بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفترچه پاسخ

آزمون ۲ تیرماه ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی (نظام جدید)

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲ و ریاضی پایه	کاظم اجلالی-سیدرضا اسلامی-عادل حسینی
	هندسه و آمار و ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-سوگند روشنی-محمد صحت‌کار-نریمان فتح اللهی-احمدرضا فلاح-هادی فولادی-مهرداد ملوندی
	فیزیک	عبدالرضا امینی‌نسب-زهره آقامحمدی-بهنام دیبایی‌اصل-محمدعلی راست‌پیمان-بهنام رستمی-معصومه شریعت‌ناصری ساعد صالحی-پوریا علاقه‌مند-سیاوش فارسی-مسعود قره‌خانی-مصطفی کیانی-غلامرضا محبی-امیراحمد میرسعید-شادمان ویسی
	شیمی	صلاح الدین ابراهیمی-جعفر پازوکی-محمدرضا پورجاوید-احمدرضا جشانی‌پور-کامران جعفری-حمید ذبحی-یاسر راش حسن رحمتی‌کوکنده-فرزاد رضایی-روزبه رضوانی-سیدرضا رضوی-علی رفیعی-محمدرضا زهره‌وند-رضا سلیمانی-آروین شجاعی امیرحسین طیبی‌سودکلایی-محمد عظیمیان‌زواره-فاضل قهرمانی‌فرد-امیرحسین مسلمی-حسین ناصری‌ثانی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی‌پایه	هندسه	آمارواحتمال وریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	کاظم اجلالی سیدرضا اسلامی	امیرحسین ابومحبوب	سوگند روشنی	بابک اسلامی	امیر حاتمیان
گروه ویراستاری	مهدی ملارمضانی	عادل حسینی	عادل حسینی	حمید زرین کفش زهره آقامحمدی	محمدحسن محمدزاده مقدم جواد سوری لکی
		ویراستار استاد: مهرداد ملوندی	ویراستار استاد: مهرداد ملوندی	ویراستار استاد: مصطفی کیانی	
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	بابک اسلامی	امیرحسین مسلمی
مستندسازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	احسان صادقی	سمیه اسکندری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	محمد اکبری	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

توشه ای برای موفقیت

ریاضیات

۱- **گزینهٔ «۲»** *(سیدرضا اسلامی)*

رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^{10}+k=(x+1)q(x)+3$$

$x=-1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$1+k=3\Rightarrow k=2$$

حال داریم:

$$x^{10}+2=(x+1)q(x)+3\Rightarrow x^{10}-1=(x+1)q(x)$$

باید $q(-1)$ را حساب کنیم:

روش اول: از اتحاد چاق و لاغر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\ldots+a^{n-2}x-a^{n-1})$$

و داریم:

$$x^{10}-1=(x+1)\underbrace{(x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)}_{q(x)}$$

$$\Rightarrow q(-1)=-10$$

روش دوم: از حد $\frac{0}{0}$ استفاده می‌کنیم:

$$q(x)=\frac{x^{10}-1}{x+1}\Rightarrow q(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{x^{10}-1}{x+1}$$

$$\overset{HOP}{\lim_{x\to-1}}\frac{10x^9}{1}=-10$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

ابتدا جملهٔ عمومی دنباله و سپس جملهٔ عمومی S_n را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}t_1r=8\\ t_1r^4=\frac{64}{27}\end{matrix}\right\}\Rightarrow r^3=\frac{\frac{64}{27}}{8}=\frac{8}{27}=(\frac{2}{3})^3$$

$$\Rightarrow r=\frac{2}{3}\xrightarrow{t_1r=8}t_1(\frac{2}{3})=8\Rightarrow t_1=12$$

پس مجموع n جملهٔ اول دنباله برابر است با:

$$S_n=\frac{t_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{12(1-(\frac{2}{3})^n)}{\frac{1}{3}}=36-36(\frac{2}{3})^n$$

S_n هندسی نیست، اما S_n-36 هندسی است.

(حسابان ۱ – جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(سیدرضا اسلامی)*

جواب‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند، پس داریم:

$$\alpha^2+2\alpha=k\Rightarrow\alpha^2=k-2\alpha$$

$$\xrightarrow{\times\alpha}\alpha^3=k\alpha-2\alpha^2=k\alpha-2(k-2\alpha)=(k+4)\alpha-2k$$

$$\Rightarrow\alpha^3+5\beta=(k+4)\alpha-2k+5\beta$$

این را هم می‌دانیم که مجموع جواب‌های معادله یعنی $\alpha+\beta$ برابر $S=-2$ است، پس $\beta=-2-\alpha$ را در تساوی بالا قرار می‌دهیم:

$$\alpha^3+5\beta=(k+4)\alpha-2k+5(-2-\alpha)$$

$$\xrightarrow{\alpha^3+5\beta=-12}(k-1)\alpha-2k-10=-12$$

$$\Rightarrow(k-1)\alpha=2(k-1)$$

معادلهٔ اخیر به ازای $k=1$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ برقرار است، حال اگر $k\neq1$ باشد، باید $\alpha=2$ شود، در این حالت داریم:

$$\beta=-2-\alpha=-2-2=-4$$

از طرفی $-k$ برابر حاصل‌ضرب جواب‌های معادله یعنی $\alpha\beta$ است.

$$\Rightarrow-k=2\times(-4)=-8\Rightarrow k=8$$

پس مجموع مقادیر k برابر ۹ است.

(حسابان ۱ – جبر و معادله؛ صفحه‌های ۷ تا ۹)

ابزار توشه‌ای برای موفقیت

۴- **گزینهٔ «۱»** *(کاظم اجلالی)*

ابتدا دامنهٔ تابع g را حساب می‌کنیم.

$$x-x^۲\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱\Rightarrow D_g=[۰\ ,\ ۱]$$

بنابراین داریم:

$$D_{gof}=\{x\mid x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\mid x\leq -۲\ \ ,\ \ ۰\leq \frac{۲x+۱}{x-۱}\leq ۱\}\qquad (*)$$

حال نامعادلهٔ $۰\leq \frac{۲x+۱}{x-۱}\leq ۱$ را حل می‌کنیم:

(۱) $x=-\frac{۱}{۲}$ جواب است. با شرط $x\neq -\frac{۱}{۲}$ و $x\neq ۱$ داریم:

$$\frac{x-۱}{۲x+۱}\geq ۱\Rightarrow \frac{x-۱-۲x-۱}{۲x+۱}\geq ۰\Rightarrow \frac{-x-۲}{۲x+۱}\geq ۰$$

(۲) $$\frac{x+۲}{۲x+۱}\leq ۰\Rightarrow -۲\leq x<-\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{(۱),\ (۲)} -۲\leq x\leq -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین برای برد تابع gof طبق (*) می‌نویسیم:

$$D_{gof}=\{x\mid x\leq -۲\ \ ,\ \ -۲\leq x\leq -\frac{۱}{۲}\}=\{-۲\}$$

$$(gof)(-۲)=g(f(-۲))=g(۱)=۰$$

پس $gof=\{(-۲\ ,\ ۰)\}$ و در نتیجه $R_{gof}=\{۰\}$ است.

(حسابان ۱ – تابع: صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(کاظم اجلالی)*

α جواب معادلهٔ $f(x)=x$ است. پس داریم:

$$\log_۴^{(۲^\alpha+۱)}=\alpha\Rightarrow ۲^\alpha+۱=۴^\alpha$$

$$\Rightarrow ۴^\alpha-۲^\alpha-۱=۰\Rightarrow \begin{cases}۲^\alpha=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\\ ۲^\alpha=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}$$ غ ق ق

حال اگر فرض کنیم $f^{-۱}(\frac{\alpha}{۲})=\beta$، آن‌گاه $f(\beta)=\frac{\alpha}{۲}$ است و در نتیجه:

$$\log_۴^{(۲^\beta+۱)}=\frac{\alpha}{۲}\Rightarrow ۲^\beta+۱=۴^{\frac{\alpha}{۲}}=۲^\alpha=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

$$۲^\beta=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}-۱=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \beta=\log_۲(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})=\log_۲(\sqrt{۵}-۱)-۱$$

(حسابان ۱ – توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(سیدرضا اسلامی)*

ابتدا ضابطهٔ تابع وارون را می‌یابیم:

$$y=f(x)=۲+\sqrt{۳-x}\Rightarrow ۳-x=(y-۲)^۲$$

$$\Rightarrow x=۳-(y-۲)^۲=-y^۲+۴y-۱\ :\ y\geq ۲$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=-x^۲+۴x-۱\ \ ;\ \ x\geq ۲\qquad (۱)$$

حال ضابطهٔ $y=f(۲x)$ و وارون آن را نیز تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=f(۲x)=۲+\sqrt{۳-۲x}$$

$$\Rightarrow ۳-۲x=(y-۲)^۲\Rightarrow x=\frac{۳-(y-۲)^۲}{۲}\ \ ;\ \ y\geq ۲$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{-x^۲+۴x-۱}{۲}\ \ ;\ \ x\geq ۲$$

$$\xrightarrow{\text{تقاطع وبرابری}} -x^۲+۴x-۱=\frac{-x^۲+۴x-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰\xrightarrow{x\geq ۲} x=۲+\sqrt{۳}$$

(حسابان ۱ – تابع: صفحه‌های ۵۷ تا ۶۲)

(حسابان ۲– تابع: صفحه‌های ۸ و ۹)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(سیدرضا اسلامی)*

تابع $y=\log_{0/1}\square$ را اکیداً نزولی در نظر می‌گیریم. پس با توجه به این نکته داریم:

$$2x+a>x^2-4$$

شرط دامنه دو عبارت لگاریتمی را نیز در نظر بگیریم، باید نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$2x+a>x^2-4>0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+a>x^2-4\Rightarrow x^2-2x-a-4<0 & (1)\\ x^2-4>0\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty) & (2)\end{cases}$$

اجتماع دسته جواب‌های (۱) و (۲) باید به صورت $(b,-2)\cup(c,5)$ باشد.

با مقایسه این دسته جواب‌ها و شکل کلی جواب بالا، مشخص می‌شود که $c=2$ است و جواب‌های معادلهٔ $x^2-2x-a-4=0$ باید b و ۵ باشند.

$$\xrightarrow{x=5} 25-10-a-4=0\Rightarrow a=11$$

$$\Rightarrow x^2-2x-a-4=x^2-2x-15=(x-5)(x+3)=0$$

$$\Rightarrow x=5,-3\Rightarrow b=-3$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(سیدرضا اسلامی)*

$$\frac{31\pi}{12}=\frac{24\pi}{12}+\frac{6\pi}{12}+\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{31\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12})=\cos\frac{\pi}{12}$$

با توجه به اتحاد $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ حاصل $A=\cos\frac{\pi}{12}$ را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{12}} \frac{\sqrt{3}}{2}=2A^2-1\Rightarrow A^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\xrightarrow{A>0} A=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

پس $2A$ برابر $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ است.

(حسابان ۱ – مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم تا به یکی از فرم‌های $f(x)=A\sin Bx+C$ یا $f(x)=A\cos Bx+C$ دربیاید.

$$\cos(bx-\frac{\pi}{3})=\cos bx\cos\frac{\pi}{3}+\sin bx\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\cos bx+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin bx$$

$$\Rightarrow f(x)=2(\frac{1}{2}\cos bx+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin bx)-\cos bx=\sqrt{3}\sin bx$$

دورهٔ تناوب این تابع برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ و کمترین مقدار آن $-\sqrt{3}$ است، پس $a=-\sqrt{3}$. از طرفی با توجه به نمودار تابع، دورهٔ تناوب آن (فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم) برابر $\frac{3\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\pi$ است، پس طبق رابطهٔ T داریم:

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow|b|=2\Rightarrow b=\pm2$$

چون نمودار تابع در یک همسایگی $x=0$ نزولی است، پس $b<0$ است و مقدار $b=-2$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow a^2b=3\times(-2)=-6$$

(حسابان ۲ – مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

باید معادلهٔ $f(x)=g(x)$ را حل کنیم:

$$\cos 2x+2=5\sin x\Rightarrow 1-2\sin^2 x+2=5\sin x$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x+5\sin x-3=(2\sin x-1)(\sin x+3)=0$$

$$\xrightarrow{-1\le\sin x\le1} \sin x=\frac{1}{2}$$

دقت کنید که جواب $\sin x=-3$ غیرقابل قبول است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های بازهٔ $[\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}]$ عبارتند از $-\frac{7\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{13\pi}{6}$

که مجموع آن‌ها برابر 2π است.

(حسابان ۲ – مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

$$f(\frac{\pi}{3}) = a[2\cos\frac{\pi}{3}] + \frac{\pi}{3}[\sin\pi] = a$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+} f(x) = a\times 0 + \frac{\pi}{3}\times(-1) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-} f(x) = a\times 1 + \frac{\pi}{3}\times 0 = a$$

برای این‌که تابع f در $x=\frac{\pi}{3}$ پیوسته باشد باید حد چپ و حد راست و مقدار آن در $x=\frac{\pi}{3}$ برابر باشند. پس $a=\frac{-\pi}{3}$ و در نتیجه:

$$[a] = [-\frac{\pi}{3}] = -2$$

(حسابان ۱ – حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۱۲- **گزینهٔ «۲»** *(کاظم اجلالی)*

دامنهٔ تابع f ، $(-\infty, 0)$ است. حال ریشه‌های مخرج (طول مجانب‌های قائم) را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt{-x} = 0 \Rightarrow \sqrt{-x} = -\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow -x^3 = x^2 \xrightarrow{x<0} x = 0 \ , \ x = -1$$

چون تابع در سمت راست $x=0$ تعریف نشده است، پس نمودار تابع f در اطراف $x=-1$ مورد نظر است. حال با تغییر متغیر $t=-x$ قصد داریم که علامت عبارت مخرج را در همسایگی $x=-1$ تعیین کنیم.

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt{-x} = \sqrt{-x} - \sqrt[3]{-x} = \sqrt{t} - \sqrt[3]{t}$$

چون x در همسایگی محذوف ۱- است، پس t در همسایگی محذوف ۱ است و در نتیجه اگر $t>1$ آن‌گاه $\sqrt{t}-\sqrt[3]{t}>0$ و اگر $t<1$ آن‌گاه $\sqrt{t}-\sqrt[3]{t}<0$ پس داریم:

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{t\to 1^-} \frac{-t+2}{\sqrt{t}-\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{t\to 1^+} \frac{-t+2}{\sqrt{t}-\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

پس نمودار تابع f در اطراف $x=-1$ به صورت است.

