ایران توشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود گام به گام
- دانلود آزمون گاج و قلم چی و سنجش
- دانلود فیلم و مقاله آنلیزشی
- کنکور و مشاوره

IranTooshe.Ir

@irantooshe

IranTooshe

✱ مجانب ها ✱

انواع مجانب { قائم / افقی / مایل

تعریف مجانب قائم:

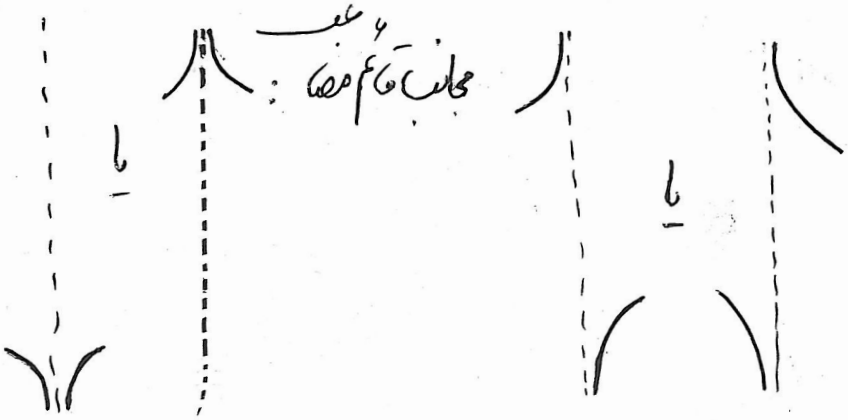
خط $x=a$، مجانب قائم منحنی $y=f(x)$ می‌نامیم، هرگاه با نزدیک شدن x به a، منحنی به $+\infty$ یا $-\infty$ برود. به عبارتی دیگر:

$$\text{if } x \longrightarrow a \Longrightarrow y \longrightarrow \pm\infty$$

خط $x=a$ مجانب قائم

$\lim_{x\to a^+} y = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to a^-} y = +\infty$

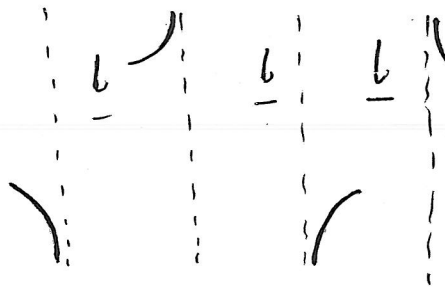
مجانب قائم ساده:



مجانب قائم مضاعف:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

مجانب قائم یک طرفه:



برای محاسبه‌ی مجانب قائم:

* $x=a$ باید در دامنه‌ی تعریف تابع یا حداقل در سر بازه‌ی تعریف باشد

یعنی حداقل a^+ یا a^- عضو دامنه‌ی تعریف تابع باشد

* در توابع کسری:

ریشه‌ی مخرج کسر مجانب قائم است به شرطی که:

① ریشه‌ی مخرج کسر زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج یا آنتی لگاریتم را منفی نکند

② نباید ریشه‌ی مخرج کسر داخل Aresin و Arccos را بیشتر از 1 یا کمتر از -1 کند

③ نباید ریشه‌ی مخرج کسر صفر مطلق باشد

در توابعی که [ ] دارند اتفاق می‌افتد

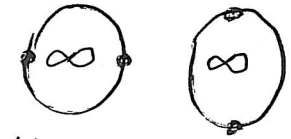
④ نباید ریشه‌ی مخرج کسر، ریشه‌ی صورت کسر هم باشد $\left(\frac{0}{0}\right)$ در این حالت باید از تابع حد بگیریم اگر جواب حد ∞ شد ق ق است

تذکر: اصولاً اگر $x=a$ ریشه‌ی مشترک صورت و مخرج باشد و مرتبه‌ی آن در مخرج از صورت بیشتر باشد، در این صورت $x=a$ مجانب قائم خواهد بود

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

* در توابع گویا ریشه‌های صورت کسر و هم ریشه‌های مخرج کسر داخل لگاریتم مجانب قائم است (با شرط این که داخل لگاریتم منفی نشود)

* در توابع $\tan u$ و $\cot u$



$u = k\pi$ $\quad u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

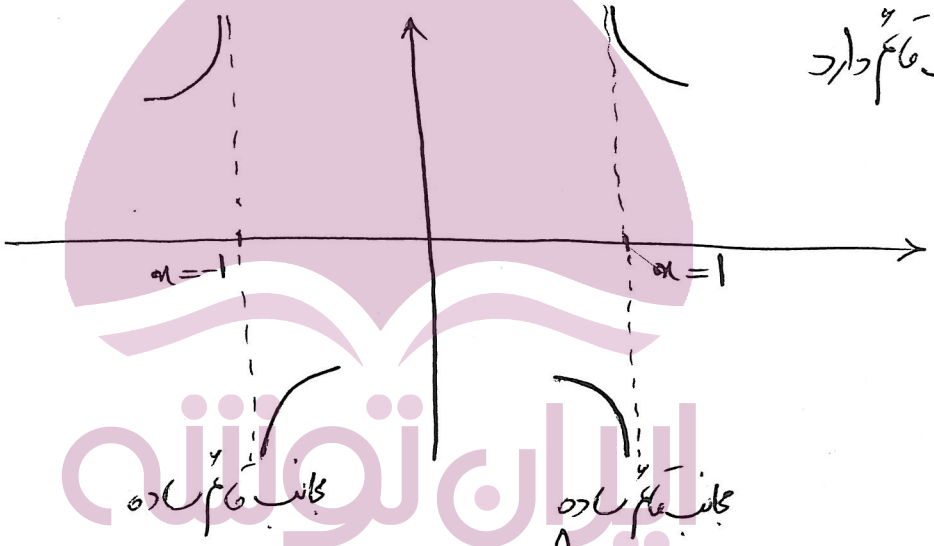
مثال:

$$* \quad y = \frac{2x+3}{x^2-1}$$

مخرج $= 0 \longrightarrow x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm 1$

۲ مجانب قائم دارد

علت:



$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

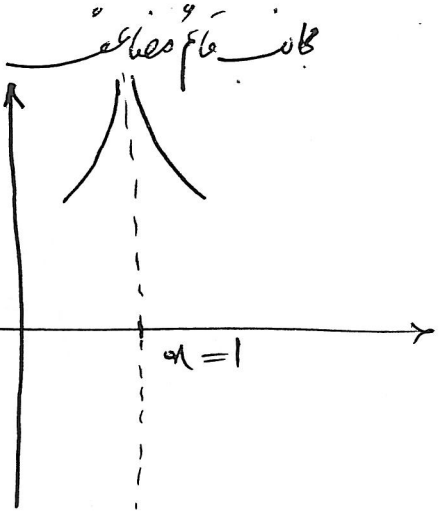
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$* y = \frac{2x}{(x-1)^2}$$

