

ایران تووشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود ۵۶۳۷ مجموعه
- دانلود آزمون ۶۰۰ جزو و قلم چی و نجاشی
- دانلود فیلم و مقاله آنلاین شی
- لینک و مثاواه



IranTooshe.LR



@irantoooshe



IranTooshe



با سمه تعالی

حل کامل فعالیت ها و کار در کلاس و مسائل

کتاب ریاضی یازدهم فنی

ایران توشه

توشه ای برای موفقیت

پوڈمان اول

ایرانی قلم
توشناہی برائی موققیت

فعالیت ۱ صفحه ۴

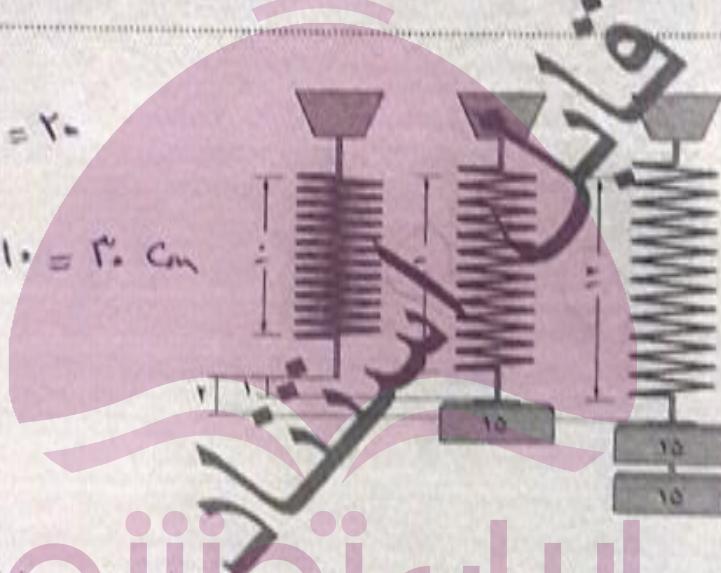
فنری در اختیار داریم که در حالت طبیعی طول آن 10 سانتی متر است. به ازای هر 15 گرم وزنه که به آن اویزان می کنیم، 1 سانتی متر به طول آن اضافه می شود. حداکثر طول این فنر 20 سانتی متر است و اگر بیش از این کشیده شود پاره می شود.

در جاهای خالص کلمه مناسب بگذارید.

- الف) هر چه زنگنه اویزان شده ~~لخته~~ می شود، طول فنر ~~کسر~~ می شود.
 ب) اگر به این فنر ~~کسر~~ زنگ 300 گرمی اویزان کنیم، برای پیدا کردن طول فنر، چون به ازای هر 15 گرم، 1 سانتی متر به طول آن اضافه می شود، پس ابتدا 300 را بر 15 تقسیم می کنیم و سپس

$$\frac{300}{15} = 20$$

$$20 + 10 = 30 \text{ cm}$$



در حالت کلی، اگر جرم وزن ایوانشده را بر حسب گرم با α نشان دهیم و طول فنر را بر حسب سانتی متر با β نشان دهیم، رابطه‌ای بتوانیم که مقدار β را بر حسب مقدار α بیان کند.

توضیحاتی که می‌تواند مفهومی را توضیح دهد

حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر اویزان کنیم، چقدر است؟ (راهنمایی: برای پیدا کردن حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر اویزان کنیم، ابتدا باید حداکثر تغییر طول فنر را بدست اورد). می‌توان با استفاده از رله ول معرفه کرد که در چون حداکثر طول فنر 20 سانتی متر جرم و وزن ممکن $V\delta$ گرم است.

$$40 = \frac{\alpha}{10} + 10 \xrightarrow{\times 10} 40 \times 10 = \frac{\alpha}{10} \times 10 + 10 \times 10$$

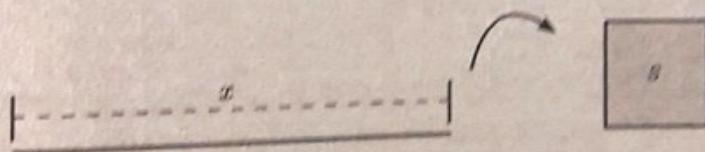
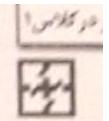
$$400 = \alpha + 100.$$

$$\alpha = V\delta.$$

نباید برای دانش
آموزان فنی
محاسبات جبری گفته
شود بلکه باید از
طریق نمودار یا
جدول به سوالات
پاسخ دهید.

کار در کلاس ۱ صفحه ۷

مفتولی به طول ۱۰۰ سانتی متر در اختیار داریم. قسمتی از آن را می بریم و با قطعه بریده شده یک مربع می سازیم. مساحت مربع به دست آمده با طول قطعه بریده شده رابطه دارد.



۱) آیا مساحت می تواند صفر باشد؟ خیر

۲) اگر طول قطعه بریده شده از مفتول را با x نشان دهیم، چه مقادیری می تواند باشد؟

$$0 < x < 100$$

۳) اگر طول قطعه بریده شده از مفتول ۸ سانتی متر باشد، مساحت مربع ساخته شده چند سانتی متر مربع است؟

$$x = 100 - 8 \Rightarrow x = 92$$

۴) اگر طول قطعه بریده شده از مفتول را با x و مساحت مربع ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان کند.

$$S = \frac{x^2}{4}$$

با توجه به پاسخ پرسش‌های بالا، سوال‌های زیر پاسخ دهد.

۵) جدول زیر، ارتباط بین طول قطعه بریده شده و مساحت مربع ساخته شده را نشان می دهد. این جدول را کامل کنید.

توشه‌ای درای موفقیت

طول قطعه بریده شده (بر حسب سانتی متر)	۱	۲	۲۰	۲۲	۴۸	۶۰	۱۰۰
مساحت مربع (بر حسب سانتی متر مربع)	$\frac{1}{4}$	۱	۲۵	۹۴	۱۴۴	۲۵۶	۶۲۵

$$\frac{1}{4} = (\frac{1}{4})^2$$

$$1 = 1^2$$

$$25 = 5^2$$

$$2^2$$

$$4^2$$

$$6^2$$

$$10^2$$

۶) در شکل صفحه بعد، محور افقی طول قطعه بریده شده را بر حسب سانتی متر و محور عمودی، مساحت مربع ساخته شده را بر حسب سانتی متر مربع نشان می دهد. جدول بالا، نقاطی در این صفحه مختصات را نشان می دهد. ۴ نقطه اول جدول را در نمودار صفحه بعد بیابید و آنها را به طور تقریبی به هم وصل کنید.

نباید برای دانش آموزان
فني محاسبات جبری گفته
شود بلکه باید از طریق
نمودار یا جدول به سوالات
پاسخ دهید.

$$S = \frac{x^2}{14}$$

$$\Rightarrow 40 = \frac{x^2}{14} \Rightarrow x^2 = 40 \times 14$$

$$x = \sqrt{40 \times 14} = 14\sqrt{10}$$

با توجه به نمودار، برای ساختن مربعی به مساحت ۴۰ سانتی‌متر مربع، چه مقدار از مفتول را باید ببریم؟ این مقدار را به کمک رابطه قسمت (۴) نیز به دست آورید و سپس مقایسه کنید.

آیا پاسخ مسئله (۲) و (۴) برای شناخت رابطه بین مساحت مربع ساخته شده و طول قطعه بربده شده مفتول کافی هستند؟



۱) کدام یک از گزینه‌های زیر دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.

مسئلہ



- ✓ a) طول صفحه یک مربع و محیط آن
- ✓ b) طول صفحه یک مربع و مساحت آن
- ✓ c) محیط یک مثلث و طول بزرگترین ضلع آن

$$P = 4a$$

$$S = a^2$$

۲) آیا درجه حرارت یک مکان بر حسب سانتی‌گراد و درجه حرارت آن بر حسب فارنهایت مرتبط هستند؟ اگر مرتبط هستند، هر کدام نام‌گذاری کنید و رابطه بین آنها را بنویسید.

$$F = 1.8C + 32$$

۳) وزن جلد کتابی (با حداکثر ۵ صفحه) برابر ۴۰ گرم و وزن هر ورق آن ۱/۸ گرم است. رابطه‌ای بنویسید که به کمک آن بتوان وزن کتاب را بر حسب تعداد ورق‌های آن به دست آورد.

$$y = 1/8x + 40$$

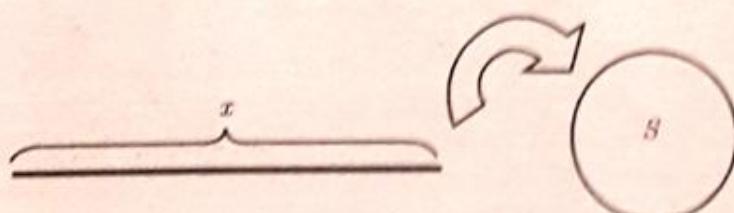
۴) راندهای مسافت ۳۵ کیلومتری بین دو شهر را با سرعت ثابت ۷۰ کیلومتر بر ساعت در حال طی کردن است.

الف) آیا مقدار مسافتی که طی می‌کند (d) و زمان (t) دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، چه رابطه‌ای بین آنها برقرار است؟

$$d = v_0 t$$

ب) هر یک از این دو کمیت چه مقادیری را می‌توانند داشته باشند؟

۵) طنابی به طول ۱۰ متر در اختیار داریم. قطعه‌ای از آن را می‌بریم و با قطعه بُریده شده یک حلقة دایره‌ای شکل می‌سازیم. مساحت حلقه دایره‌ای شکل به دست آمده با طول قطعه بُریده شده رابطه دارد.



الف) آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟

ب) طول قطعه بُریده شده از طناب، چه مقادیری می‌تواند باشد؟

۱۰ < ۲۱

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} \rightarrow R = \sqrt{\frac{r^2 + x^2}{4}} \rightarrow S = \pi R^2 = \pi \left(\sqrt{\frac{r^2 + x^2}{4}}\right)^2 = \frac{\pi(r^2 + x^2)}{4}$$

(ب) اگر طول قطعه بریده شده از طناب ۴ متر باشد، مساحت دایره ساخته شده چند متر مربع است؟

ت) اگر طول قطعه بریده شده از طناب را با x و مساحت دایره ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان کند.

ث) جدول زیر، ارتباط بین طول قطعه بریده شده و مساحت دایره ساخته شده را نشان می‌دهد.
این جدول را کامل کنید (فرض کنید $\pi = 3$).

طول قطعه بریده شده	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴	۶	۸	۱۰
مساحت دایره	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	۳	$\frac{16}{3}$	$\frac{25}{3}$	$\frac{36}{5}$

ج) به کمک جدول این نقاط را y -محور آنها را به طور تقریبی به هم وصل کنید.



ج) برای شناخت رابطه مساحت دایره ساخته شده و طول قطعه بریده شده از طناب، چه مواردی را باید بدانیم؟ **به عبارتی روابطی که برای همان مساحت دایره مربوط باشد** است.

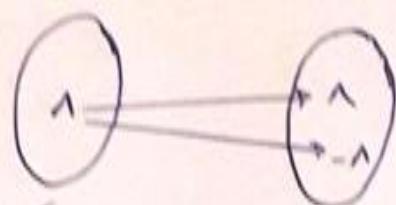
این دو کمیت را نام‌گذاری کنید و در صورت امکان رابطه بین آن دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.

$$y = \frac{x}{100}$$

$$v = at$$

الف) رابطه‌ی بین سانتیمتر (x) و متر (y) :

ب) رابطه بین سرعت متحرک (v) با زمان (t) با شتاب ثابت 20 کلیمتر بر ساعت:



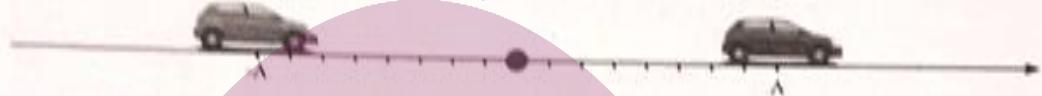
گروه، مبدأ از بین (ب) تابعی از کمیت (الف)

خودرو طول خودرو (الف) خودرو طول خودرو (ب) $\Rightarrow \text{ف} = \text{خ}$

$$\begin{aligned} \text{خودرو طول خودرو (الف)} &= \text{خودرو طول خودرو (ب)} \\ \Rightarrow \text{ف} &= \text{خ} \\ \text{خودرو طول خودرو (ب)} &= -\text{خ} \end{aligned}$$

کمیت (ب) می‌از بین (الف) نیست.

۸ واحد باشد، خودرو ممکن است دارای مختص طولی $-A$ یا A باشد. یعنی به طور قطع نمی‌توان یک مکان خاص مشخص را برای خودرو تعیین کرد. به عبارت دیگر، با داشتن فاصله خودرو تا مبدأ، برای مختص طولی آن یک مقدار معین به دست نمی‌آید، زیرا ممکن است مختص طولی خودرو، دو عدد قرینه هم باشد.



بنابراین، در اینست کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) نخواهد بود. اما بر عکس، با مشخص شدن مختص طولی خودرو، نتیجه آن تا مبدأ دقیقاً مشخص می‌شود. پس، در این مثال، کمیت (الف)، تابعی از کمیت (ب) خواهد بود. برای مثال، اگر مختص طولی خودرو برابر -3 باشد، در این صورت فاصله آن از مبدأ مقدار معین 3 است.



در فعالیت (۱)، آیا جرم حسم اویز از شده، تابعی از طول فتر است؟ جواب
نه، چون بهترین سه طول فتر از مجموع مختصات مختصات هر دو جرم است. هر زمان

هر دو راهی از مجموع مختصات هر دو جرم است. در مثال (۱)، آیا مسافت طی شده توسط خودرو، تابعی از جمیت‌ها مصرف شده است؟ جواب
نه، چون مسافت طی شده توسط خودرو، مجموع مختصات هر دو جرم است.

در بررسی نمونه‌هایی از کمیت‌های مرتبط دیدیم که برای مشخص شدن تابعی که رابطه بین دو کمیت (الف) و (ب) را بیان می‌کند باید به دو سؤال اصلی زیر پاسخ دهیم:

کمیت (الف) چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

با مشخص شدن یک مقدار برای کمیت (الف)، چگونه مقدار کمیت (ب) به دست می‌آید؟

فرض کنیم کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) باشد. مقداری را که کمیت (الف) می‌تواند داشته باشد، دامنه این تابع می‌نامند و قانونی را که، مقدار کمیت (ب) را بر حسب مقدار کمیت (الف) به دست می‌دهد، قانون یا ضابطه این تابع می‌نامند.

مثال ۴

در کار در کلاس (۲) دیدیم که اگر a ، طول فنر کشیده شده با آویزان کردن یک وزنه a گرمی باشد، جرم وزنه، تابعی از طول فنر کشیده شده است. مقادیری که طول فنر می‌تواند داشته باشد از $10 \leq x \leq 60$ سانتی‌متر هستند. پس، دامنه این تابع $\{x \in \mathbb{R} | 10 \leq x \leq 60\}$ است. مقدار a بر حسب a از طریق تساوی $150 - 15l = 150 - 15a$ محاسبه می‌شود، پس قانون تابعی که جرم وزنه را بر حسب طول فنر می‌کند، به صورت $a = 150 - 15l$ است. **این این طول قدر مقدار a است** تحریر را کم لایه‌سازی و در $a = 150 - 15(l - 10)$ خواهیم داشت.

- ۱ در مثال (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مسافت طی شده توسط ماشین را بر حسب حجم بنزین باقی‌مانده در باک، بیان می‌کند.

کار در کلاس ۳



$$d = 100(40 - x)$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} | 5 \leq x \leq 40\}$$

- ۲ در کار در کلاس (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مساحت مربع ساخته شده بر حسب طول قسمت بریده شده از مفتوا را بیان می‌کند.

$$S = \frac{x^2}{14}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 100\}$$

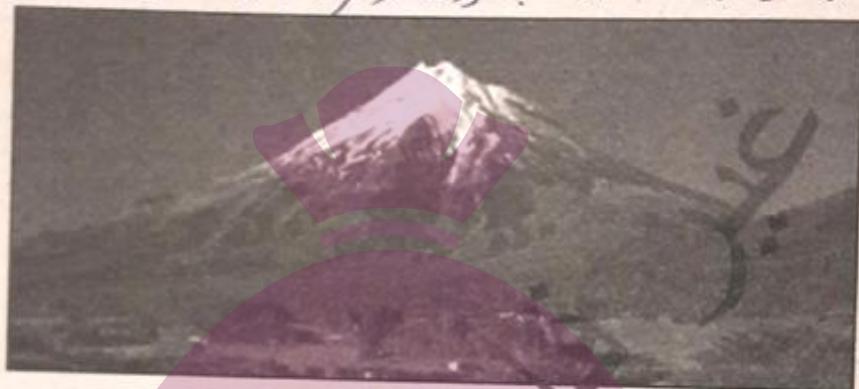
ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

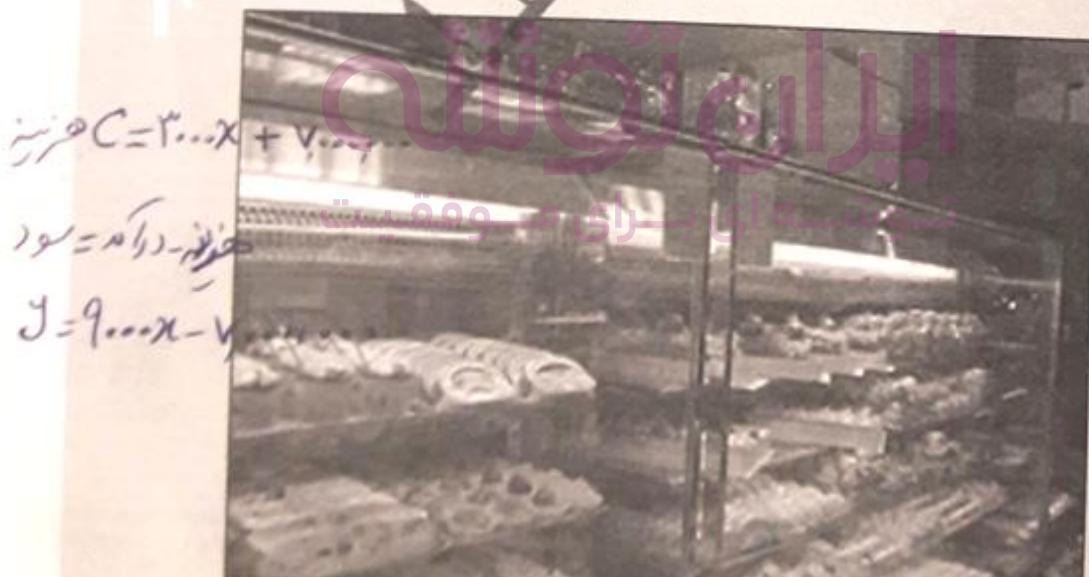
مسائل



- ۱ آیا دمای کلاس شما در یک روز معین، تابعی از زمان است؟ چرا؟
بعد چون هر رمان مسخن فحشی مقدار معین برای دنیا کلاس وجود دارد.
- ۲ دمای هوا در یک منطقه، در ارتفاعات مختلف از سطح دریا، متفاوت است و به ازای هر ۱۵۰ متر افزایش ارتفاع، ۱ درجه از دمای هوا کاسته می‌شود. آیا دمای یک منطقه تابعی از ارتفاع آن منطقه از سطح دریا است؟ چرا؟ بله چون در هر ارتفاعی فقط یک دمای متناسب وجود دارد.



- ۳ یک معازه شیرینی فروشی ملکان ۷ میلیون تومان بابت اجارة مغازه، آب، برق و دستمزد کارگران، به طور ثابت پرداخت می‌کند. تولید هر کیلوگرم شیرینی ۳۰۰۰ تومان هزینه مواد اولیه دارد. ظرفیت تولید شیرینی در این معازه حداقل ۲۵۰۰ کیلوگرم در هاه است. قیمت هر کیلوگرم شیرینی در بازار ۱۲۰۰۰ تومان است و تمام تولیدات معازه به فروش می‌رسد. اگر R میزان تولید شیرینی باشد:
- $$R = 12000x$$



$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

الف) درآمد این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با به دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

ب) هزینه ماهانه مغازه، تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با به دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

ب) معدر تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با مشخص کردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

۲) از منبع این بارچم ۵۰ لیتر برای پر کردن یک حوضجه استفاده می شود. اگر شیر آب منبع به طور کامل باز باشد، در هر دقیقه ۵ لیتر آب از آن خارج می شود.

الف) توضیح دهد که چرا حجم آب داخل حوضجه تابعی از زمان است. حرون در حرم زمان خارج

ب) با فرض آنکه در لحظه صفر، حوضجه خالی است، قانون این تابع را با نوشتند حجم آب داخل حوضجه بر حسب زمان باز بودن مشخص نویسید.

$$J = \Delta x$$

ب) دامنه این تابع را مشخص کنید.

۳) سنگ را به هوا پرتاب می کنیم و بعد از ۳ ثانیه زمین بر می گردد. در این صورت کمیت ارتفاع سنگ از سطح زمین و کمیت زمان، باهم مرتبت هستند.

الف) چرا ارتفاع سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است؟ در حرم زمان خاصی ریز ارتفاع معین

ب) اگر زمان را بر حسب تابعه اندازه بگیریم و مبدأ زمان شروع پرتاب باشد، دامنه این تابع چیست؟

۴) یک مقاومت ثابت ۳۰ اهمی (R_1)، به طور موازی به یک مقاومت متغیر (R_2) متصل شده است. مقاومت نهایی (R_{eq})، تابعی از مقاومت متغیر است. اگر مقاومت متغیر، حداقل ۵ اهم و حداقل ۱۵۰ اهم باشد، دامنه و قانون تابع را به دست آورید که مقاومت نهایی را بر حسب

$$\text{ مقاومت متغیر بیان می کند. (راهنمایی)} \quad R_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{کمک بگیرید.}$$

۵) فرض کنیم که x مرتب عدد حقیقی باشد؛ آیا با مشخص بودن x ، برای x یک مقدار معین در اعداد حقیقی به دست می آید؟ آیا یک عدد، تابعی از مرتب آن است؟ چرا؟ حیرت را برداز!

حرتمدار مرتع رمدد دو مقدار عدد حقیقی
 وجود دارند.

۶) ملا مرجع لندار لایبریری
 ۷) سوندبریت! + ۵۰ - ۵۰



الف) تابع به دست آمده در مثال (۱)، که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین موجود در باک بیان می‌کند، g بنامید. D_g را بنویسید. قانون تابع g چگونه نوشته می‌شود؟

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 25 \quad D_g = [5, \infty)$$

ب) مقدارهای $g(45)$ و $g(18)$ را بباید. آیا مقدار $g(75)$ معنایی دارد؟ چرا؟ خیر زیرا در دامنه و پیمانه

$$g(75) = 125 \times 75 - 45 = 12,5 \times 75 - 45 = 12,5 \times 75 - 45 = 525$$

$$g(18) = 12,5 \times 18 - 45 = 12,5 \times 18 - 45 = 12,5 \times 18 - 45 = 525$$

ب) اگر متغیر t را با x نشان دهیم، مجموعه‌ای که t در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ دامنه تابع g را در:

$$g(t) = 12,5t^2 - 45$$

ت) اگر متغیر این تابع را با x نشان دهیم، مجموعه‌ای که x در آن است چه نام دارد؟ قانون تابع چگونه نوشته می‌شود؟

$$g(x) = 12,5x^2 - 45$$

ث) دو تابع قسمت‌های (ب) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) تابع به دست آمده در کار در کلاس (۱) که مساحت مربع ساخته شده بر حسب طول مفتوح بریده شده را بیان می‌کند، h نام گذاری کنید و D_h را بنویسید.

$$h(x) = \frac{x}{2} \quad D_h: x < 14$$

ب) مقدارهای $h(5)$ و $h(12)$ را بباید. آیا مقدار $h(20)$ معنایی دارد؟ چرا؟ $h(20) = 10$

$$h(12) = \frac{12}{2} = 6 \quad h(5) = \frac{5}{2} = 2,5$$

ب) اگر متغیر این تابع را با t نشان دهیم، مجموعه‌ای که t در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ت) اگر این تابع را با h و متغیر این تابع را با x نشان دهیم، قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

مجموعه‌ای را که z در آن است، مشخص کنید.

ث) دو تابع قسمت‌های (ب) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در این کار در کلاس، مشاهده می‌کنید که تغییر نام یک تابع یا متغیر آن، تأثیری در تابع ندارد و آن تابع را تغییر نمی‌دهد. اگر چه شکل بیان قانون یک تابع ممکن است عوض شود ولی تابع $h(t) = t^2 + 1$ ، $g(x) = x^2 + 1$ ، $f(x) = x^2 + 1$ با دامنه \mathbb{R} به یک تابع اشاره می‌کنند. هر دامنه های زیر معمولت باشد،

x	$x^3 - x + 2$	$f(x)$
-2	$(-2)^3 - (-2) + 2$	$f(-2) = -8 + 2 + 2 = -4$
0	$0^3 - 0 + 2$	$f(0) = 2$
2	$(2)^3 - (2) + 2$	$f(2) = 8 - 2 + 2 = 8$

جاهای خالی را برای تابع با قانون $f(x) = x^3 - x + 2$ و دامنه \mathbb{R} پر کنید.

تابع g با قانون $g(x) = 4x^2 - 3x$ و دامنه $D_g = [-2, 3]$ را در نظر بگیرید. (الف) $g(-2)$ و $g(2)$

را محاسبه کنید. (الف) معنایی دارد؟ چرا؟ هر دوست

$$g(-2) = 4(-2)^2 - 3(-2) = 4(4) + 6 = 22$$

$$g(2) = 4(2)^2 - 3(2) = 4(4) - 6 = 10$$

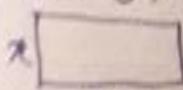
تابع f با دامنه $D_f = [-4, 2]$ و قانون $f(x) = x^3 - 4$ مفروض است. مقادیر خواسته شده را بیابید.

$$(الف) f(-2) = -4 - 4 = -8 \quad (ب) f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - 4 = -\frac{31}{8}$$

کرایه تاکسی وابسته به طول مسافت است. ورودیه تاکسی ۶۰ تومان است و به ازی هر ۱۰۰ متر، ۵ تومان کرایه گرفته شد. قانون تابعی را به دست اورید که کرایه تاکسی را بر حسب مسافت طی شده بیان می‌کند. با توجه به اینکه تاکسی‌ها در روز حداقل ۵ کیلومتر طی می‌کنند، دامنه این تابع را مشخص کنید. هر برای این تابع و متغیر آن انتخاب کنید و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود بیان کنید.

$$D_f = [-500, 500] \quad f(x) = 5x + 60$$

مستطیل‌های را در نظر بگیرید که طول آنها ۲ واحد بیش از عرض آنها است. مساحت این مستطیل‌ها تابعی از عرض آنها است. این تابع را y بنامید و متغیر آن را با x نمایش دهید. دامنه و قانون این تابع را بتوسیله ایا (الف) $y = g(x)$ و معنایی دارد؟



$$y = x(x+2) = x^2 + 2x \quad D_g = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

سنگ را از بالای یک ساختمان ۲۵ متری زده‌اند. طبق قوانین فیزیکی، ارتفاع این سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است. اگر زمان را بر حسب ثانیه با t و ارتفاع از سطح زمین را بر حسب متر اندازه‌گیری کنیم و با $f(t)$ نشان دهیم و لحظه رها گردن سنگ، لحظه صفر باشد. قانون این تابع به صورت $f(t) = -5t^2 + 25$ است. $\rightarrow f(t) = -5t^2 + 25$

الف) دامنه این تابع را تعیین کنید.

ب) مقدارهای (الف) و (ب) را حساب کنید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

ب) ایا (الف) و (ب) معنایی دارند؟ چرا؟ هر دوست

$$\begin{aligned} f(t) &= -5t^2 + 25 \\ t^2 &= -\frac{25}{5} = 5 \\ t &= \pm\sqrt{5} \rightarrow t = \sqrt{5} \end{aligned}$$

فعالیت ۲ صفحه ۲

فعالیت ۲



عدد π تا ده رقم اعشار برابر است با:

$$\pi \approx 3/1415926535$$

برای $n=1, 2, 3, \dots, 10$, اگر $f(n)$ رسم اعشاری π را نشان دهد، برای مثال داریم:

$$f(1)=1, \quad f(2)=4$$

۱) جاهای خالی را پر کنید.

$$f(6)=2, \quad f(9)=3, \quad f(10)=5, \quad f(8)=5.$$

۲) دامنه این تابع را با یک مجموعه نشان دهید.

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

۳) جدول زیر را با توجه به دامنه داده شده کامل کنید.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5

در فعالیت بالا تابعی را مشاهده کردیم که قانون خاصی نداشت و فقط روشی برای یافتن مقدار تابع داشتیم که نقش قانون تابع را بازی می کرد.

به کمک جدول یک تابع، می توان نموداری در صفحه رسم کرد. هر زوج از اعداد جدول که از اعداد دامنه تابع (سطر اول) و مقدار تابع (سطر دوم) تشکیل شده است، نقطه ای در صفحه مختصات را مشخص می کند. مجموعه این نقاط، شکلی را در صفحه مشخص می کنند که نمودار تابع نامیده می شود. از طریق نمودار یک تابع، رفتار تابع را بهتر می توان تشخیص داد.

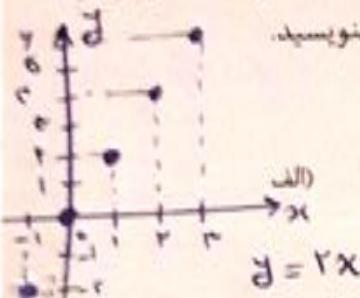


ایران‌لوله

توشهای برای موفقیت

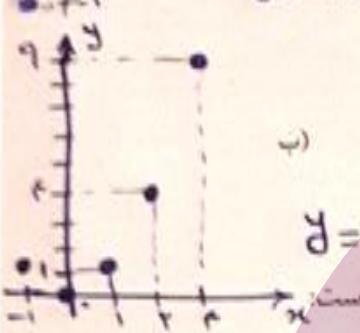


هر یک از جدول‌های زیر نمایش یک تابع با دامنه $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ می‌باشد. نمودار هر یک را در صفحه مختصات رسم کنید. در صورت امکان، قانون تابع را بنویسید.



(الف)	x	-1	0	1	2	3
	y	-2	0	2	4	6

$D = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$



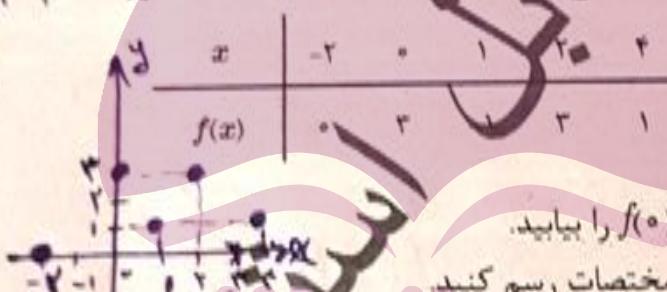
(ب)	x	-1	0	1	2	3
	y	1	0	1	4	9

نمایش جدول تابع f با دامنه $\{-2, 0, 1, 2\}$ به صورت زیر است:

$f(x)$	-2	0	1	2
$f(-2)$	3			
$f(0)$		-1		
$f(1)$			1	

الف) مقادیر $f(-2)$, $f(1)$, و $f(0)$ را بیابید.

ب) نمودار f را در صفحه مختصات رسم کنید.



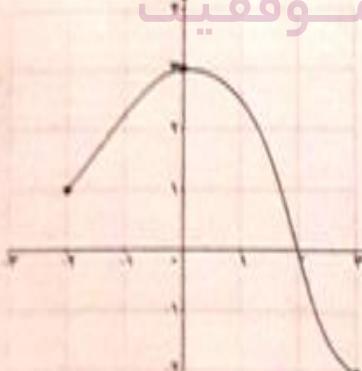
توشهای برای موفقیت

نمودار تابع g به صورت رو به رو است:

الف) با توجه به شکل، دامنه g را بنویسید.

ب) $(-2, g(-2))$ و $(0, g(0))$ را به دست آورید.

پ) آیا $g(4)$ معنایی دارد؟ چرا؟ همچنان در دامنه نیست.



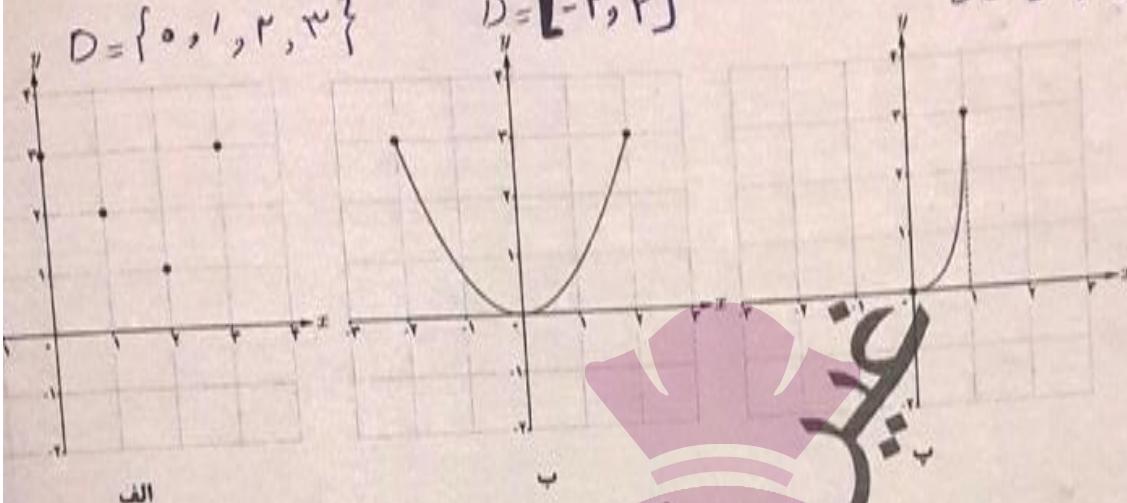
$$Dg = [-2, 3]$$

$$g(0) = 3$$

$$g(-2) = 1$$

$$g(4) \text{ نیست.}$$

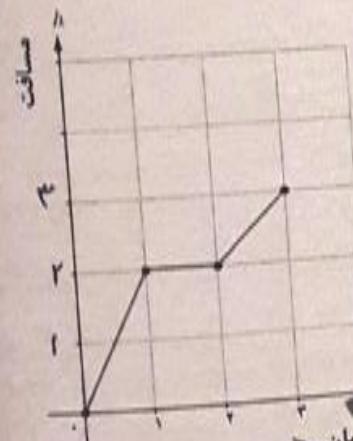
۴ سه تابع زیر را در نظر بگیرید. دامنه هریک از این تابع‌ها را بنویسید.
 الف) $D = \{0, 1, 2, 3\}$
 ب) $D = [-2, 2]$
 پ) $D = [0, 1]$.



الف

ب

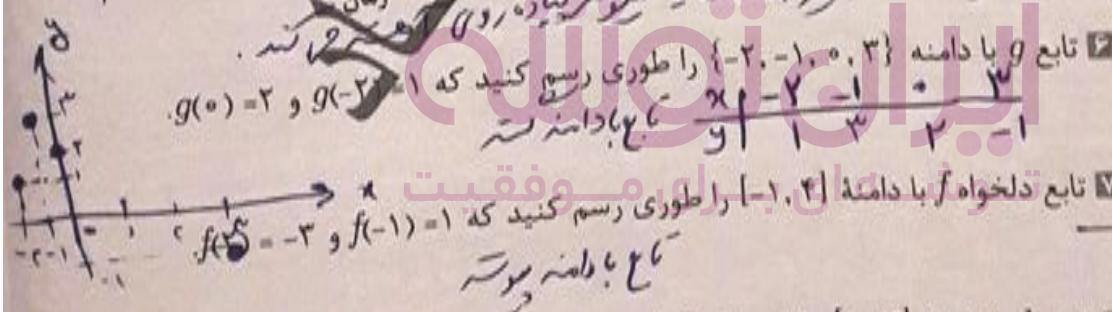
پ



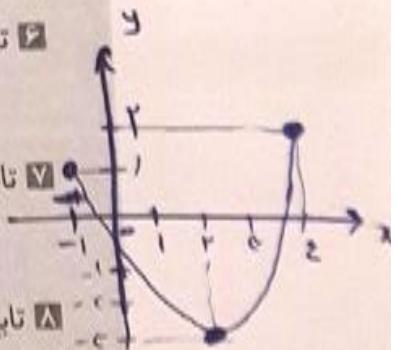
۵ وضعیتی از زندگی روزمره را بتوانید که نمودار زیر نشان‌دهنده آن وضعیت باشد.

علی در مقطع صفر از متر خیز شود
و پس از $\frac{1}{2}$ ساعت پیاره روز تقدیم می‌شود

راهن رو روی $\frac{1}{2}$ متر هر ره فرست ساعت در جهات چهار چشم خاندوش
به مدعت یک ساعت دیگر به سخت! کسر می‌شود، $\frac{1}{2}$ ساعت



۶ تابع g با دامنه $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ را طوری رسم کنید که $g(-2) = 2$ و $g(0) = 1$ باشد.



۷ تابع f با دامنه $\{-1, 0, 1\}$ را طوری رسم کنید که $f(-1) = 1$ و $f(0) = -3$ باشد.

۸ تابع h با دامنه $[0, 3]$ و قانون $h(x) = 3x^2 + a$ را در نظر بگیرید.
 الف) مقدار a را طوری بباید که $h(1) = 2$
 $h(1) = 2 \rightarrow 3(1)^2 + a = 2 \rightarrow a = 2 - 3 \rightarrow a = -1$.
 ب) $h(2)$ را بباید.
 $h(2) = 3(2)^2 - 1 = 12 - 1 = 11$
 پ) آیا $h(4)$ معنایی دارد؟ چرا؟ خیر زیر در دامنه نیست.

پو دمان دوم

تواجه خطي
با نوشته ای برای موفقیت

و درجه دوم

نوعی بامبو پس از آنکه به ارتفاع 20 سانتی‌متر می‌رسد، به طور تقریبی در هر ساعت $2\frac{1}{8}$ سانتی‌متر رشد می‌کند. ارتفاع بامبو تابعی از زمان است و اگر ارتفاع بامبو را (بر حسب سانتی‌متر) پس از t ساعت با $h(t)$ نشان دهیم داریم: $h(t) = 20 + \frac{3}{8}t$.