(حسابان ۲ – حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{2-f(3+h)} = -\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-2}{h}} = \frac{-1}{f'(3)} = 4$$

$$\Rightarrow f'(3) = -\frac{1}{4}$$

دقت کنید که چون تابع f در $x=3$ مشتق‌پذیر است، در این نقطه پیوسته هم هست، یعنی $\lim\limits_{h\to 0} f(3+h) = f(3)$. حال چون در تساوی $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{2-f(3+h)}$ حد مخرج هم باید صفر باشد نتیجه می‌شود که $f(3)=2$ است.

حال سراغ محاسبهٔ مشتق $f\times g$ در $x=3$ می‌رویم:

$$(f\times g)'(3) = f'(3)g(3) + f(3)g'(3)$$

$$= -\frac{1}{4}g(3) + 2g'(3) \qquad (*)$$

$$g(x)=\sqrt[3]{x^2-1}\Rightarrow\begin{cases}g(3)=2\\ g'(x)=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\Rightarrow g'(3)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)}(f\times g)'(3)=-\frac{1}{4}(2)+2(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

(حسابان ۲ – مشتق؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۹۴)

۱۴- **گزینهٔ «۴»** (کاظم اجلالی)

اگر خط $y=kx$ در مبدأ مختصات بر نمودار fog مماس باشد، این تابع در $x=0$ باید مشتق‌پذیر باشد. حال داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+(1-a)x & ; \quad x\le 0\\ x^2+(1+a)x & ; \quad x\ge 0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}4x & ; \quad x\le 0\\ 2x & ; \quad x\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow (fog)(x)=\begin{cases}(4x)^2+(1-a)(4x) & ; \quad x\le 0\\ (2x)^2+(1+a)(2x) & ; \quad x\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow (fog)(x)=\begin{cases}16x^2+4(1-a)x & ; \quad x\le 0\\ 4x^2+2(1+a)x & ; \quad x\ge 0\end{cases}$$

بدیهی است که تابع در $x=0$ پیوسته است. برای مشتق‌پذیری کافی است مشتق‌های چپ و راست با هم برابر باشند:

$$(fog)'(x)=\begin{cases}32x+4(1-a) & ; \quad x\le 0\\ 8x+2(1+a) & ; \quad x\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}(fog)'_-(0)=4(1-a)\\ (fog)'_+(0)=2(1+a)\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{برابری}}4-4a=2+2a\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

پس $(fog)'(0)=\dfrac{8}{3}$ است و در نتیجه خط $y=\dfrac{8}{3}x$ یا $3y=8x$ در $x=0$ بر نمودار fog مماس است.

(حسابان ۲ – مشتق؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹ و ۹۶)

۱۵- **گزینهٔ «۱»** (سیدرضا اسلامی)

$$f(x)=(x+1)(x-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}(x+1)(x-1)^{-\frac{2}{3}}$$

از آنجا که $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=+\infty$ است، خط مماس بر نمودار f در $x=1$ قائم بوده و $x=1$ طول یکی از نقاط عطف نمودار تابع است.

$$f''(x)=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{9}(x+1)(x-1)^{-\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{9}(x+1)(x-1)^{-\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^2}}(3-\frac{x+1}{x-1})$$

ریشهٔ سادهٔ f''، طول دیگر نقطه عطف نمودار را می‌دهد:

$$\xrightarrow{f''(x)=0}3-\frac{x+1}{x-1}=0\Rightarrow x=2$$

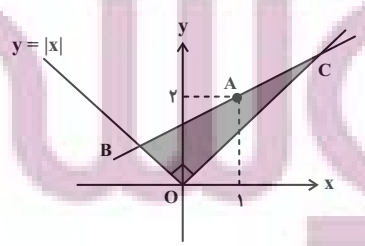
پس نقاط $(0,1)$ و $(3,2)$ عطف‌های نمودار تابع f هستند که فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر برابر است با:

$$\sqrt{(2-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$$

(حسابان ۲ – کاربردهای مشتق؛ صفحهٔ ۱۳۱)

۱۶- **گزینهٔ «۴»** (سیدرضا اسلامی)

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



شیب خط گذرنده از نقطهٔ A را m در نظر می‌گیریم، پس معادلهٔ خط شامل نقاط A، B و C به صورت زیر است:

$$y-۲=m(x-۱)\Rightarrow y=mx-m+۲$$

برای این‌که این خط نمودار تابع را در دو نقطه قطع کند، لازم است که $|m|<۱$ باشد. حال مختصات نقاط B و C را برحسب m حساب می‌کنیم:

$$B: -x=mx-m+۲\Rightarrow x_B=\frac{m-۲}{m+۱}\ ,\ y_B=\frac{۲-m}{m+۱}$$

پس طول ضلع OB در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC برابر است با:

$$OB=\frac{۲-m}{m+۱}\sqrt{۲}$$

$$C: x=mx-m+۲\Rightarrow x_C=\frac{۲-m}{۱-m}=y_C$$

$$\Rightarrow OC=\frac{۲-m}{۱-m}\sqrt{۲}$$

پس مساحت مثلث OBC برحسب m برابر است:

$$S=\frac{۱}{۲}OB.OC\Rightarrow S(m)=\frac{(۲-m)^۲}{۱-m^۲}=\frac{۴-۴m+m^۲}{۱-m^۲}$$

باید صفرهای $S'(m)$ را پیدا کنیم:

$$S'(m)=\frac{-۴m^۲+۱۰m-۴}{(۱-m^۲)^۲}=\frac{-۲(۲m-۱)(m-۲)}{(۱-m^۲)^۲}$$

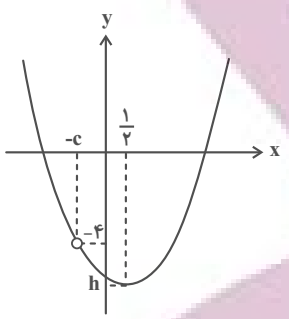
$$\xrightarrow{S'(m)=۰}(۲m-۱)(m-۲)=۰\xrightarrow{|m|<۱}m=\frac{۱}{۲}$$

پس به ازای $m=\frac{۱}{۲}$ مساحت مثلث OBC کمترین مقدار را دارد.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۱۷- **گزینهٔ «۴»** (کاظم اجلالی)

عبارت درجه سوم بر عبارت درجه اول تقسیم شده است و حاصل یک عبارت درجه دوم شده است؛ با توجه به نمودار مشخص است که $x=\frac{۱}{۲}$ طول رأس سهمی به دست آمده است و با توجه به حفره روی نمودار نتیجه می‌گیریم که عبارت‌های صورت و مخرج ریشه مشترک $(x=-c)$ را دارند، پس ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:



$$f(x)=\frac{(x+c)((x-\frac{۱}{۲})^۲+h)}{x+c}$$

پس حد تابع در $x=-c$ برابر ۴- است:

$$\lim_{x\to -c} f(x)=\lim_{x\to -c}((x-\frac{۱}{۲})^۲+h)=(c+\frac{۱}{۲})^۲+h=-۴ \quad (۱)$$

از طرفی در عبارت صورت داریم:

$$(x+c)(x^۲-x+\frac{۱}{۴}+h)=x^۳+ax^۲+bx-۶$$

$$\Rightarrow c(\frac{۱}{۴}+h)=-۶ \qquad (۲)$$

از معادلهٔ (۲) به دست می‌آوریم:

$$h=-\frac{۶}{c}-\frac{۱}{۴}$$

و این تساوی را در معادلهٔ (۱) اعمال می‌کنیم:

$$(c+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۶}{c}-\frac{۱}{۴}=-۴$$

$$\Rightarrow c^۲+c+\frac{۱}{۴}-\frac{۶}{c}-\frac{۱}{۴}=-۴$$

$$\xrightarrow{\times c}c^۳+c^۲+۴c-۶=۰$$

$$\Rightarrow (c-۱)(\underbrace{c^۲+۲c+۶}_{\Delta<۰})=۰\Rightarrow c=۱\xrightarrow{(۲)}h=-\frac{۲۵}{۴}$$

پس ضابطهٔ تابع f به صورت زیر بوده است:

$$f(x)=\frac{(x+۱)((x-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۲۵}{۴})}{x+۱}=\frac{x^۳-۷x-۶}{x+۱}$$

این یعنی $a=۰$ و $b=-۷$ است، در نتیجه $b-c=-۸$ است.

(حسابان ۱ — حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

ابتدا سمت راست عبارت شرطی را ساده می‌کنیم:

$$\sim[(p\Rightarrow q)\wedge\sim q]\vee\sim p\equiv[\sim(p\Rightarrow q)\vee q]\vee\sim p$$

$$\equiv[\sim(\sim p\vee q)\vee q]\vee\sim p$$

$$\equiv[(p\wedge\sim q)\vee q]\vee\sim p$$

$$\equiv(p\vee q)\vee\sim p$$

$$\equiv q\vee(p\vee(\sim p))\equiv q\vee T\equiv T$$

بنابراین عبارت داده شده به صورت $r\Rightarrow T$ می‌باشد و ارزشی همواره درست دارد.

(آمار و احتمال – آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۶ تا ۱۳)

۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$[(A'-B)\cup(B-A')]\cup[(A\cap B)'-A']$$

$$=[(A'\cap B')\cup(B\cap A)]\cup[(A'\cup B')\cap A]$$

$$=[(A'\cap B')\cup(B\cap A)]\cup[\underbrace{(A'\cap A)}_{\varnothing}\cup(B'\cap A)]$$

$$=(A'\cap B')\cup[(B\cap A)\cup(B'\cap A)]$$

$$=(A'\cap B')\cup[\underbrace{(B\cup B')}_{U}\cap A]$$

$$=(A'\cap B')\cup A=(\underbrace{A'\cup A}_{U})\cap(B'\cup A)=A\cup B'$$

(آمار و احتمال – آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ فضای نمونه‌ای آزمایش است؛

$$n(S)=\binom{12}{4}=495$$

و چون دقیقاً دو متغیر برابر صفر است، خواهیم داشت:

$$x_1+x_2+x_3=8\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{7}{2}=21$$

$$n(A)=\binom{5}{2}\times\binom{7}{2}=210$$

$$P(A)=\frac{210}{495}=\frac{42}{99}=\frac{14}{33}$$

(ریاضیات گسسته – ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۲۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمد صحت‌کار)*

برای آن که این عدد بزرگ‌تر از ۵۰۰۰۰ باشد باید رقم اول سمت چپ (رقم ده هزارگان) رقم ۵ باشد. احتمال مطلوب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

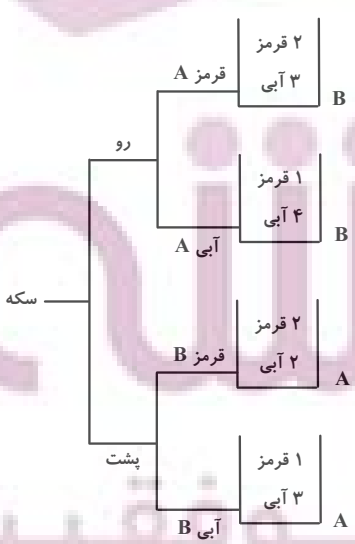
$$P(\text{رقم ۵ در سمت چپ رقم ۴ قرار دارد}\mid\text{رقم ده هزارگان رقم ۵ باشد})$$

$$=\frac{P(\text{رقم ده هزارگان، رقم ۵ باشد})}{P(\text{رقم ۵ در سمت چپ رقم ۴ باشد})}$$

$$=\frac{\frac{4!}{5!}}{\frac{2!}{2!\times4!}}=\frac{2}{5}=0/4$$

(آمار و احتمال – احتمال؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۷)

۲۲- **گزینهٔ «۱»** *(محمد صحت‌کار)*



$$P(\text{رو}\mid\text{قرمز})=\frac{P(\text{سکه رو و مهره قرمز})}{P(\text{قرمز})}$$

$$=\frac{(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{5})+(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5})}{(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{5})+(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5})+(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4})+(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4})}$$

$$=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15}+\frac{5}{16}}=\frac{\frac{64}{240}}{\frac{64+75}{240}}=\frac{64}{139}$$

(آمار و احتمال – احتمال؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۲)

۲۳- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

به غیر از x بقیهٔ داده‌ها متمایزند، پس میانگین باید برابر با یکی از داده‌ها باشد. چرا که در غیر این صورت مد نخواهیم داشت:

$$\frac{64+x+69+50+76+65+68+63}{8}=x$$

$$\Rightarrow 455+x=8x\Rightarrow x=65\xrightarrow{\text{مجموع ارقام}}6+5=11$$

(آمار و احتمال – آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۹۲)

۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید عدد مورد نظر را با a نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$a=19b+25\quad,\quad b>25$$

$$a<1000\Rightarrow 19b+25<1000\Rightarrow 19b<975\Rightarrow b\le 51$$

$$a\overset{7}{\equiv}0\Rightarrow 19b+25\overset{7}{\equiv}0\Rightarrow -2b+4\overset{7}{\equiv}0\Rightarrow 2b\overset{7}{\equiv}4$$

$$\xrightarrow{+2}b\overset{7}{\equiv}2\Rightarrow b=7k+2\qquad(k\in\mathbb{Z})$$

بنابراین تنها مقادیر صحیح قابل قبول برای b در بازهٔ $[51, 25)$ عبارتند از:

$$b=30, 37, 44, 51$$

(ریاضیات گسسته – آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۲۵- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

می‌دانیم $140=4\times5\times7$، پس:

$$3^2\overset{4}{\equiv}1\xrightarrow{\text{توان }2}3^4\overset{4}{\equiv}1\qquad(1)$$

از طرفی:

$$3^4\overset{20}{\equiv}1$$

$$3^3\overset{7}{\equiv}-1\xrightarrow{\text{توان }2}3^6\overset{7}{\equiv}1$$

$$\left.\begin{array}{l}3^4\overset{20}{\equiv}1\xrightarrow{\text{توان }3}3^{12}\overset{20}{\equiv}1\\ 3^6\overset{7}{\equiv}1\xrightarrow{\text{توان }2}3^{12}\overset{7}{\equiv}1\end{array}\right\}\Rightarrow 3^{12}\overset{[20,7]=140}{\equiv}1$$

$$\Rightarrow 3^{12}\overset{140}{\equiv}1\xrightarrow{\text{توان }k}3^{12k}\overset{140}{\equiv}1$$

بنابراین n باید به صورت $n=12k$ باشد:

$$10\le 12k<100\Rightarrow k=1, 2, \dots, 8$$

در نتیجه ۸ مقدار مختلف می‌تواند اختیار کند.