مخرج $= 0 \longrightarrow x = 1 \longrightarrow$ یک مجانب قائم دارد

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$



$$* y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

مخرج $= 0 \longrightarrow x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = \pm 1 \longrightarrow$ $\begin{cases} x = -1 & \text{قوق} \\ x = 1 & \text{غ قوق} \end{cases}$

یک مجانب قائم دارد

روش ① $\longrightarrow \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2} \neq \infty$ غ قوق

روش ② $\longrightarrow$ $\begin{cases} x = 1 \longrightarrow 1 = \text{توان بزرگترین جمله صورت} \\ x = 1 \longrightarrow 1 = \text{توان بزرگترین جمله مخرج} \end{cases} \longrightarrow$ غ قوق

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$[u] \longrightarrow u=f(x)$

$$* \; y=\frac{x}{[x]}$$

x هایی که u را بین صفر و یک $(0<u<1)$ می‌کنند مجانب قائم نمی‌باشند ولی بقیه مجانب قائمند

مخرج $=0 \longrightarrow [x]=0 \longrightarrow 0\le x<1$

بی‌شمار ریشه دارد ولی مخرج کسر صفر مطلق می‌شود پس اصلاً مجانب قائم ندارد

نکته: $[x]$ مجانب قائم تولید نمی‌کند

$$* \; y=\frac{x^2+5}{x(3x-1)(3x-2)(2x-4)[x]}$$

مخرج $=0 \longrightarrow x=\frac{1}{3} \longrightarrow$ مخرج را صفر مطلق می‌کند $\longrightarrow$ غ ق ق

$x=\frac{2}{3} \longrightarrow$ مخرج را صفر مطلق می‌کند $\longrightarrow$ غ ق ق

$x=2 \longrightarrow$ ق ق

$x=0 \longrightarrow$ ق ق

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y=\frac{x-4}{(2x-1)(2x-4)(3x-9)(4x-16)\left[\frac{x}{3}\right]}$$

مخرج $=0 \longrightarrow x=\frac{1}{2} \longrightarrow$ مخرج را صفر مطلق می‌کند $\longrightarrow$ غ ق ق

$x=2 \longrightarrow$ مخرج را صفر مطلق می‌کند $\longrightarrow$ غ ق ق

$x=3 \longrightarrow$ ق ق

$x=4 \longrightarrow$ ریشه‌ی صورت نیز بوده و $\longrightarrow$ غ ق ق

درجه‌ی ریشه در مخرج با درجه‌ی ریشه در صورت برابر است

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y=\frac{\left[\frac{x}{2}\right]}{x(x-1)(x-2)(x-3)[x-3]}$$

مخرج $=0 \longrightarrow x=0 \longrightarrow$ ریشه‌ی صورت نیز می‌باشد و درجه‌ی ریشه‌ی صورت و مخرج برابر است $\longrightarrow$ غ ق ق

$x=1 \longrightarrow$ 〃 $\longrightarrow$ 〃

$x=2 \longrightarrow$ ق ق

$x=3 \longrightarrow$ ق ق

دو مجانب قائم دارد

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$* \; y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-3x}$$

مخرج $= 0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \longrightarrow \text{زیر رادیکال فرجه زوج را منفی می‌کند} \longrightarrow \text{غ ق ق} \\ x=3 \longrightarrow \text{ق ق} \end{cases}$

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+5x-6}$$

ریشه‌ها $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

مخرج $= 0 \longrightarrow \begin{cases} x=-6 \longrightarrow \text{ق ق} \\ x=1 \longrightarrow \text{ریشه‌ی صورت نیز می‌باشد} \longrightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$

و درجه‌ی ریشه در صورت و مخرج برابر است

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y = \frac{4x-\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+7}}$$

مخرج $= 0 \longrightarrow 2x = \sqrt{3x+7}$

$$4x^2 = 3x+7$$

$$4x^2-3x-7=0 \begin{cases} x=-1 \longrightarrow \text{زیر رادیکال فرجه زوج را منفی می‌کند} \longrightarrow \text{غ ق ق} \\ x=\frac{7}{4} \longrightarrow \text{ق ق} \end{cases}$$

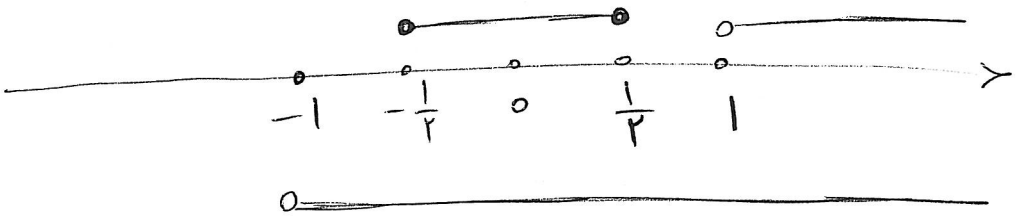
یک مجانب قائم دارد

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ص ۴

$$* \; y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{1-4x^2}$$

$x > 1$ $\qquad$ $x > -1$ $\qquad$ $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$



اشتراکی بین دامنه ها وجود ندارد پس دامنه‌ی تابع ϕ بوده و هیچ مجانب قائمی هم در دامنه‌ی تابع قرار نمی‌گیرد

$$* \; y = \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{3x-1}}{x^2-4} + \frac{1}{x-5}$$

$x = 0$ ← زیر رادیکال فرجه زوج را منفی می‌کند

غ ق ق

$\begin{cases} x = 2 \text{ ق ق} \\ x = -2 \end{cases}$

$x = 5$ ق ق

۲ مجانب قائم دارد

$$* \; y = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \qquad y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

۱ مجانب قائم دارد

x		-3		1	
y	$+$	ϕ	$-$	0	$+$
	ج				ج

مخرج $= 0 \to x = -3$

زیر رادیکال فرجه زوج را منفی می‌کند

پس اصلاً مجانب قائم ندارد

مخرج $= 0 \to x = -3$

ق ق

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$* \; y = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\text{مخرج} = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \overset{Hop}{=} \lim \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{ق ق}$$