اگر رشد بامبو را در یک شبانه روز در نظر بگیریم، دامنه این تابع $[0, 24]$ خواهد بود.
جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع‌ها بنویسید.

t (بر حسب ساعت)	h (بر حسب سانتی‌متر)
۰	۲۰
۱	۲۰,۳۷
۲	۲۰,۷۴
۳	۲۱,۱۱
۴	۲۱,۴۸
۵	۲۱,۸۵
۶	۲۲,۲۲
۷	۲۲,۵۹
۸	۲۲,۹۶
۹	۲۳,۳۳
۱۰	۲۳,۷۰
۱۱	۲۴,۰۷
۱۲	۲۴,۴۴
۱۳	۲۴,۸۱
۱۴	۲۵,۱۸
۱۵	۲۵,۵۵
۱۶	۲۵,۹۲
۱۷	۲۶,۲۹
۱۸	۲۶,۶۶
۱۹	۲۷,۰۳
۲۰	۲۷,۴۰
۲۱	۲۷,۷۷
۲۲	۲۸,۱۴
۲۳	۲۸,۵۱
۲۴	۲۸,۸۸

نمودار زیر، نمودار تابع $h(t) = 20 + \frac{3}{8}t$ را نشان می‌دهد.



به ازای هر یک واحد افزایش مقدار t ، مقدار h چه تغییری می‌کند؟ $h(t+1) - h(t)$

رابطه بین دو کمیت h و t خطی است یا غیر خطی؟ چرا؟
و) $h(t)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

$h(t)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ $h(18)$ چطور؟

اگر $h(a) = 29$ را پیدا کنید. این مقدار چه چیزی را نشان می‌دهد؟ مبنی بر چه می‌باشد از
 $h(t) = 20 + \frac{3}{8}t$ است. برای $h(t) = 29$ سمت راست را بخواهیم:

$$20 + \frac{3}{8}t = 29 \Rightarrow t = \frac{19}{\frac{3}{8}} = 52$$

برای دانش آموزان باید از
روی نمودار پاسخ داد



رضا علاقه زیادی به طراحی داشت. او تا سال قبل، ۵ طرح رسم کرده بود و تصمیم گرفت از این به بعد هر ماه ۲ طرح ارائه کند و این کار را تا ۱۲ ماه ادامه دهد.

۱ رضا قبل از این تصمیم، چند طرح داشت؟ او در آخر ماه اول چند طرح داشت؟ در آخر ماه پنجم چطور؟

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱

۱۵ طرح

۲ اگر تعداد ماههای سپری شده را با x و تعداد کل طرح‌ها پس از x ماه را با $f(x)$ نمایش دهیم، قانون تابع f و دامنه آن را بنویسید.

$$f(x) = 2x + 5 \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

۳ مقادیر $(10, 10)$ و $(10, 25)$ را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید. آیا $f(10)$ معنایی دارد؟

$$f(10) = 25$$

۴ اگر دامنه تابع را بازه $[1, 12]$ نظر بگیریم، نمودار تابع را رسم کنید.



۵ اگر $f(a) = 17$ مقدار a را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید. معنی رضای a ماه میم مجموع تعداد ۱۷ طرح ارائه کرده است.

برای دانش آموzan با استفاده از
نمودار پاسخ دهید

$$2a + 5 = 17$$

$$2a = 12$$

$$a = 4$$

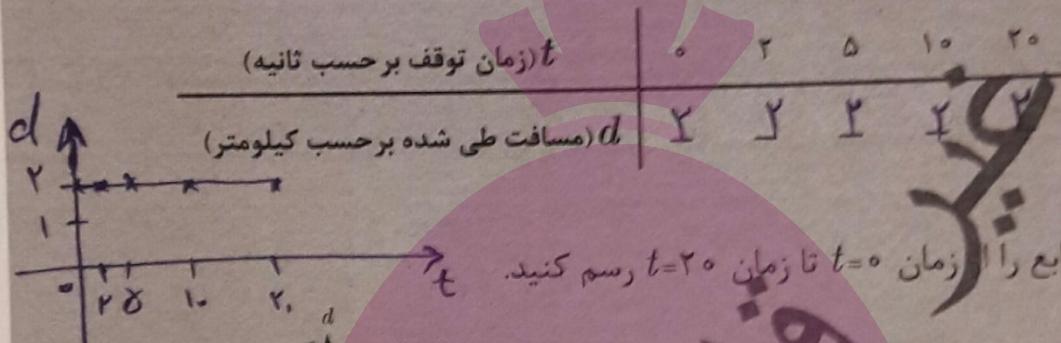
با مرور آنچه که درباره تابع‌های خطی دیدیم، مشاهده می‌شود که در برخی از تابع‌های خطی، با افزایش مقدار متغیر، مقدار تابع به میزان ثابتی افزایش می‌یابد و در برخی دیگر به میزان ثابتی کاهش می‌یابد. آیا می‌توان تابع‌های خطی پیدا کرد که با افزایش یا کاهش مقدار متغیر، مقدار تابع تغییر نکند؟ در فعالیت زیر این نوع از تابع‌های خطی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

سایر سایر

خودرویی از نقطه A شروع به حرکت می‌کند و پس از طی ۲ کیلومتر پشت چراغ قرمز می‌ایستد. مدت زمان چراغ قرمز ۲۰ ثانیه است.

۱ مقدار مسافت طی شده به وسیله خودرو از نقطه A ، پس از ۲ ثانیه توقف پشت چراغ قرمز چقدر است؟ پس از ۵ ثانیه چطور؟

۲ جدول زیر را کامل کنید.



۲ نمودار تابع را از زمان $t=۰$ تا زمان $t=۲۰$ رسم کنید.



۳ با تغییر زمان (t)، مسافت طی شده (d) چه تغییری می‌کند؟ پس حداکثر d چه مقداری می‌شود؟

در بازه زمانی $[۰, ۲۰]$ که چراغ، قرمز است و خودرو پشت چراغ قرمز متوقف است، گرچه زمان می‌گذرد، مسافت طی شده خودرو از نقطه A ، ۲ کیلومتر است و تغییری نمی‌کند. قانون این تابع خطی، به صورت $d = f(t)$ است و نمودار آن پاره خطی به موازات محور x هاست. در این فعالیت تابعی را بررسی کردیم که به ازای تمام مقادیر دامنه، مقداری ثابت دارد. این نوع تابع‌ها، ساده‌ترین نوع توابع خطی هستند.

تابعی را که به ازای تمام مقادیر متغیر، مقداری ثابت دارد، تابع ثابت می‌نامند.

اگر f یک تابع ثابت باشد قانون آن به صورت $f(x) = c$ می‌باشد که در آن c یک عدد مشخص است. نمودار تابع ثابت با دامنه \mathbb{R} خطی به موازات محور x ها است.

مثال ۲

معمولًا پس از ۲۲ سالگی رشد قد متوقف می‌شود. طول قد که تابعی از زمان است در بازه زمانی تقریبی ۲۲ سالگی تا حدود ۶۰ سالگی، تقریباً ثابت است. بنابراین طول قد افراد به عنوان تابعی بر حسب سن افراد، در این بازه، یک تابع ثابت است.

بر کلاس ۲



- ۱ نمودارهای زیر چند تابع خطی را نشان می‌دهند
مشخص کنید کدام نمودار، مربوط به تابع ثابت است؟
دلیل خود را توضیح دهید.

زیرا افراد ایست اول نمودار تابع هر زاد آن لغزشی
نمودار به سه چیز آنی مثبت است.

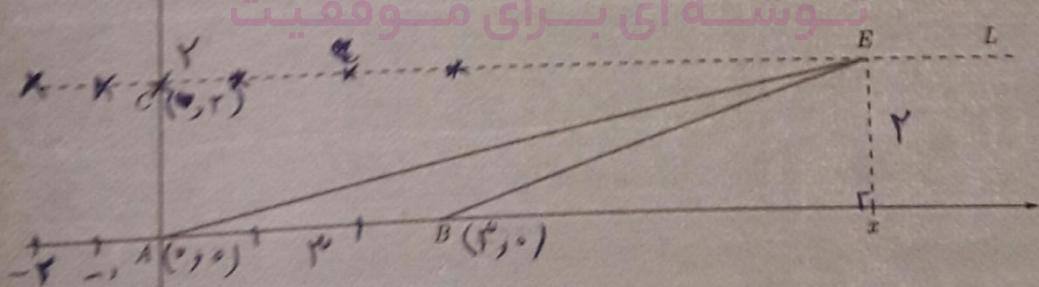
فاز

تابع ثابت است زیرا افرادی که می‌رسد می‌ردد
نه مثبت نه منفی همچنان که این تابع نمودار است.
لطفاً مردم را سه چیز مثبت خواهید.

- ۲ در صفحه مختصات زیر، مثلثی با رئوس $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ رسم کنید.

ایران رسول

توشهای برای موفقیت



الف) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$

ب) در جدول زیر، طول نقطه‌ای از خط L (مانند E) است و S (تابعی از x) مساحت مثلث ΔBE است. جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع‌ها بنویسید.

x	-2	-1	0	1	2
$S(x)$

پ) قانون این مساحت را بنویسید و توضیح دهید چرا S تابعی خطی از x است؟ حون هزاره مساحت m است
 $S = \frac{1}{2} \times 3 \times h = \frac{1}{2} \times 3 \times x$

ت) به ازای هر یک واحد افزایش مسدار x ، مسدار $S(x)$ چه تغییری می‌کند؟ نمودار این تابع یک خط است، شبیه این خط پسند را بگزیند؟ $m = 0$

ث) با استفاده از جدول، نمودار تابع را رسم کنید.



ی) دانیم نمودار هر تابع خطی با دامنه \mathbb{R} یک خط راست است. نمودار تابع خطی $f(x) = ax + b$ با غیر مقادیر a و b چگونه تغییر می‌کند؟ فعالیت رو به رو، می‌تواند پاسخی برای این سؤال فراهم کند.

الف) اگر $y = ax + b$ باشد طبقاً مرضی از میراث رله حین تیپ خطر طبیعی حسنه
خطوط موازی با عرض از مدها شفادست بسته باشند.

ب) اگر طبقاً مرضی از مدها داشت باشد همچه خطوط فرتفعی طول راه رفعی کند
وی با شبکهای شفادست (حین تیپ خطر تغییر می‌کند).

فعالیت (۲)



تابع خطی $f(x) = ax + b$ را در نظر بگیرید. با استفاده از جنوجبرا مطابق دستور العمل صفحه ۴۳، دو لغزنه برای a و b در نظر بگیرید.

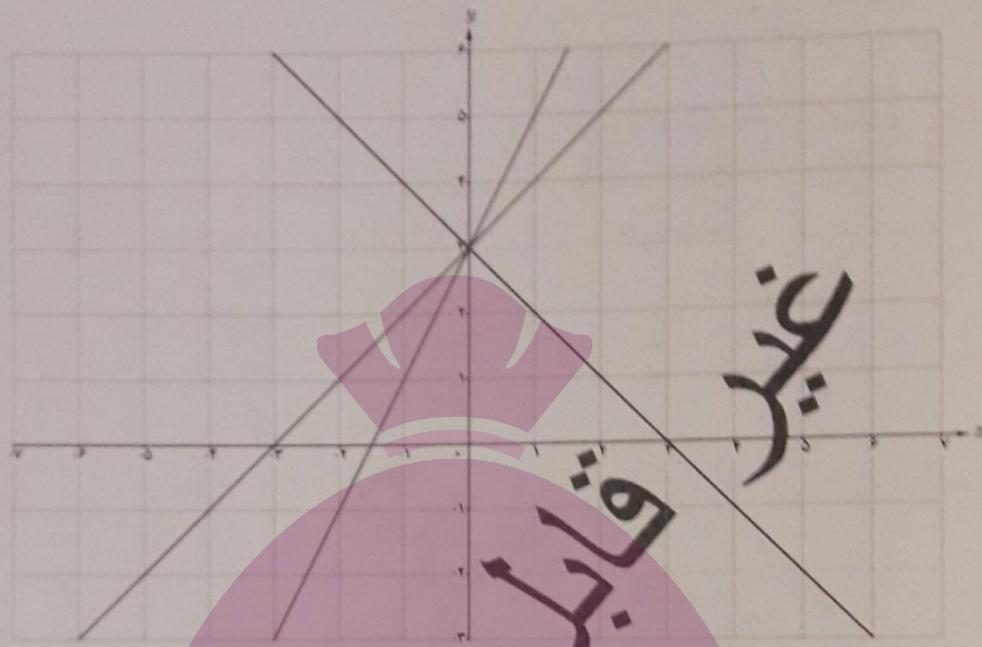
۱ با ثابت نگهداشتن a و تغییر مقادیر b ، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ وضعیت خطهای به دست آمده، نسبت به هم چگونه است؟ صوازی

۲ با ثابت نگهداشتن b ، به ازای مقادیر مختلف a ، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ خطوطی تیپ صفو و سرمه

۳ اگر a مثبت باشد، زاویه خط با جهت مثبت محور طولها چگونه است؟ اگر a منفی باشد، زاویه خط با جهت مثبت محور طولها چگونه است؟ زاویه تند زاویه باز

فعالیت بالا نشان می‌دهد که با ثابت ماندن a و تغییر b نمودار تابع، خطهایی هستند که با یکدیگر موازی هستند. اگر b افزایش یابد، این خط به موازات خود به بالا منتقل می‌شود و اگر b کاهش یابد، این خط به موازات خود به پایین منتقل می‌شود و با صفرشدن b ، خط از مبدأ می‌گذرد. با ثابت ماندن b و تغییر a خطهایی به دست می‌آیند که شبکهای مختلفی دارند و همگی از یک نقطه می‌گذرند. اگر a مثبت باشد، زاویه خط با جهت مثبت محور طولها، زاویه تند و اگر a منفی باشد این زاویه باز است.

شکل زیر نمودار برخی از این تابع‌ها را نشان می‌دهد.



همان طور گه مشاهده می کنیم نمودار این تابع ها در نقطه $\left[\frac{2}{3}\right]$ هم دیگر را قطع نمی کنند. پس تمام این تابع های خطی از نقطه $\left[\frac{2}{3}\right]$ می گذرد.

۱) وضعیت خط‌های به معادله $c = 2y + 5x$ را به ازای مقادیر مختلف c . توصیف کنید. شیب

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{c}{2}$$

این خط‌ها چقدر است؟
شیب این خطوط مثبت است.
 $c = 0$ و لازم است $y = -\frac{5}{2}x$ باشد.

دلویز این خطوط با هم بزرگتر هستند.

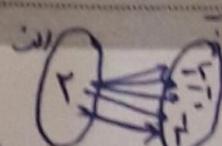
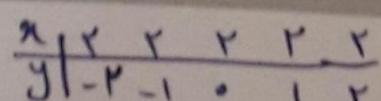
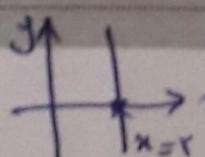
۲) وضعیت خط‌های به معادله $c = 2y + cx$ را به ازای مقادیر مختلف c . توصیف کنید این

خط‌ها از چه نقطه مشترکی می گذرند؟
 $x + \frac{c}{2}y + c = 0$

فرض کنید $c \neq 0$ است. بنابراین $\frac{c}{2}y = -x - c$ (دو نقطه مجزا را قطع خواهد

آیا هر خطی در صفحه مختصات نمودار یک تابع خطی است؟ چرا؟

آنچه می‌دانیم یک تابع خطی است.



دلویز برای کسی است که می‌تواند در میان دو جواب دنار.

مسائل صفحه ۴۴

- ۱ در زیر، جدول مقادیر مربوط به چهارتابع داده شده است. گدام جدول می‌تواند مربوط به یک تابع خطی باشد؟

سوالات



با هم توانست را برازیم
و اصرار از اسی گشت و کمال
ب صدر را تا قم نیز نشاند.

نایم خواست

x	-2	-1	0	1
$g(x)$	5	-10	-20	-40

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	-8	-1	1	1

پنجه

بهم می‌است

x	0	1	2
$k(x)$	1	3	5

با هم خواست

x	-2	-1	1
$h(x)$	5	5	5

- ۲ علی در یک شرکت بیمه کار می‌کند او ۱۰۰۰,۰۰۰ تومان به عنوان حقوق پایه دریافت می‌کند و به ازای هر مشتری جدید که جذب می‌کند، ۵۰۰,۰۰۰ تومان به حقوق اضافه می‌شود. الف) قانونی برای حقوق علی به عنوان تابعی از تعداد مشتری ایشان که ماهانه جذب می‌کند، بنویسید.

ب) اگر او در یک ماه ۱۲ مشتری جدید برای شرکت جذب کرده باشد، میزان حقوق او در آن ماه چقدر خواهد بود؟

$$y = 50000 \times 12 + 1000,000 = 16000000$$

- پ) چرا این تابع خطی است؟ حجون با همراهان دریگردی کیست و حقوق صدر را افزوده است؟
ت) اگر علی بخواهد در یک ماه ۲,۰۰۰,۰۰۰ تومان حقوق بگیرد، در این ماه چند مشتری باید جذب کند؟
- $$2000000 = 50000x + 1000000 \Rightarrow x = 4000$$

- ۳ آرمان سوار بر یک کشتی، در فاصله ۱۰ کیلومتری از ساحل قرار دارد و با سرعت ثابت ۳ کیلومتر بر ساعت از ساحل دور می‌شود. این حرکت ۵ ساعت ادامه داشته است.

الف) قانون و دامنه تابع مربوط به فاصله آرمان از ساحل (برحسب کیلومتر) را برحسب t (زمان برحسب ساعت) بنویسید.

ب) آرمان پس از ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از ساحل خواهد بود؟

$$y = 3t + 10$$

پ) چرا این تابع خطی است؟ شب نمودار این تابع مثبت است یا منفی؟ \rightarrow
نمودار را با محاسبه مقدار y برای $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ درجه سانتی گراد بنویسید.

۳ دمای هوا در شهر تهران در تابستان، در طول یک هفته، در ساعت ۱ ظهر، ۳۵ درجه سانتی گراد بوده است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

روزهای معکوف (روز) d	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t (دما برحسب درجه سانتی گراد)	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵

ب) دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

پ) آیا این تابع، یک تابع ثابت است؟ چرا؟ نمودار را در دامنه اش رسم کنید.

۵ رابطه بین دو واحد اندازه گیری دمای، درجه سانتی گراد (C) و درجه فارنهایت (F) با قانون $F = \frac{9}{5}C + 32$ بیان می شود.

الف) مقدارهای $F(28)$ و $F(-40)$ را محاسبه کنید و معنای آن را بیان کنید.

$$F(28) = \frac{9}{5}(28) + 32 = 82^\circ F(-40) = \frac{9}{5}(-40) + 32 = -40^\circ$$

ب) دمای صفر درجه سانتی گراد، معادل چند درجه فارنهایت است؟

$$F(0) = \frac{9}{5}C + 32$$

پ) اگر $F(C) = 212$ ، مقدار C را حساب کنید. چه چیزی را نشان می دهد؟

$$\frac{9}{5}C + 32 = 212$$

$$\frac{9}{5}C = 212 - 32$$

$$1.8C = 180$$

$$C = 100$$

فعالیت ۴ صفحه ۴۷

(۴)

به کمک جئوجبرا نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. (در هر مرحله یک لغزندۀ تعریف کنید).

۱ نمودار تابع‌های درجه دوم $y = x^2 + p$ را به ازای مقادیر مختلف p رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y = x^2 + p$ را با نمودار تابع $y = x^2$ توصیف کنید.

۲ نمودار تابع‌های درجه دوم $y = (x-q)^2$ را به ازای مقادیر مختلف q رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y = (x-q)^2$ را با نمودار تابع $y = x^2$ توصیف کنید.

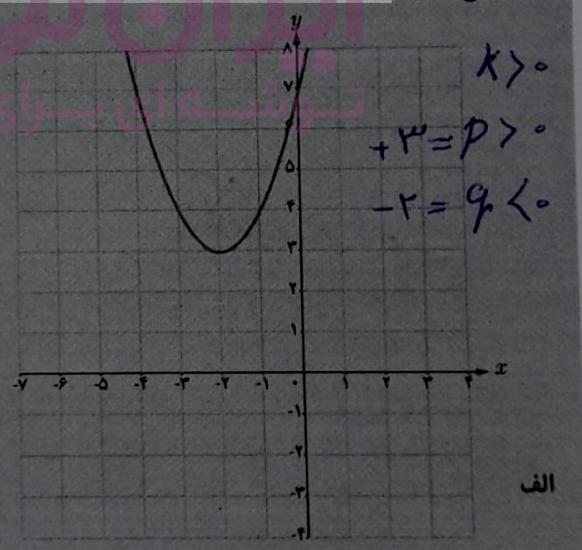
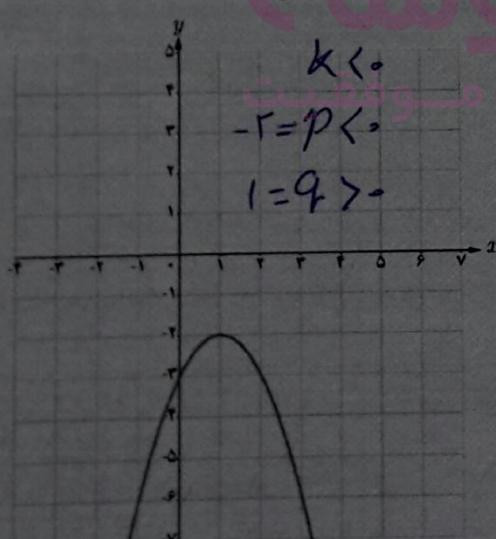
۳ نمودار تابع‌های درجه دوم $y = kx^2$ را به ازای مقادیر مختلف مثبت و منفی برای k رسم کنید. با تغییر علامت k از مثبت به منفی چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

کار در کلاس ۴ صفحه ۴۸

کار در کلاس ۴



نمودارهای زیر مربوط به تابع درجه دوم $y = k(x-q)^2 + p$ می‌باشد. علامت k و مقادیر p و q را تعیین کنید.



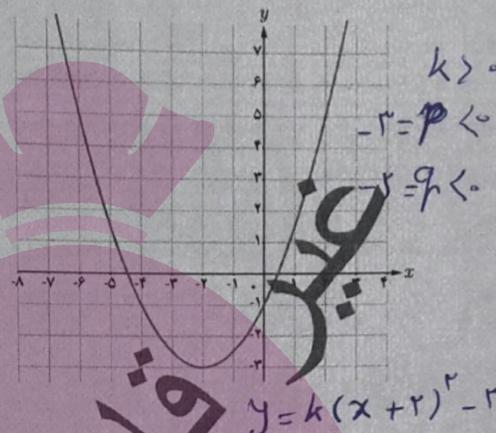
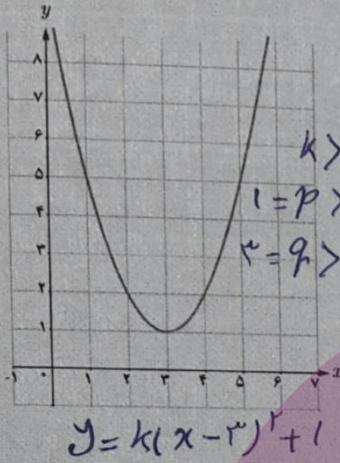
الف

مسائل صفحه ۴۴

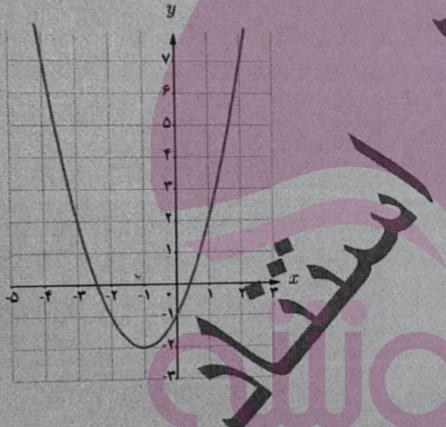
مسائل



- ۱ نمودارهای زیر مربوط به تابع درجه دوم، $y=k(x-q)^2+p$ هستند. علامت k و مقدار p ، q را تعیین کنید.

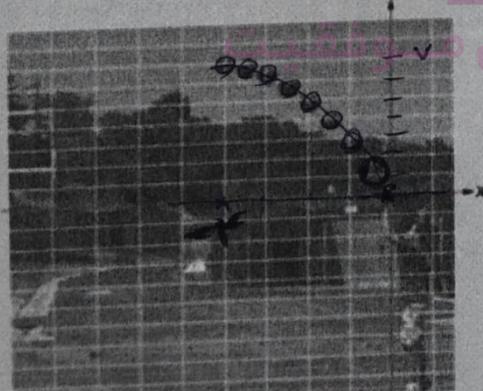


- ۲ نمودار زیر مربوط به یک تابع درجه دوم است. مشخص کنید که کدام قانون، مربوط به این نمودار است.



- الف) $f(x) = (x-1)^2 + 1$
ب) $f(x) = (x-1)^2 - 1$
پ) $f(x) = (x+1)^2 + 2$
ت) $f(x) = (x+1)^2 - 2$

- ۳ فرید بسکتبال بازی می‌کند. تصویر زیر یک پرتاپ او را به سمت سبد نشان می‌دهد. صفحه مختصات طوری قرار داده شده است که مبدأ مختصات دقیقاً روی نقطه پرتاپ توپ قرار گیرد. ارتفاع توپ از سطح زمین در هر لحظه یک تابع درجه دوم با قانون $y = k(x-q)^2 + p$ است. علامت k و p را تعیین کنید.



$$k < 0, p > 0, q < 0$$

$$y = -(x+4)^2 + 7$$

فعالیت (۵)

اگر دما در سطح دریا 15 درجه سانتی گراد باشد، در کوه دماوند رابطه بین دما (T) بر حسب درجه سانتی گراد) و ارتفاع از سطح دریا (h بر حسب متر) با تساوی $T(h) = 15 - \frac{h}{150}$ مشخص می شود. در اینجا T تابعی از h است و دامنه این تابع با $[0, 5610]$ است.

(5610 ، ارتفاع قله دماوند بر حسب متر است)

۱) $T(0)$ چه چیزی را نشان می دهد؟

$$T(0) = 15$$

۲) در ارتفاع 1800 متری از سطح دریا، دما چند درجه است؟

$$T(1800) = 15 - \frac{1800}{150} = 15 - 12 = 3$$

۳) در زیر نمودار تابع T رسم شده است با توجه به نمودار به سؤال های زیر پاسخ دهید. (ارتفاع h را روی محور افقی (هر واحد را 100 متر در نظر می گیریم) و دمای T را روی محور عمودی نمایش داده شده است).

الف) تابع T از درجه می باشد. (مجرد بدها)

ب) نمودار این تابع در چه نقطه ای محور افقی (ارتفاع) را قطع می کند؟ این نقطه چه چیزی را نشان می دهد؟

$$T(h) = 15 - \frac{h}{150} \Rightarrow 15 = 15 - \frac{h}{150} \Rightarrow h = 0$$

$$15 - \frac{t}{150} = 0 \Rightarrow t = 2250$$

$$t = 2250$$

۴) جواب معادله $0 = 15 - \frac{h}{150}$

را بیابید. جواب این معادله چه چیزی را نشان می دهد؟

آریا عجیب نه در آن دعا هم درست نمی شود.

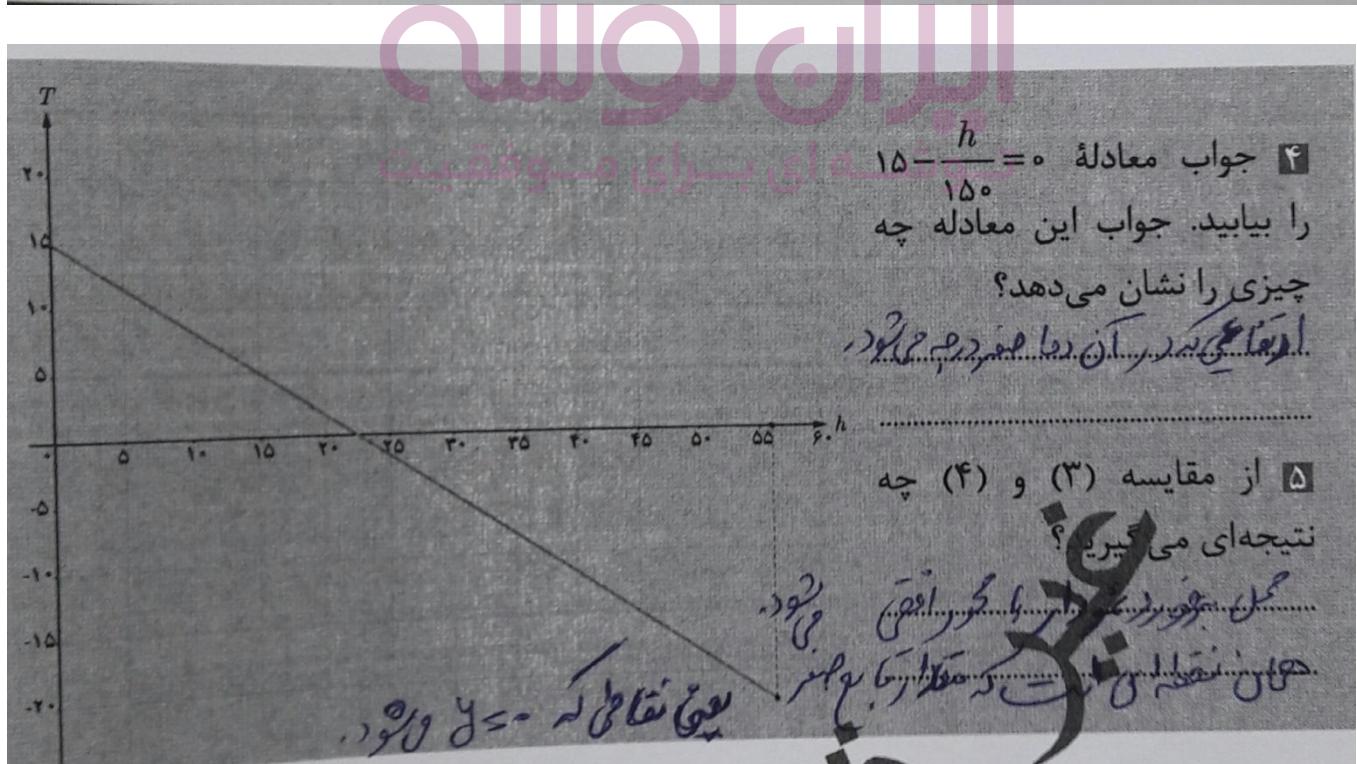
۵) از مقایسه (۳) و (۴) چه

نتیجه ای می گیریم؟

گلشن بخوبی بخواهد از محور افقی خود.

همان نتیجه است که مکلا را باید همراه باشیم.

بعیق نقاومی که





آب از بالای آبشاری که ارتفاع آن $h(t) = -5t^2 + 180$ متر است، به رودخانه می‌ریزد. تابع h با قانون $h(t) = -5t^2 + 180$ مدلی ریاضی است که ارتفاع هر قطره آب (بر حسب متر) از سطح رودخانه را بعد از t ثانیه از جداشدن از بالای آبشار مشخص می‌کند.

- ۱ ارتفاع یک قطره آب از سطح رودخانه بعد از ۲ ثانیه، چقدر است؟ $h(2) = -5(2)^2 + 180 = 140$ متر

۲ نمودار تابع با قانون $h(t)$ و دامنه \mathbb{R} آورده شده است. (زمان را روی محور افقی و ارتفاع را روی محور عمودی، هر واحد ۱۰ متر، در نظر بگیرید). نمودار این تابع در چه نقطه‌هایی محور x را قطع می‌کند؟ این نقطه‌ها چه چیزی را نشان می‌دهند؟ $t = \pm\sqrt{\frac{180}{5}} = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

۳ جواب‌های معادله $-5t^2 + 180 = 0$ چه مقادیری هستند؟ کدام جواب در شرایط این مسئله قابل قبول نیست؟ دلیل خود را بیان کنید.

۴ دامنه تابع h را طوری تعیین کنید که قانون $h(t)$ ارتفاع قطره آب از سطح رودخانه را مشخص کند.

توشه‌ای برای موفقیت

مسائل صفحه ۴۴

اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، کدام گزینه جواب‌های معادله $f(x) = 0$ است.

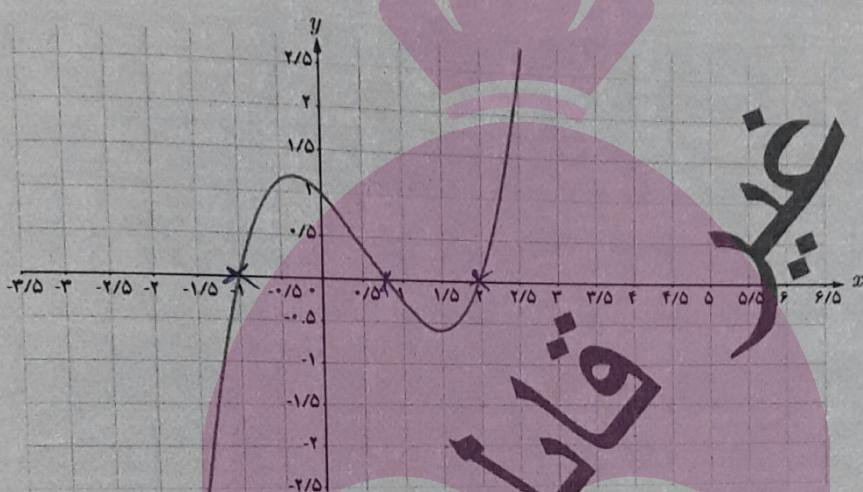
- ۱ اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، کدام گزینه جواب‌های معادله $f(x) = 0$ است.
 ب) ۱ و -۱ و $\frac{1}{8}$
 الف) ۲ و -۲ و -۱

مسائل



ت) معادله جواب ندارد.

✓ پ) ۲ و $\frac{1}{8}$ و -۱



۲ معادلات زیر را به کمک رسم نمودار با استفاده ارجو جبرا حل کنید.

$$\begin{array}{l} \text{الف)} x=2 \\ \text{ب)} 3x-6=0 \\ \text{پ)} x^3+5x+6=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ب)} 3x^3-2x=16 \\ \text{ت)} x^3-x^2=4x+1 \end{array}$$

۳ اگر توپی را به هوا پرتاب کنیم، ارتفاع آن از سطح زمین (بر حسب متر) تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) است. اگر ارتفاع توپ را با h و زمان را با t نشان دهیم برای یک پرتاب خاص، قانون این تابع به صورت t $h(t) = -5t^3 + 20t$ است. دامنه تابع $[0, 4]$ است.