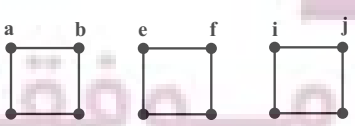
(ریاضیات گسسته – آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۲۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر a رأس دلخواهی از گراف G باشد، آن‌گاه داریم:

$$\deg_G(a)+\deg_{\bar{G}}(a)=p-1\Rightarrow 2+9=p-1\Rightarrow p=12$$

بنابراین G گرافی ۲- منتظم از مرتبهٔ ۱۲ است. حداکثر عدد احاطه‌گری این گراف مربوط به شکل زیر است.



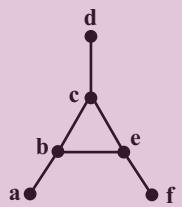
یعنی گراف G از ۳ گراف C_4 تشکیل شده است که عدد احاطه‌گری هر کدام از گراف‌های C_4 برابر ۲ است، در نتیجه داریم:

$$\max(\gamma(G)) = 6$$

(ریاضیات گسسته – گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸ و ۴۴)

۲۷- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

گراف همبند با درجهٔ رئوس ۱، ۱، ۱، ۳، ۳، ۳ به صورت زیر خواهد بود:



که $\gamma = 3$ است و ۸ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد.

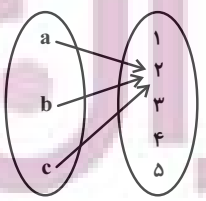
$$\binom{2}{1}^{a,b}\binom{2}{1}^{e,f}\binom{2}{1}^{c,d} = 8$$

(ریاضیات گسسته – گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸)

۲۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمد صحت‌کار)*

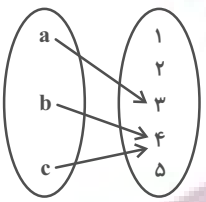
برای توابع مطلوب ۲ حالت امکان‌پذیر است:

۱- برد تابع یک عضو داشته باشد.



$$\text{تعداد توابع مطلوب} = \binom{5}{1} = 5$$

۲- برد تابع دو عضو داشته باشد.



$$\text{تعداد توابع مطلوب} = \binom{5}{2} \times \frac{\text{تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ ۳ عضوی}}{\text{به مجموعهٔ ۲ عضوی}}$$

$$= \binom{5}{2} \times (2^3 - 2)$$

در نتیجه $5 + 60 = 65$ تابع مطلوب وجود دارد.

(ریاضیات گسسته – ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۸ و ۷۹)

۲۹- **گزینهٔ «۱»** *(محمد صحت‌کار)*

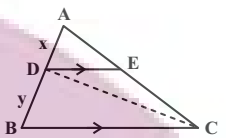
با انتخاب هر ۳ کارت در هر بار آزمایش و جابه‌جایی آن‌ها می‌توانیم $3! = 6$ عدد مختلف بسازیم که فقط در یکی از آن‌ها ارقام از چپ به راست به ترتیب صعودی هستند. بنابراین تعداد اعداد مختلف که در این شرایط می‌توان ساخت برابر با $\binom{6}{3} \times 1 = 20$ است و براساس اصل لانهٔ کبوتری اگر این آزمایش را $20 + 1 = 21$ بار تکرار کنیم یقین خواهیم داشت که حداقل ۲ عدد یکسان ساخته شده است.

(ریاضیات گسسته – ترکیبیات؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۳)

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

۳۰- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

طول پاره‌خط‌های AD و DB را به ترتیب x و y و همچنین مساحت مثلث ABC را برابر S در نظر می‌گیریم. چون $DE \parallel BC$، پس طبق قضیهٔ اساسی تشابه داریم:



$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \left(\frac{x}{x+y}\right)^{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{\frac{۴}{S}} = \frac{x}{x+y} \qquad (۱)$$

از طرفی دو مثلث BDC و ABC در ارتفاع خارج شده از رأس C مشترک‌اند، پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BDC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{y}{x+y} \Rightarrow \frac{۱۵}{S} = \frac{y}{x+y} \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = \frac{۲}{\sqrt{S}} + \frac{۱۵}{S} = ۱$$

$$\xrightarrow{\times S} S - ۲\sqrt{S} - ۱۵ = ۰ \Rightarrow (\sqrt{S}-۵)(\sqrt{S}+۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{S} = ۵ \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S = ۲۵ \\ \sqrt{S} = -۳ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(هندسه ۱ — قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۷)

۳۱- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با توجه به این‌که طول و عرض یک مستطیل شبکه‌ای اعدادی طبیعی هستند، حالت‌های زیر برای این مستطیل امکان‌پذیر است:

$$۲۴ = ۲۴\times۱ = ۱۲\times۲ = ۸\times۳ = ۶\times۴$$

از طرفی تعداد نقاط مرزی یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم به طول m و عرض n، برابر $۲(m+n)$ است، بنابراین با توجه به ثابت بودن مساحت چندضلعی، هر چه محیط آن کمتر باشد، تعداد نقاط مرزی کمتر و در نتیجه تعداد نقاط درونی بیشتر می‌شود. کمترین محیط این مستطیل مربوط به حالتی است که طول و عرض مستطیل به ترتیب برابر ۶ و ۴ باشد که در این صورت داریم:

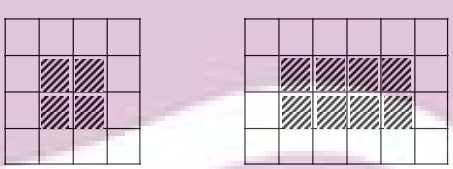
$$b = ۲(۶+۴) = ۲۰$$

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ \Rightarrow ۲۴ = \frac{۲۰}{۲} + i - ۱ \Rightarrow i = ۱۵$$

(هندسه ۱ — چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۳۲- **گزینهٔ «۲»** *(نریمان فتح‌اللهی)*

اگر از هر سمت این مکعب مستطیل، یک ردیف حذف کنید، یک مکعب مستطیل به ابعاد $۲\times۲\times۴$ باقی می‌ماند که شامل ۱۶ مکعب کوچک رنگ نشده است. از طرفی وجه‌های این مکعب شامل ۲ وجه به ابعاد ۴×۴ و ۴ وجه به ابعاد ۶×۴ است که مطابق شکل زیر در آن‌ها به ترتیب ۴ و ۸ مکعب کوچک وجود دارد که تنها دارای یک وجه رنگ شده هستند، پس تعداد مکعب‌های با یک وجه رنگ شده برابر است با:



$$۲\times۴ + ۴\times۸ = ۴۰$$

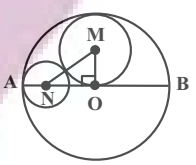
$$\frac{\text{تعداد مکعب‌های رنگ‌نشده}}{\text{تعداد مکعب‌های با یک وجه رنگ‌شده}} = \frac{۱۶}{۴۰} = \frac{۲}{۵}$$

(هندسه ۱ — تجسم فضایی؛ صفحهٔ ۹۰)

۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

مطابق شکل دایرهٔ سوم در نقطهٔ A بر بزرگ‌ترین دایره مماس است. شعاع بزرگ‌ترین دایره را R و شعاع دایرهٔ سوم را r درنظر می‌گیریم و شعاع دایرهٔ مماس بر قطر AB که از مرکز O می‌گذرد، برابر $\frac{R}{۲}$ خواهد بود.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMN داریم:



$$\begin{cases} OM = \frac{R}{2} \\ MN = \frac{R}{2} + r \end{cases}, \quad ON = R - r$$

$$OM^2 + ON^2 = MN^2 \Rightarrow \frac{R^2}{4} + (R^2 + r^2 - 2Rr)$$

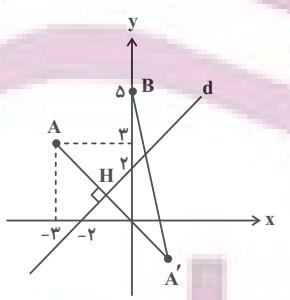
$$= \frac{R^2}{4} + r^2 + Rr \Rightarrow R^2 = 3Rr \Rightarrow R = 3r$$

در نتیجه شعاع بزرگ‌ترین دایره ۳ برابر شعاع کوچک‌ترین دایره است.

(هندسه ۲ – دایره؛ صفحهٔ ۲۰)

۳۴- **گزینهٔ «۴»** (هاری فولادی)

مطابق شکل دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط $y = x + 2$ قرار دارند، بنابراین کافی است بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d را پیدا کرده (نقطهٔ A') و از آن نقطه به B وصل کنیم. طول پاره‌خط $A'B$ برابر طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن خواهد بود.



$$m_d = 1 \Rightarrow m_{AA'} = -1$$

معادلهٔ خط AA': $y - 3 = -1(x + 3) \Rightarrow y = -x$

اگر H نقطهٔ برخورد دو خط d و AA' باشد، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x + 2 = -x \Rightarrow x_H = -1 \Rightarrow y_H = 1$$

$$x_H = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-3 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 1$$

$$y_H = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow 1 = \frac{3 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = -1$$

$$A'B = \sqrt{(0-1)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37}$$

(هندسه ۲ – تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحهٔ ۵۴)

۳۵- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

طبق قضیهٔ میانه‌ها در مثلث ABC داریم:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 6^2 + 4^2 = 2(\sqrt{10})^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow 52 = 20 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{2} = 32 \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$$

حال طبق قضیهٔ هرون در این مثلث داریم:

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{8+6+4}{2} = 9$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{9 \times 1 \times 3 \times 5} = 3\sqrt{15}$$

(هندسه ۲ – روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۹ و ۷۳)

۳۶- **گزینهٔ «۳»** (سوکند روشنی)

برای دو ماتریس A و B به ترتیب داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \log_2^5 \\ \log_5^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \log_2^5 \\ \log_5^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow A^{19} = (A^2)^9 A = IA = A$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & \tan\theta \\ \cot\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \tan\theta \\ \cot\theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow B^{20} = (B^2)^{10} = I$$

بنابراین داریم:

$$A^{19} + B^{20} = A + I$$

(هندسه ۳ – ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۳۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$|A| = (|A|-1)(|A|+1) - (|A|-2)$$

$$\Rightarrow |A| = |A|^2 - |A| + 1 \Rightarrow |A|^2 - 2|A| + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (|A|-1)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = A^{-1} \xrightarrow{A^{-1}\times} A^{-1}(AX) = A^{-1} \times A^{-1}$$

$$\Rightarrow X = (A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس X برابر ۲ است.

(هندسه ۳ – ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

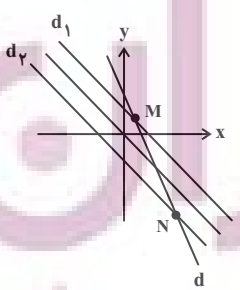
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. اگر خط d عمودمنصف AB باشد، آن‌گاه داریم:

$$M = \frac{A+B}{2} = (0, 2) \quad (\text{وسط } AB)$$

$$m_{AB} = \frac{3-1}{2-(-2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_d = -2$$

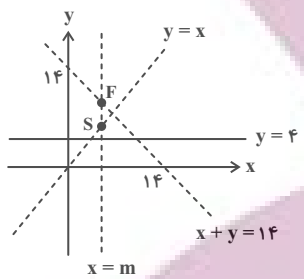
$$\text{معادلهٔ خط } d: y - 2 = -2(x-0) \Rightarrow y = -2x + 2$$

از طرفی مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نیمساز ربع دوم و چهارم به فاصلهٔ ۱ باشند، دو خط موازی در طرفین آن و به فاصلهٔ ۱ واحد از آن است. مطابق شکل این دو مکان هندسی یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند (نقاط M و N در شکل).



(هندسه ۳ – آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۳۹- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*



چون خط هادی سهمی افقی است، پس محور تقارن آن خطی قائم است که معادلهٔ آن را به صورت $x = m$ در نظر می‌گیریم. از طرفی رأس و کانون سهمی روی محور تقارن قرار دارند، پس نقاط $S(m, m)$ و $F(m, 14-m)$ به ترتیب رأس و کانون سهمی هستند. چون فاصلهٔ رأس سهمی از کانون و خط هادی برابر است، پس داریم:

$$14 - 2m = m - 4 \Rightarrow 3m = 18 \Rightarrow m = 6$$

پس $x = 6$ معادلهٔ محور تقارن سهمی است.

توجه: اگر معادلهٔ قدرمطلقی $|14-2m| = |m-4|$ را درنظر بگیریم، جواب $m = 10$ نیز به دست می‌آید که قابل قبول نیست. (چرا؟)

(هندسه ۳ – آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۳)

۴۰- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

ابتدا اندازهٔ بردار $\vec{a}$ را به دست می‌آوریم:

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{c}.\vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{|6-4-4|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}$$

می‌دانیم بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است، پس داریم:

$$|(9\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}| = |9\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{a}|\underbrace{\sin 90^\circ}_{1}$$

$$= 9|\vec{a}||\vec{b}|\underbrace{\sin 90^\circ}_{1}\times|\vec{a}|$$

$$= 9|\vec{a}|^2|\vec{b}| = 9(\frac{2}{3})^2 \times 1 = 9\times\frac{4}{9} = 4$$

(هندسه ۳ – بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۴)

تیزهوشان برای موفقیت

فیزیک

۴۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

می‌دانیم اگر در یک بازهٔ زمانی متحرک تغییر جهت ندهد، اندازهٔ جابه‌جایی با مسافت طی شده توسط متحرک یکسان است. از طرف دیگر، در لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر می‌شود و علامت آن تغییر می‌کند، متحرک تغییر جهت می‌دهد. بنابراین، ابتدا لحظهٔ تغییر جهت متحرک را می‌یابیم:

$$x = t^2 - 16t + 28 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = 1 \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2} \\ v_0 = -16\frac{m}{s} \end{cases}$$

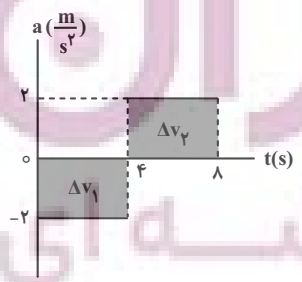
$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2t - 16 \xrightarrow{v=0} 0 = 2t - 16 \Rightarrow t = 8s$$

چون متحرک در لحظهٔ $t = 8s$ تغییر جهت می‌دهد، در بازه‌های زمانی که $0 \le t \le 8$ و $t \ge 8s$ باشد، اندازهٔ جابه جایی و مسافت طی شده یکسان است. بنابراین، در بازه‌های زمانی (۴s تا ۱۰s)، (۵s تا ۱۲s) و ۳ ثانیهٔ سوم حرکت (۶s تا ۹s) که شامل لحظهٔ $t = 8s$ است، متحرک تغییر جهت می‌دهد و مسافت طی شده بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی است. در بازهٔ زمانی ۱s تا ۸s که متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، اندازهٔ جابه‌جایی برابر مسافت طی شده است.