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y = \frac{\sqrt{2x-1}}{|x+1|-3}$$

$$\text{مخرج} = 0 \longrightarrow |x+1| = 3 \longrightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \longrightarrow x = 2 \\ x+1 = -3 \longrightarrow x = -4 \end{cases}$$

ق ق

زیر رادیکال فرجه زوج را منفی می‌کند ← غ ق ق

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y = \frac{\sin x}{x} \qquad y = \frac{\tan x}{x^2}$$

$$\text{مخرج} = 0 \longrightarrow x = 0 \quad \text{غ ق ق} \qquad \text{مخرج} = 0 \longrightarrow x = 0 \quad \text{ق ق}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq \infty \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x^2} = \infty$$

مجانب قائم ندارد

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y = \frac{\operatorname{Arcsin}(x+3)}{x-5}$$

کمان را بالاتر از 1 می‌کند

$$\text{مخرج} = 0 \longrightarrow x = 5 \longrightarrow \text{غ ق ق}$$

مجانب قائم ندارد

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ص ۵

$$* \; y = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}$$

$x = 0 \longrightarrow$ غ ق ق

$\downarrow$

کمان را بالاتر از ۱ و کمتر از ۱- می‌کند

مجانب قائم ندارد

$$* \; y = \log_5\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$$

ریشه‌ی صورت

$x = 3$ ق ق

$x = -2$ ق ق $\longrightarrow$ ۲ مجانب قائم داریم

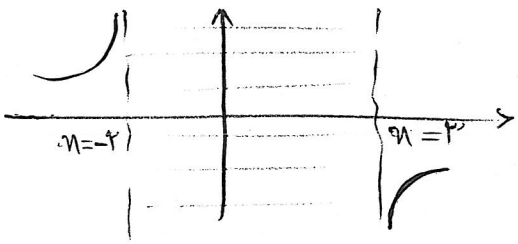
ریشه‌ی مخرج

x		-2		3	
آنتی	$+$	∞	$-$	0	$+$
	ج				ج

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \log_5 \frac{0^+}{5} = \log_{5>1} 0^+ = -\infty \longrightarrow$$ مجانب قائم است $x = 3$

$$\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = \log_5 \frac{-5}{0^-} = \log_{5>1} +\infty = +\infty$$

$x = -2$ مجانب قائم است



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$* \; y = \log_{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x}}{x-5} \longrightarrow \begin{cases} x=0 \longrightarrow \text{داخل log را منفی می‌کند} \longrightarrow \text{غ ق ق} \\ x=5 \longrightarrow \text{ق ق} \end{cases}$$

ریشه‌ی صورت

ریشه‌ی مخرج

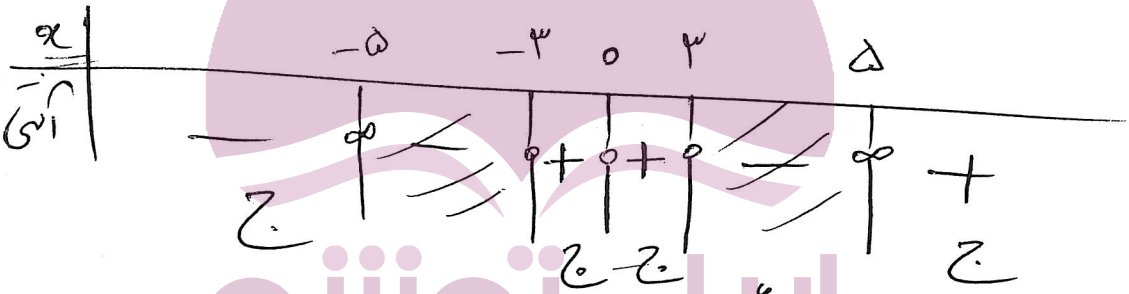
یک مجانب قائم دارد

$$* \; y = \log \frac{x^2(x^2-9)}{x^2-25} \longrightarrow \begin{cases} x=\pm 3 & \text{ق ق} \\ x=0 & \\ x=\pm 5 & \text{ق ق} \end{cases}$$

ریشه‌های صورت

ریشه‌های مخرج

x		-5		-3		0		3		5	
آنتی	$-$	∞	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	∞	$+$
	ج					ج	ج				ج



چهار مجانب قائم دارد

$$* \; y = \frac{2x+5}{\sin^2 3x - \sin 3x} \qquad (0, \pi)$$

$$\text{مخرج} = 0 \longrightarrow \sin 3x(\sin 3x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 0 \longrightarrow 3x = k\pi \longrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \\ \sin 3x = 1 \longrightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

$x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$

$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

شش مجانب قائم دارد

نکته: در تست‌های مجانب بازیاسته بودن بازه تأثیری در انتخاب ندارد و در هر صورت انتخاب می‌شود

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ص ۶

$$* \; y = \frac{2+\tan x}{\sin 5x} \qquad (0, \pi)$$

مخرج $= 0 \longrightarrow \sin 5x = 0 \longrightarrow 5x = k\pi$

$$\longrightarrow x = \frac{k\pi}{5} \longrightarrow x = \left\{0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi\right\}$$

نکته: توابع tan و cot هرجا به جز مخرج کسر باشند به تنهایی مجانب قائم تولید می‌کنند

$$\tan x = 0 \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

۷ مجانب قائم دارد

$$* \; y = \tan 3x + \cot 2x \qquad (0, \pi)$$

برای tan $\longrightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \longrightarrow x = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

برای cot $\longrightarrow 2x = k\pi \longrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \longrightarrow \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

تکراری

۵ مجانب قائم دارد

$$* \; y = \frac{\sin x}{1-\cos x} \qquad \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$x=0$ ریشه‌ی مخرج در بازه‌ی مورد نظر

۱ درجه‌ی ریشه در صورت < ۲ درجه‌ی ریشه در مخرج

یک مجانب قائم دارد

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$* \; y = \frac{x \sin x}{x - \sin x} \qquad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$x = 0$ ریشه‌ی مخرج در بازه‌ی مورد نظر

درجه‌ی ریشه‌ی صورت $>$ درجه‌ی ریشه‌ی مخرج

$3 \quad > \quad 2$

یک مجانب قائم دارد

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ص ۷

$$y = \frac{2x-4}{x^2+mx+9} \longrightarrow$$ فقط یک مجانب قائم دارد

$m = 9$

یک قائم دارد $\longrightarrow$ یعنی مخرج ۱ ریشه دارد $\longrightarrow \Delta = 0$

