Rightarrow ۴x-x^۲=۴$$

$$x^۲-۴x+۴=۰\Rightarrow(x-۲)^۲=۰\Rightarrow x=۲$$

پس تابع f باید در $x=۲$ حد داشته باشد:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{ax^۲+bx+۱۶}{\sqrt{۴x-x^۲}-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{ax^۲+bx+۱۶}{۴x-x^۲-۴}\times(\sqrt{۴x-x^۲}+۲)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{ax^۲+bx+۱۶}{-(x-۲)^۲}\times(\sqrt{۸-۴}+۲)$$

حد بالا فقط در صورتی می‌تواند وجود داشته باشد که صورت کسر عامل $(x-۲)^۲$ را داشته باشد. پس:

$$ax^۲+bx+۱۶=a(x-۲)^۲=ax^۲-۴ax+۴a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۴a=۱۶\Rightarrow a=۴\\-۴a=b\Rightarrow b=-۱۶\end{cases}\Rightarrow ab=-۶۴$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(سیدرضا اسلامی)*

حد تابع f وقتی که $x\to-\infty$ برابر است با:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{a\sqrt{x^۲}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-ax}{x}=-a=۵\Rightarrow a=-۵$$

با توجه به پیوستگی تابع g در $x=-۳$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to(-۳)^+}\frac{-۵\sqrt{x^۲+۲x-۲}+b}{x+۳}=\lim_{x\to(-۳)^+}\frac{۱۲}{x}+c=-۴+c$$

برای این‌که این حد وجود داشته باشد، لازم است که حد صورت صفر باشد، پس:

$$-۵\sqrt{۹-۶-۲}+b=۰\Rightarrow-۵+b=۰\Rightarrow b=۵$$

حال حاصل حد را به دست می‌آوریم تا مقدار c مشخص شود:

$$\lim_{x\to(-۳)^+}\frac{-۵(\sqrt{x^۲+۲x-۲}-۱)}{x+۳}\times\frac{\sqrt{x^۲+۲x-۲}+۱}{\sqrt{x^۲+۲x-۲}+۱}$$

$$=\lim_{x\to(-۳)^+}\frac{-۵(x^۲+۲x-۳)}{۲(x+۳)}=\lim_{x\to(-۳)^+}\frac{-۵}{۲}(x-۱)=۱۰$$

از $c-۴=۱۰$ مقدار c برابر با ۱۴ به دست می‌آید.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۵۱)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(سیدرضا اسلامی)*

$x=۳$ و $y=۲$ مجانب‌های تابع $y=f(۱-x)+۱$ است. با قرینه کردن نسبت به محور yها، مجانب‌های $y=f(x+۱)+۱$ به صورت $x=-۳$ و $y=۲$ و سپس با انتقال به راست به اندازهٔ یک واحد، مجانب‌های $y=f(x)+۱$ به صورت $x=-۲$ و $y=۲$ مشخص می‌گردد. در نهایت با انتقال یک واحدی به پایین به مجانب‌های $y=f(x)$ یعنی $x=-۲$ و $y=۱$ می‌رسیم.

برای مشخص شدن مجانب‌های تابع $f^{-۱}$، جای x و y را عوض می‌کنیم یعنی $x=۱$ و $y=-۲$ مجانب‌ها هستند. در گام آخر طول نقاط را نصف کرده تا به مجانب‌های $y=f^{-۱}(۲x)$ یعنی $x=\frac{۱}{۲}$ و $y=-۲$ برسیم:

$$\begin{cases}x=\frac{۱}{۲}\\y=-۲\end{cases}\Rightarrow B(\frac{۱}{۲},-۲)\Rightarrow a+b=\frac{-۳}{۲}$$

(حسابان ۲- تابع و حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲، ۵۵ تا ۵۷، ۶۷ و ۶۸)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

به بررسی گزاره‌های داده شده می‌پردازیم:

۱) $[(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge p$

$\equiv [\sim p \wedge (\underbrace{q \vee \sim q}_{T})] \wedge p \equiv \sim p \wedge p \equiv F$

۲) $n((A \times B) \cap (B \times A)) = n(A \cap B)^2$

$A \cap B = \{6, 12, 18\} \Rightarrow n(A \cap B)^2 = 3^2 = 9$

بنابراین گزارهٔ داده شده نادرست است.

۳) این گزاره درست است. مثلاً اگر $x = \frac{1}{2}$ انتخاب شود، آن‌گاه داریم:

$$(\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{2} + y^2 \Rightarrow y^2 > \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 > -\frac{1}{4}$$

رابطهٔ اخیر به ازای تمام مقادیر حقیقی y بدیهی است.

۴) این گزاره نادرست است. مثلاً اگر $x = -1$ باشد، آن‌گاه هیچ عدد حقیقی مانند y وجود ندارد که $y^2 = -1$ باشد.

(آمار و احتمال – آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۶ و ۳۵)

۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(هانیه اتفاقی)*

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$(A \cap B)' - B' = (A' \cup B') \cap B$$

$$= (A' \cap B) \cup (\underbrace{B' \cap B}_{\varnothing}) = A' \cap B$$

بنابراین عبارت صورت سؤال به شکل زیر درآمده و ساده می‌شود:

$$[(A \cap B) \cup (B' \cap A')] \cup (A' \cap B)$$

$$= (A \cap B) \cup [(A' \cap B') \cup (A' \cap B)]$$

$$= (A \cap B) \cup [(A' \cap (\underbrace{B' \cup B}_{U})] = (A \cap B) \cup A'$$

$$= (\underbrace{A \cup A'}_{U}) \cap (B \cup A') = B \cup A' = A' \cup B$$

طبق قانون دمورگان داریم:

$$A' \cup B = (A \cap B')' = (A - B)'$$

(آمار و احتمال – آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(محمد صحت‌کار)*

نکته: اگر $P(A) \leq P(B)$ آن‌گاه:

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$$

$$P(A) + P(B) = \frac{7}{11} + \frac{5}{7} = \frac{49 + 55}{77} = \frac{104}{77}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq \frac{104}{77} - 1 \Rightarrow P(A \cap B) \geq \frac{27}{77}$$

$$\Rightarrow P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{27}{77}}{\frac{7}{11}} = \frac{27}{49}$$

(آمار و احتمال – احتمال؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۲۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمد صحت‌کار)*

روش اول: برای مهره‌های جعبهٔ‌جدید، ۴ حالت زیر امکان‌پذیر است:

۳ آبی	یا	۱ سفید و ۲ آبی	یا	۲ سفید و ۱ آبی	یا	۳ سفید

بنابراین براساس قانون احتمال کل، احتمال مطلوب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(\frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} \times \frac{3}{3}) + (\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} \times \frac{2}{3})$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$+\left(\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}\times 0\right)$$

$$=\left(\frac{1}{120}\times\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{21}{120}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{63}{120}\times\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{3+42+63}{360}=\frac{108}{360}=\frac{3}{10}$$

روش دوم: در شرایط این مسئله، احتمال سفید بودن مهرهٔ خارج شده از جعبهٔ جدید با احتمال این‌که یک مهره از جعبهٔ اصلی برداریم و سفید باشد برابر است. این احتمال برابر با ۰/۳ است.

(آمار و احتمال – احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۲)

۲۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر داده‌های اولیه را با x_1 , x_2 , ... , x_{12} نمایش دهیم، داده‌های جدید به صورت $3x_1-5$, $3x_2-5$, ... , $3x_{12}-5$ خواهند بود و در این صورت داریم:

$$\frac{CV_2}{CV_1}=\frac{\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}}{\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\times\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}$$

$$2=\frac{3\sigma_1}{\sigma_1}\times\frac{\bar{x}_1}{3\bar{x}_1-5}\Rightarrow 6\bar{x}_1-10=3\bar{x}_1$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1=\frac{10}{3}\Rightarrow \bar{x}_2=3\left(\frac{10}{3}\right)-5=5$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{مجموع داده‌های اولیه}=\frac{10}{3}\times 12=40\\ \text{مجموع داده‌های جدید}=5\times 12=60\end{array}\right\}\Rightarrow 60-40=20$$

(آمار و احتمال – آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۴ تا ۹۷)

۲۳- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

با توجه به اطلاعات صورت سؤال می‌توانیم قضیهٔ تقسیم را به صورت زیر بنویسیم:

$$a=263q+2q^3-3$$

$$0\le r<b\Rightarrow 0\le 2q^3-3<263\Rightarrow 3\le 2q^3<266$$

$$2\le q^3<133\Rightarrow q=2,3,4,5$$

با توجه به این‌که a عددی زوج است، q باید فرد باشد (دقت کنید که $2q^3-3$ حتماً عددی فرد است، پس باید $263q$ عددی فرد باشد)، بنابراین q فقط می‌تواند ۳ و ۵ باشد یعنی a دو مقدار را اختیار کند.

(ریاضیات گسسته – آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحهٔ ۱۴)

۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمد صحت‌کار)*

$$\overline{ababa}^{7}\equiv 0 \quad \text{و} \quad \overline{ababa}^{5}\equiv 0 \Rightarrow \overline{ababa}^{35}\equiv 0$$

$$\overline{ababa}^{5}\equiv 0\Rightarrow a^{5}\equiv 0\Rightarrow a=0 \text{ یا } a=5$$

a رقم ده هزارگان است پس نمی‌تواند صفر باشد بنابراین $a=5$ است.

$$\Rightarrow \overline{5b5b5}^{7}\equiv 0\Rightarrow 5+10b+500+1000b+50000\equiv 0^{7}$$

$$\Rightarrow 5+3b+3+(-1)b+(-1)\equiv 0^{7}\Rightarrow 2b\equiv 7^{7}\equiv 0^{7}\Rightarrow b\equiv 0^{7}$$

$$\Rightarrow b=0 \text{ یا } b=7\Rightarrow A \text{ مانند بزرگ‌ترین عدد} = 57575$$

$$\Rightarrow 5+7+5+7+5=29\Rightarrow 29=(13\times 2)+3$$

(ریاضیات گسسته – آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۵- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

با توجه به توضیحات صورت سؤال می‌توانیم معادلهٔ زیر را برای استفاده از بن‌های خرید کتاب بنویسیم:

$$۱۳۰۰۰x+۱۵۰۰۰y=۹۷۵۰۰۰ \xrightarrow{+۱۰۰۰} ۱۳x+۱۵y=۹۷۵$$

$$۱۵y \overset{۱۳}{\equiv} ۹۷۵ \xrightarrow[(۱۳,۱۵)=۱]{+۱۵} y \overset{۱۳}{\equiv} ۶۵ \overset{۱۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow y=۱۳k \quad (۱)$$

$$۱۳x+۱۵(۱۳k)=۹۷۵ \xrightarrow{+۱۳} x=-۱۵k+۷۵ \quad (۲)$$

$$\begin{cases}(۱): ۱۳k \geq ۰ \Rightarrow k \geq ۰\\ (۲): -۱۵k+۷۵ \geq ۰ \Rightarrow k \leq ۵\end{cases} \Rightarrow ۰ \leq k \leq ۵ \Rightarrow$$ ۶ حالت

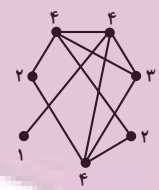
(ریاضیات گسسته – آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۲۶)

۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(امیررضا فلاح)*

درجات رأس‌های این گراف به فرم $a, b, c, d, e, ۲, ۴$ می‌باشد که طبق فرض $abcde=۹۶$ است. از طرفی چون عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر از یک است، پس گراف رأسی از درجهٔ ۶ ندارد و تنها حالت ممکن به صورت زیر است:

$$۹۶=۴\times۴\times۳\times۲\times۱$$

$\Rightarrow$ درجات رئوس : $۴,۴,۴,۳,۲,۲,۱$



گراف G سه رأس از درجهٔ $\Delta=۴$ دارد و در نتیجه گراف $\bar{G}$ دارای ۳ رأس از درجه δ است.

(ریاضیات گسسته – گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

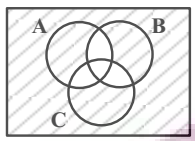
۲۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیررضا فلاح)*

گراف ۵- منتظم حداقل ۶ رأس دارد که $K_۶$ است. چون گراف ناهمبند است، پس این گراف از دو گراف کامل مرتبهٔ ۶ تشکیل شده است. در هر گراف کامل عدد احاطه‌گری ۱ و در نتیجه عدد احاطه‌گری گراف $\gamma=۲$ است.

(ریاضیات گسسته – گراف و مدل‌سازی؛ صفحهٔ ۴۴)

۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیررضا فلاح)*

عضوهایی که بر حداکثر یک عدد از میان اعداد ۴، ۶ و ۹ بخش‌پذیرند به شکل زیر در نمودار ون قرار دارند.



نواحی مورد نظر به شکل زیر محاسبه می‌گردند:

تعداد عضوهایی که بر حداکثر یک عدد بخش‌پذیرند

$=|S|-$ (تعداد عضوهایی که بر حداقل دو تا عدد بخش‌پذیر باشند)

$$=|S|-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-۲|A\cap B\cap C|)$$

$$=۵۰-([\frac{۵۰}{[۴,۶]}]+[\frac{۵۰}{[۴,۹]}]+[\frac{۵۰}{[۶,۹]}]-۲\times[\frac{۵۰}{[۴,۶,۹]}])$$

$$=۵۰-([\frac{۵۰}{۱۲}]+[\frac{۵۰}{۳۶}]+[\frac{۵۰}{۱۸}]-۲\times[\frac{۵۰}{۳۶}])$$

$$=۵۰-(۴+۱+۲-۲)=۵۰-۵=۴۵$$

(ریاضیات گسسته – ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۴ و ۷۵)

۲۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمد صحت‌کار)*

زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعهٔ A عبارتند از:

$$\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۱,۴\},\{۱,۵\},$$

$$\{۲,۳\},\{۲,۴\},\{۲,۵\},\{۳,۴\},\{۳,۵\},\{۴,۵\}$$

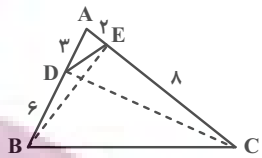
هر عضو دلخواه از مجموعهٔ A در ۴ تا از این زیرمجموعه‌های ۲ عضوی هست. به عنوان مثال، عدد ۱ در ۴ مجموعهٔ $\{۱,۲\}$، $\{۱,۳\}$، $\{۱,۴\}$، $\{۱,۵\}$ وجود دارد. بنابراین با انتخاب تصادفی ۴ مجموعه، امکان دارد که این ۴ مجموعه انتخاب شوند که اشتراک هیچ دو تای آن‌ها تهی نیست. اما با انتخاب تصادفی مجموعهٔ پنجم از میان ۶ مجموعهٔ دیگر، مجموعه‌ای خواهیم داشت که اشتراکش حداقل با یکی از این‌ها تهی خواهد بود. بنابراین با انتخاب تصادفی حداقل ۵ مجموعهٔ ۲ عضوی یقیناً اشتراک ۲ تا از آن‌ها تهی است.

(ریاضیات گسسته – ترکیبیات؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۲)

توشه‌ای برای موفقیت

۳۰- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

نسبت مساحت مثلث‌های ADC و AEB به مساحت مثلث ABC به صورت زیر است:



$$\begin{cases} \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳} \\ \frac{S_{\triangle AEB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE}{AC} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵} \end{cases}$$

دو مثلث ADC و AEB در مثلث ADE مشترکند. نسبت مساحت مثلث ADE به مساحت مثلث ABC براساس رابطهٔ سینوسی مساحت مثلث برابر است با:

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲}AD \times AE \times \sin \hat{A}}{\frac{۱}{۲}AB \times AC \times \sin \hat{A}} = \frac{۳ \times ۲}{۹ \times ۱۰} = \frac{۱}{۱۵}$$

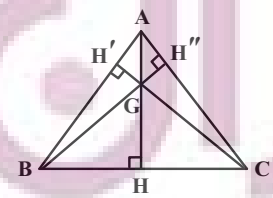
$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{S_{\triangle ADC} - S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle AEB} - S_{\triangle ADE}}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۳}S_{\triangle ABC} - \frac{۱}{۱۵}S_{\triangle ABC}}{\frac{۱}{۵}S_{\triangle ABC} - \frac{۱}{۱۵}S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۱۵}}{\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۱۵}} = \frac{\frac{۴}{۱۵}}{\frac{۲}{۱۵}} = ۲$$

(هندسه ۱ — قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع و میانهٔ وارد بر هر ضلع بر هم منطبق‌اند. از طرفی می‌دانیم از تقاطع میانه‌های هر مثلث، ۶ مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود. بنابراین داریم:



$$S_{\text{رنگی}} = S_{\triangle AGH'} + S_{\triangle CGH} = \frac{۲}{۶}S_{\triangle ABC} = ۹\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = ۲۷\sqrt{۳}$$

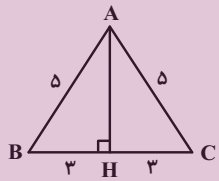
اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر a باشد، مساحت مثلث از رابطهٔ $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = ۲۷\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۱۰۸ \Rightarrow a = ۶\sqrt{۳}$$

(هندسه ۱ — چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۳۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$\overset{\triangle}{AHB} : AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow AH = ۴$$



شکل حاصل از دوران این مثلث حول ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن، یک مخروط به ارتفاع ۴ و شعاع قاعدهٔ ۳ است. تصویر این مخروط در نمای بالا، دایره‌ای به شعاع ۳ و در نماهای جلو و چپ، همان مثلث متساوی‌الساقین است. در نتیجه داریم:

مساحت نمای بالا $= \pi \times ۳^۲ = ۹\pi$

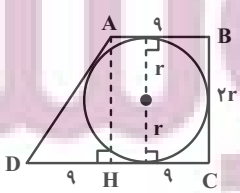
مساحت نمای جلو و نمای چپ $= \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴ = ۱۲$

مجموع مساحت‌ها $= ۹\pi + ۲ \times ۱۲ = ۹\pi + ۲۴ = ۳(۳\pi + ۸)$

(هندسه ۱ — تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۹۶)

۳۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمد خندان)*

اگر شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقه را با r نمایش دهیم، آن‌گاه مطابق شکل $BC = ۲r$ است.



تـوشـه ای بـرای مـوفقیت

طبق رابطهٔ چهارضلعی محیطی داریم:

$$AB+CD=AD+BC \Rightarrow ۹+۱۸=AD+۲r$$

$$\Rightarrow AD=۲۷-۲r$$

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD داریم:

$$AD^۲=AH^۲+HD^۲ \Rightarrow (۲۷-۲r)^۲=(۲r)^۲+۹^۲$$

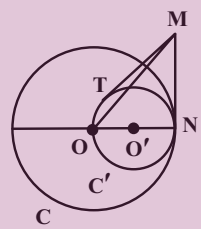
$$\Rightarrow ۷۲۹-۱۰۸r+۴r^۲=۴r^۲+۸۱$$

$$\Rightarrow ۱۰۸r=۶۴۸ \Rightarrow r=۶$$

(هندسه ۲ – دایره؛ صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۳۴- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با توجه به شکل داریم:



$$۲R'=R \Rightarrow R'=\frac{R}{۲}$$

$$\text{مساحت ناحیهٔ بین دو دایره} = \pi R^۲-\pi R'^۲$$

$$=\pi R^۲-\frac{\pi R^۲}{۴}=\frac{۳\pi R^۲}{۴} \Rightarrow \frac{۳\pi R^۲}{۴}=۱۸\pi \Rightarrow R^۲=۲۴$$

مطابق شکل اگر N نقطهٔ تماس دو دایره باشد، آن‌گاه $ON \perp MN$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMN داریم:

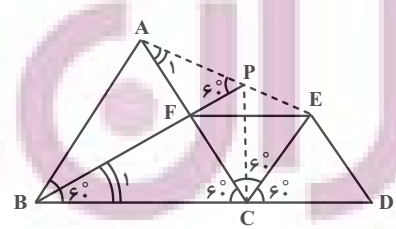
$$MN^۲=OM^۲-ON^۲=۴۹-۲۴=۲۵ \Rightarrow MN=۵$$

می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده بر دایره از یک نقطهٔ خارج آن برابر یکدیگر است، پس برای دایرهٔ C' داریم:

$$MT=MN=۵$$

(هندسه ۲ – دایره؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۳۵- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*



قطر CE در لوزی نیمساز زاویهٔ $F\hat{C}D=۱۲۰^\circ$ است. مطابق شکل نقاط A و E دوران یافته نقاط B و F تحت دوران به مرکز C و زاویهٔ ۶۰° هستند. لذا AE دوران یافته BF تحت دوران به مرکز C و زاویهٔ ۶۰° بوده و زاویهٔ حاده بین آن‌ها ۶۰° است، پس:

$$\begin{cases} A\hat{P}F=۶۰^\circ & \text{(گزینهٔ ۱)} \\ AE=BF & \text{(گزینهٔ ۲)} \end{cases}$$

مثلث‌های BFC و ACE به حالت تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین (ض ز ض) همنهشت بوده و در نتیجه $\hat{A}_۱=\hat{B}_۱$ و به همین دلیل چهارضلعی $APCB$ محاطی است و داریم:

$$\begin{cases} \hat{B}+A\hat{P}C=۱۸۰^\circ \\ \hat{B}=۶۰^\circ \text{ و } A\hat{P}F=۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow C\hat{P}F=۶۰^\circ$$

$\Rightarrow$ BP نیمساز زاویهٔ $A\hat{P}C$ است. (گزینهٔ ۳)

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا ماتریس $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

با توجه به فرم ماتریس $A^۲$، به جای محاسبهٔ $A^۳$، ماتریس $A^۴$ را پیدا می‌کنیم:

$$A^۴=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & ۰ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix}=-۴I$$

بنابراین داریم:

$$A^۶+A^۸+A^{۱۰}=A^۴\times A^۲+(A^۴)^۲+(A^۴)^۲\times A^۲$$

$$=-۴I\times A^۲+(-۴I)^۲+(-۴I)^۲\times A^۲$$

$$=-۴A^۲+۱۶I+۱۶A^۲=۱۲A^۲+۱۶I$$

با توجه به این‌که مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$، برابر صفر است، پس کافی است مجموع درایه‌های ماتریس $۱۶I$ را محاسبه کنیم که برابر است با:

$$۱۶\times ۲=۳۲$$

(هندسه ۳ – ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

توشه‌ای برای موفقیت

۳۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

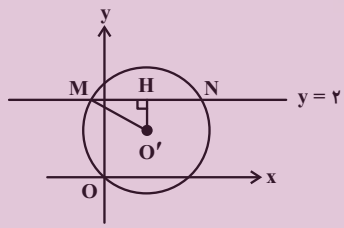
ابتدا مرکز و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث OAB را به دست می‌آوریم. اگر معادلهٔ این دایره را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$O(۰,۰)\Rightarrow ۰+۰+۰+۰+c=۰\Rightarrow c=۰$$

$$\left.\begin{array}{l} A(۲,۴)\Rightarrow ۴+۱۶+۲a+۴b=۰ \\ \Rightarrow a+۲b=-۱۰ \\ B(۴,-۲)\Rightarrow ۱۶+۴+۴a-۲b=۰ \\ \Rightarrow ۲a-b=-۱۰ \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases} a=-۶ \\ b=-۲ \end{cases}$$

مرکز دایره: $O'(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۳,۱)$

شعاع دایره: $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۱۰}$



مطابق شکل فاصلهٔ نقطهٔ $O'(۳,۱)$ از خط $y=۲$، برابر $O'H=۱$ است و داریم:

$$\overset{\Delta}{O'MH}: MH^۲=O'M^۲-O'H^۲$$

$$=(\sqrt{۱۰})^۲-۱^۲=۹\Rightarrow MH=۳$$

می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس طول وتر MN برابر است با:

$$MN=۲MH=۲\times ۳=۶$$

(هندسه ۳ – آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۳۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید $MF=x$ باشد. در این صورت طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث MFF' داریم:

$$FF'^۲=MF^۲+MF'^۲-۲MF\times MF'\times\cos(F\hat{M}F')$$

$$\Rightarrow (۲\sqrt{۷})^۲=x^۲+(۳x)^۲-۲x\times ۳x\times\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲۸=x^۲+۹x^۲-۳x^۲\Rightarrow ۷x^۲=۲۸$$

$$\Rightarrow x^۲=۴\xrightarrow{x>۰} x=۲$$

بنابراین $MF=۲$ و $MF'=۶$ است. می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر بیضی از دو کانون آن برابر طول قطر بزرگ بیضی است، پس داریم:

$$۲a=MF+MF'=۲+۶=۸\Rightarrow a=۴$$

$$۲c=FF'=۲\sqrt{۷}\Rightarrow c=\sqrt{۷}$$

$$\text{خروج از مرکز بیضی}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

(هندسه ۳ – آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۹- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

باید حجم متوازی‌السطوح ساخته شده توسط این سه بردار برابر صفر باشد:

$$V=\begin{vmatrix} n & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۲-n \\ n+۲ & ۳ & ۳-n \end{vmatrix}=۰\xrightarrow{\text{دستور ساروس}}$$

$$(n(۳-n)+۲(۴-n^۲)+۶)-(n+۲+۴(۳-n)+۳n(۲-n))=۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-۳n^۲+۳n+۱۴)-(-۳n^۲+۳n+۱۴)}_{\text{صفر}}=۰$$

بنابراین به ازای هر مقدار n، سه بردار هم‌صفحه‌اند.

توجه: بردار $\vec{c}$ مجموع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

(هندسه ۳ – بردارها؛ صفحه‌های ۸۳ و ۸۴)

۴۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است، پس بر هر بردار موجود در صفحهٔ این دو بردار از جمله $\vec{a}+\vec{b}$ نیز عمود خواهد بود. بنابراین داریم:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲\vec{a}.\vec{b}$$

$$=۲^۲+(۳\sqrt{۳})^۲+۲\times ۲\times ۳\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^۲=۴۹\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=۷$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin ۳۰^\circ=۲\times ۳\sqrt{۳}\times\frac{۱}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

$$|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{b})|=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}\times\vec{b}|\sin ۹۰^\circ$$

$$=۷\times ۳\sqrt{۳}\times ۱=۲۱\sqrt{۳}$$

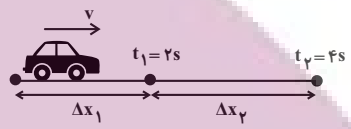
(هندسه ۳ – بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۴)

تـوشـه ای بـرای مـوفقیت

فیزیک

۴۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

روش اول: مطابق شکل زیر، متحرک با سرعت اولیهٔ $v_0 = v$ و با شتاب $a = ۲\frac{m}{s^۲}$ دارای حرکت تندشونده است. با توجه به شکل زیر، معادلهٔ جابه‌جایی- زمان را یک بار برای ۲ ثانیهٔ اول و بار دیگر برای ۴ ثانیهٔ اول می‌نویسیم و به‌صورت زیر v را می‌یابیم.



$$\Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}at_۱^۲ + v_۰t_۱ \xrightarrow[v_۰=v\ ,\ t_۱=۲s]{a=۲\frac{m}{s^۲}}$$

$$\Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}\times ۲\times ۴ + v\times ۲ = ۴ + ۲v$$

$$\Delta x_۱ + \Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}at_۲^۲ + v_۰t_۲ \xrightarrow{t_۲=۴s}$$

$$\Delta x_۱ + \Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}\times ۲\times ۱۶ + v\times ۴$$

$$\Rightarrow \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = ۱۶ + ۴v \xrightarrow{\Delta x_۱ = ۴+۲v}$$

$$۴ + ۲v + \Delta x_۲ = ۱۶ + ۴v \Rightarrow \Delta x_۲ = ۱۲ + ۲v$$

از طرف دیگر طبق صورت سؤال داریم:

$$\Delta x_۲ = \frac{۳}{۲}\Delta x_۱ \Rightarrow ۱۲ + ۲v = \frac{۳}{۲}\times(۴ + ۲v)$$

$$\Rightarrow ۱۲ + ۲v = ۶ + ۳v \Rightarrow v = ۶\frac{m}{s}$$

در آخر، با داشتن v، جابه‌جایی در ۴ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \xrightarrow[t=۴s\ ,\ a=۲\frac{m}{s^۲}]{v_۰=v=۶\frac{m}{s}}$$

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}\times ۲\times ۱۶ + ۶\times ۴ = ۴۰m$$

روش دوم: چون در حرکت شتابدار با شتاب ثابت، جابه‌جایی در t ثانیه‌های متوالی تشکیل یک دنبالهٔ عددی با قدرنسبت $d = at^۲$ را می‌دهد، می‌توان نوشت:

$$\Delta x_n = \Delta x_۱ + (n-۱)at^۲ \xrightarrow[n=۲]{a=۲\frac{m}{s^۲}\ ,\ t=۲s}$$

$$\Delta x_۲ = \Delta x_۱ + (۲-۱)\times ۲\times ۴ \xrightarrow{\Delta x_۲ = \frac{۳}{۲}\Delta x_۱}$$

$$\frac{۳}{۲}\Delta x_۱ = \Delta x_۱ + ۸ \Rightarrow \Delta x_۱ = ۱۶m$$

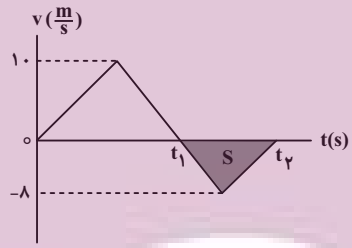
$$\Delta x_۲ = \frac{۳}{۲}\times ۱۶ = ۲۴m$$

$$\Delta x_{کل} = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = ۱۶ + ۲۴ = ۴۰m$$

(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

می‌دانیم سطح بین نمودار $v-t$ و محور t برابر جابه‌جایی است. از طرف دیگر، در بازهٔ زمانی که سرعت منفی است، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است. بنابراین با محاسبهٔ مساحت مثلث رنگ شده، مسافت طی شده را می‌یابیم و به دنبال آن تندی متوسط را حساب می‌کنیم:



$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = t_۲ - t_۱]{\ell = |S| = \left|\frac{-۸\times(t_۲-t_۱)}{۲}\right|}$$

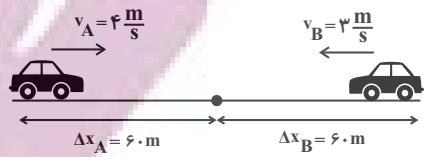
$$s_{av} = \frac{\frac{۱}{۲}\times ۸\times(t_۲-t_۱)}{t_۲-t_۱} = ۴\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰ و ۱۷)

۴۳- **گزینهٔ «۳»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

چون دو متحرک در وسط مسیر به هم می‌رسند، هر کدام از آن‌ها ۶۰m جابه‌جا می‌شوند. بنابراین، کافی است، زمان جابه‌جایی هر یک از متحرک‌ها را بیابیم و اختلاف آن‌ها را حساب کنیم. چون سرعت متحرک‌ها ثابت است، با استفاده از معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت داریم:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



$$\Delta x_A = v_A t_A \xrightarrow[v_A=4\frac{m}{s}]{\Delta x_A=60m} 60 = 4t_A \Rightarrow t_A = 15s$$

$$\Delta x_B = v_B t_B \xrightarrow[v_B=3\frac{m}{s}]{\Delta x_B=60m} 60 = 3t_B \Rightarrow t_B = 20s$$

در آخر داریم:

$$t = t_B - t_A = 20 - 15 = 5s$$

(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۴۴- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

بیشترین فاصلهٔ دو گلوله در حالتی است که گلولهٔ اول به سطح زمین برسد. بنابراین، ابتدا زمان رسیدن گلولهٔ اول به سطح زمین را می‌یابیم. جهت بالا را مثبت و مبدأ مکان را محل رها شدن گلوله فرض می‌کنیم. در این حالت داریم:

$$y_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + y_0 \xrightarrow[y_1=-320m]{y_0=0} -320 = -\frac{1}{2}\times 10\times t_1^2 + 0$$

$$t_1^2 = 64 \Rightarrow t_1 = 8s$$

چون گلولهٔ دوم $3s$ دیرتر رها شده است، در لحظه‌ای که گلولهٔ اول به زمین می‌رسد، گلولهٔ دوم $t_2 = 8 - 3 = 5s$ در حال حرکت بوده است. بنابراین، در لحظهٔ $t = 5s$، مکان گلولهٔ دوم برابر است با:

$$y_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + y_0 \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{2}\times 10\times 5^2 + 0 = -125m$$

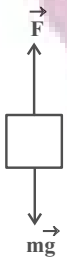
در آخر، بیشترین فاصلهٔ دو گلوله از یکدیگر برابر است با:

$$d = |y_1| - |y_2| = 320 - 125 = 195m$$

(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۴۵- **گزینهٔ «۱»** *(غلامرضا مصبی)*

ابتدا با استفاده از قانون دوم نیوتون و شکل زیر و با توجه به این‌که جهت حرکت در راستای قائم و رو به بالا است، می‌توان نوشت:



$$F_{net} = ma \Rightarrow F - mg = ma \Rightarrow F = m(g+a) \quad (1)$$

اکنون برای حالت اول و دوم و با توجه به معادلهٔ سرعت $v = 2t + 6$، شتاب حرکت در مرحلهٔ اول $a_1 = 2\frac{m}{s^2}$ است، داریم:

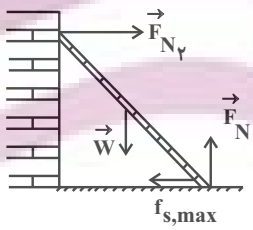
$$\xrightarrow{(1)} \frac{F_2}{F_1} = \frac{m(g+a_2)}{m(g+a_1)} \xrightarrow[a_1=2\frac{m}{s^2}]{F_2=2F_1}$$

$$\frac{2F_1}{F_1} = \frac{10+a_2}{10+2} \Rightarrow 10 + a_2 = 24 \Rightarrow a_2 = 14\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳ – دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۶، ۴۴ و ۴۵)

۴۶- **گزینهٔ «۱»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

مطابق شکل زیر، نخست، نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم. چون نردبان در آستانهٔ حرکت قرار دارد، بنابراین، نیروی خالص در راستای افقی و قائم صفر است. در این حالت می‌توان نوشت:



$$(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F_{N_1} - W = 0 \Rightarrow F_{N_1} = W = mg$$

$$(F_{net})_x = 0 \Rightarrow F_{N_2} - f_{s,max} = 0 \Rightarrow F_{N_2} = f_{s,max}$$

$$\frac{F_{N_2}}{F_{N_1}} = \frac{f_{s,max}}{F_{N_1}} = \frac{\mu_s F_{N_1}}{F_{N_1}} = \mu_s$$

در آخر داریم:

$$\Rightarrow \frac{F_{N_2}}{F_{N_1}} = 0/4 = \frac{2}{5}$$

(فیزیک ۳ – دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۴۶)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۷- **گزینهٔ «۲»** *(معصومه شریعت ناصری)*

دو ثانیهٔ سوم، همان بازهٔ زمانی $t_1 = 4s$ تا $t_2 = 6s$ است. بنابراین، ابتدا نیروی وارد بر متحرک را در لحظه‌های t_1 و t_2 پیدا می‌کنیم:

$$F = 2t - 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4s \Rightarrow F_1 = 2\times 4 - 1 = 7N \\ t_2 = 6s \Rightarrow F_2 = 2\times 6 - 1 = 11N \end{cases}$$

اکنون نیروی متوسط در بازهٔ زمانی فوق را می‌یابیم. دقت کنید، چون F تابع درجهٔ یک از زمان است، نیروی متوسط برابر است با:

$$F_{av} = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{7+11}{2} = 9N$$

در آخر از رابطهٔ زیر تغییرات تکانه را پیدا می‌کنیم:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \xrightarrow[F_{av}=9N]{\Delta t = 6-4 = 2s} 9 = \frac{\Delta p}{2} \Rightarrow \Delta p = 18\frac{kg.m}{s}$$

به عنوان روش دوم می‌توان نمودار $F-t$ را با توجه به رابطهٔ $F = 2t - 1$، رسم نمود و سپس از مساحت سطح زیر نمودار، Δp را به‌دست آورد.

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۴۸- **گزینهٔ «۲»** *(مسعود قره‌خانی)*

چون جسم با تندی ثابت بر مسیر دایره‌ای در حال حرکت است، حرکت آن دایره‌ای یکنواخت است. بنابراین، ابتدا با استفاده از رابطهٔ $F = m\frac{v^2}{r}$ و با توجه به این‌که m و r ثابت‌اند، می‌توان نوشت:

$$F = m\frac{v^2}{r} \xrightarrow[r=\text{ثابت}]{m=\text{ثابت}} \frac{F_2}{F_1} = (\frac{v_2}{v_1})^2$$

$$\xrightarrow{F_2 = 2F_1} \frac{2F_1}{F_1} = (\frac{v_2}{v_1})^2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2}v_1$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ $T = \frac{2\pi r}{v}$، می‌توان نوشت:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{r=\text{ثابت}} \frac{T_2}{T_1} = \frac{v_1}{v_2} \xrightarrow{v_2 = \sqrt{2}v_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{v_1}{\sqrt{2}v_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۴۹- **گزینهٔ «۴»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

ابتدا شتاب گرانشی را در سطح سیارهٔ دیگر برحسب g_e می‌یابیم:

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \frac{g_e}{g_P} = \frac{M_e}{M_P}\times(\frac{R_P}{R_e})^2 \xrightarrow[R_P = \frac{1}{2}R_e]{M_P = \frac{1}{2}M_e}$$

$$\frac{g_e}{g_P} = \frac{M_e}{\frac{1}{2}M_e}\times(\frac{\frac{1}{2}R_e}{R_e})^2 = 2\times\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{g_e}{g_P} = \frac{1}{2}$$

اکنون، با استفاده از رابطهٔ دورهٔ تناوب آونگ ساده می‌توان نوشت:

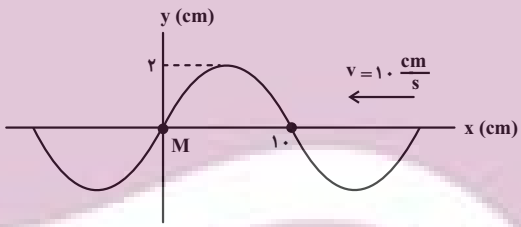
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \frac{T_P}{T_e} = \sqrt{\frac{\ell_P}{\ell_e}\times\frac{g_e}{g_P}} \xrightarrow[T_e = 2s]{\ell_P = \frac{1}{2}\ell_e}$$

$$\frac{T_P}{2} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\ell_e}{\ell_e}\times\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{T_P}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{T_P}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_P = 1s$$

(فیزیک ۳ – نوسان و موج؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶ و ۶۷ و ۶۸)

۵۰- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

ابتدا طول‌موج و سپس دورهٔ تناوب موج را می‌یابیم. با توجه به شکل زیر، داریم:



$$\frac{\lambda}{2} = 10 \Rightarrow \lambda = 20cm$$

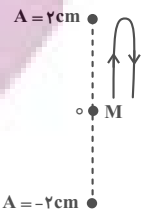
$$\lambda = vT \xrightarrow{v = 10\frac{cm}{s}} 20 = 10\times T \Rightarrow T = 2s$$

اکنون تعیین می‌کنیم $\Delta t = 1s$ چه کسری از دورهٔ تناوب است.

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{2}T$$

چون $\Delta t = 1s$ نصف دورهٔ تناوب است، با توجه به جهت انتشار موج، در این مدت ذرهٔ M به‌طرف نقطهٔ بازگشتی $A = 2cm$ می‌رود و مجدداً به نقطهٔ تعادل (مرکز نوسان خودش) بازمی‌گردد. بنابراین، مکان آن بعد از $\Delta t = 1s$ برابر $x = 0$ است و تندی آن در این مکان بیشینه است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

تـوشـه ای بـرای مـوفقیت



$$v_{max} = A\omega \xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}} v_{max} = A\times\frac{2\pi}{T}$$

$$\xrightarrow[T=2s]{A=2cm=0/02m} v_{max} = 0/02\times\frac{2\pi}{2} = 0/02\pi\,\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳ – نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۷۴)

۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا باید مشخص کنیم با افزایش فاصله از چشمهٔ صوت، شدت صوت چند برابر می‌شود:

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{f_2}{f_1}\times\frac{A_2}{A_1}\times\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \xrightarrow[r_2=d+3d=4d]{r_1=d\ ,\ f_1=f_2\ ,\ A_1=A_2}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(1\times1\times\frac{d}{4d}\right)^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$$

اکنون، تغییر تراز شدت صوت را حساب می‌کنیم:

$$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = 10\log\frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \Delta\beta = 10\log 2^{-4} = -40\log 2$$

$$\xrightarrow{\log 2=0/3} \Delta\beta = -40\times0/3 = -12dB$$

در آخر، درصد تغییر تراز شدت صوت را می‌یابیم:

$$\text{درصد تغییر تراز شدت صوت} = \frac{\Delta\beta}{\beta_1}\times100 \xrightarrow{\beta_1=96dB}$$

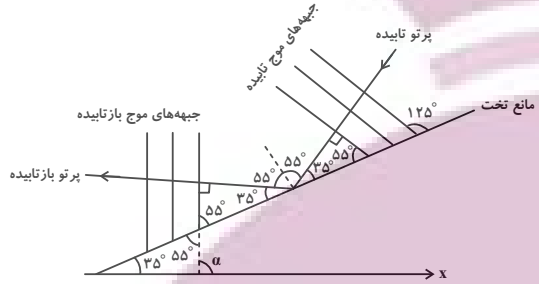
$$\text{درصد تغییر تراز شدت صوت} = \frac{-12}{96}\times100 = -12/5\%$$

(فیزیک ۳ – نوسان و موج؛ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۵۲- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

با توجه به شکل زیر، زاویهٔ بین جبهه‌های موج تابیده به مانع تخت برابر 55° است، لذا، زاویهٔ بین جبهه‌های موج بازتابیده و مانع نیز 55° می‌باشد. چراکه طبق قانون بازتاب عمومی زاویهٔ تابش برابر زاویهٔ بازتابش است.

بنابراین، چون جبهه‌های موج بر پرتوهای تابیده و بازتابیده عمود‌اند، در نتیجه، زاویهٔ بین جبهه‌های موج تابیده و مانع تخت برابر زاویهٔ بین جبهه‌های موج بازتابیده و مانع خواهد بود. در این حالت داریم:



$$\alpha = 35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$$

(فیزیک ۳ – برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۰ تا ۹۲)

۵۳- **گزینهٔ «۴»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

می‌دانیم پهنای نوارهای تداخلی متناسب با طول‌موج است. بنابراین، ابتدا، تندی نور در محیط با ضریب شکست $n_1 = 3$ را می‌یابیم و سپس با استفاده از رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$ و با توجه به اینکه f ثابت می‌باشد، به‌صورت زیر، پهنای نوار در محیط دوم را حساب می‌کنیم:

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \xrightarrow[n_1=3]{c=3\times10^8} v_1 = \frac{3\times10^8}{3} = 10^8\,\frac{m}{s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow{f=\text{ثابت}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} \xrightarrow[v_1=10^8\frac{m}{s}]{v_2=1/5\times10^8\frac{m}{s}}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1/5\times10^8}{10^8} = 1/5 \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{3}{2}$$

از طرف دیگر، $a \propto \lambda$ است، لذا داریم:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \xrightarrow{a_1=1/2mm} \frac{a_2}{1/2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a_2 = 1/8mm$$

(فیزیک ۳ – برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۷، ۱۰۴ و ۱۰۵)

۵۴- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحمد میرسعید)*

ابتدا کوتاه‌ترین طول‌موج رشتهٔ پاشن را می‌یابیم. کوتاه‌ترین طول‌موج رشتهٔ پاشن، در گذار الکترون از تراز $n = \infty$ به تراز $n' = 3$ به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:

توشه‌ای برای موفقیت

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow[R=0/01nm^{-1}]{n=\infty\ ,\ n'=3}$$

$$\frac{1}{\lambda_{min}}=\frac{1}{100}\times\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{\infty^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{min}}=\frac{1}{900}$$

$$\Rightarrow\lambda_{min}=900nm$$

چون طول‌موج فوتون تابش شده $(\lambda_0=900nm)$ بزرگ‌تر از طول‌موج آستانهٔ فلزها ($\lambda_{0A}=200nm$ و $\lambda_{0B}=600nm$) است، اثر فوتوالکتریک برای هیچ کدام از فلزها رخ نمی‌دهد.

دقت کنید اگر طول‌موج نور تابشی از طول‌موج آستانهٔ فلز (λ_0) بزرگ‌تر باشد، انرژی فوتون فرودی کمتر از تابع کار فلز (W_0) می‌شود، لذا پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد.

(فیزیک ۳ – آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۲۴)

۵۵- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قره‌خانی)*

می‌دانیم برای اولین حالت برانگیخته، الکترون در تراز $n=2$ و برای سومین حالت برانگیخته، الکترون در تراز $n=4$ قرار دارد. از طرف دیگر، انرژی الکترون در هر تراز از رابطهٔ $E_n=-\frac{E_R}{n^2}$ به‌دست می‌آید. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\text{اولین حالت برانگیخته}\Rightarrow E_2=-\frac{E_R}{2^2}=-\frac{E_R}{4}\\ \text{سومین حالت برانگیخته}\Rightarrow E_4=-\frac{E_R}{4^2}=-\frac{E_R}{16}\end{cases}$$

$$\frac{E_2}{E_4}=\frac{-\frac{E_R}{4}}{-\frac{E_R}{16}}=\frac{16}{4}\Rightarrow\frac{E_2}{E_1}=4$$

(فیزیک ۳ – آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۷)

۵۶- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

می‌دانیم در معادلهٔ واپاشی هستهٔ یک اتم، باید مجموع عددهای جرمی دو طرف معادله با هم و مجموع عددهای اتمی دو طرف معادله نیز با هم برابر باشند. بنابراین، با توجه به معادلهٔ واپاشی زیر، تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌های هستهٔ دختر را می‌یابیم. دقت کنید، ذرهٔ α از جنس هستهٔ هلیم $(^4_2He^{2+})$ و β^- از جنس الکترون $^0_{-1}e$ است.

$$^{237}_{93}NP\rightarrow{}^A_ZY+3(^4_2He^{2+})+{}^0_{-1}e$$

$$\begin{cases}237=A+(3\times4)+0\Rightarrow A=225\\ 93=Z+(3\times2)-1\Rightarrow Z=88\end{cases}$$

می‌بینیم، تعداد پروتون‌ها $Z=88$ و تعداد نوترون‌ها برابر $N=225-88=137$ می‌باشد. دقت کنید، $A=N+Z$ است.

(فیزیک ۳ – آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۵)

۵۷- **گزینهٔ «۱»** *(مسعود قره‌خانی)*

ابتدا تعداد هسته‌های باقی‌مانده را می‌یابیم. چون تعداد هسته‌های واپاشیده $(N'=N_0-N)$ ۱۵ برابر تعداد هسته‌های فعال باقیمانده (N) است، می‌توان نوشت:

$$N'=15N\xrightarrow{N'=N_0-N}N_0-N=15N$$

$$\Rightarrow N_0=16N\Rightarrow N=\frac{1}{16}N_0$$

اکنون، با استفاده از رابطهٔ زیر، تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده را پیدا می‌کنیم:

$$N=N_0(\frac{1}{2})^n\xrightarrow{N=\frac{1}{16}N_0}\frac{1}{16}N_0=N_0(\frac{1}{2})^n$$

$$\Rightarrow(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{16}\Rightarrow\frac{1}{2^n}=\frac{1}{16}\Rightarrow2^n=16=2^4\Rightarrow n=4$$

در آخر داریم:

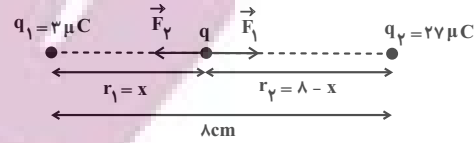
$$n=\frac{t}{\frac{T_1}{2}}=\xrightarrow[n=4]{T_1=8\text{ روز}}4=\frac{t}{8}\Rightarrow t=32\text{ روز}$$

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

در حالت اول، نقطه‌ای را که نیروی خالص وارد بر بار q صفر می‌شود، پیدا می‌کنیم. چون بارهای q_1 و q_2 هم‌علامت‌اند، نقطهٔ موردنظر بین دو بار و نزدیک باری است که اندازهٔ آن کوچک‌تر است. بنابراین، با فرض $q>0$، داریم:

توشه‌ای برای موفقیت

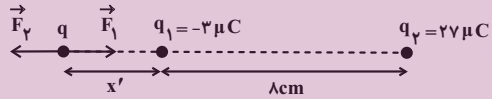


$$F_1=F_2 \xrightarrow{F=k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}} k\frac{|q_1||q|}{r_1^2}=k\frac{|q_2||q|}{r_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x^2}=\frac{27}{(8-x)^2}\Rightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{9}{(8-x)^2}\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{3}{8-x}$$

$$\Rightarrow 3x=8-x\Rightarrow 4x=8\Rightarrow x=2cm$$

برای حالت دوم، با قرینه کردن علامت بار q_1 یا بار q_2 ، نقطهٔ موردنظر به خارج از فاصلهٔ بین دو بار و روی امتداد آن‌ها و نزدیک به بار کوچک‌تر (q_1) منتقل می‌شود. بنابراین، با توجه به شکل زیر داریم:



$$F_1=F_2\Rightarrow k\frac{|q_1||q|}{r_1^2}=k\frac{|q_2||q|}{r_2^2}\xrightarrow[r_2=8+x']{r_1=x'}$$

$$\frac{3}{x'}=\frac{27}{(x'+8)^2}\Rightarrow \frac{1}{x'^2}=\frac{9}{(x'+8)^2}$$

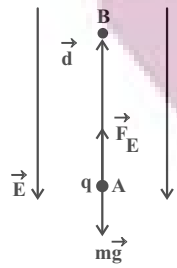
$$\Rightarrow \frac{1}{x'}=\frac{3}{x'+8}\Rightarrow x'=4cm$$

می‌بینیم نقطهٔ موردنظر از ۲ سانتی‌متری سمت راست بار q_1 به ۴ سانتی‌متری سمت چپ آن، یعنی $d=2+4=6cm$ جابه‌جا می‌شود.

(فیزیک ۲ – الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۵ تا ۱۰)

۵۹- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

بر ذرهٔ باردار $q=-3\times10^4\mu C$ در خلاف جهت میدان الکتریکی و رو به بالا نیرو وارد می‌شود. بنابراین، چون نیروی الکتریکی و جابه‌جایی هم‌جهت‌اند، $\theta=0^\circ$ می‌باشد. در این حالت کار نیروی الکتریکی برابر است با:



$$W_E=F\cos\theta d\xrightarrow{F=|q|E} W_E=|q|E\cos\theta\times d$$

$$\xrightarrow[E=10\frac{N}{C},\ \theta=0,\ d=2m]{|q|=3\times10^4\mu C=3\times10^4\times10^{-6}C}$$

$$W_E=3\times10^4\times10^{-6}\times10\times\cos(0)\times2$$

$$\Rightarrow W_E=0/6J$$

اکنون کار نیروی وزن را می‌یابیم:

$$W_{mg}=-mgh\xrightarrow[m=10g=0/01kg]{h=d=2m}$$

$$W_{mg}=-0/01\times10\times2=-0/2J$$

با توجه به اینکه کار برایند نیروهای وارد بر جسم برابر تغییر انرژی جنبشی آن است، داریم:

$$W_{کل}=\Delta K\Rightarrow W_E+W_{mg}=\frac{1}{2}m(v_B^2-v_A^2)$$

$$\xrightarrow{v_A=0}0/6-0/2=\frac{1}{2}\times0/01\times(v_B^2-0)$$

$$\Rightarrow 0/8=0/01\times v_B^2\Rightarrow v_B^2=80=16\times5$$

$$\Rightarrow v_B=4\sqrt{5}\frac{m}{s}$$

برای محاسبهٔ پتانسیل نقطهٔ B از رابطهٔ $\Delta V=\frac{\Delta U}{q}$ استفاده می‌کنیم. در این رابطه علامت q را وارد می‌کنیم:

$$V_B-V_A=\frac{\Delta U}{q}\xrightarrow[V_B=15V]{\Delta U=-W_E=-0/6J}$$

$$15-V_A=\frac{-0/6}{-3\times10^4\times10^{-6}}\Rightarrow 15-V_A=20\Rightarrow V_A=-5V$$

(فیزیک ۲ – الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۷)

توشه‌ای برای موفقیت

۶۰- **گزینهٔ «۱»** *(پوریا علاقه‌مند)*

چون خازن را پس از پر شدن از باتری جدا کرده‌ایم، بار الکتریکی آن ثابت می‌ماند. بنابراین، با استفاده از رابطهٔ $C=\frac{Q}{V}$ داریم:

$$C=\kappa\varepsilon_{\circ}\frac{A}{d}\xrightarrow{d=\text{ثابت}}\frac{C_2}{C_1}=\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\times\frac{A_2}{A_1}$$

$$\xrightarrow[A_2=2A_1]{\kappa_2=4\ ,\ \kappa_1=1}\frac{C_2}{C_1}=\frac{4}{1}\times\frac{2A_1}{A_1}\Rightarrow\frac{C_2}{C_1}=8$$

$$C=\frac{Q}{V}\xrightarrow{Q=\text{ثابت}}\frac{C_2}{C_1}=\frac{V_1}{V_2}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=8\Rightarrow V_1=8V_2$$

از طرف دیگر، $E=\frac{V}{d}$ است. بنابراین داریم:

$$E=\frac{V}{d}\xrightarrow{d=\text{ثابت}}\frac{E_2}{E_1}=\frac{V_2}{V_1}\xrightarrow{V_1=8V_2}$$

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{V_2}{8V_2}\Rightarrow\frac{E_2}{E_1}=\frac{1}{8}$$

(فیزیک ۲ - الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۶۱- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی کیانی)*

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ مقاومت مقاومت‌های نوری به نور تابیده شده به آن‌ها بستگی دارد و به دمای محیط بستگی ندارد.

ب) درست

پ) نادرست؛ دیودها از انواع مقاومت‌های نوری نیستند.

ت) نادرست؛ از LDR ها می‌توان در تجهیزات چشم الکترونیکی، دزدگیرها، کنترل‌کننده‌های خودکار و چراغ‌های روشنایی خیابان استفاده کرد.

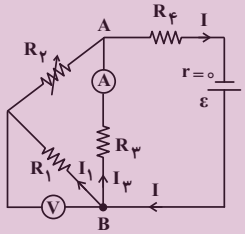
ث) درست؛ میزان مقاومت LDR با میزان نور تابیده به آن، رابطهٔ عکس دارد.

می‌بینیم تعداد ۳ عبارت نادرست است.

(فیزیک ۲ – جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۶۲- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

با افزایش مقاومت R_2، مقاومت معادل مدار افزایش می‌یابد، در نتیجه، بنابه رابطهٔ $I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$ و با توجه به اینکه ε ثابت و $r=0$ است، جریان اصلی مدار که از مقاومت R_4 نیز می‌گذرد، کاهش می‌یابد. با کاهش جریان مقاومت R_4، بنابه رابطهٔ $V_4=R_4I$، چون R_4 ثابت است، V_4 نیز کاهش می‌یابد. اختلاف پتانسیل دو سر باتری ثابت و برابر $V=\varepsilon$ می‌باشد. بنابراین، با توجه به اینکه $V=V_4+V_{AB}$ است، با کاهش V_4 و ثابت بودن V، V_{AB} افزایش می‌یابد. با افزایش V_{AB}، طبق رابطهٔ $V_{AB}=R_3I_3$، چون R_3 ثابت است، جریان I_3 که از آمپرسنج عبور می‌کند، افزایش پیدا خواهد کرد.



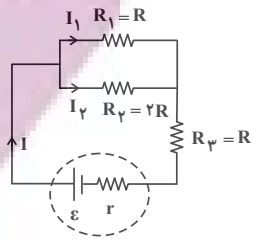
در آخر، چون $I_{کل}=I_3+I_1$ است، با کاهش $I_{کل}$ و افزایش I_3، جریان I_1 نیز کاهش می‌یابد، لذا بنابه رابطهٔ $V_1=R_1I_1$، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1 که ولت‌سنج نشان می‌دهد، کاهش خواهد یافت.

(فیزیک ۲ – جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶ و ۷۰ تا ۷۷)

۶۳- **گزینهٔ «۱»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

مطابق شکل زیر، ابتدا جریان الکتریکی مقاومت R_2 را برحسب جریان اصلی مدار (I) می‌یابیم. اگر جریان مقاومت R_2 را I_2 فرض کنیم، چون مقاومت R_2 موازی مقاومت R_1 است،ا ختلاف پتانسیل مقاومت معادل آن‌ها با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_2 یکسان است. با توجه به اینکه از مقاومت $R_{1,2}$، جریان اصلی مدار عبور می‌کند، می‌توان نوشت:

توشه‌ای برای موفقیت



$$V_{1,2} = V_2 \Rightarrow R_{1,2}I = R_2 I_2$$

$$\xrightarrow{R_{1,2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{2}{3}R} \frac{2}{3}RI = 2RI_2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{3}I$$

توان مصرفی در مقاومت R_2 برابر است:

$$P_{R_2} = R_2 I_2^2 = 2R \times \frac{1}{9}I^2 \Rightarrow P_{R_2} = \frac{2}{9}RI^2$$

اکنون مقاومت معادل مدار را می‌یابیم و توان مصرفی در مقاومت معادل را حساب می‌کنیم:

$$R_{eq} = R_{1,2} + R_3 \Rightarrow R_{eq} = \frac{2}{3}R + R = \frac{5}{3}R$$

$$P_{R_{eq}} = R_{eq} I^2 \Rightarrow P_{R_{eq}} = \frac{5}{3}RI^2$$

از طرف دیگر، چون ۱۰ درصد توان تولیدی P_ε در مقاومت درونی باتری مصرف می‌شود، لذا، ۹۰ درصد آن در مقاومت معادل مدار مصرف خواهد شد. در این حالت با یک تناسب ساده می‌توان نوشت:

$$\frac{P_{R_{eq}}}{P_{R_2}} = \frac{0/90P_\varepsilon}{x} \Rightarrow \frac{\frac{5}{3}RI^2}{\frac{2}{9}RI^2} = \frac{0/9P_\varepsilon}{x} \Rightarrow \frac{45}{6} = \frac{0/9\,P_\varepsilon}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \times 0/9P_\varepsilon}{45} = 0/12P_\varepsilon \Rightarrow x = 12\%\,P_\varepsilon$$

(فیزیک ۲ - جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۶ تا ۷۷)

۶۴- **گزینهٔ «۲»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

ابتدا با استفاده از رابطهٔ $R = \rho\frac{L}{A}$، نسبت $\frac{R_2}{R_1}$ را می‌یابیم. اندیس (۲) مربوط به سیم مسی و اندیس (۱) مربوط به سیم آهنی است.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2} \xrightarrow[\rho_1=3\rho_2\ ,\ L_1=L_2]{A_1=\frac{A}{2}\ ,\ A_2=3A}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{3\rho_2} \times 1 \times \frac{\frac{A}{2}}{3A} \Rightarrow R_1 = 18R_2$$

اکنون با استفاده از قانون اهم نسبت $\frac{I_2}{I_1}$ را پیدا می‌کنیم. دقت کنید، چون مقاومت درونی باتری $r = 0$ است. بنابه رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$، اختلاف پتانسیل دو سر باتری ثابت و همواره برابر $V = \varepsilon$ است، در نتیجه V_{MN} نیز ثابت می‌ماند.

$$I = \frac{V}{R} \xrightarrow{V=\text{ثابت}} \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} \xrightarrow{R_1=18R_2}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{18R_2}{R_2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 18$$

در آخر با استفاده از رابطهٔ $F = I\ell B\sin\theta$ و با توجه به اینکه در هر دو حالت سیم‌ها بر میدان مغناطیسی عمودند $(\theta = 90^\circ)$، نسبت $\frac{F_2}{F_1}$ را می‌یابیم:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{I_2}{I_1} \times \frac{\ell_2}{\ell_1} \times \frac{B_2}{B_1} \times \frac{\sin 90^\circ}{\sin 90^\circ} \xrightarrow[B_2=B_1]{\ell_2=\ell_1}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 18 \times 1 \times 1 \times 1 \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = 18$$

(فیزیک ۲ - مغناطیس؛ صفحه‌های ۵۱، ۵۲ و ۹۱ تا ۹۴)

۶۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

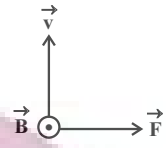
ابتدا با استفاده از قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی هر یک از سیم‌ها را تعیین می‌کنیم و سپس با توجه به جهت و اندازهٔ میدان‌ها در نقطهٔ M، اندازهٔ میدان مغناطیسی خالص را در این نقطه می‌یابیم. با توجه به جهت جریان‌ها، میدان مغناطیسی حاصل از جریان‌های I_2 و I_3 در نقطهٔ M برون‌سو و میدان مغناطیسی حاصل از جریان I_1 درون‌سو است. از طرف دیگر، چون $B_2 + B_3 > B_1$ است، جهت میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ M برون‌سو خواهد بود. بنابراین داریم:

$$B_M = B_2 + B_3 - B_1 \xrightarrow[B_1=20G]{B_2=30G\ ,\ B_3=40G}$$

$$B_M = 30 + 40 - 20 = 50G$$

تـوشـه ای بـرای مـوفقیت

اکنون با توجه به جهت $\vec{v}$ و $\vec{B}$ و اندازهٔ آن‌ها، اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر بار q و جهت آن را می‌یابیم. دقت کنید برای تعیین جهت نیروی مغناطیسی از قاعدهٔ دست راست استفاده می‌کنیم.



$$F = |q| vB\sin\theta \xrightarrow[B=50G=50\times10^{-4}T\ ,\ \theta=90^\circ]{v=10^4\frac{m}{s}\ ,\ |q|=5\times10^{-6}C} F = 5\times10^{-6}\times10^4\times50\times10^{-4}\times\sin90^\circ = 2/5\times10^{-4}N$$

(فیزیک ۲ - مغناطیس: صفحه‌های ۸۹، ۹۰ و ۹۴ تا ۹۶)

۶۶- **گزینهٔ «۳»** *(پوریا علاقه‌مند)*

دو ثانیهٔ دوم همان بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 4s$ است. بنابراین، ابتدا اندازهٔ میدان مغناطیسی را در لحظه‌های فوق، می‌یابیم:

$$B = 2t + 6 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2s \Rightarrow B_1 = 2\times2+6 = 10T \\ t_2 = 4s \Rightarrow B_2 = 2\times4+6 = 14T \end{cases}$$

اکنون تغییر شار مغناطیسی در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 را پیدا می‌کنیم. در این مرحله، ابتدا مساحت سطح مقطع پیچه را حساب می‌کنیم:

$$A = \pi r^2 \xrightarrow[r=5cm=5\times10^{-2}m]{\pi=3} A = 3\times25\times10^{-4} = 75\times10^{-4}m^2$$

$$\Delta\Phi = A\cos\theta(B_2 - B_1) \xrightarrow[\cos(0)=1]{\theta=0^\circ}$$

$$\Delta\Phi = 75\times10^{-4}\times1\times(14-10) = 3\times10^{-2}Wb$$

در آخر $\bar{\varepsilon}$ را می‌یابیم و به دنبال آن جریان القایی را حساب می‌کنیم:

$$\bar{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=4-2=2s]{N=300\ ,\ \Delta\Phi=3\times10^{-2}Wb} \bar{\varepsilon} = -300\times\frac{3\times10^{-2}}{2} = -4/5V \Rightarrow |\bar{\varepsilon}| = 4/5V$$

دقت کنید چون مقاومت هر متر از سیم 2Ω است، لازم است، طول سیمی که از آن پیچه را ساخته‌ایم، به‌دست آوریم:

$$L = N(2\pi r) = 300\times(2\times3\times5\times10^{-2}) = 90m$$

$$R = 90\times2\Omega = 180\Omega$$

$$\bar{I} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{4/5}{180} = \frac{1}{40}A \xrightarrow{1A=1000mA}$$

$$\bar{I} = \frac{1}{40}\times1000mA = 25mA$$

(فیزیک ۲ - القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶)

۶۷- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کیانی)*

می‌دانیم بیشینهٔ انرژی ذخیره شده در سیملوله به ازای بیشینهٔ جریان الکتریکی است. از طرف دیگر، طبق رابطهٔ $I = 2\sqrt{3}\sin300\pi t$، بیشینهٔ جریان برابر $I_m = 2\sqrt{3}A$ می‌باشد. بنابراین، با توجه به رابطهٔ انرژی ذخیره شده در سیملوله، جریان الکتریکی لحظه‌ای را که انرژی ذخیره شده در آن $0/6J$ می‌شود، می‌یابیم:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow{L=\text{ثابت}} \frac{U_m}{U} = (\frac{I_m}{I})^2$$

$$\xrightarrow[U=0/6J]{U_m=0/8J\ ,\ I_m=2\sqrt{3}A} \frac{0/8}{0/6} = (\frac{2\sqrt{3}}{I})^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} = (\frac{2\sqrt{3}}{I})^2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{I} \Rightarrow I = 3A$$

اکنون لحظه‌ای را می‌یابیم که $I = 3A$ است.

$$I = 2\sqrt{3}\sin300\pi t \Rightarrow 3 = 2\sqrt{3}\sin300\pi t$$

$$\Rightarrow \sin300\pi t = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin300\pi t = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 300\pi t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{900}s$$

(فیزیک ۲ - القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۳۶)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۶۸- **گزینهٔ «۳»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

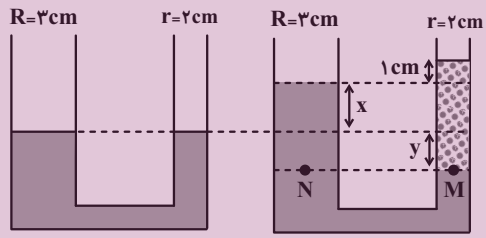
با توجه به شکل‌های داده شده، کمترین مقداری که خط‌کش می‌تواند اندازه بگیرد $\frac{۱}{۲}cm$ و کمترین مقداری که دماسنج اندازه می‌گیرد برابر $۰/۰۱\ ^\circ C$ است. بنابراین:

$$\text{دقت اندازه‌گیری خط‌کش} = \frac{۱}{۲}cm = ۰/۵cm$$

$$\text{دقت اندازه‌گیری دماسنج} = ۰/۰۱\ ^\circ C$$

(فیزیک ۱ – فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۶۹- **گزینهٔ «۱»** *(سعید طاهری‌بروجنی)*



با توجه به اینکه حجم آب جابه‌جا شده در دو لوله یکسان است، داریم:

$$x\pi R^۲ = y\pi r^۲ \Rightarrow ۹x = ۴y \Rightarrow y = ۲/۲۵x \qquad (*)$$

از طرفی برای مایع اضافه شده به شاخهٔ سمت راست داریم:

$$m_{\text{مایع}} = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{مایع}} = \rho_{\text{مایع}}(x+y+۱)\pi r^۲$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{مایع}}(x+y+۱) = \frac{m_{\text{مایع}}}{\pi r^۲} = \frac{۷۸}{۳\times ۴} = ۶/۵\frac{g}{cm^۲} \quad (**)$$

حال با توجه به برابری فشار در نقاط هم‌تراز یک مایع ساکن، داریم:

$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_{\text{مایع}}(x+y+۱) = \rho_{\text{آب}}(x+y)$$

$$\frac{(*)}{(**)}\ ۶/۵ = ۱\times ۳/۲۵x \Rightarrow x = ۲cm \Rightarrow y = ۴/۵cm$$

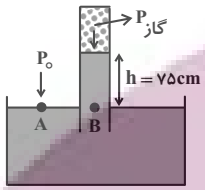
بنابراین:

$$\rho_{\text{مایع}} = \frac{۶/۵}{۲+۴/۵+۱} = \frac{۶/۵}{۷/۵} = \frac{۱۳}{۱۵}\frac{g}{cm^۳}$$

(فیزیک ۱ – ویژگی‌های فیزیکی مواد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

۷۰- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قره‌خانی)*

می‌دانیم فشار پیمانه‌ای برابر اختلاف فشار گاز با فشار هوا است. بنابراین، با توجه به شکل زیر، برای نقطه‌های هم‌تراز A و B در مایع که فشار یکسانی دارند، می‌توان نوشت:



$$P_A = P_B \Rightarrow P_۰ = P_{\text{گاز}} + \rho gh \Rightarrow P_{\text{گاز}} - P_۰ = -\rho gh$$

$$\xrightarrow[h=۷۵cm=۰/۷۵m]{\rho=۱۲\frac{g}{cm^۳}=۱۲۰۰۰\frac{kg}{m^۳}} P_{\text{گاز}} - P_۰ = -۱۲۰۰۰\times ۱۰\times ۰/۷۵$$

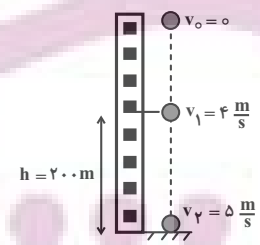
$$\xrightarrow{P_{\text{گاز}}-P_۰=P_{\text{پیمانه‌ای}}} P_{\text{پیمانه‌ای}} = -۹۰۰۰۰Pa$$

$$\Rightarrow P_{\text{پیمانه‌ای}} = -۹۰kPa$$

(فیزیک ۱ – ویژگی‌های فیزیکی مواد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۴۰)

۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، کار برایند نیروهای وارد بر جسم برابر تغییر انرژی جنبشی آن است. با توجه به اینکه بر جسم نیروی مقاومت هوا و نیروی وزن وارد می‌شود، می‌توان نوشت:



$$W_t = \Delta K \xrightarrow[\Delta K=\frac{۱}{۲}m(v_۲^۲-v_۱^۲)]{W_t=W_{mg}+W_{f_D}}$$

$$W_{mg} + W_{f_D} = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \xrightarrow{W_{mg}=+mgh}$$

$$mgh + W_{f_D} = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲)$$

تـوشـه ای بـرای مـوفقیت

$$\xrightarrow[m=2kg\ ,\ h=200m]{v_1=4\frac{m}{s}\ ,\ v_2=5\frac{m}{s}} 2\times10\times200+W_{f_D}=\frac{1}{2}\times2\times(25-16)$$

$$\Rightarrow W_{f_D}=9-4000=-3991J$$

(فیزیک ۱ – کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۶۵)

۷۲- **گزینهٔ «۲»** (مصطفی کیانی)

کار نیروی اصطکاک در مسیر AB برابر تغییر انرژی مکانیکی جسم است. بنابراین، چون در نقطه‌های A و B، جسم هم انرژی جنبشی و هم انرژی پتانسیل گرانشی دارد، می‌توان نوشت:

$$W_f=E_B-E_A \xrightarrow{E=K+U} W_f=(K_B+U_B)-(K_A+U_A)$$

$$\Rightarrow W_f=(\frac{1}{2}mv_B^2+mgh_B)-(\frac{1}{2}mv_A^2+mgh_A)$$

$$\xrightarrow[v_B=\frac{1}{2}v_A=\frac{1}{2}\times10=5\frac{m}{s}\ ,\ h_B=2m]{m=2kg\ ,\ v_A=10\frac{m}{s}\ ,\ h_A=6m}$$

$$W_f=(\frac{1}{2}\times2\times25+2\times10\times2)-(\frac{1}{2}\times2\times100+2\times10\times6)$$

$$\Rightarrow W_f=65-220=-155J$$

(فیزیک ۱ – کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۷۳- **گزینهٔ «۱»** (پوریا علاقه‌مند)

ابتدا افزایش دمای جسم را از درجهٔ فارنهایت به درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌کنیم:

$$\Delta F=\frac{9}{5}\Delta\theta \xrightarrow{\Delta F=36^\circ F} 36=\frac{9}{5}\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=20^\circ C$$

اکنون طول جدید میله را می‌یابیم:

$$L_2=L_1+\alpha L_1\Delta\theta \xrightarrow[\alpha=8\times10^{-6}\frac{1}{^\circ C}]{L_1=10m}$$

$$L_2=10+8\times10^{-6}\times10\times20$$

$$\Rightarrow L_2=10+16\times10^{-4}=10+0/0016=10/0016m$$

(فیزیک ۱ – دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

۷۴- **گزینهٔ «۲»** (مسعود قره‌خانی)

چون جهت چرخه پادساعتگرد است $W>0$ در نتیجه $Q<0$ می‌باشد. بنابراین، گاز گرما از دست داده است. (گزینه‌های «۱» و «۳» نادرست اند.) از طرف دیگر، در چرخه $\Delta U=0$ و W برابر مساحت داخل چرخه (در اینجا مساحت ذوزنقه) است. بنابراین ابتدا W را می‌یابیم. دقت کنید، باید اتمسفر به پاسکال و لیتر به مترمکعب تبدیل شود.

$$W=\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{[(5-3)+(7-3)]\times10^5}{2}\times(6-2)\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow W=\frac{6\times10^5\times4\times10^{-3}}{2}=1200J$$

اکنون با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، Q را می‌یابیم:

$$\Delta U=W+Q \xrightarrow[W=1200J]{\Delta U=0} 0=1200+Q\Rightarrow Q=-1200J$$

یادآوری: $1atm=10^5Pa$ و $1L=10^{-3}m^3$

(فیزیک ۱ – ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۴۰)

۷۵- **گزینهٔ «۱»** (مصطفی کیانی)

ابتدا مساحت داخل چرخه را که برابر اندازهٔ کار انجام شده بر روی گاز است، می‌یابیم. دقت کنید باید atm به Pa و L به m^3 تبدیل شود.

$$|W|=S_{\text{چرخه}}=(6-2)\times10^5\times(12-8)\times10^{-3}=1600J$$

اکنون گرمای داده شده به ماشین را با استفاده از رابطهٔ بازده می‌یابیم:

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H} \xrightarrow[|W|=1600J]{\eta=\frac{4}{27}} \frac{4}{27}=\frac{1600}{Q_H}\Rightarrow Q_H=10800J$$

در آخر، با توجه به اینکه $Q_H=Q_{AB}+Q_{BC}$ است، به صورت زیر Q_{BC} را می‌یابیم.

$$Q_H=Q_{AB}+Q_{BC} \xrightarrow[Q_H=10800J]{Q_{AB}=4800J}$$

$$10800=4800+Q_{BC}\Rightarrow Q_{BC}=6000J$$

(فیزیک ۱ – ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۶)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

شیمی

۷۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به آرایش الکترونی $^{80}_{35}Br$، الکترون‌های موجود در زیرلایه‌های ۳p و ۴s دارای $n+l=4$ می‌باشند؛ که در مجموع ۸ الکترون هستند:

$$_{35}Br: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^5$$

تعداد این الکترون‌ها در ۲۰ گرم $^{80}_{35}Br$ برابر است با:

$$20g\ Br\times\frac{1mol\ Br}{80g\ Br}\times\frac{8mol\ e}{1mol\ Br}=2mol\ e$$

از طرفی تعداد الکترون‌های موجود در یک مول یون SO_4^{2-} برابر خواهد بود با:

$$(1\times16)+(4\times8)+2=50mol\ e^-$$

بنابراین مقدار جرمی از یون SO_4^{2-} که دارای ۲ مول الکترون باشد عبارت است از:

$$2mol\ e^-\times\frac{1mol\ SO_4^{2-}}{50mol\ e^-}\times\frac{96g\ SO_4^{2-}}{1mol\ SO_4^{2-}}=3/84g\ SO_4^{2-}$$

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۵، ۱۲ تا ۱۹)

۷۷- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

ایزوتوپ‌های یک عنصر از نظر پایداری در طبیعت، نقطهٔ ذوب و جوش (ویژگی‌های فیزیکی وابسته به جرم)، چگالی و عدد جرمی با یکدیگر تفاوت دارند.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۵ و ۶)

۷۸- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

برای تعیین فرمول ترکیب C_2H_XO لازم است تا جرم مولی (M) آن را به دست آوریم:

$$3/01\times10^{22}\ atom\ O\times\frac{1mol\ O}{6/02\times10^{23}\ atom\ O}\times\frac{1mol\ C_2H_XO}{1mol\ O}\times\frac{Mg\ C_2H_XO}{1mol\ C_2H_XO}=2/3g\ C_2H_XO$$

$$\Rightarrow M=46$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$C_2H_XO=(2\times12)+(X\times1)+(1\times16)=46\Rightarrow X=6$$

حال می‌توان تعداد اتم‌های کربن در ۰/۵ مول C_2H_6O را به دست آورد:

$$0/5mol\ C_2H_6O\times\frac{2mol\ C}{1mol\ C_2H_6O}\times\frac{6/02\times10^{23}\ atom\ C}{1mol\ C}$$

$$=6/02\times10^{23}\ atom\ C$$

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۱۲ تا ۱۹)

۷۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی‌سودکلایی)*

تنها ردیف اول به‌طور کامل صحیح می‌باشد.

بررسی موارد نادرست:

نام ترکیب‌ها: نام Li_2O لیتیم اکسید می‌باشد.

تعداد الکترون مبادله شده:

زیروند آنیون × بار آنیون = زیروند کاتیون × بار کاتیون = تعداد الکترون مبادله شده

تعداد الکترون‌های مبادله شده در KI برابر با ۱ می‌باشد.

تعداد الکترون با $l=1$ در آرایش الکترونی کاتیون:

$$AlF_3: {}_{13}Al^{3+}\Rightarrow 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\Rightarrow l=1$$ ۶ الکترون با

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۹)

۸۰- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا زهره‌وند)*

معادله‌های موازنه‌شدهٔ واکنش سوختن کامل گازهای CH_4 و C_3H_8 به‌صورت زیر است:

$$CH_4(g)+2O_2(g)\rightarrow CO_2(g)+2H_2O(g)$$

$$C_3H_8(g)+5O_2(g)\rightarrow 3CO_2(g)+4H_2O(g)$$

CH_4 جرم مولی $=16g.mol^{-1}$

C_3H_8 جرم مولی $=44g.mol^{-1}$

مقدار مول CH_4 را n_1 و مقدار مول C_3H_8 را برابر n_2 درنظر می‌گیریم.

$$16n_1+44n_2=104g$$

تـوشـه ای بـرای مـوفقیت

فرض کردیم در واکنش سوختن پروپان، n_2 مول C_3H_8 را وارد واکنش کرده باشیم، در این حالت $3n_2$ مول CO_2 و $4n_2$ مول H_2O تولید می‌شود، از آنجایی که طبق گفتهٔ سؤال اختلاف حجم $CO_2(g)$ و $H_2O(g)$ تولیدی در واکنش سوختن گاز C_3H_8 برابر با ۵۰ لیتر در شرایط واکنش است، داریم:

$$\text{مول ۲} = \frac{1\text{mol}}{25\text{ لیتر}} \times 50\text{ لیتر} = \text{اختلاف شمار مول گازهای تولیدی}$$

$$4n_2 - 3n_2 = n_2 = 2\text{mol}$$

$$16n_1 + 44n_2 = 104$$

$$16n_1 + 44\times 2 = 104 \Rightarrow n_1 = 1\text{mol}$$

با توجه به این‌که $n_1 = 1$ می‌باشد، در واکنش سوختن CH_4 داریم:

$$?\,\text{mol}CO_2 = 1\,\text{mol}CH_4 \times \frac{1\,\text{mol}CO_2}{1\,\text{mol}CH_4} = 1\,\text{mol}CO_2$$

$$?\,\text{mol}H_2O = 1\,\text{mol}CH_4 \times \frac{2\,\text{mol}H_2O}{1\,\text{mol}CH_4} = 2\,\text{mol}H_2O$$

همچنین در واکنش C_3H_8 داریم:

$$?\,\text{mol}CO_2 = 2\,\text{mol}C_3H_8 \times \frac{3\,\text{mol}CO_2}{1\,\text{mol}C_3H_8} = 6\,\text{mol}CO_2$$

$$?\,\text{mol}H_2O = 2\,\text{mol}C_3H_8 \times \frac{4\,\text{mol}H_2O}{1\,\text{mol}C_3H_8} = 8\,\text{mol}H_2O$$

مجموع شمار مول گازهای تولیدشده در طی دو واکنش:

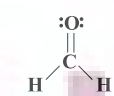
۱۷ مول گاز = ۸ مول H_2O + ۶ مول CO_2 + ۲ مول H_2O + ۱ مول CO_2

$$?\,\text{L گاز} = \text{۱۷ مول گاز} \times \frac{\text{۲۵ لیتر}}{\text{۱ مول گاز}} = 425\text{L}$$

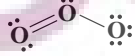
(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۴، ۵۶ تا ۶۰)

۸۱- **گزینهٔ «۱»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

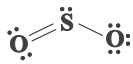
در ساختار لوویس مولکول CH_2O نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی برابر با ۲ است.



در ساختار لوویس مولکول O_3 نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی برابر با $\frac{1}{2}$ است.

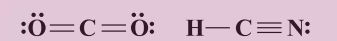


در ساختار لوویس مولکول SO_2 نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی برابر با $\frac{1}{2}$ است.



در ساختار لوویس مولکول‌های SO_2 و SO_3 نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی برابر با ۲ است.

در ساختار لوویس هر کدام از مولکول‌های CO_2، HCN و SO_3 چهار پیوند کووالانسی وجود دارد.



(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۴ و ۶۵)

۸۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا زهره‌وند)*

$$T_1 = 45/5 + 273 = 318/5\text{K}$$

$$T_2 = 91 + 273 = 364\text{K}$$

$$\Rightarrow V_2 = 1/5V_1$$

براساس قانون گازها می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1V_1}{T_1n_1} = \frac{P_2V_2}{T_2n_2} \xrightarrow{\text{فشار ثابت}} \frac{V_1}{318/5\times n_1} = \frac{1/5V_1}{364\times n_2}$$

$$n_2 = \frac{21}{16}n_1 \Rightarrow \Delta n = n_2 - n_1 = \frac{21}{16}n_1 - n_1 = \frac{5}{16}n_1$$

بنابراین شمار مول‌های گاز باید به اندازهٔ $\frac{5}{16}n$ افزایش یابد.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۱)

۸۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

ابتدا می‌توان غلظت مولی هر دو محلول CH_3OH را طبق رابطهٔ $M = \frac{10\times a\times d}{\text{جرم مولی}}$ به دست آورد:

محلول اولیه: $M_1 = \frac{10\times 64\times 0/525}{32} = 10/5\,\text{mol.L}^{-1}$

محلول ثانویه: $M_2 = \frac{10\times 24\times 0/7}{32} = 5/25\,\text{mol.L}^{-1}$

ایران‌توشه
توشه‌ای برای موفقیت

با توجه به رابطهٔ $M_1V_1 = M_2V_2$ می‌توان حجم نهایی محلول ثانویه و مقدار آب لازم برای تولید آن را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$۱۰/۵ \times ۴ = ۵/۲۵ \times V_2 \Rightarrow V_2 = ۸L$$

$$\text{حجم آب مورد نیاز} = ۸ - ۴ = ۴L$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶ و ۹۸ تا ۱۰۰)

۸۴- **گزینهٔ «۴»** *(محمد نکو)*

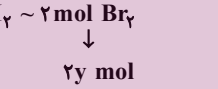
عبارت‌های «الف»، «ب» و «ت» صحیح هستند.

واکنش موازنه شده به صورت زیر می‌باشد:

$$NO_2(g) + NO(g) + 2NH_3(g) \rightarrow 2N_2(g) + 3H_2O(g)$$

بررسی عبارت‌ها:

الف) گاز نیتروژن واکنش‌دهنده فرایند هابر است.

ب) ساختار لوویس گاز SO_3 به صورت  بوده و مجموع ضریب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها نیز برابر ۴ می‌باشد. پس با تعداد پیوند اشتراکی در SO_3 برابر است.

پ) هدف از انجام این واکنش حذف گازهای NO و NO_2 می‌باشد نه آمونیاک

ت) در سمت واکنش‌دهنده‌ها ۴ اتم نیتروژن داریم که ۲ اتم نیتروژن متعلق به آمونیاک می‌باشند و ضمن اکسایش از عدد اکسایش ۳- به صفر می‌رسند.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحهٔ ۱۰۰)

۸۵- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

تنها عبارت نادرست مورد اول است.

در پدیدهٔ اسمز مولکول‌های آب در هر دو جهت غشا نیمه تراوا حرکت می‌کنند اما میزان این حرکت از محلول رقیق به محلول غلیظ بیشتر است.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۱۹)

۸۶- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

شبه‌فلزها از نظر شیمیایی خواصی مشابه نافلزها دارند و خواص فیزیکی آن‌ها به فلزها شباهت دارد.

$_{21}Sc$ اولین عنصر دورهٔ چهارم جدول دوره‌ای نیست بلکه $_{19}K$ اولین عنصر این دوره به شمار می‌رود.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۶ تا ۱۲ و ۱۶)

۸۷- **گزینهٔ «۱»** *(یاسر راش)*

هر مول اتن با یک مول برم و هر مول اتین با ۲ مول برم واکنش می‌دهد.

$$\begin{array}{ccc} x\ mol & & x\ mol \\ \uparrow & & \uparrow \\ 1mol\ C_2H_4 & \sim & 1mol\ Br_2 \\ 1mol\ C_2H_2 & \sim & 2mol\ Br_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ y\ mol & & 2y\ mol \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{۶/۷۲}{۲۲/۴} = ۰/۳ \\ x + 2y = \frac{۸۰}{۱۶۰} = ۰/۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۰/۳ \\ x + 2y = ۰/۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰/۱ mol & \text{اتن} \\ y = ۰/۲\ mol & \text{اتین} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{درصد مولی اتن} = \frac{۰/۱}{۰/۱ + ۰/۲} \times ۱۰۰ \simeq ٪۳۳/۳۳$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۴۱)

۸۸- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود طبرسا)*

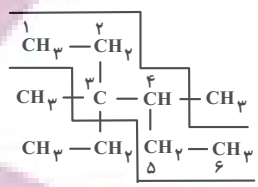
خام‌فروشی تنها برای نفت و منابع معدنی به کار نمی‌رود بلکه برای محصولات کشاورزی نیز به کار می‌رود.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۱)

ایران‌طلایی
توشه‌ای برای موفقیت

۸۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

نام ترکیب داده شده به صورت زیر تعیین می‌شود:



۳- اتیل- ۳ و ۴- دی متیل هگزان

با توجه به فرمول شیمیایی آن $(C_{10}H_{22})$، باید با آلکانی ۱۰ کربنه دارای فرمول یکسانی باشد که ۲- اتیل اوکتان چنین شرایطی دارد.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۹۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین مسلمی)*

عبارت‌های اول، دوم و چهارم نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

مورد اول: اگر طی فرایند $B \rightarrow C$ هر دو تغییرات دما و محتوای انرژی شیمیایی رخ دهد، با توجه به نمودار دمای C پایین‌تر و پایداری آن بالاتر خواهد بود.

مورد دوم: پس از خوردن بستنی، فرایند هم‌دما شدن آن با بدن رخ می‌دهد $(A \rightarrow B)$ سپس فرایند آزاد شدن انرژی پتانسیل شیمیایی آن صورت می‌گیرد $(B \rightarrow C)$. دقت کنید تغییرات انرژی هم‌دما شدن بستنی با بدن، بسیار کمتر از فرایند تبدیل آن به فراورده‌های دیگر و آزاد شدن انرژی شیمیایی آن است. بنابراین تفاوت سطح انرژی A با C، بسیار بیشتر از A با B خواهد بود.

مورد سوم: با توجه به بالاتر بودن سطح انرژی A از C، علامت $\Delta\theta$ در فرایند $C \rightarrow A$ مثبت خواهد بود.

مورد چهارم: محتوای انرژی CO_2 و H_2O از (گرافیت $C(s)$ و H_2 کمتر است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۲)

۹۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین مسلمی)*

فرض می‌کنیم a مول اتان و b مول پروپان در مخلوط یاد شده وجود دارد:

$$?kJ = a\,mol\ C_2H_6 \times \frac{1660\,kJ}{1\,mol\ C_2H_6} = 1660a\,kJ$$

$$?kJ = b\,mol\ C_3H_8 \times \frac{2220\,kJ}{1\,mol\ C_3H_8} = 2220b\,kJ$$

گرمای تولید شده برابر جمع گرماهای تولید شده به ازای سوختن هر ماده است:

$$1660a + 2220b = 1053 \qquad (*)$$

حال تعداد مول اتم‌های هیدروژن و کربن این مخلوط را به دست می‌آوریم:

$$\text{هیدروژن} \begin{cases} ?mol\ H = a\,mol\ C_2H_6 \times \frac{6\,mol\ H}{1\,mol\ C_2H_6} \\ = 6a\,mol\ H \\ ?mol\ H = b\,mol\ C_3H_8 \times \frac{8\,mol\ H}{1\,mol\ C_3H_8} \\ = 8b\,mol\ H \end{cases} \Rightarrow 6a + 8b$$

$$\text{کربن} \begin{cases} ?mol\ C = a\,mol\ C_2H_6 \times \frac{2\,mol\ C}{1\,mol\ C_2H_6} \\ = 2a\,mol\ C \\ ?mol\ C = b\,mol\ C_3H_8 \times \frac{3\,mol\ C}{1\,mol\ C_3H_8} \\ = 3b\,mol\ C \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b$$

اکنون می‌توان مقادیر a و b را محاسبه کرد:

$$(6a + 8b) - (2a + 3b) = 4a + 5b = 2/45 \qquad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),\,(**)} a = 0/3\ ,\quad b = 0/25$$

در نهایت برای درصد جرمی اتان داریم:

$$\%C_2H_6 = \frac{\text{جرم } C_2H_6}{\text{جرم مخلوط}} \times 100 = \frac{0/3 \times 30}{0/3 \times 30 + 0/25 \times 44} \times 100 = \%45$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۰ و ۷۱)

۹۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

برای به دست آوردن معادلهٔ واکنش مورد نظر و ΔH آن باید واکنش‌های (I) و (IV) را معکوس کنیم و واکنش‌های (II) و (III) نیز به ترتیب در $-\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ ضرب کنیم:

توشه‌ای برای موفقیت

$$2NH_3(g) \rightarrow N_2(g) + 3H_2(g) \qquad \Delta H = +92\,kJ$$
$$NO_2(g) \rightarrow NO(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \qquad \Delta H = +57\,kJ$$
$$\frac{3}{2}O_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 3H_2O(g) \qquad \Delta H = -726\,kJ$$
$$2NO(g) \rightarrow N_2(g) + O_2(g) \qquad \Delta H = -181\,kJ$$
$$NO(g) + NO_2(g) + 2NH_3(g) \rightarrow 2N_2(g) + 3H_2O(g)$$

$$\Delta H = -758\,kJ$$

(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

۹۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین مسلمی)*

ساختار پلی‌استیرن به صورت $+C_8H_8+_n$ با فرمول $+CH_2-\underset{\underset{}{|}}{\overset{H}{C}}+_n$ است که در هر واحد آن ۳ پیوند دوگانهٔ $C=C$ در حلقهٔ بنزن آن وجود دارد. با توجه به این‌که جرم مولی یک واحد آن ۱۰۴ گرم است؛ داریم:

$$n = \frac{2496}{104} = 24$$

پس تعداد پیوندهای دوگانهٔ $C=C$ پلی‌استیرن برابر است با:

$$\text{تعداد پیوند } C=C \quad 24\times 3N_A$$

از طرفی فرمول مولکولی پلی‌آمید نمایش داده شده به صورت $+C_{16}H_{14}N_2O_2+_n$ است و اگر جرم مولی هر واحد آن را ۲۶۶ گرم در نظر بگیریم؛ داریم:

$$n = \frac{1596}{266} = 6$$

پس تعداد پیوندهای دوگانهٔ موجود در ساختار پلی‌آمید داده شده برابر است با:

$$\text{تعداد پیوندهای دوگانه} = 6\times 8\times N_A$$

در نهایت خواستهٔ مسئله برابر است با:

$$\frac{\text{تعداد پیوندهای دوگانهٔ } C=C \text{ در ۲۴۹۶ گرم در پلی‌استیرن}}{\text{تعداد پیوندهای دوگانهٔ موجود در ۱۵۹۶ گرم پلی‌آمید}}$$
$$= \frac{24\times 3\times N_A}{6\times 8\times N_A} = 1/5$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴ و ۱۱۴ و ۱۱۵)

۹۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

الف) در واکنش $Fe_2O_3 + 3CO \rightarrow 2Fe + 3CO_2$ با توجه به ضریب مواد موجود در واکنش سرعت متوسط تولید CO_2 با سرعت متوسط مصرف CO برابر خواهد بود.

ب) سرعت متوسط مصرف BrF_3 در واکنش

$4BrF_3 + 3TiO_2 \rightarrow 2Br_2 + 3TiF_4 + 3O_2$ دو برابر سرعت تولید Br_2 خواهد بود. بنابراین اگر Br_2 با سرعت $0/4\,mol.min^{-1}$ تولید شود، سرعت مصرف BrF_3 برابر با $0/8\,mol.min^{-1}$ خواهد بود.

پ) در مورد تمام واکنش‌ها (گرماده یا گرماگیر) به مرور زمان سرعت مصرف واکنش‌دهنده‌ها و سرعت تولید فراورده‌ها کاهش خواهد یافت.

ت) از آنجا که واکنش‌پذیری فلزهای Li و Na با یکدیگر متفاوت است، واکنش آن‌ها با آب سرد در زمان یکسان منجر به تولید مقادیر مختلفی گاز می‌شود (چرا که سرعت انجام واکنش در آن‌ها با یکدیگر متفاوت است.)

ث) واکنش محلول پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی در دمای اتاق به کندی انجام می‌شود و سریع نیست؛ اما با افزودن کاتالیزگر سرعت آن افزایش خواهد یافت.

(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۹۱)

۹۵- **گزینهٔ «۳»** *(خرزاد رضایی)*

ابتدا شمار کربن‌های الکل را تعیین می‌کنیم. یعنی:

$$R'-OH \rightarrow C_nH_{2n+1}-OH$$

جرم مولی الکل: $14n+18$

$$\text{درصد جرمی کربن} = 60\% \rightarrow \frac{12n}{14n+18}\times 100 = 60 \Rightarrow n = 3$$

پس R' شامل ۳ اتم کربن است، اکنون شمار کربن‌های استر و بعد صابون را به دست می‌آوریم. استر باید به صورت زیر باشد تا شامل ۷ پیوند کربن-کربن باشد یعنی R، ۵ کربنی است.

$$C\overset{7}{-}C\overset{6}{-}C\overset{5}{-}C\overset{4}{-}C\overset{3}{-}\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-C\overset{2}{-}C\overset{1}{-}C$$

پس صابون حاصل به صورت $C_5H_{11}COONa$ است.

$$\text{درصد جرمی سدیم} = \frac{23}{138}\times 100 \simeq 16/67\%$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ و ۶)

توشه‌ای برای موفقیت

۹۶- **گزینهٔ «۱»** *(صلاح‌الدین ابراهیمی)*

همهٔ موارد نادرست هستند.

بررسی عبارت ها:

الف) مولکول‌های صابون ذرات چربی را در آب پخش می‌کنند، نه حل و نوعی کلوئید ایجاد می‌کنند.

ب) ذرات سوسپانسیون از محلول‌ها درشت‌تر است و نور را پخش می‌کنند.

پ) در پاک‌کننده‌های غیرصابونی گروه SO_3^- وجود دارد.

ت) با توجه به جدول صفحهٔ ۹ کتاب درسی درصد لکهٔ باقی‌مانده با صابون بدون آنزیم ۲۵٪ و با صابون آنزیم‌دار ۱۰٪ است که نشان می‌دهد ۱۵٪ قدرت صابون افزایش می‌یابد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۷ تا ۹)

۹۷- **گزینهٔ «۲»** *(سیدرحیم هاشمی‌دهکردی)*

$$Al_2(SO_4)_3 \rightarrow Al_2O_3(s) + 3SO_3(g)$$

$$SO_3(g) + 2NaOH(aq) \rightarrow Na_2SO_4(aq) + H_2O(l)$$

ابتدا، محاسبه مقدار عملی

$$300ml\ NaOH \times \frac{1\ L\ NaOH}{1000ml\ NaOH} \times \frac{0/05 mol\ NaOH}{1\ L\ NaOH}$$

$$\times \frac{1 mol\ SO_3}{2 mol\ NaOH} \times \frac{1 mol\ Al_2(SO_4)_3}{3 mol\ SO_3}$$

$$\times \frac{342 g\ Al_2(SO_4)_3}{1 mol\ Al_2(SO_4)_3} \times \frac{100 g\ Al_2(SO_4)_3\ \text{خالص}}{80 g\ Al_2(SO_4)_3\ \text{ناخالص}}$$

$$= 1/068 g\ Al_2(SO_4)_3$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100$$

$$\Rightarrow 50 = \frac{1/068}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow \text{جرم نمونه} \simeq 2/13 g$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۹۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمد پارسا فراهانی)*

طبق گفتهٔ سوال:

$$\frac{[OH^-]}{[H^+]} = 16 \times 10^4 \Rightarrow [OH^-] = 16 \times 10^4 [H^+]$$

$$\xrightarrow[\text{در } [H^+]]{\text{طرفین ضرب}} \underbrace{[H^+][OH^-]}_{10^{-14}} = 16 \times 10^4 [H^+]^2$$

$$10^{-14} = 16 \times 10^4 [H^+]^2 \Rightarrow [H^+]^2 = \frac{10^{-18}}{16} \xrightarrow{\sqrt{\ }} [H^+] = \frac{10^{-9}}{4}$$

$$= 25 \times 10^{-11}\ mol.L^{-1}$$

$$pH = -\log(25 \times 10^{-11}) = 11 - \log 5^2 = 11 - 2\log 5$$

$$= 11 - (2 \times 0/7) = 9/6$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰)

۹۹- **گزینهٔ «۳»** *(رضا سلیمانی)*

بررسی عبارت‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: هر چه غلظت یون‌های H^+ در محلولی بیشتر باشد، محلول اسیدی‌تر است و pH کمتری دارد.

گزینهٔ «۲»: صابون باعث پخش شدن چربی در آب می‌شود، نه حل شدن آن.

گزینهٔ «۴»: در برخی از داروهای ضد اسید از مخلوط آلومینیوم هیدروکسید و منیزیم هیدروکسید استفاده می‌شود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ، ۱۱، ۱۵، ۲۴ تا ۲۸ و ۳۲)

۱۰۰- **گزینهٔ «۳»** *(فاضل قهرمانی‌فرد)*

گاز تولید شده در بخش A بیشتر از B است. در نتیجه می‌توان گفت A کاتد و گاز جمع شده در آن H_2 می‌باشد.

بررسی موارد:

الف) A کاتد بوده و علامت منفی دارد.

ب) مایع C آب و اندکی الکترولیت حل شده است و در نتیجه خالص نیست.

پ) در قسمت B از اکسایش آب، یون H^+ تولید شده و محلول را اسیدی می‌کند و کاغذ pH نیز در محلول اسیدی به رنگ قرمز درمی‌آید.

ت) به ازای تولید دو مول H_2 (۴ گرم) در کاتد، یک مول O_2 (۳۲ گرم) در آند تولید می‌شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحهٔ ۵۴)

ایران‌سنجش
توشه‌ای برای موفقیت

۱۰۱- **گزینهٔ «۳»** *(فاضل قهرمانی‌فرد)*

$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ (الکترون مبادله شده = ۴)

قسمت اول:

$$?g\ H_2O = 134/4\,L\ \text{گاز} \times \frac{1\,mol\ \text{گاز}}{22/4\,L\ \text{گاز}} \times \frac{2\,mol\ H_2O}{3\,mol\ \text{گاز}}$$

$$\times \frac{18g\ H_2O}{1\,mol\ H_2O} = 72g\ \text{آب}$$

قسمت دوم:

$Cr^{3+} + 3e \rightarrow Cr$

$$?g\ Cr = 134/4\,L\ \text{گاز} \times \frac{1\,mol\ \text{گاز}}{22/4\,L\ \text{گاز}} \times \frac{4\,mol\ e^-}{3\,mol\ \text{گاز}}$$

$$\frac{1\,mol\ Cr}{3\,mol\ e} \times \frac{52g\ Cr}{1\,mol\ Cr} = 138/6g\ \text{کروم}$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۵۲ و ۶۰)

۱۰۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

مولکول‌های متان دارای ساختاری چهاروجهی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.

گاز کلر مولکولی ناقطبی است و نقطهٔ جوش آن در مقایسه با HF که امکان تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد، کمتر است.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۹)

۱۰۳- **گزینهٔ «۱»** *(میلاد شیخ‌الاسلامی‌طهاوی)*

با توجه به نمونهٔ داده شده، موج با فرکانس حدود ۱۷۰۰، کاملاً جذب شده پس با توجه به جدول صورت سؤال، پیوند $C=O$ در نمونه مادهٔ ما وجود دارد.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۱۰۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمد نکو)*

جرم مولی اوره با فرمول مولکولی $CO(NH_2)_2$ برابر $60\frac{g}{mol}$ بوده و ΔH واکنش برابر $300kJ$ می‌باشد و به علت گرماده بودن واکنش $\Delta H = -300kJ$ خواهد بود و آنتالپی واکنش در روی نمودار برابر $2a$ می‌باشد پس $a = 150kJ$ است.

موارد (ب) و (پ) درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) به ازای تشکیل سه مول مادهٔ C، $300kJ$ گرما آزاد می‌شود پس گرمای آزاد شده ضمن تشکیل هر مول مادهٔ C برابر $100kJ$ می‌باشد.

ب) انرژی فعال‌سازی در غیاب کاتالیزگر $450kJ$ بوده که با استفاده از کاتالیزگر کاهش می‌یابد و می‌تواند $320kJ$ باشد.

پ) در واکنش‌های گرماده فراورده‌ها سطح انرژی پایین‌تر و پایداری بالاتری دارند.

ت) حتی با وجود کاربرد کاتالیزگر آنتالپی واکنش ثابت می‌ماند.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

۱۰۵- **گزینهٔ «۲»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

بررسی عبارت‌ها:

۱) الف) درست؛ با افزایش دما، ثابت تعادل کاهش یافته است. بنابراین واکنش گرماده است.

ب) نادرست؛ با کاهش دما تعادل در جهت تولید گرما یعنی در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.

پ) نادرست؛ افزایش فشار باعث جابه‌جایی تعادل در جهت تعداد مول گاز کمتر می‌شود. اگر مقدار مول فراورده‌ها افزایش یابد یعنی به سمت راست جابه‌جا می‌شود پس مجموع ضرایب مواد گازی سمت راست کمتر است.

ت) درست؛ با افزایش دما، تعادل در جهت مصرف گرما یعنی برگشت جابه‌جا می‌شود پس غلظت فراورده‌ها کم می‌شود.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

توشه‌ای برای موفقیت