(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲، ۳ و ۱۵ تا ۲۱)

۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(سیاوش فارسی)*

برای پاسخ به این سؤال بهتر است، نمودار سرعت- زمان آن را رسم کنیم. به همین منظور سرعت را در لحظه‌های $t = 4s$ و $t = 8s$ پیدا می‌کنیم. با توجه به اینکه مساحت سطح محصور بین نمودار $a - t$ و محور t برابر Δv است، می‌توان نوشت:



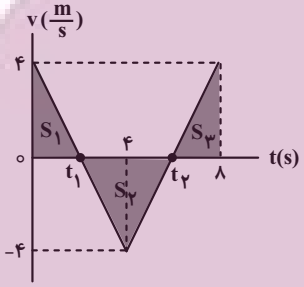
$$\Delta v_1 = -2 \times 4 = -8\frac{m}{s}$$

$$\Delta v_2 = 2 \times (8-4) = 8\frac{m}{s}$$

$$v_{4s} = v_0 + \Delta v_1 \xrightarrow{v_0 = 4\frac{m}{s}} v_{4s} = 4 - 8 = -4\frac{m}{s}$$

$$v_{8s} = v_{4s} + \Delta v_2 = -4 + 8 = 4\frac{m}{s}$$

اکنون نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم. دقت کنید در بازهٔ زمانی صفر تا ۴s، شتاب ثابت و منفی و در بازهٔ زمانی ۴s تا ۸s، شتاب ثابت و مثبت است.



با توجه به نمودار $v - t$، با استفاده از تشابه مثلث‌ها، لحظه‌های t_1 و t_2 را می‌یابیم:

$$\frac{4}{t_1} = \frac{4}{4 - t_1} \Rightarrow t_1 = 2s$$

$$\frac{4}{t_2 - 4} = \frac{4}{8 - t_2} \Rightarrow t_2 = 6s$$

در آخر مسافت طی شده را با استفاده از سطح محصور بین نمودار $v - t$ و محور t که برابر جابه‌جایی است، می‌یابیم:

$$\ell = S_1 + |S_2| + S_3 \Rightarrow \ell = \frac{4 \times t_1}{2} + \left|\frac{(t_2 - t_1) \times (-4)}{2}\right|$$

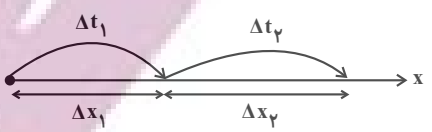
$$+ \frac{(8 - t_2) \times 4}{2} \Rightarrow \ell = \frac{4 \times 2}{2} + \left|\frac{(6-2) \times (-4)}{2}\right| + \left|\frac{(8-6) \times 4}{2}\right|$$

$$\Rightarrow \ell = 4 + 8 + 4 = 16m$$

(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲، ۳ و ۱۵ تا ۲۱)

۴۳- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

مسیر حرکت از دو قسمت تشکیل شده است. اگر کل مسیر حرکت را x فرض کنیم، با توجه به شکل زیر، بزرگی سرعت متوسط را حساب می‌کنیم:



$$\begin{cases}\Delta x_1=\frac{1}{3}x\\ v_1=6\frac{m}{s}\end{cases}\qquad \begin{cases}\Delta x_2=\frac{2}{3}x\\ v_2=3\frac{m}{s}\end{cases}$$

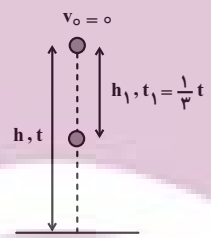
اکنون می‌توان بزرگی سرعت متوسط در کل مسیر حرکت را به دست آورد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{x}{\frac{x}{18}+\frac{2x}{9}}\Rightarrow v_{av}=\frac{18}{5}=3/6\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴۴- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی کیانی)*

اگر کل زمان سقوط را t فرض کنیم، با استفاده از رابطهٔ $y=-\frac{1}{2}gt^2+y_0$ و با توجه به اینکه $y_0=0$ است، می‌توان نوشت:



$$y=-\frac{1}{2}gt^2+y_0\xrightarrow{y_0=0}\frac{h_1}{h}=\frac{-\frac{1}{2}gt_1^2}{-\frac{1}{2}gt^2}\xrightarrow[h=90m]{t_1=\frac{1}{3}t}$$

$$\frac{h_1}{90}=(\frac{\frac{1}{3}t}{t})^2\Rightarrow\frac{h_1}{90}=\frac{1}{9}\Rightarrow h_1=10m$$

(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۴۵- **گزینهٔ «۱»** *(بهنام رستمی)*

ابتدا به‌صورت زیر، با استفاده از قانون دوم نیوتون، جرم جسم و نیروی اصطکاک جنبشی را پیدا می‌کنیم:

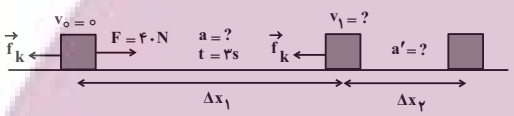
$$F_{net}=ma\Rightarrow\begin{cases}F_1-f_k=ma_1\\ F_2-f_k=ma_2\end{cases}\xrightarrow[a_2=2/5\frac{m}{s^2},\ F_2=34N]{a_1=2\frac{m}{s^2},\ F_1=32N}$$

$$\begin{cases}32-f_k=m\times2\\ 34-f_k=m\times2/5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-32+f_k=-2m\\ 34-f_k=2/5m\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2=0/5m\Rightarrow m=4kg$$

$$34-f_k=2/5\times4\Rightarrow f_k=24N$$

اکنون با توجه به شکل زیر، برای لحظه‌ای که نیروی افقی $F=40N$ به جسم وارد می‌شود تا لحظه‌ای که جسم متوقف می‌گردد، شتاب حرکت برای قسمت اول و دوم و سرعت در لحظهٔ قطع نیرو را پیدا می‌کنیم:



$$F-f_k=ma\Rightarrow40-24=4a\Rightarrow a=4\frac{m}{s^2}$$

$$0-f_k=ma'\Rightarrow-24=4a'\Rightarrow a'=-6\frac{m}{s^2}$$

$$v_1=at+v_0=4\times3+0=12\frac{m}{s}$$

در آخر، جابه‌جایی دو قسمت را به دست آورده و با هم جمع می‌کنیم:

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2+v_0t=\frac{1}{2}\times4\times(3)^2+0=18m$$

$$v_2^2=v_1^2+2a'\Delta x_2\Rightarrow0=144+2\times(-6)\times\Delta x_2$$

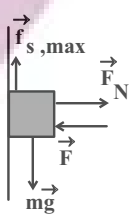
$$\Rightarrow\Delta x_2=12m$$

$$\Delta x_{کل}=\Delta x_1+\Delta x_2=18+12=30m$$

(فیزیک ۳ – دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۴۳)

۴۶- **گزینهٔ «۲»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم نموده و با استفاده از قانون دوم نیوتون برای راستای قائم، $f_{s,max}$ را می‌یابیم. دقت کنید چون حداقل اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ خواسته شده است، باید بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی به آن وارد شود و شتاب حرکت جسم همان شتاب حرکت آسانسور است.



$$(F_{net})_y = ma \Rightarrow mg - f_{s,max} = ma$$

$$\xrightarrow[a=۲\frac{m}{s^۲}]{m=۵kg} ۵\times۱۰ - f_{s,max} = ۵\times۲ \Rightarrow f_{s,max} = ۴۰N$$

اکنون به صورت زیر، F را می‌یابیم:

$$(F_{net})_x = ۰ \Rightarrow F_N - F = ۰ \Rightarrow F_N = F$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N=F]{\mu_s=۰/۵} ۴۰ = ۰/۵\times F \Rightarrow F = ۸۰N$$

(فیزیک ۳ – دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۴۳)

۴۷- **گزینهٔ «۴»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

با استفاده از رابطهٔ $K = \frac{p^۲}{۲m}$ و به‌صورت زیر نسبت $\frac{K_B}{K_A}$ را می‌یابیم:

$$K = \frac{p^۲}{۲m} \Rightarrow \frac{K_B}{K_A} = \frac{m_A}{m_B}\times(\frac{p_B}{p_A})^۲$$

$$\xrightarrow[m_A=\frac{۱}{۵}m_B]{p_A=۳p_B} \frac{K_B}{K_A} = \frac{\frac{۱}{۵}m_B}{m_B}\times(\frac{p_B}{۳p_B})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{K_B}{K_A} = \frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۹} = \frac{۱}{۴۵}$$

(فیزیک ۳ – دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۴۸- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قهرمانی)*

ابتدا دورهٔ حرکت متحرک را می‌یابیم. با توجه به شکل، مسیر AB برابر $\frac{۱}{۴}$ دور کامل است که متحرک آن را در مدت $\Delta t = ۰/۱s$ طی می‌کند. بنابراین، زمان یک دور کامل (T) برابر است با:

$$\frac{۱}{۴}T = ۰/۱ \Rightarrow T = ۰/۴s$$

اکنون اندازهٔ شتاب مرکزگرای متحرک را پیدا می‌کنیم:

$$a = \frac{۴\pi^۲ r}{T^۲} \xrightarrow[r=۱۵cm=۰/۱۵m]{\pi^۲=۱۰,\ T=۰/۴s} a = \frac{۴\times۱۰\times۰/۱۵}{۰/۴\times۰/۴} = ۳۷/۵\frac{m}{s^۲}$$

(فیزیک ۳ – دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۸)

۴۹- **گزینهٔ «۲»** *(ساعد صالحی)*

ابتدا تندی انتشار موج را می‌یابیم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \xrightarrow[A=۱cm^۲=۱۰^{-۴}m^۲]{\rho=۲\frac{g}{cm^۳}=۲۰۰۰\frac{kg}{m^۳}} v = \sqrt{\frac{۲۰}{۲۰۰۰\times۱۰^{-۴}}} = ۱۰\frac{m}{s}$$

اکنون طول‌موج و به دنبال آن دورهٔ تناوب را پیدا می‌کنیم. با توجه به شکل، $\frac{۵\lambda}{۴} = ۱۰۰cm$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{۵\lambda}{۴} = ۱۰۰cm \Rightarrow \lambda = ۸۰cm = ۰/۸m$$

$$\lambda = vT \Rightarrow ۰/۸ = ۱۰\times T \Rightarrow T = ۰/۰۸s$$

در این قسمت، بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰/۰۱s$ تا $t_۲ = ۰/۰۵s$ را برحسب دورهٔ تناوب حساب می‌کنیم:

$$\Delta t = t_۲ - t_۱ = ۰/۰۵ - ۰/۰۱ = ۰/۰۴s$$

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{۰/۰۴}{۰/۰۸} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{۲}$$

می‌دانیم مسافت طی شده توسط نوسانگر در مدت $\frac{T}{۲}$ (نصف دورهٔ تناوب) دو برابر دامنهٔ نوسان است و طبق شکل سؤال، دامنهٔ نوسان برابر با $A = ۲cm$ است. مسافت طی شده در مدت $\Delta t = ۰/۰۴s$ برابر است با:

$$\ell = ۲A \xrightarrow{A=۲cm} \ell = ۲\times۲ = ۴cm$$

(فیزیک ۳ – نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۷۴)

۵۰- **گزینهٔ «۱»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

طبق رابطهٔ $x = A\cos\omega t$ برای به‌دست آوردن معادلهٔ مکان- زمان نوسانگر باید A و ω معلوم باشند. بنابراین، ابتدا با استفاده از معادلهٔ نیرو- مکان حرکت هماهنگ ساده، ω را پیدا می‌کنیم:

$$F=-m\omega^2 x \xrightarrow[F=-180x]{m=200g=0/2kg} -180x=-0/2\omega^2 x$$

$$\Rightarrow 180=0/2\omega^2 \Rightarrow \omega^2=900 \Rightarrow \omega=30\frac{rad}{s}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی نوسانگر، دامنهٔ نوسان را می‌یابیم:

$$K_{max}=\frac{1}{2}mv_{max}^2 \xrightarrow{v_{max}=A\omega} K_{max}=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

$$\xrightarrow[m=0/2kg\ ,\ \omega=30\frac{rad}{s}]{K_{max}=225mJ=225\times10^{-3}J} 225\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times0/2\times900\times A^2$$

$$\Rightarrow A^2=\frac{225}{9}\times10^{-4} \Rightarrow A=\frac{15}{3}\times10^{-2}=0/05m$$

در آخر، معادلهٔ مکان- زمان نوسانگر برابر است با:

$$x=A\cos\omega t \Rightarrow x=0/05\cos30t$$

(فیزیک ۳ – نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

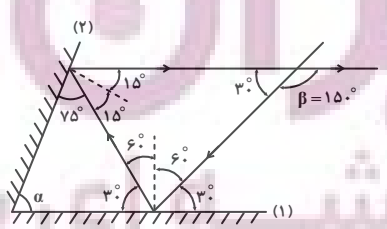
۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

با دور شدن ناظر از چشمهٔ صوت، بسامد دریافتی توسط ناظر کاهش می‌یابد. بنابراین، $f'<f$ است. همچنین چون چشمهٔ صوت ساکن است، طول‌موج آن در اطراف چشمه و در همهٔ نقاط یکسان خواهد بود. بنابراین $\lambda'=\lambda$ است.