$\Rightarrow m^2 - 36 = 0$

$m^2 = 36 \longrightarrow m = \pm 6$ ق ق

$$y = \frac{2x-4}{x^2+mx-9} \longrightarrow$$ فقط یک مجانب قائم دارد

$m = 9$

$\Delta = m^2 + 36 \neq 0 \longrightarrow m^2 + 36 > 0 \longrightarrow \Delta > 0$

مخرج ۲ ریشه دارد

صفر

ϕ

$\frac{5}{2}$

$-\frac{2}{5}$

ولی چون یک قائم دارد پس یکی از ریشه‌های مخرج ۱ ریشه صورت هم بوده

که ۰ شده و یکی غ ق ق شده است

پس $\longrightarrow$ صورت $= 0 \longrightarrow x = 2 \longrightarrow$ یکی از ریشه‌های مخرج $= 2$

$4 + 2m - 9 = 0 \longrightarrow m = \frac{5}{2}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

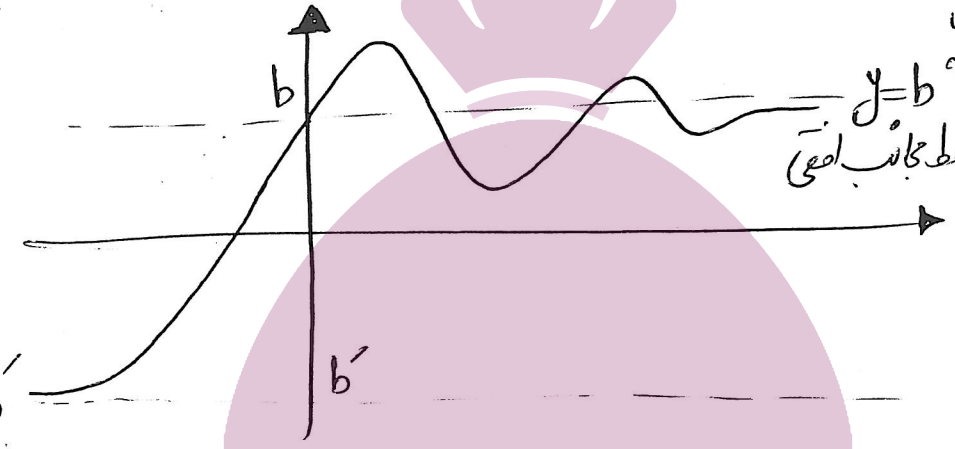
تعریف مجانب افقی:

خط $y=b$ را مجانب افقی منحنی $y=f(x)$ می‌نامیم، هرگاه با میل کردن x به $+\infty$ یا $-\infty$، یا هر دو، y به خط افقی $y=b$ میل می‌کند. به عبارتی دیگر:

if $x \longrightarrow \pm\infty \longrightarrow y=b$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = b$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = b$



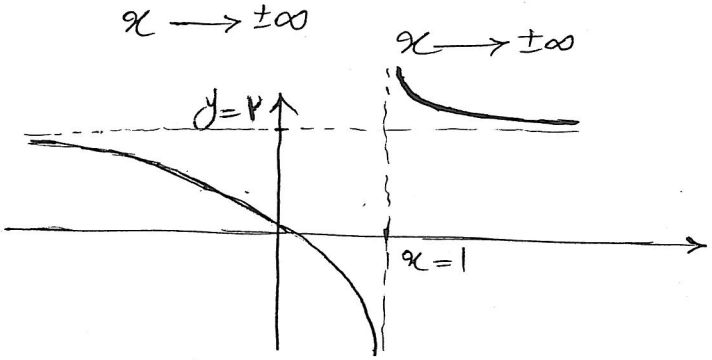
$\lim\limits_{x\to-\infty} y = b'$

مثال:

$$y=\frac{2x+3}{x-1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$y=2$ خط مجانب افقی



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸

$$* y = \frac{۳x^۲ + ۵x - ۴}{x^۲ + ۸}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۳x^۲}{x^۲} = ۳$$

$y = ۳$
خط مجانب افقی

$$* y = \frac{\sqrt{x^۲ + ۲x + ۱} + ۹x}{x - ۴}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x| + ۹x}{x}$$

$+\infty$: $\frac{۱۰x}{x} = ۱۰ \longrightarrow y = ۱۰$ خط مجانب افقی

$-\infty$: $\frac{۸x}{x} = ۸ \longrightarrow y = ۸$ خط مجانب افقی

۲ مجانب افقی دارد

$$* y = \frac{۲x + ۴}{|۳x| + [x]}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۲x}{|۳x| + x}$$

$+\infty$: $\frac{۲x}{۴x} = \frac{۱}{۲} \longrightarrow y = \frac{۱}{۲}$ خط مجانب افقی

$-\infty$: $\frac{۲x}{-۲x} = -۱ \longrightarrow y = -۱$ خط مجانب افقی

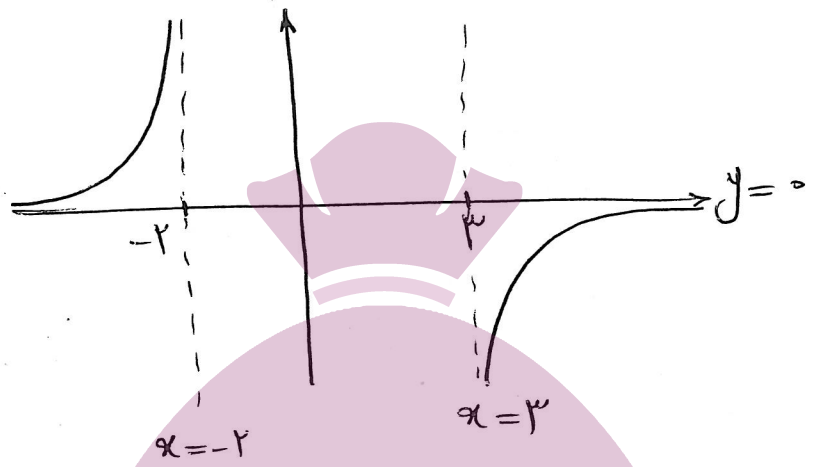
if $u \longrightarrow \infty \Longrightarrow [u] \sim u$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

* $y = \log_{\frac{1}{5}} \frac{x-3}{x+2}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{\frac{1}{5}} 1 = 0 \longrightarrow y = 0$$

خط مجانب افقی



* $y = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{\pm\infty} \frac{\text{عددی بین } -1 \text{ و } +1}{} = 0 \longrightarrow y = 0$$