در چه زمان‌هایی ارتفاع این توپ ۲ متر است؟ چند جواب به دست می‌آید؟ چرا؟

حرکت زمین صفر صنانگ نماید.

$$h = 2$$

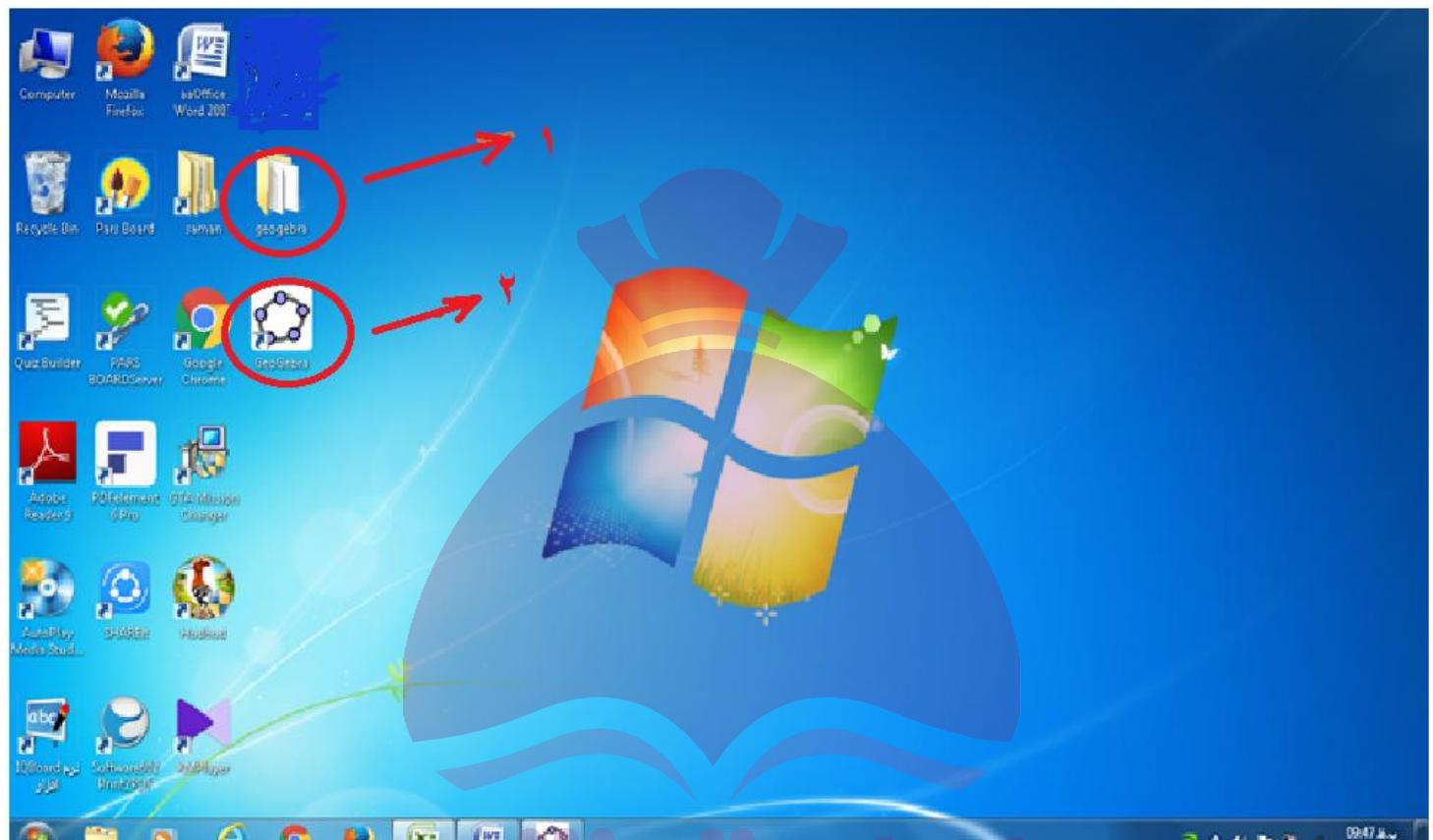
$$\Rightarrow -5t^3 + 20t = 2$$

$$\Rightarrow -5t^3 + 20t - 2 = 0$$

سرانجام از هم از هم

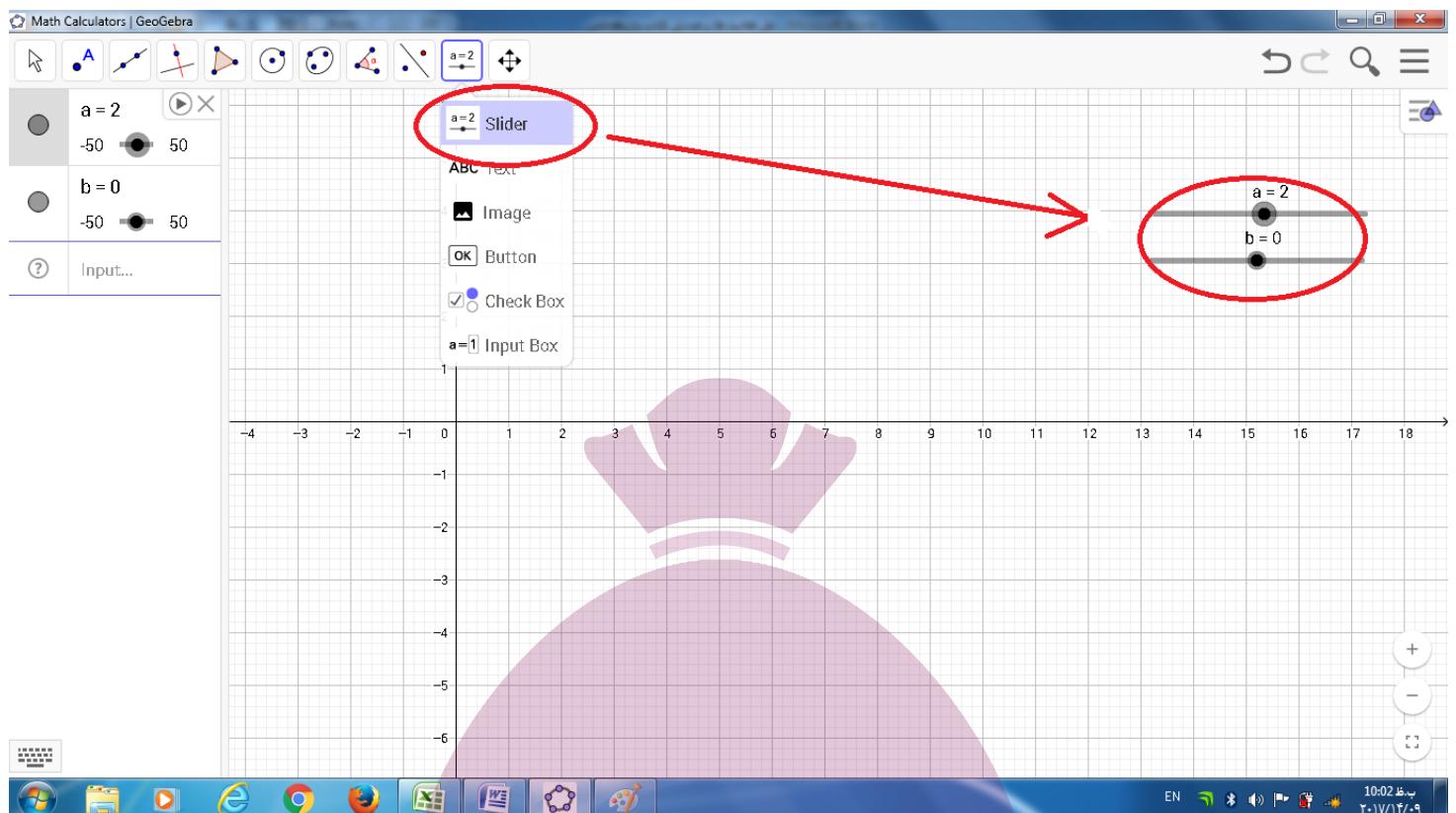
طريقه استفاده از نرم افزار جئوجبرا:

بعد نصب نرم افزار جئوجبرا، آيکن آن که به صورت شکل زير روی دسكتاپ کامپيوتر شما قرار مى گيرد را اجرا کنيد:



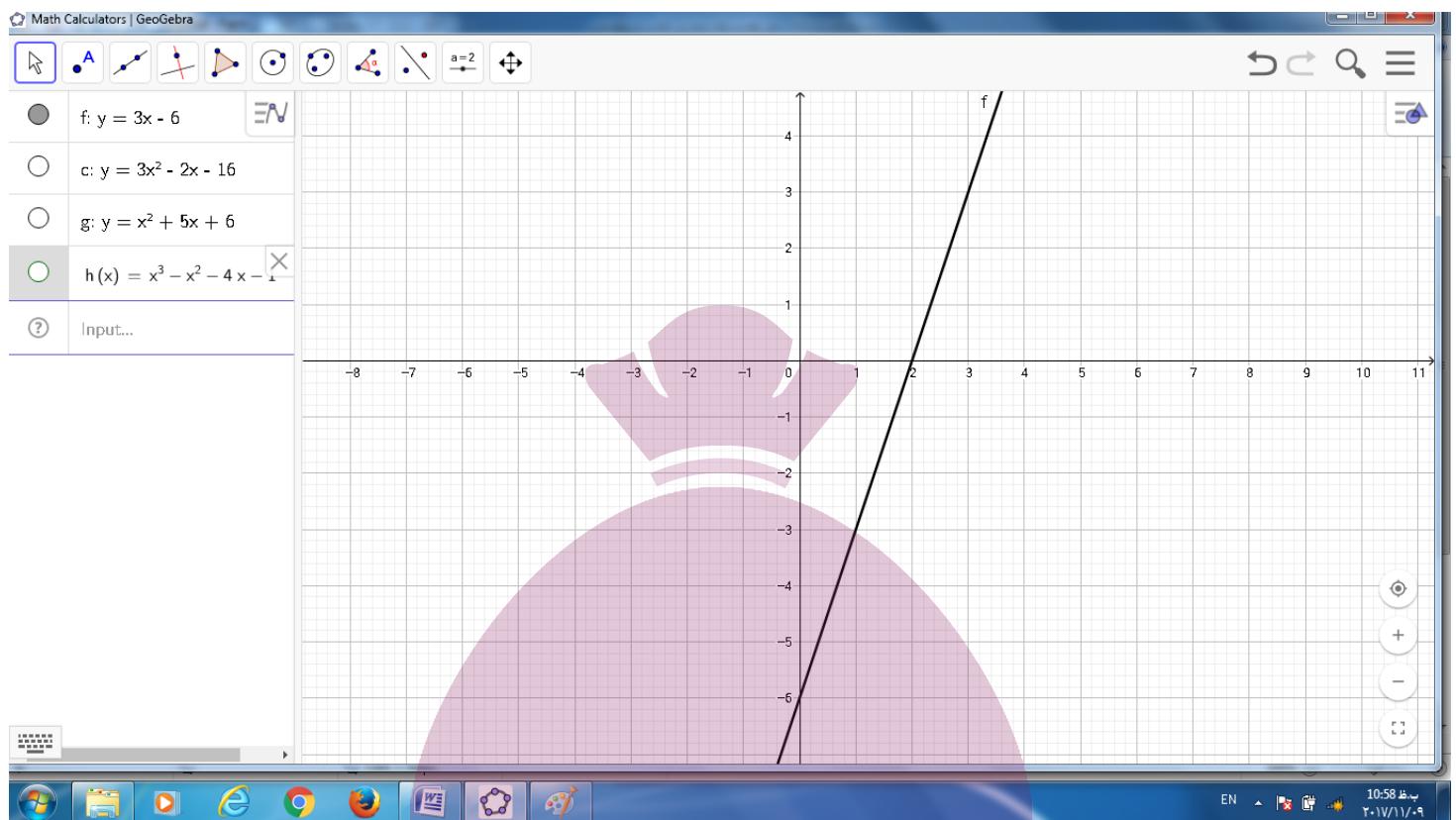
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

سپس طبق شکل زیر به تعداد مورد نیاز Slider روی صفحه تعریف می کنیم:

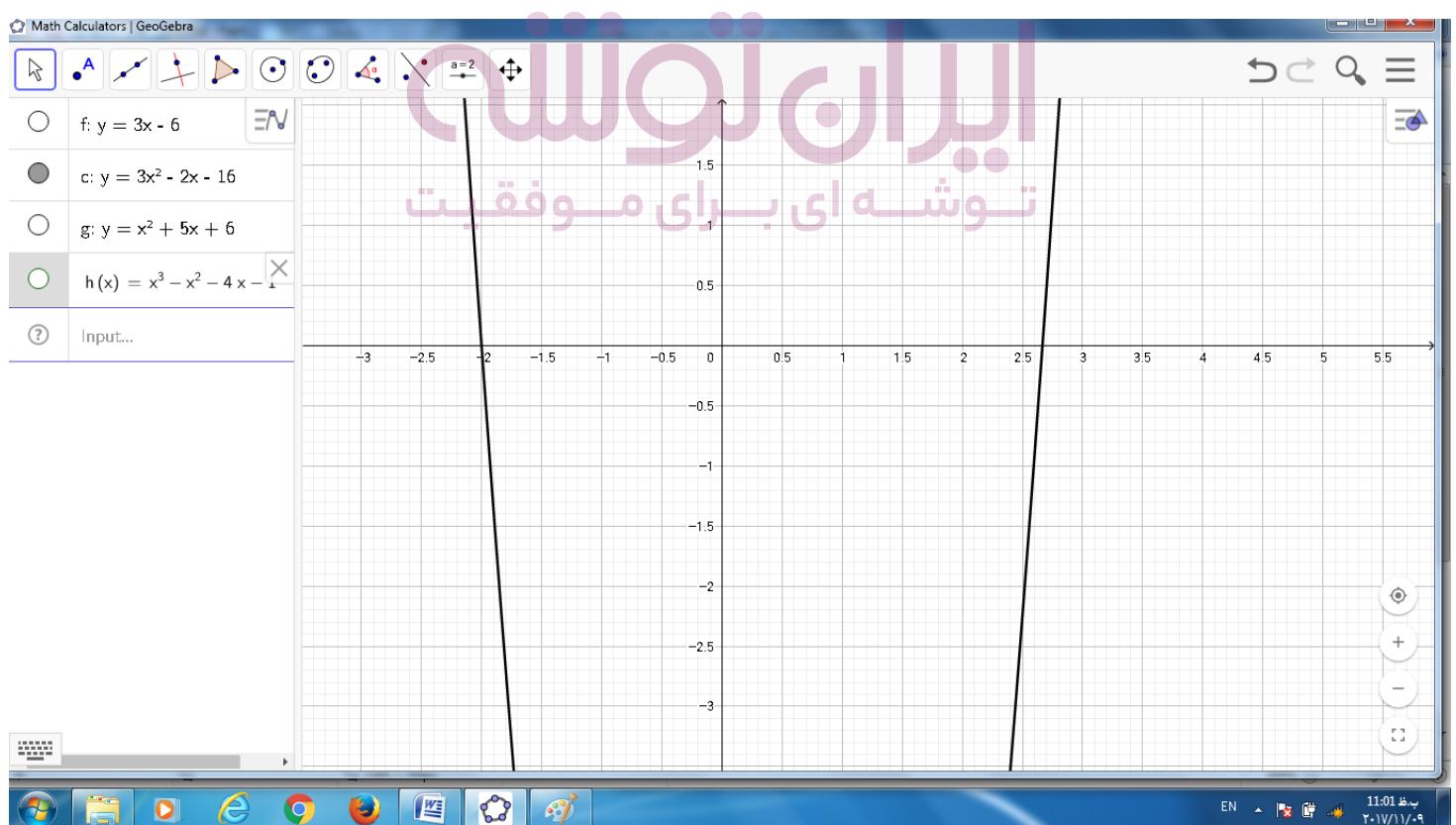


ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

برای رسم نمودار تابع باید طبق شکل زیر معادله تابع را با استفاده کلید نرم افزار و کامپیوتر خود در محل مورد نظر تایپ کنید تا نمودار توسط نرم افزار رسم شود:



نمونه هایی از رسم نمودار تمرینات کتاب:



فعالیت (۶)



۱ درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با R نشان دهید و معادله درآمد را تشکیل دهید.

$$R = x \cdot p$$

۲ رابطه بین قیمت کالا و میزان کالای فروخته شده به صورت $p = 80000 - 200x$ است. تابع درآمد را برحسب p بنویسید.

$$R = (80000 - 200p)p = 80000p - 200p^2$$

۳ چندجمله‌ای قانون تابع درآمد بر حسب p از درجه چند است؟

۴ رابطه‌ای برای p بنویسید که در آن، درآمد حاصل از فروش دست سازها، بیشتر از ۸ میلیون تومان باشد.

$$10000p - 200p^2 > 8000000$$

همان طور که در فعالیت بالا دیدید، هدف مؤسسه، پیدا کردن رابطه‌ای بین قیمت کالا و درآمد حاصل از فروش است تا با قیمت‌گذاری مناسب، درآمدی بیش از ۸ میلیون تومان داشته باشد. مدل ریاضی این مسئله یک نامساوی است که با استفاده از آن می‌توان شرایط مطلوب مسئله را برقرار کرد.
این گونه نامساوی‌ها را نامعادله می‌نامند.

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

نامساوی هایی به صورت $ax^2 + bx + c \geq 0$ یا $ax^2 + bx + c \leq 0$ اعداد a, b, c از آنها را که در $ax^2 + bx + c = 0$ را مشخصی هستند ($a \neq 0$) نامعادله درجه دوم می نامند. مقدارهایی از x که نامعادله را به یک نامساوی درست تبدیل می کنند، جوابهای نامعادله می نامند.

مثال ۷

دیپی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۵ متر به هوا پرتاپ شده است. ارتفاع این توپ از سطح زمین عنوان تابعی از زمان (t بر حسب ثانیه) در یک پرتاب خاص با تابع $h(t) = -5t^2 + 12t + 15$ بیان شده است. اگر بخواهیم زمان هایی را که ارتفاع توپ بیش از ۱۸ متر باشد به دست آوریم، باید معادله $-5t^2 + 12t + 15 > 18$ را حل کنیم که می توان آن را به صورت $-5t^2 + 12t - 3 > 0$ نوشت. جوابهای این نامعادله همان زمان هایی است که ارتفاع توپ بیش از ۱۸ متر باشد.

در یک شرکت سازنده تلفن همراه، رابطه بین قیمت فروش تلفن همراه (p)، (بر حسب صدهزار تومان) و تعداد تلفن همراه فروخته شده (x)، از رابطه $15 - 0.25x = p$ به دست می آید.

$$\Rightarrow -125x = 125 - p$$

$$\frac{1}{4}x = 125 - p$$

$$x = 400 - 4p$$

۱) مقدار x را بر حسب p بنویسید.

۲) درآمد حاصل از فروش تعداد x کالا ($R(p)$) را بر حسب p بنویسید.

$$R(p) = p \times x = p(400 - 4p) = 400p - 4p^2$$

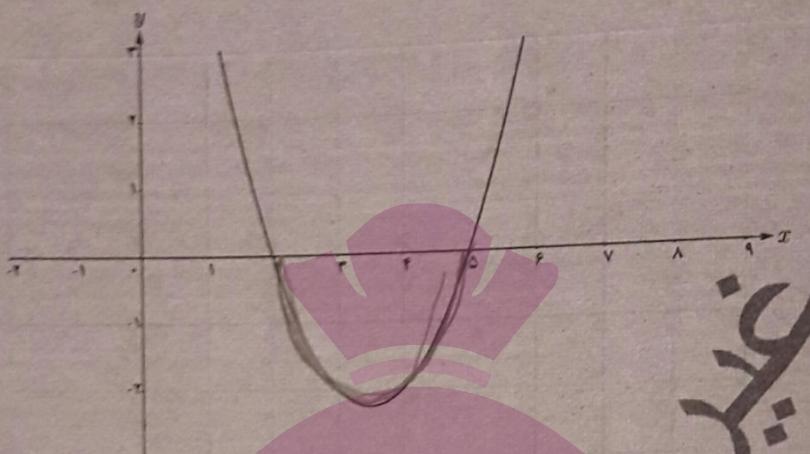
۳) نامعادلهای بنویسید که نشان دهد برای چه مقدارهای p ، درآمد حاصل از فروش، بیشتر از ۴۰۰ میلیون است.

$$400p - 4p^2 > 400000$$

همان طور که مشاهده می کنید مدل ریاضی برخی از مسائلی که با آن روبه رو می شویم به صورت نامعادله است و برای حل مسئله لازم است نامعادله را حل کنیم. در بخش قبل دیدیم که محل های برخورد نمودار تابع $y = f(x)$ با محور طول ها (در صورت وجود)، جوابهای معادله $f(x) = 0$ هستند یعنی برای حل معادله $f(x) = 0$ ، می توانیم از نمودار تابع f کمک بگیریم.

فعالیت صفحه بعد نشان می دهد برای حل نامعادله ها نیز می توان از نمودار تابع ها استفاده کرد.

تابع $f(x) = x^2 - 7x + 10$ را با دامنه \mathbb{R} در نظر بگیرید. نمودار آن در زیر رسم شده است.



۱ طول نقاط محل بخورد نمودار تابع با محور x ها، چه چیزی را نشان می‌دهند؟ **تفاوت هسته راهنمایی**

با استفاده از نمودار، جواب‌های معادله $= f(x)$ را به دست آورید.

۲ آن قسمت از نمودار تابع را که با محور x ها قرار گرفته است، رنگی (پرنگ) کنید و جمله زیر را کامل کنید:

عرض نقاط رنگی (کوچک‌تر از صفر / **لزگ‌تر از صفر**) است.

۳ به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع مثبت است؟ این مقادیر از دامنه را به صورت بازه نمایش دهید.

۴ مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 7x + 10 > 0$ با مجموعه به دست آمده در (۴) چه رابطه‌ای دارد؟ توضیح دهید.

۵ آن قسمت از نمودار تابع را که پایین محور x ها قرار گرفته است با رنگ دیگری مشخص کنید.

۶ به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع منفی است؟ این قسمت از دامنه را با استفاده از بازه‌ها بنویسید.

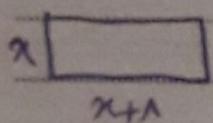
۷ آیا مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 7x + 10 < 0$ همان مجموعه به دست آمده در (۷) است؟ توضیح دهید.

۸ **تفاوت هسته راهنمایی** این سوال را بازگذاری کنید. در اینجا دو مجموعه معرفی شده اند: **لزگ** و **کوچک**.

کلاس ۷



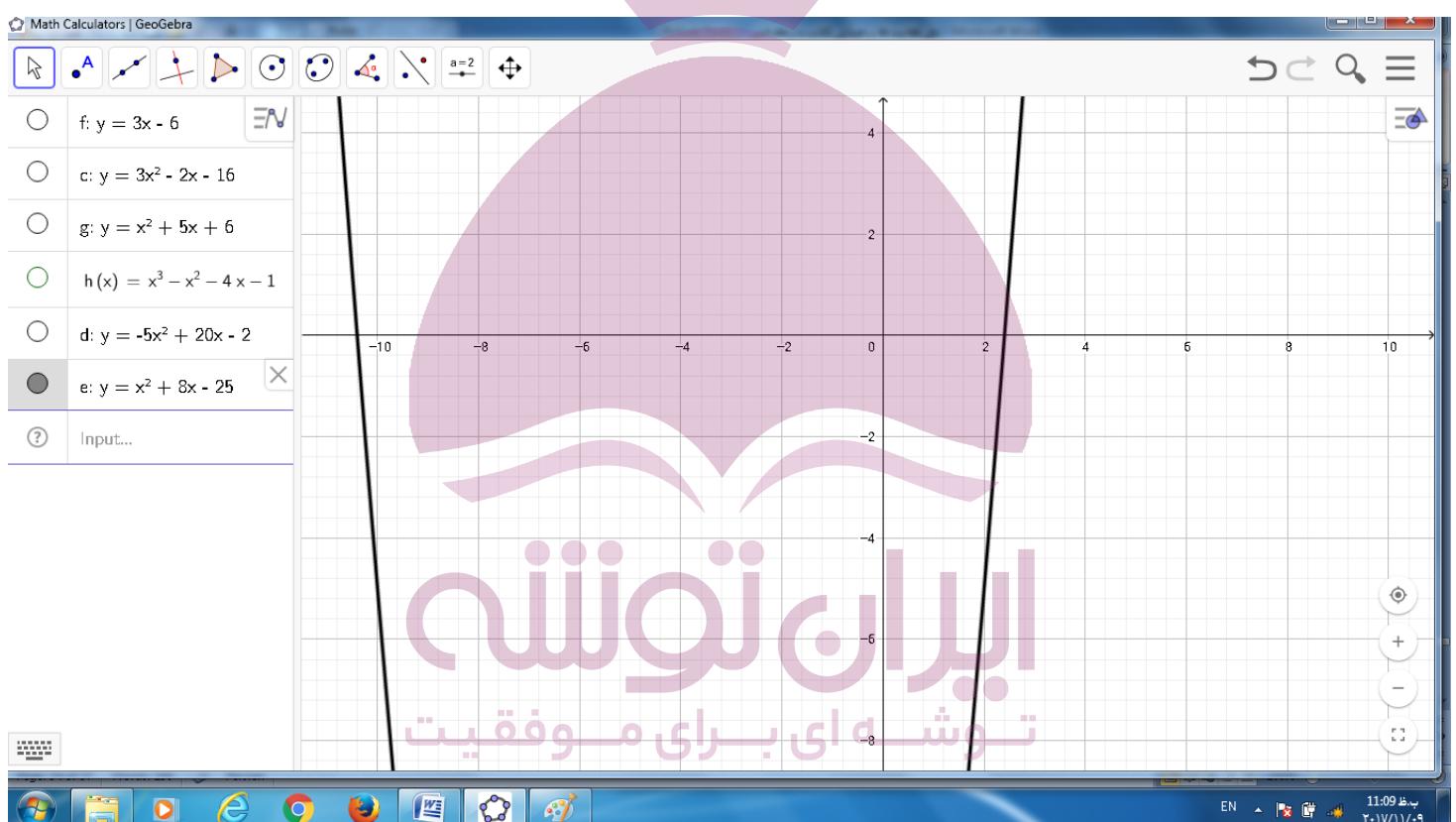
مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۸ سانتی‌متر بیشتر از عرض آنها است. عرض این مستطیل‌ها چه مقادیری باید داشته باشند تا مساحت آنها از ۲۵ سانتی‌متر مربع کمتر باشد.



$$S = x \times y = x(x + 8)$$

$$\Rightarrow S < 25 \rightarrow x^2 + 8x < 25$$

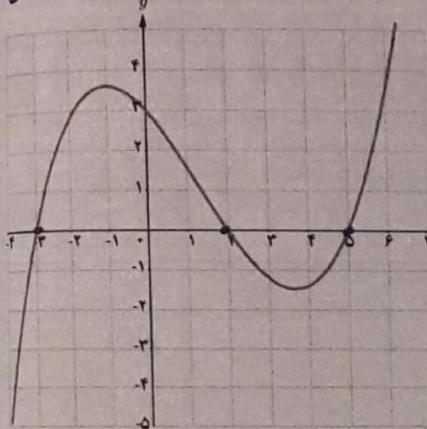
$$x^2 + 8x - 25 < 0$$



مسائل ص ۵۹

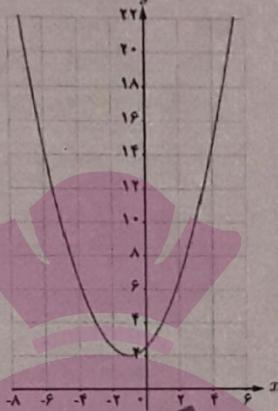
۱ در زیر نمودارهای چهار تابع رسم شده است. در هر مورد، مجموعه جواب‌های نامعادله

$$[-3, 2] \cup [5, +\infty)$$

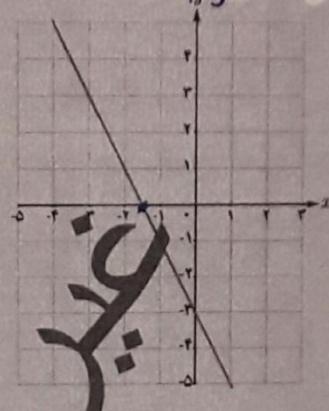


ب

$$f(x) \geq 0 \text{ مشخص کنید.} \\ R = (-\infty, +\infty) \cup [-5, 5]$$



ب



الف

۲ نامعادلهای زیر را حل کنید.

$$-x^2 + 4x + 3 \geq -2$$

$$3x^2 - 5x - 2 > 0$$

$$2x - 3 < 0$$

الف

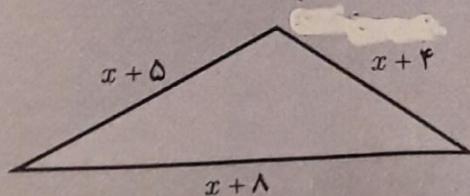
۳ پرتابهای به طور عمودی به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این پرتابه از سطح دریا (برحسب متر) به صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) با رابطه $h(t) = -5t^2 + 100t + 150$ داده شده است. مشخص کنید در چه بازه زمانی، ارتفاع این پرتابه بیش از ۲۰۰ متر خواهد بود.

$-5t^2 + 100t + 150 > 200$

۴ مقدار x را طوری بیابید که اندازه محیط مثلث از اندازه مساحت مربع کمتر باشد.

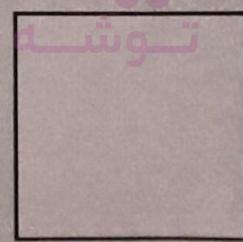
$$3x + 17 < x^2 + 10x + 25$$

$$x^2 + 7x + 8 > 0$$



توشهای برای ممکن

$$x + 5$$



۵ علی به تازگی یک کارگاه تولید قطعات یدکی راه اندازی کرده است. درآمد حاصل از فروش کالا به قیمت p (برحسب تومان) از قانون $R(p) = -100p^2 + 50000$ به دست می‌آید. به ازای چه مقداری برای p ، میزان درآمد شرکت بیش از ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ است؟

$$R(p) > 10,000,000$$

۶ انتظار از این نمودار چه انتزاعاتی برآورده است.

۶

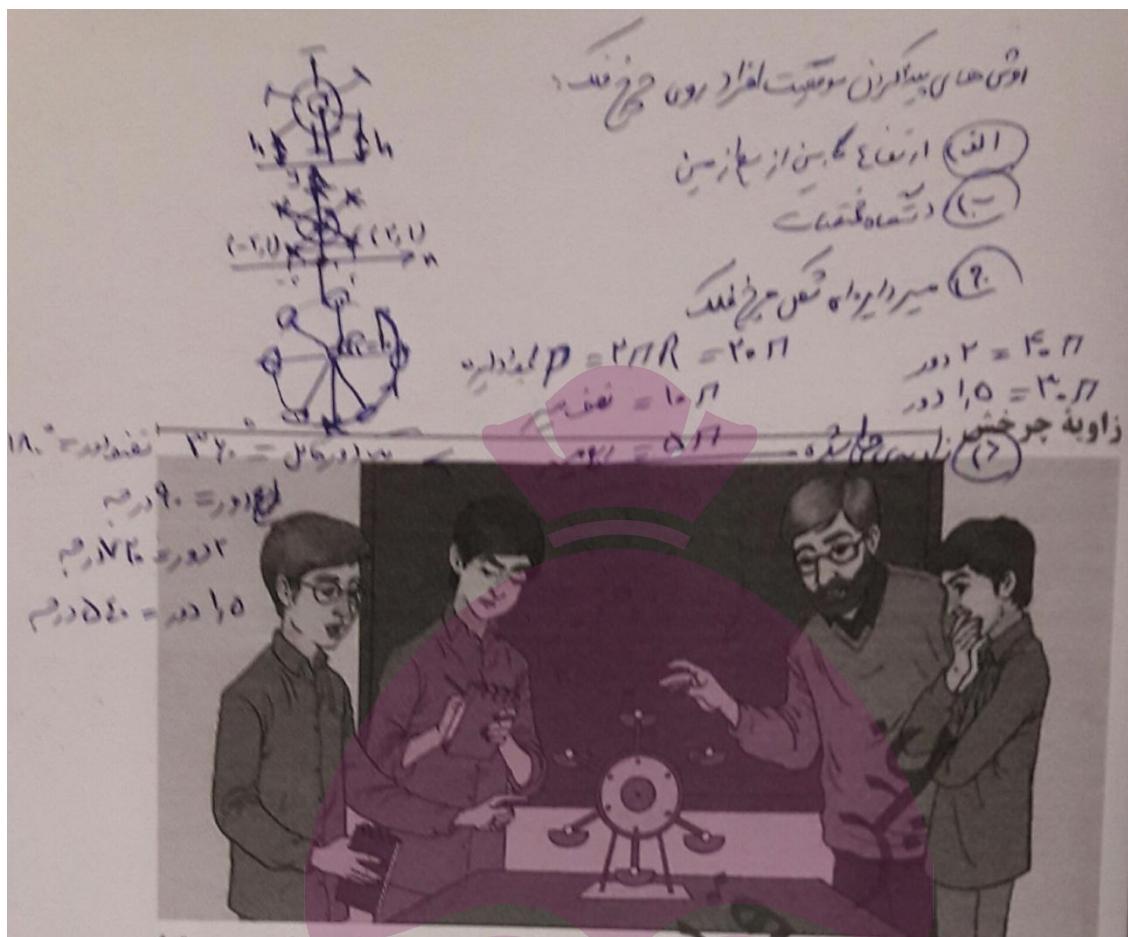
پو دمان سوم



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

مشاتی



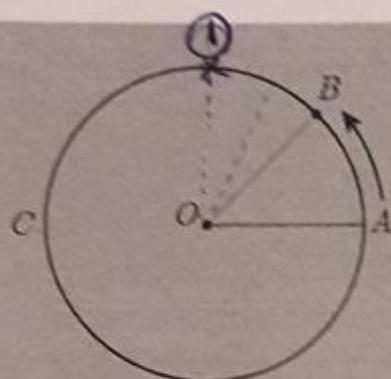
دیروز، مجید به همراه خانواده خود به شهر بازی رفته بود. در آنجا چرخ و فلک بزرگی بود که مجید و بقیه جوان ترها سوار نکنی از کابین های آن سرگردانیه روی نیمکت نشستند و از پایین آنها را تماشا می کردند. چرخ و فلک برای بیاده و سوار کردن افراد گاهی می ایستاد و سمسی حركت می کرد. پدر مجید که روی نیمکت نشسته بود آنها را گم کرد. او با تلفن همراه خود با مجید تماس گرفت تا بداند آنها کجا هستند. مجید نمی دانست چگونه موقعیت خود را بیان کند تا چیزی جای او را پیدا کند. او با خود فکر کرد که چگونه می توان موقعیت کابین های چرخ و فلک را توصیف کرد. روز بعد، او این سوال را در کلاس درس ریاضی مطرح کرد. دیگر لامه هنر حوزی خواست تا در این مورد فکر کنند و نظر خود را بیان کنند.

آرمان گفت: به نظر من داشتن ارتفاع کابین از سطح زمین مهم است. آرمانیم در هر لحظه با مشخص کردن ارتفاع کابین، موقعیت آن را مشخص کنیم.

سعید گفت: ولی من فکر نمی کنم فقط با داشتن ارتفاع کابین بتوان موقعیت آن را مشخص کرد. ممکن است کابین در سمت چپ یا راست چرخ و فلک باشد؛ یعنی، برخی کابین ها با اینکه ارتفاع یکسان دارند، جایشان متفاوت است. شاید بهتر باشد مسافت طی شده کابین روی مسیر دایره ای را اندازه گیری کنیم.

اگر مسافت طی شده از نقطه شروع معلوم باشد، موقعیت کابین هم مشخص می شود. دبیر گفت: بله، با مشخص شدن مسافت طی شده، موقعیت کابین کاملاً مشخص می شود؛ مثلاً اگر شعاع دایرة چرخ و فلک 10π متر باشد و مسافت طی شده از نقطه شروع 20π متر باشد، معلوم می شود کابین به بالاترین نقطه خود رسیده است و اگر مسافت طی شده π متر باشد، معلوم می شود کابین یک دور کامل زده و به نقطه شروع برگشته است. ولی یافتن مسافت طی شده دشوار است. آیا راه ساده تری برای

کار در کلاس ۱ ص ۶۶



دوچرخه سواری دیگر مسیر دایره‌ای شکل، از نقطه A طبق شکل زیر، با سععت ثابت در ۳ دقیقه طی می‌کند و چندین بار این دایره را دور می‌زند. اگر یک دور این دایره را در $\frac{3}{4}$ دقیقه طی می‌کند، $\frac{3}{4} \times 120^\circ = 90^\circ$ بین هر $\frac{1}{4}$ درجه دقیقه طی می‌شود.

۱ دوچرخه سوار، این دایره را در چند دقیقه طی می‌کند؟ مکان او را روی دایره بالا با یک نقطه مشخص کنید.
 $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$ ثانیه

۲ اگر دوچرخه سوار پس از 20 ثانیه ($\frac{1}{3}$ دقیقه) به نقطه B رسیده باشد، زاویه بین دو شعاع OB و OA چند درجه است؟
 $\frac{1}{3} \times 120^\circ = 40^\circ$

۳ این دوچرخه سوار پس از 3 دقیقه و 20 ثانیه در چه نقطه‌ای از دایره قرار می‌گیرد؟
 هم‌اکنون درجه

۴ اگر یک دوربین فیلمبرداری از مرکز دایره به دوچرخه سوار نگاه کند، در هر دقیقه چند درجه چرخش می‌کند؟
 120°

۵ جدول زیر را تکمیل کنید. در هر زمان، مکان دوچرخه را روی شکل نشان، دهید و وضعیت او را توصیف کنید.

ایران نوشه

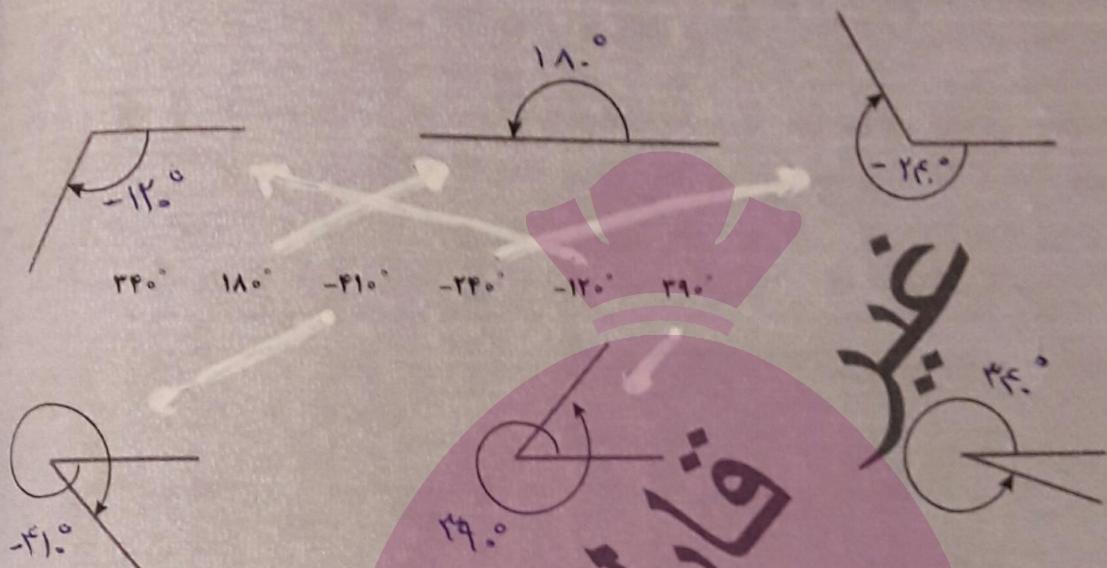
توسیه‌ای برای موفقیت

زمان حرکت دوچرخه بر حسب دقیقه	۲	۴	۵	$\frac{6}{5}$	۷	۱۲
زاویه چرخش دوربین	240°	480°	600°	720°	840°	1440°

مسائل



- ۱ در شکل‌های زیر چند زاویه چرخش رسم شده‌اند. زاویه‌های چرخش داده شده را به شکل‌های صحیح آن وصل کنید.

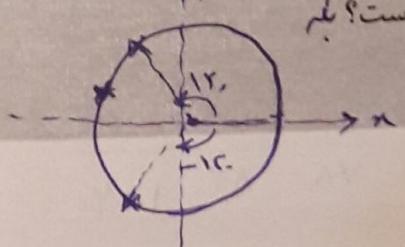


- ۲ در دایره مقابل، نقطه A مبدأ در نظر گرفته شده است. نقاط متناظر زاویه‌های 50° و 145° و 300° و 460° و -60° و -180° درجه را روی این دایره نشان دهید.

- ۳ وضعیت دو نیم خط که زاویه چرخش آنها صفر درجه است حکونه است؟ بر روی حدم منطبق آن توشه‌ای برای موفقیت

- ۴ اگر دونده‌ای ۵ بار روی یک مسیر دایره‌ای شکل در جهت مثبت بدو، زاویه چرخش او نسبت به نقطه شروع چند درجه است؟ $5 \times 360^\circ = 1800^\circ$

- ۵ یک دایره و یک مبدأ روی آن انتخاب کنید. نقاط متناظر دو زاویه چرخش 120° و -120° درجه را روی آن بیابید. از لحاظ هندسی، این نقاط چه وضعیتی نسبت به هم دارند. دو زاویه قرینه دیگر مثال بزنید و وضعیت نقاط متناظر آنها نسبت به هم را توصیف کنید. آیا این وضعیت برای هر دو زاویه که قرینه هم باشند برقرار است؟ بله

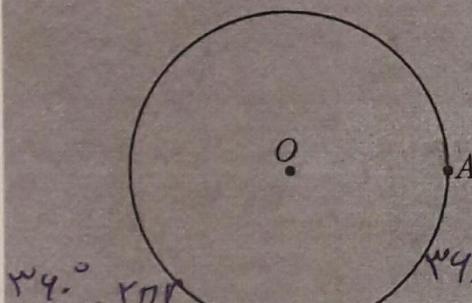


بله



دایره‌ای را به شعاع r در نظر بگویید و روی آن نقطه A را به عنوان مبدأ حرکت بگیرید.

۱ اگر از مبدأ، در جهت مثبت سرع به حرکت کنیم، پس از طی یک دور کامل، زاویه چرخش چند درجه است؟ مسافت طی شده بقدر است؟



$$\frac{340}{10} = \frac{2\pi r}{L}$$

$$L = \frac{2\pi r}{340} = \frac{\pi r}{18}$$

مسافت طی شده با اندازه محاطه داریست

۲ به ازای هر یک درجه زاویه چرخش، مسافت طی شده چقدر است؟

$$\frac{L}{D} = \frac{2\pi r}{340} \Rightarrow \frac{L}{D} = \frac{\pi r}{180}$$

۳ اگر D، زاویه چرخش بر حسب درجه و L، مسافت طی شده باشد، نسبت $\frac{L}{D}$ بقدر است؟

$$D = \frac{180}{\pi r} L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\pi r}{180} D$$

۴ رابطه‌ای بنویسید که D را بر حسب L بیان کند و رابطه‌ای جویسید که L را بر حسب D بیان کند.

$$L = \frac{r}{R} D$$

۵ رادیان برابر زاده ای است معادل به چنان 2π درجه را بیان

فعالیت (۱) نشان می‌دهد که زاویه چرخش یک نقطه از یک دایره و کمان طی شده توسط آن نقطه،

مقدار مسافت طی شده به همان $2\pi r$ مساوی است. بنابراین، نسبت D زاویه چرخش نقطه و L طول کمان

دو کمیت متناسب مستقیم هستند. بنابراین، نسبت D زاویه چرخش نقطه و L طول کمان

طی شده آن نقطه است، مقداری ثابت است. در یک دایره به شعاع ۱، چرخش به اندازه 360° درجه،

توشهای برای موفقیت

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{\pi}{180} D \\ D = \frac{180}{\pi} R \end{array} \right.$$

۱- مسیر حرکت روی یک دایره، کمانی از آن دایره است و مسیر طی شده را کمان طی شده می‌نامند.

کار در کلاس ۲ ص ۷۱

$$\begin{aligned}
 1^\circ &= \frac{\pi}{180} R \\
 2^\circ &= \frac{\pi}{90} R \\
 3^\circ &= \frac{\pi}{60} R \\
 4^\circ &= \frac{\pi}{45} R \\
 5^\circ &= \frac{\pi}{36} R \\
 6^\circ &= \frac{\pi}{30} R \\
 7^\circ &= \frac{\pi}{27} R \\
 8^\circ &= \frac{\pi}{22.5} R \\
 9^\circ &= \frac{\pi}{20} R \\
 10^\circ &= \frac{\pi}{18} R \\
 11^\circ &= \frac{\pi}{16} R \\
 12^\circ &= \frac{\pi}{15} R \\
 13^\circ &= \frac{\pi}{14} R \\
 14^\circ &= \frac{\pi}{12} R \\
 15^\circ &= \frac{\pi}{10} R \\
 16^\circ &= \frac{\pi}{9} R \\
 17^\circ &= \frac{\pi}{8} R \\
 18^\circ &= \frac{\pi}{7} R \\
 19^\circ &= \frac{\pi}{6} R \\
 20^\circ &= \frac{\pi}{5} R \\
 21^\circ &= \frac{\pi}{4} R \\
 22^\circ &= \frac{\pi}{3} R \\
 23^\circ &= \frac{\pi}{2} R \\
 24^\circ &= \frac{\pi}{1.5} R \\
 25^\circ &= \frac{\pi}{1.2} R \\
 26^\circ &= \frac{\pi}{1} R \\
 27^\circ &= \frac{\pi}{0.8} R \\
 28^\circ &= \frac{\pi}{0.6} R \\
 29^\circ &= \frac{\pi}{0.5} R \\
 30^\circ &= \frac{\pi}{0.4} R \\
 31^\circ &= \frac{\pi}{0.3} R \\
 32^\circ &= \frac{\pi}{0.25} R \\
 33^\circ &= \frac{\pi}{0.2} R \\
 34^\circ &= \frac{\pi}{0.18} R \\
 35^\circ &= \frac{\pi}{0.16} R \\
 36^\circ &= \frac{\pi}{0.14} R \\
 37^\circ &= \frac{\pi}{0.12} R \\
 38^\circ &= \frac{\pi}{0.1} R \\
 39^\circ &= \frac{\pi}{0.08} R \\
 40^\circ &= \frac{\pi}{0.06} R \\
 41^\circ &= \frac{\pi}{0.05} R \\
 42^\circ &= \frac{\pi}{0.04} R \\
 43^\circ &= \frac{\pi}{0.03} R \\
 44^\circ &= \frac{\pi}{0.02} R \\
 45^\circ &= \frac{\pi}{0.01} R
 \end{aligned}$$

$$2\delta K\zeta = 1A$$

$$9K8K\zeta = 1A$$

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 6 \\
 5 \\
 4 \\
 3 \\
 2 \\
 1 \\
 \hline
 10
 \end{array}$$

مثال ۵

زاویه $\frac{\pi}{2}$ یعنی $\frac{\pi}{2}$ رادیان که معادل 90° درجه است. زاویه $\frac{5\pi}{6}$ یعنی $\frac{5\pi}{6}$ رادیان که معادل 150° درجه است. زیرا:

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{180}{\pi} = 90^\circ \quad \text{و} \quad \frac{5\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 150^\circ$$

کار در کلاس ۲



۱) زاویه‌های 45° و 60° و 90° درجه را بر حسب رادیان بنویسید.

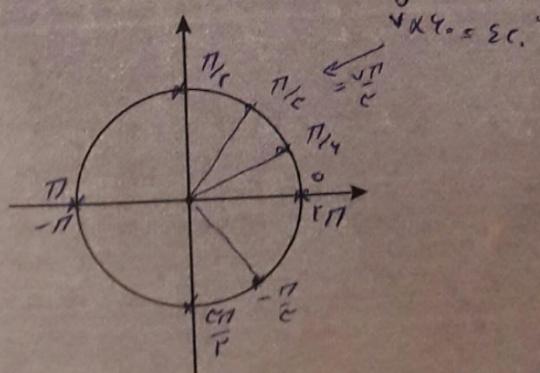
$$\begin{aligned}
 45^\circ &= \frac{\pi}{180} \times 45 = \frac{\pi}{4} R \\
 60^\circ &= \frac{\pi}{180} \times 60 = \frac{\pi}{3} R \\
 90^\circ &= \frac{\pi}{180} \times 90 = \frac{\pi}{2} R
 \end{aligned}$$

۲) در جدول زیر تعدادی زاویه بر حسب درجه و رادیان داده شده است. معادل آنها را بر حسب واحد دیگر بباید و جدول را کامل کنید.

درجه	55°	44°	-14°	$3600'$	-418°
رادیان	$\frac{11\pi}{36}$	$\frac{11\pi}{18}$	$-\frac{7\pi}{18}$	$20\pi/11$	$-\frac{15\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
 55^\circ &= \frac{\pi}{180} \times 55 = \frac{11\pi}{36} R \\
 11\pi/36 &= 44 \times 4^\circ = 44^\circ \\
 44^\circ &= \frac{\pi}{180} \times 44 = \frac{11\pi}{18} R \\
 -10\pi/3 &= -10 \times 60' = -10K40' = -10K40^\circ = -10K40 = -10K40^\circ
 \end{aligned}$$

۳) نقاط متناظر زاویه‌های $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $\pi - \pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 2π , $-\frac{\pi}{3}$, 0 , $\frac{7\pi}{3}$ را روی دایره زیر مشخص کنید.



۴) در شکل زیر یک شش ضلعی منتظم را داخل دایره رسم کرده‌ایم به گونه‌ای که یکی از رأس‌های آن روی نقطه متناظر زاویه صفر است (نقطه A).

الف) بقیه رئوس این چندضلعی، متناظر چه زاویه‌هایی (بر حسب درجه) هستند؟

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$A \rightarrow 0^\circ$$

$$B \rightarrow 60^\circ$$

$$C \rightarrow 120^\circ$$

$$D \rightarrow 180^\circ$$

$$E \rightarrow 240^\circ$$

$$F \rightarrow 300^\circ$$

ب) اگر شش ضلعی بالا به اندازه 30° درجه در جهت مثبت دوران کند به طوری که رأس A به A' بدل شود، رئوس این چندضلعی جدید متناظر چه زاویه‌هایی هستند؟

$$A' \rightarrow 30^\circ$$

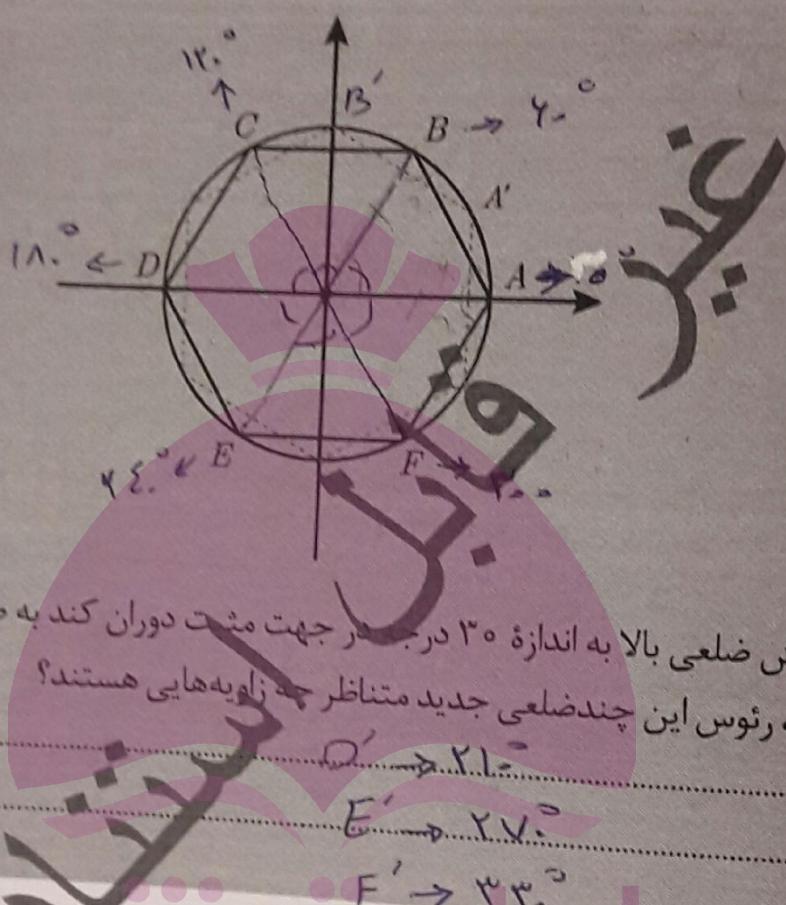
$$B' \rightarrow 90^\circ$$

$$C' \rightarrow 150^\circ$$

$$D' \rightarrow 210^\circ$$

$$E' \rightarrow 270^\circ$$

$$F' \rightarrow 330^\circ$$



ایران‌لوگو

توشه‌ای برای موفقیت

جواب ۱

$$-1000^\circ = \frac{\pi}{180} \times 1000 = -\frac{50\pi}{9}$$

$$53^\circ = \frac{\pi}{180} \times 53 = \frac{53\pi}{18}$$

$$19^\circ = \frac{\pi}{180} \times 19 = \frac{19\pi}{18}$$

$$15^\circ = \frac{\pi}{180} \times 15 = \frac{15\pi}{18} = \frac{\pi}{12}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\pi}{\sqrt{R}} = 18^\circ \Rightarrow 25,7^\circ$$

$$\frac{4\pi}{R} = 4 \times 18^\circ = 24^\circ$$

$$-\frac{\pi}{3} = -1 \times 4^\circ = -4^\circ$$

$$-\frac{14\pi}{\alpha} = -14 \times 18^\circ = -50.4^\circ$$

زاویه‌های $15^\circ, 19^\circ, 53^\circ$ و -1000° درجه را بر حسب رادیان بنویسید.

مسائل



زاویه‌های $\frac{\pi}{7}, \frac{-8\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}$ را بر حسب درجه بنویسید.

۲) اگر یک نیم خط بعد از چرخش روی حالت اول خود منطبق شود، توضیح دهد زاویه چرخش آن بر حسب رادیان چه مقادیری می‌تواند باشد؟ $0^\circ, 27^\circ, 45^\circ, 67^\circ, 135^\circ$

۳) در یک دایره به شعاع r ، اگر زاویه یک کمان بر حسب رادیان، θ باشد، طول این کمان بر حسب r و θ چقدر است؟

$$L = \frac{\pi r}{180} \theta$$



۴) طول پره‌های یک چرخ 60 سانتی‌متر است. این چرخ را 100 دور بگردانید. این چرخ را 100 دور بگردانید.

(الف) پس از طی 100 متر مسافت، زاویه چرخش یکی از پره‌ها نسبت به حالت اولیه آن

$$R = \frac{\pi}{180} \times D = \frac{\pi}{180} \times 100 = \frac{100\pi}{180} = \frac{5\pi}{9}$$

$$L = \frac{100\pi}{180} \times r = \frac{100\pi}{180} \times \frac{60}{\pi} = \frac{100}{3} \approx 33.3 \text{ متر}$$

(ب) تحقیق کنید که کیلومترشمار ماشین، مسافت طی شده را چگونه نشان می‌دهد؟

$$\rightarrow L = 31/4 \text{ m}$$

۵) در یک چرخ و فلک به شعاع 10 متر، اگر یک کابین نسبت به حالت اولیه خود، به اندازه

رادیان چرخیده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟ اگر مسافت طی شده توسط کابین

70 متر باشد، زاویه چرخش کابین بر حسب رادیان و درجه چقدر است؟

$$r = 10 \text{ m} \quad R = 1^R \Rightarrow R = \frac{L}{r} \Rightarrow L = 10 \text{ m}$$

$$L = 70 \text{ m} \rightarrow R = \frac{10}{\pi} \times L = \frac{10}{\pi} \times 70 = \frac{700}{\pi} \approx 224 \text{ rad}$$

$$R = \frac{\pi}{180} \times D = 224 \text{ rad}$$

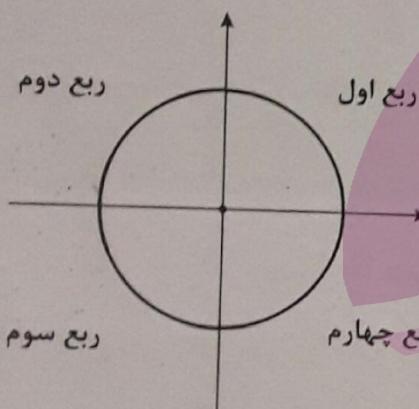
فعالیت ۲ ص ۷۶

مثال ۶

برای زاویه‌های خاص 0° , 90° , 180° و 270° درجه که به ترتیب نقاط متناظر آنها دارای مختصات

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

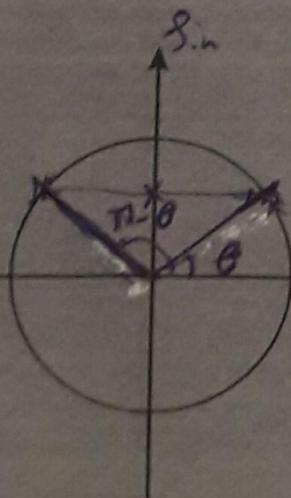
نسبت مثلثاتی	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 90^\circ$ یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان	$\theta = 180^\circ$ یا π رادیان	$\theta = 270^\circ$ یا $\frac{3\pi}{2}$ رادیان
$r = \sin \theta$	$[1, 0]$	$[0, 1]$	$[0, -1]$	$[-1, 0]$
$x = \cos \theta$	$[1, 0]$	$[0, 1]$	$[0, -1]$	$[-1, 0]$



معمولًاً دایره مثلثاتی را به چهار قسم تقسیم می‌کنند و طبق شکل مقابل این چهار قسم را ربع‌های اول، دوم، سوم و چهارم دایره مثلثاتی می‌نامند.

مونا پرسید: سال گذشته، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند را برای رسم مثلث‌های قائم‌الزاویه به دست می‌آوردیدم. اما، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های باز را چگونه حساب کنیم؟

دبیر گفت: با انجام فعالیت زیر می‌توانید سینوس و کسینوس زاویه‌های باز را حساب کنید.



۱) فرض کنید θ یک زاویه تند بر حسب رادیان باشد، $\pi - \theta$ چه نوع زاویه‌ای است؟ باز

۲) با رسم شکل، وضعیت نقاط متناظر دو زاویه θ و $\pi - \theta$ روی دایره مثلثاتی را نسبت به هم و محور سینوس‌ها مشخص کنید.

۳) سینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴) کسینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

کنگو



فعالیت ۲

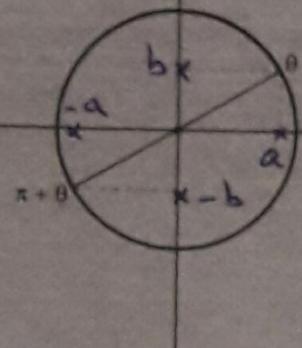


کار در کلاس ۳ ص ۷۸

برای محاسبه سینوس و کسینوس زاویه‌های دیگر نیز می‌توان تساوی‌های مشابهی را به دست آورد.

در کلاس ۳

۱ اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایره مثلثاتی باشد، نقطه متناظر زاویه $\pi + \theta$ در کدام ربع قرار دارد؟



۲ وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و $\pi + \theta$ نسبت به هم چگونه است؟

۳ طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴ نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

از پاسخ به سوال‌های بالا نتیجه می‌شود که برای یک زاویه تند مانند θ داریم:

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta, \quad \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

نکته

البته این تساوی‌ها برای هر زاویه دلخواه θ نیز برقرارند.

توشه‌ای برای موفقیت

مثال ۹

سینوس و کسینوس زاویه $\frac{7\pi}{6}$ را به دست آورید.

داریم: $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ ، پس نقطه متناظر این زاویه در ربع سوم قرار دارد. بنابر این:

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

کار در کلاس ۴ ص ۷۹

مثال ۱۰

سینوس و کسینوس زاویه 240° درجه را حساب کنید.
داریم: $180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$ پس نقطه متناظر این زاویه در ربع سوم است.

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

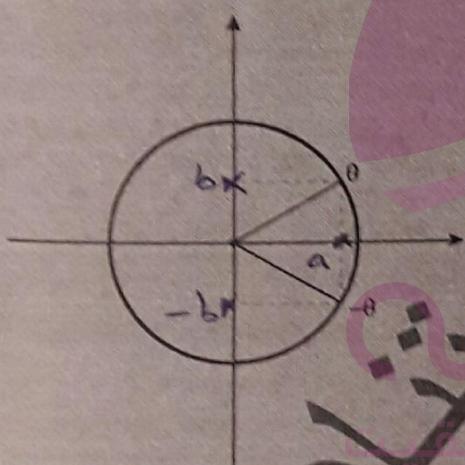
مونا پرسید: سینوس کسینوس زاویه‌های منفی را چگونه حساب کنیم؟

دبیر گفت: کافی است بینیم نقاط متناظر زاویه‌های θ و $-\theta$ در یک دایره مثلثاتی، چه وضعیتی نسبت به هم دارند.

کفتکو



کار در کلاس ۴



۱ اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایره مثلثاتی باشد،

نقطه متناظر زاویه $-\theta$ در کدام ربع قرار دارد؟ ربع دوم

۲ وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و $-\theta$ نسبت به

هم چگونه است؟

۳ طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

طول (a) برای و عرض (b) آنها قرینه می‌شوند

۴ نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با

هم دارند؟

سینوس (b/a) مثبت است و کسینوس (a/b) مثبت نیست

از پاسخ به سوال‌های بالا نتیجه می‌شود که برای یک زاویه تند $\cos \theta$ و $\cos(-\theta)$ با هم مساوی‌اند ولی سینوس آنها قرینه یکدیگرند و داریم:

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \cos(-\theta) = \cos \theta$$

نکته



البته این تساوی‌ها برای هر زاویه دلخواه θ نیز برقرارند.

کار در کلاس ۵ ص ۸۰

مثال ۱۱

سینوس و کسینوس زاویه 30° - درجه را حساب کنید.

داریم:

$$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}, \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

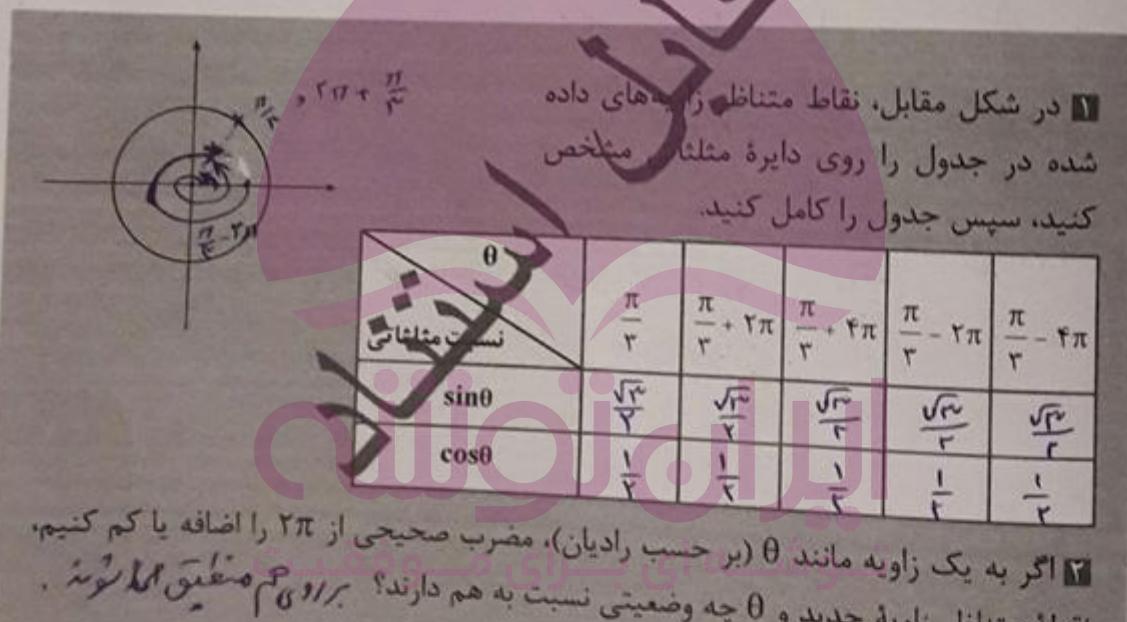
مثال ۱۲

سینوس و کسینوس زاویه $\frac{-5\pi}{6}$ را حساب کنید. داریم:

$$\sin \frac{-5\pi}{6} = -\sin \frac{5\pi}{6} = -\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{-5\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

همچنین،



- ۱ در شکل مقابل، نقاط متناظر زاویه‌های داده شده در جدول را روی دایره مثلثاتی متناظر کنید، سپس جدول را کامل کنید.

آزمون کلاس ۵



- ۲ اگر به یک زاویه مانند θ (بر حسب رادیان)، مضرب صحیحی از 2π را اضافه یا کم کنیم، نقطه متناظر زاویه جدید و θ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ برای هم منطبق آمد.

۳ با ذکر دلیل، نتیجه بگیرید اگر به زاویه‌ای (بر حسب رادیان)، مضارب صحیح 2π را اضافه یا کم کنیم، نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کنند.

جواب: نقاط متناظر هم مطابق هستند.

$$\sin \theta = \sin \left(\theta + 2k\pi \right)$$

سینوس و کسینوس زاویه‌های $\frac{14\pi}{3}$ و $\frac{-25\pi}{6}$ رادیان را حساب کنید.

$$\sin \left(\frac{14\pi}{3} \right) = \sin \left(4\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \left(\frac{14\pi}{3} \right) = \cos \left(4\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ناحیه دوم: } \frac{2\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos \left(\frac{-25\pi}{6} \right) = \cos \left(-4\pi - \frac{5\pi}{6} \right) = \cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) = -\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ناحیه چهارم: } \frac{\pi}{6} = -4\pi - \frac{\pi}{6}$$

فعالیت ۳ ص ۸۱

اگر به یک زاویه (بر حسب رادیان)، مضرب صحیحی از 2π را اضافه پا گم کنیم، نقاط متناظر این دو زاویه بر هم منطبق‌اند. به همین دلیل، نسبت‌های مثلثاتی آنها با هم برابرند، زیرا نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، مختصات نقطه متناظر آن است.

سارا پرسید: تا اینجا فقط نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه را تعریف کردیم و یا گرفتیم چگونه مقدار آنها را پیدا کنیم. اما، تائزانت این زاویه‌ها چگونه تعریف می‌شود؟
دبیر گفت: فعالیت زیر به ما کمک می‌کند تائزانت زاویه‌های دلخواه را تعریف کنیم.

مثلث قائم‌الزاویه ABC را با زاویه تند θ در نظر بگیرید.

۱ طول ضلع AB را بر حسب $\sin \theta$ بنویسید.

$$\sin \theta = \frac{AB}{BC} \rightarrow AB = BC \sin \theta$$

۲ طول ضلع AC را بر حسب $\cos \theta$ بنویسید.

$$\cos \theta = \frac{AC}{BC} \rightarrow AC = BC \cos \theta$$

۳ در این مثلث، $\tan \theta$ را بر حسب $\sin \theta$ و $\cos \theta$ به دست آورد.

$$\tan \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{BC \sin \theta}{BC \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

۴ به کمک رابطه‌ای که در (۳) به دست آورده‌ید، برای تعریف تائزانت زاویه‌ای دلخواه پیشه‌های ارائه گند.

فعالیت (۳) نشان می‌دهد که برای زاویه‌های تند مانند θ داریم: $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$. این تساوی را برای زاویه‌های دلخواه تعمیم می‌دهند و تائزانت یک زاویه دلخواه α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

از آنجا که سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه قبل‌اً تعریف شده‌اند، تساوی بالا، تائزانت زاویه‌های دلخواه را تعریف می‌کند. فقط برای زاویه‌هایی که کسینوس آنها صفر است، تائزانت آن زاویه‌ها تعریف نمی‌شود؛ مثلاً برای زاویه‌های $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ (رادیان) که کسینوس آنها صفر است، تائزانت تعریف نمی‌شود.

اگر α زاویه‌ای باشد که $\cos \alpha \neq 0$ بنا به تعریف

فعالیت ۴ ص ۸۲

مثال ۱۳

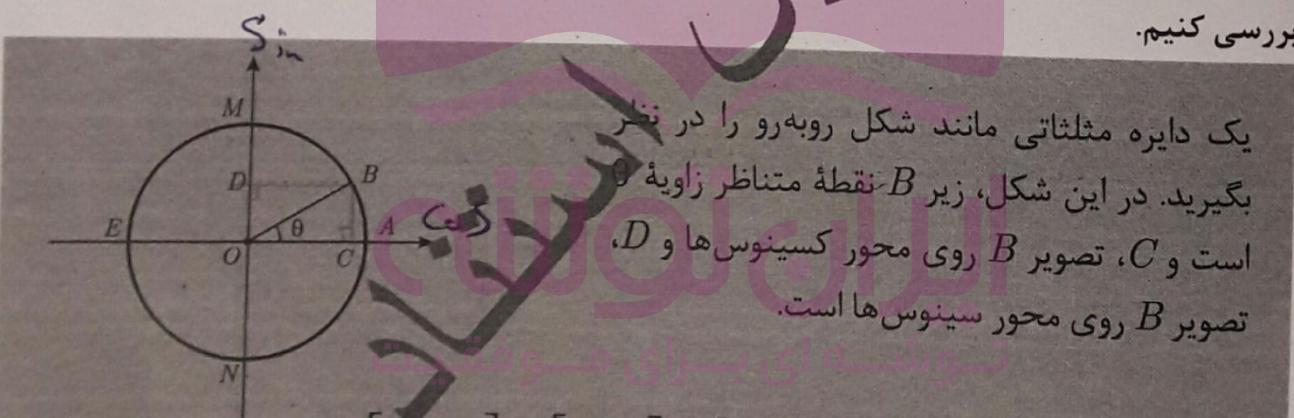
تانژانت زاویه‌های 33° درجه و $\frac{4\pi}{3}$ رادیان را حساب کنید.

$$\tan 33^\circ = \frac{\sin 33^\circ}{\cos 33^\circ} = \frac{\sin(36^\circ - 3^\circ)}{\cos(36^\circ - 3^\circ)} = \frac{\sin(-3^\circ)}{\cos(-3^\circ)} = \frac{-\sin 3^\circ}{\cos 3^\circ} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \frac{4\pi}{3} = \frac{\sin \frac{4\pi}{3}}{\cos \frac{4\pi}{3}} = \frac{\sin(\pi + \frac{\pi}{3})}{\cos(\pi + \frac{\pi}{3})} = \frac{-\sin(\frac{\pi}{3})}{-\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

سارا پرسید: سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه چه اعدادی می‌توانند باشند؟
مونا گفت: از سال گذشته یادم می‌آید که سینوس و کسینوس زاویه‌های تند، اعدادی در بازه $(1, 0)$ بودند.
اما سینوس و کسینوس زاویه‌های 33° مختصات نقاط روی دایره واحد هستند، پس می‌توانند اعداد منفی نیز باشند.

دیگر گفت: برای پاسخ به سؤال سارا، متر است از طریق محور سینوس‌ها و محور کسینوس‌ها آن را بررسی کنیم.



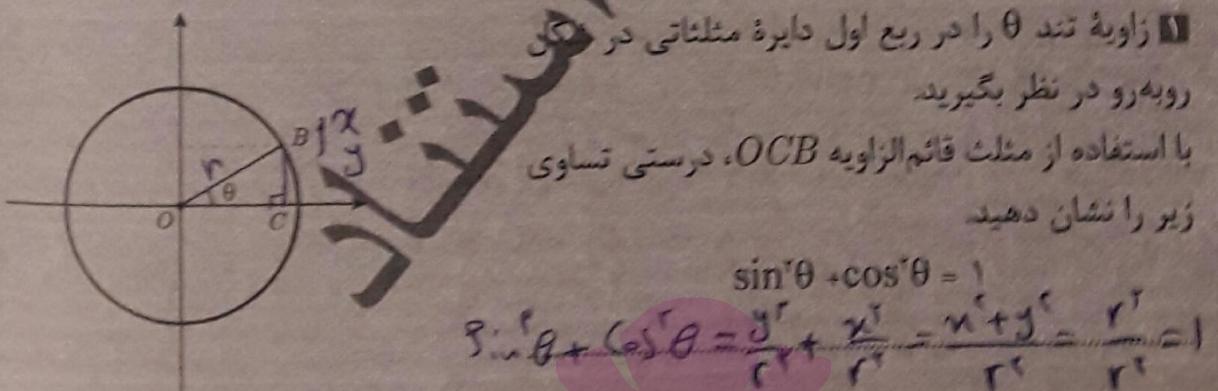
وقتی θ در بازه‌های $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ و $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ و $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ تغییر می‌کند، چگونگی

تغییر مکان نقطه C روی محور کسینوس‌ها و نقطه D روی محور سینوس‌ها و مقدارهای $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را در جدول زیر مشخص کنید. در جدول چند مورد مشخص شده است.

مقدار زاویه θ	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ در بازه	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ در بازه	$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ در بازه	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ در بازه
مکان نقطه C	روی پاره خط OA قرار دارد	روی پاره خط OE قرار دارد	OE	OA
مقدار $\cos \theta$	در بازه $[0, 1]$ قرار دارد	در بازه $[-1, 0]$ قرار دارد	$[-1, 0]$	$[0, 1]$
مکان نقطه D	OM	OM	ON	ON
مقدار $\sin \theta$	$[0, 1]$	$[-1, 0]$	$[-1, 0]$	$[-1, 0]$

کار در کلاس ۶ ص ۸۳

کار در کلاس ۶



۲ تساوی بالا برای سایر زاویه‌ها نیز برقرار است. درستی این تساوی را برای چند زاویه در ربع‌های دیگر بررسی کنید.

$$\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

۳ اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم باشد به طوری که $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \\ \Rightarrow \cos^2 \theta &= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\pm \frac{4}{5}} = \mp \frac{3}{4}$$

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

مسائل ص ۸۴

$$2 \times \frac{\pi}{\delta} = 2 \times 18^\circ = 2 \times 34 = 72$$

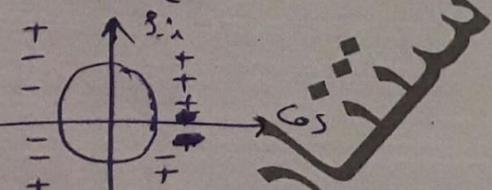
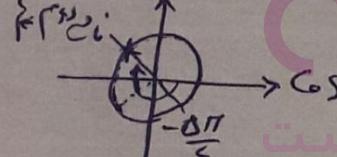
$$12 \frac{\pi}{\delta} = 12 \times 34 = 340 + 72 = 412$$

- ۱ در جدول های زیر مشخص کنید که هر کدام از زاویه های داده شده در کدام ربع از دایره مثلثاتی قرار دارند.

زاویه θ بر حسب درجه	-۸۰	۱۴۰	۲۸۰	۳۶۰
مکان زاویه θ	۳	۲	۳	۱

زاویه θ بر حسب رادیان	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$	$\frac{7\pi}{3} = 210^\circ$	$\frac{12\pi}{5}$
مکان زاویه θ	۳	۱	۱	۱

- ۲ با تعیین مکان زاویه $\frac{5\pi}{4}$ کدام یک از گزینه های زیر صحیح است.



- ۳ جدول زیر را با مشخص کردن علامت نسبت های مثلثاتی زاویه ها کامل کنید. در هر مورد

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \theta = \frac{3\pi}{4} \quad \theta = \frac{5\pi}{4} \quad \theta = \frac{11\pi}{4}$$

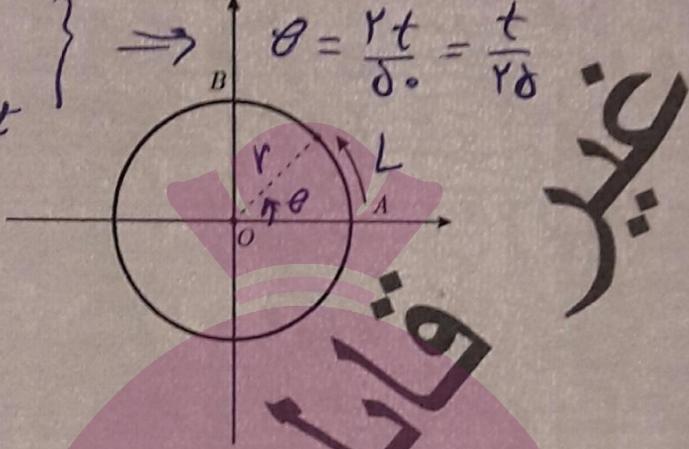
مثالی بزنید.

θ	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
علامت نسبت مثلثاتی				
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-

دوچرخه سواری روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۵۰ متر، با سرعت ثابت ۲ متر بر ثانیه از نقطه A شروع به حرکت می‌کند. دو محور عمود بر هم (مانند شکل) در این دایره رسم می‌کنیم.

الف) اندازه زاویه چرخش (بر حسب رادیان) دوچرخه سوار را بر حسب زمان (ثانیه) به دست آورید.

$$\theta = \frac{L}{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} L = vt = 2t \\ \text{نمایش} \end{array} \right. \Rightarrow \theta = \frac{2t}{50} = \frac{t}{25}$$



ب) اگر دوچرخه سوار پس از ۳۰ دقیقه حرکت باشیست، در کدام ربع از دایره ایستاده است؟

$$t = 30 \times 60 = 1800 \quad \Rightarrow \theta = \frac{1800}{25} = 72 \text{ رادیان} \rightarrow D = \frac{180}{314} \times 72 =$$

زاویه θ در ربع سوم است و $\cos \theta = -\frac{1}{5}$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورید.

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \frac{1}{25}} = -\frac{\sqrt{24}}{5} \quad \tan \theta = 2\sqrt{4}$$

اگر برای زاویه θ داشته باشیم $\sin \theta = -\frac{2}{3}$ ، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورد؟ چرا؟ چه اطلاعات دیگری را هم باید بدانیم؟

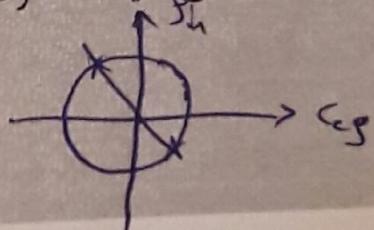
نامه ای از مدرس مخصوص شد: از اینجا آغاز شد.

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta, \tan(\pi + \theta) = \tan \theta, \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

دو زاویه مشخص کنید که تانژانت آنها ۱- است.

$$\theta = -\frac{\pi}{4} \in 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

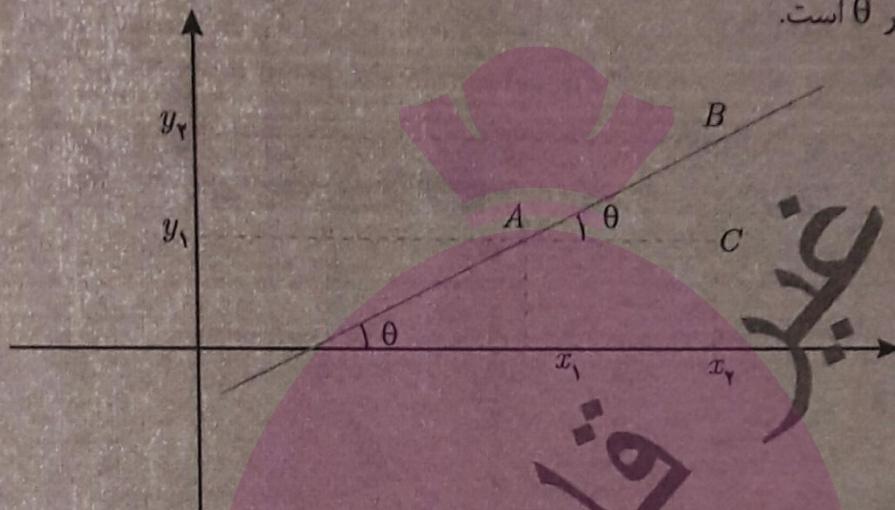


فعالیت ۵ ص ۸۷

عالیت ۵



یک خط دلخواه به معادله $y = ax + b$ با شیب مثبت ($a > 0$) در نظر بگیرید. فرض کنید A با مختصات $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ و B با مختصات $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ دو نقطه از این خط هستند و زاویه این خط با محور طولها برابر θ است.



۱ شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۲ در مثلث قائم الزاویه ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به دست آورید.

$$AC = x_2 - x_1 \quad BC = \sqrt{x_2^2 - x_1^2}$$

۳ در مثلث قائم الزاویه ABC ، تانژانت زاویه θ را بر حسب مختصات A و B به دست آورید.

$$\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{x_2^2 - x_1^2}}{x_2 - x_1}$$

۴ از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و زاویه آن با محور افقی به دست می‌آورید؟

$$\Rightarrow m = \tan \theta$$

این فعالیت نشان می‌دهد که برای یک خط با شیب مثبت، تانژانت زاویه تند بین این خط و محور x ها همان شیب خط است.

فعالیت ۶ ص ۸۹

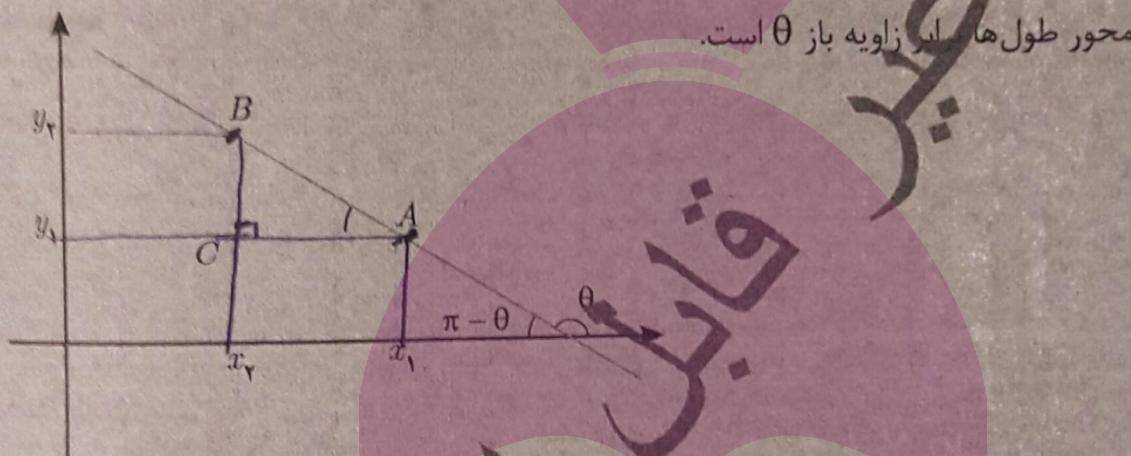
حمدید گفت: با این تعریف، زاویه خط‌های با شیب مثبت با محور طول‌ها، تندا و زاویه خط‌های با شیب منفی با محور طول‌ها، باز است. شاید تانزانت این زاویه نیز همان شیب خط باشد. دبیر گفت: حدس خوبی زدی. با انجام فعالیت زیر می‌توانید درستی این حدس را بررسی کنید.

بیت ۶



یک خط دلخواه را به معادله $y = ax + b$ با شیب منفی ($a < 0$) در نظر بگیرید. فرض کنید

با مختصات $A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ دو نقطه از این خط هستند و زاویه این خط با محور طول‌ها برابر زاویه باز θ است.



۱ شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۲ در مثلث قائم‌الزاویه ABC طول اضلاع BC و AC را بر حسب مختصات A و B به دست آورید.

$$AC = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

۳ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، تانزانت زاویه $\theta = \pi - \text{زاویه } A$ را بر حسب مختصات A و B به دست آورید.

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

۴ از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و $\tan(\pi - \theta)$ به دست می‌آورید؟

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

۵ با استفاده از (۴) چه رابطه‌ای بین شیب خط و تانزانت زاویه بین خط و محور طول‌ها به دست می‌آورید؟

$$\tan \theta = -m \Rightarrow m = \tan \theta$$

از فعالیت‌های (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که شیب هر خطی (مثبت یا منفی)، برابر تانزانت زاویه آن خط با محور طول‌ها است.

کار در کلاس ۷ ص ۹۰

برای هر خط d با شیب m که با محور طول‌ها زاویه θ می‌سازد داریم: $\tan\theta = m$

نکته



مثال ۱۷

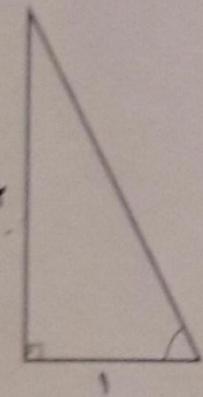
معادله خطی را که از مبدأ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویه باز $\frac{5\pi}{6}$ می‌سازد، بنویسید.
ابتدا تائزانت این زاویه را که شیب این خط است محاسبه می‌کنیم. با استفاده از رابطه $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ داریم:

$$\tan \frac{5\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

پس معادله این خط عبارت است از: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

مثال ۱۸

خط به معادله $1 - 2x + y = 0$ با محور طول‌ها حاچه زاویه‌ای می‌سازد؟
تائزانت این زاویه -2 است. به کمک سریع سقدار زاویه تندی را که تائزانت آن 2 است، به دست می‌آوریم که تقریباً $63/4$ درجه است.
از آنجا که $116/6 = 180^\circ - 63/4^\circ$ ، تائزانت زاویه $116/6$ درجه تقریباً $116/6$ درجه است.
پس زاویه این خط با محور طول‌ها تقریباً $116/6$ درجه است.



مثال ۱۹

زاویه خط به معادله $2 - y = 0$ با محور طول‌ها چقدر است؟
این خط موازی محور طول‌ها است و زاویه آن با محور طول‌ها صفر است. همچنین شیب آن صفر است و تائزانت زاویه بین این خط و محور طول‌ها نیز صفر است.

کار در کلاس ۷



۱ زاویه بین خط به معادله $2 - y = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$ و محور طول‌ها، چند را بدان است؟

$$m = \tan\theta \Rightarrow \sqrt{3} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

۲ معادله خطی را بنویسید که در نقطه به طول 1 ، محور طول‌ها را قطع می‌کند و با آن $A(-1, 0)$ ، $B(0, 1)$ ، $C(1, 0)$ را می‌سازد.

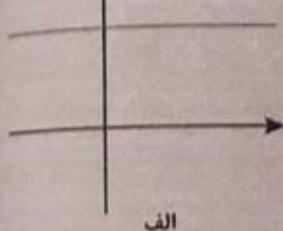
$$\theta = 10^\circ \Rightarrow m = \tan 10^\circ = \tan(10^\circ - 3^\circ) = \frac{\tan 10^\circ - \tan 3^\circ}{1 + \tan 10^\circ \tan 3^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

۳ شیب خط $-4 - y = 0$ چقدر است؟ زاویه بین خط $-4 - y = 0$ و محور طول‌ها چقدر است؟

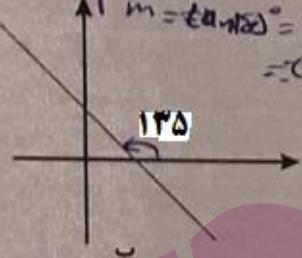
$$m = \tan\theta \Rightarrow \theta = \dots$$

۱ در شکل‌های زیر زاویه بین خط و محور طول‌ها و شیب خط را به دست آورید.

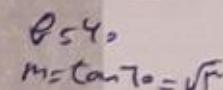
$$\begin{cases} \theta = 0 \\ m = \tan \theta = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \theta = 135^\circ \\ m = \tan 135^\circ = \tan(180 - 45) = -\tan 45^\circ = -1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \theta = 45^\circ \\ m = \tan 45^\circ = 1 \end{cases}$$



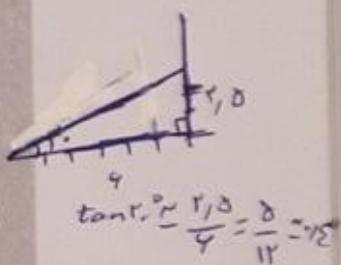
مسئلہ



۲ معادله خط را حسید که با محور طول‌ها زاویه 20° درجه بسازد و از نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$M = \tan 20^\circ \rightarrow y = 0.364x + d \rightarrow -2 = 0.364(-1) + d \rightarrow d = 1.64 \rightarrow y = 0.364x + 1.64$$

(برای محاسبه شیب خط می‌توانید رسم به کمک نقاله یا ماشین حساب استفاده کنید.)



$$\tan 20^\circ = \frac{2}{5} = \frac{d}{4} \Rightarrow d = \frac{8}{5}$$

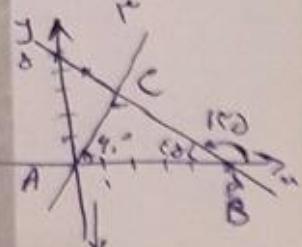
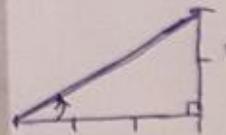
۳ خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد چه زاویه‌ای با محور طول‌ها می‌سازد؟

$$m = \tan \theta \rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \theta \rightarrow \frac{-2 - 2}{-1 - 1} = \tan \theta \rightarrow \frac{-4}{-2} = \tan \theta \rightarrow \tan \theta = 2 \rightarrow \theta = 68^\circ$$

۴ خط به معادله $2x + 3y = 4$ در چه نقطه‌ای از محور طول‌ها را قطع می‌کند و چه زاویه‌ای با آن می‌سازد؟

$$m = \tan \theta \rightarrow \frac{4 - 0}{0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2 \rightarrow \theta = 23^\circ \rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

۵ از برخورد دو خط با معادله‌های $y = \sqrt{3}x + 5$ و $y = -x + 5$ و میانه‌های آنها در محور طول‌ها، یک مثلث ساخته می‌شود. این مثلث را رسم کنید و زاویه‌های این مثلث را بر حسب رادیان به دست آورید.



۶ خط‌های به معادله $C = 3x - 5y - 3x = 0$ با هم (موازی‌اند) متقاطع‌اند. زاویه این خط‌ها با محور طول‌ها بر حسب درجه و رادیان به طور تقریبی چقدر است؟

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5} \quad \text{چون شیب‌های آنها برابر باشد از این میان} \quad m = \frac{3}{5}$$

$$m = \tan \theta \rightarrow \tan \theta = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\theta = 37^\circ = \frac{\pi}{4} R$$

$$m = \tan \alpha$$

$$\sqrt{3} = \tan \alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$m = \tan(\pi - \alpha)$$

$$-1 = \tan \beta$$

$$\pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\beta = \frac{5\pi}{6}$$

$$C = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} \right) = \pi - \frac{13\pi}{12}$$

$$C = \frac{5\pi}{12}$$

پو دمان چهارم



توشه‌ای برای موفقیت

کاردر کلاس ۱ ص ۹۶

۳ به کوان (برابر با) ۱۷۷۱۴۷

$$3 \text{ به کوان} \Leftrightarrow 177147 = 11 \text{ در نویم}$$

در این فعالیت دیدیم که برای ضرب و تقسیم دو عدد بزرگ، اگر بتوان آنها را به صورت اعداد توان دار (با پایه مساوی) نوشت آنگاه با جمع و تفریق توان های آنها به نتیجه مورد نظر خواهیم رسید. استفاده از این تکنیک که به جای ضرب و تقسیم اعداد بزرگ، با جمع و تفریق اعداد کوچک تر کار می کنیم موجب افزایش سرعت و کاهش زمان محاسبات می شود و از اشتباهاتی که در محاسبه مربوط به اعداد بزرگ است جلوگیری می کند. به نظر می رسد جمله معروف لاپلاس نیز به این دلیل بوده که برای انجام این محاسبات، وقت و نیروی بسیار زیادی از دانشمندان تلف می شده است و این روش باعث شده که دانشمندان وقت خود را با محاسبات حجمی هدر ندهند.

استفاده از اعداد توان دار و توجه به توان آنها برای انجام محاسبات، موجب پیدایش مفهومی به نام لگاریتم در ریاضی شده است. در فعالیت (۱) با توجه به تساوی $177147 = 3^{11}$ ، برای انجام عمل ضرب به جای عدد 177147 از عدد 11 (که توان در 3^{11} می باشد) استفاده شده است. بنا به تعریف عدد 11 را لگاریتم 177147 در مبنای 3 می نامند.

مثال ۱

(الف) تساوی $8 = 2^3$ نمایش عدد 8 به صورت يك عدد توان دار با پایه 2 است؛ بنابراین 3 را لگاریتم در مبنای 2 می نامند.

(ب) اگر عدد 1000 را به صورت يك عدد توان دار با پایه 10 بنویسیم، داریم، $1000 = 10^3$ بنابراین لگاریتم 1000 در مبنای 10 عدد 3 است.

(پ) عدد 64 ، توان سوم عدد 4 است، یعنی $64 = 4^3$ ، بنابراین لگاریتم 64 در مبنای 4 عدد 3 است.

۱) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(الف) از $81 = 3^4$ نتیجه می شود: لگاریتم 81 در مبنای 3 عدد 4 است.

(ب) لگاریتم 10000 در مبنای 10 عدد 5 است؛ زیرا $10000 = 10^5$

(پ) $16 = 4^2$ نشان می دهد: لگاریتم 16 در مبنای 4 عدد 2 است.

۲) عدد 64 را به صورت يك عدد توان دار با پایه 2 نوشه و با استفاده از آن لگاریتم 64 در مبنای 2 را بنویسید.

$$64 = 2^6 \rightarrow \log_2 64 = 6$$

با معرفی لگاریتم این سؤال مطرح خواهد شد که آیا می توان هر عدد حقیقی را به عنوان مبنای لگاریتم در نظر گرفت؟ فعالیت بعد مناسب بودن عدد 1 به عنوان مبنای را بررسی می کند.

فعالیت ۲ ص ۹۷

فعالیت ۲



تساوی های $1^0 = 1$ و $1^1 = \sqrt[1]{1}$ و $1^{-2} = \frac{1}{1^2} = 1^{-3} = \frac{1}{1^3} = 1$ و ... را در نظر بگیرید.

۱ در تساوی $1^{\text{---}} = 1$ به جای نقطه چین چه اعدادی می توان قرار داد؟ هر کدام صحیم

۲ آیا می توان عدد a را طوری پیدا کرد که: $2 = a^a$. به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۲ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟ حیر

۳ آیا عدد a را می توان طوری یافت که در تساوی: $3 = a^a$ صدق کند. به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۳ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟ حیر

۴ آیا عددی غیر از ۱ را می توان به صورت عددی توان دار با پایه ۱ نوشت؟ چرا؟ حیر

۵ با توجه به نتایج بالا، فکر می کنید می توان عدد ۱ را به عنوان مبنای لگاریتم انتخاب کرد؟ چرا؟ حیر

فعالیت بالا نشان می دهد عدد ۱ را نمی توان به عنوان مبنای برای لگاریتم در نظر گرفت. تعريف لگاریتم در حالت کلی به شکل زیر است.

تعريف



اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و اعداد حقیقی b و c به گونه ای باشند که: $a^c = b$ آنگاه c را لگاریتم b در مبنای a می نامند و با $\log_a b = c$ نشان می دهند. یعنی

$$(a \neq 1)$$

در تعريف لگاریتم، مبنای همواره عددی مثبت و مخالف ۱ در نظر گرفته می شود، زیرا توان رسانی به توان اعداد دلخواه فقط با پایه مثبت قابل تعريف است. زیرا از $a = -4$

$$\log_{-4} (-2) = \frac{1}{2} \Rightarrow -2 = (-4)^{\frac{1}{2}}$$

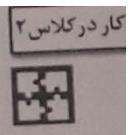
در نماد $\log_a b$ عدد b توان a نیست، بلکه a مبنای لگاریتم است، به عبارت دیگر: $\log_a b \neq \log a^b$

نکته



۱- لگاریتم در زبان انگلیسی logarithm است و آن را به طور خلاصه با \log نمایش می دهند.

کاردر کلاس ۲ ص ۹۹



۱ هر سطر جدول زیر، تساوی‌های متناظر را نشان می‌دهد، جدول را کامل کنید.

تساوی بر حسب عدد توان دار	تساوی بر حسب لگاریتم
$5^x = 125$	$\log_5 125 = \dots$
$7^x = 49$	$\log_7 49 = \dots$
$3^x = 81$	$\log_3 81 = \dots$
$4^x = 64$	$\log_4 64 = 3$
$2^x = 32$	$\log_2 32 = \dots$
$b^x = 21$	$\log_b 21 = \dots$
$3^x = 27$	$\log_3 27 = \dots$
$8^{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{8} = 2$	$\log_8 2 = \dots$
$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$	$\log_a \sqrt[3]{a} = \dots$

۲ عدد ۲۵ را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۵ نویste و با استفاده از آن حاصل $\log_5 25$ را بنویسید.

$$25 = 5^x \Rightarrow \log_5 25 = x$$

یک سؤال مهم آن است که آیا می‌توان از همه اعداد لگاریتم گرفت؟ یعنی آیا اعدادی وجود دارند که لگاریتم آنها تعریف نشده باشد؟ فعالیت زیر پاسخ این سؤال را فراهم می‌کند.

توشه‌ای برای موفقیت

فعالیت ۳ ص ۱۰۰

$$\begin{aligned} 4^c &= 16 \\ 4^1 &= 4 \\ 4^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^0 &= 1 \\ 4^{-1} &= \frac{1}{4} \\ 4^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$$

۱ اگر $4^c = b$, جدول زیر را کامل کنید.

فعالیت ۳



c	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
b	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	16

۲ آیا در سطر دوم جدول عددی منفی وجود دارد؟ درباره علامت b چه می‌توان گفت؟

$$a^c > 0$$

۳ با توجه به $a^0 = 1$ تساوی $4^c = b$ نشان می‌دهد $\log_4 b = c$, درباره علامت b در $\log_4 b$ چه می‌توان گفت؟

۴ اگر در پایه به جای ۴, عدد a است با یک مثال درستی نتیجه‌ای که از قسمت قبل به دست آورده‌اید را بررسی کنید.

$$\log_a b = \frac{1}{c} \Leftrightarrow a^c = b$$

۵ اگر a عددی مثبت و مخالف ۱ باشد و $a^c = b$ درباره علامت b چه می‌توان گفت؟ درباره علامت b در $\log_a b$ چه می‌توان گفت؟ آیا از عدد منفی می‌توان لگاریتم گرفت؟

هر عدد که حاصل

با انجام فعالیت (۳) ملاحظه می‌کنید اعداد مثبت به هر توانی بسند حاصل، همواره عددی مثبت خواهد بود. یعنی هیچ توانی از یک عدد مثبت، عددی منفی نمی‌باشد، بنابراین:

فقط اعداد مثبت لگاریتم دارند، یعنی عبارت $\log_a b$ برای $b > 0$ تعریف می‌شود.

نکته



کاردر کلاس ۳ ص ۱۰۱

کاردر کلاس ۳



۱ با توجه به ویژگی‌های توان رسانی اعداد، جملات زیر را کامل کنید.
برای هر عدد مثبت و مخالف ۱ مانند a :

$$\text{الف) با توجه به } a^1 = a, \text{ داریم:}$$

$$\text{ب) از } 1 = a^0 \text{ نتیجه می‌شود: } \log_a 1 = 0.$$

$$\text{پ) با درنظر گرفتن } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ می‌توان گفت!}$$

$$\text{ت) اگر } \log_a a^c = c \text{ آنکه } \log_a b = c \text{ بنا بر این: } b = a^c.$$

مثال ۵

عبارت‌های زیر برقرار هستند:

$$\text{الف) } 1 = \log_4 4 \text{ زیرا } 4^1 = 4 \quad \text{ب) } \log_{\sqrt{5}} 5 = 1 \text{ زیرا } (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \text{ت) } 0 = \log_{10} 1 \text{ زیرا } 10^0 = 1$$

$$\text{ث) با توجه به اینکه } \log_{10} 0.001 = -3 \text{ داریم: } \log_{10} 0.001 = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

$$\text{ج) از } 4^{-1} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25 \text{ نتیجه می‌شود: } \log_{10} 0.25 = -1$$

معمولًا برای نمایش لگاریتم در مبنای ۱۰ مبنای لگاریتم را نویسند. پس $\log_{10} b = \log b$.
با توجه به تعریف لگاریتم می‌توان دید که لگاریتم اعدادی که توان‌های صحیح یا گویایی از مبنای لگاریتم می‌باشند به سادگی قابل محاسبه است، اما محاسبه لگاریتم سایر اعداد چگونه انجام می‌شود؟
مثالاً برای محاسبه $\log_{10} 9$ باید توانی از ۱۰ را پیدا کنیم که مساوی عدد ۹ باشد، واضح است که این عدد به سادگی قابل محاسبه نیست اما با استفاده از ماشین حساب می‌توان تقریب اعشاری این عدد را پیدا کرد.

مسائل ص ۱۰۳

مسائل



۱ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید:

الف) از $64 = 4^3$ نتیجه می‌شود: لگاریتم 64 در مبنای 4 عدد 3 است.

ب) لگاریتم 32 در مبنای 2 عدد 5 است؛ زیرا $32 = 2^5$.

پ) از $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ نتیجه می‌شود: لگاریتم $\sqrt[3]{2}$ در مبنای 2 عدد $\frac{1}{3}$ است.

ت) با توجه به اینکه $7^4 = 2401 = 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 1$ داریم:

$$\log_7 2401 = 4 + \log_7 1 = 4 + 0 = 4$$

ث) با توجه به $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ، می‌توان گفت: $\log_a \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$.

ج) تساوی های $10^4 = 10000$ و $10^3 = 1000$ نشان می‌دهند: $\log_{10} 10000 = 4$

۲ مانند قسمت (الف) تساوی شامل لگاریتم متناظر با هر قسمت را بنویسید.

$$\log_4 16 = 2 \quad \text{(الف)} \quad \log_{10} 125 = 3 \quad \text{(ب)} \quad \log_{10} 1000 = 4 \quad \text{(ج)}$$

$$2/1 = a^3 \quad \text{(د)} \quad 4/3 = 2^x \quad \text{(ث)} \quad 1/3 = b^2 \quad \text{(ج)}$$

در هر کدام از موارد زیر یک تساوی شامل لگاریتم داده شده است، مانند قسمت (الف)

تساوی شامل عدد توان دار متناظر با هر کدام را بنویسید.

$$\log_2 64 = 6 \leftrightarrow 2^6 = 64 \quad \text{(الف)} \quad \log_2 \left(\frac{1}{9}\right) = -2 \rightarrow 2^{-2} = \frac{1}{9} \quad \text{(ب)} \quad \log_a 3 = 6 \rightarrow a^6 = 3 \quad \text{(پ)}$$

$$\log_b c = 2 \rightarrow b^2 = c \quad \text{(ت)} \quad \log_2 2 = x \rightarrow 2^x = 2 \quad \text{(ج)} \quad \log_{22} 2 = \frac{1}{5} \rightarrow 2^{1/5} = 2$$

حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید:

$$\log_7 49 = 2 \quad \text{(الف)} \quad \log_{10} 125 = 3 \quad \text{(ب)} \quad \log_{10} 128 = 2 \quad \text{(پ)}$$

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3 \quad \text{(ت)} \quad \log_{10} 10000 = 4 \quad \text{(د)} \quad \log_{10} 1 = 0 \quad \text{(ج)}$$

۳ با استفاده از ماشین حساب، حاصل لگاریتم‌های زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید:

$$\log 50 = \dots \quad \text{(الف)} \quad \log 12 = \dots \quad \text{(ب)} \quad \log 2 = \dots \quad \text{(پ)}$$

۴ نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی 4 برابر می‌شود.

الف) پس از چند واحد زمانی، وزن 1 گرم از این باکتری‌ها 64 گرم خواهد شد؟

ب) پس از چند واحد زمانی، وزن این باکتری‌ها 32 گرم خواهد شد؟

در هر مورد زیر، یک تساوی شامل عددی توان دار و تساوی لگاریتمی متناظر با آن را طوری

بنویسید که حاصل، لگاریتم عددی با ویژگی خواسته شده باشد.

پ) عدد گویا

ب) عدد صحیح منفی

الف) عدد طبیعی

$$\log_3 1 = \frac{3}{2} \quad \log_{10} 1 = 0 \quad \log_3 32 = 5$$

$$\frac{1}{10000} = 10^{-4} \quad \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 4 \times 4^{\frac{1}{2}} = 4 \times \sqrt{4} = 4 \times 2 = 8$$

فعالیت ۴ ص ۱۰۴

فعالیت ۴



۱ جدول زیر را کامل کنید.

b	$\log b$	$+$	$\log c$	$=$	$\log bc$
۱۰	۱		۲	۱۰۰۰	۳
۱۰۰۰۰	۴		۳	۱۰۰۰۰۰۰۰	۷
۰/۱	-۱		۲	۱۰	۴
$\sqrt{10}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	۱۰	۱
10^x	10^y	x	y	10^{x+y}	$x+y$

۲ در هر سطر چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های $\log b$ و $\log c$ و ستون $\log bc$ وجود دارد؟

$$\log bc = \log b + \log c$$

۳ این رابطه را به صورت یک جمله بیان نمایید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

لگاریتم حاصلضرب برابر مجموع لگاریتم‌های آن دو عدد

۱۰۴

کاردر کلاس ۴ ص ۱۰۶

نکته



کاردر کلاس ۴



در حالت کلی: برای $a, b > 0$ داریم: $\log(a+b) \neq \log a + \log b$

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

$$\log 4 + \log 25 = \log 4 + \log 100 = \log 100 = 2 \quad (\text{الف})$$

$$\log 100\sqrt{10} = \log 100 + \log \sqrt{10} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad (\text{ب})$$

$$\log \sqrt[3]{20} + \log \sqrt[3]{2} + \log \sqrt[3]{25} = \log \sqrt[3]{20 \times 2 \times 25} = \log \sqrt[3]{1000} = \log 10 = 1 \quad (\text{ب})$$

۲ فاصله دورترین ستاره‌ای که با چشم غیر مسلح قابل رویت است از زمین، $10^{11} \times 5056119722$ برابر فاصله زمین از خورشید است. فاصله این ستاره از زمین را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید.

$$0.09 \times 119722 \times 10^{11} = 1.4947 \times 10^{13}$$

دیدیم که لگاریتم حاصل ضرب دو عدد مثبت با مجموع لگاریتم‌های آنها برابر است. در مورد لگاریتم تقسیم دو عدد، چه رابطه‌ای برقرار است؟ فعالیت زیر به بررسی این مطلب می‌پردازد.

فعالیت ۵ ص ۱۰۷

فعالیت ۵

۱ جدول زیر را کامل کنید.



b	c	$\log b$	$\log c$	$\frac{b}{c}$	$\log \frac{b}{c}$
۱۰۰۰	۱۰	۳	-۱	۱۰۰	-۲
۱۰۰	۱۰	-۲	-۱	-۱۰۰	-۴
۰/۱	۱۰۰	-۱	-۲	۰۰۱۰۰۱	-۳
$100\sqrt{10}$	$10\sqrt{10}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$10^{1.5}$	-۱
10^{-x}	10^{-y}	x	y	10^{x-y}	$-x-y$

۲ در هر سطر په رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های $\log \frac{b}{c}$ و $\log b$ و $\log c$ وجود دارد؟
این رابطه را به صورت یک جمله بنویسید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.
 $\log \frac{b}{c} = \log b - \log c$

فعالیت (۵) نشان می‌دهد که لگاریتم تقسیم عدد با لگاریتم مقسوم منهای لگاریتم مقسوم علیه
برابر است، در حالت کلی داریم:

$$\log \frac{b}{c} = \log b - \log c \quad b, c > 0 \text{ داریم:}$$

نکته



این خاصیت، برای لگاریتم‌هایی که مبنای غیر از ۱۰ باشند نیز برقرار است.

مثال ۸

الف) با توجه به $\log 7 \approx 0.845$ و $\log 5 \approx 0.699$ مقدار تقریبی $\log \frac{20}{15}$ را به دست می‌آوریم:

$$\log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2 \quad \log 4 = \log \frac{2^2}{5} = \log 2^2 - \log 5 \approx 0.699$$

کاردر کلاس ۵ و فعالیت ۶ ص ۱۰۸



در حالت کلی برای $a, b > 0$ داریم: $\log(a \cdot b) \neq \log a + \log b$

دسته



در کلاس ۶



۱ حاصل لگاریتم های زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \log 2 + \log 3 = \log 2 + \log 3 = \log(2 \cdot 3) = \log 6 \quad \text{ب) } \log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = -\log 100$$

۲ با تکمیل قطعه چین ها، نتیجه فعالیت (۶) را با استفاده از خاصیت لگاریتم ضرب تو خذ

به دست آورید.

$$\log(b) = \log\left(\frac{bc}{c}\right) = \log\left(\frac{b}{c} \times c\right) = \log\left(\frac{b}{c}\right) + \log c$$

$$\log\left(\frac{b}{c}\right) = \log b - \log c$$

بنابراین:

از رابطه $(a^m)^n = a^{mn}$ می توان استفاده کرد و خاصیت دیگری از لگاریتم را به دست آورد.

۱ جدول زیر را تکمیل کنید.

b	n	b^n	$\log b$	$\log b^n$
۱۰	۱	۱	۰	۰
۱۰۰	۲	۱۰۰۰۰	۲	۴
۱/۱	۳	۰۰۰۱	-۱	-۳
$\sqrt{10}$	۴	۰۰۰۱۰۰	۰	۰
۱۰۰	n	$(10)^n = 10^{n \cdot 1}$	x	$n \cdot x$

فعالیت ۶



۲ در هر سطر، چه رابطه ای بین اعداد ستون های n و $\log b^n$ و عدد ستون $\log b$ وجود دارد؟

این رابطه را به صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

$$\log b^n = n \log b$$

فعالیت بالا نشان می دهد که لگاریتم b^n برابر است با n برابر لگاریتم b . در حالت کلی داریم:

کاردر کلاس ۶ ص ۱۰۹

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $\log 200^5 - \log 2^5 = \log \left(\frac{200}{2}\right)^5 = \log 100^5 = 5 \log 100 = 5 \times 2 = 10$

(ب) $\log 12 + 2\log 2 - \frac{1}{2} \log 26 + \log 125 = \log \frac{12 \times 2^2}{\sqrt{26}} \times 125 = \log 2^3 \times 5^3 = \log 10^6 = 6 \log 10 = 6$

۲ عبارت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید ($a > 0$, $b, c, x > 0$)

(الف) $4\log a + 5\log b - \frac{1}{2}\log c = \log a^4 \times b^5 \div c^{\frac{1}{2}}$

(ب) $\log x^r - \log x = \log \frac{x^r}{x} = \log x^{r-1}$

فعالیت ۷ ص ۱۱۰

۱ جدول زیر را کامل کنید.

b	a	$\log b$	$\log a$	$\frac{\log b}{\log a}$	$\log_a b$
100	10	2		2	2
10	100	1		1	1/2
$\sqrt{10}$	10	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1000	100	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

۲ با مقایسه اعداد دو ستون آخر چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ چه رابطه‌ای بین $\log_a b$ و $\frac{\log b}{\log a}$ وجود دارد؟

کاردر کلاس ۷ ص ۱۱۱

حاصل هر کدام از قسمت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

(الف) $\frac{\log 4}{\log 2} = \log_2 4$

(ب) $\log_5 2 + \log_5 3 = \log_5 (2 \times 3) = \log_5 6$

$$\begin{aligned} \log 4 &= \log 2 + \log 2 = 0.3010 + 0.3010 = 0.6020 \\ \log 4 &= \log 10 + \log 4 = 1.0000 + 0.6020 = 1.6020 \\ \log 1 &= \log 10 \times 10^0 = \log 10 + 0 \log 10 = \\ \log 10 &= \log 10 - \log 10 = \\ \log 10 &= \log \frac{1}{10} = \log 10 - \log 10 = 1 - \log 10 = \\ \log 10 &= \log 10^3 \times 10 = 3 \log 10 + \log 10 = 3 \log 10 + 1 - \log 10 = \end{aligned}$$

۱) عبارت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بتوانید و در صورت امکان ساده کنید.

مسائل



(الف) $\log \sqrt{5} + \log \sqrt{2} = \log \sqrt{5 \times 2} = \log 10^{1/2} = \frac{1}{2} \log 10 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

(ب) $\log 40000 - \log 4 = \log \frac{40000}{4} = \log 10000 = 4$

(پ) $2 \log 50 + 2 \log 2 = \log 50^2 \times 2^2 = \log 10000 = 4$

(ت) $5 \log x - \log y = \log \frac{x^5}{y}$

(ث) $2 \log a + 2 \log b - \log z - \log a^2 + \log 4 = \log \frac{a^2 b^2}{z a^2} = \log \frac{b^2}{z}$

(ج) $4 + \log_2 10 = \log_2 16 + \log_2 5 = \log_2 (16 \times 5) = \log_2 80$

(ز) $4 - \log_{10} 5 = 4 - \log_{10} 5 - \log_{10} 2 = \log_{10} \frac{5}{2} = \log_{10} \frac{11}{8}$

۲) اگر $\log 3 \approx 0.477$ و $\log 2 \approx 0.301$ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

(الف) $\log 4$ (ب) $\log 6$ (پ) $\log \frac{2}{3}$ (ت) $\log 18$ (ج) $\log 45$

۳) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $\frac{\log 10}{\log 100} = \frac{1}{10}$ (ب) $\log 100 + \log 100 = 0$ (پ) $(\log 1000)^2 = \log 10000$
 $\frac{1}{10} \neq 0$ $2 + (-2) = 0$ $\frac{10000}{10000} \neq \frac{100}{100}$

(الف) با استفاده از ماشین حساب، تقریب اعشاری اعداد $\log 20$ و $\log 30$ و $\log 60$ را تابدو

رقم اعشار به دست آورید. آیا تساوی $\log 20 \times \log 30 = \log(20 \times 30)$ برقرار است؟

ب) به کمک قسمت (الف) در مربع علامت مناسب ≠ یا = را قرار دهید:

برای اعداد مثبت a و b در حالت کلی داریم:

۴) باکتری‌هایی را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی ۲ برابر می‌شود. با استفاده

از ماشین حساب تعیین کنید پس از چند واحد زمانی وزن این باکتری‌ها ۲۰ گرم خواهد شد؟

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} & \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{5}{16} \quad \frac{6}{32} \quad \frac{7}{64} \quad \frac{8}{128} \quad \frac{9}{256} \quad \frac{10}{512} \\ \log 2 &= \log 2 \times 2 = 2 + \log 2 = 2 + \frac{\log 2}{\log 2} \\ &= 2 + \frac{1 - \log 2}{\log 2} = 2 + \frac{1}{\log 2} - 1 \\ &= 1 + \frac{1}{\log 2} = 1 + \frac{1}{0.3010} = 1 + \frac{1}{0.3010} = \end{aligned}$$

پو د مان پنجم



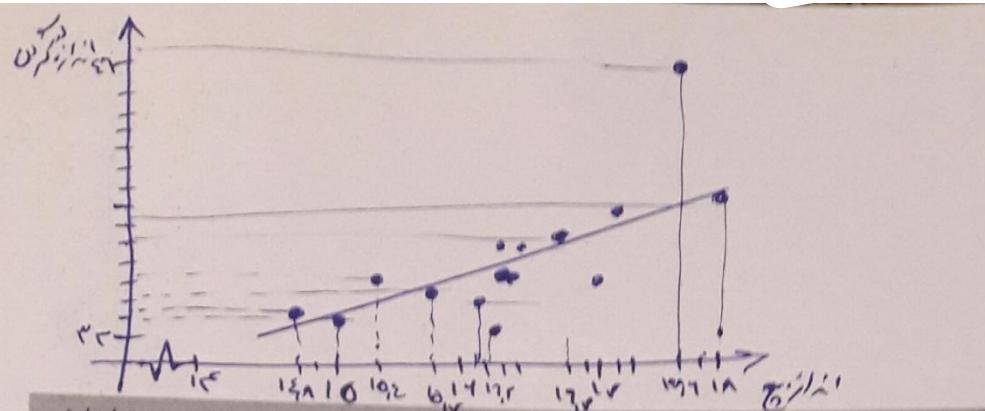
فعالیت ۱ ص ۱۱۵

فعالیت ۱

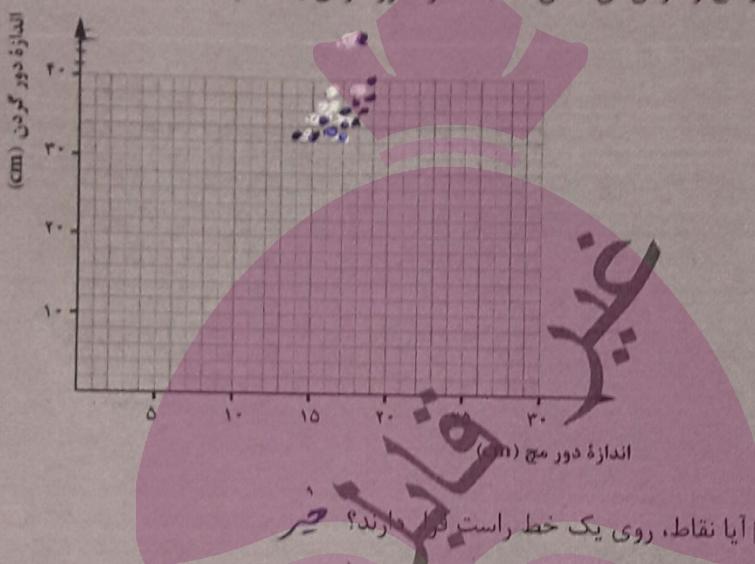


نظریه‌ای وجود دارد که نشان می‌دهد بین اندازه دور مج دست و اندازه دور گردن افراد یک رابطه خطی وجود ندارد. تولیدکنندگان با داشتن این رابطه می‌توانند اندازه‌های مناسبی برای محصولات خوبشان در نظر بگیرند. برای آشنایی با فرایند پیدا کردن این رابطه، اندازه دور گردن و دور مج دست ۱۵ نفر در جدول زیر آورده شده است.

اندازه دور گردن (cm) بر حسب (x)	اندازه دور مج (cm) بر حسب (x)
۲۳/۵	۱۴/۸
۲۳	۱۵
۲۵/۲	۱۵/۴
۲۴/۲	۱۵/۷
۲۳/۷	۱۶/۱
۲۲/۲	۱۶/۲
۳۵/۵	۱۶/۲
۳۵/۸	۱۶/۳
۳۶/۴	۱۶/۷
۳۷/۳	۱۶/۹
۳۵/۵	۱۷/۱
۳۶/۶	۱۷/۲
۴۶/۸	۱۷/۶
۳۸/۳	۱۷/۸



- ۱ در صفحه مختصات زیر، نقطه‌هایی را مشخص کنید که طول هر نقطه، نشان‌دهنده اندازه دور مچ و عرض آن نشان‌دهنده اندازه دور گردن یک نفر است.



- ۲ خطی (به طور تقریبی) رسم کنید که تا حد ممکن با نقاط مشخص شده در صفحه، کمترین فاصله را داشته باشد. سعی کنید نیمی از نقاط بالای خط و نیمی دیگر زیر خط و با فاصله یکسان از خط قرار گیرند.

- ۳ اطلاعات جدول را در excel وارد کنید و طبق دستورالعمل صفحه ۱۱۸، به کمک خطی رسم کنید که کمترین فاصله را بین نقاط مشخص شده روی صفحه داشته باشد.

- ۴ اگر x اندازه دور مچ و y اندازه دور گردن باشد، معادله خط رسم شده را به کمک excel طبق دستورالعمل صفحه بعد پیدا کنید.

- ۵ ستون ' y ' را با دو رقم اعشار کامل کنید. (y اندازه دور گردن به کمک معادله خط است.)

A_1 اندازه دور مچ (cm) بر حسب x	A_2 اندازه دور گردن (cm) بر حسب y	$B_y = aA_1 + b$ خطا: $y' = ax + b$	e^r	y''	خطا: $e' = y - y''$	e''
۱۴/۸	۳۳/۵	۳۱/۹۵	-۱/۱۵۶	۲/۴۲	۳۲/۸۶	۰/۱۶۴
۱۵	۳۳					
۱۵/۴	۳۵/۲	۳۲/۶۱	۱/۰۹	۲/۰۲	۳۳/۹۱	۱/۲۹
۱۵/۷	۳۴/۲	۳۴/۴۵	-۰/۲۵	۰/۰۶	۲۴/۴۴	-۰/۲۳۵
۱۶/۱	۳۳/۷					
۱۶/۲	۳۲/۲	۳۵/۱۸۴	-۳/۶۴	۱۳/۲۲	۳۵/۱۱	۹/۶۷
۱۶/۲	۳۵/۵	۳۵/۱۸۴	-۰/۳۴	۰/۱۲	۳۵/۳۱	۰/۱۹
۱۶/۲	۳۵/۸	۳۵/۱۸۴	-۰/۰۴		۳۵/۳۱	۰/۴۹
۱۶/۸۳	۳۶/۴					
۱۶/۷	۳۷/۳					
۱۶/۹	۳۵/۵					
۱۷/۱	۳۶/۶	۳۸/۳۴	-۱/۷۴	۳/۰۲	۳۶/۸۶	-۰/۳۹
۱۷/۲	۳۸/۵					
۱۷/۶	۴۸/۸	۴۹/۷۳	۷/۰۷	۵۰/۰۱	۳۷/۷۶	۹/۰۴
۱۷/۸	۴۸/۱	۴۰/۲۸	-۱/۹۹	۲/۹۴	۳۸/۱۱	۰/۱۹
						۰/۰۴

۷ آیا مقادیر به دست آمده به کمک معادله خط، با مقادیر اندازه گیری شده برابرند؟ چرا؟

۸ ستون خطای (e)، اختلاف مقدار واقعی و مقدار تخمین زده شده را کامل کنید.

۹ مجموع خطایها (ستون e) را به دست آیا این عدد مجموع واقعی خطایها را نشان می دهد؟ چرا؟

۱۰ از ادی معاوی تغیری به است امر هاست.

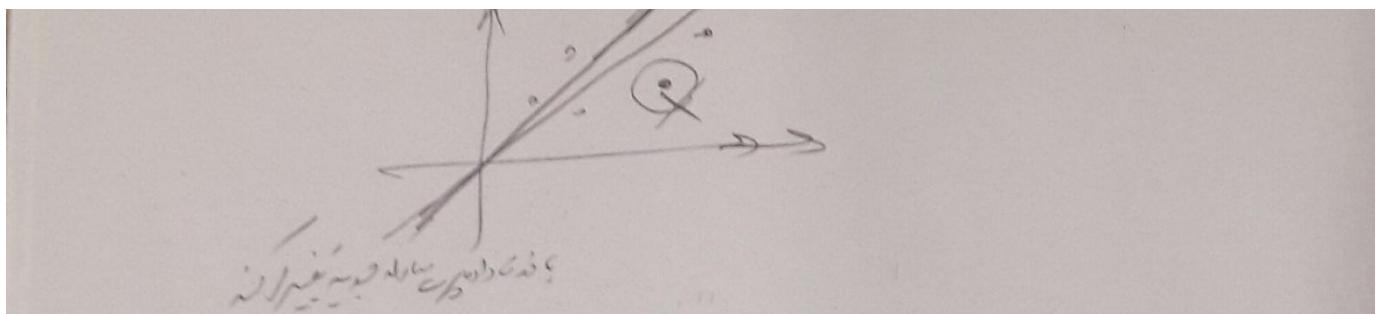
۱۱ مجموع مجذور خطایها را به دست آورید.

۱۲ فکر می کنید چرا مجذور خطایها را به دست می آورید؟

۱۳ نزدیک جمیع خطایها برخی عکار شنب و سق همراه باشند و عملی از محبع خطایها نیز می باشد.

۱۴ خاصیت آن در نظر برین باید از محبع در خطایها استفاده کنند تا صفحه شود و آن اندازه خطای از صفات تغیری بکتر نشود. این یعنی که محدود داده بوده باشد و از جدول حریان به صفات (حقیقی) بررسی شود.

فعالیت ۲ ص ۱۲۰



فعالیت ۲



۱ در فعالیت (۱) با حذف سطر مربوط به $17/6$ (در ستون اول)، نقطه $[17/6]$ را از داده های اینان $[46/8]$

خارج کنید؛ و خطی رسم کنید که کمترین فاصله را با نقاط داشته باشد.

۲ ستون "z" را با دو رقم اعشار کامل کنید. ("z" اندازه دور کردن به کمک معادله جدید خط است.)

۳ ستون "c" را کامل کنید.

۴ مجموع مجذوب خطها را برابر مقادیر به دست آمده برای "z" بدست آورید و با جواب قسمت

۵ در فعالیت (۱) مقایسه کنید.

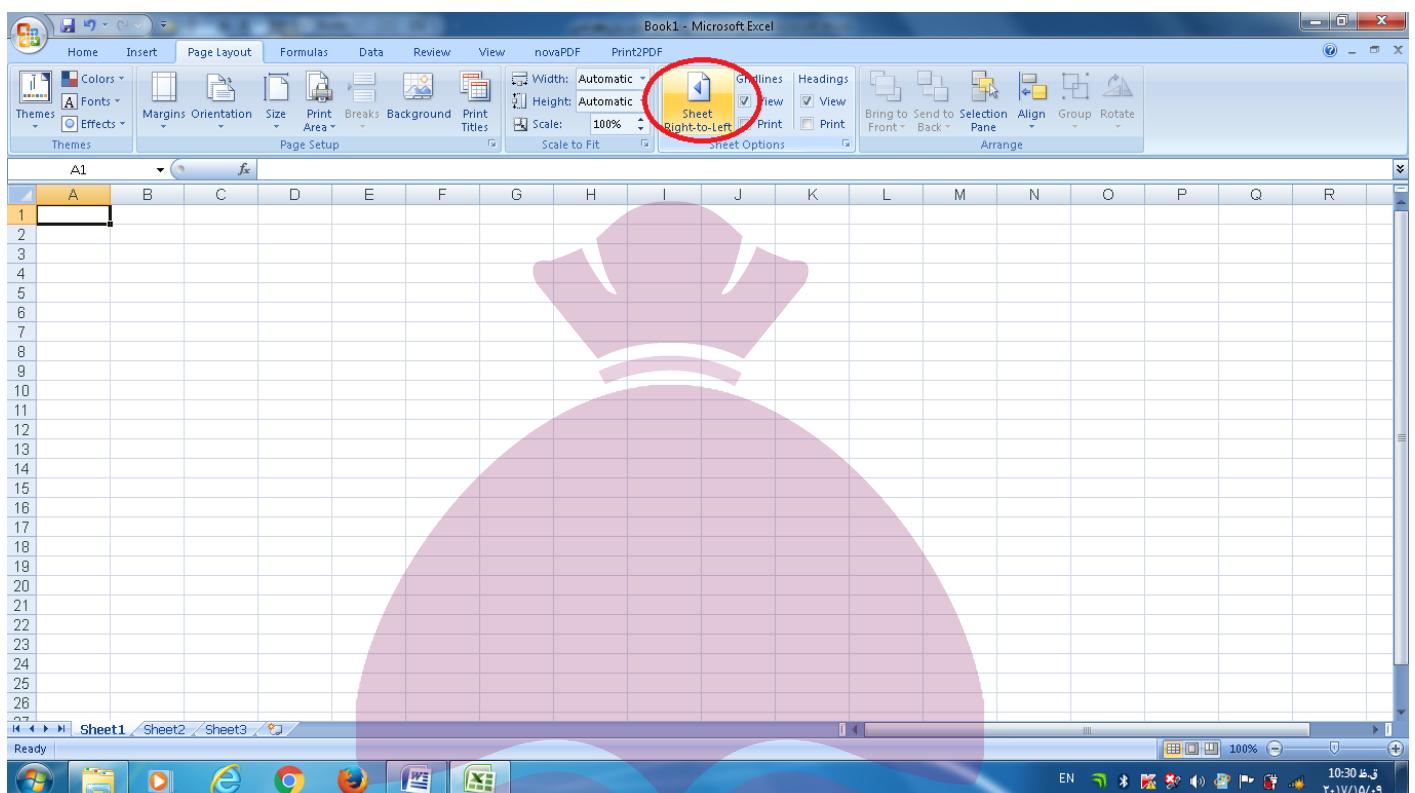
۵ فکر می کنید کدام خط برای پیش بینی مناسب تر است؟ چرا آین اتفاق می افتد؟
دویی چون خطای متعارض هستند و همچنان ترمیم را نمی کنند.
نامهور باشد من آنند معرف آنند همچنان و افقی در جا نمی باشد بسیاری این معرف از همان این معرف است
آنند زیرا کسر آنند و افعیت تزریق نمی باشد

در آمار، نقطه $[17/6]$ را که با بقیه داده ها تفاوت قابل ملاحظه ای دارد، داده پرت^۱ می نامند. معمولاً $[46/8]$

اگر داده های پرت را از داده ها خارج کنیم در ک بهترین وضعیت به دست آوریم.
در بسیاری از موارد خط بهترین برازش، رابطه خطی مانسی را بین دو کمیت به ما می دهد، و
از طریق آن می توان مقدارهای متناظر بین این کمیت ها را پیش بینی و از این پیش بینی ها در
برنامه ریزی ها استفاده کرد. معمولاً تولید کنندگان، از این روش برای تولید محصولاتی که برای عموم
عرضه می شود، استفاده می کنند.

طريقه رسم نمودار پراكنش و بدست آوردن معادله خط بهترین بازش با استفاده از نرم افزار اکسل:

ابدعا نرم افزار اکسل را باز می کنیم سپس ستون های آن از چپ به راست تنظیم تنظیم می کنیم با استفاده از دستور آمده در شکل زیر:

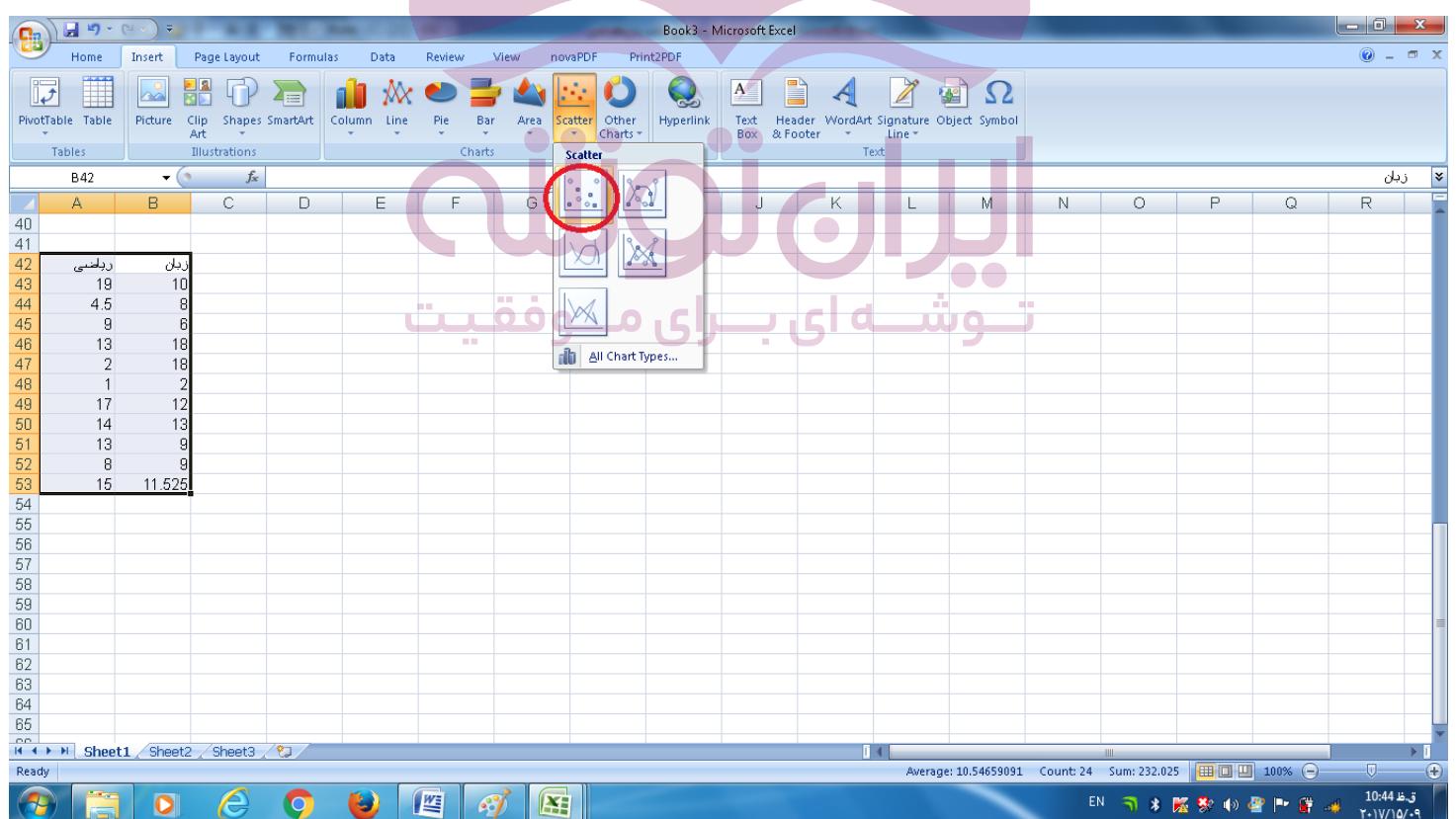
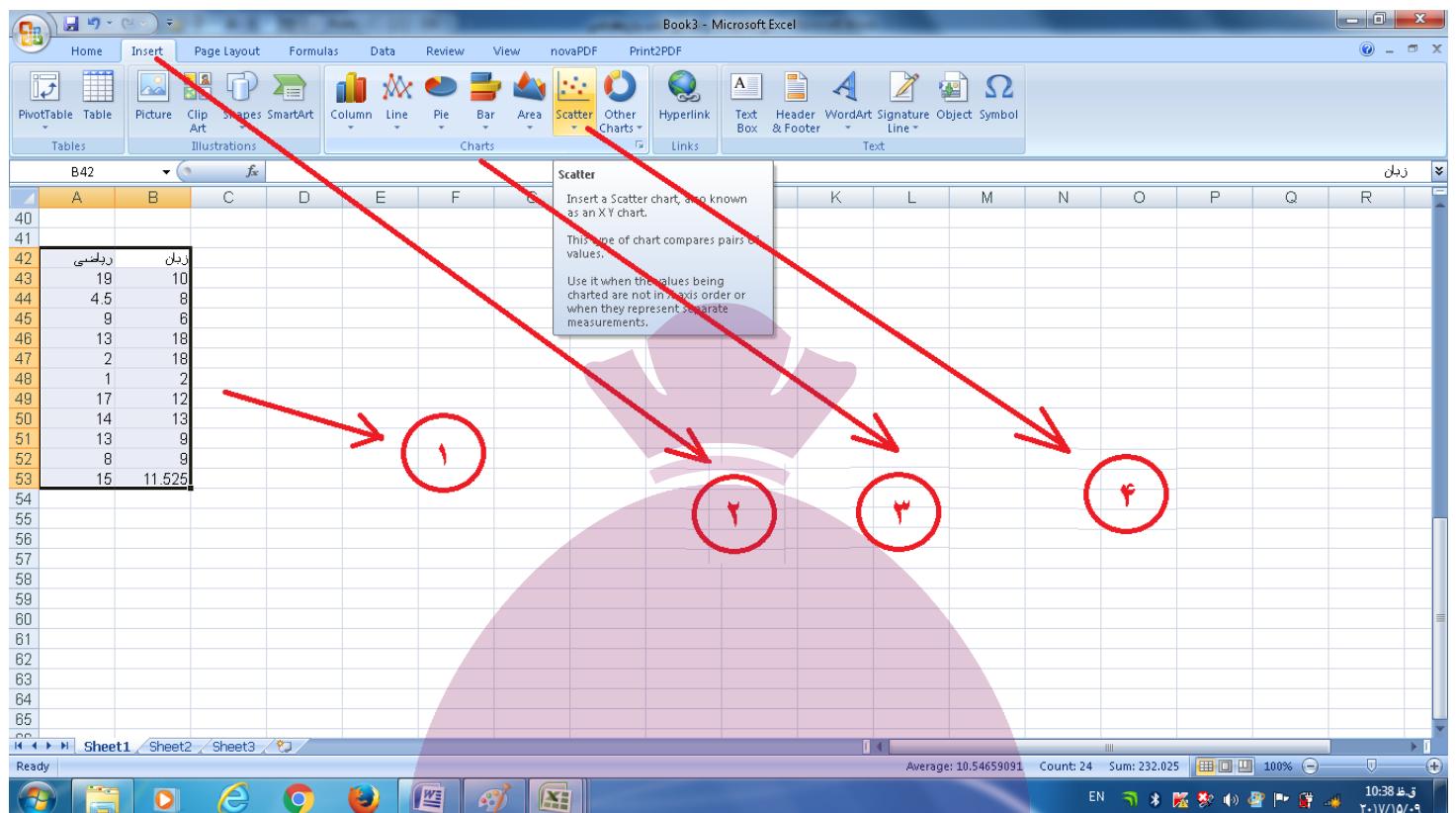


سپس داده های مسئله را در دو ستون از صفحه اکسل وارد می کنیم:

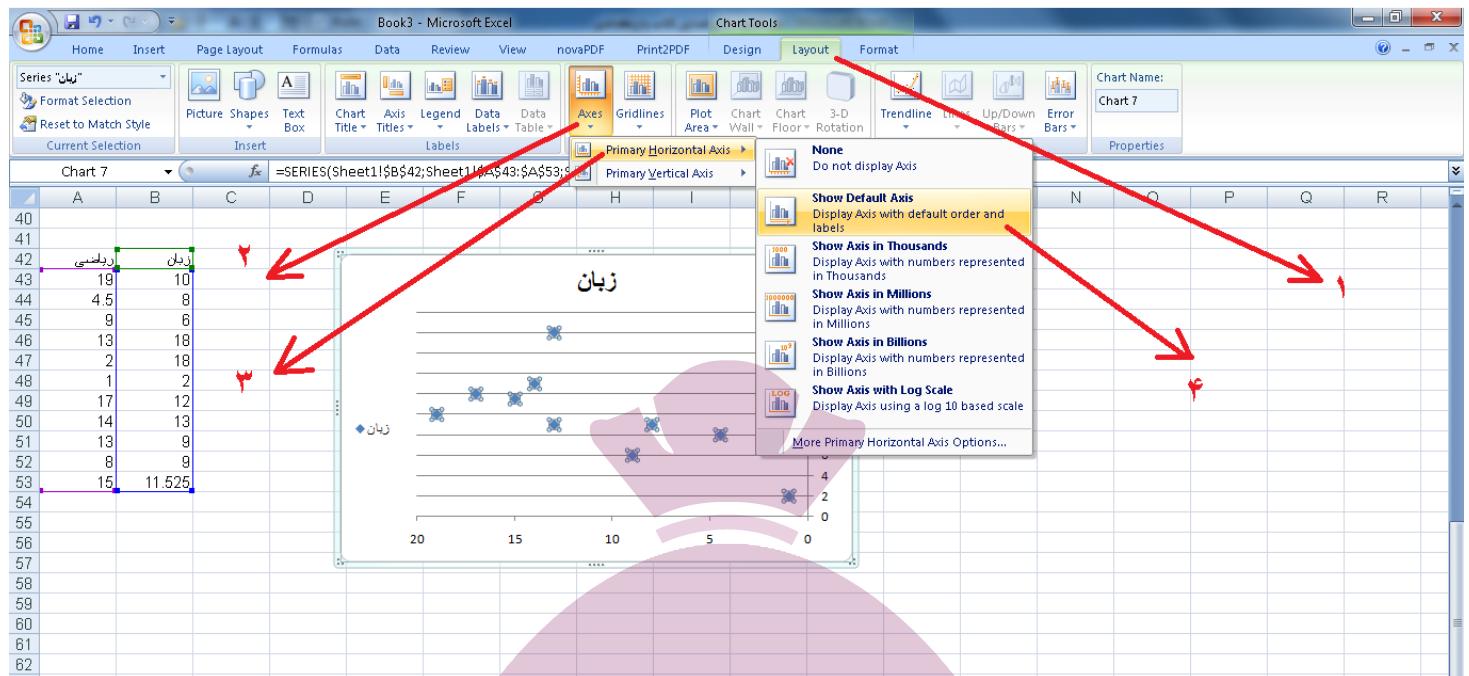
		B42
40	A	B
41	ردیفی	ردیل
42	19	10
43	4.5	8
44	9	6
45	13	18
46	2	18
47	1	2
48	17	12
49	14	13
50	13	9
51	8	9
52	15	11.525
53		
54		
55		
56		
57		
58		
59		
60		
61		
62		
63		
64		
65		

با انتخاب داده های وارد شده به کمک درگ کردن، با استفاده از منوی Insert گزینه Chart دستور Scaater را

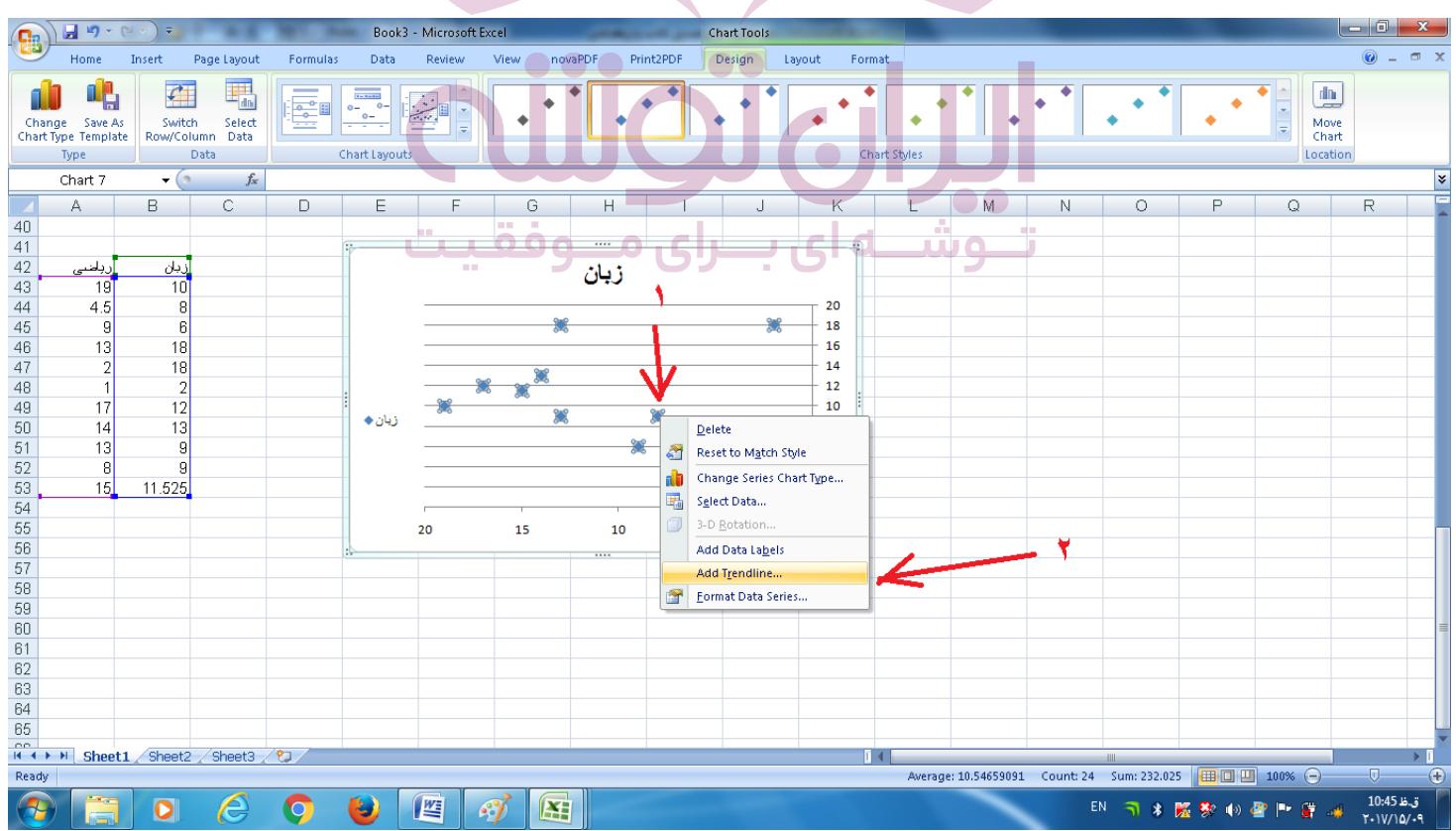
انتخاب می کنیم:



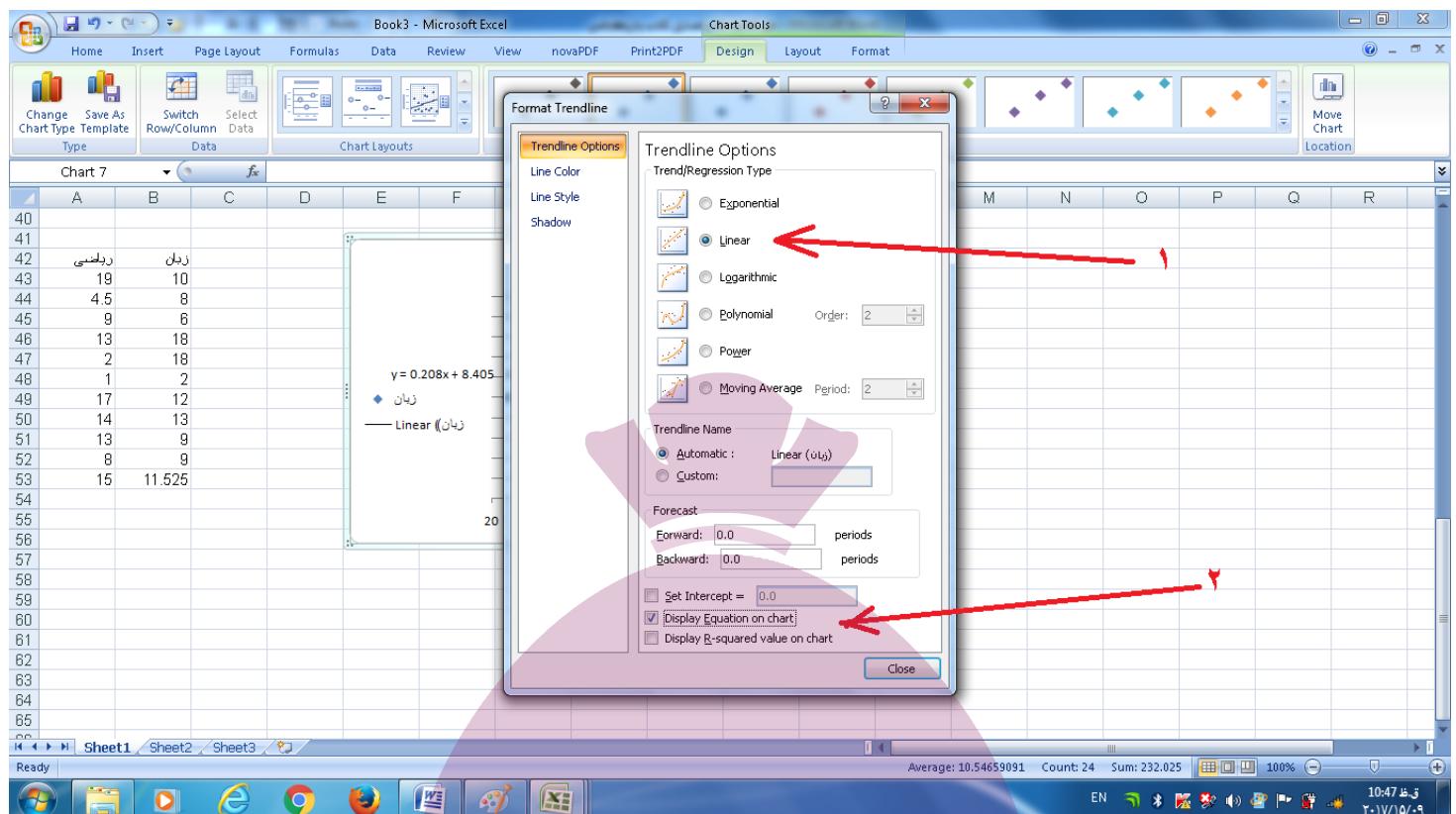
در صورتی که محور عمودی نمودار در سمت راست قرار گرفته است با دستور زیر آنرا اصلاح کنید:



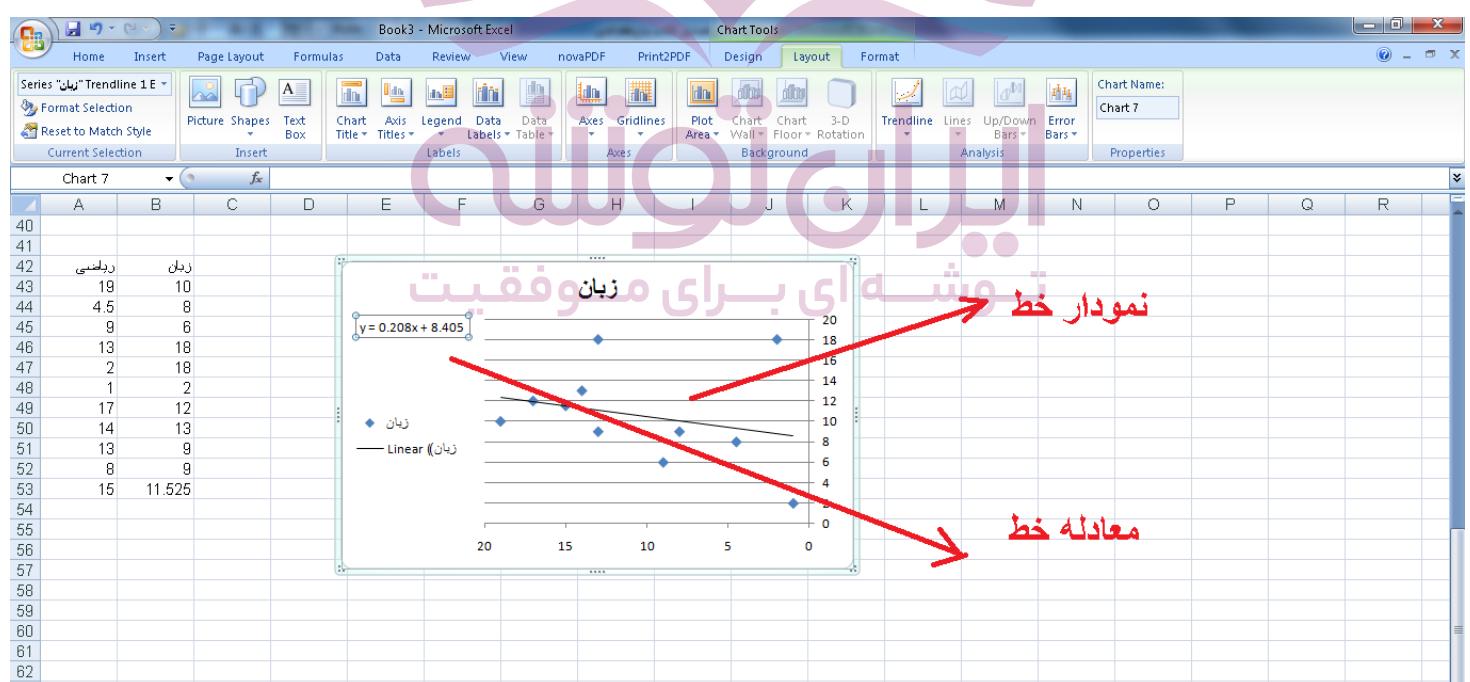
بعد از رسم نمودار روی یکی از نقاط نمودار کلیک راست می کنیم و سپس گزینه **Add trendline** را انتخاب می کنیم:



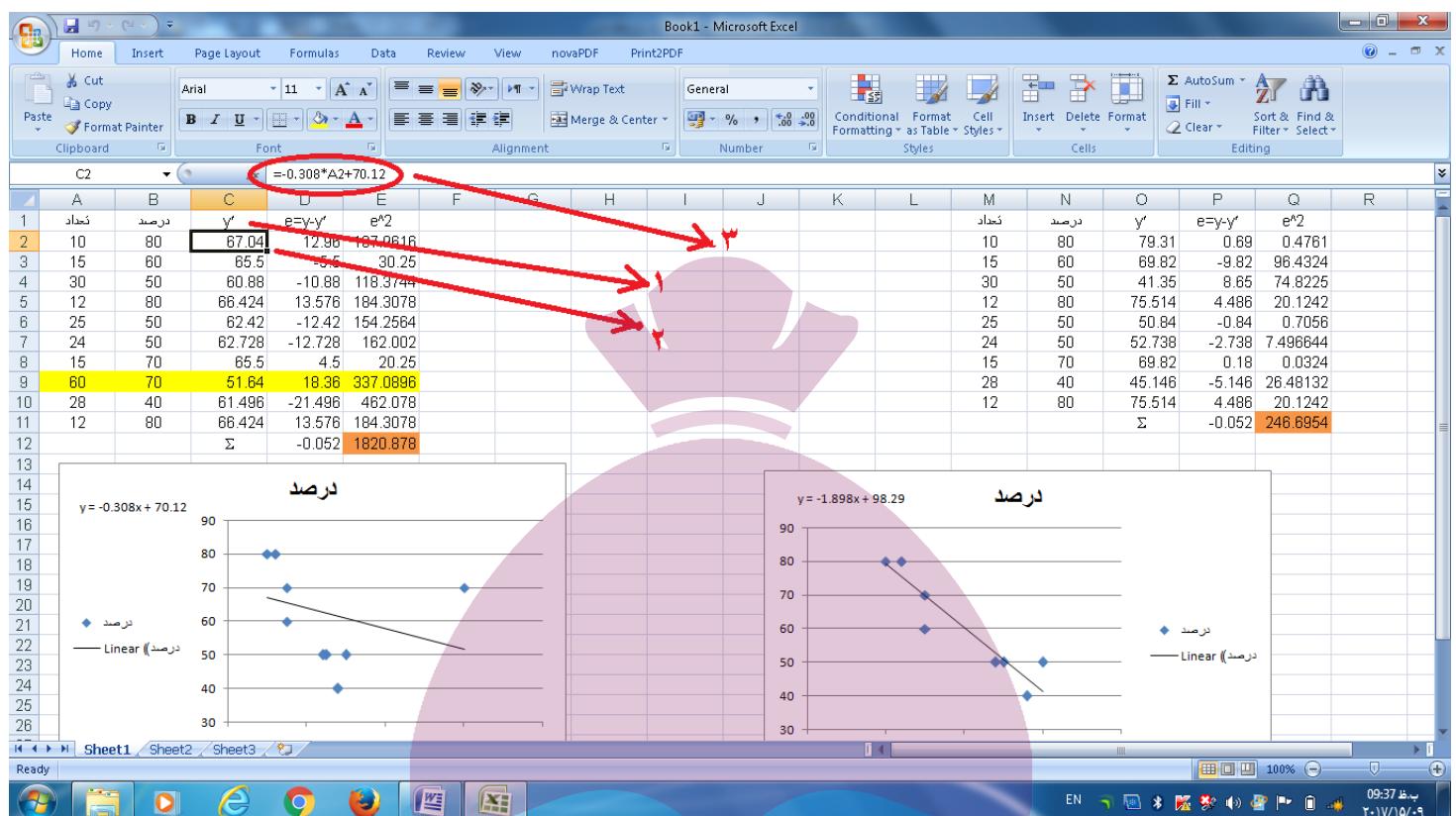
حالا باید با استفاده از دستورات زیر در داخل همین زبانه می توان نمودار خط و معادله آنرا رسم کرد:



و نتیجه کار به صورت زیر نمایش داده می شود:



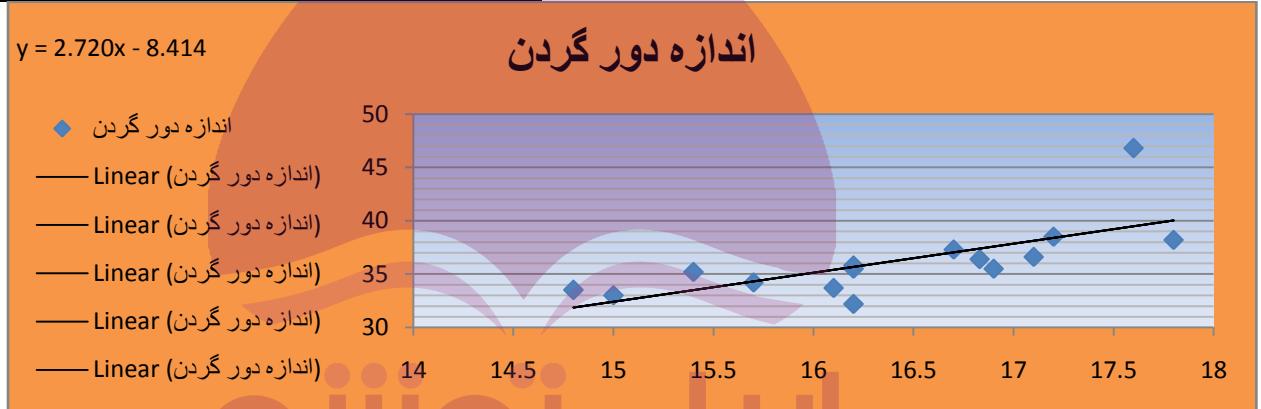
بعد از حذف داده پر، ابتدا باید 'y' را با جایگذاری در معادله خط بهترین بازش که در مرحله ذقیل بدست آمده بدست آوریم برای اینکار باید در محل شماره ۲ کلیک کرده و با گذاشتن علامت مساوی در محل شماره ۳ فرمول داخل بیضی قرمز رنگ را وارد می کنیم:



ایران توشه

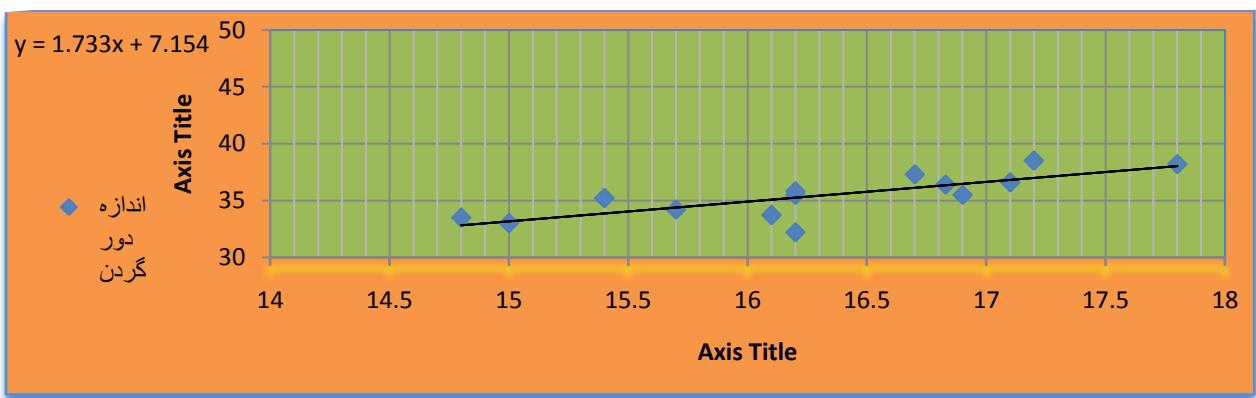
توشه‌ای برای موفقیت

اندازه دور مج	اندازه دور گردن	y'	e=y-y'	e^2
14.8	33.5	31.842	1.658	2.748964
15	33	32.386	0.614	0.376996
15.4	35.2	33.474	1.726	2.979076
15.7	34.2	34.29	-0.09	0.0081
16.1	33.7	35.378	-1.678	2.815684
16.2	32.2	35.65	-3.45	11.9025
16.2	35.5	35.65	-0.15	0.0225
16.2	35.8	35.65	0.15	0.0225
16.83	36.4	37.3636	-0.9636	0.928525
16.7	37.3	37.01	0.29	0.0841
16.9	35.5	37.554	-2.054	4.218916
17.1	36.6	38.098	-1.498	2.244004
17.2	38.5	38.37	0.13	0.0169
17.6	46.8	39.458	7.342	53.90496
17.8	38.2	40.002	-1.802	3.247204
		Σ	0.2244	85.52093



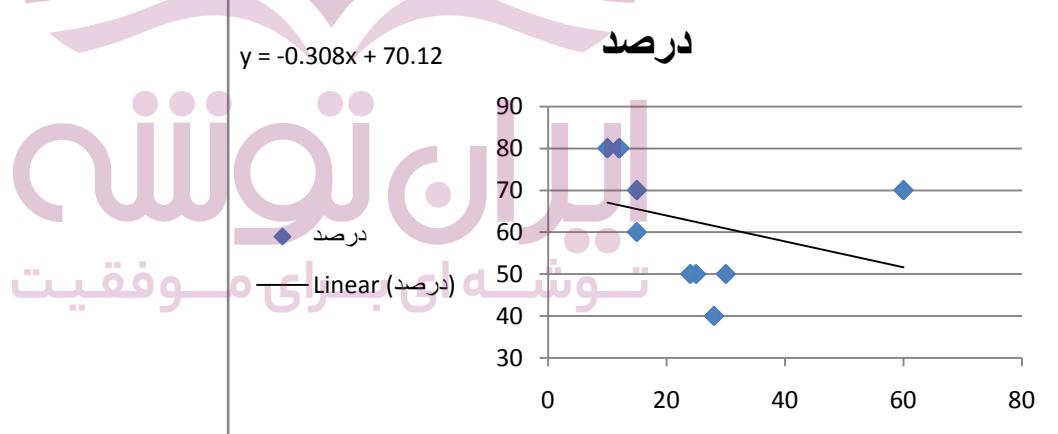
با حذف داده پرت

اندازه دور مج	اندازه دور گردن	y'	e=y-y'	e^2
14.8	33.5	32.8024	0.6976	0.486646
15	33	33.149	-0.149	0.022201
15.4	35.2	33.8422	1.3578	1.843621
15.7	34.2	34.3621	-0.1621	0.026276
16.1	33.7	35.0553	-1.3553	1.836838
16.2	32.2	35.2286	-3.0286	9.172418
16.2	35.5	35.2286	0.2714	0.073658
16.2	35.8	35.2286	0.5714	0.326498
16.83	36.4	36.32039	0.07961	0.006338
16.7	37.3	36.0951	1.2049	1.451784
16.9	35.5	36.4417	-0.9417	0.886799
17.1	36.6	36.7883	-0.1883	0.035457
17.2	38.5	36.9616	1.5384	2.366675
17.8	38.2	38.0014	0.1986	0.039442
		Σ	0.09471	18.57465



کار در کلاس ۱ ص ۱۲۳

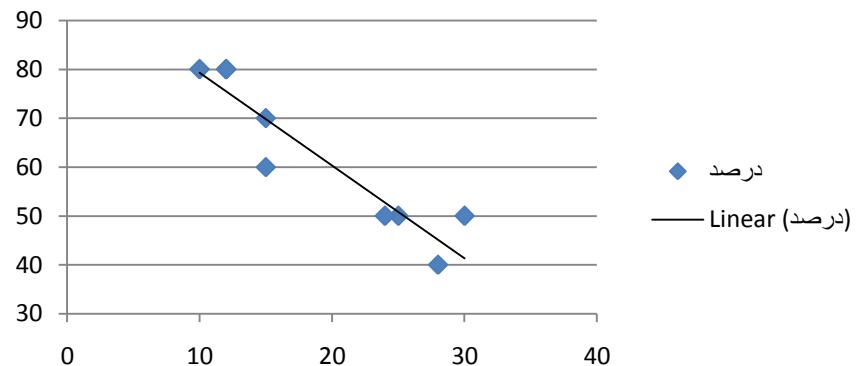
تعداد	درصد	y'	$e=y-y'$	e^2
10	80	67.04	12.96	167.9616
15	60	65.5	-5.5	30.25
30	50	60.88	-10.88	118.3744
12	80	66.424	13.576	184.3078
25	50	62.42	-12.42	154.2564
24	50	62.728	-12.728	162.002
15	70	65.5	4.5	20.25
60	70	51.64	18.36	337.0896
28	40	61.496	-21.496	462.078
12	80	66.424	13.576	184.3078
		Σ	-0.052	1820.878



تعداد	درصد	y'	$e=y-y'$	e^2
10	80	79.31	0.69	0.4761
15	60	69.82	-9.82	96.4324
30	50	41.35	8.65	74.8225
12	80	75.514	4.486	20.1242
25	50	50.84	-0.84	0.7056
24	50	52.738	-2.738	7.496644
15	70	69.82	0.18	0.0324
28	40	45.146	-5.146	26.48132
12	80	75.514	4.486	20.1242
		Σ	-0.052	246.6954

$$y = -1.898x + 98.29$$

درصد

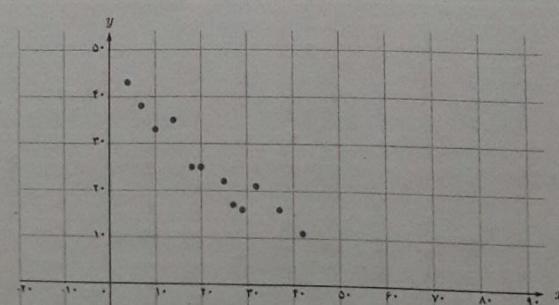


مسائل ص ۱۲۴

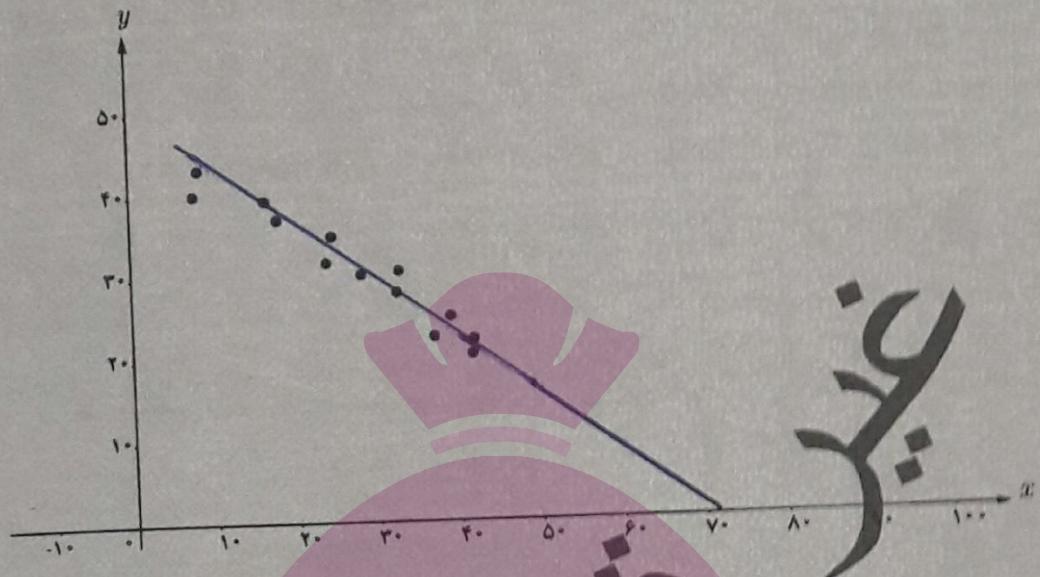
- ۱ در نمودارهای زیر، هر نقطه نشان دهنده مقادیر متناظر بین دو کمیت است. در کدام نمودارها، بین این دو کمیت رابطه ای وجود دارد؟ رابطه بین این دو کمیت را در هر نمودار، از لحاظ افزایشی یا کاهشی بودن یکی بر حسب دیگری، توصیف کنید.



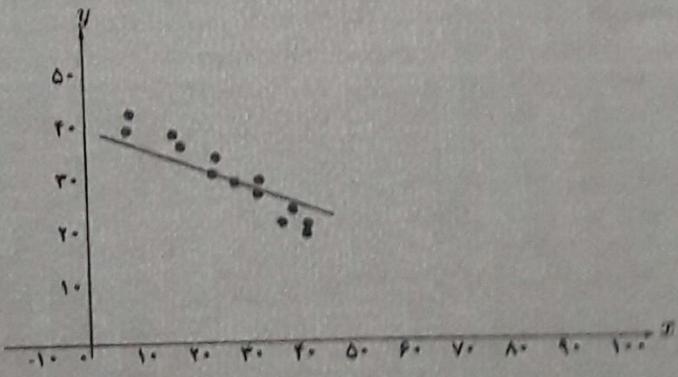
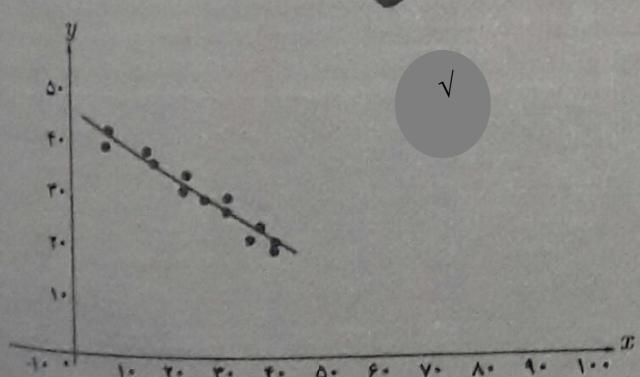
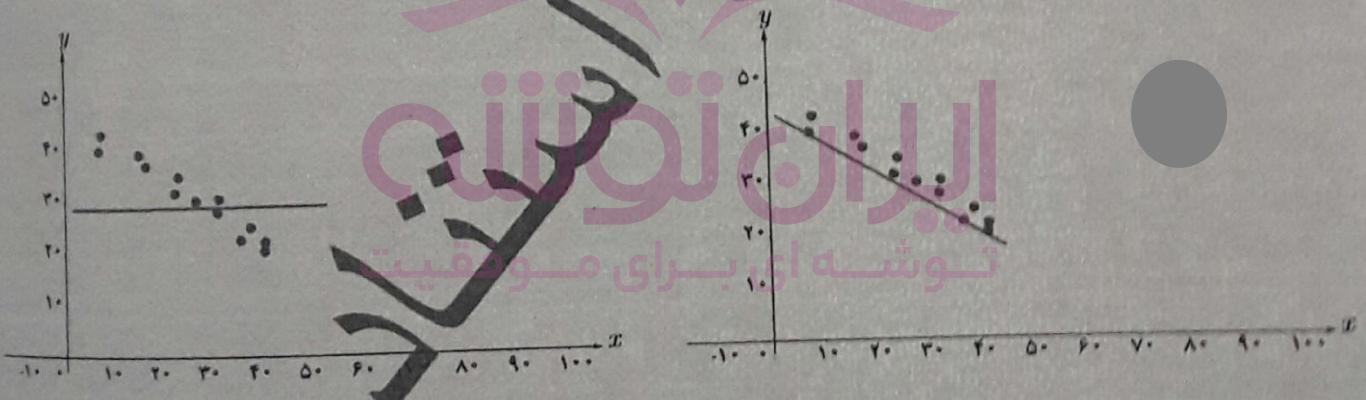
مرتفع
کاهشی



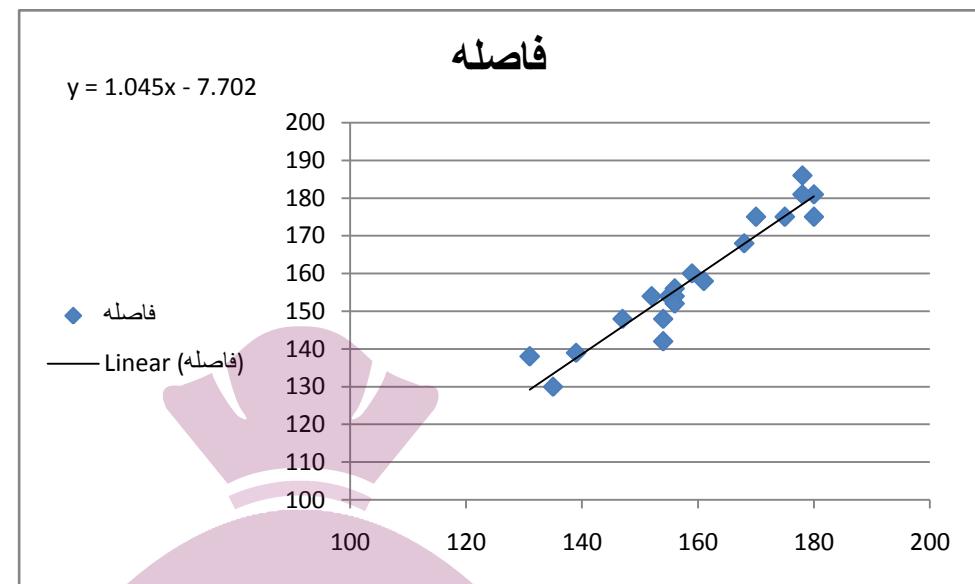
۷) نمودار زیر رابطه بین مدت زمانی که فرد رانندگی می‌کند و مسافت باقی‌مانده تا مقصد را نشان می‌دهد.



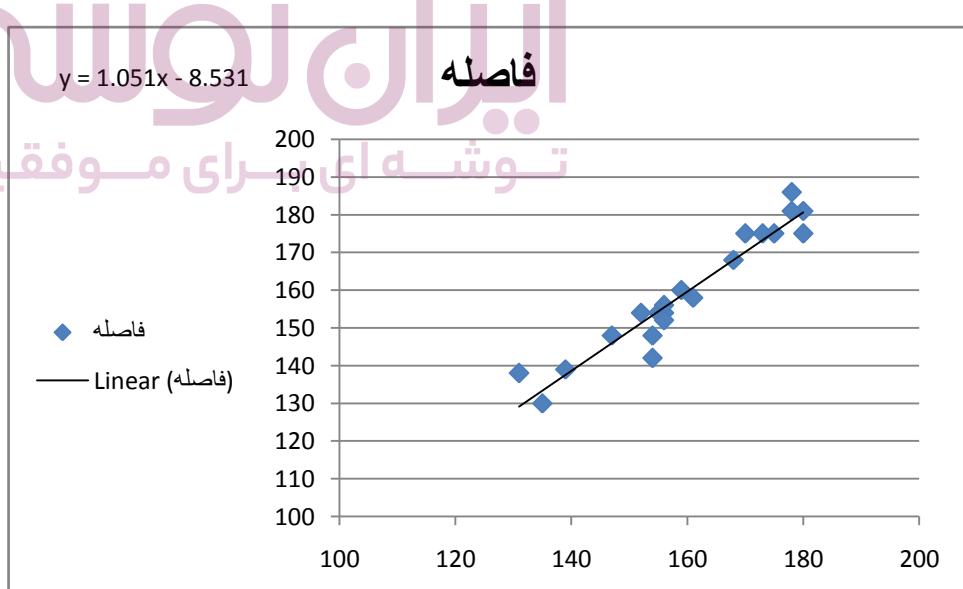
کدام یک از نمودارهای زیر، خلاصه‌ترین برآنش برای نمودار پراکنش بالا را نشان می‌دهد؟
توضیح دهید.



طول	فاصله
180	181
156	154
168	168
147	148
131	138
159	160
154	142
155	154
178	181
175	175
135	130
180	175
178	186
161	158
139	139
154	148
156	156
152	154
170	175
156	152
173	173.083



طول	فاصله
180	181
156	154
168	168
147	148
131	138
159	160
154	142
155	154
178	181
175	175
135	130
180	175
178	186
161	158
139	139
154	148
156	156
152	154
170	175
156	152
173	175



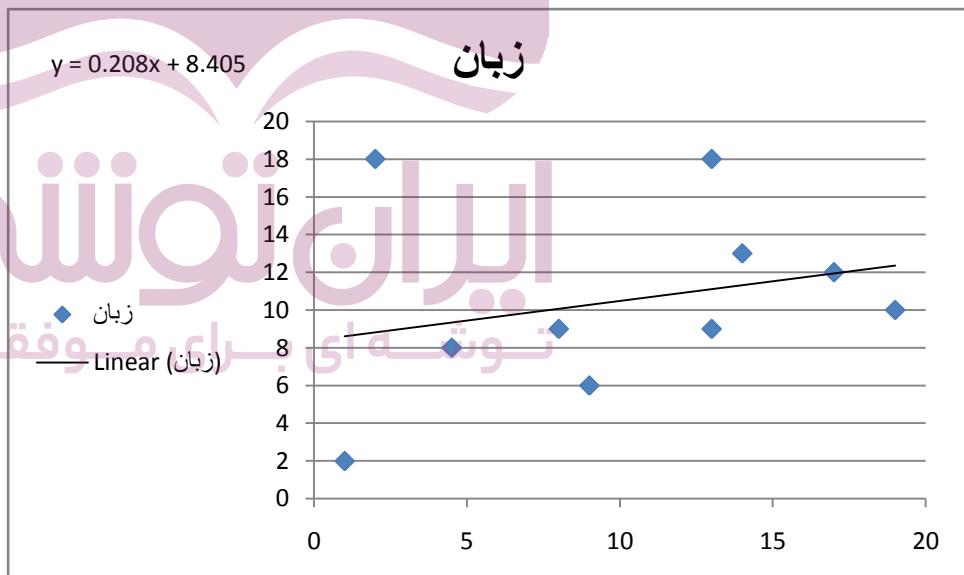
ج سوال ۴

ریاضی	علوم
17	15
5.5	8
9	10
16	15
10	11
6.5	9
8	10
14	13.421



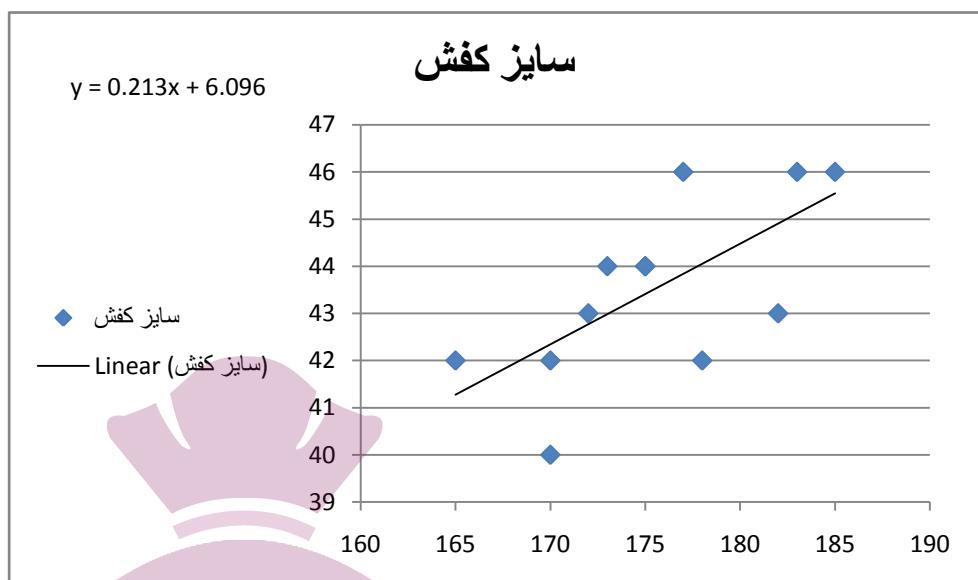
ج سوال ۵

ریاضی	زبان
19	10
4.5	8
9	6
13	18
2	18
1	2
17	12
14	13
13	9
8	
	11.525



ج سوال ۶

قد	سایز کفش
175	44
182	43
170	40
173	44
170	42
185	46
177	46
172	43
165	42
178	42
175	44
183	46
180	44.436
243.6808	58



ج سوال ۷

خیر زیرا ممکن است دو کمیت باهم مرتبط نباشند و یا داده پرت داشته باشیم.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

برخی تحقیقات در حوزه بانکداری نشان دهند بین نرخ سود بانکی و میزان سرمایه‌ای که بانک جذب می‌کند همبستگی وجود دارد. یکی از بانک‌ها، میزان سرمایه خود را در زمان‌های مختلف که سود بانکی مختلفی پرداخت می‌کرده است، بررسی و در جدول زیر ثبت کرده است.

نرخ سود بانکی (درصد)	سرمایه (میلیون تومان)
۱۰	۲۵
۸	۲۶
۹	۲۱
۱۱	۱۵
۱۱	۱۷
۱۱	۱۹
۱۰	۲۷
۹	۲۶
۷	۳۱
۶	۳۶
۶	۳۹
۵	۴۰

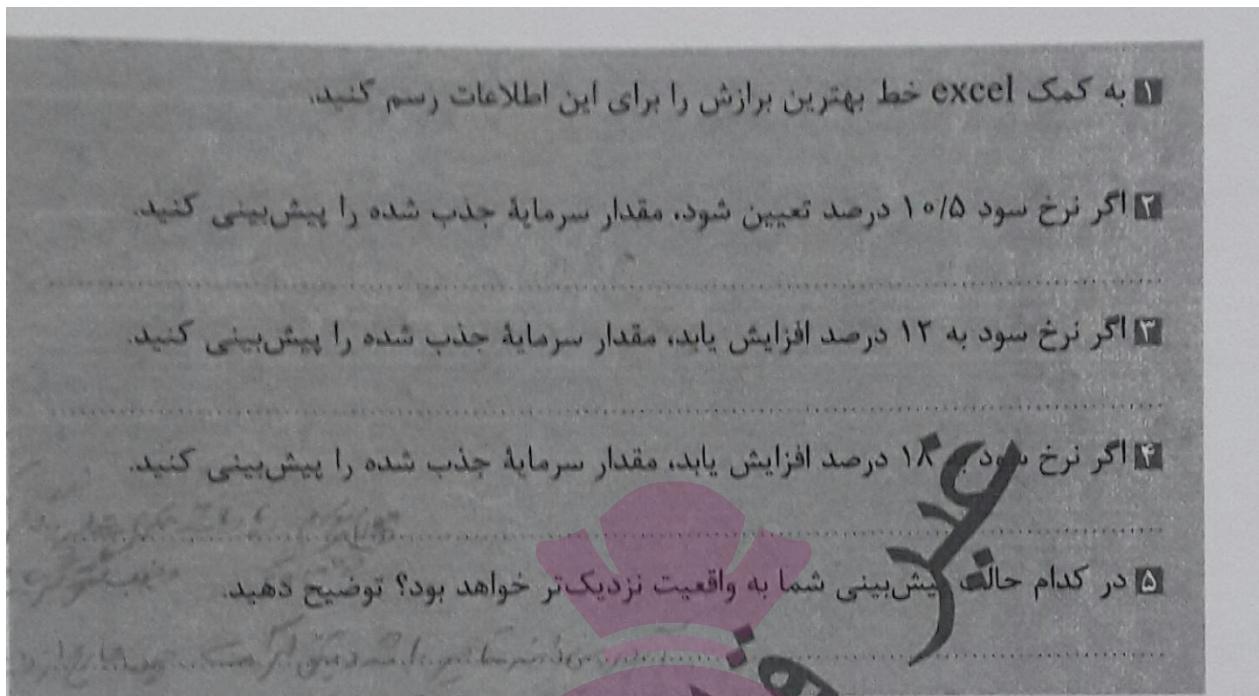
سود	سرمایه
10	25
8	26
9	21
11	15
11	17
11	19
10	27
9	26
7	31
6	36
6	39
5	40



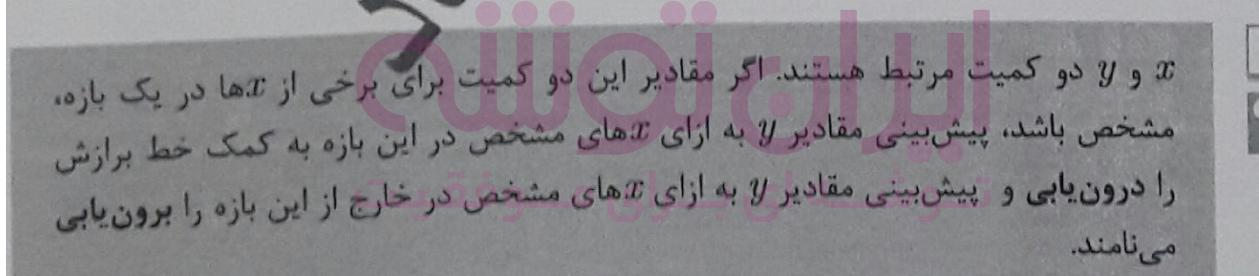
۲- مقدار جذب سرمایه با این سود با استفاده از نمودار تقریباً ۲۰ میلیون تومان می‌شود.

۳- مقدار جذب سرمایه با این سود با استفاده از نمودار تقریباً ۱۴ میلیون تومان می‌شود.

۴- مقدار جذب سرمایه با این سود با استفاده از نمودار زیر صفر می‌شود که واقعی نیست.

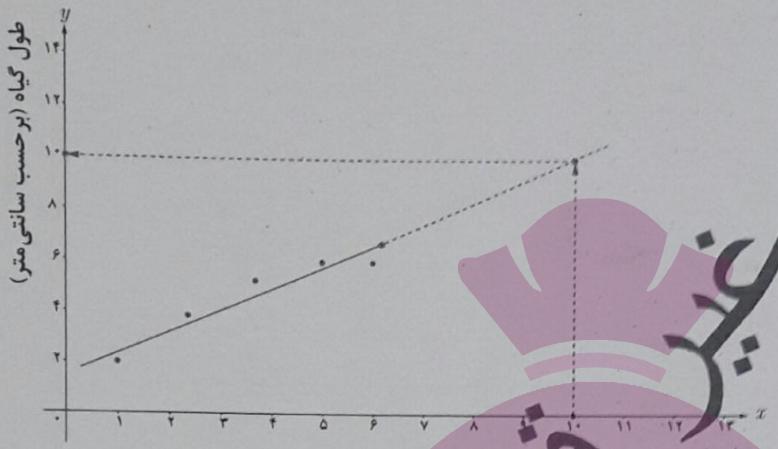


در وضعیت بالا در جدول داده‌ها، مقادیر درصد سود پرداختی (x) در بازه بسته [۱۱, ۵, ۱] قرار دارد. در قسمت (۲) می‌خواهیم سرمایه چسب شده با پرداخت $10/5$ درصد سود را پیش‌بینی کنیم. توجه داشته باشید که $10/5$ در بازه تغییرات x ندارد. ولی در قسمت‌های (۳) و (۴) می‌خواهیم سرمایه چسب شده را برای درصد سودهای پرداختی خارج از این بازه پیش‌بینی کنیم. پیش‌بینی‌هایی مانند وضعیت (۲) را درون‌یابی و پیش‌بینی‌هایی مانند وضعیت‌های (۳) و (۴) را برونویابی می‌نامند. در برونویابی هرچه از ابتدا یا انتهای بازه دورتر شویم، ممکن است پیش‌بینی‌ها با خطاهای زیاد همراه و حتی غیر واقعی شوند.



مثال ۳

نمودار زیر میزان رشد گیاه را پس از ۵ روز نشان می‌دهد. می‌خواهیم طول گیاه را بعد از ۱۰ روز پیش‌بینی کنیم.

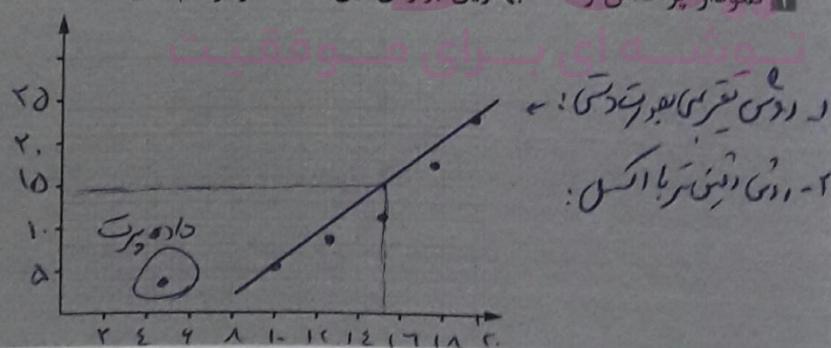


زمان کاهش می‌یابد، پیش‌بینی طول گیاه با استفاده از این نمودار بعد از ۱۰ روز (برون یابی)، ممکن است دقیق نباشد.

میزان مصرف اکسیژن توسط خرچنگ‌ها و دمای آب با هم رابطه دارند. نرخ مصرف اکسیژن نوعی خرچنگ در زیر آب در جدول زیر آورده شده است.

دما (°C)	۲۰	۱۷/۵	۱۵	۱۲/۵	۱۰	۵/۵
نرخ مصرف اکسیژن (Mmol / Kg / Min)	۲۳	۱۷	۱۲	۹	۵/۵	۴/۵

۱- نمودار پردازش و خط بهترین برآورد این داده‌ها را رسم کنید.



۱- خوانده شود میلی‌مول بر کیلوگرم بر دقیقه

$$y = 1,75(0) - 15 = 15$$

$$y = 1,75(v) - 15 = 17,5$$

$$y = 1,75(50) - 15 = 75,5$$

$$y = 1,75(120) - 15 = 205$$

۱۴ به کمک نمودار، مقدار تقریبی دما را در حالتی که نرخ مصرف اکسیژن است، پیدا کنید 15°C

۱۵ به کمک معادله خط بهترین برازش، نرخ مصرف اکسیژن این خرچنگ را در زیر آب در دماهای 50°C , 110°C و 150°C پیش‌بینی کنید.

۱۶ برای پیش‌بینی مقدار اکسیژن در کدام دماها از درون یابی و برای کدام دماها از بروون یابی استفاده کردید؟

توضیحات برای موفقیت

در بایس پیش‌بینی (۰,۲۵). در نتیجه بقایه بروون ۰,۳۱ استوار نموده است.

۱۷ پیش‌بینی در کدام وضعیت با خطای زیاد همراه و یا آنکه غیر واقعی است؟ توضیح دهد.

متوجه شد که خارج بزرگ (۰,۲۵). بهترین نتیجه در عرض واقعی همیشه اندکی زیرا

الدعای خلخ از این بزرگ در درست رسم



- ۱) مهرناز می خواهد آزمایشی انجام دهد که به کمک آن، تأثیر نور را بر سرعت غذاسازی توسعه گیاه از طریق فتوسنتر برسی کند.

مهرناز لامپ را در ۱۰۰ متری گیاه قرار داد و تعداد حباب‌هایی را که توسط گیاه در یک دقیقه تولید شد شمرد. سپس لامپ را نزدیک‌تر کرده و در هر حالت، تعداد حباب‌های ایجاد شده توسط گیاه در دقیقه را شمرد. او نتایج را در جدول زیر ثبت کرد.

تعداد حباب‌ها در دقیقه	فاصله لامپ از گیاه بر حسب متر
۱۰	۱۰۰
۲۰	۸۰
۲۸	۷۰
۳۲	۶۰
۴۷	۴۰
۳۷	۲۰

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین باند (ا برای این داده‌ها رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار، جمله زیر را کامل کنید.

هر چه فاصله لامپ از گیاه باشد، سرعت فتوسنتر است.

پ) اگر لامپ در ۱۰ سانتی‌متری گیاه قرار داشته باشد تعداد حباب‌ها در دقیقه را پیش‌بینی کنید.

ت) اگر لامپ را در ۲ سانتی‌متری گیاه قرار دهیم، برای یافتن تعداد حباب‌هایی که گیاه تولید می‌کند از برونویابی استفاده می‌کنیم یا درونیابی؟ که در این وضعیت این پیش‌بینی چقدر درست باشد؟

توصیه‌ای برای موفقیت

- ۲) ایمان برای شرکت در مسابقات دو ۱۰۰ متر، تمرین می‌کند. جدول زیر، زمان به پایان

رساندن مسیر را بر حسب ثانیه در پایان هر هفته تمرین نشان می‌دهد.

زمان به پایان رساندن مسیر	تعداد هفته‌های تمرین
۱۳	۱
۱۲	۲
۱۱/۵	۳
۱۱/۲۵	۴
۱۱	۵

ج س ۱:

فاصله	تعداد
100	10
80	20
70	28
60	32
40	37
20	37



پ) تقریبا ۴۵

ت) تقریبا ۴۸ به نظر می رسد که با واقعیت سازگار نباشد چون ممکن است گرمای حاصل به گیاه آسیب برساند.

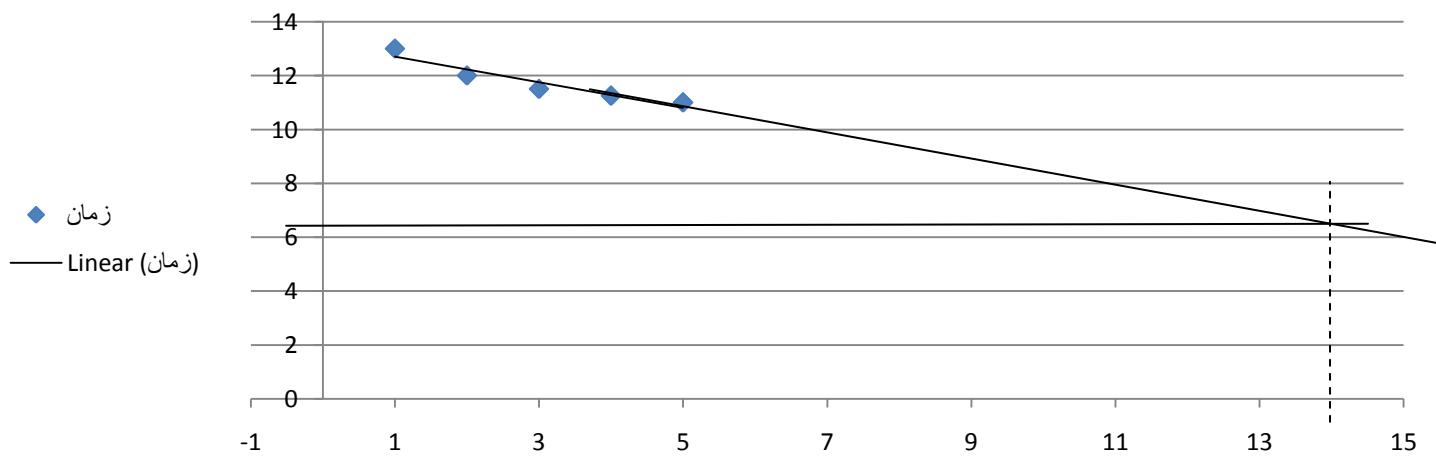
ج س ۲:

تعداد	زمان
1	13
2	12
3	11.5
4	11.25
5	11

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

$y = -0.475x + 13.17$ زمان



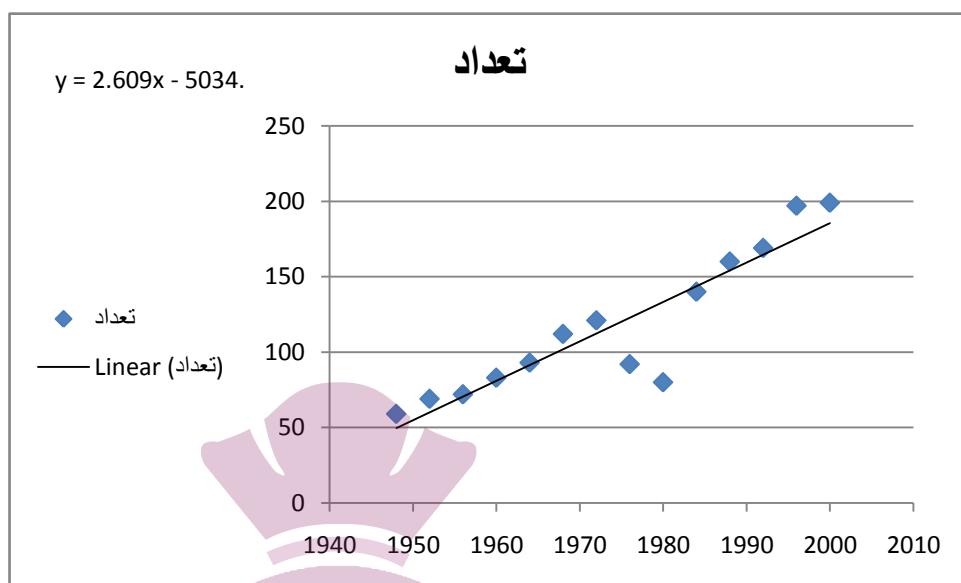
الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.
 ب) به کمک نمودار یا معادله خط بهترین برازش، زمان به پایان رساندن مسیر توسط ایمان پس از ۱۴ هفته را پیش‌بینی کنید.
 پ) آیا پیش‌بینی شما درست است؟ برای پاسخ به این سؤال رکورد جهانی دو ۱۰۰ متر مردان را از اینترنت پیدا کنید.
 ت) برای این پیش‌بینی از درون‌یابی استفاده کردید یا برونویابی؟ آیا پاسخ به دست آمده معنادار است؟ توضیح دهید چرا؟

۳ جدول زیر تعداد کشورهای شرکت‌کننده در المپیک تابستانی را از سال ۱۹۴۸ تا سال ۲۰۰۰ نشان می‌دهد.

سال	تعداد کشورها	سال	تعداد کشورها
۱۹۴۸	۵۹	۱۹۷۶	۹۲
۱۹۵۲	۶۹	۱۹۸۰	۸۰
۱۹۵۶	۷۲	۱۹۸۴	۱۴۰
۱۹۶۰	۸۳	۱۹۸۸	۱۶۰
۱۹۶۴	۹۳	۱۹۹۲	۱۶۹
۱۹۶۸	۱۱۲	۱۹۹۶	۱۹۷
۱۹۷۲	۱۲۱	۲۰۰۰	۱۹۹

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.
 ب) به کمک معادله خط بهترین برازش، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در المپیک ۲۰۰۴ و المپیک ۲۰۱۶ را پیش‌بینی کنید.
 پ) با مراجعه به اینترنت، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در سال ۲۰۰۴ و سال ۲۰۱۶ را پیدا کنید. این تعداد را با پیش‌بینی‌های خودتان مقایسه کنید. در صورت وجود اختلاف، توضیح دهید چرا این اختلاف وجود دارد.
 ت) به کمک معادله یا نمودار، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در سال ۲۰۲۸ را پیش‌بینی کنید. آیا این پیش‌بینی معنادار است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

سال	تعداد
1948	59
1952	69
1956	72
1960	83
1964	93
1968	112
1972	121
1976	92
1980	80
1984	140
1988	160
1992	169
1996	197
2000	199



ب) تعداد کشورهای شرکت کننده در اپیک ۲۰۰۴ تقریباً ۱۹۶ کشور است.

پ) تعداد کشورهای شرکت کننده در اپیک ۲۰۱۶ تقریباً ۲۲۷ کشور است. چون بدست آوردن اطلاعات از روی معادله خط بهترین برازش تقریبی هستند.

ت) تعداد کشورهای شرکت کننده در اپیک ۲۰۲۸ تقریباً ۲۵۹ کشور است. خیر زیرا پیش‌بینی آینده از روی برونویابی دارای محدودیت می‌باشد و تا یک حدی می‌توان این کار را کرد.

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت



عموی طاها حسابدار یک شرکت خصوصی بود. طاها پس از مصاحبه استخدامی، قرار شد در آن شرکت به عنوان مسئول فنی مشغول به کار شود. مدیر عامل شرکت حقوق طاها را یک میلیون و پانصد هزار تومان در نظر گرفت.

عنوان شغلی	میزان حقوق به میلیون تومان
مدیر عامل	۵/۸
معاون	۳/۲
کارمند قراردادها	۱/۷
روابط عمومی	۱/۳
حسابدار	۱/۸
مسئول فناوری	۱/۲
بایگانی	۱
منشی	۱/۱
نگهدار	۰/۹

طاها به عمویش گفت: قبل به من گفته بودید میانگین حقوق افراد این شرکت ۲ میلیون تومان است، فکر نمی کند حقوق من کم باشد؟

عموی طاها گفت: اگر به لیست حقوق کارکنان نگاه کنی، متوجه می شوی که حقوقی که به شما پیشنهاد شده است، حقوق خوبی است.

طاها با دیدن لیست حقوق کارکنان گفت: شما به چه دلیلی می گویید که حقوق من خوب است؟ عمویش گفت: حقوق شما از حقوق بیش نیمی از کارکنان بیشتر است.

طاها با تعجب گفت: چگونه می توانم حقوق خود را با حقوق دیگران مقایسه کنم و بفهمم جایگاه حقوق من در بین حقوق دیگران چگونه است؟

شما با انجام فعالیت زیر متوجه می شوید که آماردانها چگونه داده ها را با هم مقایسه می کنند.

۱ داده های ارائه شده در لیست حقوق کارکنان را از کم به زیاد مرتب کنید.

۰,۵ - ۰,۶ - ۰,۷ - ۰,۸ - ۰,۹ - ۱,۰ - ۱,۱ - ۱,۲ - ۱,۳ - ۱,۴ - ۱,۵ - ۱,۶ - ۱,۷ - ۱,۸ - ۱,۹ - ۲,۰



۲ عددی را پیدا کنید که تعداد حقوق های قبل از آن، با تعداد حقوق های بعد از آن برابر باشد.

۱,۳

اگر حقوق کارکنان را از کم به زیاد مرتب کنیم، عدد $1/3$ (میلیون) در وسط قرار می گیرد، یعنی تعداد حقوق های قبل از عدد $1/3$ (میلیون) با تعداد حقوق های بعد از آن برابر است؛ این عدد $1/3$ (میانه) می نامند. در لیست حقوقی مرتب شده، حقوقی که قرار است طاها بگیرد بعد از عدد $1/3$ (میلیون) است که از حقوق نیمی از کارکنان بیشتر است. با دقت بیشتر متوجه می شویم که اگر حقوق ها را از زیاد به کم نیز مرتب می کردیم، همین نتیجه به دست می آمد.

$$\bar{X} = \frac{18}{9} = 2$$

پس از مرتب کردن مقادیر داده‌ها، عددی را که تعداد داده‌های قبل از آن با تعداد داده‌های بعد از آن برابر است میانه می‌نامند.

میانگین داده‌ها ۲ میلیون تومان است و این عدد نشان نمی‌دهد چه تعداد از داده‌ها بیشتر یا کمتر از آن است. می‌دانیم عدد میانگین ممکن است در بین داده‌ها نباشد؛ برای مثال، عدد دو میلیون تومان در لیست حقوق کارکنان نیست. همچنین به علت وجود داده پرت (حقوق مدیر عامل $5/8$ میلیون تومان است) در لیست حقوق، میانگین، خیلی بالا رفته است که تصویری اشتباہ درباره میزان دریافت حقوق کارکنان در ما ایجاد کند؛ زیرا فقط ۲ نفر حقوق بیشتر از میانگین دارند و ۷ نفر حقوق کمتر از میانگین دریافت می‌کنند.

میانگین و میانه، هر دو به توصیف وضعیت داده‌ها می‌پردازنند و هر کدام ویژگی‌هایی از داده‌ها را بیان می‌کنند.

مثال ۴

ساعت‌هایی را که علی در روزهای یک هفته مطالعه کرده است به صورت زیر است:

۸ ، ۵ ، ۱ ، ۴ ، ۳ ، ۲

برای پیدا کردن میانه، ابتدا داده‌ها را به شکل زیر مرتب می‌کنیم.

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۸

عدد ۳ میانه است. جایگاه این عدد مشخص می‌کند که نیداده‌های قبل از جایگاه عدد ۳، با تعداد داده‌های بعد از آن، برابرند.

دبیر به دانش‌آموزان گفت: اگر به لیست حقوق کارکنان آن شرکت، حقوق طاها را هم اضافه کنیم،

میانگین و میانه آن، چه تغییری می‌کند؟

سعید گفت: من حساب کردم، میانگین $1/95$ میلیون می‌شود ولی برای بهدست آوردن میانه، حقوق‌ها را که مرتب کردم داده‌ای در وسط ندیدم.

دبیر گفت: توجه کنید همانطور که ممکن است میانگین بین داده‌ها نباشد، میانه هم لزوماً در بین داده‌ها نیست.

سعید گفت: پس برای آنکه تعداد داده‌های بعد از میانه با تعداد داده‌های قبل از میانه برابر باشد، باید عددی بین $1/3$ و $1/5$ میلیون انتخاب کنیم. آیا فرقی نمی‌کند چه عددی را انتخاب کنیم؟

دبیر گفت: نه فرقی نمی‌کند ولی در این صورت، میانه به‌طور دقیق مشخص نخواهد بود. برای هماهنگی،

طبق قرارداد، میانگین این دو عدد را به عنوان میانه انتخاب می‌کنند.

سعید گفت: پس، میانه $1/4$ میلیون است.

کار در کلاس ۳ ص ۱۳۶

مثال ۵

صرف شیر ۱۰ خانواده ۴ نفره در یک ماه بر حسب لیست به صورت زیر است:

۱۵، ۵، ۱۰، ۳، ۱۳، ۱۱، ۸، ۴، ۱۴

$$\text{میانه} = \frac{8+10}{2} = 9$$

برای پیدا کردن میانه، ابتدا داده‌های مسئله را مرتب می‌کنیم:

مثال ۶

تعداد نان مصرفی خانواده در یک هفته به صورت زیر است:

۱۵، ۱۲، ۱۴، ۱۰، ۱۴، ۱۵، ۸

$$\text{میانه} = \frac{4+12+14+10+14+15+8}{7} = 12$$

در یک مطالعه، ۵ داده به دست آمده است. اگر ۱۲، ۱۲، ۱۴ و ۱۴ چهارتا از این داده‌ها باشند، داده پنجم را به گونه‌ای پیدا کنید که میانگین و میانه این داده‌ها با هم برابر باشند. پنجم ۵ داده داریم، میانه در جایگاه سوم قرار دارد. پس فرقی نمی‌کند که داده مورد نظر از ۶ کوچک‌تر، یا چون ۶ و ۱۲، یا بین ۱۲ و ۱۴ و یا از ۱۴ بزرگ‌تر باشد؛ در این حالت، میانه ۱۲ خواهد بود. فرض برآوری میانه و میانگین نشان می‌دهد که میانگین هم برابر با ۱۲ است. پس مجموع ۵ داده باید $5 \times 12 = 60$ باشد. یعنی داده پنجم برابر است با: $60 - (14+12+6) = 16$.

۱ تعداد روزهای مسافرت چند خانواده به صورت مقابل است.

۲۰، ۵، ۷، ۳، ۴، ۶، ۳، ۸

$$\text{میانه} = \frac{4+8}{2} = 6$$

میانه این داده‌ها را بنویسید.

۲ اگر تعداد داده بدون تکرار و ... مزوج (فرد زوج) باشد، میانه در داده‌ها قرار ندارد.

۳ داده‌های زیر تعداد شرکت‌کنندگان شهرهای مختلف را در یک مسابقه نشان می‌دهد و میانه داده‌ها عدد ۱۷ است. در دایره و مربع چه اعدادی می‌توانند قرار بگیرند؟ چرا؟

$$m = 17$$

۱۱، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۳، ۱۲، ۱۰، ۱۸، ۱۹، ۱۹، ۲۰، ۲۰

$$[17 \text{ و } 18]$$

مسائل ص ۱۳۷

مسائل

۱ مثالی بزنید که میانه در بین داده‌ها نباشد و مثالی بزنید که میانه در بین داده‌ها باشد.

$$15 - 14 - 11 - 9 - 7 - 4 - 11 - 10 - 8 - 5 - 7 = 40$$

۲ اگر همه داده‌ها ۲ برابر شوند، میانه چه تغییری می‌کند؟

$$19 - 20 - 21 - 22 - 23 - 24 - 25 - 26 - 27 - 28 - 29 - 30 = 240$$

۳ در جمله‌های تصریف پرتاب نیزه، دو ورزشکار، پرتاب‌های مختلفی انجام داده‌اند. مسافت

پرتاب شده توسط آنها بر حسب متر به صورت زیر است:

$$55 - 58 - 60 - 62 - 64 - 66 - 68 - 70 - 72 - 74 - 76 - 78 - 80 - 82 - 84 - 86 - 88 - 90 = 44$$

مکرر ورزشکار (م) بهترین است.

میانه پرتاب دو ورزشکار را باهم مقایسه کنید. توضیح دهد در این مسئله، میانه چه چیزی را

نشان می‌دهد. عملکرد کدامیک بهتر از مانی می‌کند؟ جائزه متفاوت ساخت یکسان نیز، توطیه ورزشکار است.

سیما از پرتاب‌ها زیر آن و نیز از پرتاب‌ها زیر آن میانه بوده است.

۴ داده‌های مقابل را در نظر بگیرید.

الف) میانگین و میانه این داده‌ها را حساب کنید.

برای بودجه است از این میانگین بکماید.

ب) در داده‌ها به جای عدد ۸ عدد ۹ را بنویسید و مجددًا میانگین و میانه را حساب کنید.

۸ ایستاده از ۸ نایاب با توجه به تغییرات انجام شده در قسمت ب) مسئول‌های زیر پاسخ دهید.

پ) با تغییر یکی از داده‌ها (میانه) میانگین هموار نمایید.

ت) میانه به کوچکی و بزرگی داده‌های قبل و بعد از خروجی (داده اندارد)

به ترتیب چه بوده؟

میانه نمرات دانش‌آموزان یک کلاس ۲۵ نفری، برابر ۱۷ است. میانه چه اطلاعاتی درباره

نمره‌های کلاس به شما می‌دهد؟

۱۷ نمره از این ۲۵ نفر را کمتر از میانه دارند و ۱۸ نمره از این ۲۵ نفر را برابر با میانه دارند.

میانه نمرات ریاضی در دو کلاس ۱۷ و ۱۲ است. وضعیت نمرات دو کلاس را توصیف کنید.

در کلاس اولی نمره ای کمتر از ۱۷ نفر داشته‌اند و در کلاس دومی نمره ای کمتر از ۱۲ نفر داشته‌اند.

جهویت را نشان ۱۹ - ۱۸ - ۱۷ - ۱۶ - ۱۵ - ۱۴ - ۱۳ - ۱۲ - ۱۱ - ۱۰ - ۹ - ۸ - ۷ - ۶ - ۵ - ۴ - ۳ - ۲ - ۱ - ۰ نشان دهید.

میانگین ۵ داده برابر با ۱۷ و میانه آنها ۱۴ است. ۵ عدد مثال بزنید که این شرایط را داشته باشند. این مسئله چند جواب می‌تواند داشته باشد؟

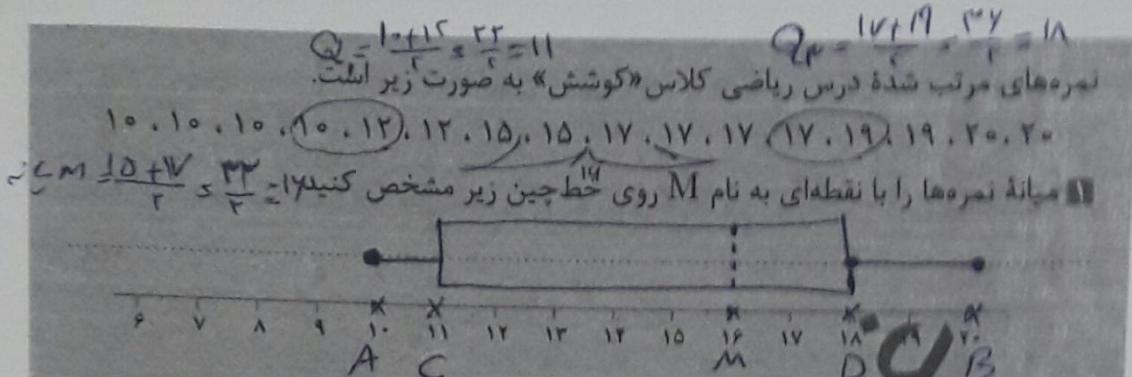
$$\frac{X}{5} = \frac{17 + 16 + 15 + 14 + 13}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

$$13 - 14 - 15 - 16 - 17 = \frac{13 + 14 + 15 + 16 + 17}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

$$m = 14$$

فعالیت ۵ ص ۱۳۹

شما با انجام فعالیت زیر می‌توانید با مفهوم نمودار جعبه‌ای و کاربردهای آن آشنا شوید.



۱. میانه نمره‌ها را با نقطه‌ای به نام M روی خطچین زیر مشخص کنید.
 $M = \frac{10+17}{2} = 13.5$

۲. برای اعداد قبل از میانه، دوباره میانه را پیدا کنید و آن را روی خطچین با نقطه C مشخص کنید. همچنین برای اعداد بعد از میانه، دوباره میانه را پیدا کنید و آن را روی خطچین با نقطه D مشخص کنید.

۳. کمترین نمره را با نقطه A و بیشترین نمره را با نقطه B روی خطچین مشخص کنید.

۴. مستطیلی رسم کنید که نقاط C و D روی سرچهای این مستطیل (جعبه) قرار گیرند. پاره‌خطی از A به C و پاره‌خطی از B به D رسم کنید. درصد تعداد نمرات دانش‌آموزان در هر بازه را پیدا کرده و در جدول زیر را کامل کنید.

بازه نمرات	قبل از C	بین C و D	قبل از D	بعد از D
درصد تعداد نمرات هنرجویان	٪ ۲۵	٪ ۲۵	٪ ۲۵	٪ ۲۵

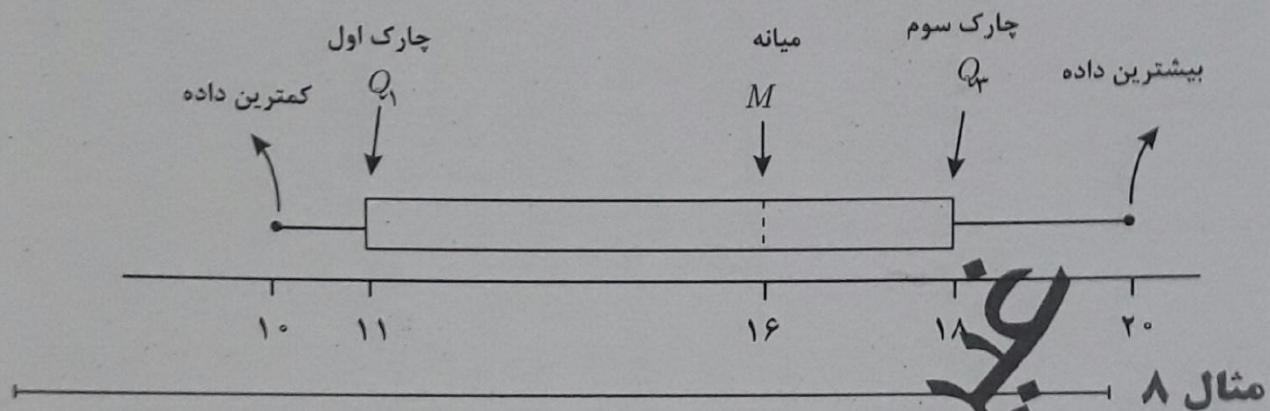
در فعالیت (۴)، میانه^۱ برابر ۱۶ است، یعنی $M = 16$. میانه اعداد قبل از M برابر ۱۱ است، یعنی $C = 11$. تعداد نمره‌های قبل از C ، $\frac{1}{4}$ کل نمرات است؛ به همین دلیل آن را چارک اول می‌نامند و با Q_1 ^۲ نشان می‌دهند. تعداد نمره‌های بعد از Q_1 ، سه برابر تعداد نمرات قبل از آن است. میانه اعداد بعد از M برابر ۱۸ است، یعنی $D = 18$. تعداد نمره‌های قبل از D ، $\frac{3}{4}$ تعداد کل نمره‌ها است؛ به همین دلیل آن را چارک سوم می‌گویند و با Q_3 ^۲ نشان می‌دهند. تعداد نمره‌های قبل از Q_3 سه برابر تعداد نمره‌های

۱. نمودار^۱ که دهد^۲ را نمی‌داند^۳ را در^۴ طابن^۵ چارک‌لول^۶ و میانه^۷ زیر^۸ را^۹
و داده^{۱۰} ها^{۱۱} بستر در^{۱۲} ناصه^{۱۳} بنی^{۱۴} میانه^{۱۵} چارک^{۱۶} سوم^{۱۷} مترکز^{۱۸} شده^{۱۹} است.

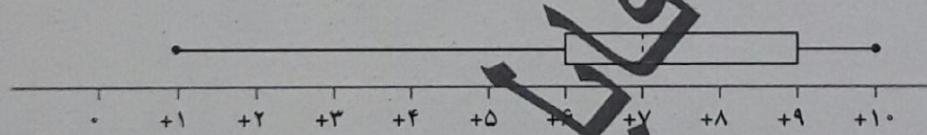
۱. حرف اول کلمه Median به معنی میانه است.

۲. حرف اول کلمه Quartile به معنی چارک است.

بعد از آن است. تعداد نمره‌های بین Q_1 و Q_3 ، یعنی آنهایی که درون جعبه قرار دارند، تقریباً ۵۰ درصد تعداد کل نمره‌ها است.



نمودار جعبه‌ای زیر را در نظر بگیرید.



در این نمودار میانه برابر با ۷ است. نزدیک‌تر بودن میانه به چارک اول (۶)، نسبت به چارک سوم (۹) نشان می‌دهد تمرکز داده‌ها در سمت چپ میانه بیشتر از سمت راست میانه است (زیرا تعداد داده‌ها در هر دو طرف برابر است ولی در سمت چپ، ~~در مرکز~~ داده‌های بین ۶ و ۷ است. در صورتی که در سمت راست، ~~در~~ درصد داده‌ها بین ۷ تا ۹ است). به همین ترتیب بلندتر بودن دنباله سمت چپ نسبت به دنباله سمت راست نشان می‌دهد که پراکندگی داده‌های سمت چپ بیشتر از پراکندگی داده‌ها در سمت راست است.

مثال ۹

پلیس راهور، در یک شهر، آمار تصادفات نوروز را از چهار روز قبل از تعطیلات طی ۲۰ روز به صورت زیر گزارش کرده است:

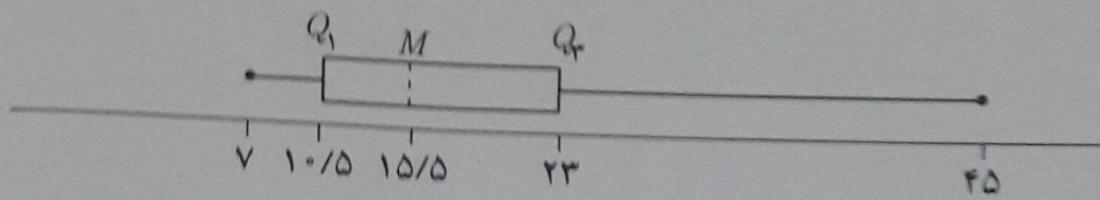
۱۷، ۸، ۲۴، ۱۶، ۸، ۹، ۲۶، ۲۰، ۱۴، ۱۸، ۷، ۱۲، ۱۳، ۱۱، ۱۵، ۱۰، ۲۸، ۳۳، ۲۲، ۴۵

نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم می‌کنیم.

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۷، ۸، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۰، ۲۲، ۲۴، ۲۶، ۲۸، ۳۳، ۴۵

کمترین داده برابر ۷ و بیشترین داده برابر ۴۵ است. پس دامنه تغییرات داده‌ها برابر با ۳۸ است.
میانه $M = 15/5$ و چارک اول $Q_1 = 10/5$ و چارک سوم $Q_3 = 23$ است.



میانه $M = 15/5$ است. این عدد نشان می‌دهد که تقریباً ۵ درصد از این روزها، تعداد تصادف‌های روزانه بیشتر یا مساوی ۱۶ است (تعداد تصادف‌ها عدد طبیعی است).
چارک اول، $Q_1 = 10/5$ نشان می‌دهد که تقریباً ۲۵ درصد از این روزها، تعداد تصادف‌های روزانه کمتر یا مساوی ۱۰ است.

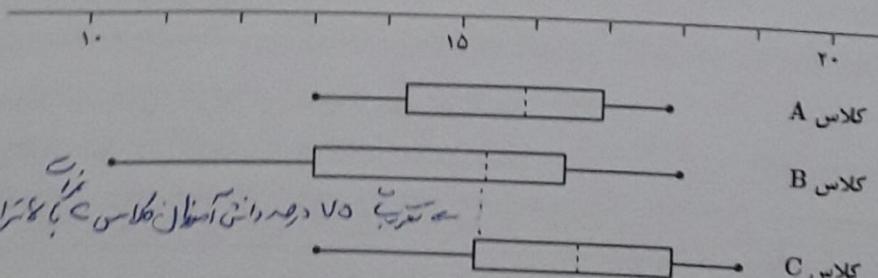
چارک سوم، $Q_3 = 23$ نشان می‌دهد که تقریباً ۷۵ درصد از این روزها، تعداد تصادف‌های روزانه کمتر یا مساوی ۲۳ است.

هر یک از دو دنباله رسم شده در دو طبق جعبه نشان دهنده تقریباً ۲۵٪ داده‌ها است و بلندتر بودن دنباله سمت راست نشان می‌دهد پراکندگی تعداد تصادف‌ها در این قسمت بیشتر است. در این مثال تقریباً ۲۵٪ از داده‌ها از ۷ تا $10/5$ است. همچنین نزدیک بودن M به Q_1 نشان می‌دهد پراکندگی تعداد تصادف‌ها بین آنها کمتر از پراکندگی تعداد تصادف‌های بین M تا Q_3 است.

در نمودار جعبه‌ای، تقریباً ۵۰ درصد داده‌ها درون جعبه قرار می‌شوند. اگر M در وسط جعبه قرار داشته باشد، نشان می‌دهد پراکندگی داده‌ها از Q_1 تا M همانند پراکندگی از M تا Q_3 است. هر چقدر M از وسط جعبه به Q_3 نزدیک‌تر شود پراکندگی بین این دو کمتر از پراکندگی بین Q_1 تا M خواهد شد.

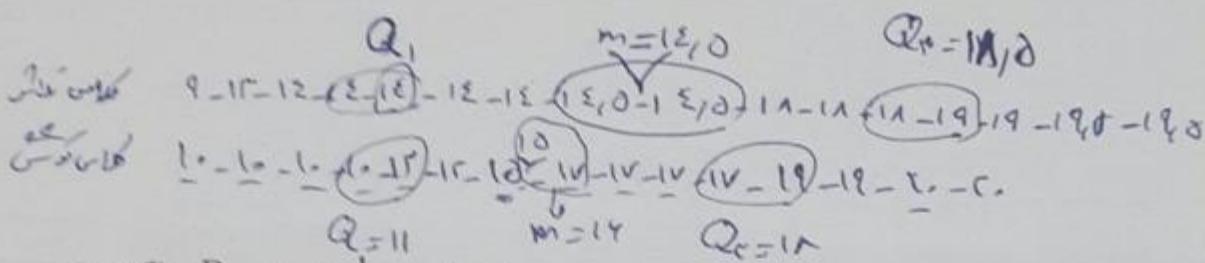
مثال ۱۰

نمودار زیر عملکرد سه کلاس A، B و C را در امتحان ریاضی نشان می‌دهد.



دو نمونه کلاس C در ۸۷٪ متر از A و B بیشتر.

کار در کلاس ۴ ص ۱۴۲



۱ میزان بارگیری (بر حسب میلی متر) در یک شهر طی ۱۵ روز به صورت زیر گزارش شده است:

۰۰۵ - ۰ - ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۴ - ۱۵ - ۲۰ - ۲۵

کار در کلاس ۴



الف) چارک اول، میانه و چارک سوم چه اعدادی هستند؟

$$M = 5$$

$$Q_1 = 1$$

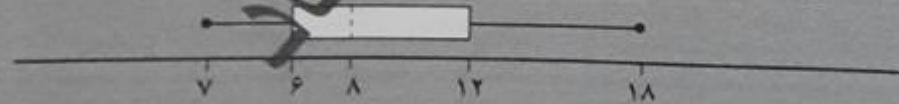
$$Q_3 = 12$$

ب) تقریباً چند درصد داده ها بین ۱۰ و ۱۲ قرار دارند؟٪

پ) نمودار جعبه ای داده ها را رسم و آن را تفسیر کنید.



۲ یک شرکت بیمه می خواهد بررسی های را برای برداخت هزینه های بستری بیماران دچار حمله قلبی انجام دهد. بعد از آنکه مدت بستری شد، بر حسب روز (عددی بیمار پس از حمله قلبی در یک بیمارستان مشخص شد نمودار جعبه ای آن را به صورت زیر رسم کرده اند:



الف) میانه داده ها چند است؟٪

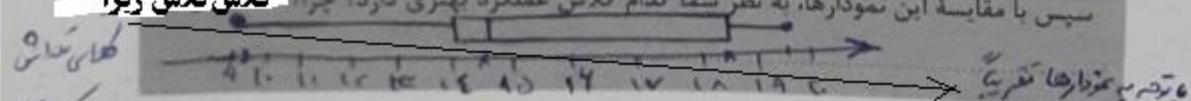
ب) چارک اول چند است؟٪ چند درصد داده ها قبل از آن و چند درصد بعد از آن قرار دارند؟٪

پ) مقدار Q_2 چند است؟ این عدد نشان دهنده چیست؟ میانه ۲۵ درصد را بجا بیند Q_2 فرمونه.

ت) چند درصد داده ها درون جعبه قرار دارند؟٪

ث) بلندتر بودن دنباله سمت راست جعبه نشان دهنده چیست؟ سر اسردی داده ها

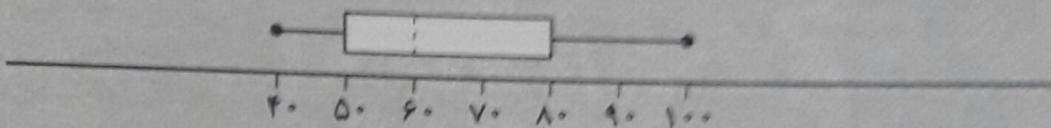
۳ نمودار جعبه ای فهرست نمرات کلاس های نلاش و کوشش (در ابتدای این بخش) را رسم کنید سپس با مقایسه این نمودارها، به نظر شما کدام کلاس عملکرد بهتری دارد؟ جواب کلاس قلاش ذیرا



۱۷۷
۷۵٪ نلات کلاس از کوشش بزرتر است.
۱۵٪ نلات کلاس کوشش بزرتر است.

مسائل ص ۱۴۳

نمودار حجمیان، فرمدهای، میانگینهای، در یک کلاس به صورت زیر است:

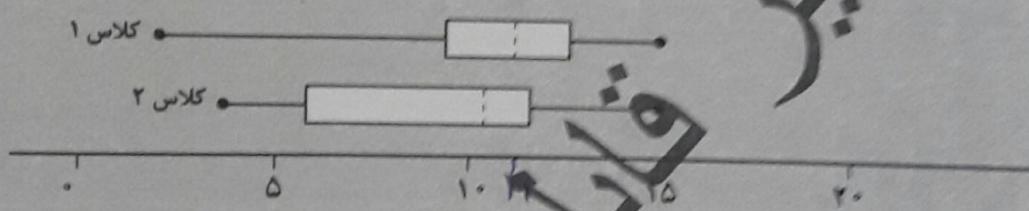


- الف) میانه برابر چه عددی است؟ $\frac{7}{4}$

ب) فاصله بین Q_1 و Q_3 چقدر است؟ $7 - 5 = 2$

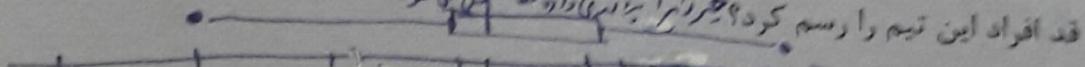
ج) چند نفر از نیمترهای قبل از Q_3 قرار دارند؟ $1, 7, 5$

د) تعداد افراد حملکردهای کلاس را در درس عربی نشان می‌دهد.



- الف) در کدام کلاس نمره دانش آموز پراکلندگی کمتری دارد؟ کلاس ۱
ب) تیمی از دانش آموزان کلاس ۱، نمره شان بیشتر از چند است؟ ۱۱
پ) کدام کلاس عملکرد بهتری دارد؟ چرا؟ کلاس ۲ (۱۱ نفر از ۲۵ نفر امتیاز ۲۰ را دارند).
ت) آیا می توان گفت ۷۵ درصد دانش آموزان کلاس ۱ از دانش آموزان کلاس ۲ بهتر عمل کرده اند؟ نظر

در یک تیم والیبال، کوتاهترین قد ۱۶۸ و بلندترین قد ۲۰ سانتی متر و میانه برابر ۱۸۴ سانتی متر است. اگر فاصله بین Q_1 و Q_3 برابر ۱۱ باشد، آیا می‌توان نمودار جعبه‌ای از این داده را بازسازی کرد؟



علضت قند خون ۱۲ نفر (بر حسب 30 mM dim^{-2}) دقيقه پس از مصرف غذا اندازه گیری

شده است. نتایج به دست آمده به شرح زیر است.

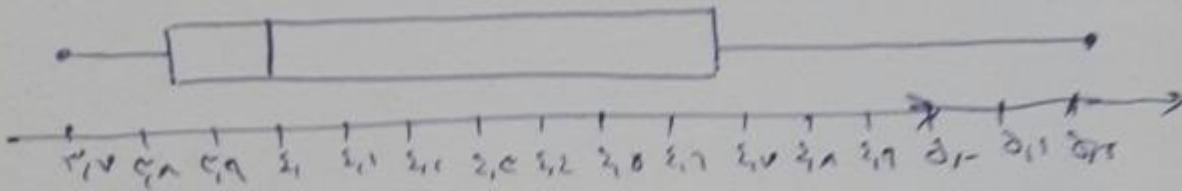
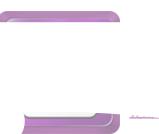
T/V	A/I	F/I	T/Q	T/A	F/T
T/Q	F/I	A/I	T/V	F/I	T/A

$$m = 2$$

$$Q_1 = \gamma_1 A D$$

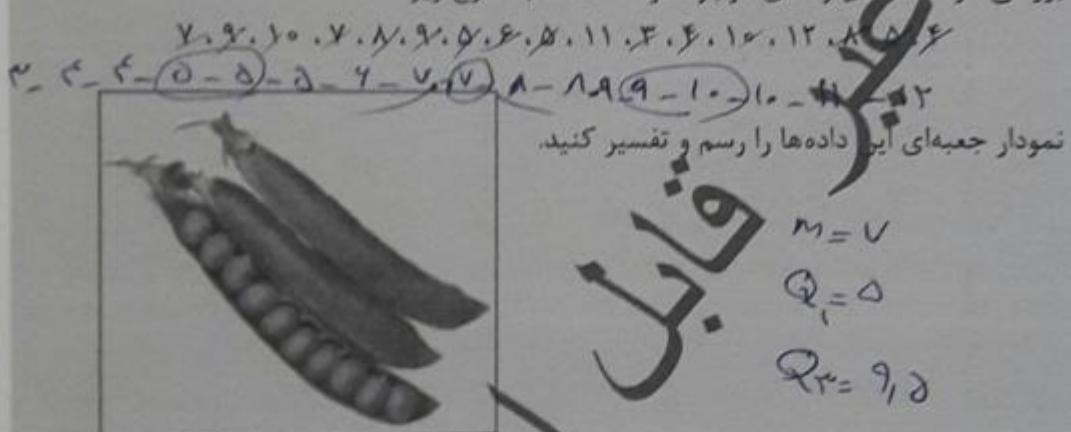
Q_r = 2,48

لایه کوهی اول و سوم را پسداشتید.



ب) اگر غلظت قند خون شماره ۳۰ دقیقه پس از مصرف غذا ۴/۱ باشد. وضعیت خود را نسبت به این افراد توصیف کنید. دسترسی محدود است زیرا این افراد غلظت خون شان ۴/۶ می‌گذرد.

۵) سجاد در رشته کشاورزی تحصیل می‌کرد. او تنوع تعداد نخودهای موجود در غلافها را بررسی کرد. تعداد نخودهای موجود در ۱۷ غلاف به شرح زیر است.



نحویا در نصف غلافها تعداد نخودهای کمتر از ۱۰ میانه هستند ۷ درصد باید.

نحویا در تمام نواحی نمودار جعبه‌ای داده بگسان برواند شده اند زیرا معمولاً برای مسائل طبیعی برواندگی داده‌ها نرمال می‌باشد.