(فیزیک ۳ – نوسان و موج؛ صفحه‌های ۸۱ تا ۸۳)

۵۲- **گزینهٔ «۲»** *(شارمان ویسی)*

روش اول: چون پرتو بازتابش از آینهٔ (۲) موازی آینهٔ (۱) است و پرتو تابش به عنوان خط مورب برای دو خط موازی می‌باشد، مطابق شکل زیر، زاویه‌های هم‌اندازه (زاویه‌های تند و زاویه‌های باز) را مشخص می‌کنیم و به دنبال آن زاویهٔ بین دو آینه را می‌یابیم:



$$\alpha+75^\circ+30^\circ=180^\circ \Rightarrow \alpha=75^\circ$$

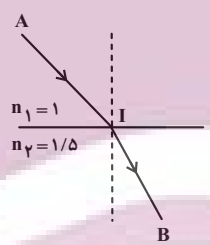
روش دوم: در آینه‌های تخت متقاطع که زاویهٔ بین دو آینه کوچک‌تر از 90° است و از هر آینه یک بازتاب رخ می‌دهد، زاویهٔ بین پرتو بازتابش و پرتو تابش (β) دو برابر زاویهٔ بین دو آینه (α) است. یعنی $\beta=2\alpha$ است. در این سؤال، بدون محاسبهٔ زاویه‌های تابش و بازتابش و تنها با دانستن این نکته که برای دو خط موازی و یک خط مورب، زاویه های تند با هم برابرند، به سادگی می‌توان زاویهٔ بین دو آینه را به‌دست آورد.

$$\beta=2\alpha \Rightarrow 150^\circ=2\alpha \Rightarrow \alpha=75^\circ$$

(فیزیک ۳ – برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۰ تا ۹۴)

۵۳- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کیانی)*

چون تندی نور در محیط اول (هوا) معلوم است، ابتدا زمان طی فاصلهٔ AI را می‌یابیم. دقت کنید، چون تندی و مسیر حرکت ثابت است، از معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت استفاده می‌کنیم:



$$\Delta x_1=v_1t_1 \xrightarrow[v_1=3\times10^8\frac{m}{s}]{\Delta x_1=\overline{AI}=10cm=0/1m} 0/1=3\times10^8t_1$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{10^{-1}}{3\times10^8}=\frac{1}{3}\times10^{-9}s$$

اکنون تندی نور در محیط دوم را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2} \xrightarrow[n_2=1/5\ ,\ n_1=1]{v_1=3\times10^8\frac{m}{s}} \frac{v_2}{3\times10^8}=\frac{1}{1/5}$$

$$\Rightarrow v_2=2\times10^8\frac{m}{s}$$

در این قسمت، زمان طی کردن فاصلهٔ IB را پیدا می‌کنیم:

$$t_2=\frac{\Delta x_2}{v_2} \xrightarrow[v_2=2\times10^8\frac{m}{s}]{\Delta x_2=\overline{IB}=0/1m} t_2=\frac{0/1}{2\times10^8}=\frac{1}{2}\times10^{-9}s$$

در آخر، زمان کل حرکت را حساب می‌کنیم:

$$t_{AB} = t_1 + t_2 = \frac{1}{3}\times 10^{-9} + \frac{1}{2}\times 10^{-9} = \frac{5}{6}\times 10^{-9}\,s$$

$$\xrightarrow{10^{-9}s = 1ns} t_{AB} = \frac{5}{6}\,ns$$

(فیزیک ۳ – برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۹)

۵۴- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود قره‌خانی)*

با استفاده از رابطهٔ $K_{max} = hf - W_0$ و با توجه به اینکه بسامد نور فرودی ۲۵ درصد و بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها، $3eV$ افزایش یافته است، می‌توان نوشت:

$$f_2 = f_1 + \frac{25}{100}f_1 = \frac{125}{100}f_1 \Rightarrow f_2 = \frac{5}{4}f_1$$

$$K_{max(2)} = K_{max(1)} + 3 \xrightarrow{K_{max} = hf - W_0}$$

$$hf_2 - W_0 = hf_1 - W_0 + 3 \Rightarrow hf_2 - hf_1 = 3 \xrightarrow{f_2 = \frac{5}{4}f_1}$$

$$h\times\frac{5}{4}f_1 - hf_1 = 3 \Rightarrow \frac{1}{4}hf_1 = 3 \xrightarrow{h = 4\times 10^{-15}\,eV.s}$$

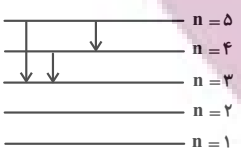
$$\frac{1}{4}\times 4\times 10^{-15}\times f_1 = 3 \Rightarrow f_1 = 3\times 10^{15}\,Hz = 3000\times 10^{12}\,Hz$$

$$\xrightarrow{1THz = 10^{12}Hz} f_1 = 3000\,THz$$

(فیزیک ۳ – آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۲۰)

۵۵- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

چون طول‌موج‌های گسیلی در ناحیهٔ فروسرخ قرار دارند، گذار الکترون به ترازهای $n' = 1$ (رشتهٔ لیمان) و $(n' = 2)$ انجام نمی‌گیرد. بنابراین، با توجه به این‌که ۳ طول‌موج گسیلی وجود دارد، مطابق شکل زیر، باید الکترون در تراز $n = 5$ قرار داشته باشد. در این حالت، دو طول‌موج در رشتهٔ پاشن $(n' = 3)$ و یک طول‌موج در رشتهٔ براکت $(n' = 4)$ است.



(فیزیک ۳ – آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۴)

۵۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیراحمد میرسعید)*

طبق رابطهٔ $E = mc^2$ کاهش جرم هستهٔ برانگیختهٔ $^{A}_{Z}X^{*}$ به انرژی تبدیل می‌شود که برابر است با:

$$E = mc^2 \xrightarrow[c = 3\times 10^8\,\frac{m}{s}]{m = 8\times 10^{-29}\,g = 8\times 10^{-29}\times 10^{-3}\,kg}$$

$$E = 8\times 10^{-29}\times 10^{-3}\times (3\times 10^8)^2$$

$$\Rightarrow E = 8\times 10^{-32}\times 9\times 10^{16} = 72\times 10^{-16}\,J$$

اکنون انرژی را برحسب کیلوالکترون ولت می‌یابیم. چون $1eV = 1/6\times 10^{-19}\,J$ است، داریم:

$$E = 72\times 10^{-16}\,J = 72\times 10^{-16}\,J\times\frac{1eV}{1/6\times 10^{-19}\,J}$$

$$\Rightarrow E = 45\times 10^3\,eV = 45keV$$

(فیزیک ۳ – آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۵)

۵۷- **گزینهٔ «۲»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

روش اول: چون ۸۷/۵ درصد از هسته‌های اولیهٔ مادهٔ پرتوزا واپاشیده شده است، بعد از ۱۸ سال، $(100 - 87/5 = 12/5)$ درصد آن به صورت فعال باقی می‌ماند. بنابراین، داریم:

$$\%100N_0 \xrightarrow{\frac{T_1}{2}} \%50N_0 \xrightarrow{\frac{T_1}{2}} \%25N_0 \xrightarrow{\frac{T_1}{2}} \%12/5N_0$$

می‌بینیم، پس از سه نیمه‌عمر، ۸۷/۵ درصد از هسته‌های اولیهٔ مادهٔ پرتوزا واپاشیده می‌شود. چون سه نیمه‌عمر معادل ۱۸ سال است، می‌توان نوشت:

$$3\frac{T_1}{2} = 18 \text{ سال} \Rightarrow \frac{T_1}{2} = 6 \text{ سال}$$

روش دوم: اگر تعداد هسته‌های اولیه N_0 باشد، تعداد هسته‌های باقیمانده برابر $N = N_0 - \frac{87/5}{100}N_0 = \frac{12/5}{100}N_0$ خواهد بود. بنابراین، با استفاده از رابطهٔ تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده، داریم:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow{N=\frac{12/5}{100}=\frac{1}{8}N_0} \frac{1}{8}N_0 = \frac{N_0}{2^n}$$

$$\Rightarrow 2^n = 8 = 2^3 \Rightarrow n = 3$$

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{t=18\text{ سال}} 3 = \frac{18}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = 6 \text{ سال}$$

(فیزیک ۳ – آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۵۸- **گزینهٔ «۴»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

در حالت اول، بزرگی برایند نیروهایی که از طرف بارهای q_1 و q_2 بر بار Q وارد می‌شود برابر $1/5\,N$ است. از طرف دیگر، چون با نزدیک کردن بار q_2 به بار Q، بار Q به حال تعادل درمی‌آید و فاصلهٔ بار q_2 به بار q_1 کمتر می‌شود، لذا، باید اندازهٔ بار q_1 بزرگ‌تر از بار q_2 باشد تا نیروهایی که q_1 و q_2 به بار Q وارد می‌کنند، هم‌اندازه شوند. بنابراین با استفاده از قانون کولن برای حالت اول و حالت دوم، می‌توان نوشت:

$$F_1 - F_2 = 1/5 \xrightarrow{F=k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}} k\frac{|q_1||Q|}{r_1^2} - k\frac{|q_2||Q|}{r_2^2} = 1/5$$

$$\xrightarrow[q_1>0,\ q_2>0]{r_1=r_2=d} \frac{kq_1|Q|}{d^2} - \frac{kq_2|Q|}{d^2} = 1/5$$

$$\Rightarrow \frac{k|Q|}{d^2}(q_1 - q_2) = 1/5 \qquad (1)$$

برای حالت دوم که بار Q در حال تعادل است، داریم:

$$F_1' = F_2' \Rightarrow \frac{kq_1|Q|}{r_1'^2} = \frac{kq_2|Q|}{r_2'^2} \xrightarrow{\substack{r_1'=d \\ r_2'=d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2}}}$$

$$\frac{q_1}{d^2} = \frac{q_2}{\frac{d^2}{4}} \Rightarrow q_2 = \frac{1}{4}q_1 \xrightarrow{(1)} \frac{k|Q|}{d^2}(q_1 - \frac{1}{4}q_1) = 1/5$$

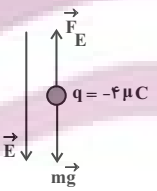
$$\Rightarrow \frac{k|Q|}{d^2} \times \frac{3}{4}q_1 = 1/5 \Rightarrow \frac{k|Q|q_1}{d^2} = 2N$$

$$\xrightarrow{F_1=\frac{k|Q|q_1}{d^2}} F_1 = 2N$$

(فیزیک ۲ – الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۵ تا ۱۰)

۵۹- **گزینهٔ «۲»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

بر ذرهٔ باردار نیروی وزن و نیروی میدان الکتریکی وارد می‌شود. چون ذره معلق و در حال تعادل است، برایند این دو نیرو صفر می‌باشد. از طرف دیگر، چون نیروی وزن ذره رو به پایین است، باید نیروی الکتریکی رو به بالا و هم‌اندازه با نیروی وزن باشد. با توجه به اینکه بر بار الکتریکی منفی در خلاف جهت خط‌های میدان الکتریکی نیروی الکتریکی وارد می‌شود، لذا، چون نیروی الکتریکی رو به بالا است، باید جهت میدان الکتریکی به‌طرف پایین باشد و اندازهٔ آن برابر است با:



$$F_E = mg \xrightarrow{F=|q|E} |q|E = mg \xrightarrow[|q|=4\mu C=4\times10^{-6}C]{m=200g=0/2kg}$$

$$4\times10^{-6}\times E = 0/2\times10 \Rightarrow E = 5\times10^5\,\frac{N}{C}$$

(فیزیک ۲ – الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۲۱)

۶۰- **گزینهٔ «۲»** *(بهنام دیبایی‌اصل)*

از ترکیب رابطه‌های $\sigma = \frac{Q}{A}$، $Q = CV$، $E = \frac{V}{d}$ و $C = \varepsilon_0\frac{A}{d}$ داریم:

ایران‌شناس
توشه‌ای برای موفقیت

$$\sigma=\frac{Q}{A}\xrightarrow{Q=CV}\sigma=\frac{CV}{A}\xrightarrow[V=Ed]{C=\varepsilon_0\frac{A}{d}}$$

$$\sigma=\frac{\varepsilon_0\frac{A}{d}\times Ed}{A}=\varepsilon_0 E$$

(فیزیک ۲ – الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۸)

۶۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیراحمد میرسعید)*

الف) درست است.

ب) درست است.

پ) نادرست است. در مقاومت نوری، با افزایش شدت نور، مقاومت آن کاهش می‌یابد.

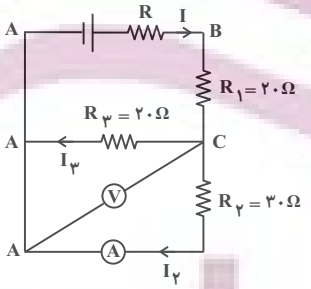
بنابراین، تعداد یک عبارت نادرست است.

(فیزیک ۲ – جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۶۰)

۶۲- **گزینهٔ «۳»** *(غلامرضا محبی)*

ابتدا مقاومت معادل مقاومت‌های موازی ۴۰ اهمی و همچنین ۶۰ اهمی را می‌یابیم و مدار ساده‌تری رسم می‌کنیم:

$$R_1=\frac{R}{n}=\frac{40}{2}=20\Omega\quad,\quad R_2=\frac{60}{2}=30\Omega$$



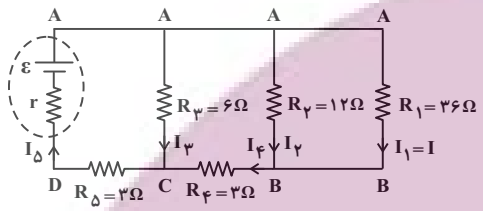
با توجه به شکل، ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های موازی R_2 و R_3 را نشان می‌دهد. چون آمپرسنج جریان عبوری از مقاومت R_2 را نشان می‌دهد، بنابراین با داشتن V_2 (همان عدد ولت‌سنج) و R_2، جریان I_2 که از آمپرسنج عبور می‌کند، به‌دست می‌آید:

$$I_2=\frac{V_2}{R_2}\xrightarrow[R_2=30\Omega]{V_2=50V}I_2=\frac{50}{30}=\frac{5}{3}A$$

(فیزیک ۲ – جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶ و ۷۰ تا ۷۷)

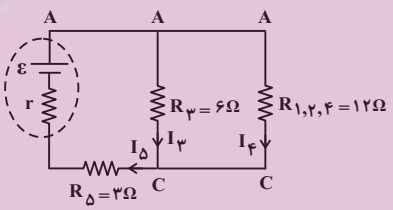
۶۳- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