خط مجانب افقی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

* $y = \sqrt{4x^2 + 12x - 1} - 2x$ $\quad y = 2$ مجانب افقی

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim 2\left|x + \frac{1}{4}\right| - 2x$$

$x \to +\infty$: $2x + 2 - 2x = 2$

$x \to -\infty$: $-2x - 2 - 2x = -4x - 2$

ص ۹

$$* \; y = \sqrt[3]{x^3+12x^2-1} - \sqrt{x^2-2x}$$

مجانب افقی $y=5$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{12}{3}\right) - \left|x-\frac{2}{2}\right|$$

$\xrightarrow{x\to+\infty} (x+4)-(x-1) = 5$

$\xrightarrow{x\to-\infty} (x+4)+(x-1) = 2x+3$

$$* \; y = \sqrt{9x^2+5x}\,\tan\frac{15}{6x+2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim |3x| \times \frac{15}{6x}$$

$\xrightarrow{x\to+\infty} y=\frac{15}{2}$ مجانب افقی

$\xrightarrow{x\to-\infty} y=-\frac{15}{2}$ مجانب افقی

دو خط مجانب افقی دارد

$$* \; y = \sqrt{4x^2-x-2} - \sqrt{4x^2+2x+1}$$

خط مجانب افقی درست است؟ نمودار

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\Big(\overbrace{2\left(x-\frac{1}{8}\right)-2\left(x+\frac{2}{8}\right)}^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\Big) = -\frac{3}{4}$$

خط مجانب افقی $y=-\frac{3}{4}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$* y = \frac{x^2 \tan^{-1} x}{x^3 + 2x^2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2x^2} \operatorname{Arctan} x$$

$x \to +\infty$: $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ ← خط مجانب افقی $y = \frac{\pi}{4}$

$x \to -\infty$: $\frac{1}{2} \times -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$ ← خط مجانب افقی $y = -\frac{\pi}{4}$

دو خط مجانب افقی دارد

$$* y = \operatorname{Arc\,Sin}\left(\frac{x^4 - 2}{x^4 - 4}\right)$$

مجانب افقی ندارد چون خارج قسمت داخل Arc Sin بزرگتر از ۱ می‌شود

$$* y = \frac{4x + \sqrt{x - 5}}{\sqrt{3 - x + x^3}}$$

مجانب افقی ندارد چون x نمی‌تواند به $\pm\infty$ میل کند زیرا دامنه‌ی تابع اجازه نمی‌دهد

$$* \text{if } y = \frac{(a-1)x^3 + 2x^2 - 1}{bx^2 - x - 1} \longrightarrow a + b = ?$$

برای اینکه تابع دارای یک مجانب افقی $y = 3$ باشد

باید درجه‌ی صورت با درجه‌ی مخرج برابر باشد تا حاصل حد یک عدد شود

$$a - 1 = 0 \longrightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{bx^2} = \frac{2}{b} = 3 \longrightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$a + b = \frac{5}{3}$$

مثال

* if $y=\frac{3}{2}$ ⟵ معادله‌ی مجانب افقی تابع ؟

$f(x)=\frac{Ax^3+1}{(A-1)x^3+14}$ مجانب افقی تابع

با شرط

$\frac{A}{A-1}=\frac{3}{2} \longrightarrow A=3$

$2x^3+14=0 \longrightarrow x^3=-8 \longrightarrow x=-2$

* if $y=\frac{3}{2}$

$f(x)=2x-1+\sqrt{ax^2+bx}$ مجانب افقی تابع ⟵ b ؟

با شرط

$a>0$ ، $x \longrightarrow -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x-1+\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|\right)=\frac{3}{2}$

$\lim_{x\to-\infty}\left((2-\sqrt{a})x+\left(-1-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\right)=\frac{3}{2}$

$\begin{cases} 2-\sqrt{a}=0 \longrightarrow a=4 \\ -1-\frac{b}{4}=\frac{3}{2} \longrightarrow b=-10 \end{cases}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

* اگر $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+11}{x^2-3x-4} \\ g(x)=\dfrac{3}{x-4} \end{cases}$ ← نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های تابع $f-g$ کدام است؟

$$f(x)-g(x)=\frac{x+11}{(x-4)(x+1)}-\frac{3}{x-4}=\frac{-2x+8}{(x+1)(4-x)}=\frac{-2(x-4)}{(x+1)(4-x)}$$

$$=\frac{-2}{x+1}$$

مجانب قائم: $x+1=0 \longrightarrow x=-1$

$$\lim_{x\to\infty}(f-g)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x+1}=0 \longrightarrow y=0$$

مجانب افقی

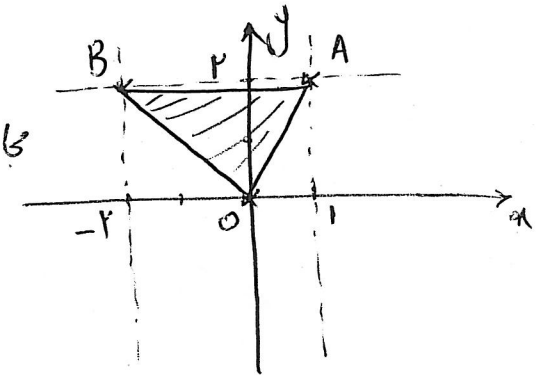
← نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها $(-1,0)$

* اگر $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+2} \\ g(x)=\dfrac{x^2}{x-1} \end{cases}$ ← نقاط A و B محل تلاقی مجانب‌های افقی و قائم منحنی تابع $(f-g)$ و O مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث AOB کدام است؟

$$f-g=\frac{x^2+x}{x+2}-\frac{x^2}{x-1}=\frac{2x^2+x}{(x-1)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to\infty} y=2 \longrightarrow y=2$$ مجانب افقی

مجانب‌های قائم: $\begin{cases} x-1=0 \longrightarrow x=1 \\ x+2=0 \longrightarrow x=-2 \end{cases}$



$$S_{OAB}=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

رفتارشناسی نمودار در اطراف مجانب افقی:

رمز حل تست: بازنویسی تابع

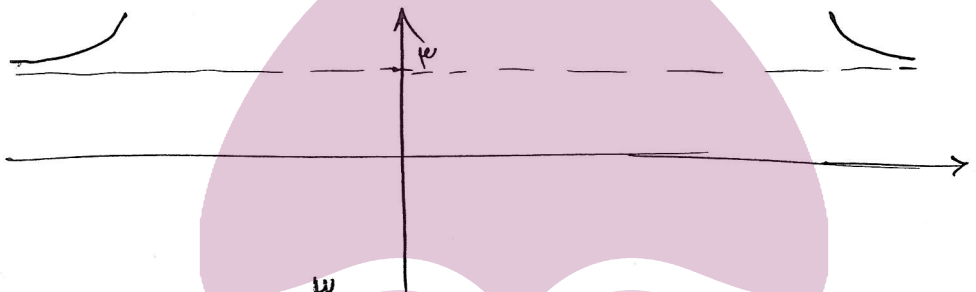
مثال:

$$* \; y=\frac{3x^2+10}{x^2+3} \qquad y=3$$

مجانب افقی

$$y=\frac{3(x^2+3)+1}{x^2+3}=3+\frac{1}{x^2+3}$$

$$x \longrightarrow \pm\infty \longrightarrow y \longrightarrow 3^+$$



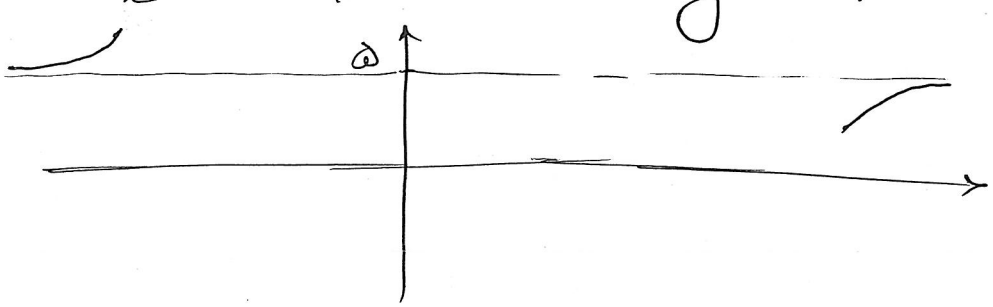
$$* \; y=\frac{5x^3-4}{x^3+3} \qquad y=5$$

مجانب افقی

$$y=\frac{5(x^3+3)-19}{x^3+3}=5-\frac{19}{x^3+3}$$

$$x \longrightarrow +\infty \longrightarrow y \longrightarrow 5^-$$

$$x \longrightarrow -\infty \longrightarrow y \longrightarrow 5^+$$



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$* \quad y = \frac{4x^5 - 9x}{x^5 + x}$$

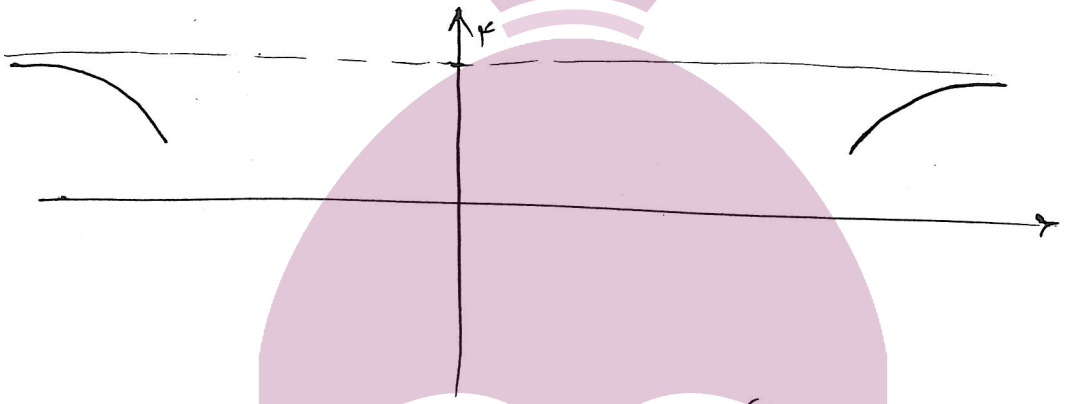
$y = 4$
مجانب افقی

$$\begin{array}{r|l} 4x^5 - 9x & x^5 + x \\ \hline 4x^5 + 4x & 4 \\ \hline -10x & \end{array}$$

$$y = 4 + \frac{-10x}{x^5 + x} = 4 - \frac{10}{x^4}$$

$x \to +\infty \Rightarrow y \to 4^-$

$x \to -\infty \Rightarrow y \to 4^-$



روش یافتن مجانب های افقی و قائم توابع صعمی :

مجانب افقی ← چون $x \to \infty$ پس معادله را بر حسب x مرتب کرده و ضریب بزرگترین درجه را صفر می کنیم

مجانب قائم ← چون $y \to \infty$ پس معادله را بر حسب y مرتب کرده و ضریب بزرگترین درجه را صفر می کنیم

مثال : مجانب افقی؟

$$* \quad x^2y^2 - 4x^2 + xy - 2x + 1 = 0$$

$$(y^2 - 4)x^2 + (y - 2)x + 1 \longrightarrow y^2 - 4 = 0 \longrightarrow y = \pm 2$$

دو مجانب افقی دارد

$$* \quad x^2 + y^2 + x^2y - 3xy^2 = 0$$

مجانب قائم ؟

$$(1 - 3x)y^2 + x^2y + x^2 = 0 \longrightarrow 1 - 3x = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{3}$$

مجانب قائم

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

* فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد مجانب‌های $(2x-2)(y-1)=3$ تا خط $3x+4y+23=0$ کدام است؟

قلق تستی: در توابعی با ضابطه‌ی $(ax+b)(cx+d)=$ عدد ثابت غیرصفر:

ریشه‌ی پرانتز اول $\longrightarrow x=-\frac{b}{a}$ مجانب قائم

ریشه‌ی پرانتز دوم $\longrightarrow y=-\frac{d}{c}$ مجانب افقی

$x=1$ مجانب قائم
$y=1$ مجانب افقی
$\longrightarrow (1,1) \longrightarrow$ محل تلاقی مجانب‌ها

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی (α,β) از خط $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d=\frac{30}{5}=6$$

* مجانب‌های معکوس تابع $y=\frac{3x^2+5x+1}{x^2-1}$ کدامند؟

نکته: مجانب‌های قائم و افقی تابع f به ترتیب مجانب‌های افقی و قائم تابع f^{-1} هستند.

