

# ایران توشه

- رانلور نمونه سوالات امتحانی

- رانلور گام به گام

- رانلور آزمون گاج و قلم چی و سنجش

- رانلور فیلم و مقاله انگلیزی

- رانلور و مشاوره



IranTooshe.Ir



@irantooshe



IranTooshe





## فصل اول

### نسبت و تناسب

ایران توانمند

توشه ای برای موفقیت



Gan-Darsi

# ایران تونز

## توشه ای برای موفقیات

این کتاب به شما کمک می‌کند تا با استفاده از روش‌های ساده و کاربردی، بتوانید به راحتی و بدون هیچ هزینه‌ای، به درآمد دلالت‌آمیز و دلالت‌آمیز دست‌یابید.

| روش       | میزان درآمد |
|-----------|-------------|
| روش اول   | 1000000     |
| روش دوم   | 2000000     |
| روش سوم   | 3000000     |
| روش چهارم | 4000000     |
| روش پنجم  | 5000000     |

این روش‌ها به شما کمک می‌کند تا به راحتی و بدون هیچ هزینه‌ای، به درآمد دلالت‌آمیز و دلالت‌آمیز دست‌یابید.

این کتاب به شما کمک می‌کند تا با استفاده از روش‌های ساده و کاربردی، بتوانید به راحتی و بدون هیچ هزینه‌ای، به درآمد دلالت‌آمیز و دلالت‌آمیز دست‌یابید.

جدول تکمیل شده:

| اندازه برحسب گیره‌های کوچک | اندازه برحسب گیره‌های بزرگ |
|----------------------------|----------------------------|
| ۵                          | ۵                          |
| ۳                          | ۲                          |
| ۶                          | ۴                          |
| ۹                          | ۶                          |

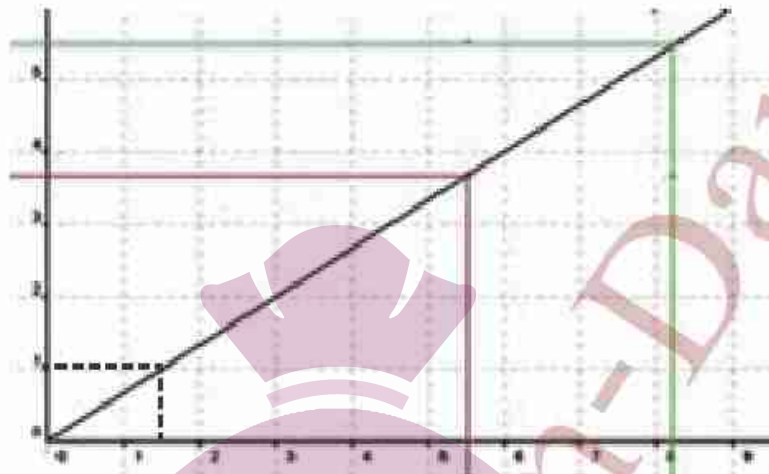
نمودار رسم شده:



با استفاده از نمودار ملاحظه می‌شود طول و عرض برحسب گیره کوچک عبارت است از:



طول بر حسب گیره کوچک تقریباً برابر  $8\frac{1}{5}$  و عرض بر حسب گیره کوچک برابر  $5\frac{6}{10}$  است.



توجه داشته باشید که اگر از نقطه ۱ روی محور  $Y$  ها موازی محورهای  $X$  رسم کنیم و سپس از محل برخورد آن با نمودار موازی محور  $Y$  ها رسم کنیم، مشاهده می شود که  $1/5$  گیره کوچک داریم یعنی نسبت طول گیره بزرگ به طول گیره کوچک عبارت است از  $\frac{3}{2}$  (توجه کنید نسبت تعداد گیره های بزرگ به تعداد گیره های کوچک  $\frac{2}{3}$  است). برای به دست آوردن طول بر حسب گیره کوچک کافی است طول بر حسب گیره بزرگ را در  $\frac{3}{2}$  ضرب کنیم.

$$(\text{طول بر حسب گیره کوچک} = \frac{3}{2} \times \text{طول بر حسب گیره بزرگ})$$

$$\text{مثلاً در این مسئله داریم: طول کتاب} = 8\frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{11}{2} \times \frac{3}{2} = 5\frac{1}{4}$$

$$\text{عرض کتاب بر حسب گیره کوچک: } 5\frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{11}{2} \times \frac{3}{2} = 5\frac{1}{4}$$

هرگاه دو کمیت متناسب رابطه مستقیم داشته باشند دارای ویژگی های مهم زیر هستند:

- ✓ با افزایش یکی از آنها دیگری نیز افزایش می یابد.
- ✓ نمودار رابطه آنها یک خط راست است که از مبدأ می گذرد و شیب این خط همان نسبت بین دو کمیت (ضریب تبدیل) می باشد.

پس از حل فعالیت توسط هنرجویان می توان سؤالات زیر را از آنها پرسید:

■ آیا با افزایش یک کمیت (یا واحد)، کمیت (یا واحد) دیگر افزایش می یابد یا کاهش می یابد.

■ آیا نمودار این رابطه، یک خط راست است؟

- آیا می‌توانید معادله این خط را بنویسید؟
- شیب (ضریب زاویه) این خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟
- نمودار دو کمیت متناسب مستقیم از کدام نقطه همیشه می‌گذرد؟ (جواب: (۰ و ۰))

حل مسئله مرتبط با نسبت

۱. ۶ به ۱۱ نسبت ۴۲ به ۸۵ و ۶ به ۱۱ دو نسبت مساوی‌اند؟  
 بله، K برابر است با .....  
 خیر، نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با ۴۲ به ۸۵ و K برابر است با .....  
 ۲. اما دو نسبت ۲ به ۵ و ۱۰ به ۲۵ دو نسبت مساوی‌اند؟  
 بله، K برابر است با .....  
 خیر، نسبت ۲ به ۵ برابر است با نسبت ..... به .....  
 ۳. در یک روزنامه عکس‌ها با ابعاد ۶ × ۵ چاپ می‌شوند.  
 هر مرتبه صفحه‌آرایی تصویر گرفته شده عکس‌ها با  
 طول ۱۲ چاپ شوند. عرض عکس‌ها چقدر باید باشد؟



۱. خیر، نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با ۴۲ به ۷۷ و K برابر است با:  $\frac{۶}{۱۱}$
  ۲. بله، برابر است با:  $\frac{۲}{۵}$
  ۳.  $\frac{۵}{۶} = \frac{x}{۱۲} = k \Rightarrow x = ۱۲k = ۱۲ \times \frac{۵}{۶} = ۱۰$
- توشه‌ای برای موفقیت

هر میوه‌ای نرغالی، هر ۳ کیلوگرم سیب‌زمینی ۳۰۰۰ تومان است.



۱ نسبت قیمت سیب زمینی به وزن آن، برابر است با: ۳۰۰۰ تومان به ۳ کیلو گرم

سیب زمینی

۲ نسبت قیمت سیب زمینی به وزن آن برابر است با ۱۰۰۰ تومان به ۱ کیلوگرم

سیب زمینی.

۳ این نسبت نشان می دهد که با ۱۰۰۰ تومان می توان ۱ کیلو گرم سیب زمینی خرید.

۴ نسبت وزن سیب زمینی به قیمت آن، برابر است با: ۳ کیلوگرم سیب زمینی

به ۳۰۰۰ تومان

۵ نسبت وزن سیب زمینی به قیمت آن برابر است با  $\frac{1}{1000}$  کیلوگرم سیب زمینی

به ۱ تومان.

۶ این نسبت نشان می دهد که با ۱ تومان می توان  $\frac{1}{1000}$  کیلوگرم (۱ گرم) سیب زمینی

خرید.

۷ برای پیدا کردن قیمت ۵ کیلوگرم سیب زمینی رابطه زیر را کامل کنید.

$$\frac{5 \text{ کیلوگرم سیب زمینی}}{5000 \text{ تومان}} = \frac{3 \text{ کیلوگرم سیب زمینی}}{3000 \text{ تومان}}$$

قیمت بر حسب هزار تومان



۸ نمودار رابطه بین مقدار سیب زمینی

و قیمت آنها را رسم کنید.

۹ شیب، نسبت قیمت سیب زمینی به

وزن آن را نشان می دهد.

در مثال‌های این قسمت نسبت دو کمیت متناسب با واحدهای مختلف (نرخ) در بافت‌های مختلف عنوان شده است تا هنرجو درک بهتری از مفهوم نرخ داشته باشد و زمینه مقایسه نرخ‌های مختلف از دو کمیت در بافت‌های عنوان شده فراهم شود. در این قسمت همچنین روش‌های مختلف حل مسائل مربوط به نرخ مطرح شده است.

نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده در دو ماشین مختلف به ترتیب  $\frac{۲۷}{۳۰۰}$  لیتر و  $\frac{۳۰}{۳۲۰}$  کیلومتر است کدام ماشین باصرفه‌تر است؟

۱۲) بلیت‌های یک سینما در یک ساعت مانده به شروع فیلم در هر دقیقه به میزان ثابتی به فروش می‌رسد. اگر این سینما ۲۴۰ بلیت را در ۱۶ دقیقه فروخته، ابتدا نرخ فروش بلیت در دقیقه را پیدا کنید. سپس به کمک آن، تعداد بلیت‌های فروخته شده در هر ساعت را بدست آورید.

۱) نرخ مصرف در ماشین اول  $\frac{۳۰}{۳۲۰} = ۰/۰۹۳$  و در ماشین دوم  $\frac{۲۷}{۳۰۰} = ۰/۰۹$

است یعنی ماشین اول در یک کیلومتر ۰/۰۹۳ لیتر و ماشین دوم در یک کیلومتر ۰/۰۹ لیتر مصرف می‌کند، پس مصرف ماشین دوم کمتر و مقرون به صرفه‌تر است.

۲) نرخ فروش بلیت در دقیقه  $\frac{۲۴۰}{۱۶} = ۲۴۰ \div ۱۶ = ۱۵$

های فروخته شده در ساعت:  $۱۵ \times ۶۰ = ۹۰۰$

ایران توانمند  
توشه‌ای برای موفقیت

علی و احمد با سرعت برابر در یک مسیر ثابت‌ای دوچرخه‌سواری می‌کردند. علی زودتر از احمد دوچرخه‌سواری را شروع کرده بود؛ به طوری که وقتی او ۱ دور زده بود، احمد ۳ دور زده بود.





۱ تکمیل شده جدول:

| تعداد دورهای علی | تعداد دورهای احمد |
|------------------|-------------------|
| ۶                | ۰                 |
| ۹                | ۳                 |
| ۱۲               | ۶                 |
| ۱۵               | ۹                 |

۲ کافی است از اعداد ستون اول (از سمت چپ) ۶ واحد کم کنیم تا اعداد ستون دوم به دست آیند. این فعالیت تمرینی است برای الگویابی در دو مرحله. ابتدا در مرحله اول، اعداد ستون سمت چپ کامل می شوند و سپس با کشف رابطه بین دو ستون اعداد ستون دوم کامل می شوند.

۳ سرعت علی ۳ برابر سرعت احمد است.

۴ تکمیل شده جدول: **توشه ای برای موفقیت**

| تعداد دورهای علی | تعداد دورهای احمد |
|------------------|-------------------|
| ۰                | ۰                 |
| ۹                | ۳                 |
| ۱۲               | ۴                 |
| ۱۵               | ۵                 |

۵ کافی است اعداد ستون اول را بر ۳ تقسیم کنیم تا اعداد ستون دوم به دست آیند. در مثال بعد از این فعالیت، سؤالی در مورد رابطه بین سن دو نفر مطرح شده است. با توجه



به اینکه در هر زمان با افزودن عددی ثابت به سن یکی، سن دیگری به دست می‌آید، این رابطه جمعی است. معادله جبری این رابطه به صورت  $y = x + k$  است و می‌توان از هنرجویان خواست تفاوت آن را با معادله مربوط به نسبت مستقیم بررسی کنند.



۱) با استفاده از یک نقشه فاصله بین دو نقطه مهم (مثلاً دو شهر مهم در نقشه شهرهای ایران) را روی نقشه اندازه‌گیرند و به کمک مقیاس آن (که در کنار نقشه درج شده است) فاصله واقعی این دو شهر را پیدا کنند و آن را با فاصله رسمی اعلام شده بین دو شهر مقایسه کنند. در صورت وجود تفاوت دلیل این تفاوت را بیابند.

۲) مینا برای تهیه نوعی سس سالاد، به کتاب آشپزی مراجعه کرد. نسبت روغن به سرکه در آن سس، ۳ به ۴ بود. مینا گفته یعنی ۷۵٪ سس روغن است. آیا مینا درست متوجه شده بود؟ توضیح دهید.

## ایران توشه توشه ای برای موفقیت

جواب: خیر، اگر نسبت روغن به کل سس ۳ به ۴ باشد ۷۵ درصد سس روغن است اما در اینجا نسبت روغن به سرکه گفته شده است.

۳) لکاتی می‌خواهد عکس را در ابعاد  $25 \times 25$  بزرگ کند و سپس آن را روی دیواری به طول ۵۵ سانتی‌متر چال کند. عرض عکس بزرگ شده چقدر خواهد بود؟

طول مقوا را متناظر طول عکس در نظر می گیریم:

$$\frac{35}{25} = \frac{55}{x} = k \rightarrow x = 55 \times \frac{25}{35} = \frac{275}{7}$$

۴ علی هر ماه مقداری ثابت پول را بن انداز می کند. جدول زیر مقدار بن انداز او را در چند ماه نشان می دهد.

| مقدار بن انداز | تعداد ماه |
|----------------|-----------|
| ۳۵۰            | ۲         |
| ۷۰۰            | ۴         |
| ۱۰۵۰           | ۶         |
|                | ۸         |
|                | ۱۰        |

این جدول به سه روش رسم شکل، رسم نمودار و جبری کامل کنید.

۱ ۱

۵۰ ۵۰ ۵۰ ۵۰ ۵۰ ۵۰ ۵۰

۴ ۴

۲۰۰ ۲۰۰ ۲۰۰ ۲۰۰ ۲۰۰ ۲۰۰ ۲۰۰

۵ ۵

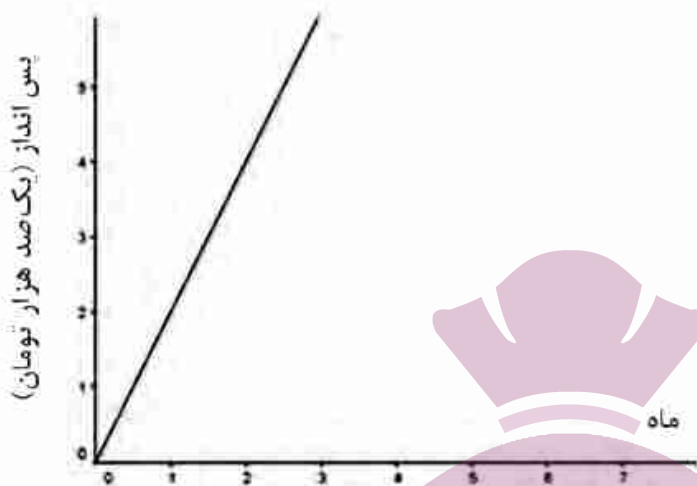
۲۵۰ ۲۵۰ ۲۵۰ ۲۵۰ ۲۵۰ ۲۵۰ ۲۵۰

هشت ماه:

$$7 \times 200 = 1400$$

$$10 \text{ ماه: } 7 \times 250 = 1750$$

نمودار:



جبری: پس از ۸ ماه:  $۸ \times \frac{۳۵۰}{۲} = ۱۴۰۰$  و پس از ۱۰ ماه:  $۱۰ \times \frac{۳۵۰}{۲} = ۱۷۵۰$

ایران توانینه

توشه ای برای موفقیت

برای پر کردن مخزن این ۱۰ شیر آب یکسان بر سر لوازم کار گذاشته شده است. دو شیر آب وقتی به ملور کامل باز هستند، این مخزن در ۸ ساعت پر می‌شود.

۱) اگر ۴ شیر آب هم‌زمان به ملور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟ دیر یا زودتر؟  
 بدین جهت حواست باشد که شیرهای آب ۵ هم حرف نمی‌زنند!

۲) اگر ۸ شیر آب هم‌زمان به ملور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟

۳) رابطه‌ی بین تعداد شیرهای باز و زمان پر شدن مخزن را توصیف کنید.

# ایران توشه

## توشه ای برای موفقیت

- ۱) چون تعداد شیرها دو برابر شده است، پس زمان نصف می‌شود. یعنی ۴ ساعت
  - ۲) چون در این حالت تعداد شیرها دو برابر حالت (۱) شده است، زمان نیز نصف زمان حالت (۱) است، یعنی ۲ ساعت.
  - ۳) هرچه تعداد شیرهایی که آب از طریق آنها وارد حوض می‌شود افزایش یابد سرعت پر شدن حوض بیشتر شده و حوض در زمان کمتری پر خواهد شد. بنابراین با افزایش تعداد شیرها، زمان پر شدن حوض کاهش خواهد یافت.
- توضیحات پس از فعالیت در ایجاد درک صحیح از رابطه بین دو کمیت متناسب

که رابطه معکوس دارند نقش اساسی دارند بنابراین توصیه می‌شود این توضیح‌ها به صورت پرسش و پاسخ بین دبیر و هنرجویان مطرح شود تا همگی آنها ضمن مشارکت در فرایند درک مفهوم به اشکالات احتمالی خود در درک این مفهوم پی ببرند. در غیر این صورت دبیر از هنرجویان بخواهد که با مطالعه متن پس از فعالیت، اشکالات احتمالی خود از درک مطلب را از دبیر سؤال کنند. طی مراحل ذکر شده در پرسش و پاسخ دبیر و هنرجو، در چند مسئله مشابه به درک بیشتر این مفهوم کمک می‌کند.

توجه کنید که دو کمیت متناسب که با هم رابطه معکوس دارند، دارای ویژگی‌های زیر هستند.

- ✓ حاصل ضرب مقادیر متناظر از این دو کمیت مقدار ثابتی است، بنابراین با افزایش (کاهش) یکی از آنها دیگری کاهش (افزایش) می‌یابد.
- ✓ نمودار رابطه یک شاخه از هذلولی است.

پس از انجام این فعالیت می‌توان برای درک بهتر مفهوم و تشخیص نسبت‌های معکوس این ویژگی‌ها را برای هنرجویان توصیف کرد (مثلاً از روی نمودار مشخص کرد که تغییرات یک کمیت چه تأثیری بر تغییرات کمیت دیگر دارد. یا با دادن مقادیر بیشتری از یک کمیت مقدارهای بیشتری از کمیت دیگر را به دست آورد) و در مسائل مختلف به این ویژگی‌ها اشاره داشت.

## ایران توانمند

### توانمندسازی برای موفقیت

تکثیر کننده

۴

۱- الف) دو کمیت متناسب را نام ببرید که با هم رابطه معکوس داشته باشند.

۲- با در نظر گرفتن ارتباط این دو کمیت، مسئله‌ای طرح کنید.

۳- شمع بی طول ۱۴ سانتی متر و روشن می‌کنیم. این شمع در هر ۵ دقیقه ۱ سانتی متر کوتاه می‌شود.

الف) اگر لحظه روشن کردن شمع را زمان صفر در نظر بگیریم، رابطه بین زمان و طول شمع را بنویسید.

ب- با افزایش زمان، طول شمع چگونه تغییر می‌کند؟ آیا زمان و طول شمع کمیت‌های متناسب معکوس یکدیگرند؟ چرا؟



۱۱ مثال‌های متنوعی از محیط پیرامونی را می‌توان مطرح کرد. در صورتی که لازم باشد دبیر می‌تواند با ذکر ویژگی‌های کمیت‌های متناسب با نسبت معکوس (از جمله اینکه با افزایش مقادیر یکی مقدار دیگری کاهش می‌یابد) به ارائه مثال‌ها توسط هنرآموزان کمک کند، یا پاسخ‌های درست را تفسیر و پاسخ‌های نادرست را به کمک هنرجویان تحلیل و تصحیح کند.

۱۲ طرح یک مسئله می‌تواند با راهنمایی دبیر انجام شود.

$$y = 14 - \frac{t}{5} \quad (\text{الف})$$

(یا به صورت کلامی: طول شمع بر حسب سانتی‌متر  $= \frac{1}{5}$  زمان طی شده بر حسب دقیقه  $- 14$ )

ب) با افزایش و گذر زمان طول شمع کاهش می‌یابد. چون حاصل ضرب این دو کمیت عدد ثابتی نیست، بنابراین رابطه بین این دو کمیت از نوع تناسب معکوس نیست. نمودار این رابطه بخشی از خط است در حالی که نمودار رابطه‌های معکوس یک منحنی هذلولی است. این سوال اشاره به یک اشتباه که ممکن است برای هنرجویان اتفاق بیفتد دارد، نوع رابطه بین طول شمع و مدت زمان سوختن شمع (که با افزایش زمان، طول شمع کاهش می‌یابد) ممکن است این تصور را در ذهن هنرجو ایجاد کند که کمیت‌های ذکر شده متناسب معکوس هستند. اما علاوه بر تشخیص از روی نمودار، با توجه به رابطه خطی بین این دو کمیت (و اینکه حاصل ضرب این دو کمیت یک عدد ثابتی نیست) می‌توان فهمید که متناسب معکوس نیستند.

ایران توشه  
توشه‌ای برای موفقیت

۱) جاهای خالی را پر کنید.

نسبت دو کمیت متناسبه که با یک واحد اندازه‌گیری نمی‌شوند نامیده می‌شود.

دو کمیت  $A$  و  $B$  را در نظر بگیرید. اگر با افزایش یک واحد از  $A$ ، یک واحد از  $B$  افزایش یابد، دو

کمیت رابطه دارند.

۲ دو مثال از نرخ بیان کنید.

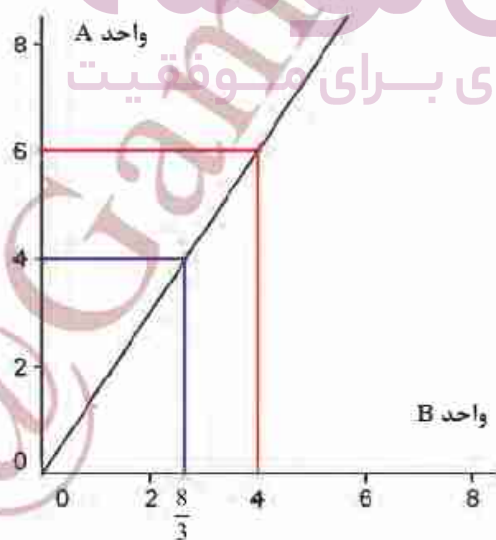
قیمت میوه به وزن آن، مسافت طی شده نسبت به زمان سپری شده از شروع حرکت در یک خودرو با سرعت ثابت و ....

۳ اگر ضریب تبدیل واحد A به B  $\frac{2}{3}$  باشد، به سوال های زیر پاسخ دهید.  
الف) ۴ واحد از A معادل چند واحد از B است؟  
ب) ۴ واحد از B معادل چند واحد از A است؟  
پ) ضریب تبدیل واحد B به واحد A را بیابید.  
ت) رابطه بین این دو واحد را با نمودار نشان دهید و به پرسش های الف و ب از روی نمودار پاسخ دهید.

حل: الف)  $x = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

ب)  $x = 4 \times \frac{3}{2} = 6$   
پ)  $\frac{3}{2}$

ت)



۱۹ جدول زیر نوعی کالا را نشان می‌دهد که در سه اندازه کوچک، متوسط و بزرگ بسته بندی شده است.

| نوع   | وزن (کیلوگرم) | قیمت (تومان) |
|-------|---------------|--------------|
| کوچک  | ۱/۵           | ۱۲۰۰۰        |
| متوسط | ۴             | ۳۰۰۰۰        |
| بزرگ  | ۱۵            | ۱۰۰۰۰۰       |

الف) جدولی را کامل کنید.  
ب) کدام بسته یا بسته‌تر است؟

(الف):

| نوع   | وزن (کیلوگرم) | قیمت (تومان) | نسبت وزن به قیمت | نسبت قیمت به وزن |
|-------|---------------|--------------|------------------|------------------|
| کوچک  | ۱/۵           | ۱۲۰۰۰        | ۰/۰۰۱۲۵          | ۸۰۰              |
| متوسط | ۴             | ۳۰۰۰۰        | ۰/۰۰۱۳۳          | ۷۵۰              |
| بزرگ  | ۱۵            | ۱۰۰۰۰۰       | ۰/۰۰۱۵           | ۶۶۶/۶۷           |

ب) بسته بزرگ زیرا قیمت آن نسبت به وزن از بقیه بسته‌ها کمتر است.



الف) ضریب تبدیل A به B عبارت است از:  $\frac{۳}{۵}$  و ضریب تبدیل B به A عبارت است از:  $\frac{۵}{۳}$ .

$$\frac{۳}{۵} \times ۳ = \frac{۹}{۵} = ۱/۸ \text{ (ب)}$$

$$\frac{۵}{۳} \times ۵ = \frac{۲۵}{۳} \approx ۸/۳۳ \text{ (پ)}$$

۶) از میان کمیت‌های متناسب زیر، کدام مستقیم و کدام معکوس است؟  
 الف) وزن یک کالا و قیمت آن  
 ب) تعداد بیم‌هایی که یک جوی آب را پر می‌کنند و زمان پر شدن جوی  
 پ) زمان مکالمه با تلفن همراه و هزینه آن  
 ت) تعداد مشتریان در یک بانک به زمان انتظار آنها یا فرض برابری زمان سرویس‌دهی  
 ث) وزن بسته پستی و هزینه ارسال بدون در نظر گرفتن هزینه ثابت  
 ج) تعداد کارگران و زمان انجام کار برای تخلیه بارهای یک انبار  
 چ) درآمد حاصل از دریافت حوازی در یک اتوبان و تعداد ماشین‌هایی که از آن عبور می‌کنند.

هر دو کمیت متناسب که با افزایش یکی دیگری نیز افزایش یابد مستقیم و در غیر این صورت معکوس است.

|             |           |           |           |           |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| الف) مستقیم | ب) معکوس  | پ) مستقیم | ت) مستقیم | ث) مستقیم |
| ج) معکوس    | چ) مستقیم |           |           |           |

ایران توانمند  
 توشه‌ای برای موفقیت

## فصل دوم

### درصد و کاربردهای آن

ایران تونل

توشه ای برای موفقیت





# ایران توشه

## توشه ای برای موفقیت

$$10\% \times 30 = \frac{10}{100} \times 30 = 3$$

الف) کلاس اول:

$$20\% \times 25 = \frac{20}{100} \times 25 = 5$$

کلاس دوم:

$$30\% \times 40 = \frac{30}{100} \times 40 = 12$$

کلاس سوم:

$$\frac{3+5+12}{30+25+40} = \frac{20}{95} = 0/2105 \Rightarrow 0/2105 \times 100 = 21/05 = 21\% \quad \text{ب)}$$

پ) خیر، زیرا تعداد هنرجویان کلاس‌ها متفاوت است و مبنای محاسبه درصد سه کلاس یکسان نیست. برای یافتن میانگین درست باید با توجه به تعداد هنرجویان هر کلاس به درصد آن کلاس وزن داد و میانگین وزنی درصدهای شرکت کنندگان کلاس‌ها را به دست آورد. میانگین وزنی درصدها، همان جواب در قسمت (ب) است.

ت) خیر، جمع درصدها نشان دهنده هیچ مفهوم خاصی نیست. در مورد محاسبات مربوط به میانگین، یکی از اشتباهات رایج، ناشی از عدم توجه به معنی میانگین وزنی است. اگر بخواهیم میانگین چند مقدار را به دست آوریم باید فراوانی همه آنها یکسان باشد و میانگینی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد (حاصل تقسیم مجموع همه مقادیر بر تعداد آنها) معنی دارد. اما در صورتی که فراوانی آنها متفاوت است (میزان اثر بخشی هر واحد از هر کدام از داده‌ها در نتیجه یکسان نیست) میانگین معمولی معنی خاصی ندارد و لازم است برای محاسبه میانگین به طور معنی دار، میانگین وزنی مقادیر را به دست آوریم. توجه به این موضوع، به ویژه مواقعی که درصدهایی از چند مقدار در اختیار داریم و می‌خواهیم درصد کل مقادیر را به دست آوریم، موجب اجتناب از اشتباه می‌شود. با توجه به وضعیت کلاس، دبیران محترم می‌توانند جهت ارتقای مهارت محاسبه درصد و درک اشتباه رایج کار در کلاس‌ها یا مسئله‌هایی منطبق با اهداف این فعالیت طرح کرده و از هنرجویان بخواهند تا آنها را حل کنند و روش حل خود را توصیف و نتایج حاصل را تفسیر کنند. در صورت وجود درک نادرست از این موضوع با ارائه توضیحات مناسب می‌توان هنرجویان را به درک صحیحی از این مفهوم رساند.

یکی دیگر از اشتباهات رایج را در مسئله زیر و حل آن توسط یکی از هنرجویان می‌توان دید:

یکی از فروشندگان کالا در پایان هفته ۲۰ قلم از یک نوع کالا را فروخته است. اگر قیمت هر قلم کالا ۳۰۰۰۰ تومان بوده باشد و ۲۰ درصد سود کرده باشد میزان سود او در هر قلم کالا چقدر است؟

حل هنرجو:

برای هر قلم کالا ۳۰۰۰۰ تومان دریافت کرده است که ۲۰ درصد آن سود می‌باشد. بنابراین میزان سود برابر  $30000 \times 20\% = 6000$  می‌باشد.

اشکال راه حل ارائه شده این است که درصد به عنوان جزئی از کل قیمت فروش محاسبه شده است در حالی که مجموع سود و قیمت تمام شده، قیمت فروش را می‌دهد به عبارت دیگر داریم:

قیمت تمام شده + ۲۰٪ قیمت تمام شده = ۳۰۰۰۰ تومان که اگر به صورت

کسری نشان دهیم داریم :

$$\text{قیمت تمام شده} + 20\% \text{ قیمت تمام شده} = \text{قیمت تمام شده} + \frac{1}{5} \text{ قیمت تمام شده}$$

$$= \frac{1}{5} \text{ قیمت تمام شده}$$

بنابراین سود ۵۰۰۰ تومان و قیمت تمام شده ۲۵۰۰۰ تومان می باشد. بنابراین لازم است در محاسبه درصد سود روی قیمت تمام شده تأکید شود یعنی در اینجا کل، قیمت تمام شده است و قیمت فروش نیست.

گفتگو در کلاس درباره این گونه وضعیت ها به درک بهتر مفهوم درصد کمک می کند.

(۱) برای خرید یک جفت جوراب هر جفت به قیمت ۵۰۰۰۰ تومان پس از ۲۰٪ تخفیف چقدر باید پرداخت نمود؟  
(۲) برای خرید پیراهنی به قیمت ۳۰۰۰۰۰ تومان با ۵٪ تخفیف و یک شلوار به قیمت ۵۰۰۰۰۰ تومان با ۱۰٪ تخفیف چقدر باید پرداخت نمود؟

$$\frac{20}{100} \times 50000 = 10000 \rightarrow 50000 - 10000 = 40000$$

پس  $3 \times 40000$  تومان باید بپردازیم

۲ قیمت پیراهن پس از تخفیف:

$$\frac{50}{100} \times 300000 = 150000 \rightarrow 300000 - 150000 = 150000$$

قیمت شلوار پس از تخفیف

$$\frac{10}{100} \times 500000 = 50000 \rightarrow 500000 - 50000 = 450000$$

قابل پرداخت:  $450000 + 150000 = 600000$

دبیران محترم در این قسمت می توانند با ارائه سؤالاتی نظیر کار در کلاس ها، در مسائلی که چند درصد مختلف بیان می شود، مهارت محاسبه صحیح درصد یک مقدار را ارتقا دهند.

۲۵ از ۳۰۰۰۰ تومان، ۶۰۰ تومان است. محاسبه ی درصد را به صورت ذهنی انجام دهید و در هر صورت روش محاسبه خود را توضیح دهید.  
۱) ۲۰٪ از ۳۰۰۰۰۰ تومان  
۲) ۱۰٪ از ۳۰۰۰۰۰ تومان  
۳) ۲۵٪ از ۳۰۰۰۰۰ تومان

۱۲) ۴ درصد یک مقدار ۲ برابر ۲ درصد آن است پس حاصل  $2 \times 6000 = 12000$  خواهد بود.

۱۳) ۱۰ درصد یک مقدار ۵ برابر ۲ درصد آن است پس حاصل  $5 \times 6000 = 30000$  خواهد بود.

۱۴) ۹۲ درصد یک مقدار ۸ درصد از ۱۰۰ درصد کمتر است و ۸ درصد ۴ برابر ۲ درصد آن است پس ۸ درصد مقدار  $4 \times 6000 = 24000$  و  $300000 - 24000 = 276000$  ۹۲ درصد خواهد بود.

۱۵) روش اول چون ۵۰ درصد نصف می باشد، کافی است نصف  $300000$  را به دست آوریم ( $300000$  را بر ۲ تقسیم کنیم)، روش دوم ۵۰ درصد ۲۵ برابر ۲ درصد است پس حاصل ضرب ۲۵ در  $6000$  را به دست می آوریم. روش سوم ۱۰ درصد  $300000$  را به دست می آوریم و حاصل را در ۵ ضرب می کنیم، روش چهارم ضرب  $300000$  در ۵۰ درصد است.

لازم به ذکر است در اینجا ارائه یک قالب یا قالب های خاص توسط دبیر جهت انجام محاسبات ذهنی درصد هنجاریان مورد نظر نیست. بلکه ارائه مثال هایی از روش های مختلف محاسبه ذهنی درصد است. پرسیدن روش های محاسبه ذهنی هنجاریان و تشویق آنها برای ارائه روش های متنوع که توسط خود آنها ساخته شده می تواند مهارت های ذهنی آنها را ارتقا دهد. این مهارت ها در موارد مشابه در ها نیز قابل به کارگیری است.

ایران توانمند  
روش های موفقیت

۱۱) ۳۳ درصد  $300000$  تومن را به چند طریق می توانیم پیدا کنیم؟ روش های خود را بنویسید.  
۱۲) اگر بخواهیم  $\frac{1}{3}$  از  $300000$  را به چند طریق پیدا کنیم؟ روش های خود را بنویسید.

روش اول: ۳۳ درصد را به طور تقریبی، کسر  $\frac{1}{3}$  در نظر گرفته و آن را حل می کنیم.

$$300000 \times \frac{1}{3} = \frac{300000}{3} = 100000$$



روش دوم: به جای ۳۳ درصد از کسر  $\frac{۳}{۱۰}$  استفاده می‌کنیم.

$$۳۰۰۰۰۰ \times \frac{۳}{۱۰} = \frac{۹۰۰۰۰۰}{۱۰} = ۹۰۰۰۰۰$$

روش سوم: آن را در  $\frac{۳۳}{۱۰۰}$  ضرب کنیم:

$$۳۰۰۰۰۰ \times \frac{۳۳}{۱۰۰} = \frac{۹۹۰۰۰۰۰}{۱۰۰} = ۹۹۰۰۰$$

روش چهارم: ۱٪ از ۳۰۰۰۰۰ (که معادل تقسیم بر ۱۰۰ در محاسبه درصد است) را پیدا کرده و حاصل را در ۳۳ ضرب کنیم:

$$۳۰۰۰ \times ۳۳ = ۹۹۰۰۰$$

با توجه به نوع نیاز ما در محاسبه درصد (محاسبات کاملاً دقیق یا محاسبه تقریبی) روش مناسب برای محاسبه درصد را انتخاب می‌کنیم.

۱۲/۵ درصد نصف ۲۵ درصد که  $\frac{۱}{۴}$  می‌باشد. ابتدا  $\frac{۱}{۴}$  را پیدا کرده و سپس بر ۲ تقسیم می‌کنیم. یعنی

$$۱۶۰ \div ۴ = ۴۰ \rightarrow ۴۰ \div ۲ = ۲۰$$

یا می‌توان گفت: ۱۲/۵ درصد همان  $\frac{۱}{۸}$  است ( $\frac{۱۲/۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۸}$ ) یعنی کافی است ۱۶۰ بر عدد ۸ تقسیم شود پس حاصل  $۱۶۰ \div ۸ = ۲۰$  خواهد بود.

## مسئله‌ها

۱) یک فروشنده در بازی اول خود ۹ توپ از ۱۰ توپ را که به طرف دروازه رده شده بود، مهار کرد. این فروشنده در بازی دوم خود ۸ توپ از ۹ توپ و در بازی سوم خود ۶ توپ از ۷ توپ فرستاده شده به طرف دروازه را مهار کرد.

الف) در هر بازی این فروشنده چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

ب) او در این سه بازی روی چقدر درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

ج) آیا جمع درصد توپ‌های مهار شده در این سه بازی معنای خاصی دارد؟





(الف)

$$\frac{9}{10} \times 100 = 90 \rightarrow 90\%$$

$$\frac{5}{8} \times 100 = 62.5 \rightarrow 62.5\%$$

$$\frac{6}{7} \times 100 = 85.7 \rightarrow 85.7\%$$

$$\frac{9+5+6}{10+8+7} \times 100 = \frac{20}{25} \times 100 = 80 \rightarrow 80\%$$

(ب)

ج) خیر، چون تعداد پرتاب‌های هر کدام از بازی‌ها با دیگری متفاوت است، پس معنای خاصی ندارد.

۳) تعداد پاسخ‌های درست، محاسبه به سؤالاتی که آزمون در جدول زیر آورده شده است.  
تعداد جدول را کامل کنید.  
تعداد درصد کلی پاسخ‌های درست، از سده آزمون را پیدا کنید.

| شماره آزمون | تعداد سؤالات | تعداد پاسخ‌های درست | درصد پاسخ‌های درست |
|-------------|--------------|---------------------|--------------------|
| ۱           | ۹            | ۷                   | ۷۷.۷               |
| ۲           | ۶            | ۶                   | ۱۰۰                |
| ۳           | ۱۰           | ۷                   |                    |

ایران توانمند  
توشه‌ای برای موفقیت

| شماره آزمون | تعداد سؤالات آزمون | تعداد پاسخ‌های صحیح | درصد پاسخ‌های صحیح |
|-------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| ۱           | ۹                  | ۷                   | ۷۷/۷               |
| ۲           | ۶                  | ۶                   | ۱۰۰                |
| ۳           | ۱۰                 | ۷                   |                    |
|             |                    |                     |                    |

۳) با توجه به اینکه ۳۵٪ عدد ۲۲۰۰ برابر ۷۷۰ است، محاسبات زیر را به صورت ذهنی انجام دهید:

الف) ۷ درصد ۲۲۰۰ (ب) ۷۰ درصد ۲۲۰۰ (پ) ۵ درصد ۲۲۰۰  
 ت) ۱۲ درصد ۲۲۰۰ (ث) ۳/۵ درصد ۲۲۰۰ (ج) ۲۱ درصد ۲۲۰۰

$$۷۷۰ \div ۵ = ۱۵۴$$

$$۷۷۰ \times ۲ = ۱۵۴۰$$

$$۷۷۰ \div ۷ = ۱۱۰$$

$$۷۷۰ \div ۱۰ = ۷۷$$

$$۱۵۴ \times ۲ = ۳۰۸$$

$$۱۵۴ \times ۳ = ۴۶۲$$

الف) ۷ درصد، یک پنجم ۳۵ درصد است یعنی:

ب) ۷۰ درصد، دو برابر ۳۵ درصد است پس:

پ) ۵ درصد، یک هفتم ۳۵ درصد است یعنی:

ت) ۳/۵ درصد، یک دهم ۳۵ درصد است یعنی:

ث) ۱۴ درصد، دو برابر ۷ درصد است یعنی:

ج) ۲۱ درصد، سه برابر ۷ درصد است یعنی:

۴) هر عدد در ستون اول جدول زیر با توصیفی در ستون دوم بیان شده است. هر عدد را به توصیف آن ارتباط دهید و برای هر یک، مثالی بیاورید.

| درصد             | توصیف   | مثال   |
|------------------|---|--|
| ۲۵٪              | من نصف طبق هستم                               | کتری از شاکل طفل که رنگ شده  |
| ۵۰٪              | من با یک نفرم                                 | نسبت هر کلاه به خودکن  |
| ۲۰٪              | من از یک چهارم کمتر و من از یک دهم بیشتر هستم | نسبت شربت به آب در یک نوشیدنی که برای هر ۵ لیتر آب نیو لیتر شربت کافی است        |
| ۱٪               | من کمتر از یک درصد                            | شکلی را با یک دانه زمین هر پرتاب یک سنگ  |
| ۹۰٪              | من از نود کمتر و از یک چهارم بیشترم           | نسبت شربت به آب در یک نوشیدنی که برای هر ۱۰ لیتر آب ۰ از ۳ لیتر شربت استفاده شده |
| ۹۰۰٪             | من از نود کمترم                               | شکلی و دیگری یک نفر در فرجه کشی که بین ۲۰۰ نفر هم شانس انجام می شود              |
| ۳۰۰٪             | من یک دهم یک دهم هستم                         | شکلی خروج یک چهارم عایی از طرف شمال ۱۰۰۰ نفره                                    |
| $\frac{۱۰}{۱۰۰}$ | من از یک بیشترم                               | نسبت من یک نفر ۴۰ ساله به هزار نفر یک ساله ای                                    |

۵) سعید گفت اگر به عددی ۱۰ تا اضافه کنیم و سپس ۱۰ تا از حاصل کم کنیم، همان عدد قبلی به دست می‌آید. حالا اگر ۱۰٪ عددی را به آن اضافه کنیم و سپس ۱۰٪ حاصل را از آن (حاصل) کم کنیم، آیا همان عدد اول به دست می‌آید؟ با یک مثال عددی، پاسخ سؤال سعید را به دست آورید.

عدد ۱۰۰ را در نظر می‌گیریم ۱۰ درصد آن عدد ۱۰ است که اگر اضافه شود حاصل ۱۱۰ خواهد بود و ۱۰ درصد این عدد ۱۱ است که اگر از ۱۱۰ کم کنیم حاصل ۹۹ خواهد بود. این گونه محاسبات در مورد درصد نیز از اشتباهات رایج می‌باشد که ناشی از مقایسه کردن آن با اضافه و کم کردن یک عدد به عدد دیگر است در حالی که در مرحله اول درصدی از ۱۰۰ و حال آنکه در مرحله دوم درصدی از ۱۱۰ حساب می‌شود که مقدار آنها متفاوت است بنابراین مقدار افزوده شده با مقدار کم شده مساوی نیست. می‌توان از هنجریان خواست با عوض کردن مراحل (یعنی ابتدا درصدی را کم کرده و سپس همان درصد را اضافه کنیم) پاسخ را با قسمت قبل مقایسه کرده و در مورد آن توضیح دهند.

۶) درصدی بنویسید که از  $\frac{1}{4}$  بیشتر و از  $\frac{1}{3}$  کمتر باشد.

در این سؤال دو مطلب مورد توجه است اول: سؤالی که بیش از یک پاسخ دارد دوم: سؤالی که بیش از یک راه حل درست دارد (پرورش تفکر واگرا) مثلاً یک راه حل بیان کسر به صورت درصد (که با توجه به کسرهایی داده شده محاسبه درصد نیز به صورت ذهنی و بدون محاسبه قابل انجام است) و یافتن درصد مورد نظر و راه دوم یافتن کسری بین این دو کسر و تبدیل کسر به درصد. در این سؤال هر درصد بین ۵۰ درصد و ۷۵ درصد جواب است.

۷) سمود گفت: من می‌توانم مسئله‌های مربوط به درصد را به صورت ذهنی و خیلی سریع حساب کنم. سعید پرسید: مثلاً سریع بگو ۹۰ درصد ۵۵ چقدر می‌شود؟ او به سرعت گفت:  $49\frac{1}{2}$  -  $55 \times 0.9$ . سعید پرسید: ۶۰ درصد ۱۴۰۰ چقدر می‌شود؟ سمود گفت:  $84 \times 0.6$ . سعید پرسید: ۲۵٪ عدد ۴۴ چقدر می‌شود؟ سمود گفت:  $11 \times 0.4$ . سعید گفت: ۲۵٪ درصد حقوق من ۱۲۰,۰۰۰ تومان است. حقوق من چقدر است؟ او به سرعت جواب داد: ۴۸۰,۰۰۰ تومان. در هر حالت، روش محاسبه سمود را توضیح دهید.

● با توجه به اینکه ۹۰ درصد به اندازه ۱۰ درصد با ۱۰۰ درصد فاصله دارد ابتدا ۱۰ درصد ۵۵ را حساب کرده که ۵/۵ است و حاصل را از ۵۵ (که ۱۰۰ درصد مقدار است) کم کرده است.

● ۶ درصد همان ۶ برابر ۱٪ است که کافی است ۱٪ از ۱۴۰۰ یعنی ۱۴ را در ۶ ضرب کنیم.

● ۲۵٪ هر عددی  $\frac{1}{4}$  آن است یعنی باید عدد بر ۴ تقسیم شود.

● ۲۵٪ هر عددی،  $\frac{1}{4}$  آن است بنابراین خود عدد، ۴ برابر ۲۵٪ عدد است. پس باید در ۴ ضرب شود تا کل حقوق به دست آید.

۸ الف) ۴۹/۵، چند درصد ۳۳ است؟  
ب) چند درصد از ۹۰، برابر با ۸۰ است؟

$$\frac{49}{5} = \frac{X}{100} \times 33 \rightarrow \frac{X}{100} = \frac{49/5}{33} \rightarrow X = 150 \rightarrow 150\% \quad \text{الف)}$$

برای حل معادله  $\frac{49}{5} = \frac{X}{100} \times 33$  در صورتی که هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند  $\frac{X}{100}$  را  $a$  گرفته و معادله  $\frac{49}{5} = a \times 33$  را بر حسب  $a$  حل کرده و سپس  $a$  را  $\frac{X}{100}$  گرفته و  $x$  را به دست آورند.

ب) چند درصد از ۹۰ برابر با ۸۰ است؟

$$80 = \frac{X}{100} \times 90 \rightarrow \frac{X}{100} = \frac{80}{90} \rightarrow X = 88/89 \rightarrow 88/89\%$$

۱۹) جمع می‌خواهد نمونه ریاضی خود را از ۱۴ به ۱۸ برساند. او فکر می‌کند اگر در امتحان بعدی ۴٪ بیشتر به سوال‌ها پاسخ درست بدهد، به هدف خود می‌رسد. آیا او درست فکر کرده است؟ توضیح دهید چرا.

$$18 - 14 = 4 \rightarrow \frac{4}{14} \times 100 = 28/57 \rightarrow 28/57\% \approx 29\%$$



واضح است که پاسخ درست نیست و جعفر مقدار افزایش نمره را با درصد افزایش آن اشتباه گرفته است. راه حل دیگر این مسئله به صورت زیر است که ابتدا ۴ درصد ۱۴ را حساب می‌کنیم یعنی  $0.04 \times 14 = 0.56$  که نمره او  $14 + 0.56 = 14.56$  خواهد شد نه ۱۸.

|   |  |
|---|--|
| <p>۱۰- نرگس از فروشگاه الف و ناهید از فروشگاه ب دو کیف گاندا یکسخت خریدند. قیمت اولیه کیف در هر دو فروشگاه برابر بود. اما نرگس هیچ فروشی دو فروشگاه را نمی‌دید.</p> |  |
| <p><b>فروشگاه الف</b></p> <p>۲۵ درصد تخفیف ۱۰۰ درصد تخفیف داده به مشتریان با گذشتی مقداری</p>   | <p><b>فروشگاه ب</b></p> <p>۲۵ درصد تخفیف ۲۵ درصد تخفیف داده به فروش می‌رساند</p> |
| <p>گاندو یک کیف بیشتر از پرداخته شد؟ نرگس یا ناهید؟</p>   |  |

می‌توان با یک مقدار معین (به عنوان قیمت کفش) این دو تخفیف را با هم مقایسه کرد:

اگر قیمت کیف ۴۰۰۰۰ تومان باشد:

در فروشگاه الف (خرید نرگس): مقدار تخفیف:  $0.35 \times 40000 = 14000$

مقدار پول پرداخت شده توسط نرگس:  $40000 - 14000 = 26000$

در فروشگاه ب (خرید ناهید): مقدار تخفیف اول:  $0.25 \times 40000 = 10000$

قیمت پس از تخفیف اول:  $40000 - 10000 = 30000$

مقدار تخفیف دوم:  $0.10 \times 30000 = 3000$

مقدار پول پرداخت شده توسط ناهید:  $30000 - 3000 = 27000$

ملاحظه می‌شود ناهید مبلغ بیشتری پرداخته است. در اینجا می‌توان از هنرجویان خواست تا علت این تفاوت را توضیح دهند یا از آنها سؤال کرد اگر ابتدا تخفیف ۱۰ درصدی و سپس تخفیف ۲۵ درصدی اعمال شود نتیجه چگونه است؟ در صورتی که هنرجویان آمادگی داشته باشند می‌توان این مقایسه را به طور کلی و با استفاده از یک پارامتر نظیر  $\alpha$  انجام داد.



## فعالیت آموزشی

کلاس ۳

۱) ۰/۲٪ از ۳ میلیون نفر، چند نفر می‌شود؟

۲) ۵ نفر از ۳۰۰۰ نفر چند درصد این نفرانند؟

۳) ۱۴٪ از ۴۰۰ لیتر آب، چند لیتر آب است؟

۴) وزن صابون در هنگام تولد ۳ کیلوگرم بوده و در ده سالگی ۴ کیلوگرم است. وزن او در ده سالگی چند درصد وزن نوزادش است؟

۵) مثالی بیان کنید که رشد ۱۴۴ درصدی را نشان دهد آن را تفسیر کنید.

۶) مثالی بیان کنید که کاهش ۱۸٪ را نشان دهد آن را تفسیر کنید.

# ایران توشه

## توشه ای برای موفقیت

۱)  $\frac{0/2}{100} = \frac{2}{10000}$  یعنی ۰/۲٪ در نتیجه داریم:  $3000000 \times \frac{2}{10000} = 60000$

۲)  $x \times 4000 = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4000} \Rightarrow x = 0/00125 \Rightarrow 0/125\%$

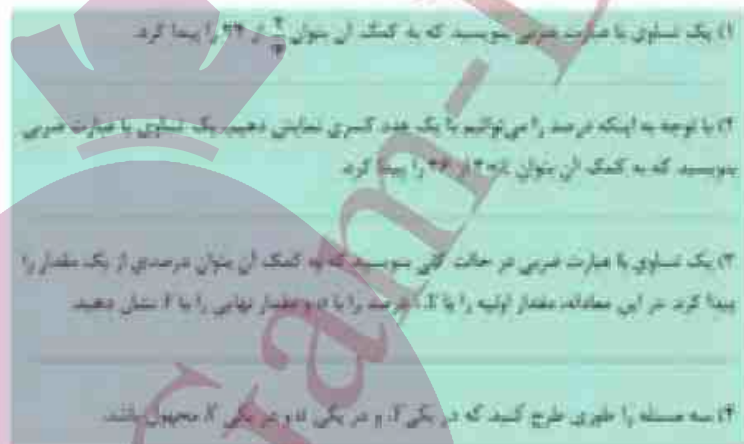
۳)  $\frac{140}{100} \times 400 = 560$

۴)  $x \times 3 = 21 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow 700\%$

۵) می‌توانیم از مثال جمعیت استفاده کنیم. مثلاً، جمعیت یک کشور ۵ میلیون و جمعیت کشوری دیگر ۶ میلیون و دویست هزار نفر است. جمعیت کشور دوم چند

درصد جمعیت کشور اول است؟  
 ۶. مثلاً، قیمت یک نوع گوشی در فروشگاه ۵۸۰ هزار تومان و قیمت تولید آن در کارخانه ۵۷۵۳۶۰ تومان است.  
 قیمت تولید این گوشی در کارخانه چند درصد کمتر از قیمت آن در فروشگاه است؟

## فعالیت آموزشی



# ایران توشه

$$\frac{2}{3} \times 24 = 16$$

$$\frac{30}{100} \times 36 = \frac{10}{8} \times 36 = 10.8$$

۳.  $a \times x = y$  (در اینجا  $a$  به صورت اعشاری یا کسری نشان داده می شود).
۴. مسئله ۱- در یک فروشگاه کفش کالاها با ۲۰٪ تخفیف عرضه می شود. اگر قیمت اولیه یک کفش ۶۰۰۰۰ تومان باشد، خریدار چقدر تخفیف می گیرد؟
- مسئله ۲- در همان فروشگاه قیمت کفشی ۳۰۰۰ تومان کاهش یافته است. قیمت اولیه کفش چقدر بوده است؟
- مسئله ۳- جمعیت یک کشور برابر ۱۲ میلیون نفر بوده است. اگر پس از چند سال جمعیت این کشور ۱۴ میلیون و ۴۰۰ هزار نفر باشد، نسبت جمعیت سال دوم به جمعیت در سال اول چند درصد است؟

علی در یک تعمیرگاه لوازم خانگی کار می‌کند. به ازای هر دستکاری که تعمیر می‌شود ۲۰٪ هزینه تعمیر را علی و بقیه را صاحب تعمیرگاه دریافت می‌کند.

الف) معادله‌ای بنویسید که رابطه بین هزینه‌های دریافتی و پولی را که علی دریافت می‌کند نشان دهد.

ب) اگر علی در این ماه ۷۵۰,۰۰۰ تومان دریافت کرده باشد، صاحب فروشگاه چقدر دریافت کرده است؟

$$\text{الف) } y = 0.2x = \frac{2}{10}x$$

ب) راه اول: دریافتی صاحب فروشگاه از  $x$  ریال هزینه دریافتی:  $x - \frac{2}{10}x = \frac{8}{10}x$   
بنابراین داریم:

$$\frac{2}{10}x = 750000 \rightarrow x = \frac{750000}{\frac{2}{10}} \rightarrow \frac{3}{10}x = \frac{3}{10} \times \frac{750000}{\frac{2}{10}} = \frac{225000}{2}$$

راه دوم: می‌توان با توجه به سهم علی (که ۲۰ درصد است) و سهم صاحب مغازه (که ۸۰ درصد می‌شود) نسبت سهم صاحب مغازه به سهم علی را از ۸۰ که ۲۰ به ۲ می‌باشد را به صورت کسری نوشت: یعنی  $\frac{8}{2} = \frac{4}{1}$  و از آن در محاسبه سهم صاحب مغازه استفاده کرد یعنی:

$$\frac{4}{1} \times 750000 = \frac{3000000}{1}$$

مسئله‌ها

۱- جدول زیر را کامل کنید

| درصد            | به صورت کسر     | به صورت اعشاری |
|-----------------|-----------------|----------------|
| ۳۷/۵٪           | $\frac{۳}{۸}$   | ۰/۳۷۵          |
| ۱۱۰٪            | $\frac{۱۱}{۱۰}$ | ۱/۱            |
| ۱٪              | $\frac{۱}{۱۰۰}$ | ۰/۰۱           |
| ۰/۵٪            | $\frac{۱}{۲۰۰}$ | ۰/۰۰۵          |
| ۱۲/۵٪           | $\frac{۱}{۸}$   | ۰/۱۲۵          |
| $\frac{۲}{۵}\%$ | $\frac{۱}{۲۵۰}$ | ۰/۰۰۴          |

۲/۷ یک مقدار بیشتر است یا ۰/۷ صابن مقدار ۴ چر؟

## ایران توانش

۰/۷ درصد یعنی  $\frac{۰/۷}{۱۰۰}$  که همان  $\frac{۷}{۱۰۰۰}$  است، که مقدار آن از  $\frac{۷}{۱۰۰}$  کمتر است.

۳ یک نوع کالا در فروشگاههای الف و ب با تخفیف ارائه شده است:

در فروشگاه الف قیمت پس از تخفیف ۱۵۰,۰۰۰ ریال و در فروشگاه ب قیمت قبل از تخفیف ۲۰۰,۰۰۰ ریال می باشد. اگر درصد تخفیف فروشگاه الف برابر ۲۰٪ و فروشگاه ب برابر ۲۵٪ باشد، الف) قبل از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه تر است؟

ب) بعد از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه تر است؟

با توجه به اینکه فروشگاه ۲۰٪ تخفیف می‌دهد پس ۸۰٪ قیمت هر کالا باید پرداخت شود. بنابراین داریم:

$$0.8 \times x = 150000$$

فروشگاه الف) قیمت قبل از تخفیف:

$$150000 + 0.2 \times 150000 = 180000$$

فروشگاه ب) قیمت پس از تخفیف:

$$200000 \times 0.75 = 150000 \rightarrow 200000 - 50000 = 150000$$

واضح است قبل از تخفیف خرید از فروشگاه الف مقرون به صرفه‌تر است و بعد از تخفیف قیمت در هر دو فروشگاه یکسان است.

ایران توشه  
توشه‌ای برای موفقیت



## فعالیت آموزشی

فرض کنید ۱۰۰ تن در حال گرسنه شدن هستند. ۱۰ تومان بود. سوال این کالا با ۱۵٪ افزایش قیمت به فروش میرسد. مقدار افزایش قیمت کالا را بر حسب % بنویسید.

« مقدار افزایش قیمت کالا »

اگر قیمت جدید کالا را با ۱۰٪ کاهش قیمت قبلی به ازای هر حساب ۱۰۰ بنویسید که بتوانید به کمک آن قیمت جدید کالا را حساب کنید.

به کمک معامله بالا فرض افزایش قیمت را بر حسب % و ۱۰ بنویسید.

۱۵٪ تا ۱۰٪

آلن تغییر قیمت ۱۰٪ باشد. فرض کنید تغییر قیمت را بر حسب قیمت اولیه و قیمت جدید بنویسید.

ایران توشه  
توشه ای برای موفقیت

۱ مقدار افزایش کالا:

$$0/15 \times x = 0/15x$$

$$y = x + 0/15x = 1/15x$$

$$0/15 = \frac{y-x}{x}$$

$$\frac{a}{100} = \frac{\text{قیمت اولیه} - \text{قیمت جدید}}{\text{قیمت اولیه}}$$

هر کدام از مثال های ارائه شده در این قسمت انواع مختلفی از مسائل مرتبط با درصد تغییر را در زمینه واقعی مطرح می کند. در اولین مثال، مفهوم درصد تغییر با علامت مثبت (که نشان دهنده رشد است) ارائه شده و دومین مثال مربوط به درصد تغییری با علامت منفی است (که کاهش مقدار را نشان می دهد). در سومین مثال با ارائه افزایش دو کمیت (طول و عرض)، درصد تغییر کمیت مرتبط با آن (مساحت) مورد نظر است. در این مسئله برای محاسبه درصد تغییر علاوه بر استفاده از رابطه درصد تغییر لازم است از معادله مساحت بر حسب طول و عرض استفاده شود. در آخرین مثال نیز با ارائه درصد تغییر (افزایش و کاهش) و داشتن مقادیر اولیه، مقدار ثانویه خواسته شده است. دبیران محترم می توانند در صورتی که هنرجویان آمادگی داشته باشند، مسائل مختلفی در زمینه واقعی مطرح کنند و از هنرجویان بخواهند با حل آنها و تفسیر جواب ها درک بهتری از موضوع درصد تغییر پیدا کنند.

تمرین ۶

۱) ابعاد یک پارک به طول  $x$  و عرض  $y$  را،  $15\%$  افزایش داده اند. درصد تغییر مساحت این پارک را محاسبه کنید.

۲) قیمت بلیت یک موزه در ابتدای سال  $20\%$  افزایش داشته و پس از سه ماه، دوباره  $10\%$  افزایش یافته است. قیمت بلیت این موزه در سال گذشته  $1,000$  تومان بوده است. (الف) قیمت بلیت این موزه اکنون چقدر است؟

ب) درصد تغییر قیمت بلیت این موزه نسبت به سال قبل چقدر است؟ (توجه:  $20\%$  نیست!)

۱ مساحت پارک قبل از افزایش:  $xy$

مقدار افزایش عرض:  $y \times 10\% = 0/1y$

مقدار افزایش طول:  $x \times 10\% = 0/1x$

عرض پس از افزایش:  $0/1y + y = 1/1y$

طول پس از افزایش:  $0/1x + x = 1/1x$

$$1/1x \times 1/1y = 1/21xy$$

مساحت پس از افزایش:

$$\frac{1/21xy - xy}{xy} \times 100 = 21\%$$

درصد تغییر:

$$10000 \times 20\% = 2000$$

$$10000 + 2000 = 12000$$

الف) مقدار افزایش قیمت بلیط ابتدای سال:

قیمت ابتدای سال:

$$12000 \times 10\% = 1200$$

$$12000 + 1200 = 13200$$

مقدار افزایش قیمت پس از سه ماه:

قیمت بلیط پس از سه ماه:

ب) نسبت تغییر:  $\frac{13200 - 10000}{10000} = 32\%$  یعنی ۳۲ درصد افزایش یافته است.

## مسئله‌ها

۱) در هر برانتز عبارت درست را مشخص کنید.  
الف) اگر قیمت جدید یک کالا نسبت به قیمت اولیه افزایش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/منفی) و اگر کاهش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/منفی) می‌باشد.  
ب) اگر قیمت کالایی ۵۰۰۰ تومان باشد و قیمت آن به ۷۰۰۰ تومان رسیده باشد درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰، بین ۱ و ۱۰۰، کوچک‌تر از ۱) و اگر قیمت آن به ۱۲۰۰۰ تومان رسیده باشد درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰، کوچک‌تر از ۱۰۰) می‌باشد.

الف) قسمت اول: مثبت، قسمت دوم: منفی.

ب) قسمت اول: یعنی ۲۷ درصد  $(\frac{27}{100} \times 100)$  افزایش داشته است که عددی بین ۱ و ۱۰۰ است.

$$\frac{7000 - 5500}{5500} = \frac{1500}{5500} = \frac{3}{11} \approx 0.27$$

قسمت دوم: که عددی بزرگ‌تر از ۱۰۰ است. یعنی ۱۱۸ درصد  $(\frac{118}{100} \times 100)$  افزایش داشته است.

$$\frac{12000 - 5500}{5500} = \frac{6500}{5500} = \frac{13}{11} \approx 1.18$$

۲) اگر قیمت اولیه یک کالا با  $x$  و قیمت جدید آن با  $y$  مشخص شده باشد معادله  $y = \frac{1}{4}x$  را بپایه بین قیمت اولیه و قیمت جدید این کالا را نشان می‌دهد.  
الف) درصد تغییر را به دست آورید.  
ب) کالایی که در سال گذشته ۱۰۰ هزار تومان بوده است که امسال ۷۵ تومان است؟  
پ) کالایی که امسال ۱۰۰ هزار تومان است در سال گذشته چند تومان بوده است؟

$$\frac{y-x}{x} = \frac{\frac{1}{2}x - x}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

(الف)

یعنی این کالا ۵۰ درصد کاهش قیمت داشته است.

$$-\frac{1}{2} = \frac{y-x}{x} = \frac{y-100000}{100000} \rightarrow y = 50000$$

(ب)

$$-\frac{1}{2} = \frac{y-x}{x} = \frac{100000-x}{x} \rightarrow x = 200000$$

(پ)

۳) قیمت ۴ نوع کالا در سالهای الف و ب و پ و ت در سال جاری نسبت به سال گذشته طبق جدول زیر تغییر داشته است.

اعداد جدول را تکمیل کنید.

بدا این چهار کالا را در یک سبد به نام سبد ۳۳ در نظر بگیرید. درصد تغییر قیمت این سبد ۳۳ چقدر است؟

| نوع کالا       | الف    | ب      | پ      | ت      |
|----------------|--------|--------|--------|--------|
| قیمت سال گذشته | ۱۰۰۰۰۰ | ۱۲۵۰۰۰ | ۱۵۰۰۰۰ | ۲۰۰۰۰۰ |
| درصد تغییر     | ۱۵٪    | ۲۰٪    | ۱۰٪    | ۱۰٪    |

ایران توانسته

| نوع کالا | قیمت سال گذشته | قیمت امسال | درصد تغییر |
|----------|----------------|------------|------------|
| الف      | ۱۰۰۰۰۰         | ۱۱۵۰۰۰     | ۱۵٪        |
| ب        | ۱۲۵۰۰۰         | ۱۵۰۰۰۰     | ۲۰٪        |
| پ        | ۱۵۰۰۰۰         | ۱۶۵۰۰۰     | ۱۰٪        |
| ت        | ۲۰۰۰۰۰         | ۱۸۰۰۰۰     | ۱۰٪        |
| کل       | ۵۵۰۰۰۰         | ۵۸۰۰۰۰     | ۵/۴۵٪      |

۴ طول هر ضلع یک مکعب بر اثر گرما ۱۰ واحد افزایش یافته است. اگر طول ضلع اولیه این مکعب ۱ واحد باشد، درصد تغییر حجم مکعب را حساب کنید.

توضیح:

در این مسئله می خواهیم با مشخص بودن تغییرات طول ضلع مکعب، تغییرات حجم را به صورت درصد تغییر بیان کنیم.

$\frac{(1/1)^3 - 1^3}{1^3} = 0/331$  یعنی ۳۳/۱ درصد  $(0/331 \times 100)$  افزایش داشته است.

ایران توشه  
توشه ای برای موفقیت



## فصل ۳

### معادله درجه دوم

ایران توشه

توشه ای برای موفقیت



# ایمان توتنه

## توشه ای برای موفقیت

- (۱) با استفاده از رابطه  $4000 - 40000 = 36000$  مقدار  $x$  را بر حسب  $y$  بدست آورید.
- (۲) درآمد حاصل از فروش  $x$  کالا با قیمت  $y$  را با  $R$  نشان دهید و معادله درآمد را تشکیل دهید.
- (۳) معادله درآمد را بر حسب  $x$  بنویسید.
- (۴) چند جمله ای درآمد بر حسب  $x$  را ترسیم کنید.
- (۵) اگر درآمد حاصل از فروش معادله به همین تومان باشد، چه معادله ای برای  $x$  بدست می آید؟

$$p = \frac{60000 - X}{300}$$

$$R = p \cdot X$$

$$R = \left( \frac{60000 - X}{300} \right) X = \frac{60000X - X^2}{300}$$

۴ از درجه ۲ است.

$$\frac{60000X - X^2}{300} = 30000000 \Rightarrow X^2 - 60000X + 9000000000 = 0$$

در ادامه تعریف معادله‌های درجه دوم ارائه شده است و مثال‌هایی از آن در زمینه ریاضی و زمینه واقعی آمده است.

نام مسئله:

در مثال ۳، از معادله  $100 = 2(x + y) + 100$  مقدار  $x$  را بر حسب  $y$  حساب کنید و معادله‌ای بر حسب  $y$  بنویسید. معادله به دست آمده بر حسب  $x$  و معادله بر حسب  $y$  چه شباهتی با هم دارند؟

$$2(x + y) = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow x = 50 - y$$

$$xy = 600 \Rightarrow (50 - y)y = 600 \Rightarrow y^2 - 50y + 600 = 0$$

متوجه می شویم که ضرایب عددی معادله درجه دوم پدید آمده در مثال ۲ با کار در کلاس یکسان است و فقط نام متغیر عوض می شود. آیا می‌توانید دلیل این یکسانی دو معادله را توضیح دهید؟

فصل ۲



رابطه طول ضلع یک مربع با محیط آن و رابطه طول ضلع یک مربع با مساحت آن را در نظر بگیرید.  
طول ضلع مربع را با  $x$  و محیط آن را با  $P$  و مساحت آن را با  $S$  نشان دهید.

(۱) رابطه  $P$  و  $x$  و همچنین رابطه  $S$  و  $x$  را با دو معادله بنویسید.

(۲) جدول زیر را تکمیل کنید.

| طول ضلع مربع | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|--------------|---|---|---|---|---|
| محیط مربع    |   |   |   |   |   |
| مساحت مربع   |   |   |   |   |   |

(۳) نقاط به دست آمده در جدول را بر روی دستگاه مختصات زیر نشان دهید.



شکل (۱)



شکل (۲)

(۴) جدولی رسم کنید که میزان افزایش محیط و مساحت مربع را وقتی طول ضلع آن از ۱ به ۲، از ۲ به ۳ و از ۳ به ۴ به ۵ افزایش می‌یابد، نشان دهد.

(۵) آیا نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

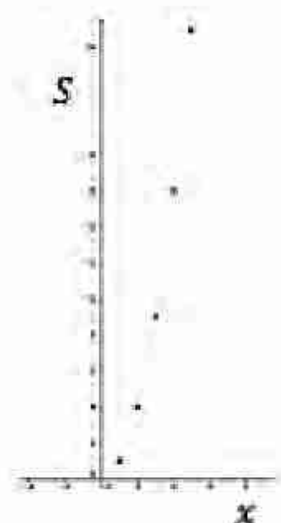
(۶) آیا نسبت افزایش مساحت مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

(۷) می‌خواهیم نقاط شکل (۱) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همه این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

(۸) می‌خواهیم نقاط شکل (۲) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم به یک خط راست همه این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

مساحت  $S = x^2$  و محیط  $P = 4x$

|                  |   |   |    |    |    |
|------------------|---|---|----|----|----|
| x (طول ضلع مربع) | ۱ | ۲ | ۳  | ۴  | ۵  |
| P (محیط مربع)    | ۴ | ۸ | ۱۲ | ۱۶ | ۲۰ |
| S (مساحت مربع)   | ۱ | ۴ | ۹  | ۱۶ | ۲۵ |



|                    |           |           |           |           |
|--------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| x (طول ضلع مربع)   | از ۱ به ۲ | از ۲ به ۳ | از ۳ به ۴ | از ۴ به ۵ |
| میزان افزایش محیط  | ۴         | ۴         | ۴         | ۴         |
| میزان افزایش مساحت | ۳         | ۵         | ۷         | ۹         |

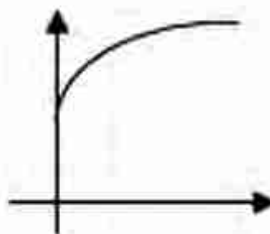
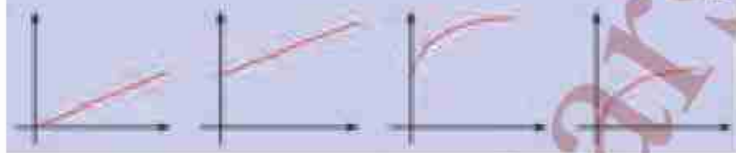
۵. بله، به ازای هر ۱ واحد افزایش طول ضلع ۴ واحد محیط اضافه می شود.
۶. خیر، به ازای ۱ واحد افزایش طول ضلع افزایش مساحت ثابت نیست و بستگی به مقدار طول ضلع دارد.
۷. بله، زیرا میزان افزایش محیط یکسان است.
۸. خیر، زیرا میزان افزایش مساحت یکسان نیست.



تمرین ۲



فرض کنید وزن و محور افقی نشان دهنده زمان بر حسب ماه و محور عمودی نشان دهنده وزن یک انسان بر حسب کیلوگرم است. کدام یک از نمودارهای زیر می تواند نمودار وزن یک انسان در طول زمان باشد؟



رابطه وزن انسان و زمان خطی نیست، پس دو نمودار سمت چپ جواب نیست. در هنگام تولد وزن انسان صفر نیست، پس نمودار سمت راست هم جواب نیست. نمودار روبه رو جواب مسئله است زیرا میزان تغییرات وزن انسان نسبت به تغییرات زمان ثابت نیست و در ابتدای تولد نیز انسان مقداری وزن دارد.

تمرین ۳



یک عدد حقیقی و مجذور آن را در نظر بگیرید. عدد حقیقی دلخواه را با  $x$  و مجذور آن  $(x^2)$  را با  $y$  نشان دهید.

۱) رابطه بین  $x$  و  $y$  را با یک معادله نشان دهید.

۲) جدول زیر را کامل کنید (برای محاسبه می توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

| $x$ | -2 | -1.5 | -1 | -0.5 | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|-----|----|------|----|------|---|-----|---|-----|---|
| $y$ |    |      |    |      |   |     |   |     |   |

۳) نقاط جدول ضلع اول را روی محورهای مختصات زیر نشان دهید و نمودار رابطه  $y = x^2$  را رسم کنید.



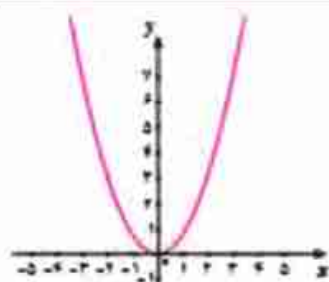
تعمیق درک روابط غیرخطی، تقویت مهارت رسم نمودار  $y = x^2$ ، تقویت مهارت کار با ماشین حساب

$$y = x^2$$

۱

۲

|     |   |        |        |        |        |   |   |   |        |        |        |        |   |
|-----|---|--------|--------|--------|--------|---|---|---|--------|--------|--------|--------|---|
| $x$ | ۲ | $1/8$  | $1/6$  | $1/4$  | $1/2$  | ۱ | ۰ | ۱ | $1/2$  | $1/4$  | $1/6$  | $1/8$  | ۲ |
| $y$ | ۴ | $3/24$ | $2/56$ | $1/96$ | $1/44$ | ۱ | ۰ | ۱ | $1/44$ | $1/96$ | $2/56$ | $3/24$ | ۴ |



این نقاط را در محورهای مشخص شده نمایش دهید و آنها را به هم وصل کنید و شکل دقیق تر را با استفاده از جئوجبرا رسم کنید.

هر یک ثابت پاهای یک کارگاه تولید سیم برقی ۱۴۰۰۰۰ تومان است هزینه تهیه مواد اولیه برای هر متر سیم ۹۰۰ تومان و قیمت فروش هر متر سیم ۹۰۰۰ تومان است.

۱) با توجه به این اطلاعات، جدول را تکمیل کنید.

| طول سیمهای فروخته شده (متر) | ۰ | ۱۰۰ | ۲۰۰ | ۳۰۰ | ۴۰۰ | ۵۰۰ | ۶۰۰ |
|-----------------------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| هزینه ثابت                  |   |     |     |     |     |     |     |
| هزینه متغیر                 |   |     |     |     |     |     |     |
| درآمد حاصل از فروش          |   |     |     |     |     |     |     |

۲) اگر « $x$ » طول سیمهای فروخته شده، « $h$ » هزینه تولید و « $R$ » درآمد حاصل از فروش سیم در یک خط باشد رابطه بین طول سیمهای فروخته شده و هزینه و همچنین رابطه بین طول سیمهای فروخته شده و درآمد حاصل از فروش را بنویسید.

۳) در دستگاه مختصات زاویه محور افقی، طول سیمهای فروخته شده بر حسب متر و محور عمودی هزینه تولید (متر) رسم نمودار هزینه « $h$ » و درآمد حاصل از فروش « $R$ » (تومان) را رسم کنید.

بر حسب نمودار در یک ماه در نظر گرفته شوند رابطه های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید.

۴) هر واحد محور افقی را ۱۰۰ متر و هر واحد محور عمودی را ۱۰۰۰ هزار تومان در نظر بگیرید.

- ۴) مختصات نقطه برخورد دو خط را بنویسید.
- ۵) نقطه تقاطع این دو خط چه چیزی را نشان می دهد؟
- ۶) اگر مختصات نقطه ای در هر دو معادله صدق کند، این نقطه در کجا قرار دارد؟

| طول سیم‌های فروخته شده (متر) | ۰      | ۱۰۰    | ۲۰۰    | ۳۰۰    | ۴۰۰    | ۵۰۰    | ۶۰۰    |
|------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| هزینه تولید (تومان)          | ۱۷۰۰۰۰ | ۱۷۶۰۰۰ | ۱۸۲۰۰۰ | ۱۸۸۰۰۰ | ۱۹۴۰۰۰ | ۲۰۰۰۰۰ | ۲۰۶۰۰۰ |
| درآمد حاصل از فروش (تومان)   | ۰      | ۴۰۰۰۰  | ۸۰۰۰۰  | ۱۲۰۰۰۰ | ۱۶۰۰۰۰ | ۲۰۰۰۰۰ | ۲۴۰۰۰۰ |

۱ هزینه تولید  $x$  کالا برای فروش  $C = y_1 = 170000 + 60x$

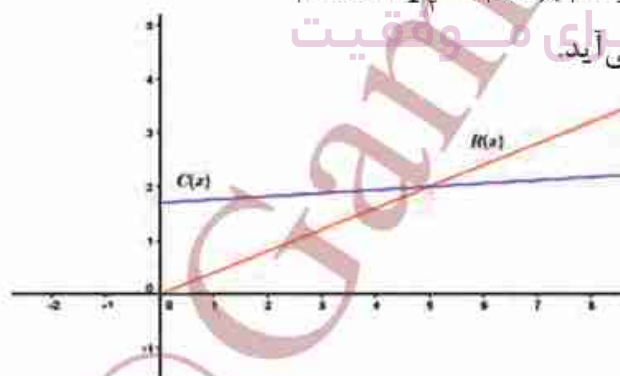
۲ درآمد حاصل از فروش  $x$  کالا  $R = y_2 = 400x$

۳ برای آنکه محورهای مختصات را با واحدهای جدید در نظر بگیریم، از آنجا که  $y$  بر حسب تومان است و می‌خواهیم  $Y$  جدید بر حسب ۱۰۰۰۰۰ تومان باشد، داریم:  $Y = y = 1000000Y$  و چون  $x$  بر حسب متر است و می‌خواهیم  $X$  جدید بر حسب ۱۰۰ متر باشد داریم  $X = x = 100X$ . با جایگذاری در رابطه‌های به دست آمده نتیجه می‌شود:

$$1000000Y_1 = 170000 + 60 \times 100X \Rightarrow Y_1 = 1/7 + 0/06X$$

$$1000000Y_2 = 400 \times 100X \Rightarrow Y_2 = 0/4X$$

با رسم نمودار این دو خط، شکل زیر به دست می‌آید.



۴ با استفاده از شکل می‌توان دید، مختصات

نقطه برخورد  $\begin{bmatrix} 5 \\ 1/2 \end{bmatrix}$  است. در واحدهای اصلی،

این مختصات به معنای ۵۰۰ کالا و قیمت ۲۰۰۰۰۰ تومان است.

۵ یعنی با تولید تعداد ۵۰۰ کالا هزینه تولید

و درآمد حاصل از فروش یکسان می‌شود ولی

بعد از آن چون نمودار درآمد بالای نمودار هزینه قرار می‌گیرد کارگاه شروع به سوددهی می‌کند یعنی حداقل ۵۰۰ کالا باید تولید شود تا ضرر نکند.

چنین نقطه‌ای روی نمودار هر دو خط است، یعنی نقطه برخورد این دو خط است.

با این فعالیت مفهوم نقطه برخورد و اهمیت آن ذکر می‌شود.  
 نکته: دبیران محترم بیان کنند که نتیجه این فعالیت دو طرفه است یعنی اگر مختصات نقطه‌ای در معادله هر دو خط صدق کند آن نقطه همان نقطه برخورد یا نقطه تلاقی نمودارهای دو خط است و بر عکس مختصات نقطه برخورد دو خط، در معادله دو خط صدق می‌کند.  
 با قرار گرفتن هنرجو در یک وضعیت مسئله‌گونه دیگر از زندگی روزمره، آنها را در درک مفهوم نقطه برخورد ارزیابی می‌کنیم:

یک کارگاه تولید نیز تحریر از هر ماه برای پرداخت معارج دستگاهی، سیمون است. هر ماه تولید می‌کند. هزینه مواد اولیه برای هر سیمون ۲۰,۰۰۰ تومان و اجرت فروش هر سیمون ۳۰,۰۰۰ تومان است.

۱) جدول زیر را تکمیل کنید.

| تعداد سیمون | هزینه مواد اولیه | اجرت فروش | درآمد   |
|-------------|------------------|-----------|---------|
| ۰           | ۰                | ۰         | ۰       |
| ۱           | ۲۰,۰۰۰           | ۳۰,۰۰۰    | ۳۰,۰۰۰  |
| ۲           | ۴۰,۰۰۰           | ۶۰,۰۰۰    | ۶۰,۰۰۰  |
| ۳           | ۶۰,۰۰۰           | ۹۰,۰۰۰    | ۹۰,۰۰۰  |
| ۴           | ۸۰,۰۰۰           | ۱۲۰,۰۰۰   | ۱۲۰,۰۰۰ |
| ۵           | ۱۰۰,۰۰۰          | ۱۵۰,۰۰۰   | ۱۵۰,۰۰۰ |

۲) اگر در یک ماه تعداد سیمون تولید شده  $x$ ، هزینه تولید  $C$  و درآمد حاصل از فروش  $R$  در نظر گرفته شود، رابطه بین تعداد سیمون و هزینه تولید و همچنین رابطه بین تعداد سیمون و درآمد حاصل از فروش در یک ماه را بنویسید.

۳) در دستگاه مختصات زیر اگر محور افقی، تعداد سیمون تولید شده و محور عمودی، هزینه تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب عدد هزار تومان در یک ماه باشد، رابطه‌های بالا را بر این دستگاه مختصات رسم کنید.

۴) مختصات نقطه برخورد دو خط بالا را بیابید.

۵) نقطه تقاطع دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟



۱ قیمت‌ها و هزینه‌ها را بر حسب هزار تومان می‌نویسیم.

| تعداد میزهای تولید شده در یک ماه       | ۰   | ۱۰  | ۲۰  | ۳۰  | ۴۰   |
|--|-----|-----|-----|-----|------|
| هزینه تولید (بر حسب هزار تومان)        | ۳۲۰ | ۵۲۰ | ۷۲۰ | ۹۲۰ | ۱۱۲۰ |
| درآمد حاصل از فروش (بر حسب هزار تومان) | ۰   | ۳۰۰ | ۶۰۰ | ۹۰۰ | ۱۲۰۰ |

۲  $R = 30000x$  ,  $C = 320000 + 20000x$

۳ با تغییر واحد قیمت بر حسب صد هزار تومان رابطه‌های بالا به صورت زیر در می‌آیند.

$R = 0/3x$  ,  $C = 3/2 + 0/2x$



ایران توشه  
توشه‌ای برای موفقیت

البته در نمودار واقعی نقطه‌ها جدا از هم هستند.

۴ از روی شکل نقطه برخورد با تبدیل واحدها به ازای  $\begin{bmatrix} 32 \\ 960000 \end{bmatrix}$  می‌دهد که

به معنی ۳۲ میز و ۹۶۰ هزار تومان است که با حل معادله زیر نیز همین جواب به دست می‌آید.

$$320 + 20x = 30x \Rightarrow 10x = 320$$

$$x = 32 \Rightarrow R = 30 \times 32 = 960$$

۵ یعنی با تولید ۳۲ میز هزینه کارگاه و درآمد حاصل از فروش این تعداد میز یکسان است و بعد از آن سوددهی شروع می‌شود.



۱) جدول زیر را تکمیل کنید.

| $x$ | $x^2$ | $2x+3$ |
|-----|-------|--------|
| ۲   | ۴     | ۷      |
| ۱   | ۱     | ۵      |
| ۰   | ۰     | ۳      |
| ۱   | ۱     | ۵      |
| ۲   | ۴     | ۷      |
| ۳   | ۹     | ۹      |

۲) با استفاده از جدول بالا، نمودار  
مماسهای  $x=0$  و  $y=4$  را  
در دستگاه مختصات روبرو رسم کنید.

۳) مختصات محل برخورد این دو نمودار را بیابید.

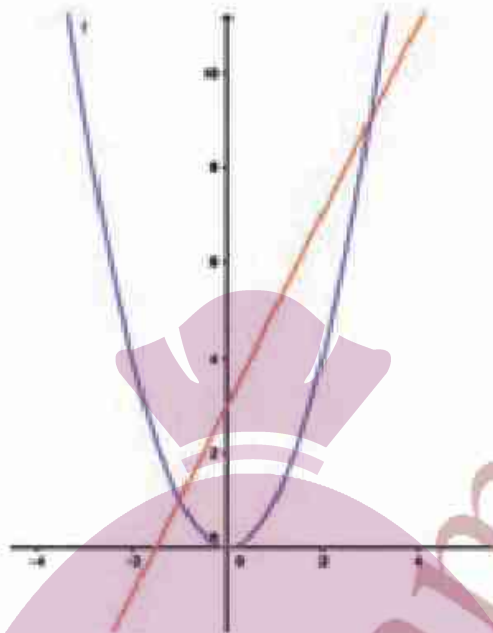
۴) آیا مختصات نقاط برخورد خط و منحنی در هر دو معادله صدق می کنند؟

۵) آیا طول های نقاط برخورد منحنی  $y=x^2$  و خط  $y=2x+3$  معادله  $x^2-2x-3=0$  صدق می کنند؟

توشه ای برای موه قیت

|        |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| $x$    | ۲ | ۱ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ |
| $x^2$  | ۴ | ۱ | ۰ | ۱ | ۴ | ۹ |
| $2x+3$ | ۷ | ۵ | ۳ | ۵ | ۷ | ۹ |





۲ از روی شکل دو نقطه  $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  نقاط برخورد این دو نمودار هستند.

۴ بله، زیرا  $(3)^2 = 2(3) + 3$  و  $(-1)^2 = 2(-1) + 3$

۵ بله  $(3)^2 = 2(3) + 3 \Rightarrow 9 = 9$   
 $(-1)^2 = 2(-1) + 3 \Rightarrow 1 = 1$

در انتهای این فعالیت باید نتیجه‌گیری شود که جواب‌های یک معادله درجه دوم به صورت  $x^2 = ax + b$  را می‌توان با یافتن طول نقطه‌های برخورد نمودار خط  $y = ax + b$  و منحنی  $y = x^2$  پیدا کرد.

این روش همان روش هندسی حل معادله درجه دوم می‌باشد به این صورت که برای حل معادله  $x^2 - 2x - 3 = 0$  ابتدا جمله  $x^2$  را در یک طرف و بقیه را به طرف دیگر می‌بریم، سپس نمودار رابطه‌های  $y_1 = 2x + 3$  و  $y_2 = x^2$  را رسم می‌کنیم. برای یافتن جواب‌های معادله درجه دوم  $x^2 - 2x - 3 = 0$  می‌توان طول نقطه‌های برخورد دو نمودار رابطه‌های بالا را در صورت امکان به دست آورد. در سه مثال بعد انواع حالات ممکن معادله‌های درجه دوم از نظر تعداد جواب‌ها بررسی شده‌اند.

تعداد جواب‌های معادله درجه دوم (با توجه به معادله)، یکی یا دو یا هیچ می‌باشد.

انیمیشن آموزشی



معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید (برای سهولت در رسم، از نرم افزار خروجوا کمک

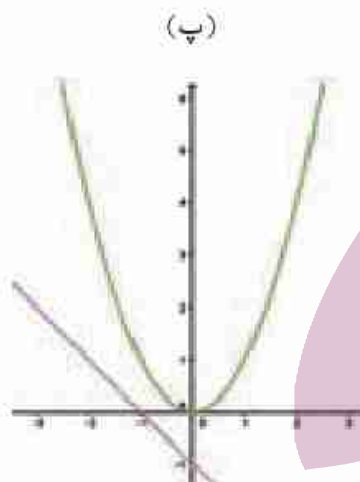
نگیرید)

الف)  $x^2 - 2x + 1 = 0$

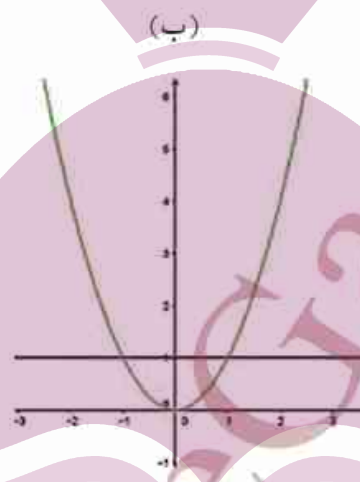
ب)  $x^2 - 1 = 0$

پ)  $x^2 + x + 1 = 0$

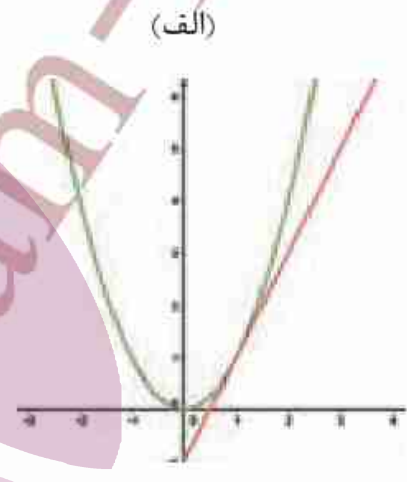
کسب مهارت به



جواب ندارد



$x = -1$  و  $x = 1$  جواب‌های معادله هستند



$x = 1$  جواب معادله است

ایران توشه

توشه ای برای موفقیت

۱) معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید و جواب‌های آنها را به طور تقریبی به دست آورید:

الف)  $x^2 - 2x = 5$

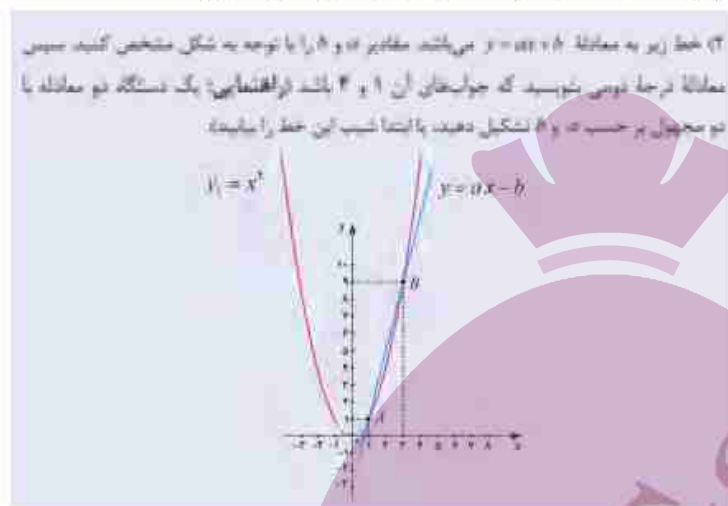
ب)  $x^2 + 3x = 0$

پ)  $x^2 + x = 1$

ت)  $x^2 + 4x = -4$

هر کدام از حالت‌های بالا را باید به صورت  $x^2 = ax + b$  در آورده و با رسم نمودارها، معادله را حل کنیم.

برای مثال حالت (الف) را به صورت  $x^2 = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$  و حالت (ب) را به صورت  $x^2 = -2x$  می‌نویسیم و مشابه کار در کلاس (۵) حل می‌کنیم.



در این مسئله می‌خواهیم ضرایب  $a$  و  $b$  را در معادله درجه دوم  $x^2 = ax + b$  طوری بیابیم که جواب‌های آن، طول نقطه‌های داده شده روی نمودار است. در این حالت معادله خط  $y = ax + b$  را باید به صورتی به دست آوریم که نمودار  $y = x^2$  را در نقطه‌هایی به طول‌های ۱ و ۳ قطع کند. مقادیر  $a$  و  $b$  را یافته سپس معادله  $x^2 = ax + b$  را می‌سازیم. این معادله همان معادله درجه دوم موردنظر می‌باشد. برای یافتن  $a$  و  $b$  باید دو نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$  روی این خط باشند، بنابراین داریم  $1 = a + b$  و  $9 = 3a + b$ . با حل این دستگاه نتیجه می‌شود  $a = 4$  و  $b = -3$ .

معادله  $x^2 - 6x + 9 = 0$  را در نظر بگیرید.

- جمله‌هایی را که مجهول دارند، در یک طرف تساوی نگه دارید و جمله ثابت را به طرف دیگر ببرید.
- عدد به‌متست (عدد از مرحله (۳) را به دو طرف معادله مرحله (۱) اضافه کنید.
- طرف اول تساوی را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، به صورت مجذور یک عبارت بنویسید (یادآوری اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  است).
- از دو طرف تساوی جذر بگیرید و دو جواب برای  $x$  به دست آورید.

فعالیت ۵



$$x^2 + 6x = 7$$

$$\frac{6}{2} = 3 \Rightarrow 3^2 = 9$$

$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 16$$

$$(x + 3)^2 = 16$$

$$|x + 3| = 4 \Rightarrow x + 3 = 4 \text{ یا } x + 3 = -4 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -7$$

این فعالیت زمینه ساز یافتن فرمول کلی برای حل معادله‌های درجه دوم به صورت جبری را فراهم می‌سازد.

کار هر کلاس: ۶۰



معادله  $x^2 - 3x + 2 = 0$  را مانند فعالیت ۵ حل کنید.

ایران توشه

توشه ای برای موه‌قی‌ت

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - 3x = -2 \quad \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 2 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \text{ یا } x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 1$$



معادله درجه دوم دلخواه  $ax^2 + bx + c = 0$  را در نظر بگیرید که در آن  $a \neq 0$ .

(۱) طرفین معادله بالا را بر عدد  $a$  تقسیم کنید و معادله درجه دومی بنویسید که ضریب  $x^2$  در آن برابر ۱ باشد.

(۲) جمله‌های دارای  $x$  را در یک طرف تساوی نگه دارید و جمله ثابت را به طرف دیگر ببرید.

(۳) در معادله بالا، نصف ضریب  $x$  را به دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

(۴) عدد به دست آمده از مرحله (۳) را به دو طرف معادله مرحله (۲) اضافه کنید.

(۵) به کمک تساوی‌های بالا، جاهای خالی را پر کنید:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

(۶) تساوی بالا را چه شرایطی امکان پذیر است؟ معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  در چه شرایطی جواب دارد؟

(۷) نشان دهید در صورت مثبت بودن  $b^2 - 4ac$  جوابهای معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  برابر جوابهای دو معادله زیر است:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فصل ۴



ایران توشه

توشه ای برای موفقیت

- ۱
- ۲
- ۳
- ۴
- ۵
- ۶

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\frac{\frac{b}{a}}{2} = \frac{b}{2a} \Rightarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

چون سمت چپ این رابطه به توان دو است پس سمت راست باید عددی غیر منفی باشد.

یعنی باید  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$  و چون مخرج عددی همواره مثبت است پس

$b^2 - 4ac \geq 0$  این معادله در صورتی جواب دارد که  $b^2 - 4ac \geq 0$  بند (۷) حال اگر  $b^2 - 4ac \geq 0$  می توان از طرفین رابطه به دست آمده در بند (۵) جذر گرفت؛ خواهیم داشت :

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ یا } x + \frac{b}{2a} = - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{یا } x = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

به کمک فعالیت ۶ روش جبری یا فرمول کلی برای یافتن جواب های هر معادله درجه دوم، در صورت وجود، بیان می شود. در این فعالیت از  $\Delta = b^2 - 4ac$  برای بررسی وجود جواب و تعداد جواب ها استفاده می شود.

ایران توشه  
توشه ای برای موفقیت

جواب های معادله های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

(الف)  $5x^2 + 2x + 1 = 0$

(ب)  $x^2 - 6 = 0$

(پ)  $x^2 - 3x = 0$

حل قسمت الف)

$$5x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(5)(1) = -16 < 0$$

$\Rightarrow$  معادله جواب ندارد

$$x^2 - 6 = 0$$

قسمت ب)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-6) = 24 > 0$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{-(0) - \sqrt{24}}{2} = -\sqrt{6} \text{ و } x_2 = \frac{-(0) + \sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}$$

$$x^2 - 3x = 0$$

قسمت پ)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(0) = 9 > 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{9}}{2} = 3 \text{ و } x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{9}}{2} = 0$$



الف) حل به روش جبری (جواب‌ها  $x = 0$  و  $x = -\frac{5}{2}$ )

ب) حل به روش جبری (جواب‌ها  $x_1 = \frac{-13 + \sqrt{133}}{6}$  و  $x_2 = \frac{-13 - \sqrt{133}}{6}$ )

پ) می‌توان طرفین را بر  $\sqrt{2}$  تقسیم نمود  $\sqrt{2}x(x + \sqrt{5}) = \sqrt{8}$

$$x(x + \sqrt{5}) = 2 \Rightarrow x^2 + \sqrt{5}x - 2 = 0 \text{ و } \Delta = (\sqrt{5})^2 - 4(1)(2) = 5 + 8 = 13$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{13}}{2} \text{ و } x_2 = \frac{-\sqrt{5} - \sqrt{13}}{2}$$

هدف آموزشی این سؤال دیدن معادله درجه دوم به شکلی دیگر و تشخیص همه ضرایب که بر  $\sqrt{2}$  بخش پذیرند و ساده نمودن ضرایب جهت محاسبات ساده تر و نهایتاً حل است.

ت) با یافتن  $\Delta = -7$  و توجه به اینکه  $\Delta$  منفی است معادله جواب ندارد.

ث) روش اول: سمت چپ را به توان ۲ می رسانیم

$$4x^2 + 1 - 4x = 5 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{همه جملات را بر ۴ تقسیم می کنیم}} x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ و } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

روش دوم: از طرفین جذر می گیریم

$$|2x - 1| = \sqrt{5} \Rightarrow 2x - 1 = \sqrt{5} \text{ یا } 2x - 1 = -\sqrt{5} \Rightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ و } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ج) مثال چالش برانگیز: (این نوع مسائل ذهن هنرجو را پویا می کند)

چون سمت چپ معادله غیرمنفی و سمت راست معادله منفی است معادله جواب ندارد.

۱۲) اگر یکی از جوابهای معادله  $5x^2 + 13x + c = 0$  برابر  $(-3)$  باشد، جواب دیگر این معادله را بیابید.

می دانیم جواب معادله، تساوی رابطه را برقرار می کند پس:

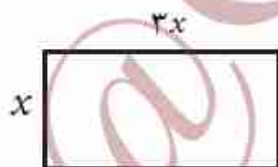
$$5(-3)^2 + 13(-3) + c = 0 \Rightarrow 45 - 39 + c = 0 \Rightarrow c = -6$$

پس معادله درجه دوم به صورت  $5x^2 + 13x - 6 = 0$  است.

$$\Delta = (13)^2 - 4(5)(-6) = 289 \Rightarrow x_1 = \frac{-13 + \sqrt{289}}{10} \text{ و } x_2 = \frac{-13 - \sqrt{289}}{10}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-13 + 17}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ و } x_2 = \frac{-13 - 17}{10} = -3$$

۱۳) اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت آن ۳۰۰ مترمربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

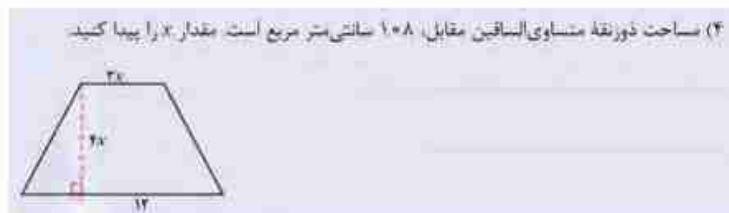


$$\text{مساحت} = x \times 3x = 3x^2 = 300 \Rightarrow 3x^2 - 300 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 100 = 0 \Rightarrow \Delta = (0)^2 - 4(1)(-100) = 400 > 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{400}}{2} = 10 \text{ و } x_2 = \frac{-\sqrt{400}}{2} = -10$$

جواب منفی قابل قبول نیست و مسئله فقط یک جواب دارد. مستطیل با عرض ۱۰ و طول ۳۰ جواب است.



ابتدا با توجه به فرمول مساحت یک ذوزنقه داریم

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{(3x+12)(4x)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(3x+12)(4x)}{2} = 108 \Rightarrow 12x^2 + 48x - 216 = 0 \Rightarrow$$

همه جمله‌ها را بر ۱۲ تقسیم می‌کنیم

$$x^2 + 4x - 18 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 + 72 = 88$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-4 + \sqrt{88}}{2} \text{ و } x_2 = \frac{-4 - \sqrt{88}}{2}$$

$x_1 = -2 + \sqrt{22}$  و  $x_2 = -2 - \sqrt{22}$  فقط جواب  $x_1$  قابل قبول است که مثبت است زیرا طول نمی‌تواند منفی شود.

(۵) حاصل قسّم دو عدد صحیح متوالی ۱۳۲ می‌باشد. این دو عدد را پیدا کنید.

ایران پوینت  
توشه‌ای برای موفقیت

عدد کوچک‌تر را با  $x$  نشان می‌دهیم. عدد متوالی بعد از آن  $x+1$  خواهد بود. بنابراین مسئله

$$x(x+1) = 132 \Rightarrow x^2 + x - 132 = 0 \xrightarrow{\Delta = (1)^2 - 4(1)(-132) = 529}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{529}}{2} = 11 \text{ و } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{529}}{2} = -12$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. دو عدد متوالی ۱۱ و ۱۲ و دو عدد متوالی -۱۲ و -۱۱ هر دو جواب هستند.



(۶) عددی طبیعی نباید که دو برابر آن به اضافه ۳۵، با مربع آن عدد مساوی باشد.

این عدد طبیعی را با  $n$  نشان می‌دهیم.

$$2n + 35 = n^2 \Rightarrow n^2 - 2n - 35 = 0, \quad \Delta = (-2)^2 - 4(1)(-35) = 4 + 140 = 144$$

$$\Rightarrow n = \frac{2+12}{2} = 7 \quad \text{و} \quad n = \frac{2-12}{2} = -5$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا عدد طبیعی مثبت است.

(۷) نشان دهید  $-1+\sqrt{2}$  یک جواب معادله  $x^2 + 2x - 1 = 0$  است.

می‌دانیم اگر عددی جواب یک معادله باشد باید با جایگذاری آن عدد به جای مجهول معادله، تساوی معادله برقرار شود. پس شرط جواب بودن را بررسی می‌کنیم.

$$(-1+\sqrt{2})^2 + 2(-1+\sqrt{2}) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$1+2-2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}-1=0 \Rightarrow 0=0$$

چون این عدد تساوی را برقرار کرده است، یک جواب معادله است.

(۸) مساحت ناحیه خاکستری  $40$  سانتی متر مربع است. اندازه هر ضلع مربع‌ها را بیابید.



Figure 2

مساحت مربع بزرگ‌تر  $(3y+2)^2$  و مساحت مربع کوچک‌تر  $y^2$  است. مساحت قسمت رنگی بین این دو مربع  $(3y+2)^2 - y^2$  است. با توجه به فرض مسئله:  $(3y+2)^2 - y^2 = 40$ . در این صورت:

$$9y^2 + 4 + 12y - y^2 - 40 = 0 \Rightarrow 8y^2 + 12y - 36 = 0$$

طرفین را بر ۴ تقسیم می‌کنیم

$$2y^2 + 3y - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta=9+72} y = \frac{-3 \pm 9}{4} \quad y_1 = -3, \quad y_2 = \frac{3}{2}$$

$y = \frac{3}{2}$  = اندازه ضلع مربع کوچک

$$\text{اندازه ضلع مربع بزرگ} = 3y + 2 = 3\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = \frac{13}{2}$$

و جواب منفی قابل قبول نیست.

۹) معمای زیر در کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی آمده است (گرفته شده از کتاب خوارزمی

بنیانگذار خیمه کاروانا برینا)

\* مقداری است که اگر یک سوم آن و یک درهم را بر یک چهارم آن و یک درهم ضرب کنیم، حاصل

آن بیست می شود.

این مقدار را بیابید

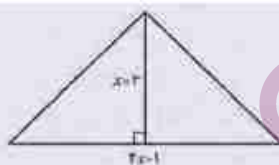
عدد را  $x$  فرض می کنیم.

$$\left(\frac{1}{3}x + 1\right)\left(\frac{1}{4}x + 1\right) = 20 \Rightarrow \frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x - 19 = 0$$

طرفین را در ۱۲ ضرب می کنیم.

$$x^2 + 7x - 228 = 0 \xrightarrow{\Delta=961} x = \frac{-7 \pm 31}{2} \Rightarrow x_1 = -19, \quad x_2 = 12$$

جواب منفی قابل قبول نیست، زیرا مقدار پول منفی نمی تواند باشد.



۱۰) مساحت مثلث روبه رو ۲۴ سانتی متر مربع است.

الف) مقدار  $x$  را پیدا کنید

ب) اندازه قاعده و ارتفاع مثلث چقدر است؟

ایران دولتی  
توشه ای برای موه قیت

(الف)

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \text{مساحت مثلث}$$

$$24 = \frac{(3x-1)(x+3)}{2} \Rightarrow 3x^2 + 8x - 51 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \text{ و } x_2 = -\frac{17}{3}$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا طول قاعده و ارتفاع منفی نمی تواند باشد.

$$\text{ارتفاع قاعده} = 3x - 1 = 3(3) - 1 = 8$$

(ب)

$$\text{اندازه ارتفاع} = x + 3 = 3 + 3 = 6$$

## فصل ۴

توان رسانی به توان عددهای گویا

ایران توان

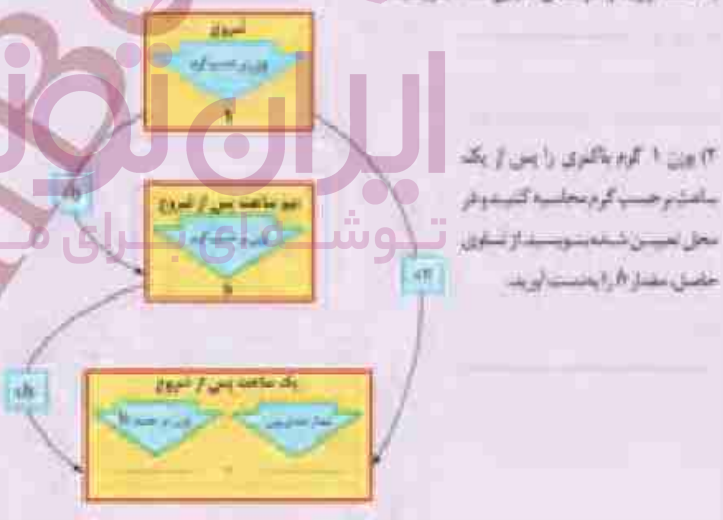
توشه ای برای موفقیت

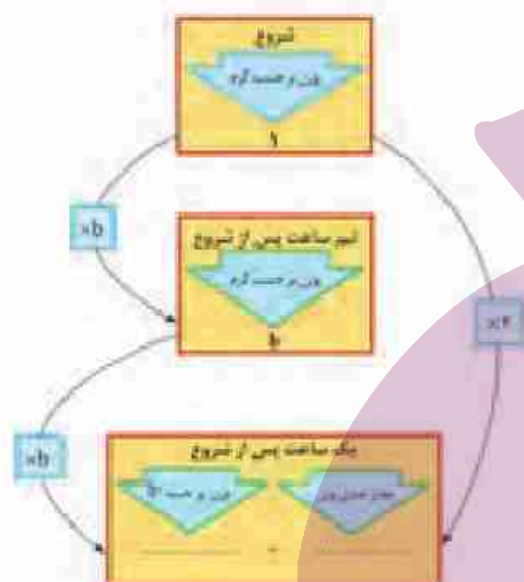


1 output

نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آن هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر در شروع ۱ گرم باکتری داشته باشیم، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱) اگر وزن باکتری‌ها پس از هر ۲۴ ساعت ۱۶ گرم شود وزن آنها را پس از ۱۰۰ ساعت چقدر حساب می‌کنید؟ در محال تعیین شده بنویسید.





نمودار تکمیل شده :  
 $b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$

۱) ابتدا نمایش اعدادی را بنویسید پس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$49^{\frac{1}{2}} =$   
 $(\frac{1}{25})^{\frac{1}{2}} =$   
 $(-2-1)^{\frac{1}{2}} =$

۲) طول ضلع مربعی را که ضلع آن ۱ است متوزیع است، به صورت یک عدد توان دار نمایش دهید. آن را ساده کنید.

الف)  $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$       ب)  $(\frac{1}{25})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$       ج)  $(0/01)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0/01} = 0/1$

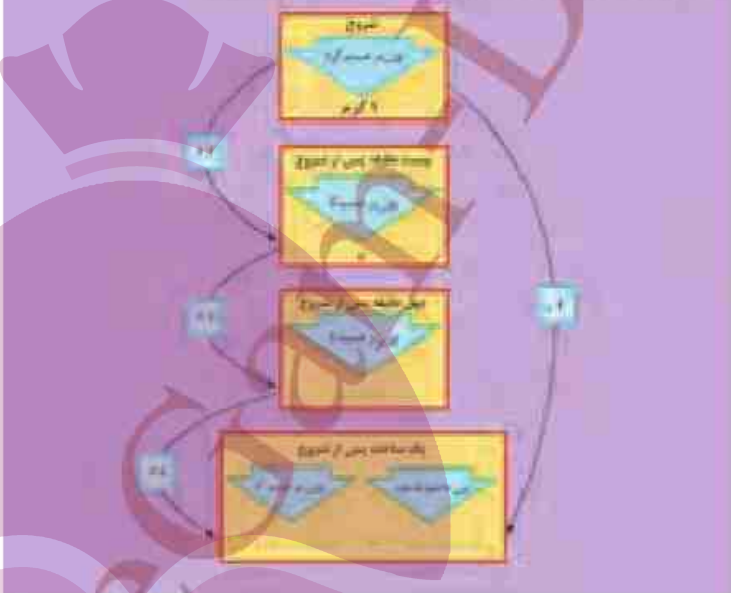
د)  $9^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$



نمودار ۲

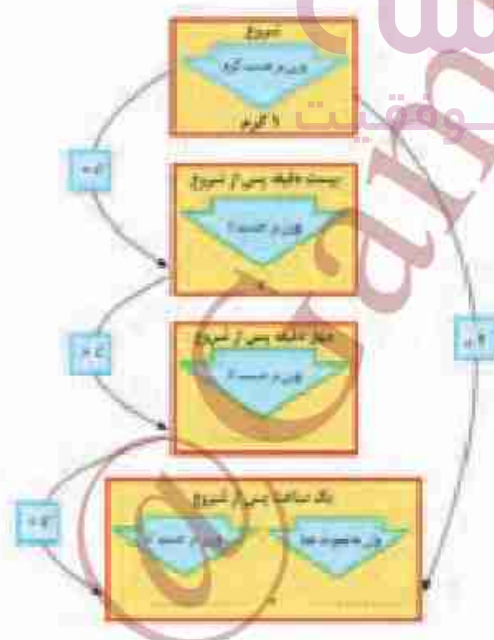


یک گرم از یک نوع باکتری را در نظر بگیرید که پس از هر ساعت دو برابر می‌شود. با روشن زیر بررسی کنید که پس از  $\frac{1}{2}$  ساعت چند گرم باکتری ایجاد می‌شود.  
 ۱) فرض کنید اول باکتری‌ها پس از هر  $\frac{1}{2}$  ساعت ۱ گرم شوند. وزن باکتری‌ها را پس از  $\frac{1}{4}$  ساعت  $\frac{1}{4}$  ساعت و یک ساعت به حساب ۲ گرم شود. زیر بررسی کنید.  
 ۲) نمودار را کامل کنید و از تساوی حاصل، مقدار  $c$  را به دست آورید.



# ایران توشه

توشه ای برای موفقیت



۱) نمودار تکمیل شده :

۲) برای محاسبه مقدار  $c$  داریم:  $c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$

در این فعالیت اگر هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند، می‌توان در شروع باکتری‌هایی را که وزن آنها در

هر ساعت ۸ برابر می شود را در نظر گرفت و از هنجریان خواست وزن آنها را پس از ۲۰ دقیقه و ۴۰ دقیقه حساب کنند و سپس به باکتری هایی که در کتاب مطرح شده رسید.

کاربرگ کلاس ۳

۱) با توجه به تساوی های داده شده ابتدا نمایش رادیکالی اعداد را بنویسید و سپس حاصل را به دست آورید.

الف)  $\sqrt[3]{216} = 216^{\frac{1}{3}} = 6$

ب)  $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{343} = \left(\frac{1}{343}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{343}} = \frac{1}{7}$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی اعدادهای زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

$(0/001)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = (9^3)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} =$

الف)  $216^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{216} = 6$

ب)  $\left(\frac{1}{343}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{343}} = \frac{1}{7}$

$64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

$(729)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{729} = 9$

$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$


$(0/001)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0/001} = 0/1$

ایران توشه

توشه ای برای توشه قیت

استفاده از ماشین حساب

یکی از کاربردهای رایج این ابزار پس از یک ساعت دو برابر می‌شود. در نظر بگیرید. با استفاده از ماشین حساب، این ابزار را در هر یک از دو حالت زیر به حساب گرام با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار نشان دهید. توجه کنید، اگر از ماشین حساب‌های مختلف استفاده می‌کنید، ممکن است ترتیب فشار دادن کلیدها متفاوت باشد.



الف) پس از یک ساعت.

محاسبه از طریق توان‌رسانی:

$$2 \rightarrow \times \rightarrow 2 \rightarrow =$$

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

$$2 \rightarrow \sqrt{\phantom{x}} \rightarrow =$$

ب) پس از ۳ دقیقه.

محاسبه از طریق توان‌رسانی:

$$2 \rightarrow \times \rightarrow 2 \rightarrow \times \rightarrow 2 \rightarrow =$$

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

$$2 \rightarrow \sqrt{\phantom{x}} \rightarrow \sqrt{\phantom{x}} \rightarrow =$$

استفاده از ابزار :

اهداف :

- آشنایی با تقریب اعشاری ریشه‌های دوم و سوم اعداد.
- آشنایی با تقریب اعشاری توان‌های  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  اعداد.
- استفاده از تقریب اعشاری برای مقایسه نمایش یک عدد با توان  $(\frac{1}{2})$  و  $(\frac{1}{3})$  و نمایش رادیکالی آن اعداد.
- تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب برای محاسبه تقریب اعشاری ریشه‌های دوم و سوم و توان‌های  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  اعداد.
- تقویت مهارت قطع کردن تقریب اعشاری اعداد.

الف)  $\sqrt{2} = 1/41$  و  $2^{\frac{1}{2}} = 1/41$

ب)  $\sqrt{2} = 1/26$  و  $2^{\frac{1}{2}} = 1/26$



### مسئله‌ها

۱) نقطه چین‌ها را با عبارت مناسب تکمیل کنید.

$$11^2 = 121 \Rightarrow 121^{\frac{1}{2}} = \sqrt{121} =$$

$$17^2 = 289 \Rightarrow 289^{\frac{1}{2}} = \sqrt{289} =$$

$$11^2 = 121 \Rightarrow (121)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{121} = 11$$

$$17^2 = 289 \Rightarrow (289)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{289} = 17$$

۲۲) متغیر توانمند شده را ابتدا به صورت یک عدد/نشان‌دهی توان‌دهی بنویسید و سپس عبارت را در یک متغیر توان‌دهی و با استفاده از ماشین حساب حاصل را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

الف) مقدار ۱۱



ب) با داشتن طول یک مربع که طول یک ضلع آن ۱۱ باشد، مساحت آن را با استفاده از ماشین حساب تا دو رقم اعشار حساب کنید.

ج) با داشتن یک مربع به ضلع ۱۱، مساحت آن را با استفاده از ماشین حساب تا دو رقم اعشار حساب کنید.



الف) مقدار  $X$ :

$$x^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \rightarrow x = 27^{\frac{1}{2}} = \sqrt{27} \approx 5/2$$

ب) وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت:

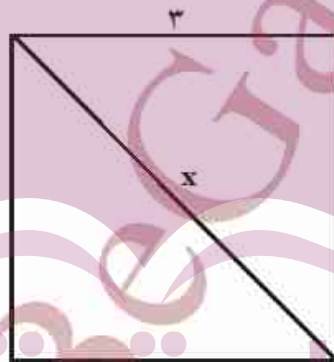
$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

وزن باکتری‌ها پس از بیست دقیقه:

$$4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1/58$$

پ) قطر یک مربع به ضلع ۳:

$$x^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow x = 18^{\frac{1}{2}} = \sqrt{18} = 4/24$$



ایران توتنه

روش‌های برای موه‌قیت

۳) بخشی از راه حل ایجاد برای یافتن ریشه‌های معادله درجه دوم  $2x^2 - 3x + 3 = 0$  به صورت زیر است:

$$x = \frac{3 \pm \left( (-3)^2 - 4 \times 2 \times 3 \right)^{\frac{1}{2}}}{2 \times 2} = \dots$$

درستی یا نادرستی راه حل را بررسی کرده و در صورت درستی با ادامه راه حل و در صورت نادرستی با نوشتن راه حل درست، ریشه‌های معادله را بدست آورید.

$$x = \frac{3 \pm 25^{\frac{1}{2}}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = -\frac{1}{2}, 2$$



۴) دارایی های یک شرکت در هر سال ۱۵٪ درصد سال قبل است. دارایی این شرکت طی ده سال به صورت زیر گزارش شده است:

پنجاه و یک میلیارد ریال، پایان سال اول، ۱/۵ میلیارد ریال، پایان سال دوم، ۲/۲۵ میلیارد ریال و...

الف) دارایی شرکت در پایان سال های دوم، چهارم و دهم را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.  
ب) رابطه ای بنویسید که دارایی در پایان سال  $n$  ام را به صورت یک عبارت توان دار بر حسب  $n$  نمایش دهد.  
پ) اگر روند رشد دارایی ها در هر ماه نیز طبق رابطه قسمت قبل باشد، دارایی شرکت را پس از ۴ ماه و ۶ ماه به صورت یک عدد توان دار و یک عبارت رادیکالی نمایش دهید و با عانی حساب مقدار آن را به صورت یک عدد اعشاری نمایش دهید.

چون دارایی ها در هر سال ۱۵٪ درصد سال قبل است بنابراین این هر سال ۱/۵ برابر خواهد شد: ( اعداد بر حسب میلیارد ریال می باشند )

الف) پایان سال اول:  $1/5 \times 1 = 1/5$  پایان سال دوم:  $1/5 \times 1/5 = 1/5^2$

پایان سال سوم:  $1/5 \times 1/5^2 = 1/5^3$  پایان سال چهارم:  $1/5 \times 1/5^3 = 1/5^4$

با توجه به رابطه بین عدد سال و توان ۱/۵ می توان میزان دارایی در پایان سال

دهم را به صورت زیر نوشت: پایان سال دهم:  $1/5^{10}$

ب) با تعمیم رابطه قسمت قبل به سال  $n$  ام داریم: پایان سال  $n$  ام:  $1/5^n$

پ) پایان ۴ ماه ( معادل  $\frac{4}{12}$  یا  $\frac{1}{3}$  سال )  $1/5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1/5} = 1/14$

پایان ۶ ماه ( معادل  $\frac{6}{12}$  یا  $\frac{1}{2}$  سال )  $1/5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1/5} = 1/22$

در هر قسمت، ابتدا جمله‌ها را کامل کنید سپس به سوال پاسخ دهید.

(۱) یک رشته نوم عدد ۴۵ عدد ... است زیرا ۴۵ به ۵ ...

(۲) رشته‌های نوم یک عدد را تعریف کنید.

(۳) یک رشته نوم عدد ۸ عدد ... است زیرا ۸ به ۲ ...

(۴) رشته‌های نوم یک عدد ۱ را تعریف کنید.

کدام از رشته‌های چهار تکه ابتدا چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از رشته چهارم مثال بزنید.

(۵) برای رشته‌های پنجم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از رشته پنجم مثال بزنید.

(۶) برای رشته‌های ششم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟

| رشته | یک رشته | عدد | است |
|------|---------|-----|-----|
| ۱    |         |     |     |
| ۲    |         |     |     |
| ۳    |         |     |     |
| ۴    |         |     |     |
| ۵    |         |     |     |
| ۶    |         |     |     |

ایران توشه  
توشه‌ای برای موه‌قیت

- ۱ قسمت اول: ۵ یا -۵ قسمت دوم:  $5^2=25$  یا  $(-5)^2=25$
- ۲ عدد b ریشه دوم عدد a است هرگاه:  $b^2=a$
- ۳ قسمت اول: ۲ قسمت دوم:  $2^3=8$
- ۴ عدد b ریشه سوم عدد a است هرگاه:  $b^3=a$
- ۵ عدد b ریشه چهارم عدد a است هرگاه:  $b^4=a$  مثال از ریشه چهارم: عدد ۳ ریشه چهارم ۸۱ است زیرا  $3^4=81$
- ۶ عدد b ریشه پنجم عدد a است هرگاه:  $b^5=a$  مثال از ریشه پنجم: عدد ۲ ریشه پنجم ۳۲ است زیرا  $2^5=32$
- ۷ عدد b ریشه kام عدد a است هرگاه:  $b^k=a$
- ۸ عدد b یک ریشه kام عدد a است هرگاه:  $b^k=a$

۱) به جای نقطه چین ها، عددهای مناسب قرار دهید.

الف) از آنجا که  $243=3^5$ ، عدد  $(-5)^2=$  یک ریشه پنجم عدد  $243$  است.

ب) با توجه به تساوی  $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$  نشان می‌دهد که عدد  $\frac{1}{2}$  یک ریشه  $\frac{1}{3}$ ام عدد  $\frac{1}{8}$  است.

۲) یک ریشه چهارم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۶۲۵ (ب)  $\frac{1}{81}$  (ج)  $0.0001$

۳) یک ریشه پنجم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۱ (ب)  $-\frac{1}{32}$  (ج)  $3 \times 81$

۴) برای پیدا کردن ریشه‌های چهارم و پنجم یک عدد، چه پیشنهادی دارید؟

توشه ای برای موه قیت

الف) قسمت اول: ۳ قسمت دوم: ۲۴۳.

ب) قسمت اول: ۱۵۶۲۵ قسمت دوم: ۵ قسمت سوم: ۱۵۶۲۵

ج) تساوی  $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$  نشان می‌دهد عدد  $\frac{1}{2}$  ریشه سوم عدد  $\frac{1}{8}$  است.

۲- الف) ۵ یا -۵ (ب)  $\frac{1}{3}$  یا  $-\frac{1}{3}$  (ج)  $0.1$  یا  $-0.1$

۳- الف) ۱ (ب)  $-\frac{1}{2}$  (ج) ۳

می‌توانند با ذکر مثال‌های بیشتر از اعداد اعشاری، کسری، صحیح یا اعداد توان‌دار درک بهتری از توان‌های کسری در هنجویان به وجود آورند. البته لازم به ذکر است که عدد داده شده باید توان چهارم یا پنجم یک عدد آشنا باشد تا محاسبه مقدار آن بدون استفاده از ماشین حساب امکان‌پذیر باشد.

۴- آنها را به عوامل اول تجزیه کرده و به صورت حاصل ضرب توان‌های اعداد اول می‌نویسیم. سپس با توجه به توان‌های آنها و تعریف ریشه، ریشه چهارم و پنجم را به دست می‌آوریم. (نمونه این روش با توجه به توانایی تجزیه هنجویان در این پایه و بر پایه اطلاعات قبلی آنها، در قالب فعالیت و سؤال در کتاب کار آمده است.)

۱) جدول زیر را کامل کنید.

| عبارت      | ۴ | ۱ | $\frac{9}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | ۱ | ۴ |
|------------|---|---|---------------|---------------|---|---|
| پایه چهارم |   |   | $\frac{3}{2}$ |               |   |   |

۲) آیا در سطر دوم جدول، عدد منفی دیده می‌شود؟ چرا؟

۳) توانی چهارم اعداد فرجه جدولی با هم دارند؟

۴) آیا یک عدد منفی می‌تواند ریشه چهارم داشته باشد؟ چرا؟

۵) با استفاده از جدول، ریشه‌های چهارم اعداد ۹،  $\frac{36}{49}$  و  $\frac{58}{49}$  را بنویسید.

۶) با توجه به پاسخ‌های به سؤال آمده، در مورد اعداد ریشه‌های چهارم عدد مثبت ۱۱ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این ریشه‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۷) آیا این نتیجه در مورد ریشه‌های زوج دیگر نیز درست است؟ با مثال نشان دهید.

۱۱ جدول کامل شده :

| عدد           | -۲ | -۱ | $-\frac{2}{3}$  | ۰ | $\frac{2}{3}$   | ۱ | ۲  | ... | ... |
|---------------|----|----|-----------------|---|-----------------|---|----|-----|-----|
| توان<br>چهارم | ۱۶ | ۱  | $\frac{۱۶}{۸۱}$ | ۰ | $\frac{۱۶}{۸۱}$ | ۱ | ۱۶ | ... | ... |

۱۲ خیر زیرا هر عددی (مثبت یا منفی) اگر به توان یک عدد زوج برسد علامت آن همواره مثبت است.

۱۳ با هم مساویند.

۱۴ خیر زیرا توان چهارم هیچ عددی منفی نیست.

۱۵ ریشه‌های چهارم ۱ عدد ۱ و -۱ است و ریشه‌های چهارم عدد  $\frac{۱۶}{۸۱}$  اعداد  $\frac{۲}{۳}$  و  $-\frac{۲}{۳}$  هستند.

۱۶ عدد مثبت a دو ریشه چهارم دارد که قرینه هستند.

۱۷ بله مثلاً عدد ۶۴ دو ریشه ششم دارد که عبارت‌اند از ۲ و -۲ زیرا  $۲^۶ = ۶۴ = (-۲)^۶$

ایران نوشته  
نوشته‌ای برای موفقیت

۱۱ جدول زیر را کامل کنید.

|            |    |    |                 |   |                 |   |    |
|------------|----|----|-----------------|---|-----------------|---|----|
| عدد        | -۲ | -۱ | $-\frac{2}{3}$  | ۰ | $\frac{2}{3}$   | ۱ | ۲  |
| توان چهارم | ۱۶ | ۱  | $\frac{۱۶}{۸۱}$ | ۰ | $\frac{۱۶}{۸۱}$ | ۱ | ۱۶ |

۱۲ عددهای سطر آخر جدول چه رابطه‌ای با عددهای سطر اول آن دارند؟

۱۳ حاصل  $\sqrt[4]{۳}$  و  $\sqrt[4]{-۳}$  را بدست آورید و با نتیجه قسمت قبل مقایسه کنید.



|                 |                              |                           |                             |                              |                    |                 |
|-----------------|------------------------------|---------------------------|-----------------------------|------------------------------|--------------------|-----------------|
| a               | $-\frac{1}{2}$               | $\frac{1}{2}$             | $\frac{1}{2}$               | $-\frac{1}{2}$               | -2                 | 2               |
| $\sqrt[n]{a^m}$ | $\sqrt[n]{(-\frac{1}{2})^4}$ | $\sqrt[n]{\frac{1}{2}^4}$ | $\sqrt[n]{(\frac{1}{2})^4}$ | $\sqrt[n]{(-\frac{1}{2})^4}$ | $\sqrt[n]{(-2)^4}$ | $\sqrt[n]{2^4}$ |
| حاصل            | $\frac{1}{2}$                | $\frac{1}{2}$             | $\frac{1}{2}$               | $\frac{1}{2}$                | 2                  | 2               |

اعداد سطر آخر قدر مطلق اعداد سطر اول هستند.

مثبت ۳ است.  $\sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{729} = 3$  و  $\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{729} = 3$  در این حالت نیز حاصل عدد

ایران توشه  
توشه ای برای موفقیت

۱) حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف)  $\sqrt{625}$       ب)  $\sqrt{\frac{1}{64}}$       ج)  $\sqrt[6]{0/000001}$       د)  $\sqrt[6]{(-0/01)^6}$

۲) ریشه‌های ششم اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۵      ب) ۷۲۹      ج) ۱      د)  $(-5)^6$

۳) عبارت‌های  $\sqrt[6]{(-\frac{5}{3})^6}$  و  $\sqrt[6]{(1-\sqrt{3})^6}$  را بدون استفاده از اَدِیکال بنویسید.

ایران نوشته  
توشه ای برای موهبت

۱ الف)  $\sqrt{625} = 5$       ب)  $\sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$       ج)  $\sqrt[6]{0/000001} = 0/1$       د)  $\sqrt[6]{(-0/01)^6} = 0/1$

۲ الف)  $\sqrt[6]{5^6} = 5$       ب)  $\sqrt[6]{729} = 3$       ج)  $\sqrt[6]{1} = 1$       د)  $\sqrt[6]{(-5)^6} = 5$

۳  $\sqrt[6]{(-\frac{5}{3})^6} = |-\frac{5}{3}| = \frac{5}{3}$  و  $\sqrt[6]{(1-\sqrt{3})^6} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$

۱) جدول زیر را کامل کنید.

|           |   |   |               |               |   |   |
|-----------|---|---|---------------|---------------|---|---|
| ریشه      | ۲ | ۱ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | ۱ | ۲ |
| توان پنجم |   |   |               |               |   |   |

۲) آیا در سطر دوم جدول، عددی منفی دیده می‌شود؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که عددهای منفی ریشه پنجم دارند؟

۳) توان پنجم عددهای قرینه چه رابطهای با هم دارند؟

۱) جدول زیر را کامل کنید.

|           |    |                  |               |   |                  |   |    |
|-----------|----|------------------|---------------|---|------------------|---|----|
| ریشه پنجم | ۲  | ۱                | $\frac{1}{4}$ | ۰ | $\frac{1}{4}$    | ۱ | ۲  |
| عدد       | ۳۲ | $\frac{1}{1024}$ | ۱             | ۰ | $\frac{1}{1024}$ | ۱ | ۳۲ |

۲) قسمت اول: بله در سطر دوم جدول عدد منفی وجود دارد.

قسمت دوم: بله می‌توان نتیجه گرفت اعداد منفی ریشه پنجم دارند.

۳) توان پنجم دو عدد قرینه، قرینه هم هستند.

آزمون کتبی ۵



حاصل عبارتهای زیر را بنویسید.

الف)  $\sqrt[5]{1^5}$

ب)  $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$

ج)  $\sqrt[5]{-0/000001}$

د)  $\sqrt[5]{(-3)^5}$

الف)  $\sqrt[5]{1^5} = 1$

ب)  $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$

ج)  $\sqrt[5]{-0/000001} = -0/1$

د)  $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$

آزمون کتبی ۵



ابتدا تعابیر را دیکتایی عددی و زیر را نوشته و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف)  $(3^8)^{\frac{1}{8}}$

ب)  $(\frac{1}{32})^{\frac{1}{5}}$

ج)  $(0/000001)^{\frac{1}{5}}$

د)  $243^{\frac{1}{5}}$

الف)  $(3^8)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{3^8} = 3$

ب)  $(\frac{1}{32})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

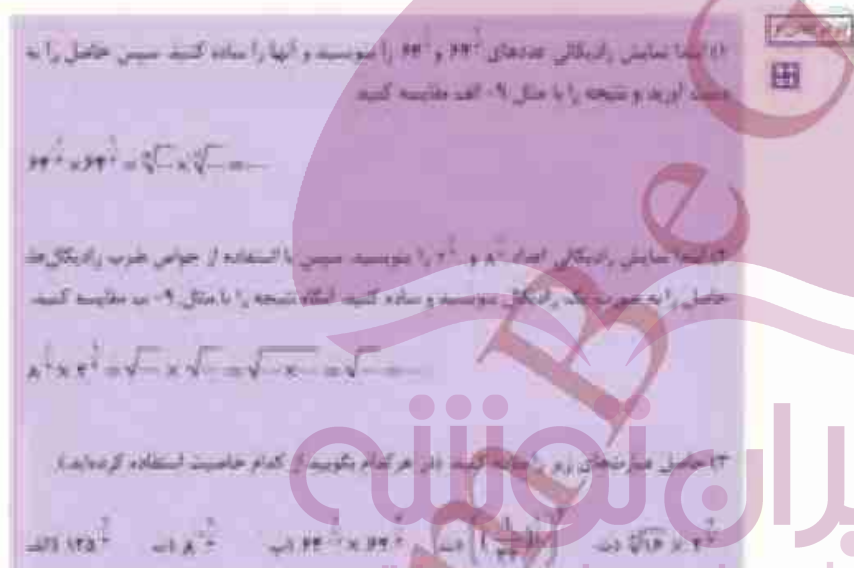
ج)  $(0/000001)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{0/000001} = 0/1$

د)  $243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = 3$

ایران نوشتن

توشه ای برای موه قیت

@Ganm



۱ همان طور که دیده می شود نتیجه با مثال ۹- الف مساوی است.

$$64^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt{64} \times \sqrt[3]{64} = 8 \times 4 = 32$$

۲ همان طور که دیده می شود نتیجه با مثال ۹- ب یکسان است.

$$8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt{8} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$$



۱۲ حاصل عبارات زیر را ساده کنید. (در هر کدام بگویید از کدام خاصیت استفاده کرده‌اید)

$$\text{الف)} \quad 125^{\frac{2}{3}} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (\sqrt[3]{125})^2 = 5^2 = 25$$

خواص توان‌رسانی (خاصیت  $(a^m)^n = a^{mn}$ )، نمایش رادیکالی یک عدد با توان  
گویا، محاسبه ریشه یک عدد

$$\text{ب)} \quad 8^{-\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = (\sqrt[3]{8})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

خواص توان‌رسانی (خاصیت  $(a^m)^n = a^{mn}$ )، نمایش رادیکالی یک عدد با توان  
گویا، محاسبه ریشه یک عدد

$$\text{پ)} \quad 64^{\frac{1}{12}} \times 64^{\frac{3}{4}} = 64^{\frac{1}{12} + \frac{3}{4}} = 64^{\frac{10}{12}} = 64^{\frac{5}{6}} = \left(64^{\frac{1}{6}}\right)^5 = (\sqrt[6]{64})^5 = 2^5 = 32$$

خواص توان‌رسانی (خاصیت  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ )، نمایش رادیکالی یک عدد با  
توان گویا، محاسبه ریشه یک عدد

$$\text{ت)} \quad \left(\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^2 = \left(\sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

خواص توان‌رسانی (خاصیت  $(a^m)^n = a^{mn}$ )، نمایش رادیکالی یک عدد با توان  
گویا، محاسبه ریشه یک عدد

$$\text{ث)} \quad \sqrt[3]{16} \times 2^{\frac{2}{3}} = 16^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = (4^2)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

برای رسیدن به پاسخ از نمایش رادیکالی یک عدد به نمایش آن عدد به صورت یک عدد  
توان‌دار، خواص توان‌رسانی (خاصیت  $(a^m)^n = a^{mn}$  و  $a^m \times b^m = (ab)^m$ )، نمایش  
رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبه ریشه یک عدد، استفاده شده است.

در جدول زیر، برخی از توان‌های عدد  $\frac{1}{4}$  را می‌بینید.

|                 |                 |                 |                 |                 |                  |                  |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| $\frac{1}{4}^0$ | $\frac{1}{4}^1$ | $\frac{1}{4}^2$ | $\frac{1}{4}^3$ | $\frac{1}{4}^4$ | $\frac{1}{4}^5$  | $\frac{1}{4}^6$  |
| 1               | $\frac{1}{4}$   | $\frac{1}{16}$  | $\frac{1}{64}$  | $\frac{1}{256}$ | $\frac{1}{1024}$ | $\frac{1}{4096}$ |

۱) جدول را کامل کنید.

۲) مقادیر  $\frac{1}{4}^x$  را برای معبر  $x$  ها و مقادیر  $\left(\frac{1}{4}\right)^x$  را برای معبر  $x$  ها مشخص کرده و این نقاط را به یکدیگر متصل کنید.

۳) آیا نمودار  $\left(\frac{1}{4}\right)^x$  یک خط راست است؟

| X                            | -2 | $-\frac{3}{2}$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1             | $\frac{3}{2}$ |
|------------------------------|----|----------------|---|----------------|---|---------------|---------------|---------------|
| $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ | 16 | 8              | 4 | 2              | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |



۲ خیر نمودار مربوط به یک خط راست نیست.

## مسئله‌ها

۱. به جای نقطه چین ها عبارت مناسب قرار دهید

$$\text{الف) } 7^4 = 49 \Rightarrow (49)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{49} =$$

$$7^2 = 49 \Rightarrow (49)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{ب) } 17^2 = 2913 \Rightarrow (2913)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2913} =$$

$$17^2 = 2913 \Rightarrow (2913)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2913} = 17$$

$$\text{ج) } 13^4 = 28561 \Rightarrow (28561)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{28561} =$$

$$13^4 = 28561 \Rightarrow (28561)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{28561} = 13$$

$$\text{د) } 15^{-4} = \left(\frac{1}{15}\right)^4 = \frac{1}{50625} \Rightarrow \left(\frac{1}{50625}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{50625}} =$$

$$15^{-4} = \frac{1}{50625} \Rightarrow \left(\frac{1}{50625}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{50625}} = \frac{1}{15}$$

$$\text{ه) } \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{1}{19683} \Rightarrow \left(\frac{1}{19683}\right)^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{\frac{1}{19683}} =$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{1}{19683} \Rightarrow \left(\frac{1}{19683}\right)^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{\frac{1}{19683}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{و) } 5^6 = 15625 \Rightarrow (15625)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{15625} =$$

$$5^6 = 15625 \Rightarrow (15625)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{15625} = 5$$

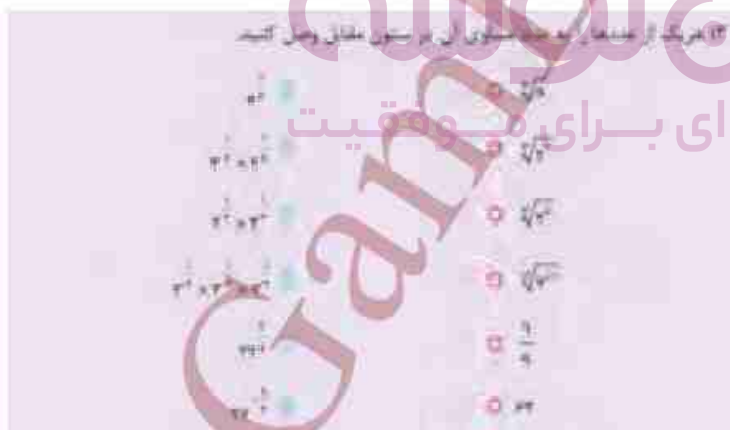
$$\text{ج) } (0/3)^5 = 0/00243 \Rightarrow (0/00243)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{0/00243} = 0/3$$

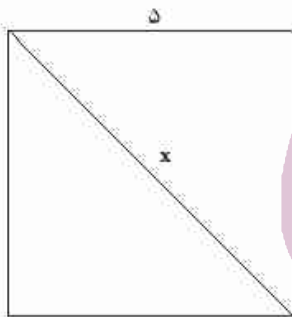
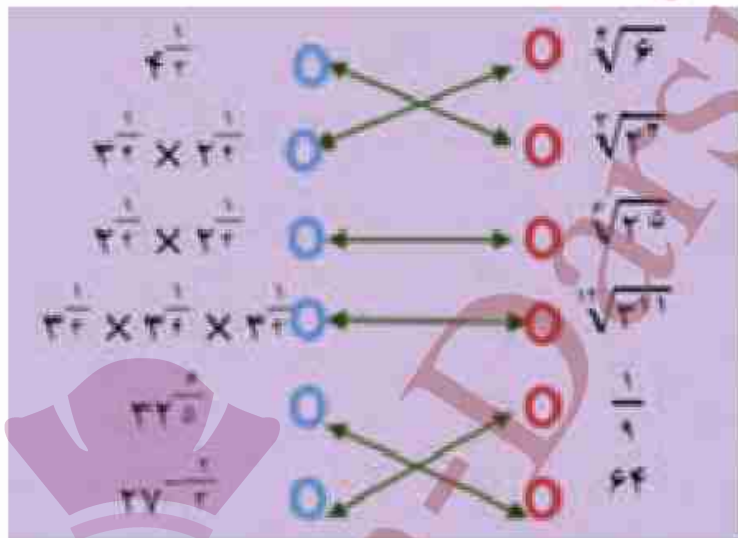
$$(0/3)^5 = 0/00243 \Rightarrow (0/00243)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{0/00243} = 0/3$$



الف)  $4^{\frac{1}{4}}$ : (تکثیر باکتری‌ها) باکتری‌هایی را در نظر می‌گیریم که وزن آنها پس از یک ساعت ۴ برابر می‌شوند اگر با ۱ گرم باکتری شروع کنیم وزن آنها پس از ۱۵ دقیقه  $4^{\frac{1}{4}}$  خواهد بود.

ب)  $27^{\frac{1}{3}}$ : (زمینه هندسی) طول ضلع مکعبی با حجم ۲۷ واحد مکعب.





۷۴) پاسخ هر یک از پرسش‌های زیر را به دو صورت عدد، توان‌دار و عبارت رادیکالی نمایش دهید و در صورت امکان، ساده کنید.  
(الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟

(الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟

$$x^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \Rightarrow x = 50^{1/2} = \sqrt{50} = 7.07$$

ب) وزن ۱ گرم از نوعی باکتری در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. وزن باکتری پس از ۲۰ دقیقه چقدر می‌شود؟

ب) وزن ۱ گرم از یک نوع باکتری که در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. پس از گذشت ۲۰ دقیقه:

$$8^{60/30} = 8^2 = \sqrt[3]{8} = 2$$

ب) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب چقدر است؟

پ) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب:

$$1000^{1/3} = \sqrt[3]{1000} = 10$$

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۶ و ۹ سانتی‌متر چقدر است؟

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۶ و ۹ برابر است با:

$$10/8 \quad a^2 = 6^2 + 9^2 \Rightarrow a^2 = 117 \Rightarrow a = \pm\sqrt{117} \approx \pm 10.8$$

قابل قبول است.



۵) ابتدا نمایش رادیکالی عبارتهای زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) ریشههای دوم عدد ۱۲۱

ب) ریشه پنجم عدد ۳۲

پ) ریشه پنجم عدد ۳۲

ت) ریشههای ششم عدد  $\frac{1}{64}$

ث) توان  $\frac{1}{3}$  عدد ۲۷

ج) توان  $\frac{1}{5}$  عدد ۳۲

ب)  $\sqrt[5]{32} = 2$

ت)  $\pm \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \pm \frac{1}{2}$

ج)  $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$

الف)  $\pm \sqrt{121} = \pm 11$

پ)  $\sqrt[5]{-32} = -2$

$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

۶) حاصل هر کدام از عبارتهای زیر را ابتدا به صورت یک عدد توان دار و سپس به صورت عبارت رادیکالی بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف)  $4^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}}$

ب)  $64^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{1}{2}}$

پ)  $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

ت)  $5^{\frac{1}{2}} \times 25^{\frac{1}{2}}$

ث)  $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2$

ج)  $(25^{\frac{1}{2}})^2$

الف)  $4^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 4^1 = 4 = \sqrt[4]{4^4} = \sqrt[4]{16384}$

ب)  $64^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 64^1 = 64 = \frac{1}{64^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\left(64^{\frac{1}{6}}\right)^5} = \frac{1}{(\sqrt[6]{64})^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

پ)  $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

ایران توشه  
توشه ای برای موفقیت

$$\text{ت) } 5^{\frac{1}{3}} \times 25^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \times (5^2)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{3}{3}} = 5$$

$$\text{ث) } \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^{\frac{2}{3}} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[3]{9}$$

$$\text{ج) } (27^{-2})^{\frac{1}{6}} = 27^{-\frac{2}{6}} = 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$$

۷) عبارتهای زیر را بدون استفاده از ماشین حساب بنویسید.

$$\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} \quad \text{ب)$$

$$\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^2} \quad \text{الف)$$

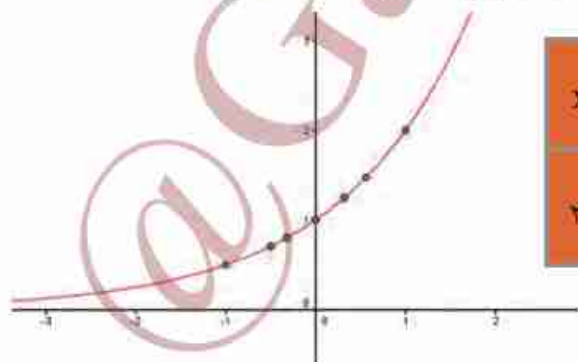
$$\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2}-\sqrt{3} \quad \text{ب)} \quad \sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1 \quad \text{الف)$$

۸) با کامل کردن جدول زیر، نقاط آن را روی محورهای مختصات مشخص کنید و نقاط را به هم وصل کنید.  
(برای محاسبه توان های گویا می توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

|       |   |               |               |   |                |                |    |
|-------|---|---------------|---------------|---|----------------|----------------|----|
|       | ۱ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | ۰ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | -۱ |
| $2^x$ |   |               |               |   |                |                |    |

ایران توشه  
توشه ای برای موفقیت

(برای محاسبه توان های گویا می توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)



|       |               |                      |                         |   |               |               |   |
|-------|---------------|----------------------|-------------------------|---|---------------|---------------|---|
| x     | ۱             | $-\frac{1}{2}$       | $-\frac{1}{3}$          | ۰ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | ۱ |
| $2^x$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ | ۱ | $\sqrt[3]{2}$ | $\sqrt{2}$    | ۲ |

۵

فصل

نسبت

های مثلثاتی

ایران تونل

توشه ای برای موفقیت



ایران نوشته  
توشه ای برای موه قیت

$$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{ZY} = \frac{AD}{WZ} = 2 \quad (1)$$

(۲) ۲ برابر

(۳)  $\frac{1}{2}$  برابر

۴) معکوس یکدیگرند

$$\frac{HL}{MQ} = \frac{3}{6} \neq \frac{HJ}{MN} = \frac{7}{10} \neq \frac{JK}{NP} = \frac{3}{6} \neq \frac{LK}{QP} = \frac{7}{10} \quad (5)$$

خیر، متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع نظیرشان برابر نیست. کافی است نقاط دلخواه روی یکی از این عکس‌ها انتخاب کنیم و فاصله بین آنها را بیابیم و با فاصله نقاط نظیرشان در عکس دیگر مقایسه کنیم تا وجود تفاوت در نسبت‌ها را تشخیص دهیم.



## ایران توانمند

۱) خیر، زیرا، نسبت طول اضلاع متناظر متفاوت است. کافی است چند نقطه متناظر را انتخاب کنیم و فاصله‌های متناظر را اندازه‌گیری کنیم و نسبت آنها را به دست آوریم.

۲) الف) شکل ۱، زیرا ارتفاع شکل عوض نمی‌شود ولی طول آن سه برابر می‌شود.

ب) شکل ۲

پ) شکل ۳



استفاده از لفظ بزرگ نمایی لزوماً به معنی بزرگ شدن نیست بلکه می‌تواند شکل اولیه را کوچک‌تر کند و بستگی به  $k$  دارد.

■ در شکل پروانه‌ها بهتر است نقاط دلخواهی را روی شکل انتخاب کنید و با یافتن فاصله بین این نقاط و نقاط متناظرشان و همچنین یافتن زاویه‌های نظیر در شکل‌های (الف) و (ب) و (پ) به سؤال‌ها پاسخ داد.

■ همچنین می‌توان با قرار دادن پروانه‌ها در مستطیل‌ها طول و عرض آنها را بررسی نمود.

در ادامه در زمینه تاریخی با بیان یک مسئله واقعی (محاسبه طول ارتفاع اهرام مصر) قضیه تشابه مثلث‌ها از طریق تساوی زاویه‌ها به‌طور غیرمستقیم ارائه شده است. اثبات درستی این قضیه به‌علت طولانی بودن و دور شدن از هدف این فصل ارائه نشده است.

توجه شود که خورشید در فاصله‌ای بسیار دور قرار دارد و شعاع‌های نوری که به یک جسم تابیده می‌شود با هم موازی محسوب می‌شوند زیرا خطای عدم توازی این شعاع‌ها با دستگاه‌های اندازه‌گیری ما قابل تشخیص نیست. با استفاده از خطوط موازی و مورب می‌توان به سؤال گفته شده در قسمت تالس جواب داد. به جای مسئله تاریخی، می‌توان زمینه‌های دیگری مانند یافتن ارتفاع تیرک پرچم و... را انتخاب نموده و برای یادگیری بیشتر در کلاس استفاده نمود.

نکته: توجه شود شرط تساوی زاویه‌ها برای برقراری تشابه بین چندضلعی‌های بیشتر از سه ضلع کافی نیست و برای متشابه بودن هر دو چندضلعی باید برابری نسبت اضلاع رأس‌های نظیر هم برقرار باشد.

به عنوان مثال در فعالیت ۱ با اینکه دو شکل مستطیل هستند و زاویه‌های برابر دارند ولی متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع نظیرشان مساوی نیست.

در مسئله فاکتور لویه  $ABC$  که در رأس  $C$  قائمه است،  $KH$  بر  $BC$  عمود است. اندازه‌های متشابه‌ها، متساوی‌ها را چطور؟

نسبت‌های اضلاع متناظر را بنویسید.



این در کتاب ۲۰



الف) دو مثلث ABC و KBH به دلیل داشتن زاویه های مساوی، متشابه اند و ضلع AB نظیر ضلع KB می باشد زیرا هر دو روبروی زاویه قائمه هستند.

$$\frac{AB}{KB} = \frac{BC}{BH} = \frac{CA}{KH} \quad \text{ب)}$$



ایران توشه  
توشه ای برای موفقیت





فصل ۲



در شکل روبه‌رو، یک زاویه تند به زاویه  $A$  رسم شده است.



۱) روی یک سطح این زاویه چند مثلث نامحاذی بسازید  $B$  و  $C$  و  $D$  هر یکی را بگردانید. این مثلثات همواره‌ای بر این سطح رسم کنید که سطح دیگر زاویه تند به  $A$  و  $D$  و  $F$  و  $E$  قطع کنند.



۲) با اندازه‌گیری به کمک خط‌کش، مشخص کنید که مثلثاتی زو برقرارند.

$$\frac{EB}{AB} = \frac{FC}{AC} = \frac{GD}{AD}$$

۳) مثلثات مشابه‌ای را که در شکل دیده می‌شود، بررسی کنید و به کمک آن فرضی مثلثاتی را نشان دهید.

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن  
 ■ لازم است هنرجو در رسم خطوط عمود بر هم توانایی استفاده از خط‌کش و گونیا را داشته باشد.

۲ با اندازه‌گیری پاره‌خط‌های ذکر شده به نسبت‌های تقریباً مساوی در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در زاویه A مشترکند می‌رسیم. بهتر است هنرجویان با خط‌کش این کار را انجام داده و نتیجه‌گیری کنند. البته تساوی‌های به دست آمده تقریبی خواهند بود.

۳ با استفاده از زاویه‌های مثلث در مثلث‌های قائم‌الزاویه، دیده می‌شود که طبق نتایج بخش قبل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه (در شکل) متشابه‌اند (زیرا همگی دارای یک زاویه راست بوده و در زاویه تند A مشترکند). بنابراین می‌توانیم نسبت اضلاع متناظر را بنویسیم و با طرفین وسطین و نوشتن نسبت جدید، نتیجه بگیریم که:

$$\frac{EB}{AE} = \frac{FC}{AF} = \frac{GD}{AG}$$

این تساوی‌ها مبنای اصلی تعریف نسبت مثلثاتی تانژانت هستند.



در حالت‌های مختلف است. برای این کار هنجرو باید برای هر کدام یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب بسازد. کافی است از نقطه‌ای روی یکی از اضلاع زاویه‌های داده شده بر ضلع دیگر عمود کند. سپس با اندازه‌گیری اضلاع روبرو به زاویه و مجاور به زاویه و تقسیم آنها بر هم مقدار تقریبی تانژانت زاویه را محاسبه کند.

۲ در این سؤال هنجرو در یک مسئله محیط پیرامونی خود قرار می‌گیرد. برای حل به شکل زیر توجه کنید.

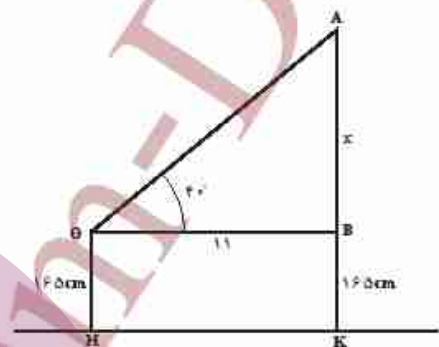
$$OB=HK=11\text{ m}$$

$$= \tan 40^\circ = \frac{x}{11}$$

$$\Rightarrow x = 11 \tan 40^\circ \approx 9.23$$

$$\Rightarrow \text{طول ارتفاع تیرک} = x + BK = 11 \tan 40^\circ + 1.65 \approx 10.88$$

در ادامه سؤالی درباره مقادیر ممکن برای تانژانت یک زاویه مطرح می‌شود که در طی یک فعالیت جواب آن به دست می‌آید.



## ایران تونزانه

فشه ای برای ملوه قیت

هر شکل زیر  $HK$  م  $11$  عمود است

۱) هر یک از مستطای  $\frac{AK}{BK} + \frac{AH}{HK} = \frac{AM}{BM}$  چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۲) با بزرگ شدن زاویه‌ای که در رأس  $B$  تشکیل می‌شود، این نسبت‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟ چرا؟

۳) با تغییر بکه زاویه، توانست آن چگونه تغییر می‌کند؟

۴) آیا می‌توان زاویه‌ای یافت که تانژانت آن برابر ۹ باشد؟ این زاویه چگونه ساخته می‌شود؟ جواب این سؤال برای عملهای مثبت دیگر چیست؟



۱ در شکل صفحه قبل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه در ضلع CB مشترکند ولی زاویه‌های تند آنها در رأس B تغییر می‌کند. این نسبت‌ها تانژانت زاویه‌های تندی هستند که در رأس B ساخته شده‌اند. زیرا همگی این نسبت‌ها به صورت نسبت طول ضلع مقابل به این زاویه‌ها به ضلع مجاور این زاویه‌ها هستند.

نسبت‌های  $\frac{CA}{CB}$  و  $\frac{CE}{CB}$  و  $\frac{CD}{CB}$  به ترتیب تانژانت زاویه‌های  $B_1$  و  $B_2$  و  $B_3$  می‌باشند.

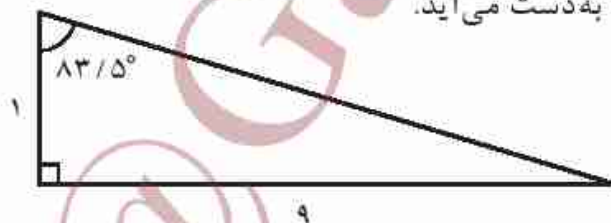
$$\tan B_3 = \frac{AC}{BC}, \tan B_2 = \frac{EC}{BC}, \tan B_1 = \frac{DC}{BC}$$

۲ چون BC ثابت و  $DC < EC < AC$  پس  $\frac{DC}{BC} < \frac{EC}{BC} < \frac{AC}{BC}$  یعنی با بزرگ شدن زاویه در رأس B این نسبت‌ها هم بزرگ‌تر می‌شوند.

۳ از آنجا که نسبت‌های بند قبل همان تانژانت آن زاویه‌ها بودند نتیجه می‌شود: هرچه زاویه تند بزرگ‌تر شود تانژانت آن نیز بزرگ‌تر می‌شود و اگر زاویه تند کوچک‌تر شود تانژانت آن کوچک‌تر می‌شود. یعنی

$$\tan B_3 > \tan B_2 > \tan B_1$$

۴ بله، کافی است مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که طول اضلاع زاویه قائمه آن ۱ و ۹ باشد در این صورت زاویه روبرو به ضلع به طول ۹ جواب مسئله است. زیرا در محاسبه تانژانت این زاویه نسبت  $\frac{9}{1}$  حساب می‌شود که ۹ نمایش طول ضلع روبرو به زاویه و ۱ نمایش طول ضلع مجاور به آن زاویه است. با اندازه‌گیری این زاویه با نقاله مقدار تقریبی  $83/5$  درجه به دست می‌آید.



اگر به جای عدد ۹ از هر عدد مثبت دیگری هم استفاده کنیم، می‌توانیم عملیات بالا را تکرار کنیم و هر عدد مثبتی تانژانت زاویه‌ای خواهد بود.



کار در لایه ۲



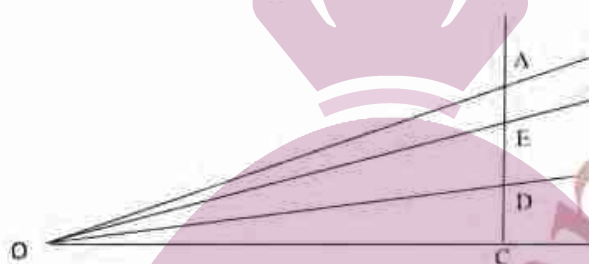
۱) اگر زاویه دیدی به صفر نزدیک شود تفاوت آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ درستی خودی خود را با رسم شکل نشان دهید.

۲) اگر زاویه دیدی به ۹۰ درجه نزدیک شود هر مورد تغییرات اندازه تفاوت آن چه می‌توان گفت؟ (رواقتی، به کمک ماشین حساب برای مقادیر تفاوت زاویه‌های نزدیک به ۹۰ درجه جدولی بسازید.)

۸ در شکل صفحه بعد دیده می‌شود که با نزدیک شدن اندازه زاویه به صفر تاثرات

آن نیز به صفر نزدیک می‌شود. زیرا در نسبتی که تانژانت را می‌سازد، مخرج ثابت است ولی صورت از هر عدد مثبت دلخواهی کوچک‌تر می‌شود و این به معنای نزدیک شدن تانژانت به صفر است.

هرچه زاویه بزرگ‌تر شود و به  $90^\circ$  درجه نزدیک شود، تانژانت نیز بزرگ‌تر می‌شود و از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود. زیرا مخرج ثابت است ولی صورت از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود. در این وضعیت اصطلاحاً می‌گویند مقدار تانژانت به بی‌نهایت می‌رود. با ماشین حساب نیز می‌توان به این مطلب رسید.



$$\tan 80^\circ \approx 5/67$$

$$\tan 81^\circ \approx 6/31$$

$$\tan 82^\circ \approx 7/11$$

$$\tan 83^\circ \approx 8/14$$

$$\tan 84^\circ \approx 9/51$$

$$\tan 85^\circ \approx 11/43$$

$$\tan 86^\circ \approx 14/3$$

$$\tan 87^\circ \approx 19/08$$

$$\tan 88^\circ \approx 28/63$$

$$\tan 89^\circ \approx 57/28$$

$$\tan 89.5^\circ \approx 114/58$$

$$\tan 89.7^\circ \approx 190/98$$

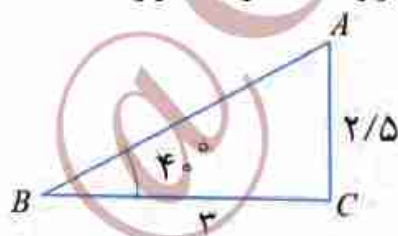
$$\tan 89.9^\circ \approx 572/95$$

$$\tan 89.95^\circ \approx 1145/91$$

## ایران تونانه

توشه ای برای موفقیت

کافی است به کمک نقاله زاویه  $40^\circ$  درجه رسم کنید و با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه که یکی از زاویه‌های تند آن  $40^\circ$  درجه است و با اندازه‌گیری مستقیم اضلاع روبرو و مجاور به این زاویه، نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور این زاویه را که جواب مسئله خواهد بود، به دست آورید. همین عملیات را برای زاویه  $50^\circ$  درجه تکرار کنید.

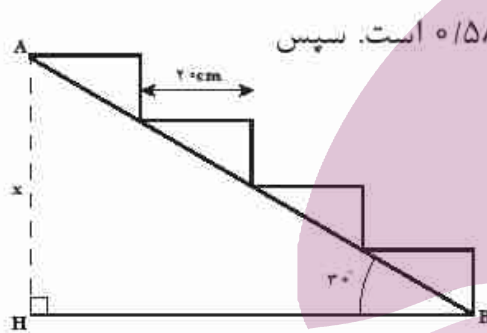


$$\tan 40^\circ \approx \frac{2/5}{3} \approx 0/83$$

۲) تانژانت چه زاویه‌ای برابر ۸ خواهد شد؟

مشابه بند (۴) فعالیت ۴ یا مثال ارائه شده می‌توان عمل کرد. (این زاویه تقریباً ۸۲/۵ درجه است.)

۳) با توجه به شکل روی‌رو، ارتفاع نقطه A از زمین را بیابید (هرچند همه پیکاسها ۴ است.)



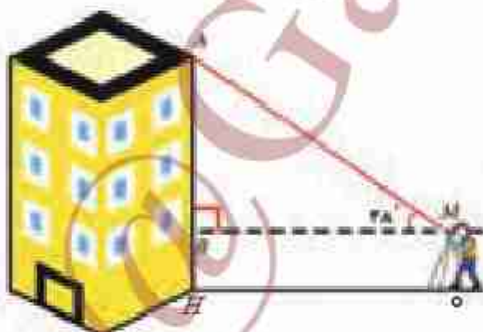
ابتدا تانژانت زاویه ۳° درجه را می‌یابیم که تقریباً مساوی ۰/۵۸ است. سپس

$$BH = 4 \times 20 = 80 \text{ cm}$$

$$\tan 3^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH = x = 80 \times 0.58 = 46.4$$

۴) برای محاسبه ارتفاع ساختمانی، دوربین زاویه‌ای را در یک سطح افقی در نقطه A به نقطه B (چهارم از ساختمان) نقطه A) مستقر کرده‌ایم و به نقطه بالای ساختمان نگاه می‌کنیم. زاویه دید برابر ۳۸ درجه به دست آمده است. اگر ارتفاع دوربین از زمین یک متر و ۴۰ سانتی‌متر باشد، ارتفاع ساختمان را به دست آورید.

توشه ای برای موه‌قیت

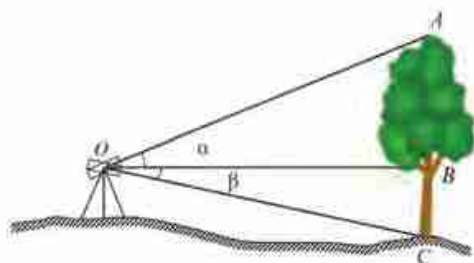


$$\left. \begin{aligned} BH &= OM = 15.4 \text{ m} = 1 / 54 \text{ m} \\ OH &= 1.4 \text{ m} \\ \tan \alpha &= \frac{AB}{BM} \Rightarrow AB = 1.5 \tan 38^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

متر ۱۳/۲۵ = ارتفاع ساختمان = AH = AB + BH



شا به کمک دوربین ژئودیازیک زاویه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب  $23^\circ$  درجه و  $12^\circ$  درجه به دست آمدند و فاصله افقی دستگاه از درخت  $OB=18$  متر است. با توجه به شکل ارتفاع درخت را پیدا کنید.



در این دو مثلث  $\hat{B} = 90^\circ$  و  $OB = 18m$  و  $\beta = 12^\circ$  و  $\alpha = 23^\circ$  بنابراین

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{AB}{OB} \rightarrow AB = OB \tan \alpha = 18 \tan 23^\circ \\ \tan \beta &= \frac{BC}{OB} \rightarrow BC = OB \tan \beta = 18 \tan 12^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

ارتفاع درخت  $= AB + BC \approx 7.64 + 3.83 = 11.47$

۱۶) یک مهندسی نقشه‌بردار، برای محاسبه ارتفاع یک کوه در نقطه‌ای می‌ایستد و مشاهده می‌کند که در آن نقطه، نوک کوه با زاویه  $40^\circ$  درجه نسبت به افق دیده می‌شود. پس از آنکه نیم کیلومتر از کوه دور می‌شود، مشاهده می‌کند که نوک کوه با زاویه  $25^\circ$  درجه دیده می‌شود. ارتفاع کوه چقدر است؟



$$\left. \begin{aligned} \tan 40^\circ &= \frac{h}{0.5 + x} \\ \tan 25^\circ &= \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\tan 25^\circ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan 40^\circ = \frac{h}{0.5 + \frac{h}{\tan 25^\circ}} \Rightarrow h \approx 1.23$$



## فعالیت آموزشی

فرض کنید دکلتری به ارتفاع ۳۰ متر با سیمی که با سطح افق زاویه ۲۰ درجه ساخته است. چهار می شود. کز قریب زم آن سیم در نقطه ای مانند A چنان می ایستد که سیم در نقطه ای مانند D با سیمش متصل می آید. کز قریب دیگر به وسیله یک سیم افقی، فاصله A با D را اندازه گیری می کنند و نسبت  $\frac{DM}{AD}$  را حساب می کنند.

۱) کز قریب با طول فاصله ای متفاوت این کار را تکرار می کنند و هر کدام، مقداری را برای نسبت طول قدم به فاصله در آن نقطه حساب می آورند. نتیجه همه آنها یک مقدار را بدست می آورند.

۲) اگر  $\frac{DM}{AD}$  را حساب کنید مقدار آن با سینی که کز قریب بدست آورده اند به رابطه ای دارد چرا؟

۳) با رسم یک مثلث قائم الزاویه، مانند شکل زیر، که یک زاویه آن ۳۰ درجه است، نشان دهید سینی که کز قریب بدست آورده اند، برابر است با  $\frac{FK}{ED}$  این نسبت را با اندازه گیری با خط کش بدست آورید (راهنمایی: شبیه دو مثلث AED و DFK را نشان دهید).

۴) با استفاده از این نسبت طول سیم نگهدارنده دکل را حساب کنید.

# ایران توشه

توشه ای برای موفقیت

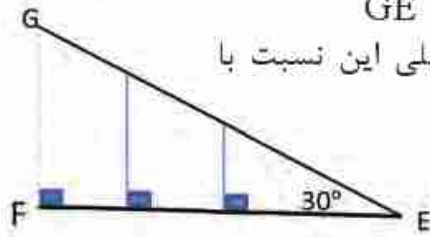
۱ به دلیل تشابه دو مثلث قائم الزاویه EDA و KFA (به دلیل زاویه مشترک  $\angle A$  و

$$\frac{KF}{FA} = \frac{ED}{DA} \quad (\angle E = \angle K = 90^\circ) \text{ خواهیم داشت}$$

۲ به دلیل تشابه دو مثلث ABH و ADE (به دلیل زاویه مشترک  $\angle A$  و

نسبت های قبل مساوی است. داریم  $\frac{DE}{AD} = \frac{FK}{AF} = \frac{BH}{AB}$  یعنی نسبت  $\frac{BH}{AB}$  هم با

۳ طول GF و GE را به کمک خط کش اندازه گرفته و نسبت  $\frac{GF}{GE}$  را محاسبه می کنیم  $\frac{FG}{EG} = \frac{1}{2}$ . به خاطر تشابه این مثلث و مثلث های قبلی این نسبت با نسبت های قبلی مساوی است.



۴ به کمک بندهای (۱) و (۲) و (۳) می توان مسئله را حل کرد.  
متر ۱۲۰ = طول سیم نگهدارنده  $\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{60m}{\text{طول سیم نگهدارنده}}$   
 $\frac{BH}{AB} = \frac{\text{طول ارتفاع دکل}}{\text{طول سیم نگهدارنده}}$

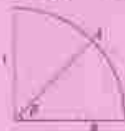
در ادامه مفهوم سینوس به طور رسمی تعریف می شود و مثال هایی ارائه می شود.

۱) به کمک نقاله و با رسم چند مثلث قائم الزاویه، مقدار تقریبی سینوس زاویه های ۲۰° و ۳۵° و ۴۰° درجه را بیابید.

مستقیم  
مثلاً برای زاویه ۲۰° درجه، ابتدا به کمک نقاله یک زاویه ۲۰° درجه رسم می کنیم. سپس با رسم خطی عمود بر یکی از دو ضلع زاویه از نقطه ای روی ضلع دیگر زاویه، مثلث قائم الزاویه ای رسم می کنیم. طول ضلع مقابل به زاویه ۲۰° درجه و وتر مثلث را اندازه گیری می کنیم و با محاسبه نسبت آنها، سینوس زاویه را محاسبه می کنیم. به همین ترتیب در مورد بقیه زاویه ها عمل می کنیم.

$$\sin 40^\circ \approx 0.64 \quad \text{و} \quad \sin 35^\circ \approx 0.57 \quad \text{و} \quad \sin 20^\circ \approx 0.34$$

یک ربع دایره به شعاع ۱ واحد، مانند شکل زیر رسم کنید.  
۱) نقطه A را روی ربع دایره انتخاب کنید و از آن عمود AB را منطبق بر شکل رسم کنید. طول پاره خط AB چه رابطه ای با زاویه  $\beta$  دارد؟  
۲) با کم یا زیاد شدن زاویه  $\beta$ ، سینوس آن چگونه تغییر می کند؟  
۳) با نزدیک شدن زاویه  $\beta$  به صفر، سینوس آن به چه عددی نزدیک می شود؟  
۴) با نزدیک شدن زاویه  $\beta$  به ۹۰° درجه، سینوس آن به چه عددی نزدیک می شود؟  
۵) سینوس  $\beta$  چه عددی می تواند باشد؟

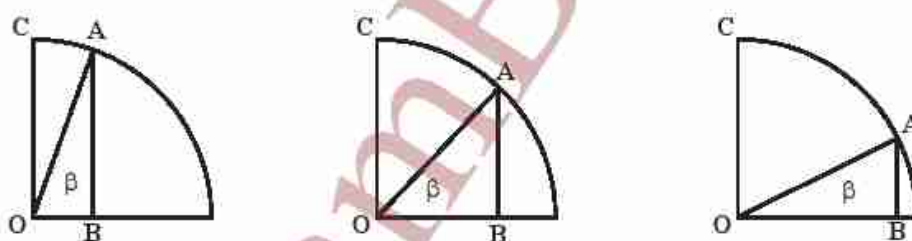


۱ با توجه به تعریف سینوس یک زاویه تند در مثلث‌های قائم‌الزاویه چون مثلث OAB در رأس B قائمه است پس سینوس زاویه  $\beta$  عبارت است از  $\frac{BA}{AO}$  ولی چون وتر این مثلث که همان شعاع ربع دایره (۱ واحد) است، پس  $\sin\beta = BA$

### اشتباهات ممکن:

در این قسمت انتخاب ضلع مقابل به زاویه همان سینوس زاویه می‌باشد. بهتر است مثال‌هایی زده شود تا معلوم شود این اتفاق همیشه نمی‌افتد و فقط در این مثال که طول وتر ۱ است این وضعیت رخ داده است.

۲ با توجه به شکل دیده می‌شود که با زیاد شدن زاویه  $\beta$  طول پاره خط BA بزرگ می‌شود. بنابراین سینوس آن نیز بزرگ‌تر می‌شود و با کم شدن زاویه، سینوس آن کمتر می‌شود. در شکل‌های زیر از چپ به‌راست به‌صورت شهودی مشاهده می‌کنید که با کوچک شدن زاویه، طول BA یعنی مقدار سینوس زاویه  $\beta$  نیز کم می‌شود.



۳ با نزدیک شدن زاویه  $\beta$  به صفر طول AB یعنی سینوس زاویه  $\beta$  از هر عدد مثبتی کوچک‌تر می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود.

۴ با نزدیک شدن زاویه  $\beta$  به  $90^\circ$  دیده می‌شود BA به CO نزدیک می‌شود. بنابراین  $\sin\beta$  به عدد ۱ نزدیک می‌شود.

۵ چون در مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویه قائمه از وتر کوچک‌تر است پس  $BA < AO = 1$  بنابراین  $\sin\beta < 1$  و چون  $\sin\beta$  طول پاره خط BA است پس  $\sin\beta > 0$  یعنی  $0 < \sin\beta < 1$  یعنی سینوس زاویه تند  $\beta$  عددی بین ۰ و ۱ است.



ممکن است در نمادگذاری نسبت‌های مثلثاتی هنجاریان عبارت  $\sin \alpha$  را همانند ضرب عبارت  $\sin$  در  $\alpha$  فرض کنند و نتیجه بگیرند  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$  در مثال‌های عددی می‌توان نادرستی این تصور را نشان داد. در این بخش سؤال‌هایی پرسیده شده است تا بدفهمی هنجاریان را در این مورد کاهش دهد. هدف از این سؤال‌ها آن است که هنجو بداند در رابطه‌هایی مانند  $\frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$ ، ضریب  $\alpha$  در صورت با عدد (۲ در مخرج) ضریب عددی قابل ساده شدن نیست. برای بررسی این وضعیت‌ها می‌توان سؤال‌هایی مانند سؤال زیر به هنجاریان داد.

❶ درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را با محاسبه عددی تعیین کنید

$$\frac{\sin 6^\circ}{2 \sin 3^\circ} = \sin 3^\circ$$

$$2 \sin 2^\circ = \sin 4^\circ$$

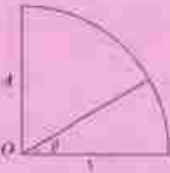
در مسئله زیر هدف تأکید بر مقادیر ممکن برای سینوس یک زاویه تند که باید بین ۰ و ۱ باشد است.

❷ آیا زاویه تندی وجود دارد که سینوس آن  $\frac{4}{3}$  باشد؟ چرا؟

پاسخ این مسئله خیر است زیرا  $\frac{4}{3} > 1$  و همیشه سینوس یک زاویه تند بین ۰ و ۱ است. هنجاریان ممکن است از دلایل دیگری مانند اینکه سینوس یک زاویه برابر است با اندازه ضلع مقابل به آن زاویه به اندازه وتر و اشاره به این نکته که در مثلث قائم‌الزاویه اضلاع زاویه قائم همواره از وتر کوچک‌تر هستند پس سینوس همواره کسری کوچک‌تر از واحد است نیز استفاده نمایند.

ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند روبه‌رو رسم کنید.

❶ اگر طول پاره خط  $OA$  برابر  $a$  باشد سینوس زاویه  $\beta$  چقدر است؟

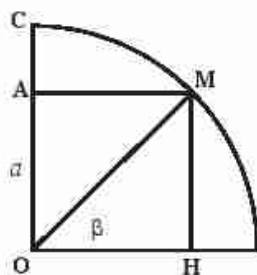


❷ روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد  $a$  به صورت  $0 < a < 1$  متوالید زاویه‌ای پیدا کنید که سینوس آن برابر  $a$  باشد.



۱ طبق فعالیت قبل  $MH = \sin \beta$  پس  $a = \sin \beta$

۲ ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند زیر رسم کنید روی شعاع قائم آن به اندازه  $a$  جدا کنید،  $a = AO$  از  $A$  عمودی بر  $AO$  رسم کنید تا ربع دایره را در  $M$  قطع کند. زاویه‌ای که پاره خط  $OM$  با شعاع افقی نیم دایره می‌سازد، جواب است.



$$OA = MH = \sin \beta$$

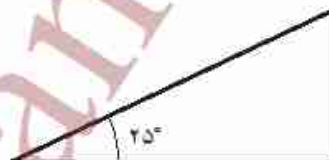
حال به کمک نقاله می‌توان اندازه زاویه  $\beta$  را اندازه گرفت.

نتیجه از دو بند (۱) و (۲): سینوس هر زاویه عددی بین ۰ و ۱ است و هر عدد بین ۰ و ۱ می‌تواند سینوس یک زاویه تند باشد.

## مسئله‌ها

۱- الف) سینوس زاویه ۲۵ درجه را با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب به طور تقریبی محاسبه کنید.

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویه تند آن ۲۵ درجه باشد سپس وتر و طول ضلع روبرو به این زاویه را با خط کش اندازه‌گیری می‌کنیم و نسبت ضلع روبرو به این زاویه به وتر، سینوس ۲۵ درجه می‌باشد. پس:



$$\sin 25^\circ \approx 0.42$$

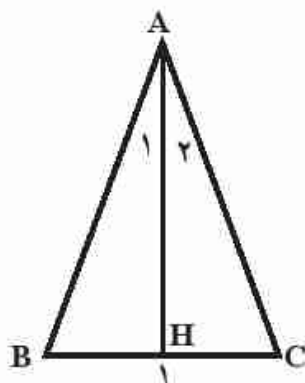
ب) یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که زاویه رأس آن ۵۰ درجه باشد اگر فاعده این مثلث ۱۰ سانتی‌متر باشد، طول ساق آن را تعیین کنید

ها و فرایندها:

ارتفاع این مثلث را از رأس آن رسم می‌کنیم. چون در مثلث متساوی‌الساقین



میانه و عمود منصف و ارتفاع و نیمساز رسم شده از رأس بر هم منطبق اند داریم:  
 $\angle A_1 = \angle A_2 = 25^\circ$  و  $HB = CH = 5$  در مثلث قائم الزاویه BHA یا CHA،  
 $\angle HAB = 25^\circ$  و

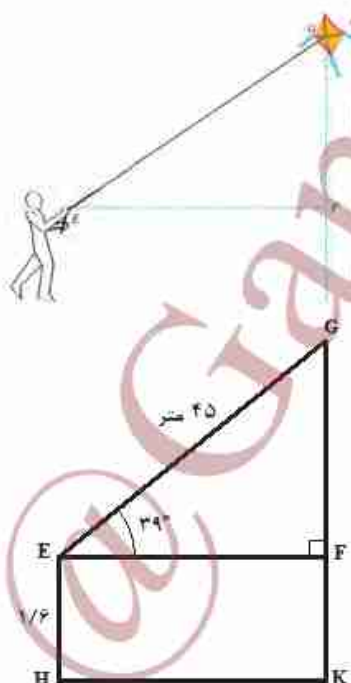


$$\sin 25^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{AB} \Rightarrow AB = \frac{5}{\sin 25^\circ} \approx 11.83$$

۲) سینوس چه زاویه‌ای برابر ۰.۸ است؟

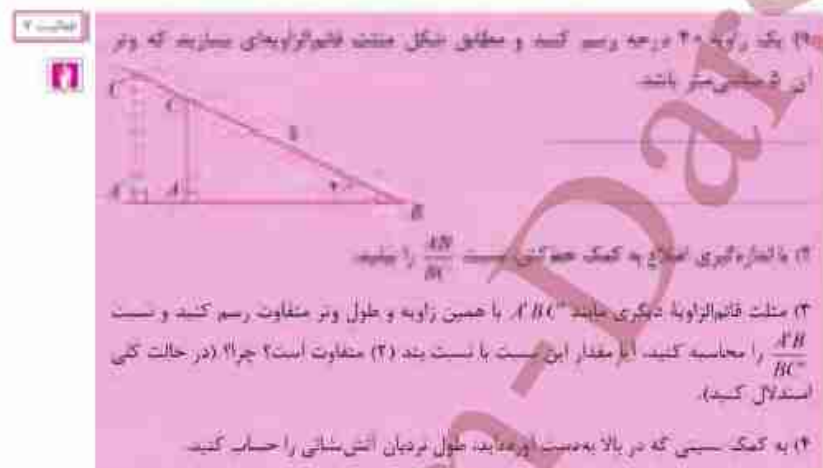
می‌توانیم مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کنیم که طول وتر آن  $10^\circ$  واحد و یکی از ضلع‌های دیگرش ۸ واحد باشد. زاویه روبه‌رو به ضلع به طول ۸ جواب است. این زاویه را با نقاله اندازه می‌گیریم که تقریباً  $53^\circ$  درجه است.

۳) رفا بادبادکی را به هوا فرستاده است. فرض کنید ۴۵ متر نخ بادبادک از او رها شده است. طبق شکل، زاویه نخ یا سطح افقی  $39^\circ$  درجه و فاصله دست رفا از سطح زمین یک متر و شعاع سطحی هوا است. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟

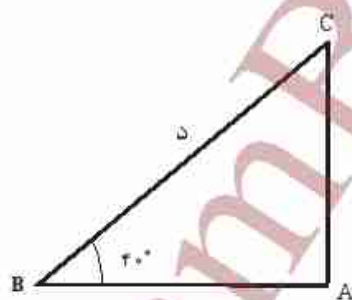


$$\sin 39^\circ = \frac{GF}{45} \Rightarrow GF \approx 28.32$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع بادبادک} = GF + FK \approx 28.32 + 1/6 = 29.92$$



۱) در این بند هرجو باید توانایی رسم داشته باشد و به کمک خط‌کش و پرگار و نقاله مثلث خواسته شده را رسم کند.



۲) به کمک خط‌کش AB و BC را اندازه‌گیری می‌کنیم.  $BC=5$  و  $AB \approx 3.8$

$$\frac{AB}{BC} \approx 0.76 \text{ در نتیجه}$$

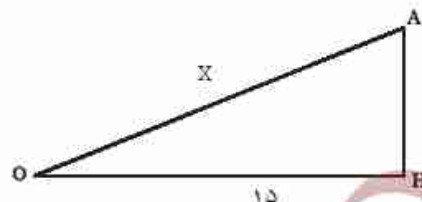
۳)  $\frac{A'B}{BC'} \approx 0.76$  خیر، زیرا دو مثلث رسم شده، دو مثلث قائم الزاویه با زاویه تند

مساوی ۴۰ درجه می‌باشند و چون هر کدام یک زاویه ۹۰ درجه نیز دارند با هم متشابه‌اند و اگر نسبت اضلاع متناظر را در این مثلث‌های متشابه بنویسیم با هم

مساوی‌اند.



مثلی که در مسئله آتش کردیم متشابه‌اند (به خاطر بند ۳). با نوشتن نسبت اضلاع متناظر داریم:  
نشانی رسم کردیم با مثلی که در بند (۲) رسم



$$\frac{15 \text{ متر}}{\text{طول نردبان}} = \frac{OH}{OA} = \frac{AB}{BC} \approx 0.76 \Rightarrow \text{طول نردبان} \approx \frac{15}{0.76} = 19.7 \text{ متر}$$

در ادامه این بخش، مفهوم کسینوس به‌طور رسمی تعریف می‌شود و مثال‌هایی ارائه می‌شود.

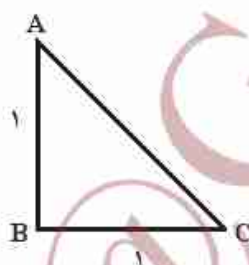
### مقدار دقیق کسینوس

۱) یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین رسم کنید.  
الف) نشان دهید زاویه‌های تند این مثلث ۴۵ درجه‌اند.  
ب) اگر طول ساق‌ها را به اندازه یک واحد در نظر بگیرید، طول وتر این مثلث چقدر است؟  
ج) با استفاده از محاسبات با کسینوس و تانژانت زاویه ۴۵ درجه را بدست آورید.

۲) مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ واحد را در نظر بگیرید و یکی از ارتفاع‌های آن را رسم کنید.  
الف) طول ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه رسم شده را حساب کنید.  
ب) با استفاده از محاسبات کسینوس و تانژانت زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ درجه را بدست آورید.

۳) به کمک دو سوال بالا، جدول زیر را تکمیل کنید.

| زاویه | کسینوس | تانژانت |
|-------|--------|---------|
| ۳۰    |        |         |
| ۴۵    |        |         |
| ۶۰    |        |         |



الف: چون دو ضلع این مثلث با هم مساوی‌اند  $\angle A = \angle C$  و چون مجموع آنها ۹۰ درجه است، هر دو زاویه ۴۵ درجه هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle C \\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ, \angle B = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A = \angle C = 45^\circ$$



(۱) ب:

اگر یکی از ضلع‌های آن ۱ باشد ضلع دیگرش هم ۱ است و با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توان طول وتر این مثلث را یافت.

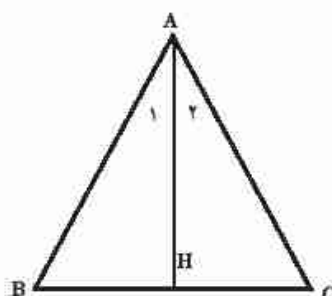
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$$

(۱) پ:

$$\sin \angle A = \sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \cos \angle A = \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{1} = 1$$

۲:



(الف) می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع همه ضلع‌ها و زاویه‌ها مساوی‌اند. در نتیجه:

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$  از طرفی ارتفاع و نیمساز و میانه و عمود منصف رسم شده از همه رأس‌ها یکسان هستند، پس

$$HB = CH = \frac{CB}{2} = \frac{1}{2} \text{ و } \angle HAB = \angle HAC = 30^\circ = \frac{\angle A}{2}$$

در مثلث قائم الزاویه ABH به کمک رابطه فیثاغورس داریم

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 1^2 = AH^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ب)

$$\cos 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \text{ و } \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

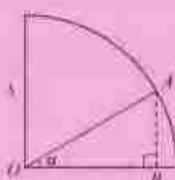


این محاسبه‌ها را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم.

| نسبت‌های مثلثاتی | ۳۰ درجه              | ۴۵ درجه              | ۶۰ درجه              |
|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| سینوس            | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| کسینوس           | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |
| تانژانت          | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ۱                    | $\sqrt{3}$           |

## فعالیت آموزشی

نگرین، ربع دایره به شعاع واحد، مانند شکل زیر، رسم کنید.



نقطه A، را روی ربع دایره انتخاب کنید. طول پاره‌خط OH چه رابطه‌ای با زاویه α دارد؟

(۱) با کم یا زیاد شدن زاویه α، کسینوس آن چه تغییری می‌کند؟

(۲) کسینوس زاویه α، چه اعدادی می‌تواند باشد؟

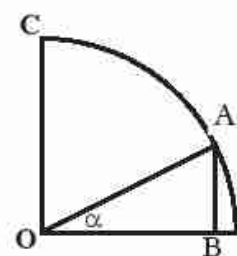
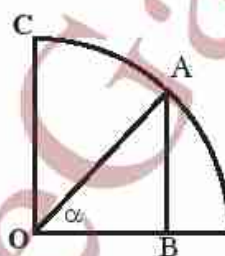
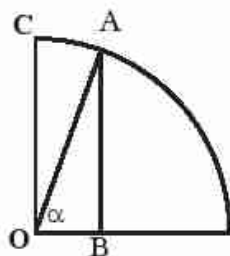
(۳) با نزدیک شدن زاویه α به صفر، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

(۴) با نزدیک شدن زاویه α به ۹۰ درجه، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟



با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه تند در مثلث‌های قائم الزاویه، چون مثلث در رأس B قائمه است، کسینوس زاویه  $\alpha$  عبارت است از  $\frac{BO}{AO}$  ولی چون وتر این مثلث که همان شعاع ربع دایره (۱ واحد) است،  $OB = \cos \alpha$  در کلاس توضیح دهید که فقط در این شکل که طول وتر ۱ واحد است، ضلع مجاور، کسینوس زاویه را نشان می‌دهد.

با توجه به شکل دیده می‌شود که با زیاد شدن زاویه  $\alpha$  طول پاره خط BO کوچک می‌شود. بنابراین کسینوس  $\alpha$  کوچک‌تر می‌شود و با کم شدن  $\alpha$  کسینوس  $\alpha$  بزرگ‌تر می‌شود. در شکل‌های زیر این مطلب را به صورت شهودی مشاهده می‌کنید.



چون در مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع زاویه قائمه از وتر کوچک‌تر است داریم:  $BO < AO = 1$ . بنابراین  $\cos \alpha < 1$  و چون  $\cos \alpha$  طول پاره خط BO است داریم:  $\cos \alpha > 0$ . پس:  $0 < \cos \alpha < 1$  یعنی کسینوس زاویه تند  $\alpha$  عددی بین ۰ و ۱ است.

با نزدیک شدن زاویه  $\alpha$  به صفر طول OB بزرگ می‌شود و به شعاع افقی نزدیک می‌شود یعنی  $\cos \alpha$  به عدد یک نزدیک می‌شود.

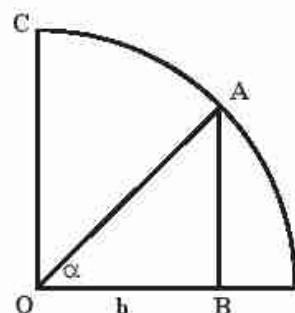
با نزدیک شدن زاویه  $\alpha$  به  $90^\circ$  دیده می‌شود BO کوچک می‌شود. یعنی کسینوس زاویه  $\alpha$  از هر عدد مثبتی کوچک‌تر شده و به صفر نزدیک می‌شود. مناسب است که تذکر داده شود که فقط در این شکل که طول وتر ۱ است، ضلع مجاور، کسینوس زاویه را نشان می‌دهد. بهتر است مثالی زده شود که وتر در آن ۱ نباشد. (به مثال ابتدای بخش کسینوس در کتاب کار توجه شود)





۱ با توجه به واحد بودن طول وتر در مثلث قائم‌الزاویه OAB داریم:  $\cos \alpha = OB = b$ .

۲ ربع دایره‌ای به شعاع واحد رسم کنید. سپس روی شعاع افقی آن به اندازه  $b$  جدا کنید که  $b = BO$ . از B عمودی بر BO رسم کنید تا ربع دایره را در A قطع کند. زاویه AOB جواب مسئله است زیرا  $\cos \alpha = OB = b$ .



سپس به کمک نقاله می‌توان اندازه آن زاویه را محاسبه نمود.

این فعالیت نشان می‌دهد که هر عدد بین  $0$  و  $1$  می‌تواند برابر کسینوس زاویه‌ای باشد.

دقت شود در این بخش به بدفهمی و نامثال‌های

کسینوس نیز پرداخته شود تا احتمال اشتباه هنجو به حداقل برسد. مثلاً کدام یک از رابطه‌های زیر درست یا نادرست‌اند (به کمک محاسبه)

۱)  $\frac{\cos 60^\circ}{2 \cos 30^\circ} = \cos 30^\circ$

۲)  $\cos 80^\circ = 2 \cos 40^\circ$

۳ آیا زاویه تندی وجود دارد که کسینوس آن  $\frac{4}{3}$  باشد؟ چرا؟

پاسخ این مسئله خیر است زیرا  $\frac{4}{3} > 1$  درحالی که همیشه کسینوس یک زاویه

تد بین  $0$  و  $1$  است.

## مسئله‌ها

۱) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب، گیبسوس راویدهای ۱۵ و ۷۵ درجه را حساب کنید.

به کمک خط کش و نقاله قبلاً توضیح کامل داده شده است.

$$\cos 15^\circ \approx 0.96, \cos 75^\circ \approx 0.26$$

۲) زمین بزرگی به شکل مثلث متساوی‌الساقین به فاصله ۱۰۰ متر و زاویه ۳۰ درجه است.

الف) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب، از طریق اندازه‌گیری یا خط کش، گیبسوس زاویه ۳۰ درجه را به طور تقریبی محاسبه کنید.

ب) طول اضلاع زمین مثلث شکل را بیابید.

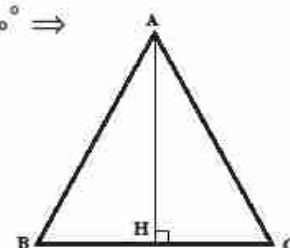
پ) مساحت زمین را بیابید.

الف) همانند سؤال ۱ عمل می‌کنیم که نتیجه می‌شود  $\cos 50^\circ \approx 0.64$

ب) شکل زمین را مانند زیر رسم می‌کنیم. از A ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویه HBA:

$$\angle B = 50^\circ \text{ و } \cos \angle B = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \frac{BC}{2} = 50 \text{ m} \Rightarrow \cos \angle B = \frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow AC = AB = \frac{50}{\cos 50^\circ} \approx \frac{50}{0.64} = 78.125$$



پ) از رابطه فیثاغورس داریم :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(78/125)^2 - 50^2} = 60$$

$$S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{60 \times 100}{2} = 3000$$



ابتدا به کمک مثلث قائم‌الزاویه مناسب مقدار کسینوس زوایه‌های ۳۲ و ۴۰ درجه را می‌یابیم. سپس با استفاده از تعریف کسینوس مقدار X و Y را یافته و با هم جمع می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \cos 32^\circ &= \frac{y}{1200} \\ \cos 32^\circ &= 0/85 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 1200 \cdot \cos 32^\circ = 1200 \cdot 0/85 = 1020m$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 40^\circ &= \frac{x}{800} \\ \cos 40^\circ &= 0/77 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 800 \cdot \cos 40^\circ = 800 \cdot 0/77 = 616m$$

$$x + y = 1636m$$





الف) نادرست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود، کسینوس آن کوچک می شود.  
ب) درست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود تانژانت آن زاویه نیز بزرگ می شود.  
پ) نادرست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود سینوس آن زاویه نیز بزرگ می شود.

۵) مقدار عددی عبارت‌های زیر را پیدا کنید

$$A = \frac{\sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \cos 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} \quad \text{و} \quad B = \frac{\tan 60^\circ + 2\cos 30^\circ - 2\sqrt{3}}{1 + \sin 60^\circ}$$

$$B = \frac{\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \quad \text{و} \quad A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$



$$\cos 35^\circ = \frac{m}{x} \Rightarrow m = x \cos 35^\circ, \quad \cos 72^\circ = \frac{n}{y} \Rightarrow n = y \cos 72^\circ$$

$$\begin{cases} x \cos 35^\circ + y \cos 72^\circ = m + n = 33 \\ x \sin 35^\circ = h = y \sin 72^\circ \Rightarrow x = \frac{y \sin 72^\circ}{\sin 35^\circ} \Rightarrow y \approx 19/7, \quad x \approx 32/7 \end{cases}$$

۷) با انجام محاسبات عددی، درستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف)  $\cos 60^\circ = 2 \cos 30^\circ$  (الف)  $\sin 60^\circ < 2 \sin 30^\circ$  (ب)  
 ب)  $\cos 60^\circ < 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$  (پ)  $\tan 60^\circ + \tan 30^\circ = \frac{2}{\sin 60^\circ}$  (د)

با جایگذاری مقادیر نسبت‌های مثلثاتی می‌توان درستی یا نادرستی آنها را تعیین کرد.

$$\frac{1}{2} \neq 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$





$$\frac{\sqrt{3}}{2} < 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

ب) درست

$$\frac{1}{2} < 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

پ) درست زیرا

$$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

ت) درست زیرا

۱) ست راست تناوبی‌های زیر را پیدا کنید.

$$\text{الف) } A = \sin 3\theta + \cos 3\theta$$

$$\text{ب) } B = \frac{\tan 3\theta - \sec 3\theta}{\tan 3\theta + \sec 3\theta}$$

$$\text{پ) } C = 1 - 2 \sin 3\theta$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$B = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)}{2(1) + 2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{3}$$

$$C = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$