ابتدا باید مقاومتی که بیشترین توان را مصرف می‌کند، تعیین کنیم. به همین منظور، جریان عبوری از بزرگ‌ترین مقاومت را I می‌نامیم و جریان عبوری از سایر مقاومت‌ها را برحسب I به‌دست می‌آوریم. با توجه به شکل زیر داریم:



$$V_{AB}=R_1I_1=R_2I_2\Rightarrow 36I=12I_2\Rightarrow I_2=3I$$

$$I_4=I_1+I_2=I+3I\Rightarrow I_4=4I$$



$$R_{1,2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{36\times12}{36+12}=9\Omega$$

$$R_{1,2,4}=R_{1,2}+R_4=9+3=12\Omega$$

اکنون جریان عبوری از مقاومت $R_3=6\Omega$ و $R_5=3\Omega$ را می‌یابیم:

$$V_{AC}=R_3I_3=R_{1,2,4}I_4\Rightarrow 6I_3=12\times4I\Rightarrow I_3=8I$$

$$I_5=I_3+I_4=8I+4I\Rightarrow I_5=12I$$

در این قسمت توان مصرفی هر یک از مقاومت‌ها را برحسب I پیدا می‌کنیم:

$$P_1=R_1I_1^2=36I^2\quad,\quad P_2=R_2I_2^2=12\times(3I)^2=108I^2$$

$$P_3=R_3I_3^2=6\times(8I)^2=384I^2$$

$$P_4=R_4I_4^2=3\times(4I)^2=48I^2$$

$$P_5=R_5I_5^2=3\times(12I)^2=432I^2$$

می‌بینیم در مقاومت $R_5=3\Omega$، بیشترین توان مصرف می‌شود. بنابراین، اختلاف پتانسیل دو سر این مقاومت $V_5=24V$ و جریان عبوری از آن برابر است با:

$$I_۵=\frac{V_۵}{R_۵}\xrightarrow[V_۵=۲۴V]{R_۵=۳\Omega} I_۵=\frac{۲۴}{۳}=۸A$$

از طرف دیگر داریم:

$$I_۵=۱۲I\Rightarrow ۸=۱۲I\Rightarrow I=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}A$$

$$I_۲=۳I=۳\times\frac{۲}{۳}\Rightarrow I_۲=۲A$$

در آخر، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_۲=۱۲\Omega$ برابر است با:

$$V_۲=R_۲I_۲=۱۲\times۲=۲۴V$$

(فیزیک ۲ – جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷)

۶۴- **گزینهٔ «۲»** *(پوریا علاقه‌مند)*

اگر پیچهٔ بزرگ‌تر را با اندیس (۱) و پیچهٔ کوچک‌تر را با اندیس (۲) نشان دهیم، ابتدا به‌صورت زیر نسبت تعداد دورهای پیچه‌ها را می‌یابیم. دقت کنید اگر سیمی به طول ℓ را به صورت پیچه‌ای به شعاع R درآوریم، تعداد دورهای پیچه برابر با طول سیم بر محیط یک حلقه است.

$$N=\frac{\ell}{۲\pi R}\Rightarrow\frac{N_۱}{N_۲}=\frac{\ell_۱}{\ell_۲}\times\frac{R_۲}{R_۱}\xrightarrow[\ell_۲=۲\ell\ ,\ R_۲=۲R]{\ell_۱=۶\ell\ ,\ R_۱=۴R}$$

$$\frac{N_۱}{N_۲}=\frac{۶\ell}{۲\ell}\times\frac{۲R}{۴R}=\frac{۳}{۲}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچه، می‌توان نوشت:

$$B=\frac{\mu_۰NI}{۲R}\Rightarrow\frac{B_۱}{B_۲}=\frac{N_۱}{N_۲}\times\frac{I_۱}{I_۲}\times\frac{R_۲}{R_۱}\xrightarrow{I_۱=I_۲}$$

$$\frac{B_۱}{B_۲}=\frac{۳}{۲}\times۱\times\frac{۲R}{۴R}\Rightarrow\frac{B_۱}{B_۲}=\frac{۳}{۴}$$

(فیزیک ۲ – مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹)

۶۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیراحمد میرسعید)*

الف) درست است.

ب) نادرست است.

پ) نادرست است. قطب‌های مغناطیسی و جغرافیایی زمین فاصلهٔ نسبتاً زیادی از یکدیگر دارند. بنابراین، عقربهٔ مغناطیسی قطب‌نما تا حدودی از شمال جغرافیایی انحراف دارد.

ت) نادرست است. میدان مغناطیسی خارجی می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف سوی میدان خارجی، در مواد دیامغناطیسی شود.

بنابراین، تعداد یک عبارت درست است.

(فیزیک ۲ – مغناطیس؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)

۶۶- **گزینهٔ «۳»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

با داشتن $\Phi_۱$ ، $\Phi_۲$ و Δt، به صورت زیر $\bar{\varepsilon}$ را می‌یابیم:

$$\bar{\varepsilon}=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\xrightarrow[\Phi_۱=۱۲\times۱۰^{-۳}Wb\ ,\ \Delta t=۰/۲s]{\Phi_۲=-۱۲\times۱۰^{-۳}Wb\ ,\ N=۱}$$

$$\bar{\varepsilon}=-۱\times\frac{-۱۲\times۱۰^{-۳}-۱۲\times۱۰^{-۳}}{۰/۲}=\frac{۲۴\times۱۰^{-۳}}{۰/۲}=۰/۱۲V$$

(فیزیک ۲ – القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶)

۶۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

باید از مبدل کاهنده استفاده کنیم. بنابراین، با استفاده از رابطهٔ زیر داریم:

$$\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{N_۲}{N_۱}\xrightarrow[V_۱=۲۲۰V]{V_۲=۱۱V\ ,\ N_۱=۸۰۰}\frac{۱۱}{۲۲۰}=\frac{N_۲}{۸۰۰}\Rightarrow N_۲=۴۰$$

(فیزیک ۲ – القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۶ و ۱۲۷)

۶۸- **گزینهٔ «۴»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

ابتدا حجم مکعب مستطیل و حجم مکعب را می‌یابیم. مکعب مستطیل را با اندیس (۱) و مکعب را با اندیس (۲) نشان می‌دهیم:

$$V_۱=۴m\times۵m\times۶m=۱۲۰m^۳$$

$$V_۲=a^۳\xrightarrow{a=۴\mu m=۴\times۱۰^{-۶}m}V_۲=(۴\times۱۰^{-۶})^۳=۶۴\times۱۰^{-۱۸}m^۳$$

اکنون $V_۱$ را بر $V_۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$n=\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{۱۲۰}{۶۴\times۱۰^{-۱۸}}=\frac{۱۲۰\times۱۰^{۱۸}}{۶۴}=\frac{۱۵}{۸}\times۱۰^{۱۸}$$

$$\Rightarrow n=۱/۸۷۵\times۱۰^{۱۸}$$

(فیزیک ۱ – فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۶۹- **گزینهٔ «۲»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

با توجه به نمودار داده شده در عمق $h = ۴۰cm$ از مایع، فشار کل برابر $P = ۱۰۸۸۰۰Pa$ است. بنابراین، ابتدا فشار هوا را برحسب پاسکال می‌یابیم:

$$P = P_۰ + \rho_{مایع} gh \xrightarrow[h=۴۰cm=۰/۴m\ ,\ P=۱۰۸۸۰۰Pa]{\rho_{مایع}=۱/۷\frac{g}{cm^۳}=۱۷۰۰\frac{kg}{m^۳}}$$

$$۱۰۸۸۰۰ = P_۰ + ۱۷۰۰\times ۱۰\times ۰/۴ \Rightarrow ۱۰۸۸۰۰ = P_۰ + ۶۸۰۰$$

$$P_۰ = ۱۰۲۰۰۰Pa$$

اکنون به صورت زیر $P_۰ = ۱۰۲۰۰۰Pa$ را به $cmHg$ تبدیل می‌کنیم. به همین منظور کافی است، ستونی از جیوه را که فشار آن برابر $۱۰۲۰۰۰Pa$ است، بیابیم:

$$P_۰ = \rho_{جیوه} gh \xrightarrow{\rho_{جیوه}=۱۳/۶\frac{g}{cm^۳}=۱۳۶۰۰\frac{kg}{m^۳}}$$

$$۱۰۲۰۰۰ = ۱۳۶۰۰\times ۱۰\times h \Rightarrow h = \frac{۱۰۲۰۰۰}{۱۳۶۰۰۰} = ۰/۷۵m = ۷۵cm$$

$$\Rightarrow P_۰ = ۷۵cmHg$$

(فیزیک ۱ – ویژگی‌های فیزیکی مواد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

۷۰- **گزینهٔ «۴»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

با توجه به اینکه افزایش فشار وارد بر کف ظرف ناشی از وزن آب اضافه شده به ظرف می‌باشد، بنابراین، ابتدا جرم آب اضافه شده را حساب می‌کنیم:

$$m = \rho V \xrightarrow[\rho=۱\frac{g}{cm^۳}]{V=۱L=۱۰۰۰cm^۳} m = ۱\times ۱۰۰۰ = ۱۰۰۰g = ۱kg$$

اکنون به صورت زیر، سطح مقطع بالای ظرف (A') را می‌یابیم:

$$\Delta P = \frac{\Delta F}{A'} \xrightarrow{\Delta F=mg} \Delta P = \frac{mg}{A'}$$

$$\xrightarrow[m=۱kg]{\Delta P=۲۰۰Pa} ۲۰۰ = \frac{۱\times ۱۰}{A'}$$

$$\Rightarrow A' = \frac{۱}{۲۰}m^۲ = \frac{۱}{۲۰}\times ۱۰^۴cm^۲ = ۵۰۰cm^۲$$

در این قسمت، با داشتن سطح مقطع بالای ظرف و حجم اولیهٔ آب، به صورت زیر، سطح مقطع کف ظرف را پیدا می‌کنیم:

$$V_{کل} = A'\times h' + A\times h \xrightarrow[V_{کل}=۲L=۲\times ۱۰۰۰=۲۰۰۰cm^۳]{h'=۲cm\ ,\ h=۵cm}$$

$$۲۰۰۰ = ۵۰۰\times ۲ + A\times ۵ \Rightarrow ۲۰۰۰ - ۱۰۰۰ = ۵A$$

$$\Rightarrow ۱۰۰۰ = ۵A \Rightarrow A = ۲۰۰cm^۲$$

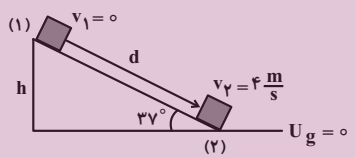
در آخر داریم:

$$\frac{A}{A'} = \frac{۲۰۰}{۵۰۰} = ۰/۴$$

(فیزیک ۱ – ویژگی‌های فیزیکی مواد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

با در نظر گرفتن سطح افقی به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی، جسم در نقطهٔ (۱) فقط انرژی پتانسیل گرانشی و در نقطهٔ (۲) فقط انرژی جنبشی دارد. بنابراین، با توجه به اینکه تغییر انرژی مکانیکی جسم برابر کار نیروی اصطکاک است، می‌توان نوشت:



$$W_{mg} = mgh \xrightarrow[m=۲kg]{W_{mg}=۲۴J} ۲۴ = ۲\times ۱۰\times h \Rightarrow h = ۱/۲m$$

$$\sin ۳۷^\circ = \frac{h}{d} \xrightarrow{\sin ۳۷^\circ=۰/۶} ۰/۶ = \frac{۱/۲}{d} \Rightarrow d = ۲m$$

$$E_۲ - E_۱ = W_{f_k} \Rightarrow (\overset{\circ}{U_۲} + K_۲) - (U_۱ + \overset{\circ}{K_۱}) = f_k d\cos ۱۸۰^\circ$$

$$\frac{۱}{۲}mv_۲^۲ - mgh = f_k d\times (-۱) \xrightarrow{v_۲=۴\frac{m}{s}}$$

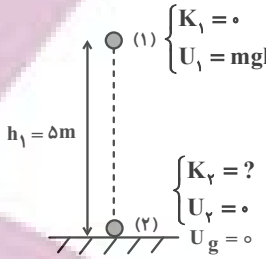
$$\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۱۶ - ۲\times ۱۰\times ۱/۲ = -f_k\times ۲ \Rightarrow ۱۶ - ۲۴ = -۲f_k$$

$$\Rightarrow -۸ = -۲f_k \Rightarrow f_k = ۴N$$

(فیزیک ۱ – کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

۷۲- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی جنبشی جسم در لحظهٔ برخورد به زمین را می‌یابیم:

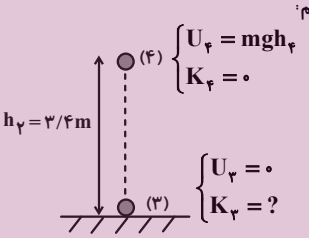


$$E_2 = E_1 \Rightarrow K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$

$$\Rightarrow K_2 + 0 = 0 + mgh_1 \xrightarrow[h=5m]{m=0/4kg}$$

$$K_2 = 0/4 \times 10 \times 5 = 20J$$

اکنون پایستگی انرژی مکانیکی را برای برگشت جسم به طرف بالا می‌نویسیم:



$$E_3 = E_4 \Rightarrow U_3 + K_3 = U_4 + K_4 \Rightarrow 0 + K_3 = mgh_4 + 0$$

$$\xrightarrow[m=0/4kg]{h_4=3/4m} K_3 = 0/4 \times 10 \times 3/4 = 13/6J$$

در آخر درصد تغییرات انرژی جنبشی را پیدا می‌کنیم:

$$\text{درصد تغییرات انرژی جنبشی} = \frac{K_3 - K_2}{K_2} \times 100$$

$$= \frac{13/6 - 20}{20} \times 100 = -32\%$$

(فیزیک ۱ – کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

با توجه به اینکه فشارسنج، فشار پیمانه‌ای $(P_{\text{گاز}} - P_0)$ را نشان می‌دهد، ابتدا فشار کل درون لاستیک را می‌یابیم:

$$P_{\text{پیمانه‌ای}} = P_{\text{گاز}} - P_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 214 = P_1 - P_0 \Rightarrow P_1 = P_0 + 214(kPa) \\ 241 = P_2 - P_0 \Rightarrow P_2 = P_0 + 241(kPa) \end{cases}$$

اکنون، با توجه به این‌که حجم هوای داخل لاستیک‌ها ثابت است، اگر هوای داخل لاستیک را یک گاز آرمانی فرض کنیم، داریم:

$$\frac{P}{T} = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \xrightarrow[T_2=37+273=310K]{T_1=12+273=285K}$$

$$\frac{P_0 + 214}{285} = \frac{P_0 + 241}{310}$$

$$\Rightarrow 310P_0 + 310 \times 214 = 285P_0 + 285 \times 241$$

$$\Rightarrow 25P_0 = 285 \times 241 - 310 \times 214$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{5(57 \times 241 - 62 \times 214)}{25}$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{57 \times 241 - 62 \times 214}{5} = 93/8kPa$$

(فیزیک ۱ – دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۳)

۷۴- **گزینهٔ «۱»** *(امیراحمد میرسعید)*

چون دمای اولیه و دمای نهایی گازها یکسان‌اند، تغییر انرژی درونی گازها برابر است و داریم:

$$\Delta U_A = \Delta U_B = \Delta U_C$$

$$\xrightarrow{\Delta U = Q + W} Q_A + W_A = Q_B + W_B = Q_C + W_C$$

$$\xrightarrow[W_C > 0]{W_A < 0 \,,\, W_B = 0} Q_A > Q_B > Q_C$$

(فیزیک ۱ – ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۹)

۷۵- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی کیانی)*

طبق قانون دوم ترمودینامیک به بیان یخچالی، ممکن نیست گرما به‌طور خودبه‌خود از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر منتقل شود. یعنی برای انتقال گرما از جسم سرد به جسم گرم، باید کار انجام داد. بنابراین، در یخچال $W > 0$ ، $Q_L > 0$ و $Q_H < 0$ است.

با توجه به جدول می‌بینیم، وسیله‌های B و D که در آن‌ها $Q_H > 0$ است، نمی‌توانند یخچال باشند. از طرف دیگر، وسیلهٔ C بدون انجام کار، گرما را از منبع دما پایین به منبع دما بالا منتقل کرده است. بنابراین، وسیلهٔ A که در آن $W > 0$ ، $Q_L > 0$ و $Q_H < 0$ است، یخچال می‌باشد.

(فیزیک ۱ – ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۷)

شیمی

۷۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

عبارت اول و سوم درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

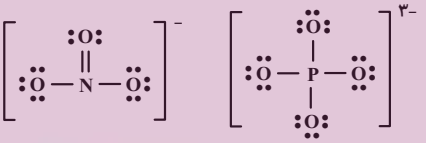
مورد دوم) ایزوتوپ $^{235}_{92}U$ (که ایزوتوپ سبک‌تری از $^{238}_{92}U$ است) به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مورد چهارم) نخستین عنصر ساخته شده در راکتور هسته‌ای $^{99}_{43}Tc$ است که دارای ۴۳ پروتون و ۵۶ نوترون است که ۱۳ واحد با یکدیگر اختلاف دارند.

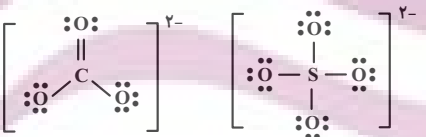
(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۶ تا ۸)

۷۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی‌سودکلایی)*

فسفات: PO_4^{3-} نیترات: NO_3^-



سولفات: SO_4^{2-} کربنات: CO_3^{2-}



هیدروکسید: OH^-

نسبت جفت الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در فسفات برابر ۳، در نیترات برابر ۲، در سولفات برابر ۳، در کربنات برابر ۲ و در هیدروکسید برابر ۳ است. ترکیب یونی حاصل از یون‌های بالا با یون استرانسیم به صورت زیر است:

$Sr_3(PO_4)_2$ ، $Sr(NO_3)_2$ ، $SrSO_4$ ، $SrCO_3$ ، $Sr(OH)_2$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۱ و ۹۲)

۷۸- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به نماد این یون می‌توان گفت: $n+p=83$

از طرفی طبق صورت سؤال $n-e=12$ خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$n-(p+1)=12 \Rightarrow n-p=13$$

به این ترتیب عدد اتمی آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} n+p=83 \\ n-p=13 \end{cases} \Rightarrow 2n=96 \Rightarrow n=48\ ,\ p=35$$

آرایش الکترونی این عنصر عبارت است از:

$$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^5$$

این عنصر ۷ الکترون ظرفیتی ($4s^2\ 5p^5$) داشته و در زیرلایه‌های s (با $l=0$) خود ۸ الکترون دارد.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴)

۷۹- **گزینهٔ «۳»** *(یاسر راش)*

قسمت اول:

$$100g\ CaCO_3 \times \frac{50}{100} \times \frac{1mol\ CaCO_3}{100g\ CaCO_3} \times \frac{1mol\ CO_2}{1mol\ CaCO_3}$$

$$\times \frac{28L\ CO_2}{1mol\ CO_2} \times \frac{60}{100} = 8/4L\ CO_2$$

قسمت دوم: در ۱۰۰ گرم کلسیم کربنات، ۵۰ گرم ناخالصی و ۵۰ گرم کلسیم کربنات خالص وجود دارد. از ۵۰ گرم کلسیم کربنات خالص، ۶۰ درصد آن معادل ۳۰ گرم تجزیه شده و ۲۰ گرم آن تجزیه نشده باقی می‌ماند. اکنون برای به دست آوردن درصد جرمی کلسیم کربنات تجزیه نشده در مخلوط جامد باقی‌مانده باید جرم مخلوط جامد را به دست آوریم:

جرم جامد باقی‌مانده = جرم اولیهٔ $CaCO_3$ − جرم گاز خارج شده

$$30g\ CaCO_3 \times \frac{1mol\ CaCO_3}{100g\ CaCO_3} \times \frac{1mol\ CO_2}{1mol\ CaCO_3}$$

$$\times \frac{44g\ CO_2}{1mol\ CO_2} = 13/2g$$

جرم جامد باقی‌مانده $= 100 - 13/2 = 86/8g$

درصد جرمی $CaCO_3$ در مخلوط جامد باقی‌مانده $= \frac{۲۰}{۸۶/۸} \times ۱۰۰ \simeq ٪۲۳$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۸۰- **گزینهٔ «۲»** *(کامران جعفری)*

راه حل اول:

جرم هریک از مواد را برابر x گرم در نظر می‌گیریم:

$$?LCO_2 = xgCaCO_3 \times \frac{۱molCaCO_3}{۱۰۰gCaCO_3} \times \frac{۱molCO_2}{۱molCaCO_3}$$

$$\times \frac{۲۲/۴LCO_2}{۱molCO_2} = ۰/۲۲۴xLCO_2$$

$$?LO_2 = xgKClO_3 \times \frac{۱molKClO_3}{۱۲۲/۵gKClO_3} \times \frac{۳molO_2}{۲molKClO_3}$$

$$\times \frac{۲۲/۴LO_2}{۱molO_2} \simeq ۰/۲۷۴xLO_2$$

جمع حجم گازهای تولیدشده $= ۰/۲۲۴xL + ۰/۲۷۴xL = ۰/۴۹۸xL$

$$۰/۴۹۸x = ۳۰/۵ \Rightarrow x \simeq ۶۱/۲۴g$$

$$?gKCl = ۶۱/۲۴gKClO_3 \times \frac{۱molKClO_3}{۱۲۲/۵gKClO_3} \times \frac{۲molKCl}{۲molKClO_3}$$

$$\times \frac{۷۴/۵gKCl}{۱molKCl} \simeq ۳۷/۲۴gKCl$$

$$\frac{\text{جرم } KCl}{\text{جرم } CaCO_3} = \frac{۳۷/۲۴}{۶۱/۲۴} \simeq ۰/۶۱$$

راه حل دوم:

$$?gKCl = xgKClO_3 \times \frac{۱molKClO_3}{۱۲۲/۵gKClO_3} \times \frac{۲molKCl}{۲molKClO_3}$$

$$\times \frac{۷۴/۵gKCl}{۱molKCl} \simeq ۰/۶۱xgKCl$$

نسبت خواسته شده $= \frac{۰/۶۱x}{x} = ۰/۶۱$

(شیمی ۱، ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۸۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به فرمول شیمیایی ترکیب‌های داده شده، تنها مورد درست گزینهٔ آخر خواهد بود:

گزینه	ترکیب اول	ترکیب دوم	نسبت تعداد اتم‌ها
۱	$Cu(NO_3)_2$	Na_2CO_3	$\frac{۹}{۶} = ۱/۵$
۲	Li_2O	$Al(OH)_3$	$\frac{۳}{۷}$
۳	$Cr_2(SO_4)_3$	$Ba(HCO_3)_2$	$\frac{۱۷}{۱۱}$
۴	$(NH_4)_3PO_4$	Ca_3N_2	$\frac{۲۰}{۵} = ۴$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۱ و ۹۲)

۸۲- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

ابتدا لازم است حجم مولی گازها در شرایط داده شده را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{۱\times۲۲/۴}{۲۷۳} = \frac{۱/۰۲۵\times V_2}{(۱۲۷+۲۷۳)} \Rightarrow V_2 = ۳۲L$$

از آنجا که در شرایط گفته شده یک مول از هر گازی دارای حجمی معادل با ۳۲ لیتر است، حجم گازهای CO_2 و H_2O تولید شده در طی این واکنش برابر خواهد بود با:

$$۵/۷g\ C_8H_{18} \times \frac{۱mol\ C_8H_{18}}{۱۱۴g\ C_8H_{18}} \times \frac{(۱۶+۱۸)mol\ \text{گاز}}{۲mol\ C_8H_{18}}$$

$$\times \frac{۳۲L\ \text{گاز}}{۱mol\ \text{گاز}} = ۲۷/۲L\ \text{گاز}$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۱)

۸۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: تأثیر دما بر انحلال‌پذیری C کمتر از سایر نمک‌ها است، چرا که میزان تغییر انحلال‌پذیری در آن در بازهٔ دمایی مشخص شده کمتر است.

گزینهٔ «۲»: انحلال C در آب برخلاف سه ترکیب دیگر گرماده است. به این ترتیب با حل شدن آن در آب، دمای محلول افزایش می‌یابد.

گزینهٔ «۳»: در ۱۳۳ گرم محلول سیرشده از D در دمای $۴۰^\circ C$، ۱۰۰ گرم آب و ۳۳ گرم نمک D وجود دارد. با کاهش دادن دمای آن تا $۲۰^\circ C$، مقدار آب ثابت بوده ولی مقدار نمک D به ۱۴ گرم می‌رسد. بنابراین ۱۹ گرم از جرم آن کاسته خواهد شد.

گزینهٔ «۴»: در دمای $20^\circ C$ می‌توان ۶۰ گرم نمک A را در ۱۰۰ گرم آب حل کرده و محلول سیرشده تهیه کرد. بنابراین ۲۰۰ گرم آب گنجایش ۱۲۰ گرم نمک را دارد. حال اگر ۳۰۰ گرم از محلول در این دما دارای ۲۰۰ گرم آب باشد، یعنی ۱۰۰ گرم نمک را در خود حل کرده است و محلولی سیرنشده خواهد بود.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳)

۸۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

$$2KClO_3(s) \xrightarrow{\Delta} 2KCl(s) + 3O_2(g)$$

کاهش جرم ایجاد شده به جرم O_2 تولید شده مربوط است.

$$?g\ KCl = 38/4\ g\ O_2 \times \frac{1\ mol\ O_2}{32\ g\ O_2} \times \frac{2\ mol\ KCl}{3\ mol\ O_2}$$

$$\times \frac{74/5\ g\ KCl}{1\ mol\ KCl} = 59/6\ g\ KCl$$

با توجه به انحلال‌پذیری KCl در دمای $75^\circ C$ می‌توان گفت با ۵۰ گرم KCl می‌توان ۱۵۰ گرم محلول سیرشدهٔ آن را تهیه نمود. بنابراین:

$$59/6\ g\ KCl \times \frac{150\ g\ محلول}{50\ g\ KCl} = 178/8\ g\ محلول$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳)

۸۵- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

ابتدا با توجه به آرایش الکترونی یون‌های داده شده می‌توانیم آرایش الکترونی عنصرهای مربوطه را مشخص کنیم.

$$A^{2+}: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^6$$

$$\Rightarrow A: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^6\ 4s^2$$

$$B^{2-}: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6 \Rightarrow B: 1s^2\ 2s^2\ 2p^4$$

$$C^{3+}: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6$$

$$\Rightarrow C: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^1\ 4s^2$$

فلز A آهن است که در بین فلزهای دیگر دارای بیشترین مصرف سالیانه است. B و C با یکدیگر ترکیبی یونی (و نه مولکولی!) با فرمول شیمیایی C_2B_3 تشکیل می‌دهند. عنصر C نخستین عنصر از دورهٔ چهارم جدول دوره‌ای است که زیرلایهٔ d آن دارای الکترون است. A یک فلز است و امکان تشکیل مولکول دو یا چند اتمی را ندارد.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۵ تا ۱۸)

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحهٔ ۵۶)

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(حمید زنجی)*

در واکنش A واکنش‌پذیری Na بیشتر از Fe است. در واکنش B، واکنش‌پذیری Cu کمتر از Fe است. در واکنش C، واکنش‌پذیری Mg بیشتر Ti است. واکنش D، جزو واکنش‌های استخراج آهن است. بنابراین واکنش‌های A، C و D به‌طور طبیعی انجام می‌شوند.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۵)

۸۷- **گزینهٔ «۴»** *(یاسر راش)*

اگر x مول اتان (C_2H_6) و y مول هپتان (C_7H_{16}) داشته باشیم، داریم:

$$\frac{\text{درصد جرمی کربن}}{\text{درصد جرمی هیدروژن}} = \frac{(2x+7y)\times 12}{6x+16y} = 4/5$$

$$\Rightarrow 48x + 168y = 54x + 144y$$

$$\Rightarrow 6x = 24y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{24}{6} = 4$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۸۸- **گزینهٔ «۱»** *(فرزاد رضایی)*

تنها عبارت دوم صحیح است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: استفاده از آمونیاک به عنوان کود شیمیایی برای تأمین اتم نیتروژن مورد نیاز گیاه است.

عبارت دوم: طبق متن کتاب درسی درست است.

عبارت سوم: مولکول آمونیاک برخلاف مولکول کربن دی‌اکسید، قطبی است و گشتاور دوقطبی آن‌ها مانند هم نیست.

عبارت چهارم: شرایط بهینه فرایند هابر شامل دمای $۴۵۰^\circ C$ و فشار $۲۰۰ atm$ و استفاده از کاتالیزگر آهن است.

(شیمی - ترکیبی؛ شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۰۱ و ۱۰۲)

۸۹- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

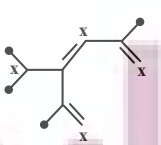
با توجه به معادلهٔ واکنش انجام شده برای تعیین جرم مورد نیاز از KNO_3 ناخالص برای تولید مقدار مورد نظر از K_2O با خلوص داده شده می‌توان گفت:

$$۴۷g\ K_2O_{\text{عملی}} \times \frac{۱۰۰g\ K_2O_{\text{نظری}}}{۴۰g\ K_2O_{\text{عملی}}} \times \frac{۸۰\ g\ K_2O_{\text{خالص}}}{۱۰۰g\ K_2O_{\text{ناخالص}}} \times \frac{۱mol\ K_2O}{۹۴g\ K_2O} \times \frac{۴mol\ KNO_3}{۲mol\ K_2O} \times \frac{۱۰۱g\ KNO_3}{۱mol\ KNO_3} \times \frac{۱۰۰g\ KNO_{3\ \text{ناخالص}}}{۵۰g\ KNO_{3\ \text{خالص}}} = ۴۰۴g\ KNO_{3\ \text{ناخالص}}$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۹۰- **گزینهٔ «۴»** *(آروین شجاعی)*

گروه‌های CH_3 را با ● و گروه‌های CH و CH_2 را با x نمایش می‌دهیم.



$$\frac{CH_3}{CH+CH_2} = \frac{۴}{۴} = ۱$$

با توجه به داشتن ۱۱ کربن فرمول آلکان آن $C_{11}H_{24}$ می‌شود که به ازای هر پیوند دوگانه یک جفت هیدروژن کم می‌شود. پس فرمول آن برابر $C_{11}H_{18}$ خواهد بود.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۴۲)

۹۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی‌سودکلایی)*

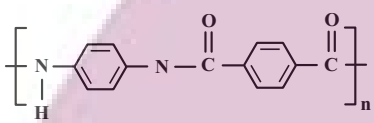
همهٔ موارد درست هستند.

دی‌آمین سازنده: $H_2N-C_6H_4-NH_2$

دی اسید سازنده: $HOOC-C_6H_4-COOH$

$$\Rightarrow \text{اختلاف جرم مولی} = ۵۸g.mol^{-1}$$

به دلیل آزادسازی آب در این فرایند جرم این پلیمر از مجموع جرم مونومرهای سازندهٔ آن کمتر است.



$$\Rightarrow ۸n \text{ پیوند دوگانه}$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۴ و ۱۱۵)

۹۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای آب داده شده برابر است با:

$$Q = mc\Delta\theta = ۱۸۸g \times ۴\frac{J}{g.^\circ C} \times ۲۵^\circ C = ۱۸۸۰۰J$$

از طرفی گرمای واکنش تجزیهٔ هیدرازین نیز عبارت است از:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \left[\begin{matrix}\text{مجموع آنتالپی پیوند}\\ \text{فراورده‌ها}\end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix}\text{مجموع آنتالپی پیوند}\\ \text{واکنش‌دهنده‌ها}\end{matrix}\right]$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \Delta H_{(N-N)} + ۴\Delta H_{(N-H)} - \Delta H_{(N\equiv N)} - ۲\Delta H_{(H-H)}$$

$$= ۱۵۹ + ۴(۳۹۱) - ۹۴۵ - ۲(۴۳۶) = -۹۴kJ = -۹۴۰۰۰J$$

بنابراین جرم هیدرازین مورد نیاز برای فراهم کردن ۱۸۸۰۰ ژول گرمای مورد نیاز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$۱۸۸۰۰J \times \frac{۱mol\ N_2H_4}{۹۴۰۰۰J} \times \frac{۳۲g\ N_2H_4}{۱mol\ N_2H_4} = ۶/۴g$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۹۳- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا جشانی‌پور)*

عوامل مؤثر بر سرعت در هر گزینه به صورت زیر است:

گزینهٔ «۱»: سطح تماس – غلظت

گزینهٔ «۲»: غلظت – غلظت

گزینهٔ «۳»: دما – سطح تماس

گزینهٔ «۴»: غلظت – افزودن سدیم تأثیری بر سرعت ندارد.

(شیمی ۲، در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۱)

۹۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

ابتدا سرعت متوسط مصرف $NOCl$ را از دقیقهٔ ۱۰ تا ۱۲ (که سرعت واکنش ثابت مانده است) به دست می‌آوریم:

$$\bar{R}_{NOCl}=\frac{|0/8-0/9|\,mol}{12-10\,min}=0/05\,mol.min^{-1}$$

با گذشت ۱۲ دقیقه از شروع واکنش از ۸ مول $NOCl$ اولیه مقدار ۰/۸ مول باقی مانده است که باید با سرعت ثابت $0/05\,mol.min^{-1}$ مصرف شود. بنابراین زمان مورد نیاز برای این کار برابر است با:

$$0/8\,mol\times\frac{1\,min}{0/05\,mol}=16\,min$$

به این ترتیب زمان کل مصرف $NOCl$ برابر خواهد بود با:

$$12+16=28\,min$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)

۹۵- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین مسلمی)*

هر دو مولکول یک گروه عاملی استری دارند و هر چه جرم بالاتری داشته باشند در قسمت غیرقطبی که شامل بخش هیدروکربنی می‌شود نیروی بین مولکولی افزایش می‌یابد و نقطهٔ جوش نیز افزایش می‌یابد. پس نقطهٔ جوش $B > A$ است. هر چه بخش هیدروکربنی بزرگ‌تر باشد انحلال‌پذیری آن در آب کمتر است. زیرا بخش هیدروکربنی ناقطبی است و در آب حل نمی‌شود و انحلال آن در هگزان که ناقطبی است بیشتر می‌شود.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۱)

۹۶- **گزینهٔ «۲»** *(صلاح‌الدین ابراهیمی)*

بررسی موارد:

الف) اتیلن گلیکول یا ضد یخ دارای دو گروه عاملی هیدروکسیل است نه هیدروکسید.

ب) صحیح است.

پ) اوره دارای فرمول $CO(NH_2)_2$ است.

ت) بنزین با فرمول C_8H_{18}، ۸۴ درصد جرم خود را به کربن اختصاص داده است.

$$\text{درصد جرمی کربن}=\frac{\text{جرم کربن}}{\text{کل}}\times 100=$$

$$=\frac{8\times 12}{114}\times 100\simeq 84\%$$

ث) روغن زیتون با فرمول $C_{57}H_{104}O_6$ و چربی کوهان شتر با فرمول $C_{57}H_{110}O_6$ در ۶ هیدروژن با هم تفاوت دارند. بنابراین جرم مولی روغن زیتون ۶ واحد از چربی کوهان شتر کمتر است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۴ تا ۶)

۹۷- **گزینهٔ «۴»** *(رضا سلیمانی)*

در ابتدا غلظت ppm را به مولاریته تبدیل می‌کنیم.

$$\text{مولاریته}=\frac{360\,g\times\frac{1\,mol}{60\,g}}{10^6\,g\times\frac{1\,mL}{1/2\,g}\times\frac{1\,L}{1000\,mL}}=72\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

$$CH_3COOH\overset{\text{آب}}{\rightleftarrows}CH_3COO^-+H_3O^+$$

	CH_3COOH	CH_3COO^-	H_3O^+
	$x+72\times10^{-4}$	0	0
	$-x$	$+x$	$+x$
	72×10^{-4}	$+x$	$+x$

$$K_a=\frac{x^2}{72\times10^{-4}}=5\times10^{-5}$$

توشه‌ای برای موفقیت

$x^۲ = ۳۶\times۱۰^{-۸} \Rightarrow x = ۶\times۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱}$

$\text{مول} = ۶\times۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱}\times ۰/۲ = ۱/۲\times۱۰^{-۴}$

$pH = -\log[H_۳O^+] = -\log ۶\times۱۰^{-۴} = ۴ - \log ۶ = ۳/۲$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۸)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** *(علی رفیعی)*

$Y = F \;،\; M = Br \;،\; X = Cl$

الف) درست، غلظت H^+ در محلول HM از HY بیشتر و سرعت واکنش نیز بیشتر است.

ب) درست

$pH = ۳ \;،\; \text{حجم نهایی محلول} = ۴۰۰mL$

$[H^+] = ۱۰^{-۳} \qquad [H^+] = \frac{۱}{۲}\times۱۰^{-۳} \Rightarrow pH = -\log ۵\times۱۰^{-۴} = ۳/۳$

توجه کنید که تنها غلظت H^+ تغییر می‌کند.

پ) نادرست، اسید HBr از HF قوی‌تر است.

ت) نادرست $Mg + ۲HF \rightarrow MgF_۲ + H_۲$

حجم گاز تولیدی به ازای مول یکسان از Mg با مقدار کافی اسید برابر است، فقط سرعت گاز تولیدی در واکنش I بیشتر از واکنش II است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۵)

۹۹- **گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

بررسی موارد:

الف) درست، در همهٔ محلول‌های اسیدی غلظت $[H^+]$ از $[OH^-]$ بیشتر است.

ب) نادرست، HF اسیدی ضعیف با $\alpha < ۱$ است.

پ) نادرست، غلظت‌ها ثابت می‌شوند، نه برابر!

ت) نادرست، مواد خروجی از معده دارای خاصیت اسیدی هستند، برای خنثی‌سازی خاصیت اسیدی آن جهت جذب مواد لازم در خون باید pH رودهٔ کوچک بازی باشد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۸)

۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** *(فاضل قهرمانِ فرد)*

حالت اول:

$H_۲(g) + \frac{۱}{۲}O_۲(g) \rightarrow H_۲O(g)$ الکترون مبادله شده $= ۲e$

حالت دوم:

$CH_۴(g) + ۲O_۲(g) \rightarrow CO_۲(g) + ۲H_۲O(g)$

الکترون مبادله شده $= ۸e$

بررسی موارد:

مورد اول: نادرست، استفاده از متان باعث تولید $CO_۲$ و افزایش ردپای آن می‌شود.

مورد دوم: درست، استفاده از یک مول $CH_۴$ تعداد ۸ مول الکترون ولی هیدروژن ۲ مول الکترون مبادله می‌کند.

مورد سوم: نادرست، هیدروژن آب بیشتری تولید می‌کند.

مورد چهارم: نادرست، در هر دو حالت سلول گالوانی است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

۱۰۱- **گزینهٔ «۳»** *(حسن رحمتی کوکنده)*

بررسی موارد: گونهٔ I مربوط به $_{۲۳}V^{۵+}$ و گونهٔ II مربوط به $_{۳۰}Zn$ می‌باشد.

۱) گونهٔ II یعنی $_{۳۰}Zn$ فقط یون $Zn^{۲+}$ با عدد اکسایش ۲+ دارد.

۲) $V^{۵+}$ به رنگ زرد دیده می‌شود.

۳) در واکنش Zn با V^{5+}، Zn الکترون از دست می‌دهد و نقش کاهنده دارد اما V^{5+} الکترون جذب می‌کند و نقش اکسنده دارد.

۴) گونهٔ I یا V^{5+} فقط می‌تواند الکترون جذب کند و فقط نقش اکسنده دارد.

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر و زیبایی و ماندگاری؛ صفحهٔ ۸۴)

۱۰۲- **گزینهٔ «۴»** *(جعفر پازوکی)*

با توجه به این‌که معمولاً هر چه انرژی فروپاشی شبکهٔ بلور بیشتر باشد نقطهٔ ذوب ترکیب یونی بیشتر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت بیشترین تفاوت دمای ذوب بین دو ترکیبی باشد که بیشترین و کمترین انرژی فروپاشی یونی را دارند.

مقایسهٔ انرژی شبکه: $MgO > CaO > NaCl > KCl$

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر و زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۱)

۱۰۳- **گزینهٔ «۱»** *(حسین ناصری‌ثانی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: با توجه به رابطهٔ ppm مقدار گاز اوزون را در یک کیلوگرم (۱۰۰۰ گرم) هوای این شهر در ساعت ۱۰ صبح محاسبه می‌کنیم:

$$۰/۱۲ = \frac{x}{۱۰۰۰g} \times ۱۰^{۶} \Rightarrow x = ۱/۲ \times ۱۰^{-۴} g (۰/۰۰۰۱۲ g)$$

(هر کیلوگرم هوای این شهر در ساعت ۱۰ صبح دارای ۰/۱۲ میلی‌گرم گاز اوزون است.)

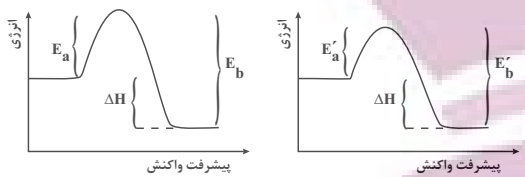
گزینهٔ «۲»: گاز $NO_۲$ رنگ قهوه‌ای دارد و موجب می‌شود هوای آلوده به رنگ قهوه‌ای دیده شود.

گزینهٔ «۳»: با توجه به نمودار، از ساعت حدود ۹ صبح با کاهش مقدار گاز $NO_۲$، مقدار گاز $O_۳$ افزایش می‌یابد.

گزینهٔ «۴»: گاز NO واکنش‌پذیری زیادی دارد و با گاز اکسیژن واکنش داده و به گاز $NO_۲$ تبدیل می‌شود.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحهٔ ۹۲)

۱۰۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا زهره‌وند)*



در حضور کاتالیزگر — بدون حضور کاتالیزگر

$$E'_a = \frac{۱}{۴} E'_b \qquad E_a = \frac{۱}{۳} E_b \Rightarrow E_b = ۳E_a$$

فرض می‌کنیم که پس از بهره‌گیری از کاتالیزگر، انرژی فعال‌سازی در هر دو جهت به اندازهٔ x کاهش می‌یابد.

$$E_a - x = \frac{۱}{۴}(E_b - x) \Rightarrow E_a - x = \frac{۳}{۴}E_a - \frac{x}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}E_a = \frac{۳}{۴}x \Rightarrow E_a = ۳x \Rightarrow x = \frac{E_a}{۳}$$

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{x}{E_a} \times ۱۰۰ = \frac{\frac{E_a}{۳}}{E_a} \times ۱۰۰ \simeq \%۳۳/۳$$

(شیمی ۳، شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۷)

۱۰۵- **گزینهٔ «۲»** *(سیدرضا رضوی)*

موارد «ب» و «ت» درست هستند.

بررسی موارد نادرست:

الف) در فرایند سنتز، مواد جدید از مواد ساده‌تری تولید می‌شوند.

پ) برای سنتز یک استر از واکنش الکل با یک اسید آلی در شرایط مناسب بهره می‌برند.

ث) اتیلن $(C_۲H_۴)$ یکی از مهم‌ترین خوراک‌ها در صنایع پتروشیمی است.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۳)

توشه‌ای برای موفقیت