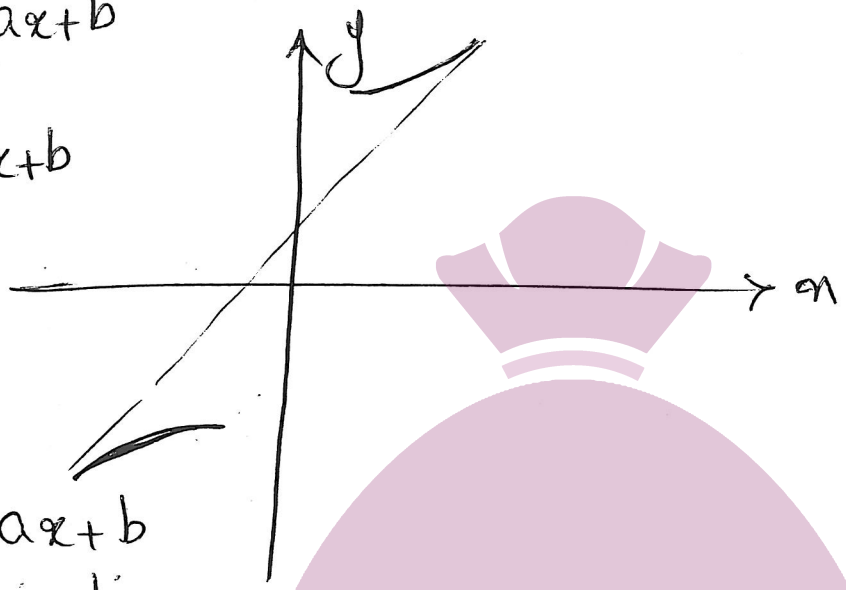
مجانب‌های قائم f: $\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ مجانب افقی f: $y=3 \xRightarrow{f^{-1}}$ مجانب‌های افقی $\begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases}$ مجانب قائم f^{-1}: $x=3$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

تعریف مجانب مایل:

خط $y=ax+b$ را مجانب مایل منحنی $y=f(x)$ می‌نامیم هرگاه با میل کردن x به $+\infty$ یا $-\infty$، فاصله‌ی بین منحنی $f(x)$ و خط $y=ax+b$ به صفر میل کند.

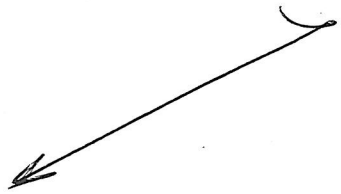
$$\text{if } x \longrightarrow \pm\infty$$
$$\Downarrow$$
$$y \sim ax+b$$
$$\downarrow$$
$$y=ax+b$$



نکته:

* در توابع کسری، خط مجانب مایل داریم که درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج ۱ واحد بیشتر باشد و الا غیر

* در توابع رادیکالی که زیر رادیکال یک عبارت کسری خط مجانب مایل داریم که درجه‌ی صورت کسر از درجه‌ی مخرج کسر به اندازه‌ی درجه‌ی رادیکال بیشتر باشد و الا غیر



مثال:

$$* \; y=\frac{2x^4+3x^2+5}{x^2+9x-1}$$

مجانب مایل ندارد $\longrightarrow$ اختلاف توان ۲ واحد است

$$* \; y=\frac{2x^3+x^2+6x-1}{x^2+5x+1}$$

روش ①

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+x^2+6x-1 & x^2+5x+1 \\ \hline 2x^3+10x^2+2x & 2x-9 \\ \hline -9x^2+4x-1 & \\ -9x^2-45x-9 & \\ \hline 49x+8 & \end{array}$$

$$y=2x-9$$

خط مجانب مایل

روش ②

تکنیک: $\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^{n-1}+b'x^{n-2}+\cdots} \sim \dfrac{a}{a'}x-\dfrac{ab'-ba'}{a'^2}$

$x \longrightarrow \infty$

$$y=2x-\frac{9}{1} \Rightarrow y=2x-9$$

خط مجانب مایل

سؤال: اگر پرسیده شود تابع فوق مجانب مایلش را در چه طولی قطع می‌کند، جواب چیست؟

$$49x+8=0 \longrightarrow x=-\frac{8}{49}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$* \; y = \frac{4x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2 + 7}$$

$$y = 2x - \frac{\cancel{32}^{\,8}}{\cancel{4}} \Longrightarrow \underline{y = 2x - 8}$$

خط مجانب مایل

$$* \; y = \frac{2x^3 - 7x - 1}{x^2 + 5x + 6}$$

$$y = 2x - \frac{10}{1} \Longrightarrow \underline{y = 2x - 10}$$

خط مجانب مایل

$$* \; y = \frac{x^3 - ax^2 + x - 1}{x^2 - 2x}$$

if عرض از مبدا مجانب مایل $= -2$ باشد

$a = ?$

$$y = x - \frac{-2 + a}{1} \quad -2$$

$$y = ax + b$$

a ↓ شیب

b ↓ عرض از مبدا

$$\frac{2 - a}{1} = -2 \rightsquigarrow a = 4$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$* \; y = 3x + [2x] + \frac{2x^3 + 9x^2 - 9x + 1}{x^2 - 3x + 10} + \frac{\sqrt{16x^2 + 5x}}{x + 4}$$

$$y = 3x + 2x + 2x - \frac{-12}{1} + \frac{|12x|}{x}$$

$$x \longrightarrow +\infty \longrightarrow y = 7x + 12 + 2x = 9x + 12$$

$$x \longrightarrow -\infty \longrightarrow y = 7x + 12 - 2x = 5x + 12$$

دو خط مجانب مایل دارد

$$* \; y = 2x + 5 + \frac{x^2 + |13x|}{x + 1} + \frac{3x^2 + 5x}{x^2 + 2}$$

$$x \longrightarrow +\infty \longrightarrow y = 2x + 8 + x - \frac{-2}{1} = 3x + 10$$

$$x \longrightarrow -\infty \longrightarrow y = 2x + 8 + x - \frac{4}{1} = 3x + 4$$

دو خط مجانب مایل دارد

$$* \; y = 2x + \sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 9x - 1}$$

$$x \longrightarrow \infty \longrightarrow y = 2x + \left(x - \frac{27}{3}\right) = 3x - 9$$

یک خط مجانب مایل دارد

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$* \quad y = 3x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x - 1}$$

$$y = 3x - 2 + \left| x - \frac{4}{2} \right|$$

$$x \longrightarrow +\infty \longrightarrow y = 3x - 2 + x - 2 = 4x - 3$$

$$x \longrightarrow -\infty \longrightarrow y = 3x - 2 - x + 2 = 2x - 1$$

دو خط مجانب مایل داریم

سؤال: محل برخورد مجانب‌های مایل تابع فوق را بیابید؟

$$4x - 3 = 2x - 1 \longrightarrow 2x = 2 \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$* \quad y = x \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

تذکر: $(x+a)\sqrt[k]{\frac{x+b}{x+c}} \underset{x \to \infty}{\sim} x + a + \frac{b-c}{k}$

$$y = x + \frac{3}{2}$$

$$* \quad y = (x+3)\sqrt[3]{\frac{x+10}{x+2}}$$

$$y = x + 3 + \frac{8}{3} = x + \frac{23}{3}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ص ۱۵

$$* \; y=\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x-2}} \longrightarrow$$ مجانب مایل ؟ وقتی $x\to-\infty$

$$y=|x|\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

$$\Big\downarrow x\to-\infty$$

$$y=-\left(x+\frac{3}{2}\right) \longrightarrow y+x+\frac{3}{2}=0$$

$$\underline{2y+2x+3=0}$$

مجانب مایل

سؤال: اگر محل تلاقی مجانب ها (a,b) باشد، $a+b$ کدام است؟

$$y=x+\frac{3}{2} \longrightarrow x+\frac{3}{2}=-\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$y=-\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$2\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$$

$$2x+3=0$$

$$a+b=-\frac{3}{2} \longleftarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2}=a \\ y=0=b \end{cases}$$

سؤال: فاصله‌ی محل تلاقی دو مجانب با مبداء مختصات چقدر است؟

$$\text{فاصله}=\frac{3}{2}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$* y=(x-2)\sqrt{\frac{x+a}{x-1}} \xrightarrow{\text{مجانب مایل}} y=x+1$$

$a=?$

$$y=x-2+\frac{a+1}{2}$$

$$\frac{a+1}{2}=4$$

$$a=7$$

$$* y=\sqrt{\frac{4x^3+ax^2}{x-2}} \xrightarrow{\text{مجانب مایل}} y-2x=1$$

$a=?$

$$y=|x|\sqrt{\frac{4x+a}{x-2}}$$

$$x\to+\infty \Rightarrow y=x\times 1\times\sqrt{\frac{x+\frac{a}{4}}{x-2}}=1\left(x+\frac{\frac{a}{4}+2}{2}\right)$$

$$y=2x+\left(\frac{a}{4}+2\right)$$

$$y-2x=\left(\frac{a}{4}+2\right) \to \frac{a}{4}+2=2 \to a=0$$

$$* y=2x\sqrt{\frac{x-1}{9x-1}}$$

؟ شیب مجانب

؟ عرض از مبدا مجانب

$$x\to\infty \Rightarrow y=\frac{2}{6}x\sqrt{\frac{x-1}{x-\frac{1}{9}}} \to y=\frac{2}{6}\left(x+\frac{-\frac{8}{9}}{2}\right)$$

$$\frac{2}{3}x-\frac{8}{27}$$

شیب — عرض از مبدا

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$* y = 2x + \frac{1}{\pi}\text{Arccos}\frac{1}{x}$$

$$x \to \infty \Rightarrow y = 2x + \frac{1}{\pi}\underbrace{\text{Arccos}(0)}_{\frac{\pi}{2}} = 2x + \frac{1}{2}$$

مجانب‌های مایل منحنی‌های $y = \frac{x^2+3}{5-2x}$ ، $y = \frac{x^2-1}{2+3x}$ *

با هم حداکثر زاویه‌ای می‌سازند.

نکته: اگر θ زاویه‌ی بین دو خط متقاطع به معادلات $y_1 = m_1 x + n_1$ ، $y_2 = m_2 x + n_2$ باشد، آن‌گاه:

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{2} \\ m_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \to \tan\theta = \left|\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}}\right| = 1 \longrightarrow \theta = 45^\circ$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

آشنایی با نمودار در اطراف مجانب مایل:

مرحله‌ی سوم: بازنویسی تابع

مثال:

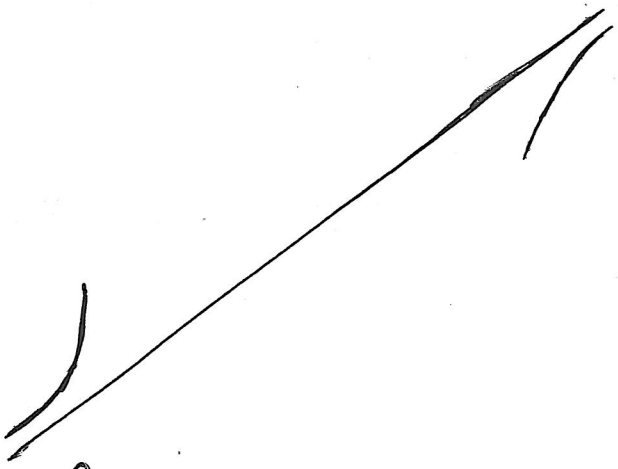
$$* y = \frac{6x^2 + 10x + 2}{3x + 2}$$

$$y = 2x + 2 - \frac{2}{3x+2}$$

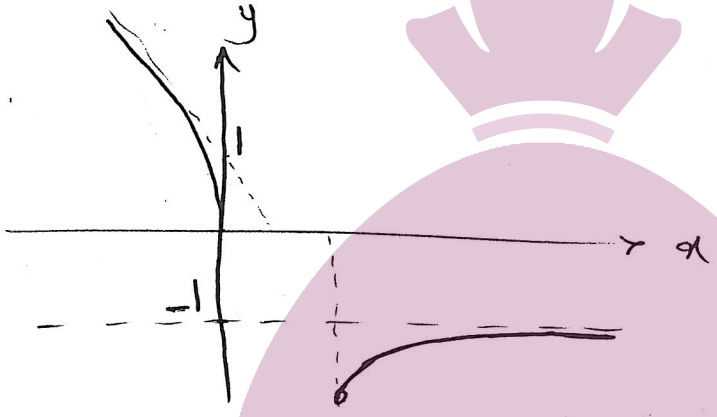
$$\begin{array}{r|l} 6x^2+10x+2 & 3x+2 \\ \hline 6x^2+4x & 2x+2 \\ \hline 6x+2 & \\ 6x+4 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

$$x \to +\infty \Longrightarrow y \to (2x+2)^-$$

$$x \to -\infty \Longrightarrow y \to (2x+2)^+$$



* $f(x)=ax+\sqrt{x^2+bx} \longrightarrow (a,b)$?



$$x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow y=ax+x+\frac{b}{2}=(a+1)x+\frac{b}{2}=-1$$

$$a=-1$$
$$b=-2$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت