

## مبحث تابع

قابل توجه دانش آموزان رشته ریاضی : همه ی سوالات را می توانید حل کنید.

قابل توجه دانش آموزان رشته تجربی : در قسمت های ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۷ همه ی سوالات را می توانید حل کنید.

در قسمت ۴ از سوال ۱ تا ۴۵ با توجه به کتاب درسی شما، برایتان مناسب است.

در قسمت ۸ از سوال ۱ تا ۴ با توجه به کتاب درسی شما، برایتان مناسب است.

## فهرست

|                                     |                   |                 |
|-------------------------------------|-------------------|-----------------|
| قسمت ۱ : مقدمات تابع .....          | سوال : صفحه ۱ ،   | پاسخ : صفحه ۶   |
| قسمت ۲ : دامنه و برد تابع .....     | سوال : صفحه ۲۰ ،  | پاسخ : صفحه ۲۸  |
| قسمت ۳ : اعمال روی توابع .....      | سوال : صفحه ۵۱ ،  | پاسخ : صفحه ۵۹  |
| قسمت ۴ : تبدیل نمودار توابع .....   | سوال : صفحه ۷۸ ،  | پاسخ : صفحه ۹۰  |
| قسمت ۵ : توابع یکنوا .....          | سوال : صفحه ۱۱۲ ، | پاسخ : صفحه ۱۱۶ |
| قسمت ۶ : توابع یک به یک .....       | سوال : صفحه ۱۲۶ ، | پاسخ : صفحه ۱۲۸ |
| قسمت ۷ : وارون تابع .....           | سوال : صفحه ۱۳۶ ، | پاسخ : صفحه ۱۴۶ |
| قسمت ۸ : تقسیم چند جمله ای ها ..... | سوال : صفحه ۱۷۱ ، | پاسخ : صفحه ۱۷۴ |

۱ اگر بدانیم رابطه  $f = \{(a, 3), (5, a^2 - 1), (2, -1), (5, 3), (2, b)\}$  یک تابع است، آنگاه حاصل  $\frac{f(-2) + f(2)}{f(5)}$  کدام است؟

$$\begin{array}{l} (2) \quad \frac{3}{2} \\ (4) \quad \frac{4}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1) \quad \frac{3}{4} \\ (3) \quad \frac{2}{3} \end{array}$$

۲ تابع  $f = \{(-1, 2), (7, m^2 - 4m), (m, 6), (2, 5), (7, 5)\}$  چند نقطه بالای نیمساز ناحیه اول دارد؟

(۲) دو نقطه

(۱) یک نقطه

(۴) هیچ نقطه‌ای

(۳) سه نقطه

۳ اگر  $f = \{(2, a + b), (-2a, b), (2, c + 2), (1, 3 + c), (-2, 3), (1, b + 2)\}$  یک تابع باشد، آنگاه  $a + b + c$  کدام است؟

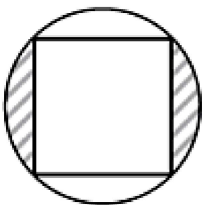
(۲) ۵

(۱) ۴

(۴) ۷

(۳) ۶

۴ در شکل زیر، مربعی درون یک دایره محاط شده است. مساحت قسمت هاشورخورده، به صورت تابعی از محیط دایره کدام است؟



$$(1) S = \frac{\pi - 2}{8\pi^2} A$$

$$(2) S = \frac{\pi - 2}{4\pi^2} A$$

$$(3) S = \frac{\pi - 2}{8\pi^2} A^2$$

$$(4) S = \frac{\pi - 2}{4\pi^2} A^2$$

۵ مستطیلی را که دو رأس آن بر روی نیم بیضی به معادله  $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$  و دو رأس دیگر آن بر روی محور  $x$  ها باشد را در نظر بگیرید. مساحت این مستطیل به صورت تابعی از  $x$  کدام است؟

$$(2) S = \sqrt{2x^2 - \frac{2}{9}x^4}$$

$$(1) S = \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{9}}$$

$$(4) S = \sqrt{16x^2 - \frac{16}{9}x^4}$$

$$(3) S = \sqrt{4x^2 - \frac{4}{9}x^4}$$



۶ یک تانکر گاز از یک استوانه به ارتفاع ۸ متر و دو نیمکره به شعاع  $r$  متر در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. حجم تانکر برحسب تابعی از  $r$  کدام است؟

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 \quad (۲)$$

$$V(r) = \frac{4\pi r^3}{3} + 4\pi r^2 \quad (۱)$$

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 \quad (۴)$$

$$V(r) = \pi r^3 + \pi r^2 \quad (۳)$$

۷ اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $B = \{1, 2, 3\}$  چند تابع ثابت از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  می توانیم تعریف کنیم؟

(۲) ۵

(۱) ۱۵

(۴) ۶

(۳) ۳

۸ چند تابع از مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  به  $B = \{m, n, p, q\}$  می توان نوشت به طوری که تعداد اعضای دامنه و برد آن برابر باشد؟

(۲) ۲۴

(۱) ۱۲

(۴) ۶۴

(۳) ۲۷

۹ چه تعداد تابع مانند  $f$  از مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  به مجموعه  $\{e, f, c\}$  وجود دارد به شرطی که  $f(a) = e$  و  $f(b) \in c$  باشد؟

(۲) ۳۶

(۱) ۸۱

(۴) ۱۸

(۳) ۲۷

۱۰ در کدام گزینه، رابطه  $y$  برحسب  $x$  یک تابع را نمایش می دهد؟

$$x = 2(y + 1)^3 \quad (۲)$$

$$|x| + |y| = 5 \quad (۱)$$

$$|xy| = 4 \quad (۴)$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 4 \quad (۳)$$

۱۱ در کدام رابطه،  $y$  تابعی از  $x$  نیست؟

$$2y + |y| = x \quad (۲)$$

$$2y - |y| = x \quad (۱)$$

$$y + \sqrt{y} = \sqrt{x} \quad (۴)$$

$$y - \sqrt{y} = \sqrt{x} \quad (۳)$$

۱۲ به ازای کدام مقدار  $a$ ، رابطه غیرتهی  $x^2 + y^2 = -8x + 2y - a$  تابع است؟

(۲) ۹

(۱) ۴

(۴) ۱۹

(۳) ۱۷

۱۳ اگر  $f(x) = \begin{cases} 2ax + 5b & ; x \geq 2 \\ -2x^2 + 1 & ; -1 \leq x \leq 2 \\ b - ax & ; x \leq -1 \end{cases}$  یک تابع باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟

(۲) -۱

(۱) -۶

(۴) ۸

(۳) صفر

۱۴ اگر  $f(\sqrt{x}) = x - \sqrt{x}$  باشد، حاصل  $f(5) - 2f(4)$  کدام است؟

- (۱) -۸  
(۲) -۴  
(۳) ۴  
(۴) ۸

۱۵ در مورد تابع  $f$  با دامنه  $\mathbb{R}$ ، اگر تساوی  $f(2x+1) + f(3) = 5x - 1$  برقرار باشد، آنگاه مقدار  $f(5)$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۷

۱۶ تابع  $f(x) = \begin{cases} 2^{ax} & ; x \geq 0 \\ 4^{-ax} & ; x < 0 \end{cases}$  متقارن است. اگر  $f(2) = 3$  باشد، آنگاه  $f(-4) + f(-6)$  کدام است؟

- (۱) ۱۰۲۴  
(۲) ۸۱۰  
(۳) ۵۱۲  
(۴) ۷۲۹

۱۷ کدام گزینه نمی تواند هم دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{x-3} + 2$  باشد؟

- (۱)  $[0, +\infty)$   
(۲)  $(0, +\infty)$   
(۳)  $[2, +\infty)$   
(۴)  $(2, +\infty)$

۱۸ نمودار توابع  $f(x) = 3x + a$  و  $g(x) = bx^2 + 2ax + 14$  در نقطه  $(2, 2)$  تقاطع هستند. حاصل  $ab$  کدام است؟

- (۱) ۱۶  
(۲) ۸  
(۳) ۱۲  
(۴) ۱۰

۱۹ اگر  $f(x)$  یک تابع خطی و  $f(2) = 1$ ،  $f(3) = 4$  و  $f(-3) = 4$  باشد، آنگاه نمودار تابع  $f$  محور  $y$  را با چه عرضی قطع می کند؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲)  $\frac{1}{3}$   
(۳)  $-\frac{1}{2}$   
(۴)  $-\frac{1}{3}$

۲۰ تابع خطی  $f(2) = 3$  و  $2f(2) = 1$  اگر دامنه تابع بازه  $(-2, 4)$  باشد، برد تابع کدام است؟

- (۱)  $[4, 19)$   
(۲)  $[-19, 29)$   
(۳)  $[-29, 11)$   
(۴)  $[-29, 19)$

۲۱ اگر تابعی خطی باشد به طوری که رابطه  $f(x-1) + f(x+2) = x$  برقرار باشد، آنگاه  $f(2)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{2}$   
(۲)  $\frac{3}{4}$   
(۳) ۱  
(۴)  $\frac{1}{2}$

۲۲ اگر  $f$ ، تابعی خطی با شیب منفی باشد و داشته باشیم  $f(x) + (f(x))^2 = 4x^2 - 6x + 2$ ، مقدار  $f(7)$  کدام است؟

(۱) -۱۳ (۲) -۱۵

(۳) -۱۷ (۴) -۱۱

۲۳ دامنه و برد تابع خطی  $y = ax + b$  با  $f(x)$  منفی به ترتیب  $[-1, 5]$  و  $[-4, 8]$  است. تابع  $f$ ، نمودار تابع همانی را در نقطه  $A$  قطع می کند. ضابطه تابع ثابتی که از نقطه  $A$  می گذرد، کدام است؟

(۱)  $y = 2$  (۲)  $x = 2$

(۳)  $y = 3$  (۴)  $x = 3$

۲۴ اگر تابع  $f = \{(1, m+2), (0, m), (2, 2)\}$  یک تابع خطی باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) -۱ (۴) -۲

۲۵ اگر  $f = \{(4a+b, b+1), (4a+b^2, 1-2b), (b^2, 4)\}$  یک تابع همانی باشد،  $a+b$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{7}{4}$  (۲)  $\frac{9}{4}$

(۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $-\frac{1}{4}$

۲۶ اگر  $f$  تابعی همانی و  $f(2) + f(3-a) = 6$  باشد، مقدار  $f(1-a)$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۳

۲۷ اگر  $f(x) = \frac{ax-3}{x-3a}$  یک تابع ثابت باشد، نمودار این تابع کدام گزینه می تواند باشد؟



تابع  $\frac{3x^2 + ax + b}{1x^2 + cx + d}$  یک تابع ثابت  $f(x)$  مطابقت  
است؟

و دامنه  $y =$

کدام  $\frac{a - b + c - d}{k}$  حاصل  $\mathbb{R} - \{-3\}$  است.

(۲) ۱۰

(۱) -۱۰

(۴) -۵

(۳) ۵

تابع همانی، تابع ثابت و تابع خطی است. اگر داشته باشیم:  $2f(-2) = g(2)$ ،  $h(-2) = g(0) + 1$  و  
 $h(2) = f(2) + g(3) + 1$ ، مجموعه جواب نامعادله  $h(x) \geq 0$  کدام است؟ (دامنه هر سه تابع،  $\mathbb{R}$  است.)

(۲)  $[0, +\infty)$

(۱)  $(-\infty, -2]$

(۴)  $(-\infty, 0]$

(۳)  $[4, +\infty)$



از آنجا که رابطه  $f$  تابع است، پس هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه اولشان یکی نیست و در صورت یکی بودن مؤلفه های اول باید مؤلفه های دوم آن ها نیز برابر باشند، پس:

$$\left. \begin{array}{l} (5, a^2 - 1) \in f \\ (5, 3) \in f \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 - 1 = 3 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} a = +2 & \text{غ.ق.ق} \\ a = -2 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

زای ، دو زوج مرتب  $a$  و  $(2, 3)$  در رابطه خواهد بود که شرط تابع بودن را نقض می کند.

$$\left. \begin{array}{l} (2, -1) \in f \\ (2, b) \in f \end{array} \right\} \Rightarrow (2, b) = (2, -1) \Rightarrow b = -1$$

$$f = \{(-2, 3), (5, 3), (2, -1)\}$$

$$\frac{f(-2) + f(2)}{f(5)} = \frac{3 + (-1)}{3} = \frac{2}{3}$$

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۶ ۱۳۹۷

ایران توننه  
توشه ای برای موفقیت

در یک تابع اگر دو زوج مرتب با مؤلفه های اول برابر وجود داشته باشد، مؤلفه های دوم آن زوج مرتب ها نیز برابرند، پس:

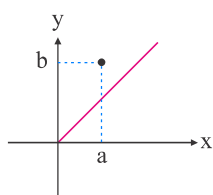
$$(7, m^2 - 4m) = (7, 5) \Rightarrow m^2 - 4m = 5$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m - 5 = 0 \Rightarrow (m - 5)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 5 \end{cases}$$

۱- دو زوج مرتب  $(-1, 2)$  و  $(-1, 6)$  را خواهیم داشت که شرط تابع بودن را برآورده نمی کنند، پس  $m = 5$  قابل قبول است؛ بنابراین:

$$f = \{(-1, 2), (7, 5), (5, 6), (2, 5)\}$$

اگر نقطه  $(a, b)$  بالای نیمساز ناحیه اول باشد، آنگاه:



الف)  $a$  و  $b$  مثبت اند.

ب)  $a < b$ .

بنابراین تنها دو نقطه  $(2, 5)$  و  $(5, 6)$  این شرایط را دارند.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

$$\begin{cases} (2, a+b), (2, c+2) \in f \Rightarrow a+b = c+2 \Rightarrow b-c = 2-a \\ (1, 3+c), (1, b+2) \in f \Rightarrow 3+c = b+2 \Rightarrow b-c = +1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2-a = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow f = \{(2, 1+b), (-2, b), (2, c+2), (1, 3+c), (-2, 3), (1, b+2)\} \Rightarrow b = 3$$

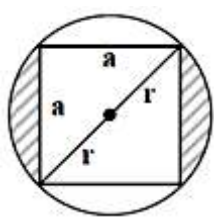
$$\Rightarrow f = \{(2, 4), (-2, 3), (2, c+2), (1, 3+c), (1, 5)\} \Rightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow f = \{(2, 4), (-2, 3), (1, 5)\}$$

$$a + b + c = 1 + 3 + 2 = 6$$

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۸

شعاع دایره را  $r$  و ضلع مربع را  $a$  فرض می کنیم. باتوجه به شکل داریم:



$$a^2 + a^2 = (2r)^2 \Rightarrow a^2 = 2r^2 \quad (1)$$

$$S_{\text{هاشور}} = \frac{S_{\text{دایره}} - S_{\text{مربع}}}{2} = \frac{\pi r^2 - a^2}{2} \stackrel{(1)}{=} \frac{\pi - 2}{2} r^2 \quad (*)$$

حال مقدار شعاع را برحسب محیط به دست می آوریم:

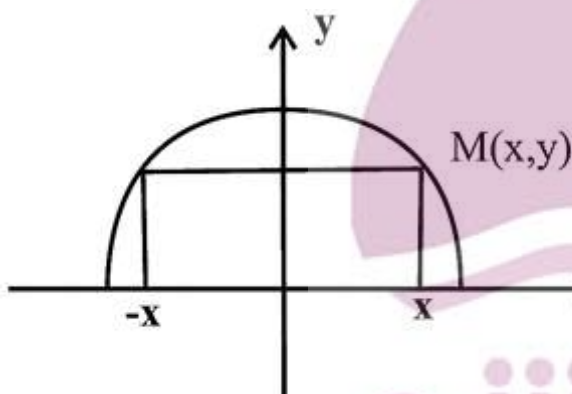
$$A = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{A}{2\pi}$$

با جایگذاری این مقدار در  $(*)$ ، داریم:

$$S = \frac{\pi - 2}{2} r^2 = \frac{\pi - 2}{2} \times \frac{A^2}{4\pi^2} = \frac{\pi - 2}{8\pi^2} A^2$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

مطابق شکل، اگر طول مستطیل را  $2x$  و عرض آن را  $y$  فرض کنیم، آنگاه داریم:



$$S = 2xy = \frac{4}{3} x \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{\frac{16}{9} x^2 (9 - x^2)} \Rightarrow S = \sqrt{16x^2 - \frac{16}{9} x^4}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

حجم تانکر برابر است با:

حجم استوانه + (حجم هر نیمکره)  $\times ۲ = V(r)$  = حجم تانکر

$$= V(r) = ۲\left(\frac{۲}{۳}\pi r^3\right) + \pi r^2 \times \lambda$$

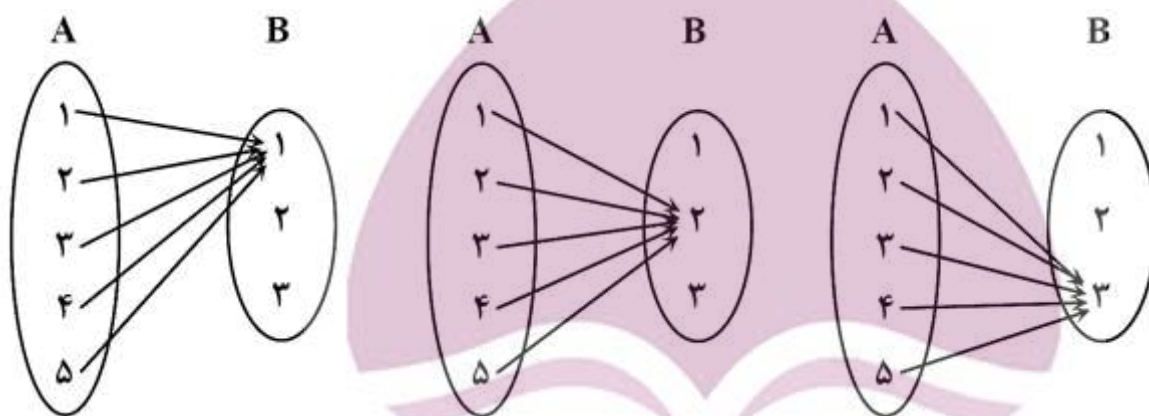
$$\Rightarrow V(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^3 + \lambda \pi r^2$$

توجه کنید که حجم استوانه از رابطه "مساحت قاعده  $\times$  ارتفاع" قابل محاسبه است.

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۶

نکته: تابعی مانند  $f$  را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم.  
به کمک نمودارها، حالات مختلفی را که می‌توان از  $A$  به  $B$  یک تابع ثابت تعریف کرد نشان می‌دهیم:



بنابراین می‌توان ۳ تابع ثابت از  $A$  به  $B$  تعریف کرد.

گزینه دو علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۷

گزینه دو ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۷

دامنه تابع مجموعه  $A$  است که ۳ عضو دارد. واضح است که برد تابع نیز باید سه عضوی باشد؛ بنابراین سه عضو متمایز از  $B$  باید انتخاب کنیم که این سه عضو، خود به  $f = \{(a, \square), (b, \square), (c, \square)\}$  ها  $۲ \times ۳ \times ۴ = ۲۴$  حالت می‌توانند جابه‌جا شوند (به عضوهای متفاوتی از  $A$  وصل شوند). به بیان دیگر در تابع

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸



تعداد انتخاب های هریک از عضوهای مجموعه A را پیدا می کنیم.

تعداد انتخاب ها :  $\overset{a}{\underbrace{1}} \overset{b}{\underbrace{2}} \overset{c}{\underbrace{3}} \overset{d}{\underbrace{3}}$

پس تعداد تابع های f برابر با  $1 \times 2 \times 3 \times 3 = 18$  است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

برای آنکه y تابعی از x باشد باید به ازای هر x فقط یک y وجود داشته باشد:

گزینه ۱ :  $x = 0 \Rightarrow |y| = 5 \Rightarrow y = -5$  یا  $y = 5$

گزینه ۳ :  $x = 1 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = -2$  یا  $y = 2$

گزینه ۴ :  $x = 1 \Rightarrow |y| = 4 \Rightarrow y = 4$  یا  $y = -4$

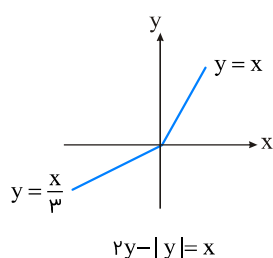
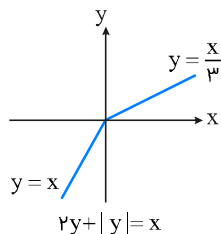
قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۸



گزینه ۳ صحیح است. تابع بودن رابطه  $\sqrt{y} - \sqrt{x} = y$  را می توان با مثال نقض زیر رد کرد:

$$x = 0 \Rightarrow y - \sqrt{y} = 0 \Rightarrow y = \sqrt{y} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

روابط گزینه های ۱ و ۲ را می توان رسم کرد و تابع بودن آن ها را اثبات کرد.



در گزینه ۴ نیز داریم:

$$y + \sqrt{y} + \frac{1}{4} = \sqrt{x} + \frac{1}{4} \Rightarrow (\sqrt{y} + \frac{1}{4})^2 = \sqrt{x} + \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{(\sqrt{y} + \frac{1}{4}) > 0} \sqrt{y} + \frac{1}{4} = \sqrt{\sqrt{x} + \frac{1}{4}} \Rightarrow y = (\sqrt{\sqrt{x} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4})^2 \text{ تابع است}$$

ایران توننه  
توشه ای برای موفقیت

$$x^2 + y^2 + \lambda x - 2y + a = 0$$

$$(x + 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 + a = 0$$

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 17 - a$$

برای اینکه ضابطه فوق، یک تابع غیرتهی باشد باید  $17 - a = 0$  شود، یعنی:

$$17 - a = 0 \Rightarrow a = 17$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

هرکدام از اعداد  $x = -1$  و  $x = 2$  در دامنه دو ضابطه قرار دارند. از آنجایی که  $f$  یک تابع است، پس باید مقدار هر دو ضابطه اول و دوم به ازای  $x = -1$  و  $x = 2$  برابر باشد.

$$\begin{cases} \text{ضابطه اول} & f(2) = 2a(2) + 5b \\ \text{ضابطه دوم} & f(2) = -2(2)^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow 4a + 5b = -7 \quad (*)$$

$$\begin{cases} \text{ضابطه دوم} & f(-1) = -2(-1)^2 + 1 \\ \text{ضابطه سوم} & f(-1) = b - a(-1) \end{cases} \Rightarrow a + b = -1 \quad (**)$$

با قرار دادن هرکدام از معادلات  $(*)$  و  $(**)$  در یک دستگاه و حل آن، مقادیر  $a$  و  $b$  را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 4a + 5b = -7 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 5b = -7 \\ -4a - 4b = 4 \end{cases} \Rightarrow b = -3 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین:

$$ab = 2 \times (-3) = -6$$

گزینه دو علوم تجربی دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

گزینه دو ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

$$\sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow f(5) = 25 - \sqrt{25} = 25 - 5 = 20$$

$$\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow f(4) = 16 - \sqrt{16} = 16 - 4 = 12$$

$$\begin{cases} f(5) = 20 \\ f(4) = 12 \end{cases} \Rightarrow f(5) - 2f(4) = 20 - 2 \times 12 = 20 - 24 = -4$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۷

$f(5)$  را تولید کند، یعنی:  $xf(x) + 1$  را به گونه ای قرار می دهیم که

$$2x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(5) + f(3) = 9$$

حال مقدار  $f(3)$  را می دانیم و اگر آن را داشته باشیم مقدار  $f(5)$  به دست می آید. برای به دست آوردن  $f(3)$  داریم:

$$2x + 1 = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(3) + f(3) = 4 \Rightarrow 2f(3) = 4 \Rightarrow f(3) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(5) + f(3) = 9 \\ f(3) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(5) + 2 = 9 \Rightarrow f(5) = 7$$

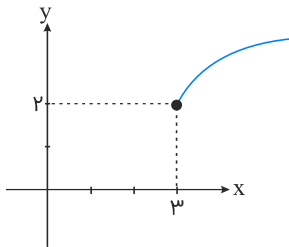
قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۷

$$f(x) = \begin{cases} 2^{ax} & ; x \geq 0 \\ 4^{-ax} & ; x < 0 \end{cases}, f(2) = 3 \Rightarrow 2^{2a} = 3 \Rightarrow 4^a = 3$$

$$f(-4) + f(-6) = 4^{4a} + 4^{6a} = (4^a)^4 + (4^a)^6 = 3^4 + 3^6 = 3^4(1 + 3^2) = 81 \times 10 = 810$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

هر مجموعه دلخواه که شامل برد تابع است، هم دامنه است.



$$R_f = [2, +\infty)$$

ایران توننه  
توشیه ای برای موفقیت

پس تنها گزینه ۴ است که شامل برد تابع نیست.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

هر دو تابع از نقطه  $(1, 2)$  می‌گذرند؛ پس این نقطه در ضابطه هر دو صدق می‌کند:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow 3 + a = 2 \Rightarrow a = -1 \\ g(1) = 2 \Rightarrow b + 2a + 14 = 2 \xrightarrow{a=-1} b = -10 \end{cases} \Rightarrow ab = 10$$

گزینه دو علوم تجربی سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

تابع  $f(x)$  یک تابع خطی است، پس ضابطه آن به صورت  $y = ax + b$  است، بنابراین:

$$f(3) = 3a + b, \quad f(-3) = -3a + b$$

$$\Rightarrow f(3) = f(-3) + 4 \Rightarrow 3a + b = -3a + b + 4 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 2\left(\frac{2}{3}\right) + b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \xrightarrow{x=0} y = -\frac{1}{3}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

$$f(x) = mx + h \xrightarrow{f(2)=3} 3 = 2m + h$$

$$f(1) + 2f(2) = 1 \Rightarrow f(1) + 2 \times 3 = 1 \Rightarrow f(1) = -5$$

$$\xrightarrow{f(1)=-5} -5 = m + h$$

$$\begin{cases} 2m + h = 3 \\ -m - h = 5 \end{cases} \Rightarrow m = 8, \quad h = -13$$

$$\Rightarrow f(x) = 8x - 13$$

$$\begin{cases} f(-2) = -16 - 13 = -29 \\ f(4) = 32 - 13 = 19 \end{cases} \Rightarrow f \text{ برد تابع} = [-29, 19]$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ تابستان ۱۳۹۸

$$f(x) = ax + b$$

$$\Rightarrow f(x-1) + f(x+2) = a(x-1) + b + a(x+2) + b = x$$

$$\Rightarrow 2ax + a + 2b = x \Rightarrow (2a-1)x + (a+2b) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \\ a+2b=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow f(2) = \frac{3}{4}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۸

ضابطه تابع خطی  $f$  را به صورت  $f(x) = ax + b$  در نظر می‌گیریم. (چون شیب  $f$  منفی است، پس  $a < 0$ ) طبق فرض داریم:

$$ax + b + (ax + b)^2 = 4x^2 - 6x + 2$$

$$\Rightarrow a^2x^2 + (a+2ab)x + b^2 + b = 4x^2 - 6x + 2$$

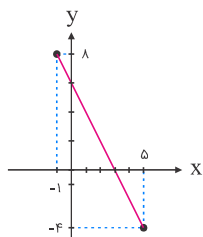
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ a+2ab = -6 \\ b^2 + b = 2 \end{cases} \xrightarrow{a < 0} \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x + 1 \Rightarrow f(7) = -14 + 1 = -13$$

گزینه دو علوم تجربی سوم آزمون شماره ۱۳۹۶

ایران تونل  
توشه ای برای موفقیت

نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است:



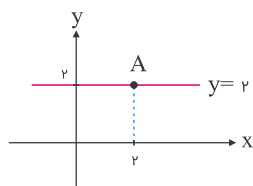
$$m = \frac{8 - (-4)}{-1 - 5} = \frac{12}{-6} = -2$$

$$y - 8 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x + 6 \Rightarrow f(x) = -2x + 6$$

حالا  $f$  را با تابع همانی  $y = x$  قطع می دهیم:

$$-2x + 6 = x \Rightarrow x = 2$$

پس مختصات  $A$  به صورت  $A(2, 2)$  است. ضابطه تابع ثابتی که از  $A$  می گذرد به صورت  $y = 2$  است.



قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ تابستان ۱۳۹۸

$y = ax + b$  نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می شود.

تابعی که بتوان آن را به شکل

نقاط داده شده روی یک تابع خطی قرار دارند. با جایگذاری این نقاط در فرم کلی تابع خطی داریم:

$$(1) \quad a(1) + b = m + 2 \Rightarrow a + b = m + 2$$

$$(2) \quad a(0) + b = m \Rightarrow b = m$$

$$(3) \quad a(2) + b = 2 \Rightarrow 2a + b = 2$$

با جایگذاری معادله (۲) در معادله (۱) داریم  $b = m + 2$  پس  $a = 2$  با جایگذاری این مقدار در معادله ۳ داریم:

$$2(2) + b = 2 \Rightarrow b = -2$$

باتوجه به معادله (۲) داریم:  $m = b = -2$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

گزینه دو علوم تجربی دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

گزینه دو ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

ضابطه تابع همانی به صورت  $f(x) = x$  است، پس خواهیم داشت:

$$4a + b = b + 1 \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$4a + b^2 = 1 - 2b \xrightarrow{a=\frac{1}{4}} 1 + b^2 = 1 - 2b \Rightarrow b^2 + 2b = 0 \Rightarrow b(b+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ b = 0 \end{cases}$$

(نکته: بابت)  $b^2 = 4$  باشد که  $b = \pm 2$  می شود و باتوجه به نتایج قبلی، فقط مقدار  $-2$  قابل قبول است، پس:

$$a + b = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۷

بع همانی  $f$  داریم:  $f(k) = k$  پس:

$$f(3-a) + f(2) = 6 \Rightarrow 3-a+2=6 \Rightarrow a=-1$$

$$f(1-a) = f(1-(-1)) = f(2) = 2$$

در نتیجه:

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

ایران توننه  
توشه ای برای موفقیت



نکته: اگر  $f(x)$  تابعی ثابت باشد، ضابطه آن به صورت  $f(x) = k$  است. ( $k \in \mathbb{R}$ )

راه حل اول:

باتوجه به نکته می توان نوشت:

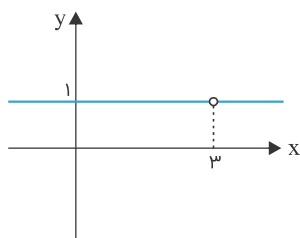
$$\frac{ax - 3}{x - 3a} = k \Rightarrow ax - 3 = kx - 3ak$$

$$\Rightarrow a = k, -3ak = -3 \Rightarrow -3a(a) = -3 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

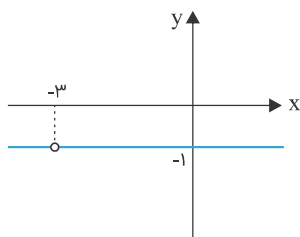
و  $a = -1$  و  $a = 1$  هر دو تابع  $f(x)$  به صورت زیر است:

نتیجه می شود که به ازای

$$a = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x - 3}{x - 3} = 1, \quad x \neq 3$$



$$a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{-x - 3}{x + 3} = \frac{-(x + 3)}{x + 3} = -1, \quad x \neq -3$$



بنابراین گزینه ۴ درست است.

راه حل دوم:

باتوجه به نکته، باید عبارت تساوی  $x$  از صورت و مخرج ساده شود؛ بنابراین:

$$\frac{ax - 3}{x - 3a} = \frac{a(x - \frac{3}{a})}{x - 3a}$$

اگر صورت با مخرج بخواهند باهم ساده شوند، باید داشته باشیم:

$$\frac{3}{a} = 3a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

ادامه راه حل مشابه است.

۳-۱ است، پس  $x = -3$  تنها ریشهٔ مخرج کسر است. از آنجا که مخرج به صورت یک عبارت درجهٔ دوم است؛  
 مضاعف  $A(x+3)^2$  داشته باشد، به عبارتی به صورت  $A(x+3)^2$  واضح است که  $A(x+3)^2$  بوده و در نتیجه  $d = 18$   $c = 12$  خواهد بود.  
 $2x^2 + cx + d$  با مقایسهٔ جملات اول صورت و مخرج، مشخص می شود که صورت قرار است  $\frac{3}{2}$  برابر مخرج باشد، پس  
 این نسبت در بقیهٔ جملات صورت و مخرج نیز برقرار است، یعنی:

$$\begin{cases} a = \frac{3}{2}(12) = 18 \\ b = \frac{3}{2}(18) = 27 \end{cases}$$

صورت توابع  $y = \frac{3}{2}$  با دامنهٔ  $\mathbb{R} - \{-3\}$  خواهد بود.  
 پس:

$$\frac{a - b + c - d}{k} = \frac{18 - 27 + 12 - 18}{\frac{3}{2}} = \frac{-15}{\frac{3}{2}} = -10$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

$f(x) = x \Rightarrow f(-2) = -2, f(2) = 2$  تابع همانی  
 $g(x) = c$  تابع ثابت

$$\begin{cases} g(x) = c \\ 2f(-2) = g(2) \Rightarrow -4 = c \end{cases}$$

$h(x) = ax + b$  تابع خطی

$$\begin{cases} h(-2) = -2a + b = -3 \\ h(2) = 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -2$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{2}x - 2 \xrightarrow{h(x) \geq 0} \frac{1}{2}x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۸

۱ اگر رابطه  $Q = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (3, m+2), (m, 4)\}$  یک تابع باشد، برد این تابع چندعضوی است؟

- (۱) ۵  
(۲) ۴  
(۳) ۳  
(۴) ۲

۲ اگر دامنه و برد تابع  $f = \{(3, -1), (1, 2), (a-b, 2), (3, a+b)\}$  هرکدام دو عضو داشته باشند، مجموع مقادیر ممکن برای  $a$  و  $b$  کدام است؟

- (۱) -۳  
(۲) -۲  
(۳) -۱  
(۴) صفر

۳  $n$  عضو و  $3n+7$  عضو دارد. چند عدد طبیعی برای  $n$  وجود دارد؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۱

۴  $f(x) = x^2$  شامل ۵ عدد حقیقی است. دامنه این تابع حداکثر چند عضو دارد؟

- (۱) ۸  
(۲) ۹  
(۳) ۱۰  
(۴) ۱۱

۵ حدود  $k$  برای اینکه تابع با ضابطه  $A(x) = \frac{6x^2-2x}{-kx^2+2x-9k}$  همواره به ازای جميع مقادیر حقیقی  $x$  تعریف شده باشد، کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{0\}$   
(۲)  $0 < k < \frac{1}{3}$   
(۳)  $-\frac{1}{3} < k < \frac{1}{3}$   
(۴)  $k < -\frac{1}{3}$  یا  $k > \frac{1}{3}$

۶ اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{x}{2x^2+ax+b}$  به صورت  $\mathbb{R} - \{3\}$  باشد،  $a-b$  کدام است؟

- (۱) -۳۰  
(۲) ۳۰  
(۳) ۶  
(۴) -۶

۷ اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{x^2 - \lambda x - b + 1}{x^2 + ax - 10}$  به صورت  $D_f = \mathbb{R} - \{5, b\}$  باشد،  $f(c) = 1$  آنگاه  $c$  کدام است؟

- (۱)  $2/6$   
(۲)  $-2/6$   
(۳)  $2/4$   
(۴)  $-2/4$

۸ دامنه تابع گویای  $f(x) = \frac{2x-5}{x+k}$  برابر با  $\mathbb{R} - \{3\}$  است. نمودار این تابع از کدام نواحی محورهای مختصات عبور می کند؟

- (۱) هر ۴ ناحیه  
(۲) اول، دوم و سوم  
(۳) اول، دوم و چهارم  
(۴) اول، سوم و چهارم

۹ دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-2x}}$  شامل چند عدد صحیح نامنفی نمی شود؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) بی شمار

۱۰ دامنه تابع  $y = \sqrt{x + \frac{2x+1}{x}}$  کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{0\}$   
(۲)  $(-\infty, 0)$   
(۳)  $(-1, 1) - \{0\}$   
(۴)  $(0, +\infty) \cup \{-1\}$

۱۱ در دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{9-|2x+5|}}$  تعداد اعداد صحیح منفی چند برابر تعداد اعداد صحیح مثبت است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳)  $\frac{3}{2}$   
(۴) ۱

۱۲ دامنه تابع  $y = \sqrt{x - \sqrt{2-x}}$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۱۳ اگر  $f(x) = \sqrt{x + |x+2|}$ ، دامنه تابع  $f(-x)$  کدام است؟

- (۱)  $x \leq -1$   
(۲)  $x \geq -1$   
(۳)  $x \leq 1$   
(۴)  $x \geq 1$

۱۴ اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{[\frac{x}{2}] - 1}$  باشد،  $[a, b)$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۵

۱۵ اگر  $f(x) = \log \frac{5-x}{x+2}$  و  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x}}$  باشند، آنگاه دامنه  $\frac{f}{g}$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۵

۱۶ دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{-4x + 9(2^x)} - 8$  به صورت  $[a, b]$  است. بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۶

۱۷ اگر دامنه  $f(x) = \sqrt{(2a - 3)x^2 + 4ax + 2a - 3}$  مجموعه اعداد حقیقی باشد، حدود  $a$  کدام است؟

- (۱)  $0 \leq a < \frac{3}{4}$   
(۲)  $a \in \mathbb{R}$   
(۳)  $\{\}$   
(۴)  $a \geq \frac{3}{4}$

۱۸ در تابع  $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  اگر مجموعه مقادیری از  $x$  که به ازای آن تابع  $f$  قابل تعریف است بازه  $f(0) = 2$  باشد، آنگاه  $a - b$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) -۱  
(۳) ۱  
(۴) ۲

۱۹ اگر دامنه تعریف  $f(x) = \sqrt{(x - 2)(x^2 + ax + b)}$  بازه  $[1, +\infty)$  باشد، مقدار  $b - a$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) -۱  
(۳) ۵  
(۴) -۵

۲۰ دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{(a^2 - 4)x^2 + ax + 6}$  بازه  $(-\infty, b]$  است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۵  
(۲) -۵  
(۳) -۱  
(۴) ۱

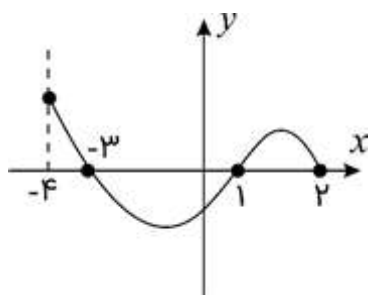
۲۱ تابع  $f(x) = 3 + \sqrt{ax + b}$  با دامنه  $[-2, +\infty)$  مفروض است. اگر نمودار این تابع، خط  $2y - 4x = 10$  را در نقطه ای روی محور لها قطع کند، مقدار  $f(a + b)$  کدام است؟

- (۱) ۴  
(۲) ۲  
(۳) ۷  
(۴) ۶

۲۲ اگر  $f(x) = a^2 + \sqrt{\frac{a}{3}x + 2}$  و مجموعه مقادیری از  $x$  که به ازای آن تابع  $f$  قابل تعریف است بازه  $(-\infty, 2]$  باشد، برد تابع  $f$  کدام است؟

- (۱)  $[1, +\infty)$   
(۲)  $[4, +\infty)$   
(۳)  $[9, +\infty)$   
(۴)  $[16, +\infty)$

شکل زیر نمودار تابع  $y = f(x)$  است. دامنه تابع  $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟



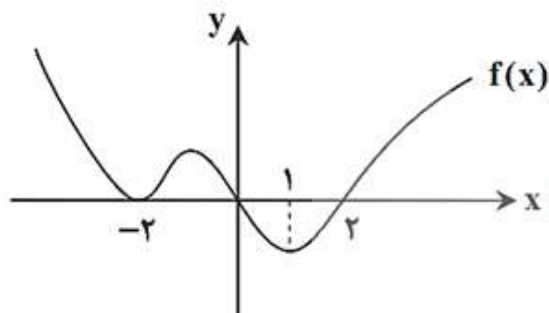
(۱)  $[0, 2]$

(۲)  $[-3, 2]$

(۳)  $[-4, -3] \cup [1, 2]$

(۴)  $[-3, 0] \cup [1, 2]$

شکل زیر نمودار تابع  $y = f(x)$  است. دامنه تابع با ضابطه  $y = \sqrt{(2x-2)f(x)}$  کدام است؟



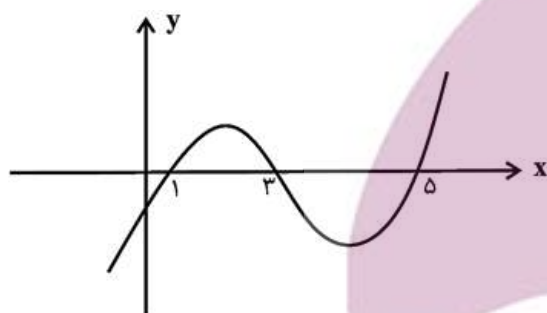
(۱)  $\{-2, 0, 2\}$

(۲)  $\mathbb{R}$

(۳)  $[0, 1] \cup [2, +\infty) \cup \{-2\}$

(۴)  $[0, +\infty) \cup \{-2\}$

تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر باشد، دامنه  $y = \frac{4}{\sqrt{(x^2-5x+4)f(x)}}$  کدام است؟



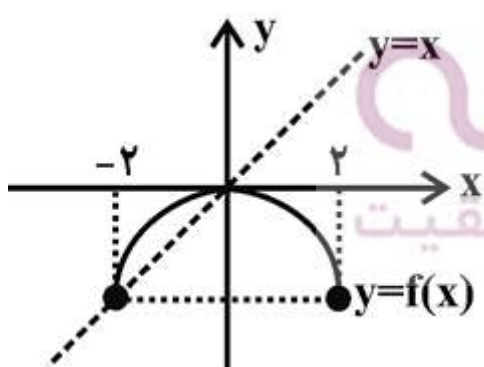
(۱)  $(4, +\infty)$

(۲)  $(-\infty, 1)$

(۳)  $(1, 3) \cup (5, +\infty)$

(۴)  $(3, 4) \cup (5, +\infty)$

اگر نمودار تابع  $f$  به شکل زیر باشد، دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{f(-x) + x}$  کدام است؟



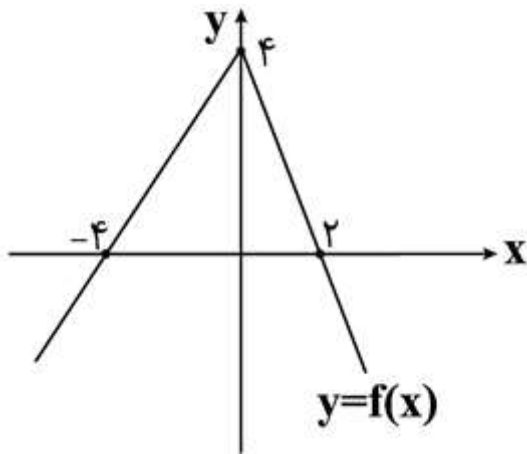
(۱)  $[-2, 0]$

(۲)  $[0, 2]$

(۳)  $[0, 2] \cup \{-2\}$

(۴)  $[-2, 0] \cup \{2\}$

با ضابطه  $g(x) = \sqrt{2 - |f(x)|}$  کدام است؟  $y = f(x)$  صورت زیر باشد، دامنه تابع



(۱)  $[-4, -2] \cup [1, 2]$

(۲)  $(-\infty, -4] \cup [-2, 1] \cup [2, +\infty)$

(۳)  $[-6, -2] \cup [1, 3]$

(۴)  $(-\infty, -6] \cup [-2, 1] \cup [3, +\infty)$

اگر دو تابع  $f = \{(2, -1), (c, d)\}$  و  $g = \{(2a^2 - 1, b^2 + 1), (b + 1, 2a - 1)\}$  برابر باشند،  $c + d$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) ۱

دو تابع  $f(x) = \frac{b}{x+3}$  و  $g(x) = \frac{x-a}{x^2+cx+d}$  برابرند. حاصل  $\frac{abc}{d}$  کدام است؟

(۱) -۱

(۲) -۲

(۳) ۱

(۴) ۲

به ازای چه مقداری از  $a$  دو تابع زیر باهم مساوی اند؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x+1} & ; x \neq -1 \\ \frac{3a+7}{x+1} & ; x = -1 \end{cases}, g(x) = x+2$$

(۱) -۲

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) هیچ مقدار  $a$

اگر دو تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{9-x^2}{x+3} & ; x \neq -3 \\ A & ; x = -3 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{2-x} & ; x \neq 2 \\ B & ; x = 2 \end{cases}$  باهم مساوی باشند، مقدار  $A + B$  کدام است؟

(۱) -۵

(۲) ۵

(۳) -۷

(۴) ۷

تابع  $y = |2x - |x||$  با کدام یک از توابع زیر مساوی است؟

(۱)  $y = 2|x| - x$

(۲)  $y = x - 2|x|$

(۳)  $y = |x| - 2x$

(۴)  $y = 2x - |x|$



۳۳

اگر توابع  $f(x) = \sqrt{(x-a)^2(x-b)}$  و  $g(x) = |x-a|\sqrt{x+2}$  با هم برابر باشند، مقدار  $a+b$  کدام می تواند باشد؟

- (۱) -۳  
(۲) -۵  
(۳) -۷  
(۴) -۹

۳۴

اگر توابع  $f(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{-2x+b} + c$  و  $g = \{(3, a)\}$  برابر باشند، آنگاه  $a+2b+c$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۶  
(۳) -۳  
(۴) ۱۸

۳۵

با کدام دامنه دو تابع  $f(x) = x\sqrt{1-x}$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$  با یکدیگر مساوی هستند؟

- (۱)  $D = (-\infty, 1]$   
(۲)  $D = [0, +\infty)$   
(۳)  $D = [0, 1]$   
(۴)  $D = \{-1, 0, 1\}$

۳۶

در کدام گزینه توابع داده شده برابر نیستند؟

- (۱)  $f(x) = |1-x|$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$   
(۲)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$  و  $g(x) = \frac{x}{|x|}$   
(۳)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$  و  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$   
(۴)  $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$  و  $g(x) = |x|\sqrt{x-1}$

۳۷

تابع  $f(x) = 3x + 2$  با دامنه  $[-1, 2]$  مفروض است. اگر برد تابع  $f$  دامنه تابع  $g(x) = \frac{x-1}{2}$  باشد، بزرگ ترین عضو صحیح برد تابع  $g$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۳۸

دامنه تابع خطی  $f$  بازه  $[0, 2]$  و برد آن بازه  $[1, 3]$  مقدار  $f(\frac{2}{3})$  کدام عدد می تواند باشد؟

- (۱) -۲  
(۲) -۱  
(۳)  $-\frac{1}{2}$   
(۴) ۲

۳۹

در تابع  $y = \left| \frac{x-1}{2} + 1 \right|$  (توجه: گه دامنه بازه  $[-2, 3]$  باشد، بزرگ ترین بازه برای برد این تابع کدام است؟

- (۱)  $[-\frac{1}{2}, 1]$   
(۲)  $[-1, 1]$   
(۳)  $[0, 1]$   
(۴)  $[-2, 1]$



۴۰.  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x \geq 0 \\ -x - 3 & ; x < 0 \end{cases}$  برد تابع کدام است؟

- (۱)  $[-3, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, 3]$   
(۳)  $[-3, 3]$  (۴)  $[0, +\infty)$

۴۱.  $f(x) = \begin{cases} |x+1| - 2 & ; x > 1 \\ \frac{3}{2} & ; -2 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 5x + 4 & ; x < -2 \end{cases}$  برد تابع کدام است؟

- (۱)  $[-\frac{9}{4}, +\infty)$  (۲)  $(0, +\infty)$   
(۳)  $(-\frac{9}{4}, +\infty)$  (۴)  $[\frac{3}{2}, +\infty)$

۴۲. اگر برد تابع  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & ; x \leq a \\ 3x + 4 & ; x > a \end{cases}$  برابر کل اعداد حقیقی باشد، کمترین مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲  
(۳) -۱ (۴) ۱

۴۳.  $y = \sqrt{-4x^2 + 4x + 6}$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴  
(۳) ۳ (۴) ۲

۴۴. اگر  $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$  و  $g(x) = \sqrt{x} + 1$  باشد، برد تابع  $f.g$  کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{0\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{-1\}$   
(۳)  $(-1, +\infty)$  (۴)  $(0, +\infty)$

۴۵. برد تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - x}$  کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{1, 2\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$   
(۳)  $\mathbb{R}$  (۴)  $\mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$

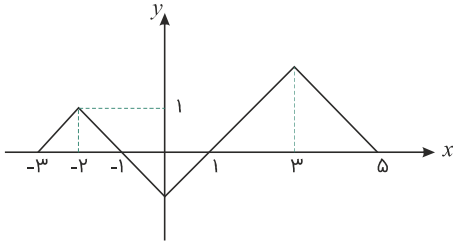
۴۶.  $f(x) = \frac{12}{\sqrt[3]{|x|+8}}$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶  
(۳) ۵ (۴) ۸

۴۷ برد تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x}$  کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, \frac{1}{2}]$  (۲)  $[\frac{1}{2}, +\infty)$   
(۳)  $(-\infty, 1]$  (۴)  $[1, +\infty)$

۴۸ اگر شکل زیر نمودار تابع  $y = f(\frac{x}{2} + 1)$  باشد، آنگاه برد تابع  $y = \sqrt{|2f(x) - 3|}$  کدام است؟

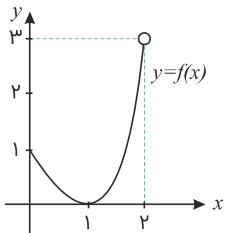


- (۱)  $[0, \sqrt{2}]$  (۲)  $[0, \sqrt{3}]$   
(۳)  $[0, \sqrt{5}]$  (۴)  $[\sqrt{3}, \sqrt{5}]$

۴۹ اگر برد تابع  $g(x)$  اعداد حقیقی نامثبت باشد، برد تابع  $f(x) = \frac{2g(x)}{g(x)-2}$  کدام است؟

- (۱)  $[0, 2]$  (۲)  $[0, 1)$   
(۳)  $[-1, 1)$  (۴)  $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

۵۰ اگر نمودار  $f$  به صورت زیر باشد، برد  $y = 3 - 2\sqrt{f^2(x) + 16}$  کدام است؟



- (۱)  $[3 - 4\sqrt{5}, -5]$  (۲)  $[-7, -5)$   
(۳)  $(-7, -5]$  (۴)  $(3 - 4\sqrt{5}, -5]$

ایران توننه  
توشه ای برای موفقیت

گزینه ۳

۱

$$\begin{aligned} (3, m^2) \in Q \\ (3, m+2) \in Q \Rightarrow m^2 = m+2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

اگر  $m = 2$  باشد،  $Q$  تابع نخواهد بود، زیرا  $(2, 1), (2, 4) \in Q$   
پس  $m = -1$  است و رابطه  $Q$  را به صورت زیر می توان نوشت:

$$Q = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (3, +1), (-1, 4)\}$$

$$\Rightarrow R_Q = \{1, -1, 4\}$$

پس  $R_Q$  ۳ عضو دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ تابستان ۱۳۹۸

گزینه ۳

۲

$$f = \{(3, -1), (1, 2), (a-b, 2), (3, a+b)\}$$

$$D = \{3, 1, a-b\} : \text{مجموعه دامنه}$$

$$\xrightarrow{\text{باید دو عضو داشته باشد}} \begin{cases} a-b=1 \\ \text{یا} \\ a-b=3 \end{cases}$$

$$a-b=1 : f = \{(3, -1), (1, 2), (1, 2), (3, a+b)\} : \text{حالت اول}$$

$$\xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} a+b=-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=0, b=-1$$

$$a-b=3 : f = \{(3, -1), (1, 2), (3, 2), (3, a+b)\} : \text{حالت دوم}$$

این رابطه اصلاً تابع نیست. پس  $a-b=3$  قابل قبول نیست؛ در نتیجه فقط  $a=0$  و  $b=-1$  قابل قبول است.

$$\Rightarrow a+b=0-1=-1$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

باید تعداد اعضای دامنه، بزرگ تر یا مساوی تعداد اعضای برد باشد، پس:

$$29 - 5n \geq 3n + 7 \Rightarrow 8n \leq 22 \Rightarrow n \leq \frac{22}{8} = 2.75$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1 \text{ یا } n = 2$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۸

م برد تابع  $f(x) = x^2$  فقط شامل اعداد نامنفی است، زیرا هر عددی به توان زوج برسد، حاصل عددی نامنفی می شود. دامنه تابع می تواند شامل تمامی ریشه های دوم اعداد برد باشد؛ هر عدد مثبت دارای دو ریشه دوم است، پس دامنه تابع حداکثر ۱۰ عضو دارد. ( عدد صفر را عضوی از برد در نظر نمی گیریم، زیرا در این صورت تعداد اعضای دامنه، حداکثر نیست.)

گزینه دو علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۳۹۶۷

گزینه دو ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۳۹۶۷

برای اینکه عبارت به ازای هر  $x$  حقیقی تعریف شده باشد، باید عبارت درجه دوم در مخرج کسر ریشه نداشته باشد، یعنی  $\Delta < 0$  باشد؛ پس داریم:

$$A(x) = \frac{6x^2 - 2x}{-kx^2 + 2x - 9k}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(-k)(-9k) < 0 \\ \Rightarrow 4 - 36k^2 < 0 \Rightarrow k^2 > \frac{1}{9} \Rightarrow k > \frac{1}{3} \text{ یا } k < -\frac{1}{3}$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

دامنه تابع تنها یک عدد حقیقی را شامل نمی شود، بنابراین مخرج تابع  $f$  تنها یک ریشه حقیقی (ریشه مضاعف)  $x = 3$  دارد. در نتیجه کسر باید به صورت  $k(x - 3)^2$  باشد. باتوجه به اینکه ضریب  $x^2$  برابر ۲ است؛ بنابراین:

$$\text{مخرج: } 2(x - 3)^2 = 2(x^2 - 6x + 9)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + ax + b = 2x^2 - 12x + 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 18 \end{cases} \Rightarrow a - b = -30$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

چون دامنه تابع  $f$  به صورت  $\{b, 5\}$  است پس  $x = 5$  ریشه مخرج  $f$  است:

$$5^2 + 5a - 10 = 0 \Rightarrow a = -3$$

با جایگذاری  $a = -3$  مخرج تابع  $f$  را مساوی صفر قرار می دهیم تا  $b$  نیز به دست آید:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

و  $a = -3$ ،  $b = -2$ ، معادله  $f(c) = 1$  را حل می کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 3x - 10} \xrightarrow{f(c)=1} c^2 - 3c + 3 = c^2 - 3c - 10$$

$$\Rightarrow 5c = 13 \Rightarrow c = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

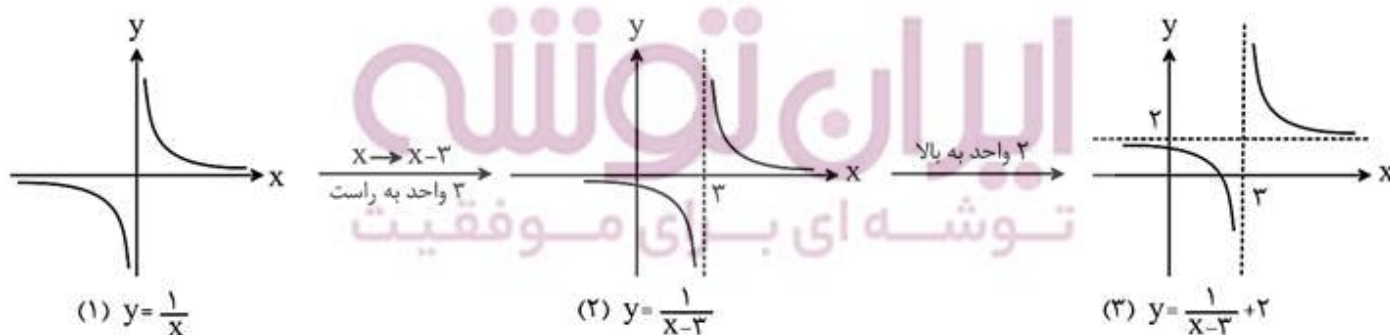
د ۳ در دامنه  $f$  نیست، پس  $x = 3$  ریشه مخرج  $f$  است:

$$3 + k = 0 \Rightarrow k = -3$$

باگذاری  $k = -3$  تابع  $f$  را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{2x - 5}{x - 3} = \frac{2x - 6 + 1}{x - 3} = 2 + \frac{1}{x - 3}$$

برای رسم تابع  $f(x) = \frac{1}{x - 3} + 2$ ، مراحل زیر را روی تابع  $y = \frac{1}{x}$  انجام می دهیم:



پس نمودار  $f$  فقط از ناحیه سوم عبور نمی کند.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ تابستان ۱۳۹۸

$$\frac{x-1}{x^2-2x} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \end{cases}$$

| X                    | $-\infty$ | 0             | 1 | 2 | $+\infty$ |               |   |
|----------------------|-----------|---------------|---|---|-----------|---------------|---|
| $X-1$                | -         | -             | 0 | + | +         |               |   |
| $X^2-2X$             | +         | 0             | - | - | 0         | +             |   |
| $\frac{X-1}{X^2-2X}$ | -         | $\frac{1}{2}$ | + | 0 | -         | $\frac{1}{2}$ | + |

مجموعه جواب:  $D_f = (0, 1] \cup (2, +\infty)$

در دامنه تابع موردنظر، دو عدد صحیح و نامنفی صفر و ۲ وجود ندارد.

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۱۳۹۶۸

گزینه ۴

۱۰

$$y = \sqrt{x + \frac{2x+1}{x}} = \sqrt{\frac{x^2+2x+1}{x}} = \frac{x^2+2x+1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x} \geq 0$$

پس دامنه تابع برابر  $\{-1\} \cup (0, +\infty)$  است.

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۱۳۹۶۷

گزینه ۲

۱۱

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ 9 - |2x+5| > 0 \Rightarrow |2x+5| < 9 \Rightarrow -9 < 2x+5 < 9 \Rightarrow -14 < 2x < 4 \Rightarrow -7 < x < 2 \end{cases}$$

$$[-3, 3] \cap (-7, 2) = [-3, 2)$$

اعداد صحیح منفی در دامنه: ۱- و ۲- و ۳-

اعداد صحیح مثبت در دامنه: ۱

پس جواب برابر ۳ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵۶

$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \quad (1)$$

$$x - \sqrt{2 - x} \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{2 - x}$$

دقت کنید در عبارت فوق  $x \geq 0$  است چون سمت راست نامنفی است.

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 \geq 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) \geq 0 \xrightarrow{x \geq 0} x \geq 1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (۱)، (۲)}} 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_y = [1, 2]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۴

تابع  $f(-x)$  را تشکیل می دهیم:

$$f(x) = \sqrt{x + |x + 2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|} = \sqrt{|x - 2| - x}$$

باید زیر رادیکال نامنفی باشد، لذا:

$$|x - 2| - x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 : x - 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \\ x < 2 : -x + 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

بنابراین دامنه تابع  $f(-x)$ ،  $x \leq 1$  است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

مخرج صفر نباشد:

$$\left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leq x < 4$$

$$D_f = [-2, 2] - [2, 4) = [-2, 2) = [a, b) \Rightarrow b - a = 2 - (-2) = 4$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

ابتدا دامنه توابع  $f$  و  $g$  را به دست می آوریم:

$$f(x) = \log \frac{5-x}{x+2} \Rightarrow \frac{5-x}{x+2} > 0$$

| $x$               | $-2$ | $5$ |
|-------------------|------|-----|
| $5-x$             | +    | +   |
| $x+2$             | -    | +   |
| $\frac{5-x}{x+2}$ | -    | +   |

$$\Rightarrow D_f = (-2, 5)$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x}} \Rightarrow 2-x > 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow D_g = (-\infty, 2)$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\}$$

$$= ((-2, 5) \cap (-\infty, 2)) - \left\{x \mid \frac{x}{\sqrt{2-x}} = 0\right\} = (-2, 2) - \{0\}$$

اعداد صحیح بازه فوق  $-1$  و  $1$  هستند.

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۱۳۹۶۸

ایران توننه  
توشه ای برای موفقیت



$$-x^2 + 9(x) - 8 \geq 0 \Rightarrow -(x^2) + 9(x) - 8 \geq 0$$

با فرض  $x = t$  داریم:

$$-t^2 + 9t - 8 \geq 0$$

در نتیجه جمع ضرایب ثابت معادله درجه دوم صفر است، پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{c}{a} = 8 \end{cases}$$

|                 |   |   |
|-----------------|---|---|
| t               | 1 | 8 |
| $-t^2 + 9t - 8$ | - | + |

$$\Rightarrow 1 \leq t \leq 8$$

$$x^0 = 1 \leq x \leq 8 = x^3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 3 \Rightarrow \max(b-a) = 3 - 0 = 3$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳۹۶

برای اینکه دامنه  $\mathbb{R}$  باشد، باید زیر رادیکال همواره نامنفی باشد.

$$(2a-3)x^2 + 4ax + 2a-3 \geq 0$$

برای آنکه نامعادله درجه دو نامنفی باشد، باید ضریب  $x^2$  مثبت و دلتای عبارت درجه دوم منفی یا صفر باشد.

$$2a-3 > 0 \Rightarrow a > \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (4a)^2 - 4(2a-3)(2a-3) \leq 0$$

$$\Rightarrow 16a^2 - 4(4a^2 - 12a + 9) \leq 0 \Rightarrow -4(-12a + 9) \leq 0 \Rightarrow a \leq \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) = \emptyset$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳۹۶

می دانیم دامنه تابع  $f$  مجموعه مقادیری از  $x$  می باشند که به ازای آنها  $ax^2 + bx + c \geq 0$  باشد، لذا باتوجه به فرض سؤال مبنی بر اینکه دامنه تابع بازه  $[-2, 2]$  است، جدول تعیین علامت تابع درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  به شکل زیر خواهد بود: ( $\Delta > 0$ )

| $x$   | $x_1$ | $x_2$ |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| علامت | موافق | مخالف | موافق | موافق | موافق |
| $y$   | $a$   | $a$   | $a$   | $a$   | $a$   |

مجموعه جواب نامعادله  $ax^2 + bx + c \geq 0$  برابر با  $[-2, 2]$  است. ازطرفی داریم:

$$f(0) = 2 \Rightarrow \sqrt{a(0)^2 + b(0) + c} = \sqrt{c} = 2 \Rightarrow c = 4$$

لذا نتیجه می گیریم که:

$$\left. \begin{aligned} f(-2) = 0 &\Rightarrow 4a - 2b + 4 = 0 \\ f(2) = 0 &\Rightarrow 4a + 2b + 4 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -1, b = 0 \Rightarrow a - b = -1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

باتوجه به اینکه دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{(x-2)(x^2 + ax + b)}$  بازه  $[1, +\infty)$  است، پس عبارت  $(x-2)(x^2 + ax + b)$  نباید در  $x=2$  تغییر علامت بدهد؛ ولی باید در  $x=1$  تغییر علامت بدهد، پس  $x=1$  و  $x=2$  ریشه های معادله  $x^2 + ax + b = 0$  هستند.

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b &= (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2 \\ \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} &\Rightarrow b - a = 5 \end{aligned}$$

دقت کنید که در این صورت داریم  $f(x) = \sqrt{(x-2)^2(x-1)} = |x-2| \sqrt{x-1}$  که دامنه آن طبق فرض بازه  $[1, +\infty)$  است.

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد؛ پس:

$$(a^2 - 4)x^2 + ax + 6 \geq 0 \quad (*)$$

این نامعادله بازه  $(-\infty, b]$  یا  $[c, +\infty)$  یا  $\{c\}$  یا  $\{b, c\}$  می تواند باشد (b و c ریشه های عبارت درجه ۲ هستند)، پس عبارت زیر رادیکال، درجه دوم نیست. در نتیجه ضریب  $x^2$  برابر با صفر است:

$$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

هر دو مقدار a را بررسی می کنیم:

$$1) a = 2 \xrightarrow{(*)} 2x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = [-3, +\infty)$$

باتوجه به اینکه مجموعه جواب داده شده به صورت  $(-\infty, b]$  است، پس این حالت قابل قبول نیست.

$$2) a = -2 \xrightarrow{(*)} -2x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow b = 3$$

پس:

$$a + b = -2 + 3 = 1$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

ایران توننه  
توشه ای برای موفقیت

چون دامنه  $f$  بازه  $[-2, +\infty)$  است، داریم:

$$f(x) = 3 + \sqrt{ax + b} : ax + b \geq 0 \Rightarrow ax \geq -b$$

$$\xrightarrow[\text{باتوجه به دامنه}]{a > 0} x \geq -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} = -2 \Rightarrow b = 2a$$

ازطرفی نمودار تابع  $f$ ، خط  $2y - 4x = 10$  را روی محور  $y$ ها قطع کرده است؛ پس طول نقطه برخورد صفر بوده و عرض آن برابر می شود با:

$$2y - 4x = 10 \xrightarrow{x=0} 2y = 10 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow \text{نقطه برخورد } (0, 5)$$

ازآنجا که این نقطه بر روی هر دو نمودار قرار دارد، مختصاتش در ضابطه  $f$  نیز صدق می کند:

$$f(x) = 3 + \sqrt{ax + b} \xrightarrow{(0,5) \in f} 5 = 3 + \sqrt{a(0) + b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{b} = 2 \Rightarrow b = 4 \xrightarrow{b=2a} 4 = 2a \Rightarrow a = 2$$

بنابراین:

$$a + b = 6$$

$$f(x) = 3 + \sqrt{2x + 4}$$

$$\xrightarrow{x=6} f(6) = 3 + \sqrt{2 \times (6) + 4} = 3 + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

تابع  $f$  در محدوده  $2 \leq x$  قابل تعریف است. باتوجه به ضابطه تابع برای به دست آوردن  $a$  عبارت زیر رادیکال را بزرگ تر یا مساوی صفر قرار می دهیم، بنابراین داریم:

$$\frac{a}{2}x + 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a}{2}x \geq -2 \Rightarrow ax \geq -4 \quad (*)$$

با معادل سازی نابرابری  $(*)$  با محدوده داده شده در سؤال، مشخص است که علامت  $a$  منفی است؛ پس با تقسیم رابطه  $(*)$  بر  $a$  جهت نامساوی عوض می شود، پس:

$$ax \geq -4 \xrightarrow{\div a} x \leq -\frac{4}{a} \Rightarrow \frac{-4}{a} = 2 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت  $f(x) = 4 + \sqrt{-x + 2}$  است. حال با داشتن ضابطه تابع برد را محاسبه می کنیم:

$$\sqrt{-x + 2} \geq 0 \xrightarrow{+4} 4 + \sqrt{-x + 2} \geq 4 \Rightarrow f(x) \geq 4$$

پس برد تابع به صورت  $[4, +\infty)$  است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد یعنی:  $xf(x) \geq 0$

|          |    |    |   |   |   |   |
|----------|----|----|---|---|---|---|
|          | -۴ | -۳ | ۰ | ۱ | ۲ |   |
| $x$      | -  | -  | ۰ | + | + |   |
| $f(x)$   |    | +  | - | - | + | ۰ |
| $x.f(x)$ | -  | -  | ۰ | - | + | ۰ |

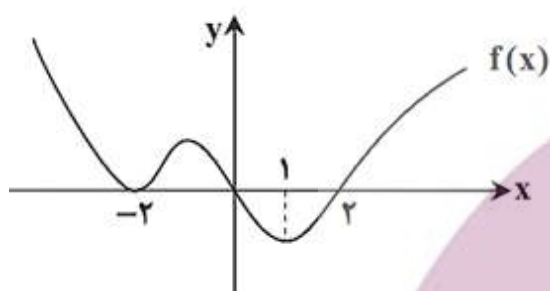
$x.f(x) \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 0$  یا  $1 \leq x \leq 2$   
 $\Rightarrow x \in [-3, 0] \cup [1, 2]$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۷

باتوجه به شکل، دامنه تابع  $f(x)$  برابر است؛ ازطرفی می‌دانیم زیر رادیکال با فرجه زوج باید همواره نامنفی باشد. بنابراین:  
 $(2x-2)f(x) \geq 0$

با استفاده از جدول تعیین علامت داریم:

دقت کنید که محل تقاطع نمودار  $f(x)$  با محور  $x$ ها همان ریشه های معادله  $f(x)$  است



|              |    |   |   |   |   |
|--------------|----|---|---|---|---|
|              | -۲ | ۰ | ۱ | ۲ |   |
| $x$          | -  | - | - | + | + |
| $2x-2$       | -  | - | - | + | + |
| $f(x)$       | +  | + | - | - | + |
| $(2x-2)f(x)$ | -  | - | + | - | + |

دامنه پس  $y = \sqrt{(2x-2)f(x)}$   
 برابر است با:

$$[0, 1] \cup [2, +\infty) \cup \{-2\}$$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵۱۱

برای به دست آوردن دامنه کافی است نامعادله  $(x^2 - 5x + 4)f(x) > 0$  را بررسی کنیم.

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

باتوجه به جدول بالا و نمودار تابع، جدول زیر را رسم می‌کنیم.

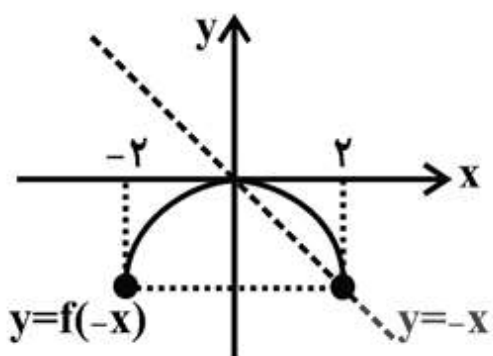
|                |   |   |   |
|----------------|---|---|---|
| $x$            | ۱ | ۴ |   |
| $x^2 - 5x + 4$ | + | - | + |

|                      |   |   |   |   |   |
|----------------------|---|---|---|---|---|
|                      | ۱ | ۳ | ۴ | ۵ |   |
| $x^2 - 5x + 4$       | + | - | - | + | + |
| $f(x)$               | - | + | - | - | + |
| $(x^2 - 5x + 4)f(x)$ | - | - | + | - | + |

$$\Rightarrow D_y = (3, 4) \cup (5, +\infty)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۷۶

برای محاسبه دامنه  $g$  باید نامعادله  $f(-x) + x \geq 0$  را حل کنیم. نمودار  $f$  نسبت به محور  $y$  ها متقارن است؛ بنابراین  $f(-x)$  بر  $f(x)$  منطبق می باشد. باتوجه به شکل داریم:



$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(-x) \geq -x$$

$$\Rightarrow f(-x) + x \geq 0$$

$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow f(-x) < -x$$

$$\Rightarrow f(-x) + x < 0$$

پس دامنه  $g$  بازه  $[0, 2]$  است.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۵

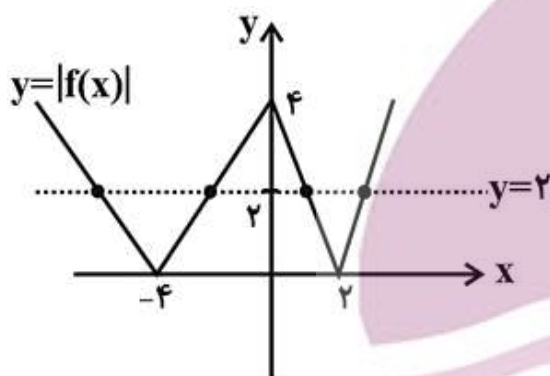
بودار  $y = |f(x)|$  را رسم می کنیم:

در تابع  $g(x)$  باتوجه به اینکه عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، داریم:

$$2 - |f(x)| \geq 0 \Rightarrow |f(x)| \leq 2$$

$$|f(x)| = 2 \text{ باشد.}$$

است که باید نقاطی را پیدا کنیم که در آن ها



$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < 0 \\ -2x + 4, & x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{|f(x)|=2} \begin{cases} x + 4 = 2 \Rightarrow x = -2 \\ x + 4 = -2 \Rightarrow x = -6 \\ -2x + 4 = 2 \Rightarrow x = 1 \\ -2x + 4 = -2 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

دامنه تابع  $g(x)$  نقاطی می شود که در آن مقدار تابع  $y = |f(x)|$  کمتر یا مساوی ۲ باشد:

$$D_g = [-6, -2] \cup [1, 3]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۷

مجموعه های برابر یعنی اعضای برابر، بنابراین:

$$\begin{cases} b + 1 = 2 \Rightarrow b = 1 \\ 2a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0 \end{cases} \Rightarrow (c, d) = (2a^2 - 1, b^2 + 1) = (-1, 2) \Rightarrow c + d = 1$$

$$b^2 + 1 = -1 \text{ نادرست و غیرقابل قبول است.}$$

د که

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

دو تابع را برابر در نظر می گیریم. البته دقت داریم که  $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$  است، پس مخرج  $g$  باید فقط یک ریشه  $-3$  داشته باشد نه ها برابر شوند، یعنی باید  $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$  باشد، پس باید مخرج  $g$   $(x+3)^2$  باشد یعنی  $d = 9$  و  $c = 6$ .

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x-a}{(x+3)^2} = \frac{b}{x+3} \xrightarrow{x \neq -3} \frac{x-a}{x+3} = \frac{b}{1}$$

$$\Rightarrow x-a = bx+3b \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-3 \end{cases}$$

پس:

$$\frac{abc}{d} = \frac{(-3)(1)(6)}{9} = \frac{-18}{9} = -2$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

دامنه هر دو تابع برابر با  $\mathbb{R}$  است؛ بنابراین برای تساوی دو تابع باید به ازای هر  $x$  از دامنه داشته باشیم:  $f(x) = g(x)$ .

$$x \neq -1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x+1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1} = x+2$$

$$f(x) = g(x)$$

به ازای  $x = -1$  داریم:

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 3a + 7, \quad g(-1) = -1 + 2 = 1$$

$$\xrightarrow{f(-1)=g(-1)} 3a + 7 = 1 \Rightarrow 3a = -6 \Rightarrow a = -2$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(3-x)(3+x)}{x+3} & ; x \neq -3 \\ A & ; x = -3 \end{cases} = \begin{cases} 3-x & ; x \neq 3 \Rightarrow f(2) = 1 \\ A & ; x = -3 \Rightarrow f(-3) = A \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)(x-3)}{2-x} & ; x \neq 2 \\ B & ; x = 2 \end{cases} = \begin{cases} 3-x & ; x \neq 2 \Rightarrow g(-3) = 6 \\ B & ; x = 2 \Rightarrow g(2) = B \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f(2) = g(2) &\Rightarrow B = 1 \\ g(-3) = f(-3) &\Rightarrow A = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A + B = 7$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸



$$y = |2x - |x|| = \begin{cases} |2x - (-x)| = |3x| = -3x & ; x < 0 \\ |2x - x| = |x| = x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{گزینه ۱: } y = 2|x| - x = \begin{cases} -2x - x = -3x & ; x < 0 \\ 2x - x = x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{گزینه ۲: } y = x - 2|x| = \begin{cases} x - 2(-x) = 3x & ; x < 0 \\ x - 2x = -x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{گزینه ۳: } y = |x| - 2x = \begin{cases} -x - 2x = -3x & ; x < 0 \\ x - 2x = -x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{گزینه ۴: } y = 2x - |x| = \begin{cases} 2x - (-x) = 3x & ; x < 0 \\ 2x - x = x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

از تساوی  $f$  و  $g$  نتیجه می گیریم که  $b = -2$ . برای انتخاب  $a$  باید حواسمان به دامنه دو تابع باشد. دامنه تابع  $f$  را در دو حالت زیر به دست می آوریم:

$$(۱) a \geq -2$$

| $x$            | $b = -2$ | $a$ |
|----------------|----------|-----|
| $(x-a)^2(x-b)$ | -        | +   |

در نتیجه:  $D_f = [-2, +\infty)$

$$(۲) a < -2$$

| $x$            | $a$ | $b = -2$ |
|----------------|-----|----------|
| $(x-a)^2(x-b)$ | -   | +        |

در نتیجه:  $D_f = \{a\} \cup [-2, +\infty)$

$D_f = D_g$  باید،  $a \in [-2, +\infty)$  باشد، پس:

از طرفی چون  $D_g = [-2, +\infty)$  پس برای آنکه

$$a \geq -2 \xrightarrow{+b} a + b \geq \underbrace{-2 + b}_{-4} \Rightarrow a + b \geq -4$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷



$x = 3$  باشد.

هم  $f$  شامل

می دانیم  $\{3\}$  است؛ پس باید

$$\begin{cases} x - a \geq 0 \Rightarrow x \geq a \\ -2x + b \geq 0 \Rightarrow 2x \leq b \Rightarrow x \leq \frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow a \leq x \leq \frac{b}{2}$$

جموعه تک‌عضوی باشد باید  $\{3\}$  باشد پس  $\frac{b}{2} = 3$  و  $b = 6$  و  $a = 3$  است.

پس ضابطه  $f$  به صورت  $\sqrt{x-3} + \sqrt{-2x+6} + c$  در  $f(x)$  مقدار دو تابع در  $x=3$  باهم برابر قرار می دهیم:

$$f(3) = g(3) \Rightarrow a = c \xrightarrow{a=3} c = 3$$

$$\Rightarrow a + 2b + c = 3 + 2 \times (6) + 3 = 18$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ تابستان ۱۳۹۸

نکته: دو تابع  $f$  و  $g$  برابرند، هرگاه:

الف) دامنه  $f$  و دامنه  $g$  باهم برابر باشند.

ب) برای هر  $x$  از این دامنه یکسان، داشته باشیم:

$$f(x) = g(x)$$

نکته:

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - x^3} = \sqrt{x^2(1-x)} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{1-x} = |x| \sqrt{1-x}$$

طبق فرض این تابع با تابع  $f(x) = x\sqrt{1-x}$  برابر است، پس باید داشته باشیم:

$$|x| = x \Rightarrow x \geq 0 \quad (*)$$

طرفی باید عبارت  $\sqrt{1-x}$  تعریف شده باشد، پس:

$$1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \quad (**)$$

از  $(*)$  و  $(**)$  نتیجه می‌گیریم:

$$0 \leq x \leq 1$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

گزینه ها را بررسی می کنیم. در همه گزینه ها دو شرط برابر بودن ضابطه ها و تساوی دامنه ها باید چک شود:

گزینه ۱: 
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= |1-x| = |x-1| \\ g(x) &= \sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ضابطه ها برابرند}$$

$D_f = D_g = \mathbb{R}$  دامنه ها برابرند ✓

گزینه ۲: 
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \\ g(x) &= \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ضابطه ها برابرند}$$

$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$  دامنه ها برابرند ✓

گزینه ۳: 
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2+1} - x \\ g(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \times \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2} = \sqrt{x^2+1}-x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ضابطه ها برابرند}$$

$D_f = D_g = \mathbb{R}$  دامنه ها برابرند ✓

گزینه ۴: 
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2(x-1)} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{x-1} = |x|\sqrt{x-1} \\ g(x) &= |x|\sqrt{x-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ضابطه ها برابرند}$$

$$\left. \begin{aligned} D_f &= \{0\} \cup [1, +\infty) \\ D_g &= [1, +\infty) \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f \not\equiv D_g \text{ دامنه ها برابر نیستند}$$

در گزینه "۴"، دامنه دو تابع باهم برابر نیست، پس توابع  $f$  و  $g$  برابر نیستند.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ تابستان ۱۳۹۸

از روی دامنه  $f$  تابع  $f$  را می سازیم تا برد  $f$  حاصل شود.

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow -1 \leq 3x+2 \leq 8$$

لذا دامنه تابع  $g$  بازه  $[-1, 8]$  است.

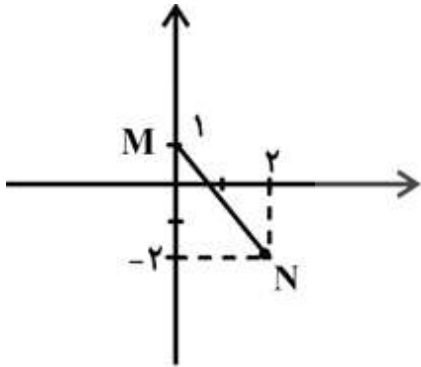
$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 8 &\Rightarrow -1-1 \leq x-1 \leq 8-1 \\ \Rightarrow -\frac{2}{2} \leq \frac{x-1}{2} \leq \frac{7}{2} &\Rightarrow -1 \leq g(x) \leq 3/5 \end{aligned}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ تابستان ۱۳۹۸

دو حالت می توان در نظر گرفت:  
حالت اول:

$$D = [0, 2] \text{ , } R = [-2, 1] \text{ , } M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ , } N = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow m = \frac{-2-1}{2-0} = \frac{-3}{2}$$

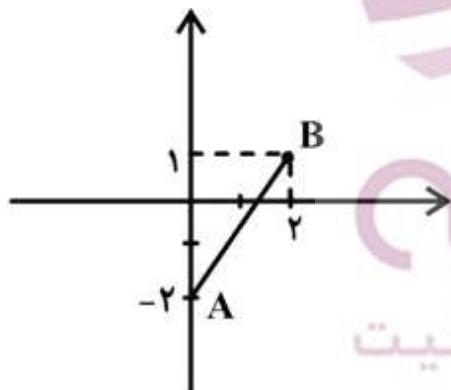
$$y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y - 1 = \frac{-3}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 1 \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = -1 + 1 = 0$$



حالت دوم:

$$D = [0, 2] \text{ , } R = [-2, 1] \text{ , } A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ , } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow m = \frac{-2-1}{0-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y + 2 = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - 2 = -1$$



پس دو مقدار صفر یا -۱ می تواند باشد.

$$f(x) = \left| \frac{x-1+2}{2} \right| - 1 = \left| \frac{x+1}{2} \right| - 1$$

راه حل اول:

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 3 &\Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{2} - 1 = \frac{x-1}{2} \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1 \\ -2 \leq x \leq -1 &\Rightarrow f(x) = \frac{-x-1}{2} - 1 = \frac{-x-3}{2} \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{2} \end{aligned} \Rightarrow R_f = [-1, 1]$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} -2 \leq x \leq 3 &\Rightarrow -1 \leq x+1 \leq 4 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{2} \leq 2 \\ \Rightarrow 0 &\leq \left| \frac{x+1}{2} \right| \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \left| \frac{x+1}{2} \right| - 1 \leq 1 \Rightarrow \text{برد تابع} = R_f = [-1, 1] \end{aligned}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۷

راه حل اول:

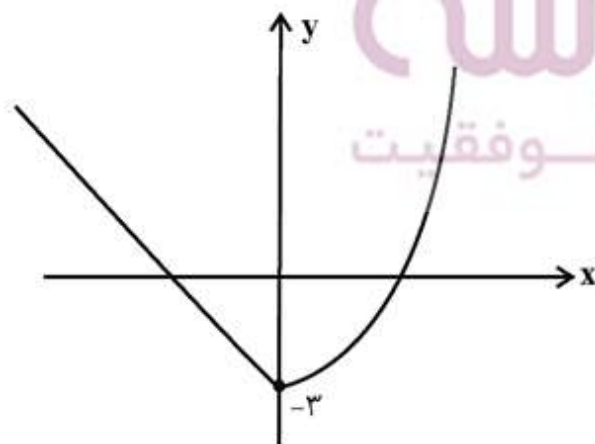
$$\left. \begin{aligned} x \geq 0 &\Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3 \geq -3 \Rightarrow R_1 = [-3, +\infty) \\ x < 0 &\Rightarrow -x > 0 \Rightarrow -x - 3 > -3 \Rightarrow R_2 = (-3, +\infty) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{U} R_f = [-3, +\infty)$$

راه حل دوم:

ع را به کمک انتقال تابع

$y = x^2$  به صورت زیر رسم می کنیم:

$$\begin{aligned} y &= -x - 3 ; x < 0 \\ y &= x^2 - 3 ; x \geq 0 \end{aligned}$$



در نتیجه:  $R_f = [-3, +\infty)$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

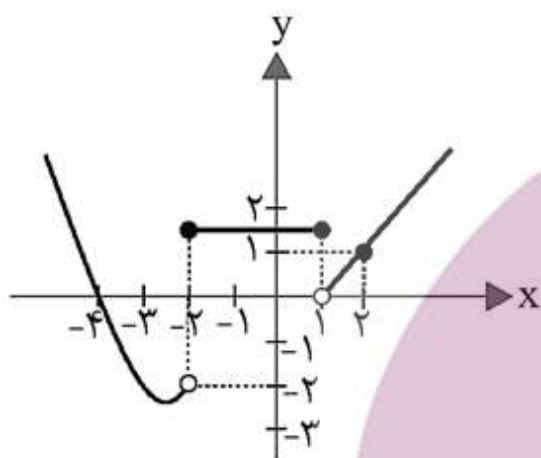
تابع  $|x + 1|$  در بازه  $x > 1$  همواره مثبت است؛ بنابراین علامت قدر مطلق آن را برمی داریم:

$$y = |x + 1| - 2 = (x + 1) - 2 = x - 1 \xrightarrow{\text{دو نقطه}} \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$y = x^2 + 5x + 4 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 4$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{سه نقطه}} \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \Rightarrow y = -\frac{9}{4} \\ x = -2 \Rightarrow y = -2 \\ x = -4 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

باتوجه به عبارات به دست آمده، حال نمودار تابع را رسم می کنیم:



$\frac{9}{4}$  بزرگ تر یا مساوی است و همه نقاط بزرگ تر یا مساوی با آن را پوشش می دهد.

بنابراین تابع همواره از

$$f \text{ برد تابع} = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$$

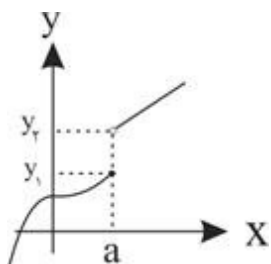
ایران تونش  
توشه ای برای موفقیت

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۶  
قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۶

•  $a > 0$  دلخواه به صورت زیر است:

تابع

تابع



که در آن  $y_1 = a^3 + 2$  و  $y_2 = 3a + 4$ ، با توجه به شکل برد تابع برابر است با:  $R_f = (-\infty, a^3 + 2] \cup (3a + 4, +\infty)$  بنابراین برای اینکه برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  باشد باید:

$$\begin{aligned} 3a + 4 &\leq a^3 + 2 \Rightarrow a^3 - 3a - 2 \geq 0 \Rightarrow a^3 - a - 2a - 2 \geq 0 \\ &\Rightarrow a(a-1)(a+1) - 2(a+1) \geq 0 \Rightarrow (a+1)(a^2 - a - 2) \geq 0 \\ &\Rightarrow (a+1)^2(a-2) \geq 0 \xrightarrow{(a+1)^2 \geq 0} a \in [2, +\infty) \cup \{-1\} \Rightarrow \min\{a\} = -1 \end{aligned}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۶

راه حل اول:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{-(4x^2 - 4x) + 6} = \sqrt{-((2x-1)^2 - 1) + 6} = \sqrt{7 - (2x-1)^2} \\ (2x-1)^2 &\geq 0 \Rightarrow -(2x-1)^2 \leq 0 \Rightarrow 7 - (2x-1)^2 \leq 7 \\ \xrightarrow{7 - (2x-1)^2 \geq 0} 0 &\leq 7 - (2x-1)^2 \leq 7 \Rightarrow 0 \leq y \leq \sqrt{7} \end{aligned}$$

پس برد تابع شامل اعداد صحیح ۰، ۱ و ۲ است.

راه حل دوم:

نکته: در تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$   $a > 0$  برد تابع به صورت  $f(\frac{-b}{2a}), +\infty)$  و  $a < 0$  به صورت  $(-\infty, f(\frac{-b}{2a})]$  است.

$$\begin{aligned} f(-\frac{b}{2a}) &= f(\frac{1}{2}) = 7 \Rightarrow -4x^2 + 4x + 6 \leq 7 \\ \xrightarrow{-4x^2 + 4x + 6 \geq 0} 0 &\leq -4x^2 + 4x + 6 \leq 7 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{-4x^2 + 4x + 6} \leq \sqrt{7} \end{aligned}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵۶

برای محاسبه  $f.g$  ابتدا دامنه تابع را می یابیم:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x} \Rightarrow D_f : x > 0 \\ g(x) = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow D_g : x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D_{f.g} = D_f \cap D_g : x > 0$$

حال ضابطه تابع را می یابیم:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x} \times (\sqrt{x} + 1) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

در نهایت باتوجه به دامنه تابع، برد را می یابیم:

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 > -1$$

$$\Rightarrow f.g \text{ برد} = (-1, +\infty)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۶

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x(x - 1)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x-1)} \xrightarrow{x \neq 0, 1} f(x) = x + 1$$

تابع  $f$ ، برابر  $x + 1$  است (نقطه در دو نقطه به طول های  $x = 0$  و  $x = 1$  تعریف نمی شود. برد تابع خطی غیرافقی،  $\mathbb{R}$  است، پس برد تابع مجموعه اعداد حقیقی، به جز مقدار تابع در این دو نقطه یعنی  $x = 0$  و  $x = 1$  است:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸

برای به دست آوردن برد تابع این گونه عمل می کنیم:

$$|x| \geq 0 \Rightarrow |x| + 8 \geq 8 \Rightarrow \sqrt[3]{|x| + 8} \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt[3]{|x| + 8}} \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 12} 0 < f(x) \leq 6$$

$R_f = (0, 6]$  که شامل ۶ عدد صحیح است.

د تابع برابر است با

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

به ازای مقادیر  $x \geq 2$  عبارت زیر رادیکال نامنفی است و داریم  $|2 - x| = x - 2$  به صورت زیر ساده می شود:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x} = \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-2-x} = \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2}$$

$$x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}-1 \geq -1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow R_f = (-\infty, \frac{1}{2}]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

$f(\frac{x}{3}+1)$  و  $f(x)$  یکسان هستند. باتوجه به نمودار، برد تابع داده شده برابر  $[-1, 2]$  است. داریم:

$$-1 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2f(x) \leq 4 \Rightarrow -5 \leq 2f(x) - 3 \leq 1$$

$$\xrightarrow{\text{قدر مطلق می‌گیریم}} 0 \leq |2f(x) - 3| \leq 5$$

$$\xrightarrow{\text{رادیکال می‌گیریم}} 0 \leq \sqrt{|2f(x) - 3|} \leq \sqrt{5}$$

مقدار تابع  $f(x)$  در  $x = 3$  برابر ۲ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

$$f(x) = \frac{2g(x)}{g(x)-2} = \frac{2g(x)-4+4}{g(x)-2} = \frac{2(g(x)-2)}{g(x)-2} + \frac{4}{g(x)-2} = 2 + \frac{4}{g(x)-2}$$

می دانیم  $g(x) \leq 0$  است، پس:

$$g(x) \leq 0 \Rightarrow g(x) - 2 \leq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{g(x)-2} < 0$$

$$\xrightarrow{\times 4} -2 \leq \frac{4}{g(x)-2} < 0 \xrightarrow{+2} 0 \leq \frac{4}{g(x)-2} + 2 < 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) < 2 \Rightarrow R_f = [0, 2)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸



باتوجه به نمودار  $y = f(x)$  داریم:

$$0 \leq f(x) < 3$$

$$\Rightarrow 16 \leq f^2(x) + 16 < 25 \Rightarrow 4 \leq \sqrt{f^2(x) + 16} < 5$$

$$\xrightarrow{\times(-2)} -10 < -2\sqrt{f^2(x) + 16} \leq -8$$

$$\xrightarrow{+3} -7 < 3 - 2\sqrt{f^2(x) + 16} \leq -5 \Rightarrow R_y = (-7, -5]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

۱ اگر  $f = \{(1, -1), (2, 0), (3, 2)\}$  و  $g = \{(2, 1), (0, 1), (1, 1)\}$  باشد، حاصل  $f \circ g$  کدام است؟

(۱)  $\{(1, -2), (2, -1), (3, 1)\}$  (۲)  $\{(1, 3)\}$

(۳)  $\{(2, 1), (1, 1)\}$  (۴)  $\{(1, 3), (2, -1)\}$

۲ اگر  $f + g = \{(3, 1), (4, 2), (5, -1)\}$  و  $f - g = \{(3, 7), (4, 6), (5, 1)\}$ ، آنگاه دامنه تابع  $\frac{1}{f}$  شامل چند عدد حقیقی است؟

(۱) ۳ (۲) ۲

(۳) ۱ (۴) قابل تشخیص نمی باشد.

۳ اگر  $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$  و  $g = \{(1, 4), (4, 2), (3, 2)\}$ ، تابع  $(f \circ g) + (g \circ f)$  کدام است؟

(۱)  $\{(4, 2), (3, 2)\}$  (۲)  $\{(4, 2), (3, 2), (2, 4)\}$

(۳)  $\{(4, 4)\}$  (۴)  $\{\}$

۴ اگر  $f = \{(1, 2), (a, 5), (4, b), (5, 3)\}$  و  $g = \{(2, 3), (-1, 4), (1, 0), (-2, 5)\}$  داشته باشیم، حاصل  $f \circ g = \{(2, 5), (-1, -2), (-2, 5)\}$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) -۲ (۴) -۱

۵ اگر  $f = \{(1, m), (m, 2), (4, 1), (1, m^2 - 12)\}$  یک تابع باشد و  $g(x) = \sqrt{x}$ ، آنگاه دامنه تابع  $(\frac{f}{g})(x)$  چند عضو دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

۶ اگر  $f = \{(-1, 2), (4, 9), (-4, 3), (1, 6), (-2, 4)\}$  و  $g(x) = x + \sqrt{x}$  و  $(g \circ f)(a) = 12$  باشد،  $g(a)$  کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۶

(۳) ۹ (۴) ۱۰

۷

اگر  $f = \{(\omega, 2), (3, 4), (1, 8), (6, 9)\}$  و  $g(x) = 2f(x+2) - 3$  باشد و داشته باشیم:  $(g \circ f)(a) = 15$ ، کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۵

(۴) ۳

(۳) ۶

۸

اگر  $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$  و  $g(x) = \{(1, 0), (0, 3), (4, 4), (3, 6)\}$  تابع  $g \circ f$  شامل چند زوج مرتب است؟

(۲) ۴

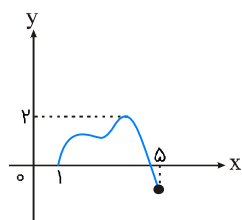
(۱) ۲

(۴) ۸

(۳) ۶

۹

اگر  $f$  نمودار  $f$  شامل چند عضو است؟  $y = \frac{f(1-x)}{g(x)+1}$  به صورت شکل زیر باشد، آنگاه دامنه  $y = f(x)$



(۱) ۱

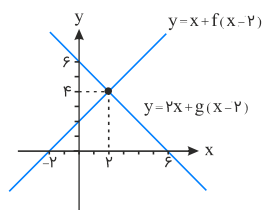
(۲) ۲

(۳) ۳

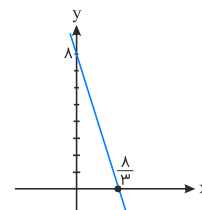
(۴) ۴

۱۰

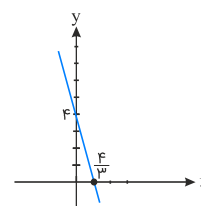
نمودار توابع  $y = x + f(x-2)$  و  $y = 2x + g(x)$  در شکل زیر رسم شده اند. نمودار تابع  $y = f(x) + g(x)$  کدام است؟



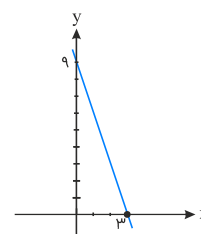
(۱)



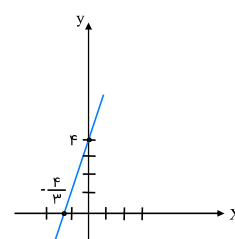
(۲)



(۳)



(۴)



اگر  $f$  و  $g$  دو تابع خطی باشند به طوری که  $\begin{cases} (f+g)(x) = 2x+1 \\ (g-f)(x) = x-2 \end{cases}$  حاصل  $f(1) + g(3)$  کدام است؟

(۱)  $2/5$  (۲)  $3$

(۳)  $3/5$  (۴)  $6$

۱۲

اگر  $f(x) = \begin{cases} 2x & ; x < 1 \\ x & ; x \geq 1 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} 4x & ; x < 2 \\ 3x & ; x \geq 2 \end{cases}$  ضابطه تابع  $y = f(x) - g(x)$  کدام است؟

(۱)  $y = \begin{cases} -2x & ; x < 1 \\ -3x & ; 1 \leq x < 2 \\ -x & ; x \geq 2 \end{cases}$  (۲)  $y = \begin{cases} -x & ; x < 1 \\ -3x & ; 1 \leq x < 2 \\ -2x & ; x \geq 2 \end{cases}$

(۳)  $y = \begin{cases} 6x & ; x < 1 \\ 4x & ; x \geq 2 \end{cases}$  (۴)  $y = \begin{cases} -2x & ; x < 1 \text{ یا } x \geq 2 \\ -3x & ; 1 \leq x < 2 \end{cases}$

۱۳

اگر  $f(2x+1) + x^2 f(0) = 2x^2 + 4x - 1$  باشد، آنگاه حاصل  $f(\sqrt{7})$  کدام است؟

(۱)  $-2$  (۲)  $2 - 2\sqrt{7}$

(۳)  $5$  (۴)  $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$

۱۴

اگر  $xf(-x) + \frac{1}{x} = f(2)$  باشد، مقدار  $f(1)$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{3}{5}$

(۳)  $-\frac{5}{4}$  (۴)  $-\frac{5}{6}$

۱۵

اگر  $f(x + \sqrt{2x-1}) = x^2 - 6$  باشد، حاصل  $f(1)$  کدام است؟

(۱)  $-4\sqrt{2}$  (۲)  $-2\sqrt{2}$

(۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $4\sqrt{2}$

۱۶

اگر  $f(x+2) = \frac{2x^2 + 8x + 7}{4x^2 + 16x + 15}$  باشد، حاصل  $f(\sqrt{3})$  کدام است؟

(۱)  $\frac{11}{15}$  (۲)  $\frac{5}{11}$

(۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{7\sqrt{3}}{15}$

۱۷

اگر  $f(x+1) = -f(x)$  باشد، حاصل  $f(x+2)$  کدام است؟

(۱)  $-f(x)$  (۲)  $-2f(x)$

(۳)  $f(x)$  (۴)  $2f(x)$

۱۸

تابع  $f(x) = \frac{x+1}{x+a}$  مفروض است. اگر  $f(x) \times f(-\frac{1}{x}) = -1$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

(۱)  $1$  (۲)  $-1$

(۳)  $2$  (۴)  $-2$

۱۹ اگر  $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$  و  $\alpha + \beta = 1$  باشد، آنگاه  $f(\alpha) + f(\beta)$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲)  $\frac{1}{4}$   
(۳)  $\frac{1}{16}$   
(۴) ۲

۲۰ اگر  $5f(x-2) + f(2-x) = 4x + 1$  باشد، آنگاه  $f(3)$  کدام است؟

- (۱) ۴  
(۲)  $4/5$   
(۳) ۵  
(۴)  $5/5$

۲۱ اگر  $g(x) = 2x - 1$  و  $fog(x) = 4x^2 - 1$  باشد، حاصل  $gof(1)$  کدام است؟

- (۱) ۵  
(۲) ۶  
(۳) -۲  
(۴) -۱

۲۲ اگر  $(fog)(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  و  $g(x) = \frac{x-1}{x}$  باشد، ضابطه تابع  $f+g$  کدام است؟  $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$

- (۱)  $\frac{4}{x}$   
(۲)  $\frac{2}{x}$   
(۳)  $-\frac{4}{x}$   
(۴)  $-\frac{2}{x}$

۲۳ اگر  $f(x) = x + [x]$  و  $g(x) = x - [x]$  باشد، آنگاه ضابطه تابع  $y = fog(x)$  برابر کدام است؟  $[ ]$  علامت جزء صحیح است

- (۱)  $f(x)$   
(۲)  $g(x)$   
(۳)  $(f+g)(x)$   
(۴)  $(f-g)(x)$

۲۴ نمودارهای تابع  $f$  خطی و تابع درجه دوم، محورهای  $y$  و  $x$  را به ترتیب با عرض‌های ۲ و ۳ قطع می‌کنند؛ اگر  $(fog)(x) = 2x^2 + x - 1$ ، آنگاه  $(f-g)(x)$  کدام است؟

- (۱)  $-2x^2 - 2x + 1$   
(۲)  $x^2 - 2$   
(۳)  $x^2 + x - 1$   
(۴)  $2x^2 - 1$

۲۵  $g(x) = \frac{x+1}{x+4}$  و  $(gof)(x) = \frac{x-5}{3}$ ، ضابطه تابع  $y = f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{-17}{\lambda-x}$   
(۲)  $\frac{4x-23}{\lambda-x}$   
(۳)  $\frac{4x-23}{x-2}$   
(۴)  $\frac{4x-17}{x-2}$

۲۶ اگر  $g(x) = \frac{x+1}{x}$  و به ازای هر  $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$  داشته باشیم  $(fog)(x) + g(x) = x$ ، آنگاه ضابطه تابع  $f$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1-x-x^2}{x-1}$   
(۲)  $\frac{1+x-x^2}{x-1}$   
(۳)  $\frac{1}{x-1}$   
(۴)  $-\frac{1}{x-1}$

۲۷ اگر  $g(x) = x^3 - x$  و  $(fog)(x) = x^6 - 2x^4 + x^2 + 1$  باشند، حاصل  $f(3)$  کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۵

(۳) ۱۷ (۴) ۱۰

۲۸ اگر  $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$  و  $fog(x) = x - 1$ ، آنگاه حاصل  $f(4)$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

۲۹ اگر  $f(x) = 3x - 1$  و  $f(g(x)) = x^2 - x - 1$  باشد، مقدار  $g(3)$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

۳۰ اگر  $f(x) = x^3 - 2$  و  $(fog)(x) = x^3 - 1 + 3x^2 + 3x$  مقدار  $g(f(\sqrt[3]{2}))$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

۳۱ اگر  $f(x+1) = 3x - 2$  و  $g(x-2) = 5x$ ، جواب معادله  $f(x) - 1 = g(f(3))$  کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰

(۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۳۲ اگر  $f$  تابعی خطی با شیب منفی و  $(f \circ f)(x) = 9x + 5$  باشد، مقدار  $f(-1)$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{7}{4}$

(۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{7}{4}$

۳۳ با فرض  $f(x) = [x] + [-x]$  و  $g(x) = x^2 + ax + b$ ، به ازای تمامی مقادیر حقیقی  $x$ ، داریم  $gof(x) = 2$ ، مقدار  $a + b$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۵

(۳) -۲ (۴) ۳

۳۴ اگر داشته باشیم  $f(x) = \begin{cases} 2-x & ; x \geq 1 \\ 3-2x & ; x < 1 \end{cases}$  و  $g(x) = ax + b$ ،  $gof(x)$  و  $fog(x)$  کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۲

(۳) ۱ (۴) صفر

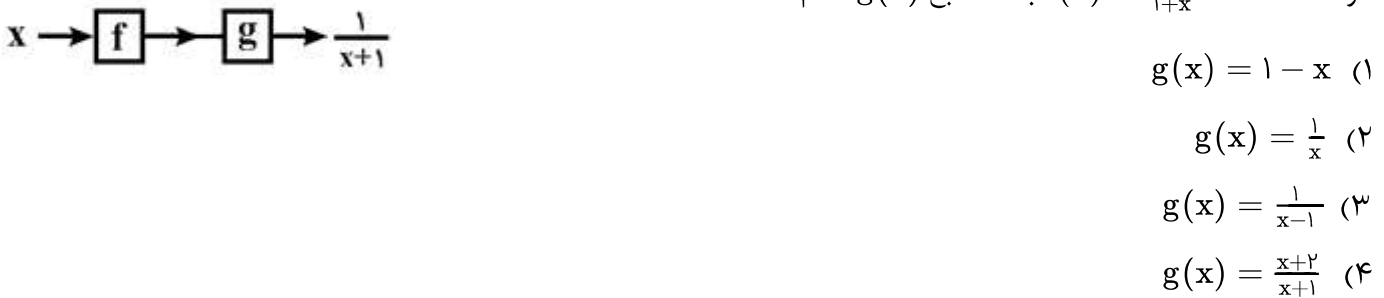
۳۵ اگر  $g(x) = 1 - 2x$  باشد، آنگاه باتوجه به ماشین  $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow -6x^2 - 2x + 3$  مقدار  $f(1)$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) -۳

۳۶ اگر مقدار خروجی از ماشین شکل زیر  $\frac{4}{3}$  باشد، مقدار ورودی کدام است؟



۳۷ زیر اگر  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  باشد، تابع  $g(x)$  کدام است؟



۳۸ اگر  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  و  $g(x) = -x + \sqrt{-x}$  باشد، مجموع جواب های معادله  $f \circ g(x) = 0$  کدام است؟

- (۱) -۳  
(۲) ۵  
(۳) ۳  
(۴) -۵

۳۹ تابع با ضابطه  $g(x) = x - \sqrt{x}$  مفروض است. اگر نمودار تابع  $f$  محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول های ۶ و  $\frac{1}{4}$  قطع کند، آنگاه نمودار تابع  $f \circ g$  محور  $x$  ها را با کدام طول ها قطع می کند؟

- (۱) ۴ و  $\frac{1}{9}$   
(۲) ۹ و  $\frac{1}{4}$   
(۳)  $\frac{1}{4}$  و ۴  
(۴) ۹ و ۴

۴۰ اگر  $f(x) = x^2 + 3x$  و  $g(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ ، آنگاه مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع  $g \circ f$  که در بالای محور  $x$  ها قرار می گیرند؛ برابر کدام بازه است؟

- (۱)  $(-4, 1)$   
(۲)  $(-3, 2)$   
(۳)  $(-2, 2)$   
(۴)  $(-1, 4)$

۴۱ اگر  $5 - \sqrt{x-3}$  و  $f \circ f$  باشد، مقدار  $b - a$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۴۲ اگر  $f(x) = \log_v(x-3)$  و  $g(x) = \sqrt[3]{2-x}$ ، دامنه تابع  $g \circ f$  کدام است؟

(۱)  $(0, 3)$

(۲)  $(3, 7]$

(۳)  $(3, +\infty)$

(۴)  $(5, 8)$

۴۳ اگر  $D_f = [-3, 3]$ ، دامنه تعریف تابع  $g(x) = 2f(1-2x) + \sqrt{x-1}$  کدام است؟

(۱)  $[-1, 2]$

(۲)  $[1, +\infty)$

(۳)  $[1, 7]$

(۴)  $[1, 2]$

۴۴ اگر  $g(x) = [x]$  و  $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{8-x}$  باشد، آنگاه دامنه  $f \circ g$  کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است)

(۱)  $[1, 9]$

(۲)  $[0, 9)$

(۳)  $[1, 8]$

(۴)  $[1, 9)$

۴۵ اگر  $f(x) = 2^x + 3$  و  $g(x) = \sqrt{2x-22}$ ، دامنه تابع  $y = (g \circ f)(x)$  کدام است؟

(۱)  $[1, +\infty)$

(۲)  $[0, 11)$

(۳)  $[3, +\infty)$

(۴)  $[-11, +\infty)$

۴۶ تابع  $f(x) = 3x + 1$  با دامنه  $[0, a]$  مفروض است. حداقل مقدار  $a$  برای اینکه تابع  $f \circ f$  با دامنه غیرتهی قابل تعریف باشد، کدام است؟

(۱) ۱

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۳) ۲

(۴)  $\frac{5}{2}$

۴۷ اگر  $f(x) = \sqrt{\log(x-1)}$  و  $g(x) = \frac{2^x}{2^x-1}$ ، آنگاه دامنه تابع  $(f \circ g)(x)$  کدام است؟

(۱)  $(1, +\infty)$

(۲)  $(0, 1]$

(۳)  $(0, 1] \cup [2, 11]$

(۴)  $(0, 1)$

۴۸ اگر  $f(x) = \sqrt{6+x-x^2}$ ، دامنه تابع  $y = f(1-2x)$  کدام است؟

(۱)  $[-5, 5]$

(۲)  $[-3, 2]$

(۳)  $[-2, 3]$

(۴)  $[-1, \frac{3}{2}]$

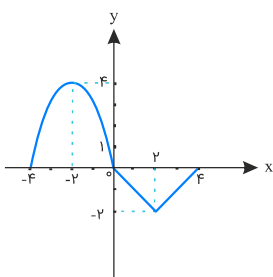
۴۹ اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، آنگاه دامنه تابع  $g(x) = f(\frac{x}{2}) - f(2x)$  کدام است؟

(۱)  $[-2, 2]$

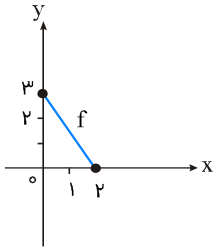
(۲)  $[-8, 8]$

(۳)  $[-4, 4]$

(۴)  $[-2, 4]$







(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

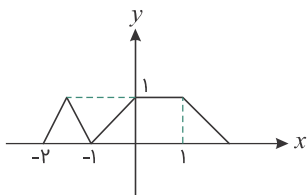
۵۱ اگر  $f(x) = x^2 - 2x$  و  $g(x) = \sqrt{4-x} + 1$  باشند، برد تابع  $f \circ g(x)$  کدام است؟

(۲)  $[-1, +\infty)$ (۱)  $[-1, 1]$ (۴)  $\mathbb{R}$ (۳)  $(-\infty, 1]$ 

۵۲ اگر  $f(x) = x^2 - 2x$  و  $g(x) = \sqrt{4-x} + 1$  باشند، برد تابع  $g \circ f(x)$  کدام است؟

(۲)  $(-\infty, 1]$ (۱)  $(-1, -3)$ (۴)  $(-3, 1]$ (۳)  $(-1, 1]$ 

۵۳  $y = f(x)$  به صورت زیر باشد، برد تابع  $f \circ f(x)$  کدام است؟

(۱)  $[0, 1)$ (۲)  $[0, 1]$ (۳)  $(0, 1)$ (۴)  $\{1\}$ 

۵۴  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  باشد، برد تابع  $y = f \circ f(x)$  کدام است؟

(۲)  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ (۱)  $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ (۴)  $\mathbb{R} - \{0\}$ (۳)  $\mathbb{R} - \{1\}$ 

۵۵ اگر  $f(x) = x - [x]$  و  $g(x) = \sin \pi x$  باشد، برد تابع  $g \circ f(x)$  کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

(۲)  $[0, 1]$ (۱)  $[-1, 1]$ (۴)  $[-1, -\frac{1}{2}]$ (۳)  $[-1, 0]$ 

۵۶ توابع  $f(x) = [x] + [-x]$  و  $g(x) = x^2 + ax + b$  را در نظر بگیرید. اگر برد تابع  $g \circ f$  با  $\{2\}$  باشد،  $a$  کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) -۲

(۳) -۱

گزینه ۲

۱

$$2f = \{(1, -2), (2, 0), (3, 4)\}$$

$$g^2 = \{(2, 1), (0, 1), (1, 1)\}$$

ابتدا دامنه  $2f - g^2$  را به دست می آوریم:

$$D_{2f - g^2} = D_{2f} \cap D_{g^2} = \{2, 1\}$$

$$D_{\frac{2f - g^2}{f}} = (D_{2f - g^2} \cap D_f) - \{x | f(x) = 0\} = \{1\}$$

$$\Rightarrow \frac{2f - g^2}{f} = \left\{ \left( 1, \frac{-2 - 1}{-1} \right) \right\} = \{(1, 3)\}$$

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۹۱۳۹۶

گزینه ۴

۲

با جمع کردن دو تابع  $f + g$  و  $f - g$  ظاهراً خواهیم داشت:

$$(f + g) + (f - g) = 2f = \{(3, 8), (4, 8), (5, 0)\}$$

پس  $f = \{(3, 4), (4, 4), (5, 0)\}$  پس این طور به نظر می رسد که:

$$\frac{1}{f} = \left\{ \left( 3, \frac{1}{4} \right), \left( 4, \frac{1}{4} \right) \right\}$$

یعنی دامنه آن شامل دو عدد است ولی با دقت بیشتر می توان فهمید که چون دامنه های  $f + g$  و  $f - g$  اشتراک دامنه های  $f$  و  $g$  است دامنه  $f$  شامل اعداد دیگری هم می تواند باشد که با دامنه  $g$  مشترک نباشند، پس  $\frac{1}{f}$  هم می تواند شامل زوج های بیشتری باشد. به طور کلی می توان گفت چون دامنه  $f$  مشخص نیست، پس دامنه  $\frac{1}{f}$  مشخص نیست.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۲۱۳۹۶

نکته:  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

نکته:  $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$

دا توابع  $f$  و  $g$  به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} \times \\ 2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 4 \Rightarrow \text{gof} = \{(2, 4)\} \\ 3 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} \times \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} \times \\ 4 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 1 \Rightarrow \text{fog} = \{(4, 1), (3, 1)\} \\ 3 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 1 \end{cases}$$

بنا اشتراک دامنه توابع  $\text{gof}$  و  $\text{fog}$  برابر تهی است، پس دامنه تابع  $(f \circ g) + (g \circ f)$  برابر تهی می باشد؛ در نتیجه:  $(f \circ g) + (g \circ f) = \{ \}$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳۱۳۹۶

با استفاده از تابع  $f = \{(2, 5), (-1, -2), (-2, 5)\}$  می توان نوشت:

$$(f \circ g)(2) = 5 \Rightarrow f(g(2)) = 5 \Rightarrow f(3) = 5$$

فی در تابع  $f$  داریم  $f(a) = 5$ ؛ بنابراین  $a = 3$

$$(f \circ g)(-1) = -2 \Rightarrow f(g(-1)) = -2 \Rightarrow f(4) = -2$$

بع داریم  $f(b) = f(4) = -2$ ؛ بنابراین  $b = -2$   
پس می توان نتیجه گرفت:  $a + b = 3 + (-2) = 1$

گزینه دو ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ تابستان ۱۳۹۸

ابتدا تابع بودن  $f$  را بررسی می کنیم:

$$(1, m) = (1, m^2 - 12) \Rightarrow m^2 - 12 = m$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 4 \\ m_2 = -3 \end{cases}$$

نکته: زوج مرتب با مؤلفه اول ۴ و مؤلفه دوم متفاوت خواهیم داشت و تابع نخواهد بود، پس فقط  $m = -3$  پذیرفته است. حال در تابع  $f = \{(1, -3), (-3, 2), (4, 1)\}$  تنها دو عضو در دامنه  $\sqrt{x}$  صدق می کنند؛ پس دامنه تابع  $f$  شامل  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  شامل ۲ عضو است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲۱۳۹۸

$$(g \circ f)(a) = 12 \Rightarrow g(f(a)) = 12 \Rightarrow f(a) + \sqrt{f(a)} = 12$$

$$f(a) + \sqrt{f(a)} - 12 = 0 \xrightarrow{f(a)=t} t^2 + t - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (t + 4)(t - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -4 \Rightarrow f(a) = 16 \\ t = 3 \Rightarrow f(a) = 9 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

باتوجه به g:

$$g(4) = 4 + \sqrt{4} \Rightarrow g(4) = 4 + 2 = 6$$

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

$$g(f(a)) = 15 \xrightarrow{f(a)=t} g(t) = 15$$

$$\Rightarrow g(t) = 2f(t+2) - 3 = 15 \Rightarrow f(t+2) = 9 \xrightarrow{f(x)=9} t+2 = 6 \Rightarrow t = 4$$

$$\Rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow a = 3$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

$$\begin{cases} D_{g \circ f} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\} \\ D_f = [-5, 5] \\ D_g = \{1, 0, 4, 3\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = \{x | -5 \leq x \leq 5, \sqrt{25 - x^2} \in \{1, 0, 4, 3\}\}$$

$$\sqrt{25 - x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 5$$

$$\sqrt{25 - x^2} = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{24}$$

$$\sqrt{25 - x^2} = 4 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\sqrt{25 - x^2} = 3 \Rightarrow x = \pm 4$$

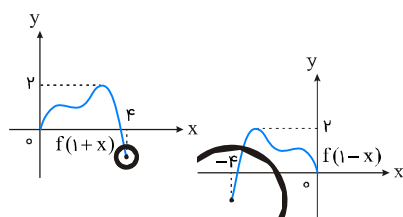
بنابراین تابع  $g \circ f$  شامل ۸ زوج مرتب است.

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

$f(1+x)$  را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

(تعمیم) کنیم. برای این کار کافی است نمودار تابع

نمودار تابع  $f(1-x)$



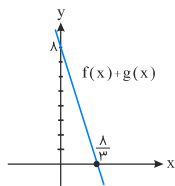
باتوجه به شکل، دامنه تابع  $y = f(1-x)$  است به علاوه دامنه  $g(x)$  برابر  $[-4, 0]$  است که اشتراک آن‌ها برابر  $\{-1, -3, -2\}$  است، به علاوه دقت کنید به ازای  $y = \frac{f(1-x)}{g(x)+1}$  برابر  $\{-1, -3\}$  است و دو عضو دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

$$x + f(x - 1) = x + 2 \Rightarrow f(x - 1) = 2 \Rightarrow f(x) = 2$$

$$2x + g(x) = -x + 6 \Rightarrow g(x) = -3x + 6$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = -3x + 8$$



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ g(x) = a'x + b' \end{cases}$$

حال داریم:

$$\begin{cases} (f + g)(x) = (a + a')x + (b + b') = 2x + 1 \\ (g - f)(x) = (a' - a)x + (b' - b) = x - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + a' = 2 \\ a' - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 1/5 \\ a = 9/5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + b' = 1 \\ b' - b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = -9/5 \\ b = 1/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 9/5x + 1/5 \\ g(x) = 1/5x - 9/5 \end{cases} \Rightarrow f(1) + g(3) = 2 + 4 = 6$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

ابتدا توابع داده شده را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; x < 1 \\ x & ; 1 \leq x < 2 \\ x & ; x \geq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & ; x < 1 \\ 4x & ; 1 \leq x < 2 \\ 3x & ; x \geq 2 \end{cases}$$

اکنون داریم:

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} 2x - 4x & ; x < 1 \\ x - 4x & ; 1 \leq x < 2 \\ x - 3x & ; x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x & ; x < 1 \\ -3x & ; 1 \leq x < 2 \\ -2x & ; x \geq 2 \end{cases}$$

بنابراین:

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} -2x & ; x < 1 \text{ یا } x \geq 2 \\ -3x & ; 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

گزینه دو علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

اول باید مقدار  $f(0)$  را پیدا کنیم. به ازای  $x = -\frac{1}{2}$  داریم:

$$f(0) + \frac{1}{2}f(0) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \Rightarrow \frac{5}{2}f(0) = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2} \Rightarrow f(0) = -2$$

$$f(2x+1) - 2x^2 = 2x^2 + 4x - 1 \Rightarrow f(2x+1) = 4x^2 + 4x - 1$$

$$\Rightarrow f(2x+1) = (4x^2 + 4x + 1) - 2 = (2x+1)^2 - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2 \xrightarrow{x=\sqrt{y}} f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 - 2 = y - 2 = 5$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

ابتدا با جایگذاری  $x = -2$ ، مقدار  $f(2)$  را به دست می آوریم:

$$xf(-x) + \frac{1}{x} = f(2) \xrightarrow{x=-2} -2f(2) - \frac{1}{2} = f(2) \Rightarrow f(2) = -\frac{1}{6} \quad (*)$$

حال با جایگذاری  $x = -1$ ، مقدار  $f(1)$  را به دست می آوریم:

$$-f(1) - 1 = f(2) \stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{6} \Rightarrow f(1) = -\frac{5}{6}$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

ابتدا باید معادله زیر را حل کنیم:

$$x + \sqrt{2x-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = 1-x \xrightarrow[x \geq \frac{1}{2}]{1-x \geq 0} \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

طرفین معادله  $\sqrt{2x-1} = 1-x$  را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x-1 = 1-2x+x^2 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{2} \notin [\frac{1}{2}, 1] \\ x=2-\sqrt{2} \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x + \sqrt{2x-1}) = x^2 - 6$$

$$\xrightarrow{x=2-\sqrt{2}} f(1) = (2-\sqrt{2})^2 - 6 = 4+2-4\sqrt{2}-6 = -4\sqrt{2}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۵۱۳۹۶

$$f(x+2) = \frac{2(x^2+4x+4)-1}{4(x^2+4x+4)-1} \Rightarrow f(x+2) = \frac{2(x+2)^2-1}{4(x+2)^2-1}$$

$$\xrightarrow{x+2=t} f(t) = \frac{2t^2-1}{4t^2-1} \xrightarrow{t=\sqrt{3}} f(\sqrt{3}) = \frac{6-1}{12-1} = \frac{5}{11}$$

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۹۱۳۹۶

کافی است  $x$  را به  $x+1$  تبدیل کنیم، داریم:

$$f(x+1+1) = -f(x+1) \Rightarrow f(x+2) = f(x)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸۱۳۹۵

$$f(x) = \frac{x+1}{x+a} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x}+1}{-\frac{1}{x}+a} = \frac{\frac{-1+x}{x}}{\frac{-1+ax}{x}} = \frac{x-1}{ax-1}$$

$$f(x) \times f\left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \Rightarrow \frac{x+1}{x+a} \times \frac{(x-1)}{ax-1} = -1 \Rightarrow a = -1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶۱۳۹۶

راه حل اول:

$$\alpha + \beta = 1 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= \frac{f^\alpha}{f^\alpha + 1} + \frac{f^\beta}{f^\beta + 1} \stackrel{(*)}{=} \frac{f^\alpha}{f^\alpha + 1} + \frac{f^{1-\alpha}}{f^{1-\alpha} + 1} \\ &= \frac{f^\alpha}{f^\alpha + 1} + \frac{f}{f + 1 \times f^\alpha} = \frac{f^\alpha}{f^\alpha + 1} + \frac{1}{f^\alpha + 1} = \frac{f^\alpha + 1}{f^\alpha + 1} = 1 \end{aligned}$$

راه حل دوم:

به ازای  $\alpha = 0$  و  $\beta = 1$  داریم:

$$f(0) = \frac{1}{f}, \quad f(1) = \frac{1}{f} \Rightarrow f(0) + f(1) = 1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

$$\begin{cases} x = 5 : 5f(3) + f(-3) = 21 \\ x = -1 : 5f(-3) + f(3) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -25f(3) - 5f(-3) = -105 \\ 5f(-3) + f(3) = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -24f(3) = -108 \Rightarrow f(3) = 4/5$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

$$g(x) = 2x - 1 \xrightarrow{x=1} g(1) = 1 \quad (*)$$

$$f \circ g(x) = f(2x - 1) \xrightarrow{x=1} f \circ g(1) = 3 \xrightarrow{(*)} f(1) = 3$$

نابراین حاصل  $\text{gof}(1)$  برابر است با:

$$\text{gof}(1) = g(\overbrace{f(1)}^3) = g(3) = 5$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

$$f(g(x)) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\frac{x-1}{x} = t \Rightarrow tx - x + 1 = 0 \Rightarrow x(t-1) = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{2\left(\frac{-1}{t-1}\right) + 1}{\frac{-1}{t-1} - 1} = \frac{-2 + t - 1}{-1 - t + 1} = \frac{t-3}{-t} \Rightarrow f(x) = \frac{-x+3}{x}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{-x+3}{x} + \frac{x-1}{x} = \frac{2}{x}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸



ابتدا توجه کنید که:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

ضابطه fog را تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x - [x]) \\ &= x - [x] + [x - [x]] = x - [x] + 0 \\ \Rightarrow f(g(x)) &= x - [x] = g(x) \end{aligned}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳۹۶۸

می دانیم  $f$  یک تابع خطی است که محور  $y$ ها را با عرض ۲ قطع می کند، پس  $f(x) = mx + 2$  یک تابع درجه دوم است که محور  $y$ ها را با عرض ۳ قطع می کند، پس:  $g(x) = ax^2 + bx + 3$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = m(ax^2 + bx + 3) + 2 \\ \Rightarrow (f \circ g)(x) &= max^2 + mbx + (3m + 2) \end{aligned}$$

اما طبق فرض سؤال  $(f \circ g)(x) = 2x^2 + x - 1$ ، پس داریم:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = max^2 + mbx + (3m + 2) \\ (f \circ g)(x) = 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m + 2 = -1 \Rightarrow m = -1 \quad (*) \\ mb = 1 \xrightarrow{(*)} -b = 1 \Rightarrow b = -1 \\ ma = 2 \xrightarrow{(*)} -a = 2 \Rightarrow a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -x + 2 \\ g(x) = -2x^2 - x + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = (-x + 2) - (-2x^2 - x + 3) = 2x^2 - 1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵۱۲

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow g(f(x)) &= \frac{f(x)+1}{f(x)+2} = \frac{x-5}{2} \Rightarrow 2f(x) + 2 = (x-5)f(x) + 2x - 2 \\ \Rightarrow (\lambda - x)f(x) &= 2x - 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2x - 2}{\lambda - x} \end{aligned}$$

گزینه دو علوم تجربی سوم آزمون شماره ۱۳۹۶۵

$$(f \circ g)(x) + g(x) = x \Rightarrow f(g(x)) + g(x) = x$$

$$از آنجا که \quad g(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{x+1}{x} = x \Rightarrow f\left(\frac{x+1}{x}\right) = x - \left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2 - x - 1}{x} \Rightarrow f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2 - x - 1}{x} \quad (*)$$

$$\text{حال با فرض } \frac{x+1}{x} = t \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\frac{x+1}{x} = t \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = t \Rightarrow \frac{1}{x} = t - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{t-1}$$

با جایگذاری این تساوی در (\*) تابع f را می یابیم:

$$f(t) = \frac{\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t-1} - 1}{\frac{1}{t-1}} = \frac{1}{t-1} - 1 - t + 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-1} - x = \frac{1-x^2+x}{x-1}$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۵

در تابع fog داریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3 - x) = x^6 - 2x^4 + x^2 + 1$$

$$\xrightarrow{x^3 - x = t} f(t) = t^2 + 1$$

برای به دست آوردن f(۳) داریم:

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

نکته: اگر و دو تابع باشند، ترکیب با  $g$  با  $f$   $g \circ f$  می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad , D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$\begin{cases} f \circ g(x) = x - 1 \\ g(x) = \frac{x+2}{x-1} \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = x - 1 \quad (*)$$

برای یافتن  $x$  به جای عددی را قرار دهیم که حاصل  $\frac{x+2}{x-1}$  برابر با ۴ شود:

$$\frac{x+2}{x-1} = 4 \Rightarrow x+2 = 4x-4 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین با جایگذاری مقدار  $x = 2$  در

(\*)

داریم:

$$x = 2 \Rightarrow f(4) = 2 - 1 = 1$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

راه حل اول:

$$f(g(x)) = x^2 - x - 1 \xrightarrow{x=3} f(g(3)) = 9 - 3 - 1 = 5 \xrightarrow{f(x)=3x-1} f(g(3)) = 3(g(3)) - 1 = 5 \Rightarrow 3(g(3)) = 6 \Rightarrow g(3) = 2$$

راه حل دوم:

در حالت کلی می توان از روابط داده شده، ضابطه  $g(x)$  را به دست آورد:

$$\begin{cases} f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f(g(x)) = 3g(x) - 1 \\ f(g(x)) = x^2 - x - 1 \end{cases} \Rightarrow 3g(x) - 1 = x^2 - x - 1 \Rightarrow 3g(x) = x^2 - x$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - x}{3} \Rightarrow g(3) = \frac{3^2 - 3}{3} = 2$$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۴

ابتدا ضابطه  $g(x)$  را به دست می آوریم. داریم:

$$f(x) = x^3 - 2 \Rightarrow f(g(x)) = g^3(x) - 2 = x^3 - 1 + 3x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow g^3(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow g^3(x) = (x+1)^3 \Rightarrow g(x) = x+1$$

حال باتوجه به ضابطه  $g(x)$  داریم:

$$g(\underbrace{f(\sqrt[3]{2})}_0) = g(0) = 1$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

بر  $f(3)$  و  $g(f(3))$  را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} f(x+1) = 3x - 2 \xrightarrow{x=3} f(3) = 6 - 2 = 4 \\ g(x-2) = 5x \xrightarrow{x=4} g(4) = 3 \circ \Rightarrow g(f(3)) = g(4) = 3 \circ \end{cases}$$

اکنون در طرفین تساوی  $f(x+1) = 3x - 2$  قرار می دهیم  $x-1$ ، بنابراین:

$$f(x+1) = 3x - 2 \Rightarrow f(x-1+1) = 3(x-1) - 2 \Rightarrow f(x) = 3x - 5$$

حال داریم:

$$f(x) - 1 = g(f(3)) \Rightarrow 3x - 6 = 3 \circ \Rightarrow 3x = 3 \circ \Rightarrow x = 12$$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۱۳۹۵

ضابطه  $f$  را به صورت  $f(x) = ax + b$  در نظر می گیریم. طبق فرض داریم:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 9x + 5 \Rightarrow a(ax + b) + b = 9x + 5$$

$$\Rightarrow \underline{a^2x} + \underline{ab + b} = \underline{9x} + \underline{5} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 & (*) \\ ab + b = 5 & (**) \end{cases}$$

چون شیب  $f$  منفی است، پس  $a < 0$ . بنابراین از  $(*)$  داریم:  $a = -3$   
با جایگذاری این مقدار در  $(**)$  داریم:

$$-2b = 5 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

در نتیجه  $f(x) = -3x - \frac{5}{2}$ . بنابراین:

$$f(-1) = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۴۱۳۹۶

برای تابع  $f(x)$  داریم:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

باتوجه به اینکه در صورت سؤال ذکر شده تابع  $(f \circ f)(x) = g(f(x))$  ای تمام مقادیر برابر ۲ است، پس مقادیر ورودی را به دو قسمت  $x \in \mathbb{Z}$  و  $x \notin \mathbb{Z}$  تقسیم می کنیم. داریم:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} : g(f(x)) = 2 \Rightarrow g(0) = 2 \Rightarrow b = 2 & (*) \\ x \notin \mathbb{Z} : g(f(x)) = 2 \Rightarrow g(-1) = 2 \Rightarrow 1 - a + b = 2 \xrightarrow{(*)} a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 3$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸۱۳۹۴

دقت کنید وقتی  $x \geq 1$  باشد،  $x \leq 2$  به نحو مشابه اگر  $x < 1$  باشد، آنگاه  $2x - 1 > 3 - 2x$  است پس:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \begin{cases} 3 - 2(2 - x) = 2x - 1 & ; x \geq 1 \\ 2 - (3 - 2x) = 2x - 1 & ; x < 1 \end{cases}$$

بنابراین  $f \circ f(x) = 2x - 1$  یعنی  $1 \leftarrow 2$  پس  $g(x) = 1$  و  $a = 2$  و  $b = -1$  و  $a + b = 1$ .

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۵

باتوجه به ماشین،  $(g \circ f)(x) = -6x^2 - 2x + 3$  و  $g(x) = 1 - 2x$  است، پس داریم:

$$g(f(x)) = 1 - 2f(x) = -6x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow 2f(x) = 6x^2 + 2x - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x^2 + x - 1 \Rightarrow f(1) = 3 + 1 - 1 = 3$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲۰ ۱۳۹۸

اگر ورودی را  $x$  و  $f(x) = 2x - 2$  و  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$  و خروجی را  $y$  بگیریم، در این صورت داریم:  
این همان تعریف تابع  $y = g \circ f(x)$  است:

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow y$$

$$y = g \circ f(x) = g(f(x)) \Rightarrow y = \frac{2x - 2}{\sqrt{2x - 2} + 1}$$

ر به جای خروجی  $(y)$  را قرار دهیم، ورودی  $(x)$  به دست می آید:

$$\frac{f}{3} = \frac{2x - 2}{\sqrt{2x - 2} + 1} \xrightarrow{\sqrt{2x - 2} = t \geq 0} \frac{f}{3} = \frac{t^2}{t + 1}$$

$$\Rightarrow 3t^2 = ft + f \Rightarrow 3t^2 - ft - f = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 & \text{ق.ق} \\ t = -\frac{2}{3} & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x - 2} = 2 \Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow g\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow g\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1}$$

$$1 - \frac{1}{x+1} = t \Rightarrow \frac{1}{x+1} = 1 - t$$

$$g(t) = 1 - t \Rightarrow g(x) = 1 - x$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۵

$$f \circ g(x) = 0 \Rightarrow f(g(x)) = 0 \Rightarrow (g(x), 0) \in f$$

باتوجه به ضابطه  $f(x)$ :

$$f(x) = x^2 - 8x + 12 \Rightarrow f(x) = (x - 2)(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

معادله  $f(g(x)) = 0$  و  $g(x)$  می‌باشند، لذا  $g(x)$  باید برابر ۲ و ۶ باشد.

$$-x + \sqrt{-x} = 2 \xrightarrow[t \geq 0]{\sqrt{-x}=t} t^2 + t = 2$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t + 2)(t - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \sqrt{-x} = 1 \\ t = -2 \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$-x + \sqrt{-x} = 6 \xrightarrow[t \geq 0]{\sqrt{-x}=t} t^2 + t = 6$$

$$t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t + 3)(t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \sqrt{-x} = 2 \\ t = -3 \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$$

بنابراین جمع ریشه‌ها برابر است با:  $-4 - 1 = -5$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

برای یافتن نقاط تقاطع تابع  $f \circ g$  با محور  $x$  باید معادله  $(f \circ g)(x) = 0$  را حل کنیم، یعنی:  $f(g(x)) = 0$   
برای حل این معادله ابتدا ریشه‌های  $g(x)$  را می‌یابیم. چون در دو نقطه به طول‌های ۶ و  $\frac{-1}{4}$  محور  $x$  را قطع می‌کند، پس:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 6, x = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = 0 \Rightarrow g(x) = 6, g(x) = \frac{-1}{4}$$

از آنجاکه  $g(x) = x - \sqrt{x}$ ، بنابراین:

$$x - \sqrt{x} = 6 \text{ و } x - \sqrt{x} = \frac{-1}{4}$$

باتوجه به گزینه‌ها  $x = 9$  ریشه معادله اول و  $x = \frac{1}{4}$  ریشه معادله دوم است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

ابتدا ضابطهٔ  $\text{gof}$  را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x \\ g(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow (\text{gof})(x) = g(f(x)) = -\frac{1}{2}f(x) + 2$$

$$\Rightarrow (\text{gof})(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 3x) + 2$$

$$\Rightarrow (\text{gof})(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

برای به دست آوردن مجموعهٔ طول نقاطی از نمودار تابع  $\text{gof}$  که بالای محور  $x$ ها قرار می گیرند، باید نامعادلهٔ  $(\text{gof})(x) > 0$  را حل کنیم:

$$(\text{gof})(x) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 > 0$$

$$\xrightarrow{\times(-2)} x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+4) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1 \Rightarrow x \in (-4, 1)$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴۱۳

$$D_f = [3, +\infty) \quad (1)$$

$$D_{\text{fof}} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_f\} = \{x | x \geq 3, f(x) \geq 3\}$$

حال نامعادلهٔ  $f(x) \geq 3$  را حل می کنیم:

$$5 - \sqrt{x-3} \geq 3 \Rightarrow \sqrt{x-3} \leq 2 \Rightarrow x-3 \leq 4 \Rightarrow x \leq 7 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} D_{\text{fof}} = [3, 7]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow b - a = 4$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۸۲۰

نکته:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$$

$$\begin{cases} \log_a x \leq y \xrightarrow{a>1} x \leq a^y \\ \log_a x \leq y \xrightarrow{0<a<1} x \geq a^y \end{cases}$$

ابتدا توجه کنید که  $D_g = (-\infty, 2]$  و  $D_f = (3, +\infty)$  حال می توان نوشت:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x > 3 | \log_x(x-3) \leq 2\}$$

$$= \{x > 3 | x-3 \leq 2^2\} = \{x > 3 | x \leq 7\} = (3, 7]$$

گزینه دو علوم تجربی سوم آزمون شماره ۱۳۹۶۵

برای آنکه تابع  $g$  تعریف شده باشد، ابتدا باید  $1 - 2x \in D_f$ ، پس:

$$\begin{aligned} -3 \leq 1 - 2x < 3 &\Rightarrow -3 < 2x - 1 \leq 3 \\ \Rightarrow -2 < 2x \leq 4 &\Rightarrow -1 < x \leq 2 \quad (*) \end{aligned}$$

مچنین باید  $\sqrt{x-1}$  تعریف شده باشد:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \quad (**)$$

از اشتراک  $(*)$  و  $(**)$  داریم:

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \in [1, 2]$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

$$D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$D_g = \mathbb{R}, D_f = \{x : x - 1 \geq 0, 8 - x \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 8\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x : x \in \mathbb{R}, [x] \in [1, 8]\}$$

$$1 \leq [x] \leq 8 \Rightarrow 1 \leq x < 9 \Rightarrow D_{f \circ g} = [1, 9)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۵

نکته:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$$

ابتدا باتوجه به ضابطه توابع  $f$  و  $g$  داریم:  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $D_g = [11, +\infty)$   
حال با استفاده از نکته بالا داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} | 2^x + 3 \geq 11\} = \{x \in \mathbb{R} | 2^x \geq 8\} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\} = [3, +\infty)$$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

دامنه تابع  $f$  بازه  $[0, a]$  و برد آن بازه  $[1, 3a + 1]$  است. برای اینکه تابع  $f \circ f$  با دامنه غیرتهی قابل تعریف باشد، لازم است داشته باشیم  
 $\emptyset \neq [1, 3a + 1] \cap [0, a]$  این کار لازم است  $a \geq 1$  باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۵



$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_g : 2^x - 1 \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0 \\ \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad (I)$$

$$D_f : \begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ \log(x - 1) \geq 0 \Rightarrow x - 1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$\frac{2^x}{2^x - 1} \geq 2 \Rightarrow \frac{2^x}{2^x - 1} - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2 - 2^x}{2^x - 1} \geq 0 \xrightarrow{2^x = t} \frac{2 - t}{t - 1} \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 < t \leq 2 \Rightarrow 1 < 2^x \leq 2 \Rightarrow 0 < x \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < x \leq 1 \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) = (0, 1]$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۸

ابتدا دامنهٔ  $f$  را محاسبه می‌کنیم:

$$6 + x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

حال برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع  $y = f(1 - 2x)$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-2 \leq 1 - 2x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -2x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow D_f = [-1, \frac{3}{2}]$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۵

باتوجه به نمودار، دامنهٔ تابع  $f$  بازهٔ  $D_f = [-4, 4]$  است. برای یافتن دامنهٔ تابع  $f(\frac{x}{2})$  دامنهٔ تابع  $f$  را در ۲ ضرب و برای یافتن دامنهٔ تابع  $f(2x)$  دامنهٔ تابع  $f$  را بر ۲ تقسیم می‌کنیم؛ پس داریم:

$$D_{f(\frac{x}{2})} = [2 \times (-4), 2 \times 4] = [-8, 8]$$

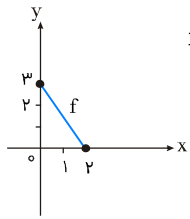
$$D_{f(2x)} = \left[ \frac{-4}{2}, \frac{4}{2} \right] = [-2, 2]$$

لذا دامنهٔ تابع  $g(x) = f(\frac{x}{2}) - f(2x)$  برابر است با:

$$D_g = D_{f(\frac{x}{2})} \cap D_{f(2x)} = [-8, 8] \cap [-2, 2] = [-2, 2]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

باتوجه به نمودار، دامنه تابع  $f$  برابر  $D_f = [0, 2]$  است. برای محاسبه دامنه تابع  $f \circ f$  ابتدا ضابطه تابع  $f$  را به دست می‌آوریم. شیب خط داده شده برابر  $m = -\frac{3}{2}$  و عرض از مبدأ آن  $h = +3$  است، پس داریم:



$$f \text{ ضابطه } : f(x) = mx + h \xrightarrow[h=3]{m=-\frac{3}{2}} f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

پس داریم:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \left\{ x \in [0, 2] \mid \underbrace{0 \leq -\frac{3}{2}x + 3 \leq 2}_{(*)} \right\}$$

$$\xrightarrow{(*)} 0 \leq -\frac{3}{2}x + 3 \leq 2 \xrightarrow{-3} -3 \leq -\frac{3}{2}x \leq -1 \xrightarrow{\times(-\frac{2}{3})} 2 \geq x \geq \frac{2}{3}$$

بنابراین:

$$D_{f \circ f} = \left\{ x \in [0, 2], x \in \left[\frac{2}{3}, 2\right] \right\} = \left[\frac{2}{3}, 2\right]$$

که شامل دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴۱۳۹۶

$$f(x) = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{4-x} + 1 \Rightarrow \begin{cases} D_g = (-\infty, 4] \\ R_g = [1, +\infty) \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} = \{D_g \mid g(x) \in D_f\} \Rightarrow D_{f \circ g} = D_g = (-\infty, 4]$$

$$(f \circ g)(x) = (\sqrt{4-x})^2 - 1 = 4 - x - 1 = 3 - x \Rightarrow R_{f \circ g} = [-1, +\infty)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵۱۳۹۸

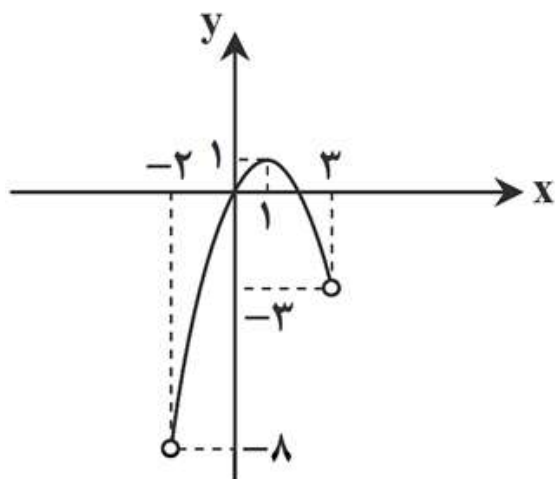
$$g \circ f(x) = g(f(x)) \xrightarrow{t=f(x)} g(f(x)) = g(t) ; -2 < t < 3$$

بنابراین کافی است برد تابع  $t^2 = 1 - (t - 1)^2$  را با  $t \in (-2, 3)$  به دست آوریم.

$$-2 < t < 3 \Rightarrow -3 < t - 1 < 2 \Rightarrow 0 \leq (t - 1)^2 < 9$$

$$\Rightarrow -1 < 1 - (t - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 < g(t) \leq 1 \Rightarrow R_g = (-1, 1]$$

در بازه  $(-2, 3)$  به صورت زیر است:



گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

دقت فرمایید که  $0 \leq f(x) \leq 1$  است، پس  $f(x)$  مقادیر  $[0, 1]$  را اختیار می کند، در نتیجه  $f(f(x))$  از روی نمودار مقادیری را می پذیرد که تابع  $f$  در بازه پذیرفته است که فقط عدد ۱ است؛ یعنی برد تابع  $f \circ f(x)$  برابر با  $\{1\}$  است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۶

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(f(x)) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \frac{-\frac{2}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}} = -\frac{1}{x}$$

منه تابع  $y = f(f(x))$  برابر  $\mathbb{R} - \{0, -1\}$  است و در نتیجه:

$$y = f(f(x)) = -\frac{1}{x} \xrightarrow{x \in \mathbb{R} - \{0, -1\}} R_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۴

ابتدا دو تابع  $f$  و  $g$  را با هم ترکیب می کنیم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin \pi(x - [x])$$

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq \pi(x - [x]) < \pi$$

چون کمان سینوس در نواحی اول و دوم است، همواره  $\sin$  بین صفر و یک می باشد؛ پس:  $R_{g \circ f} = [0, 1]$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۶

می دانیم:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین:

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(0) = b & ; x \in \mathbb{Z} \\ g(-1) = 1 - a + b & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

چون برد تابع برابر با  $\{2\}$  است، بنابراین:

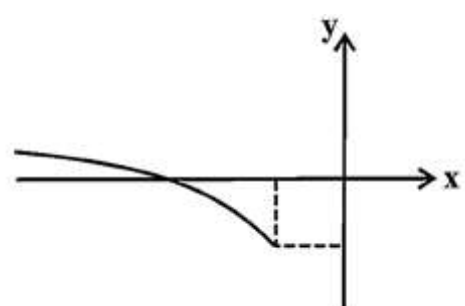
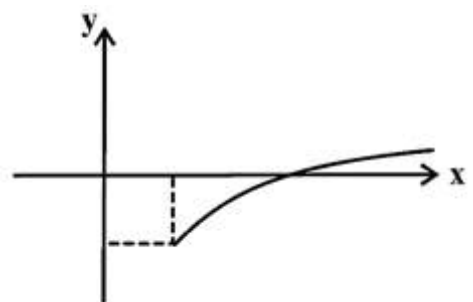
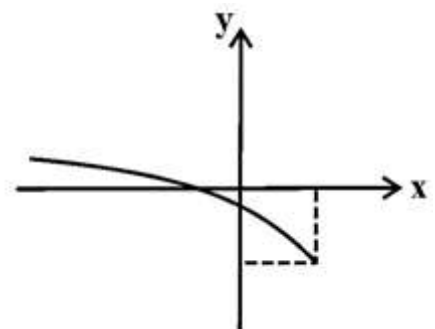
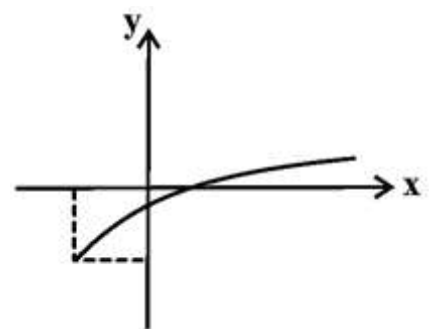
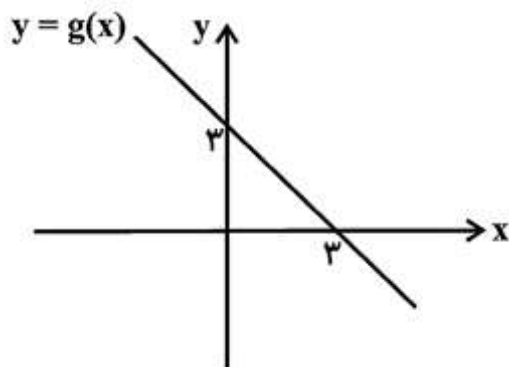
$$\begin{cases} b = 2 \\ 1 - a + b = 2 \xrightarrow{b=2} a = 1 \end{cases}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۱ نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = |x + 3| - 2$  از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

- (۱) اول  
(۲) دوم  
(۳) سوم  
(۴) چهارم

۲ نمودار تابع  $y = g(x)$  به صورت زیر است. کدام گزینه نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{1 - g(x)} - 2$  را نشان می‌دهد؟



۳ نمودار تابع  $f(x) = \frac{x}{|x|} \sqrt{x+2}$  از کدام نواحی مختصات عبور نمی‌کند؟

- (۱) اول و دوم  
(۲) اول و سوم  
(۳) دوم و چهارم  
(۴) سوم و چهارم

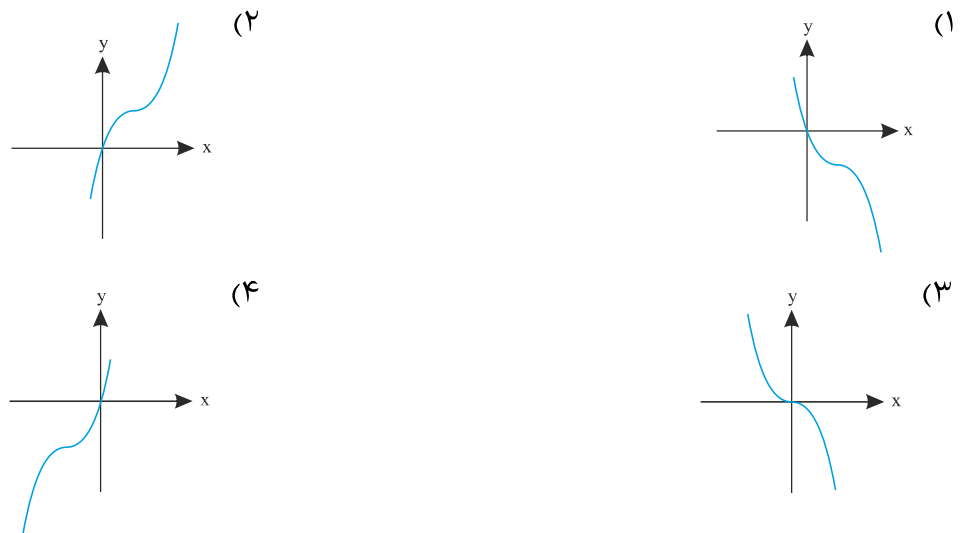
۴ دو تابع  $y = -2^{-x}$  و  $y = -\frac{2}{3}\sqrt{x}$  نسبت به هم چگونه اند؟

- (۱) غیرمقاطع  
(۲) در یک بازه منطبق  
(۳) در دو نقطه متقاطع  
(۴) در یک نقطه متقاطع

۵ دو تابع  $y = -\sqrt{x-1}$  و  $y = \frac{x}{x-1}$  در چند نقطه متقاطع اند؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

۶ نمودار تابع  $f(x) = 6x^2 - x^3 - 12x$  شبیه کدام گزینه است؟



۷ معادله  $\sqrt[3]{x+2} = x^3$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۸ کدام گزینه در مورد ریشه های معادله  $x^3 = -|x| + 2$  درست است؟

- (۱) فاقد ریشه  
(۲) فقط یک ریشه مثبت  
(۳) فقط یک ریشه منفی  
(۴) دو ریشه مختلف علامه

۹ وارون تابع  $f(x) = 1 - (1-x)^3$  از کدام نواحی مختصات عبور می کند؟

- (۱) اول و دوم  
(۲) اول، دوم و چهارم  
(۳) اول و سوم  
(۴) اول، سوم و چهارم

منحنی  $y = \sqrt{x}$  دو نقطه با طول‌های مثبت

باشند؟  
 $x^2 + 7x + 10$  را چند واحد به طرف راست منتقل کنیم تا نقاط برخورد آن با

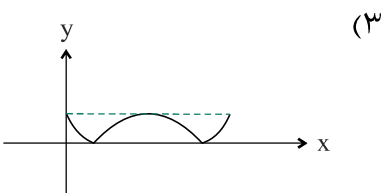
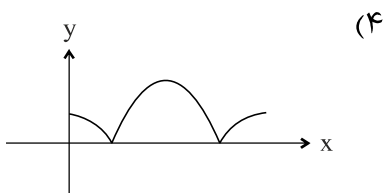
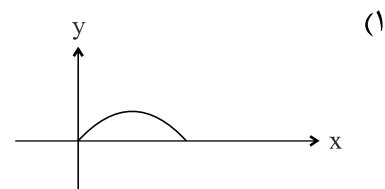
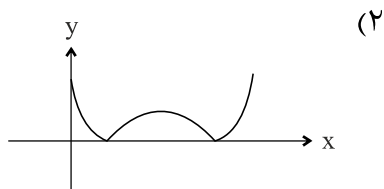
(۲) بیش از ۵ واحد

(۱) ۳/۵ واحد

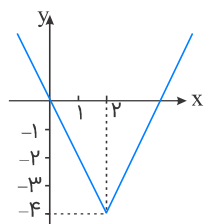
(۴) ۵ واحد

(۳) کمتر از ۳/۵ واحد

نمودار تابع  $f(x) = \left| 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right|$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟



نمودار تابع  $f(x) = 2|ax + b| + c$  به صورت زیر است. مقدار  $a + b + c$  کدام است؟ ( $b < 0$ )



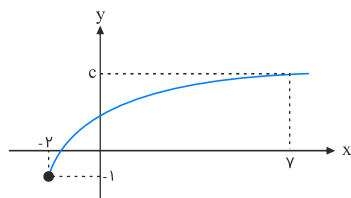
(۱) -۶

(۲) -۵

(۳) -۱

(۴) ۷

نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x+a} + b$  به صورت زیر است. مقدار  $a + b + c$  کدام است؟



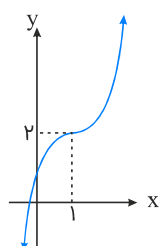
(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

نمودار تابع با ضابطه  $y = (x-a)^3 + b$  به صورت زیر است. حاصل  $a.b$  کدام است؟



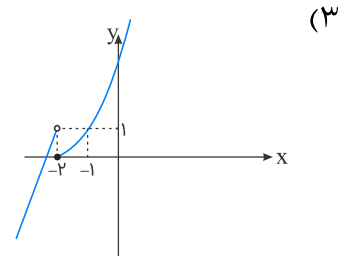
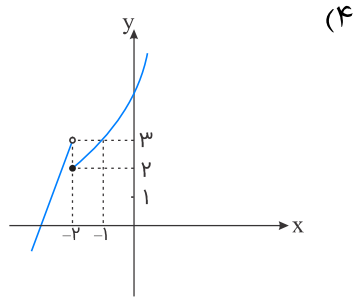
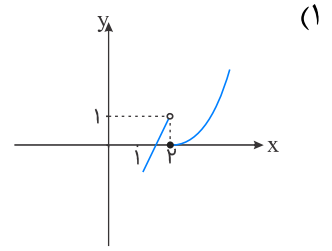
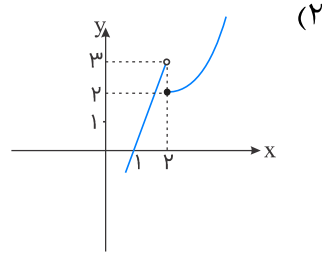
(۱) ۲

(۲) -۲

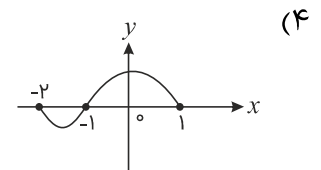
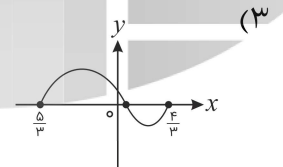
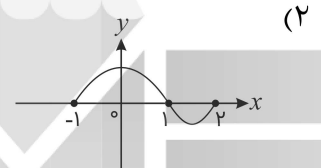
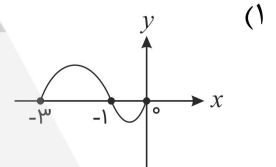
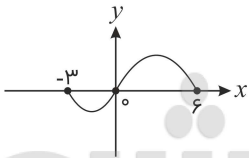
(۳) ۳

(۴) -۳

۱۵ اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ 3x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$  باشد، نمودار تابع  $y = f(x + 2) + 2$  کدام است؟

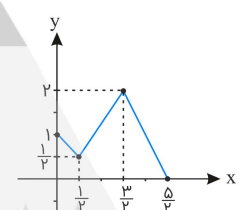
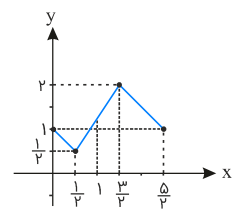
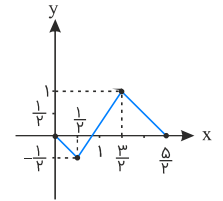
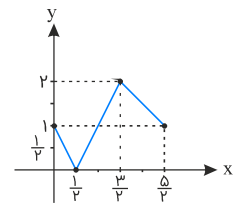
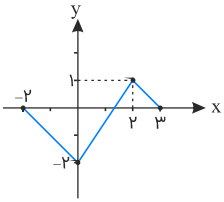


۱۶  $y = f(x)$  به صورت زیر باشد، نمودار تابع  $y = f(1 - 3x)$  کدام است؟

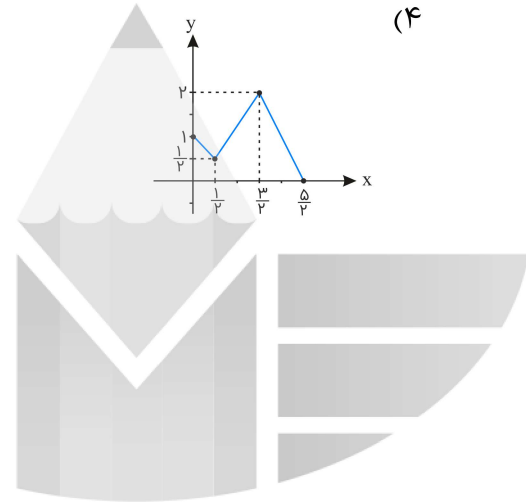




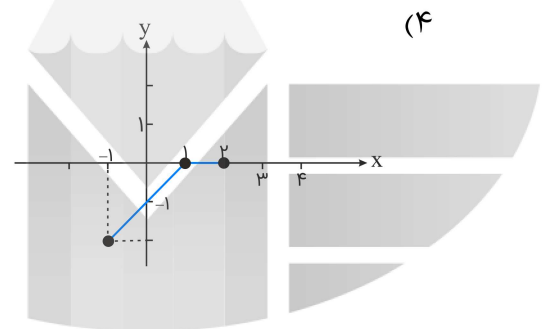
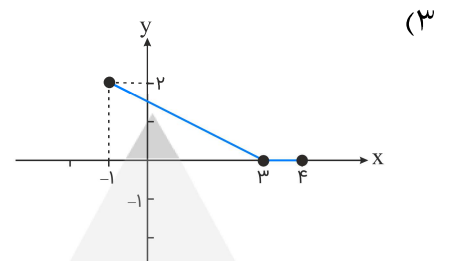
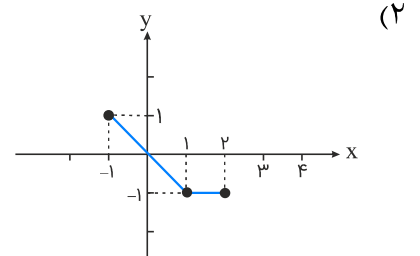
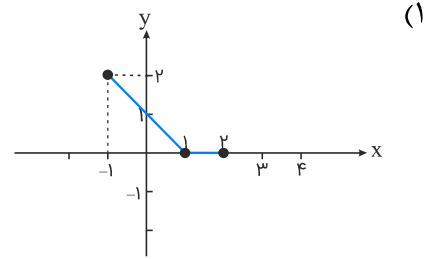
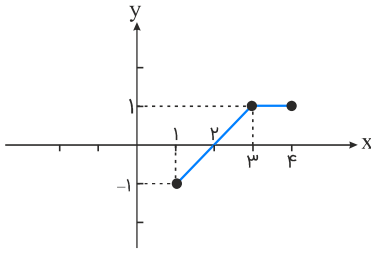
$y = f(x)$  به صورت زیر است. نمودار تابع  $y = -\frac{1}{3}f(3-2x) + 1$  کدام است؟



ایران توشه  
IranTooshe.ir



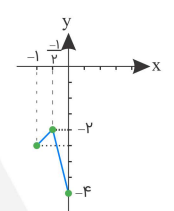
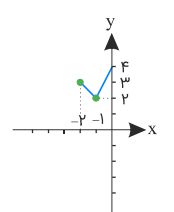
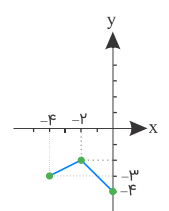
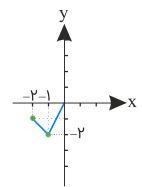
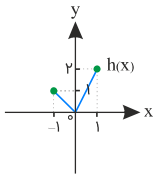
شکل زیر نمودار تابع  $y = f(x - 2) + 1$  را نشان می دهد. نمودار تابع  $y = -f(x)$  کدام است؟



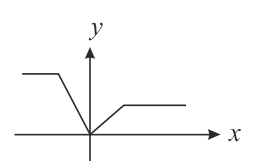
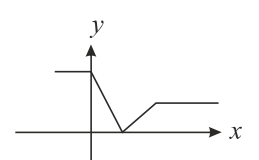
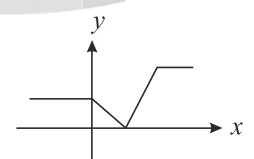
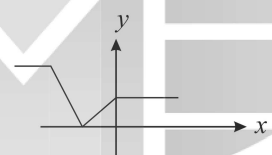
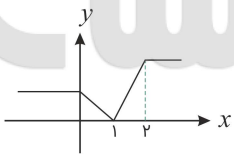
ایران توشه  
IranTooshe.ir

نمودار تابع  $y = f(x - 1) - 2$  مطابق شکل زیر است. کدام گزینه نمودار تابع

$y = f\left(\frac{x}{2}\right)$  را به درستی نشان می دهد؟

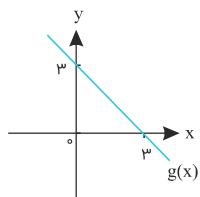


نمودار تابع  $y = f(x - 1)$  به شکل زیر است. نمودار تابع  $y = f(1 - x)$  کدام است؟



۲۱

نمودار  $g(x) = f(x) - ۲$  به صورت زیر است. مساحت ناحیه محدود به نمودار  $h(x) = ۳f(۲x - ۱)$  و محورهای مختصات چقدر است؟



(۱) ۱۵

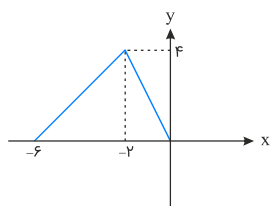
(۲) ۱۲

(۳) ۱۸

(۴) ۲۷

۲۲

اگر نمودار تابع  $y = f(۲x + ۵)$  به صورت زیر باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع  $y = ۳f(-۴x + ۱)$  و محور  $x$  ها کدام است؟



(۱) ۱۰

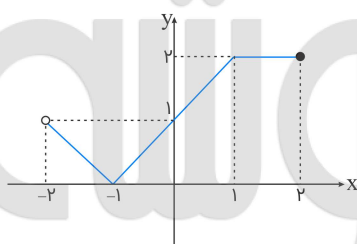
(۲) ۱۲

(۳) ۱۸

(۴) ۲۴

۲۳

اگر نمودار  $y = f(x - ۱)$  به صورت زیر باشد، دامنه تابع  $y = \sqrt{f(x) - ۱}$  کدام است؟



(۱)  $[-۲, -۱] \cup [۰, ۲]$

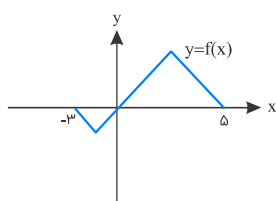
(۲)  $[-۱, ۰] \cup [۱, ۲]$

(۳)  $[-۳, -۱]$

(۴)  $[-۱, ۱]$

۲۴

اگر شکل زیر تابع  $y = f(x)$  را نشان دهد، دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{xf\left(-\frac{x}{۲}\right)}$  کدام است؟



(۱)  $[-۱۰, ۶]$

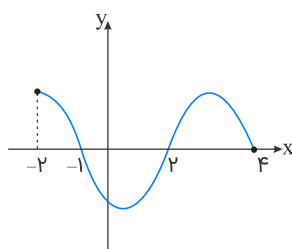
(۲)  $[۰, ۶]$

(۳)  $\{-۱۰, ۰, ۶\}$

(۴)  $\{۰\}$

۲۵

اگر نمودار تابع  $y = f(x - ۲)$  به صورت زیر باشد، دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{xf(x)}$  کدام است؟



(۱)  $[-۳, ۲]$

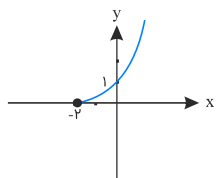
(۲)  $[۲, ۴]$

(۳)  $[-۲, ۳]$

(۴)  $[۰, ۱] \cup [۴, ۶]$

۲۶

اگر نمودار تابع  $f$  به شکل زیر باشد، نمودار تابع  $y = -2 + f^{-1}(x - 1)$  از کدام ناحیه (نواحی) دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟



(۱) دوم

(۲) سوم

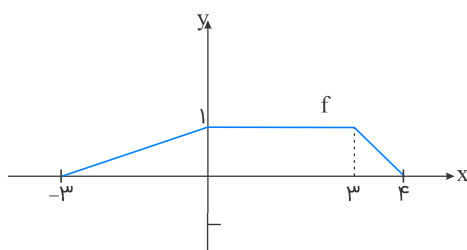
(۳) سوم و چهارم

(۴) دوم و سوم

۲۷

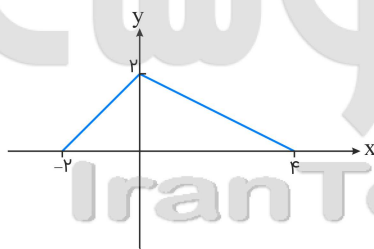
اگر نمودار تابع  $f$  به صورت شکل زیر و  $g(x) = \begin{cases} f(x+1) & ; x \geq 0 \\ f(2x) & ; x < 0 \end{cases}$  باشد، مساحت سطح محدود بین نمودار تابع  $g$  و محور

$x$  ها کدام است؟

(۱)  $\frac{7}{4}$ (۲)  $\frac{11}{4}$ (۳)  $\frac{13}{4}$ (۴)  $\frac{15}{4}$ 

۲۸

نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر باشد، مساحت سطح محصور بین نمودار تابع  $y = f(x - |x|)$ ، محور  $x$  ها و خط  $x = 5$  کدام است؟



(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱

۲۹

فرض  $y = f(x)$  مفروض است. اگر ابتدا نمودار را نسبت به محور  $y$  ها قرینه کنیم، سپس آن را ۲ واحد در راستای محور  $x$  ها به طرف راست منتقل کنیم و در انتها با ضرب ۲ آن را در راستای عمودی انبساط دهیم، کدام تابع به دست می‌آید؟

$$g(x) = 2f(-x + 2) \quad (۲)$$

$$g(x) = 2f(-x - 2) \quad (۱)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}f(-x + 2) \quad (۴)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}f(-x - 2) \quad (۳)$$

۳۰

نمودار تابع  $y = | -x + 1 | + 1$  را ۲ واحد به سمت راست و سپس ۲ واحد به پایین می‌بریم. این تابع محورهای مختصات را در سه نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  قطع می‌کند. مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

(۲) ۲

(۱)  $\frac{3}{2}$ 

(۴) ۱

(۳)  $\frac{5}{2}$

۳۱

نمودار تابع  $y = \sqrt{1 - 2x}$  را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل می کنیم. نمودار جدید خط  $y = x + 9$  را در نقطه  $A(\alpha, \beta)$  قطع می کند. حاصل  $\alpha + \beta$  چقدر است؟

(۱) -۲۰ (۲) ۹

(۳) -۱ (۴) ۳

۳۲

نمودار  $x^2 + 2x - 3$  را چهار واحد به سمت راست و واحد به بالا منتقل کرده ایم. رأس سهمی جدید به صورت  $(\alpha, 10)$  است.  $\alpha \times k$  چقدر است؟

(۱) ۴۵ (۲) ۵۰

(۳) ۴۰ (۴) ۳۵

۳۳

تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در نظر بگیرید. ابتدا این تابع را یک واحد به راست می بریم و بعد با ضریب ۲ در راستای افقی آن را بسط داده تا به دست آید. تابع  $g(x)$  را با کدام طول قطع می کند؟

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲) ۱

(۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴) یکدیگر را قطع نمی کنند.

۳۴

نمودار تابع  $y = x^3$  را ابتدا یک واحد به سمت راست و سپس واحد به سمت بالا منتقل می کنیم تا نمودار تابع با ضابطه  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$  به دست آید. مقدار  $k$  کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱

(۳) صفر (۴) ۲

۳۵

نمودار تابعی را ۲ واحد به سمت راست انتقال داده ایم و سپس قرینه شکل حاصل را نسبت به محور  $x$  ها ۳ برابر در جهت عمودی منبسط کرده ایم و تابع  $y = -|3x - 12|$  به دست آمده است. تابع اولیه کدام بوده است؟

(۱)  $y = 9|x - 6|$  (۲)  $y = \frac{1}{3}|2 - x|$

(۳)  $y = |x - 6|$  (۴)  $y = |x - 2|$

۳۶

نمودار تابع  $y = f(x)$  را یک واحد به راست و سپس دو واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع  $g(x) = (x - 1)^2$  حاصل می شود. در این صورت تابع  $f \circ g$  محور  $y$  ها را با چه عرضی قطع می کند؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

۳۷

تابع  $7 - 12x + 6x^2 - x^3$  معکوس  $f(x)$  تابع  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  با کدام یک از انتقال های زیر بر تابع  $f^{-1}$  منطبق می شود؟

(۱) یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا (۲) یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت پایین

(۳) یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا (۴) یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین

۳۸ کدام یک از دو انتقال زیر نمودار  $f(x) = x^2 + x$  را به نمودار تابع  $g(x) = x^2 + 5x + 9$  تبدیل می کند؟

- (۱) ۲ واحد به راست، ۳ واحد به سمت بالا  
(۲) ۲ واحد به چپ، ۳ واحد به سمت پایین  
(۳) ۲ واحد به راست، ۳ واحد به سمت پایین  
(۴) ۲ واحد به چپ، ۳ واحد به سمت بالا

۳۹ مثال موارد کدام گزینه به ترتیب، نمودار تابع  $y = f(x)$  تبدیل به نمودار تابع  $y = -\frac{1}{4}f(1-x)$  می شود؟

- (۱) انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور  $x$  ها و  $y$  ها، انقباض  $\frac{1}{4}$  واحد در راستای افقی  
(۲) انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محور  $x$  ها و  $y$  ها، انقباض  $\frac{1}{4}$  واحد در راستای عمودی  
(۳) انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محور  $x$  ها و  $y$  ها، انقباض  $\frac{1}{4}$  واحد در راستای افقی  
(۴) انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور  $x$  ها و  $y$  ها، انقباض  $\frac{1}{4}$  واحد در راستای عمودی

۴۰ نقطه  $A(5, -2)$  روی تابع  $y = f(x)$  است. این نقطه در تابع  $y = f(x-1) + 3$  به کدام نقطه تبدیل می شود؟

- (۱)  $(4, 1)$   
(۲)  $(6, 1)$   
(۳)  $(6, -5)$   
(۴)  $(4, -5)$

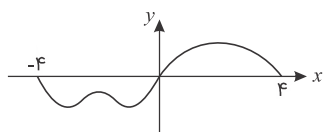
۴۱ اگر دامنه تعریف تابع  $y = f(2-x)$  برابر  $[-1, 2]$  باشد، دامنه تعریف تابع  $f(3x+4)$  کدام است؟

- (۱)  $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right]$   
(۲)  $[0, 1]$   
(۳)  $[0, 3]$   
(۴)  $[1, 2]$

۴۲ اگر برد تابع  $f$  بازه  $R_f = [-\sqrt{5}, 1]$  باشد، آنگاه برد تابع  $g(x) = -\sqrt{2}f(x+1) - 3$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۵  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۴۳  $y = f(2x)$  به شکل زیر است. دامنه تابع  $y = 3f(\sqrt{x}) + 1$  کدام است؟



- (۱)  $[4, 16]$   
(۲)  $[0, 64]$   
(۳)  $[0, 4]$   
(۴)  $[4, 64]$

۴۴ اگر دامنه تابع  $f$  برابر  $[2, 4]$  باشد، دامنه تابع  $h(x) = 3f(x^2) - g(|x| + 1)$  کدام است؟

- (۱)  $[-3, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, 3]$   
(۲)  $[0, \sqrt{5}]$   
(۳)  $[2, 3]$   
(۴)  $[-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}]$

۴۵ اگر  $f(1-x) = \sqrt{|2-x| + 2x}$ ، دامنه تابع  $y = 2f(x) + 1$  کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, 3]$  (۲)  $(-\infty, 7]$   
(۳)  $(-\infty, 6]$  (۴)  $(-\infty, 4]$

۴۶ نقطه  $(1, 5)$  روی تابع  $y = 2f(2x - 3) + 1$  تبدیل به چه نقطه ای روی تابع  $y = 3f(-2x + 5) + 1$  می شود؟

- (۱)  $(3, 7)$  (۲)  $(-1, 2)$   
(۳)  $(3, 2)$  (۴)  $(4, 7)$

۴۷ اگر  $f(x+3) = x + \frac{5}{x}$ ، نمودار تابع  $y = 3 - f(2x)$  از کدام نقطه می گذرد؟

- (۱)  $(2, 5)$  (۲)  $(2, 2)$   
(۳)  $(4, -3)$  (۴)  $(8, -3)$

۴۸ روی نمودار تابع  $A'(a, b)$  و نقطه  $f(x)$  منظر با آن یعنی  $y = 3f(2x - 5) - 7$  روی نمودار تابع  $y = 3f(2x - 5) - 7$  قرار دارد.  $a - b$  کدام است؟

- (۱)  $-2$  (۲) صفر  
(۳)  $2$  (۴)  $4$

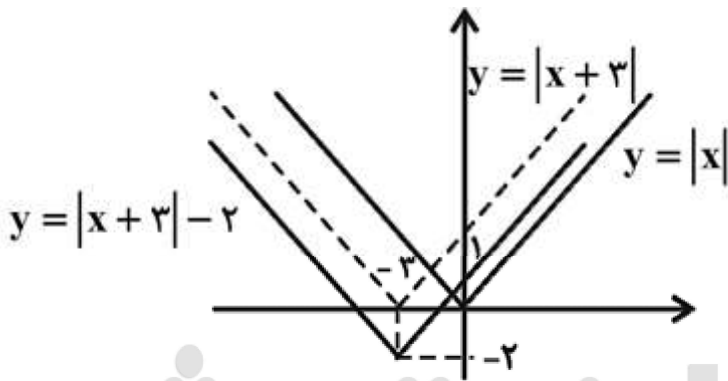
۴۹  $y = f(x)$  قرار داشته باشد، کدام نقطه روی نمودار تابع  $y = -2f\left(\frac{x-3}{2}\right) + y_0$  قرار دارد؟  
(۱)  $(4x_0 + 3, y_0)$   
(۲)  $(4x_0 + 3, -y_0)$   
(۳)  $\left(\frac{2x_0 - 3}{2}, -y_0\right)$   
(۴)  $\left(\frac{2x_0 - 3}{2}, y_0\right)$



گزینه ۴

۱

برای رسم  $y = |x| - 2$  باید  $f(x)$  نمودار  $y = |x|$  را ۳ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به پایین منتقل کنیم. باتوجه به شکل، نمودار تابع از ناحیه چهارم دستگاه مختصاتی عبور نمی کند.



قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۷

گزینه ۳

۲

تابع  $g$  تابع خطی است. باتوجه به نمودار تابع  $g$ ، ضابطه آن را به دست می آوریم:

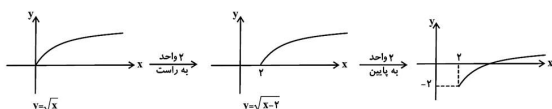
$$m = \frac{3 - 0}{0 - 3} = -1$$

$$y - 0 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 3 \Rightarrow g(x) = -x + 3$$

با جایگذاری ضابطه  $f$  در ضابطه  $f$  را به دست می آوریم:

$$f(x) = \sqrt{1 - g(x)} - 2 \xrightarrow{g(x) = -x + 3} f(x) = \sqrt{1 - (-x + 3)} - 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2} - 2$$

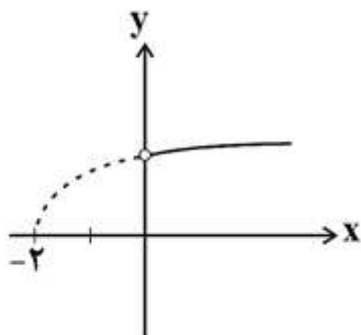
برای رسم نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x - 2} - 2$ ، کافی است نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را ابتدا ۲ واحد به راست ببریم  $y = \sqrt{x - 2}$  و سپس آن را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم تا به ضابطه  $y = \sqrt{x - 2} - 2$  برسیم.



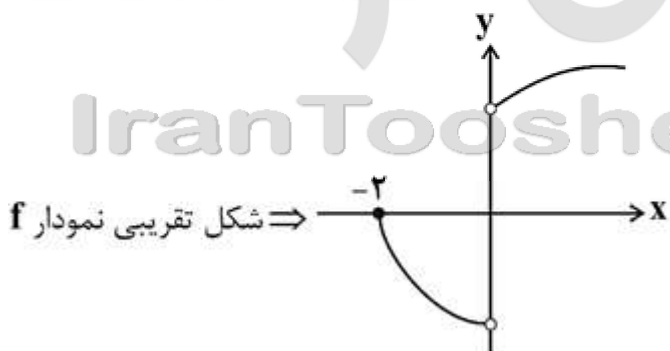
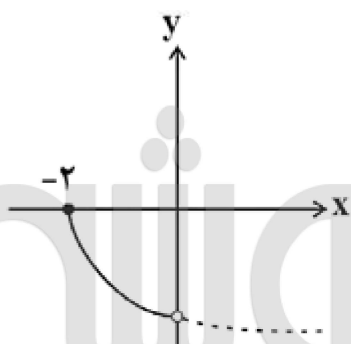
قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

$$D_f = [-2, +\infty) - \{0\}$$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x} \sqrt{x+2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+2}, \quad x > 0$$

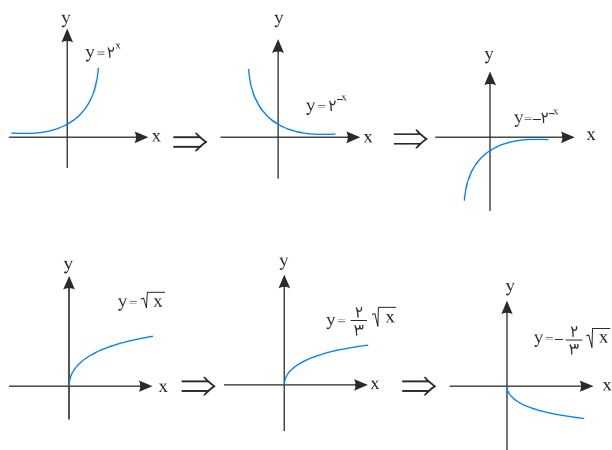


$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{-x} \sqrt{x+2} \Rightarrow f(x) = -\sqrt{x+2}, \quad -2 \leq x < 0$$



نمودار، از نواحی اول و سوم می‌گذرد و از نواحی دوم و چهارم نمی‌گذرد.

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷



با بررسی دو نمودار واضح است که فقط در یک نقطه متقاطع هستند.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

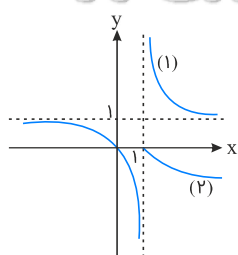
$$(۱) \quad y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow y = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$$

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = \frac{1}{x-1} + 1$$

$$(۲) \quad y = -\sqrt{x-1}$$

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = \sqrt{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -\sqrt{x-1}$$

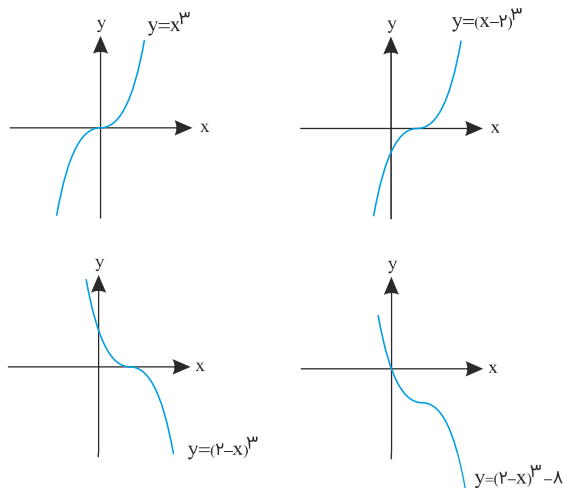


مشاهده می‌کنید که دو تابع یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

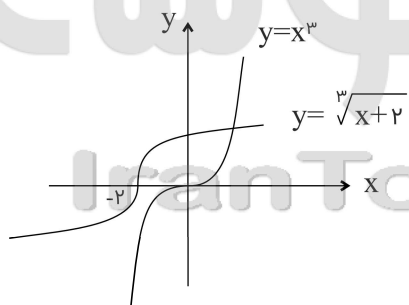
$$f(x) = \underbrace{6x^2 - x^3 - 12x + 8 - 8}_{(2-x)^3} = (2-x)^3 - 8$$

حالا مرحله به مرحله نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

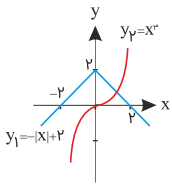
نمودار توابع  $y = \sqrt[3]{x+2}$  و  $y = x^3$  به صورت زیر است:



دو نمودار در یک نقطه متقاطع هستند، پس معادله یک جواب دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ تابستان ۱۳۹۸

نمودارهای توابع  $y_2 = x^3$  و  $y_1 = -|x| + 2$  را رسم می‌کنیم:



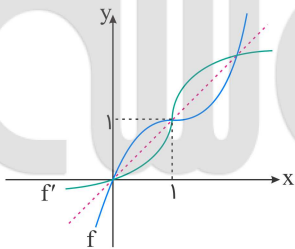
باتوجه به نمودارهای رسم‌شده، دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه با طول مثبت قطع می‌کنند؛ بنابراین معادله موردنظر فقط یک ریشه مثبت دارد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۸

ابتدا نمودار تابع  $f(x)$  را رسم کرده و سپس نسبت به خط  $y = x$  قرینه می‌کنیم:

$$f(x) = 1 - (1 - x)^3 \Rightarrow f(x) = 1 - (-(x - 1))^3 = 1 + (x - 1)^3$$

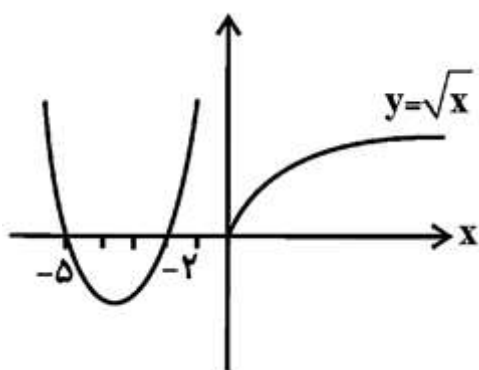
برای رسم نمودار تابع  $f(x)$  کافی است که نمودار تابع  $y = x^3$  را یک واحد به سمت راست و بالا منتقل کنیم، بنابراین شکل دو نمودار  $f(x)$  و  $f^{-1}(x)$  به صورت زیر است:



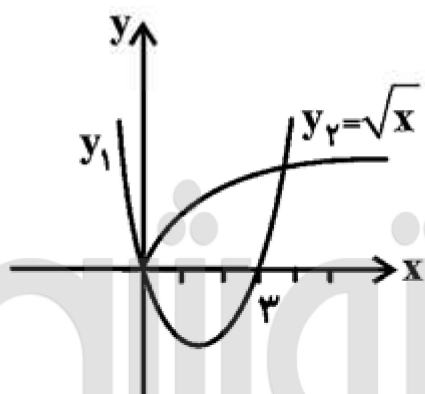
همان‌طور که می‌بینید، نمودار تابع  $f^{-1}$  از ناحیه اول و سوم عبور می‌کند.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۸

با رسم دو نمودار، به وضوح معلوم است که محل برخوردی ندارند.



حال اگر ۵ واحد منحنی درجه دوم را به راست منتقل کنیم تلاقی این دو منحنی یک نقطه به طول مثبت و نقطه دیگر مبدأ خواهد بود، پس باید بیش از ۵ واحد به سمت راست منتقل شود.



$$y_1 = (x - 5)^2 + 7(x - 5) + 10$$

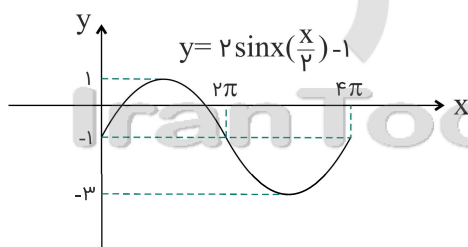
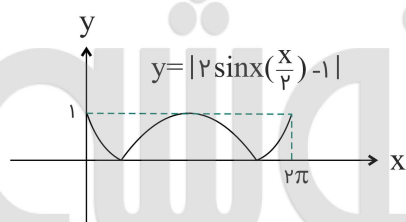
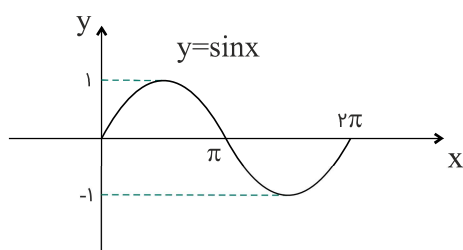
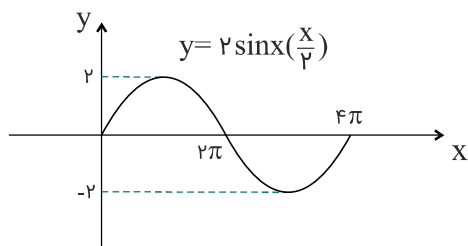
$$y_2 = \sqrt{x}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷



IranToosheh.ir

ابتدا نمودار تابع  $y = \sin x$  را رسم می‌کنیم. سپس طول و عرض نقاط روی نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1$  به دست آید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1$  به دست آید. اکنون قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور طول‌ها قرار دارند را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = \left| 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right|$  به دست آید. محدوده  $[0, 2\pi]$  نمودار موردنظر، پاسخ سؤال می‌باشد.



$x = 2$  ریشه داخل قدر مطلق است:

$$2a + b = 0$$

$$(0, 0) \in f \Rightarrow 2|b| + c = 0 \xrightarrow{b < 0} -2b + c = 0$$

$$(2, -4) \in f \Rightarrow 2|2a + b| + c = -4 \Rightarrow c = -4$$

$$-2b + c = 0 \xrightarrow{c = -4} -2b - 4 = 0 \Rightarrow -2b = 4 \Rightarrow b = -2$$

$$2a + b = 0 \Rightarrow 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow a + b + c = 1 - 2 - 4 = -5$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۸

دامنه تابع  $f(x)$  از روی ضابطه،  $x \geq -a$  است و همچنین باتوجه به نمودار دامنه  $x \geq -2$  است، پس:  $-a = -2 \Rightarrow a = 2$   
همچنین نقطه  $(-2, -1)$  روی تابع است، پس داریم:

$$(-2, -1) \in f \Rightarrow -1 = \sqrt{-2 + 2} + b \Rightarrow b = -1$$

ضابطه  $f$  برابر است با  $f(x) = \sqrt{x + 2} - 1$ ؛ پس داریم:

$$f(7) = \sqrt{7 + 2} - 1 = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$a + b + c = 2 - 1 + 2 = 3$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

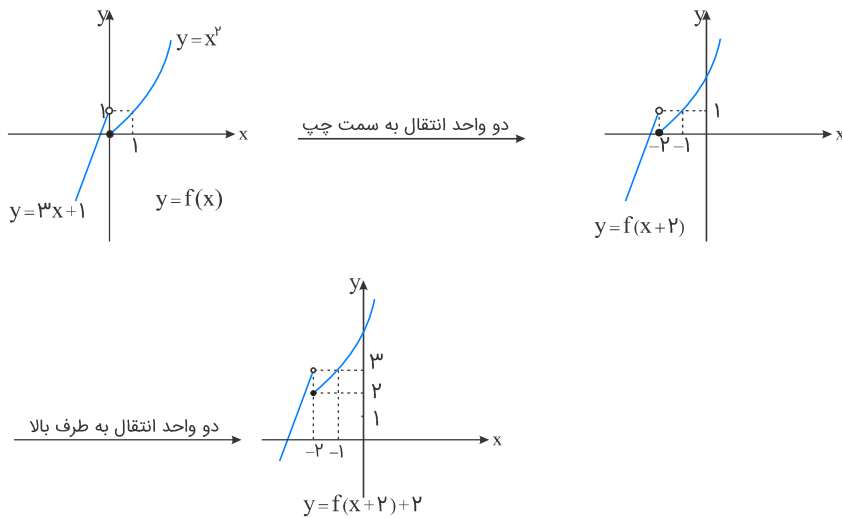
نمودار این تابع از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع  $y = x^3$  به دست آمده است. اگر نمودار  $y = x^3$  را یک واحد به سمت راست (در راستای محور  $x$  ها) و سپس دو واحد به سمت بالا (در راستای محور  $y$  ها) انتقال دهیم، ضابطه  $y = (x - 1)^3 + 2$  به دست می‌آید که همان ضابطه مربوط به نمودار داده شده در صورت سؤال است، پس:

$$a = 1, b = 2 \Rightarrow a.b = 2$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸



ابتدا نمودار تابع  $f$  را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع  $y = f(x+2) + 2$  نمودار تابع  $f$  را ابتدا دو واحد به سمت چپ و سپس دو واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم.



قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۸

باید تابع نسبت به محور  $y$ ها قرینه شود و همچنین  $x$ های آن  $\frac{1}{3}$  گردد و در آخر نمودار  $\frac{1}{3}$  به سمت راست منتقل گردد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

IranTooshe.ir

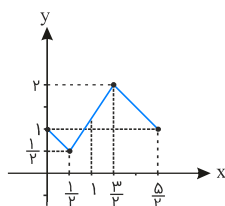
مراحل تبدیل نمودار به صورت زیر است:

$$f(x) \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{واحد ۳ انتقال}} f(x+3) \xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انقباض افقی}} f(2x+3)$$

$$\xrightarrow[\text{محور } y]{\text{قرینه نسبت به محور}} f(-2x+3) \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به محور}} -f(3-2x) \xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انقباض عمودی}} -\frac{1}{2}f(3-2x)$$

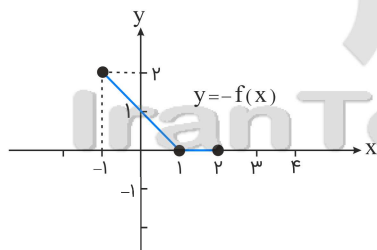
$$\xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{\text{انتقال یک}} -\frac{1}{2}f(3-2x) + 1$$

با انجام تبدیلات فوق، نمودار به صورت زیر درمی آید:



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

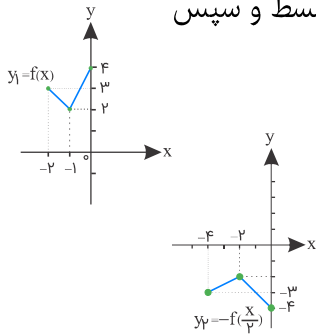
برای پیدا کردن نمودار  $y = f(x)$  از روی نمودار  $y = f(x-2) + 1$ ، ابتدا نمودار را دو واحد به طرف چپ و سپس یک واحد به طرف پایین انتقال می دهیم. در نهایت نمودار  $y = f(x)$  را نسبت به محور  $x$ ها قرینه می کنیم تا نمودار  $y = -f(x)$  به دست آید.



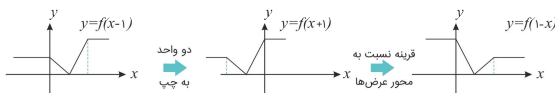
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

ابتدا باید نمودار تابع  $y_1 = f(x)$  را به دست آوریم. برای این منظور، کافی است نمودار  $y = h(x)$  را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم؛ بنابراین:

حال برای رسم  $y_2 = -f\left(\frac{x}{2}\right)$  کافی است نمودار تابع  $y_1 = f(x)$  را در راستای افقی دو برابر منبسط و سپس نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم؛ در نتیجه تابع  $y_2 = -f\left(\frac{x}{2}\right)$  به صورت زیر به دست می آید.



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸



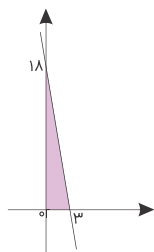
قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

تابع  $g(x)$  یک خط با شیب  $(-1)$  و عرض از مبدأ  $3+$  است؛ بنابراین:

$$g(x) = -x + 3 \Rightarrow f(x) = -x + 5$$

$$h(x) = 3[-(2x-1) + 5] = -6x + 18$$

شکل زیر، نمودار  $h(x)$  را نمایش می دهد:



$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} (3)(18) = 27$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

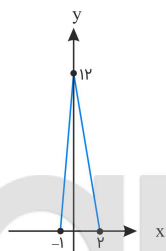
چون انتقال یافته خط، باز هم خط است، کافی است نقاط متناظر با نقاط  $(0, 0)$  و  $(-6, 0)$  و  $(-2, 4)$  از تابع  $f(2x + 5)$  را روی تابع  $3f(-4x + 1)$  بیابیم:

$$(0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2 \times 0 + 5 = -4x + 1 \Rightarrow x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (-1, 0)$$

$$(-2, 4) \Rightarrow \begin{cases} 2 \times (-2) + 5 = -4x + 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = 3 \times 4 = 12 \end{cases} \Rightarrow (0, 12)$$

$$(-6, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2 \times (-6) + 5 = -4x + 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (2, 0)$$

$$S = \frac{3 \times 12}{2} = 18$$



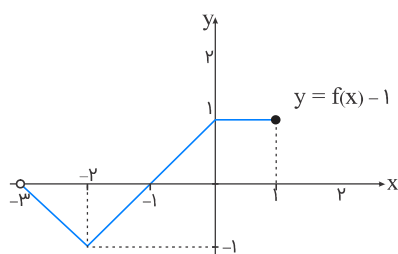
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

برای محاسبه دامنه تابع  $y = \sqrt{f(x)} - 1$ ، باید زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$f(x) - 1 \geq 0$$

با استفاده از نمودار  $y = f(x - 1)$ ، نمودار  $y = f(x) - 1$  را رسم می‌کنیم. برای این منظور باید نمودار داده شده را یک واحد به چپ و یک واحد به پایین منتقل کنیم. نمودار حاصل به صورت زیر خواهد بود:

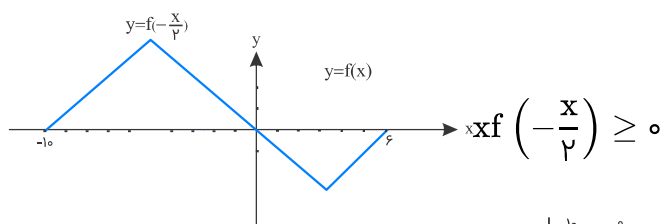
باتوجه به نمودار، نامعادله  $f(x) - 1 \geq 0$  فقط در فاصله  $[-1, 1]$  برقرار است، پس دامنه تابع بازه  $[-1, 1]$  است.



قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۷

ابتدا از روی  $f(x)$  نمودار  $f(-x)$  را رسم کرده و سپس در راستای افقی آن را ۲ برابر منبسط می‌کنیم تا  $f\left(-\frac{x}{2}\right)$  به دست آید.

حال دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{xf\left(-\frac{x}{2}\right)}$  را می‌یابیم:



$$\Rightarrow D_g = \{-10, 0, 6\}$$

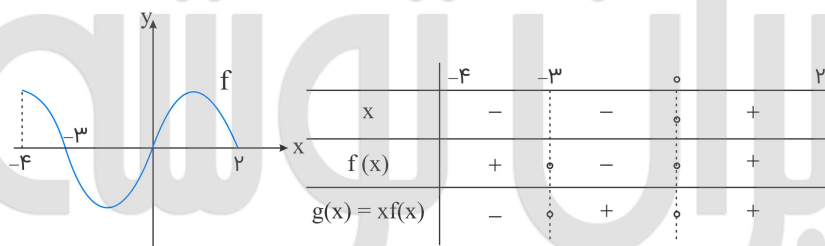
|                               |       |     |     |
|-------------------------------|-------|-----|-----|
| $x$                           | $-10$ | $0$ | $6$ |
| $f\left(-\frac{x}{2}\right)$  | $0$   | $+$ | $0$ |
| $xf\left(-\frac{x}{2}\right)$ | $0$   | $-$ | $0$ |

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

گزینه ۱

۲۵

نمودار  $y = f(x)$ ، با انتقال نمودار  $y = f(x-2)$  به اندازه ۲ واحد به سمت چپ به دست می‌آید.  
حال با جدول تعیین علامت زیر داریم:



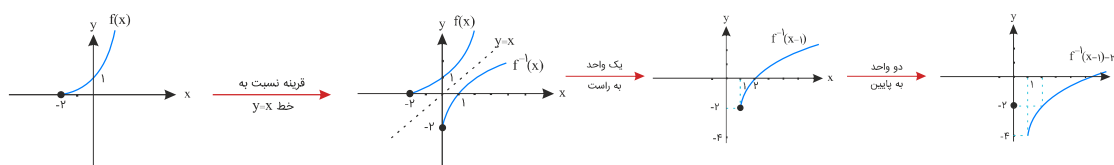
$$D_g : xf(x) \geq 0 \Rightarrow D_g = [-3, 2]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

گزینه ۴

۲۶

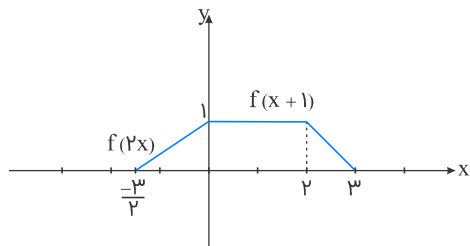
نمودار تابع  $y = -2 + f^{-1}(x-1)$  را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



بنابراین نمودار از ناحیه دوم و سوم عبور نمی‌کند.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

نمودار تابع  $g(x)$  به صورت شکل زیر است:  
مساحت سطح مورد نظر برابر است با:

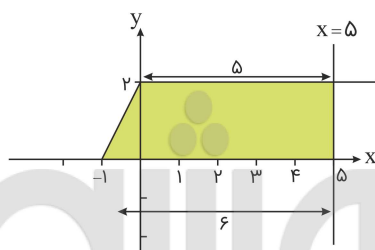


$$S = \frac{(4/5 + 2) \times 1}{2} = \frac{6/5}{2} = \frac{13}{4}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

$$f(x - |x|) = \begin{cases} f(0) & ; x \geq 0 \\ f(2x) & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 & ; x \geq 0 \\ f(2x) & ; x < 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار  $f(x - |x|)$  به صورت زیر است:



$$S = \frac{(5 + 6) \times 2}{2} = 11$$

حال مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با:

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

با انجام مراحل بیان شده در سؤال داریم:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = f(-x)$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال } 2 \text{ واحد به طرف راست}} y = f(-(x - 2)) = f(-x + 2)$$

$$\xrightarrow[\text{با ضریب } 2]{\text{انبساط عمودی}} y = 2f(-x + 2)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

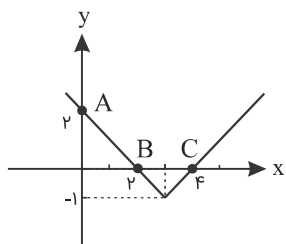
اول ضابطه تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = |-x + 1| + 1 \Rightarrow y = |x - 1| + 1$$

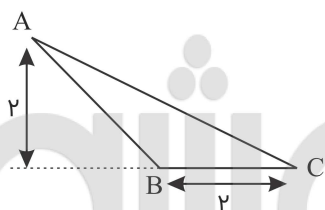
$$\xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-2} y = |(x-2) - 1| + 1 \Rightarrow y = |x-3| + 1$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به پایین}]{f \rightarrow f-2} y = |x-3| + 1 - 2 = |x-3| - 1$$

برای رسم نمودار تابع  $y = |x-3| - 1$  باید نمودار  $y = |x|$  را ۳ واحد به راست و ۱ واحد به پایین ببریم:



$$S_{ABC} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ مساحت مثلث } ABC \text{ برابر است با: } 2$$



قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

در عبارت داده شده به جای  $x$ ،  $(x+1)$  قرار داده و یک واحد به عبارت اضافه می‌کنیم:

$$y = \sqrt{1-2(x+1)} + 1 = \sqrt{-2x-1} + 1$$

$$\sqrt{-2x-1} + 1 = x + 9 \Rightarrow \sqrt{-2x-1} = x + 8$$

$$\Rightarrow -2x - 1 = x^2 + 16x + 64$$

$$\Rightarrow x^2 + 18x + 65 = 0 \Rightarrow (x+13)(x+5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -13 & \text{غ.ق.ق} \\ x = -5 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

$$x = -5 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(-5, 4)$$

در نتیجه:

$$(-5, 4) = (\alpha, \beta) \Rightarrow \alpha + \beta = -5 + 4 = -1$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۸

$$y = -x^2 + 2x$$

رأس سهمی اولیه  $S \Big|_1$  است. چون نمودار چهار واحد به راست و  $k$  واحد به بالا منتقل شده است، رأس سهمی جدید  $S' \Big|_{1+k}^5$  می‌شود. با مقایسه با رأس داده‌شده داریم:

$$\alpha = 5 \\ 1 + k = 10 \Rightarrow k = 9 \Rightarrow \alpha k = 45$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ تابستان ۱۳۹۸

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-1} y = \frac{1}{x-1} \xrightarrow[\text{انبساط افقی با ضریب ۲}]{x \rightarrow \frac{x}{2}} y = \frac{1}{\frac{x}{2}-1}$$

حال با داشتن  $f(x) = \frac{1}{x}$  و  $g(x) = \frac{1}{\frac{x}{2}-1}$ ، ضابطه  $g \circ f$  را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x}}{2}-1} = \frac{1}{\frac{1}{2x}-1} = \frac{2x}{1-2x}$$

$$g(f(x)) = 1 \Rightarrow \frac{2x}{1-2x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

$$y = x^3 \xrightarrow[\text{یک واحد به راست}]{x \rightarrow x-1} y = (x-1)^3 \\ \xrightarrow[\text{k واحد به سمت بالا}]{y \rightarrow y+k} y = (x-1)^3 + k = x^3 - 3x^2 + 3x \\ \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + k = x^3 - 3x^2 + 3x \\ \Rightarrow -1 + k = 0 \Rightarrow k = 1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ تابستان ۱۳۹۸



کافی است مراحل گفته شده را به صورت معکوس از آخر به اول انجام دهیم. ابتدا  $\frac{1}{3}$  واحد در جهت عمودی منقبض می کنیم:

$$y = -\frac{1}{3} |3x - 12| = -|x - 4|$$

سپس آن را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می کنیم:  $y = |x - 4|$

و در انتها ۲ واحد به چپ انتقال می دهیم:  $y = |x - 2|$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

ابتدا باید ضابطه  $y = f(x)$  را بیابیم. برای این کار به صورت زیر عمل می کنیم:

$$g(x) = (x - 1)^2 \xrightarrow{\text{نمودار دو واحد بالا برود}} y = (x - 1)^2 + 2$$

$$\xrightarrow{\text{نمودار یک واحد به چپ برود}} f(x) = (x + 1 - 1)^2 + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

برای یافتن نقطه تلاقی تابع  $f$  و  $g$  با محور  $y$  ها،  $x = 0$  را در تابع قرار می دهیم:

$$f(g(0)) = f((0 - 1)^2) = f(1) = 1^2 + 2 = 3$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 1 = (x - 2)^3 + 1$$

$$\Rightarrow x - 2 = \sqrt[3]{y - 1} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 1} + 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1} + 2$$

باتوجه به ضابطه  $f^{-1}$  داریم:

$$f^{-1}(x) = g(x - 1) + 2$$

بنابراین  $g(x)$  را باید یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

$$f(x+a)+b=(x+a)^2+(x+a)+b \\ =x^2+(2a+1)x+a^2+a+b=g(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+1=5 \Rightarrow a=2 \\ a^2+a+b=9 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

$$f(x) \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال یک واحدی}} f(x+1) \\ f(x+1) \xrightarrow[\text{به محور } y]{\text{انعکاس نسبت}} f(-x+1) \\ f(1-x) \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{انعکاس نسبت به}} -f(1-x) \\ -f(1-x) \xrightarrow[\frac{1}{4} \text{ واحدی}]{\text{انقباض عمودی}} -\frac{1}{4}f(1-x)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

نقطه A یک واحد به سمت راست و ۳ واحد به بالا حرکت می‌کند، پس داریم:

$$A' = (5+1, -2+3) = (6, 1)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

$$D_{f(2-x)} = [-1, 2] \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال دو واحد}} D_{f(-x)} = [-3, 0] \\ \xrightarrow[\text{محور } y]{\text{قرینه نسبت به}} D_{f(x)} = [0, 3] \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال ۴ واحد}} D_{f(x+4)} = [-4, -1] \\ \xrightarrow[\text{با ضریب } \frac{1}{3}]{\text{انقباض در راستای افقی}} D_{f(3x+4)} = \left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

انتقال افقی روی برد تابع تأثیر ندارد ولی انتقال‌های عمودی و انبساط (انقباض) عمودی برد تابع را تغییر می‌دهد و دقیقاً همان تغییرات روی برد اعمال می‌شود.

$$R_f = [-\sqrt{5}, 1] \Rightarrow -\sqrt{5} \leq f(x) \leq 1$$

$$\xrightarrow[\text{برد تغییر نمی‌کند}]{\text{انتقال افقی}} -\sqrt{5} \leq f(x+1) \leq 1$$

$$\xrightarrow{\times(-\sqrt{2})} -\sqrt{2} \leq -\sqrt{2}f(x+1) \leq \sqrt{10}$$

$$\xrightarrow{-3} -\sqrt{2} - 3 \leq -\sqrt{2}f(x+1) - 3 \leq \sqrt{10} - 3$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} - 3 \leq g(x) \leq \sqrt{10} - 3$$

$$\Rightarrow R_g = [-\sqrt{2} - 3, \sqrt{10} - 3]$$

از آنجا که  $1 < \sqrt{10} - 3 \leq g(x) \leq -\sqrt{2} - 3 < -5$  برد تابع  $g$  شامل پنج عدد صحیح  $-4, -3, -2, -1$  و صفر است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۸

باتوجه به شکل، دامنه تابع  $y = f(2x)$  به صورت  $[-4, 4]$  است، یعنی به ازای  $x \in [-4, 4]$  تابع  $f(2x)$  تعریف می‌شود؛ بنابراین دامنه تابع  $f(x)$  برابر  $[-8, 8]$  است. حال دامنه تابع  $y = 3f(\sqrt{x}) + 1$  را به دست می‌آوریم:

$$\{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \in D_{f(x)}\} = \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \in [-8, 8]\} = \{x \geq 0 \mid 0 \leq x \leq 64\} = [0, 64]$$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

ابتدا دامنه تابع  $f(x)$  را پیدا می‌کنیم:

$$-1 \leq x \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow -3 \leq 2x - 1 \leq 5$$

حال دامنه  $f(x^2)$  را به دست می‌آوریم:

$$-3 \leq x^2 \leq 5 \Rightarrow x^2 \leq 5 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$$

دامنه تابع  $g(x)$  برابر  $[2, 4]$  است. دامنه  $g(|x| + 1)$  را پیدا می‌کنیم:

$$2 \leq |x| + 1 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq |x| \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \text{یا} \\ -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

حال برای به دست آوردن دامنه  $h(x)$  باید بین دامنه‌های به دست آمده اشتراک بگیریم:

$$[-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \cap ([-3, -1] \cup [1, 3]) = [-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۶

دامنه تابع  $y = 2f(x) + 1$  همان دامنه تابع  $y = f(x)$  است. حال ابتدا تابع  $y = f(x)$  را یافته و از روی آن دامنه‌اش را محاسبه می‌کنیم.

$$f(1-x) = \sqrt{|2-x| + 2x} \xrightarrow{1-x=t \Rightarrow x=1-t} f(t) = \sqrt{|2-(1-t)| + 2(1-t)} \\ = \sqrt{|1+t| + 2 - 2t} \Rightarrow f(x) = \sqrt{|1+x| + 2 - 2x} \Rightarrow |1+x| + 2 - 2x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -1: 1+x+2-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \xrightarrow{x \geq -1} -1 \leq x \leq 3 & (1) \\ x < -1: -1-x+2-2x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 3x \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \xrightarrow{x < -1} x < -1 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1) \cup (2)} x \leq 3$$

پس دامنه  $y = 2f(x) + 1$  برابر  $(-\infty, 3]$  خواهد بود.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۴

ابتدا نقطه متناظر  $(۱, ۵)$  که روی نمودار  $y = ۲f(۲x - ۳) + ۱$  قرار دارد را روی تابع  $f$  می‌یابیم.

$$\left. \begin{aligned} ۲ \times ۱ - ۳ &= -۱ \\ ۲f(-۱) + ۱ &= ۵ \Rightarrow f(-۱) = ۲ \end{aligned} \right\} \Rightarrow (-۱, ۲) \in f$$

$$(-۱, ۲) \in f \Rightarrow \begin{cases} -۲x + ۵ = -۱ \Rightarrow x = ۳ \\ ۳(۲) + ۱ = y \Rightarrow y = ۷ \end{cases}$$

$$(۳, ۷) \in ۳f(-۲x + ۵) + ۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

روش اول:

در تابع  $y = ۳ - f(۲x)$  به ازای  $x = ۴$  داریم:

$$y = ۳ - f(۸)$$

در ضمن  $f(x + ۳) = x + \frac{۵}{x}$  به ازای  $x = ۵$ ،  $f(۸)$  را به دست می‌آوریم:

$$f(۸) = ۵ + \frac{۵}{۵} = ۶ \Rightarrow y = ۳ - f(۸) = ۳ - ۶ = -۳$$

پس نمودار تابع  $y = ۳ - f(۲x)$  از نقطه  $(۴, -۳)$  می‌گذرد.

روش دوم:

از رابطه  $f(x + ۳) = x + \frac{۵}{x}$  ضابطه مربوط به  $y = f(x)$  و سپس  $y = ۳ - f(۲x)$  را به دست آورده و گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

$$\begin{cases} ۲a - ۵ = -۱ \Rightarrow a = ۲ \\ b = ۳f(-۱) - ۷ = ۳(۳) - ۷ = ۲ \Rightarrow a - b = ۰ \end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

$$(2x_0, y_0) \in f(x) \Rightarrow f(2x_0) = y_0.$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{2} = 2x_0 \Rightarrow x-3 = 4x_0 \Rightarrow x = 4x_0 + 3$$

$$y = -2f\left(\frac{x-3}{2}\right) + y_0 \Rightarrow y = -2f(2x_0) + y_0 = -2y_0 + y_0 = -y_0.$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

ایران توشه  
IranTooshe.ir



۱ کدام یک از موارد زیر در مورد تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} |x+1| & ; x \leq -1 \\ -x^2 & ; x \geq 0 \end{cases}$  درست است؟

- (۱) صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.  
(۲) اکیداً صعودی است.  
(۳) نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.  
(۴) اکیداً نزولی است.

۲ کدام تابع در دامنه خود، اکیداً صعودی است؟

- (۱)  $f(x) = 2^{-x}$   
(۲)  $g(x) = |x+2|$   
(۳)  $h(x) = \sqrt{2-x}$   
(۴)  $k(x) = \log_2^x$

۳ بزرگترین بازه‌ای که تابع با ضابطه  $f(x) = |x+1| + |x-1|$  روی آن صعودی است، کدام است؟

- (۱)  $[1, +\infty)$   
(۲)  $[-1, +\infty)$   
(۳)  $(-\infty, -1]$   
(۴)  $(-\infty, 1]$

۴ تابع  $f(x) = x - [x]$  در کدام بازه صعودی است؟ ( $[ ]$  جزء صحیح است)

- (۱)  $(-1, 1)$   
(۲)  $[0, +\infty)$   
(۳)  $\mathbb{R}$   
(۴)  $[-2, -1)$

۵ تابع  $y = 2x + \frac{|x|}{x}$  در دامنه خود چگونه است؟

- (۱) اکیداً صعودی  
(۲) اکیداً نزولی  
(۳) هم صعودی و هم نزولی  
(۴) غیریکنوا

۶ نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 2x - x|x|$  در بازه  $(-1, 1)$  چگونه است؟

- (۱) ابتدا نزولی، سپس صعودی  
(۲) صعودی  
(۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی  
(۴) نزولی

۷ اگر تابع  $f = \{(2, 2m+3), (1, 6), (3, -4)\}$  یک تابع نزولی اکید باشد، آنگاه در محدوده  $m$  چند عدد صحیح وجود دارد؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

۸

به ازای  $x \in [a, b]$  تابع  $f = \{(1, 2x + 7), (-2, 10 - x), (0, x^2 + 4)\}$  یک تابع صعودی است. بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۱  
(۴) ۲

۹

تابع  $f = \{(-6, 2), (0, 4), (6, 7), (7, 9), (2, m^2 - 3)\}$  غیریکنوا است.  $m$  چند عدد صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟

- (۱) صفر  
(۲) ۲  
(۳) ۴  
(۴) ۶

۱۰

اگر  $f = \{(1, 2), (-1, 0), (0, [a])\}$  و  $g(x) = 2^x$  باشند، به ازای چه مقادیری از  $a$  تابع  $f + g$  صعودی است؟  $[, ]$ ، علامت جزء صحیح است

- (۱)  $[0, 3]$   
(۲)  $[0, 4)$   
(۳)  $[-\frac{1}{2}, 3]$   
(۴)  $[-\frac{1}{2}, 4)$

۱۱

تابع  $f(x) = |x(x^2 + 3x + 3)| + 2$  در بازه  $[a, +\infty)$  صعودی اکید است. حداقل مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) -۱  
(۲) -۲  
(۳)  $-\sqrt[3]{2}$   
(۴)  $-1 - \sqrt[3]{2}$

۱۲

بزرگ‌ترین بازه برای  $k$  که در آن تابع نمایی  $y = \left(\frac{5-k}{1-3k}\right)^x$  همواره اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

- (۱)  $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$   
(۲)  $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$   
(۳)  $\left(-3, \frac{1}{3}\right)$   
(۴)  $\left(-4, \frac{1}{3}\right)$

۱۳

چند عدد صحیح می‌توان به جای  $a$  قرار داد، به‌طوری‌که تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} + 1 & ; x < 0 \\ a & ; x = 0 \\ ax - 1 & ; x > 0 \end{cases}$  اکیداً یکنوا شود؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

۱۴

تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq a \\ 2x + 1 & ; x < a \end{cases}$  اکیداً صعودی است. مقدار  $a$  کدامیک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

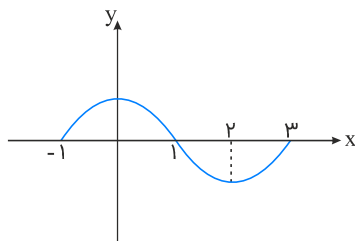
- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳)  $\frac{3}{2}$   
(۴)  $\frac{5}{2}$



۱۵ تابع درجه دوم  $y = (a - 3)x^2 - 12x + 1$  در فاصله  $[4, +\infty)$  صعودی است. کمترین مقدار  $a$  کدام است؟

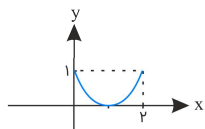
- (۱) ۴  
(۲)  $\frac{9}{2}$   
(۳) ۵  
(۴)  $\frac{11}{2}$

۱۶ شکل زیر نمودار تابع  $y = f(x)$  است. نمودار تابع  $y = f(1 - x)$  در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



- (۱)  $[-4, -3]$   
(۲)  $(-3, -1)$   
(۳)  $(-1, 1)$   
(۴)  $[1, 2]$

۱۷ نمودار تابع  $f(x)$  به شکل زیر است. تابع  $y = f(f(x))$  با ورودی  $1 \leq x \leq 2$  چگونه است؟



(۱) صعودی

(۲) نزولی

(۳) ابتدا نزولی سپس صعودی

(۴) ابتدا صعودی سپس نزولی

۱۸ اگر  $f(x) = \sqrt{x - 3}$  و  $g(x) = 2^{-x}$  باشد، کدامیک از توابع زیر نزولی است؟

- (۱)  $f + g$   
(۲)  $fg$   
(۳)  $g - f$   
(۴)  $\frac{f}{g}$

۱۹ اگر  $y = f(x)$  تابعی اکیداً یکنوا باشد، تابع  $f \circ f(x)$  کدامیک از ضابطه‌های زیر را نمی‌تواند داشته باشد؟

- (۱)  $y = 3 + x$   
(۲)  $y = x^9$   
(۳)  $y = 4 - x$   
(۴)  $y = 2x - 1$

۲۰ اگر  $f$  تابعی اکیداً صعودی و  $f(1) = 0$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{\frac{x - 4}{f(3 - x)}}$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) بی‌شمار

۲۱ اگر تابع  $f$  اکیداً صعودی و  $f(1) = 0$  باشد، آنگاه دامنه  $\sqrt{(x^3 - x)f(x)}$  برابر با  $\mathbb{R} - (a, b)$  است. حاصل  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) صفر  
(۳) -۱  
(۴) ۲

۲۲

اگر  $f$  تابعی نزولی اکید با دامنه  $\mathbb{R}$  باشد، دامنه تابع  $y = \sqrt{f(|3x - 5|) - f(|2x + 3|)}$  چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

(۲) ۷

(۱) ۶

(۴) ۱۰

(۳) ۸

۲۳

اگر  $f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{x-1} - 1$  باشد، دامنه تابع  $\sqrt{(f(x))^2 - 225}$  کدام است؟

(۲)  $\left[-\frac{1}{4}, 4\right]$ (۱)  $(0, \infty)$ (۴)  $\left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$ (۳)  $\left(0, \frac{1}{5}\right]$ 

ایران توشه  
IranTooshe.ir

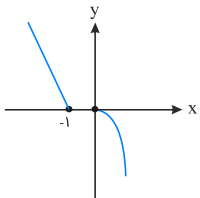


منبع: قلمچی

گزینه ۳

۱

ابتدا نمودار  $f$  را رسم می‌کنیم:



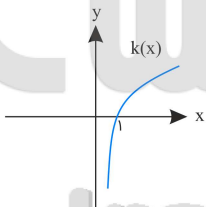
باتوجه به نمودار، واضح است که تابع  $f$  نزولی است. از طرفی چون  $f(0) = f(-1) = 0$  بنابراین تابع  $f$  اکیداً نزولی نیست.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

گزینه ۴

۲

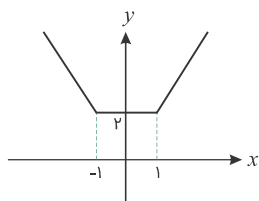
کافی است نمودار تابع‌ها را رسم نماییم. به‌سادگی می‌بینیم نمودار  $k(x) = \log_3^x$  مطابق شکل زیر، یک تابع اکیداً صعودی است.



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

نمودار تابع  $f$  را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

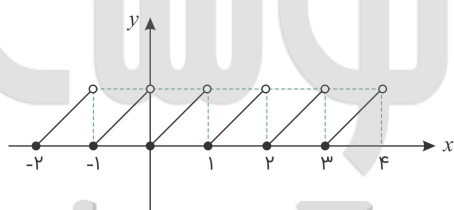
$$y = f(x) = |x + 1| + |x - 1| = \begin{cases} 2x & ; x > 1 \\ 2 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ -2x & ; x < -1 \end{cases}$$



همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود، بازه  $[-1, +\infty)$  بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع  $f$  روی آن صعودی است.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

با رسم نمودار تابع  $f(x)$  داریم:



$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x$$

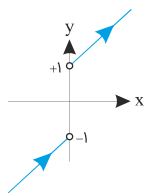
$$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = x - 2$$

همان‌طور که از نمودار تابع  $f(x)$  مشخص است، تابع در بازه  $[-2, -1)$  صعودی می‌باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

$$y = 2x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 2x + 1 & ; x > 0 \\ 2x - 1 & ; x < 0 \end{cases}$$

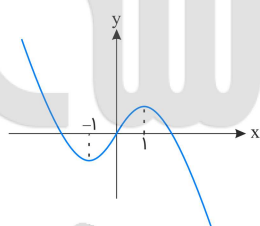


باتوجه به نمودار، تابع موردنظر اکیداً صعودی است.

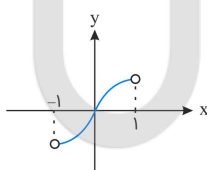
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

با تعیین علامت  $|x|$ ، داریم:

$$f(x) = 2x - x|x| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & ; x \geq 0 \\ x^2 + 2x & ; x < 0 \end{cases}$$



$x \in (-1, 1)$

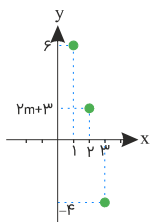


حال تابع  $f(x)$  را در بازه داده شده رسم می کنیم:

بنابراین تابع در بازه  $(-1, 1)$ ، صعودی است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

نمایش نموداری تابع  $f$  به صورت زیر است. برای اینکه تابع  $f$  اکیداً نزولی باشد، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، باید همواره به سمت پایین حرکت کنیم؛ بنابراین باتوجه به نمودار، مقدار تابع در نقطه ۲ یعنی  $2m + 3$  باید بین دو عدد ۶ و -۴ قرار گیرد:



$$-4 < 2m + 3 < 6 \Rightarrow -7 < 2m < 3 \Rightarrow -3/5 < m < 1/5$$

پس پنج عدد صحیح از -۳ تا ۱ در محدوده  $m$  قرار می‌گیرد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

می‌دانیم که برای هر دو نقطه  $x_1$  و  $x_2$  از دامنه تابع  $f$  که  $x_1 < x_2$  داشته باشیم  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه تابع  $f$  را تابع صعودی می‌نامیم؛ پس:

$$\begin{aligned} 10 - x &\leq x^2 + 4 \leq 2x + 7 \\ \Rightarrow 10 - x &\leq x^2 + 4 \Rightarrow x^2 + x - 6 \geq 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) \geq 0 \\ \Rightarrow x &\in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty) \quad (I) \\ \Rightarrow x^2 + 4 &\leq 2x + 7 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) \leq 0 \\ \Rightarrow x &\in [-1, 3] \quad (II) \\ I \cap II : x &\in [2, 3] \Rightarrow \max(b - a) = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

تابع را به صورت  $f = \{(-6, 2), (0, 4), (2, m^2 - 3), (6, 7), (7, 9)\}$  مرتب می‌کنیم. ملاحظه می‌شود با افزایش  $x$ ، مقادیر تابع در حال افزایش‌اند. برای اینکه تابع غیریکنوا شود باید  $m^2 - 3 > 7$  یا  $m^2 - 3 < 4$  باشد.

$$\begin{cases} m^2 - 3 < 4 \Rightarrow m^2 < 7 \Rightarrow -\sqrt{7} < m < \sqrt{7} & (1) \\ m^2 - 3 > 7 \Rightarrow m^2 > 10 \Rightarrow m > \sqrt{10} \text{ یا } m < -\sqrt{10} & (2) \end{cases}$$

باتوجه به بازه‌های (۱) و (۲)،  $m$  فقط اعداد صحیح  $+3$  و  $-3$  را نمی‌تواند بپذیرد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

تابع  $f + g$  را تشکیل می‌دهیم:

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 2 = 4, \quad (f + g)(-1) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad (f + g)(0) = [a] + 1$$

اگر  $f + g$  صعودی باشد، باید با افزایش مقادیر  $x$  مقادیر تابع هم زیاد شود، یعنی:

$$(f + g)(-1) \leq (f + g)(0) \leq (f + g)(1) \Rightarrow \frac{1}{2} \leq [a] + 1 \leq 4 \xrightarrow{-1} -\frac{1}{2} \leq [a] \leq 3$$

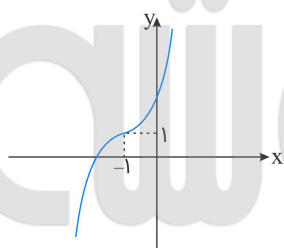
چون  $[a] \in \mathbb{Z}$  است، پس  $0 \leq [a] \leq 3$ ، یعنی  $0 \leq a < 4$  می‌باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

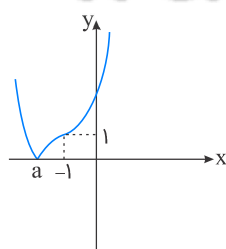
ابتدا ضابطه  $f$  را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = |x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1| = |(x+1)^3 + 1|$$

نمودار تابع  $y = (x+1)^3 + 1$  را به کمک انتقال تابع  $y = x^3$  رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار  $f$ ، کافی است قسمتی از نمودار را که زیر محور  $x$  ها است، نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم و آن قسمت از نمودار را که بالای محور  $x$  ها است حفظ کنیم:



برای به دست آوردن  $a$  باید معادله  $f(x) = 0$  را حل کنیم:

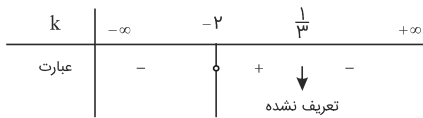
$$(x+1)^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^3 = -1 \Rightarrow x+1 = -1 \Rightarrow x = -2$$

پس تابع  $f$  در بازه  $[-2, +\infty)$  صعودی اکید است و حداقل مقدار  $a$  برابر با  $-2$  است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

شرط صعودی بودن تابع  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) این است که  $a > 1$  باشد؛ بنابراین داریم:

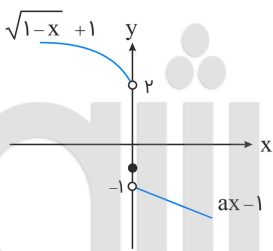
$$\frac{5-k}{1-3k} > 1 \Rightarrow \frac{5-k}{1-3k} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2k+4}{1-3k} > 0$$



$$\Rightarrow -2 < k < \frac{1}{3}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

می‌دانیم که تابع  $y = \sqrt{1-x} + 1$  در دامنه‌اش اکیداً نزولی است؛ بنابراین برای اینکه  $f$  اکیداً نزولی باشد، لازم است خط  $y = ax - 1$  نیز اکیداً نزولی باشد و این یعنی  $a < 0$  است. در این صورت نمودار تابع  $f$ ، به صورت زیر خواهد بود:



واضح است که  $a$  باید عضو بازه  $(-1, 0)$  باشد؛ در نتیجه فقط عدد صحیح  $a = -1$  قابل قبول خواهد بود.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

در ابتدا هر دو ضابطه تابع باید اکیداً صعودی باشند؛ این یعنی حتماً  $a \geq 0$  باشد؛ در غیر این صورت تابع  $x^2$  غیریکنوا خواهد شد. حال کافی است در نقطه مشترک دو ضابطه، شرط اکیداً صعودی بودن تابع را بنویسیم. داریم:

$$2a + 1 \leq a^2 \Rightarrow a^2 - 2a - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 \geq 2 \xrightarrow{a \geq 0} a \geq 1 + \sqrt{2}$$

در بین گزینه‌ها، فقط مقدار  $\frac{5}{4}$ ، در این بازه قرار دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸



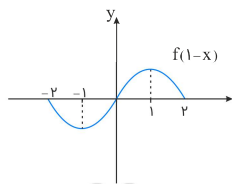
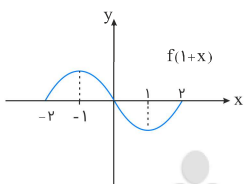
برای اینکه تابع موردنظر در بازه  $[4, +\infty)$  صعودی باشد، باید دهانه سهمی به سمت بالا بوده و طول رأس سهمی کوچکتر یا مساوی ۴ باشد، در نتیجه:

$$\begin{cases} a - 3 > 0 \\ -\frac{12}{2(a-3)} \leq 4 \xrightarrow{a>3} 3 \leq 2a - 6 \Rightarrow \frac{9}{2} \leq a \end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار  $a$  برابر  $\frac{9}{2}$  است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

نمودار تابع  $y = f(1-x)$  را با استفاده از نمودار تابع  $y = f(x)$  رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار  $f(1+x)$ ، نمودار  $f(x)$  را یک واحد به سمت چپ می‌بریم و برای رسم نمودار  $f(1-x)$ ، نمودار تابع  $f(1+x)$  را نسبت به محور  $y$ ها قرینه می‌کنیم. مطابق شکل نمودار حاصل در فاصله‌های  $[-2, -1]$  و  $[1, 2]$  اکیداً نزولی است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

اگر  $x_1$  و  $x_2$  در بازه  $[1, 2]$  باشند، داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

اما مقادیر  $f(x_1)$  و  $f(x_2)$  بین صفر و ۱ قرار دارند و  $f$  در فاصله صفر تا ۱ نزولی است، پس:

$$f(f(x_1)) > f(f(x_2))$$

یعنی  $f(f(x))$  نزولی است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

اگر  $f$  تابعی صعودی باشد، تابع  $-f$  نزولی خواهد بود. همچنین مجموع دو تابع صعودی، تابعی صعودی و مجموع دو تابع نزولی، تابعی نزولی خواهد بود. در این سؤال، تابع  $f$  صعودی و تابع  $g$  نزولی است. پس تابع  $g - f$  قطعاً نزولی است. تابع گزینه ۴ صعودی است. تابع گزینه ۱ صعودی و تابع گزینه ۲ ابتدا صعودی و سپس نزولی است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

اگر  $y = f(x)$  اکیداً صعودی باشد،  $\text{fof}(x)$  نیز اکیداً صعودی است، زیرا:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \text{fof}(x_1) > \text{fof}(x_2)$$

و اگر  $y = f(x)$  اکیداً نزولی باشد،  $\text{fof}(x)$  باز هم اکیداً صعودی است، زیرا:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) > f(f(x_2))$$

در بین گزینه‌ها، گزینه "۳" تابعی اکیداً نزولی است؛ پس نمی‌تواند برابر با  $\text{fof}(x)$  باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

$f$  اکیداً صعودی و  $y = 3 - x$  اکیداً نزولی است، پس ترکیب آن‌ها یعنی  $f(3 - x)$  نیز اکیداً نزولی است. چون  $f(1) = 0$  است،  $x = 1$  صفر تابع  $f(x)$  و  $x = 2$  صفر تابع  $f(3 - x)$  است.

حال برای به دست آوردن دامنه تابع  $g$  کافی است جدول تعیین علامتی را تشکیل دهیم. باید داشته باشیم  $\frac{x-4}{f(3-x)} \geq 0$ .

| $x$                  |  | ۲ | ۴ |   |
|----------------------|--|---|---|---|
| $x - 4$              |  | - | - | + |
| $f(3-x)$             |  | + | - | - |
| $\frac{x-4}{f(3-x)}$ |  | - | + | - |

$$\Rightarrow D_g = (2, 4]$$

این بازه شامل اعداد صحیح ۳ و ۴ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

باتوجه به آنکه تابع  $f$  اکیداً صعودی است، به ازای  $x < 1$  منفی و به ازای  $x > 1$  مثبت است. حال با تعیین علامت عبارت زیر رادیکال داریم:

$$(x^3 - x)f(x) \geq 0$$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

|           | -1 | 0 | 1 |
|-----------|----|---|---|
| $x^3 - x$ | -  | + | - |
| $f(x)$    | -  | - | + |
| P         | +  | - | + |

دامنه  $\sqrt{(x^3 - x)f(x)}$  برابر با  $(-1, 0) \cup (1, \infty)$  است، بنابراین:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

$$f(|3x - 5|) - f(|2x + 3|) \geq 0 \Rightarrow f(|3x - 5|) \geq f(|2x + 3|)$$

$$\xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} |3x - 5| \leq |2x + 3| \xrightarrow{\text{توان } 2} (3x - 5)^2 \leq (2x + 3)^2 \Rightarrow (3x - 5)^2 - (2x + 3)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (3x - 5 - 2x - 3)(3x - 5 + 2x + 3) \leq 0 \Rightarrow (x - 8)(5x - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \leq x \leq 8 \Rightarrow x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (8 \text{ تا عدد صحیح})$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

باید داشته باشیم:

$$(f(x))^2 - 225 \geq 0 \Rightarrow (f(x) - 15)(f(x) + 15) \geq 0$$

از طرفی به سادگی رابطه  $f(x)$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}-1} - 1$$

بنابراین:

$$(f(x) - 15)(f(x) + 15) = \left(2^{\frac{1}{x}-1} - 16\right) \underbrace{\left(2^{\frac{1}{x}-1} + 14\right)}_{\text{همواره مثبت}} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{1}{x}-1} - 16 \geq 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}-1} \geq 16 = 2^4$$

$$\xrightarrow{\text{۲}^x \text{ اکیداً صعودی است}} \frac{1}{x} - 1 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 5 \Rightarrow \frac{1-5x}{x} \geq 0$$

| x                | ۰  | $\frac{1}{5}$ |
|------------------|----|---------------|
| $\frac{1-5x}{x}$ | -  | +             |
|                  | تن | -             |

$$\Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{5}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

IranTooshe.ir



۱ اگر تابع  $f = \{(2, 3a), (2, a-4), (a, 2), (\frac{b}{2}, a^2-10)\}$  وارون پذیر باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟

- (۱)  $-2$  (۲)  $-4$   
(۳)  $-6$  (۴)  $-8$

۲  $f$  کدامیک از توابع زیر باشد تا  $f^2$  یک تابع یک به یک باشد؟

- (۱)  $\{(0, 0), (-2, 1), (2, 1)\}$  (۲)  $\{(2, 2), (3, 3), (-5, -2)\}$   
(۳)  $\{(-1, 4), (1, 2), (4, -1)\}$  (۴)  $\{(3, -2), (-3, 2), (0, 0)\}$

۳ اگر رابطه  $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2-a), (b, 2), (-1, 4)\}$  تابع یک به یک باشد، نمودار تابع  $g(x) = ax + b$  محور طول ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

- (۱)  $(3, 0)$  (۲)  $(-\frac{3}{2}, 0)$   
(۳)  $(-3, 0)$  (۴)  $(\frac{3}{2}, 0)$

۴ کدامیک از توابع زیر وارون پذیر است؟

- (۱)  $y = (x+5)^2$  (۲)  $y = 1 - |x-1|$   
(۳)  $y = x^2 - 6x + 9$  (۴)  $y = \sqrt{x+2} - 3$

۵ توابع  $f(x) = (x-1)|x|$  و  $g(x) = |x-1| - 2x$  به ترتیب چگونه اند؟

- (۱) وارون پذیر - وارون پذیر (۲) وارون پذیر - وارون ناپذیر  
(۳) وارون ناپذیر - وارون پذیر (۴) وارون ناپذیر - وارون ناپذیر

۶ تابع  $f(x) = (x-2)(x-4) + 2x$  در کدامیک از بازه های زیر یک به یک است؟

- (۱)  $[0, 3]$  (۲)  $[-1, 2]$   
(۳)  $[1, 5]$  (۴)  $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$

۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، تابع  $f(x) = |2x+a|$  در  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  یک به یک است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - (-1, \frac{1}{2})$  (۲)  $[-4, 2]$   
(۳)  $\mathbb{R} - (-4, 2)$  (۴)  $[-1, \frac{1}{2}]$

۸ به ازای چه حدودی از  $a$  تابع  $f(x) = ax + |x|$  یک به یک است؟

(۲)  $-1 \leq a \leq 1$

(۱)  $-1 < a < 1$

(۴)  $a < -1$  یا  $a > 1$

(۳)  $a \leq -1$  یا  $a \geq 1$

۹ اگر تابع  $f(x) = (a - 3)x^2 + 2x - 3$  بر روی  $\mathbb{R}$  یک به یک باشد، مقدار  $af(3)$  کدام است؟

(۲)  $-12$

(۱)  $12$

(۴)  $9$

(۳)  $-8$

۱۰ تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & ; x \geq 7 \\ \frac{x}{3} + a & ; x < 6 \end{cases}$  یک به یک است. حداکثر مقدار  $a$  کدام است؟

(۲)  $1$

(۱) صفر

(۴)  $3$

(۳)  $2$

۱۱ تابع دوضابطه‌ای  $y = \begin{cases} x^2 - ax + b & ; x \leq 3 \\ -\sqrt{x+1} & ; x > 3 \end{cases}$  یک به یک است. حداقل مقدار  $a + b$  کدام است؟

(۲)  $14$

(۱)  $13$

(۴)  $18$

(۳)  $17$

۱۲ هرگاه  $f$  تابعی یک به یک باشد و  $f(5x + 2) = f(x + 2f(x))$ ، در این صورت نمودار تابع  $y = f \circ f(x)$  محور  $y$ ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

(۲)  $2$

(۱)  $1$

(۴)  $4$

(۳)  $3$

گزینه ۴

۱

نکته ۱: رابطه که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها داده شده است در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه اول برابر نباشد؛ به عبارت دیگر، اگر مؤلفه اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها هم برابر باشد.  
نکته ۲: تابع که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها داده شده است، در صورتی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه دوم برابر نباشد؛ به عبارت دیگر، اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشد.

$$\begin{cases} (2, 3a) \in f \\ (2, a-4) \in f \end{cases} \xrightarrow[\text{نکته ۱}]{f \text{ تابع است}} 3a = a - 4 \Rightarrow a = -2$$

پس:

$$f = \left\{ (2, -6), (-2, 2), \left(\frac{b}{2}, -6\right) \right\}$$

$$\begin{cases} (2, -6) \in f \\ \left(\frac{b}{2}, -6\right) \in f \end{cases} \xrightarrow[\text{نکته ۲}]{f \text{ یک‌به‌یک است}} \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4$$

بنابراین:

$$ab = -8$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

گزینه ۳

۲

$f^2$  را برای هریک از گزینه‌ها به دست می‌آوریم:

$$\text{گزینه ۱: } f^2 = \{(0, 0), (-2, 1), (2, 1)\}$$

$$\text{گزینه ۲: } f^2 = \{(2, 4), (3, 9), (-5, 4)\}$$

$$\text{گزینه ۳: } f^2 = \{(-1, 16), (1, 4), (4, 1)\}$$

$$\text{گزینه ۴: } f^2 = \{(3, 4), (-3, 4), (0, 0)\}$$

ملاحظه می‌شود فقط  $f^2$  مربوط به گزینه ۳ شرایط یک‌به‌یک بودن را دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴

رابطه‌ای تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند.  
باتوجه به زوج‌های مرتب  $(۳, ۲)$  و  $(۳, a^۲ - a)$ ، برای تابع بودن باید  $a^۲ - a = ۲$  باشد:

$$a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{ق.ق} & a = ۲ \\ \text{غ.ق.ق} & a = -۱ \end{cases}$$

توجه کنید اگر  $a = -۱$  باشد، دو زوج مرتب  $(-۱, ۴)$  و  $(-۱, ۵)$  عضو  $f$  خواهند بود که قابل قبول نیست، پس  $a = ۲$  است.  
برای یک‌به‌یک بودن در دو زوج مرتب  $(b, ۲)$  و  $(۳, ۲)$ ، باید  $b = ۳$  باشد؛ پس:

$$g(x) = ax + b = ۲x + ۳ \xrightarrow{y=۰} ۲x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

ایران توشه  
IranTooshe.ir



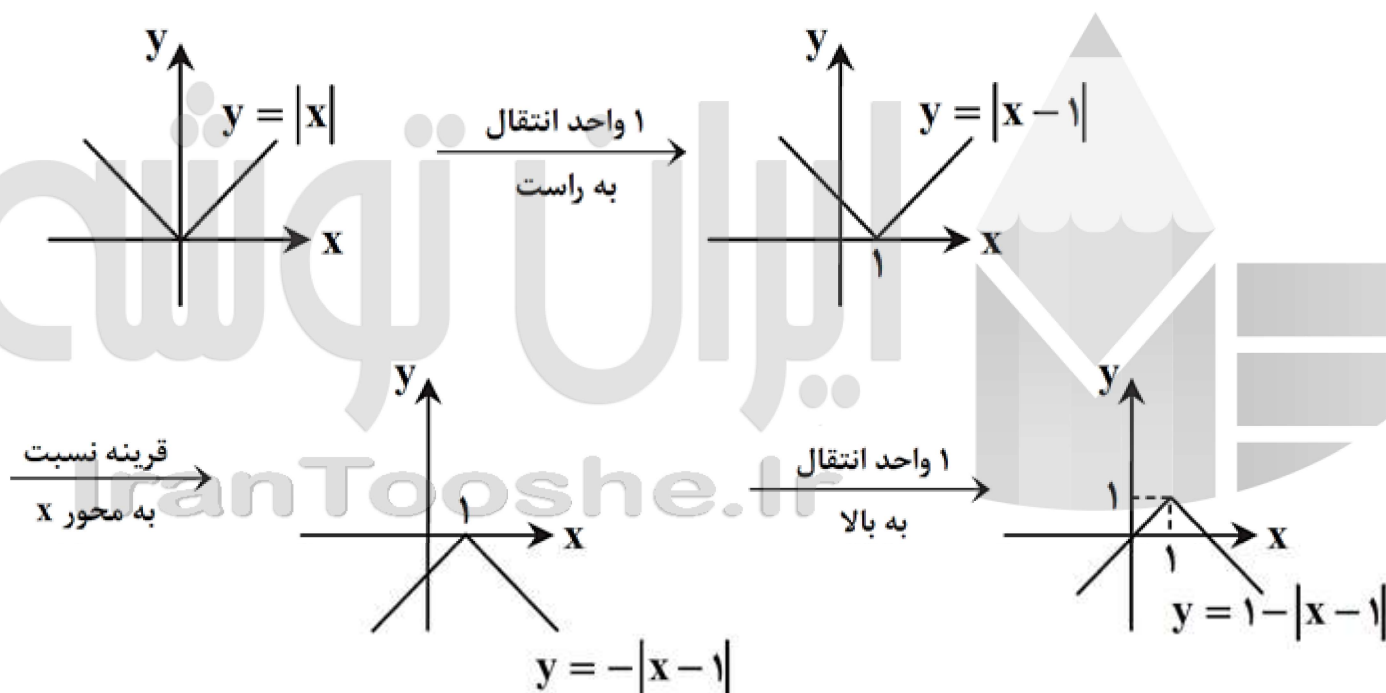


نکته: یک تابع در صورتی وارون پذیر است که یک به یک باشد.  
 نکته: یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور  $x$ ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.  
 باتوجه به نکات بالا، نمودار هریک از گزینه ها را رسم می کنیم.

گزینه ۱:  $y = (x + 5)^2$



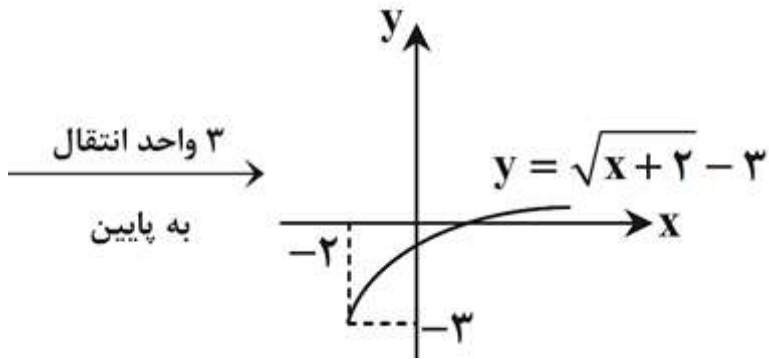
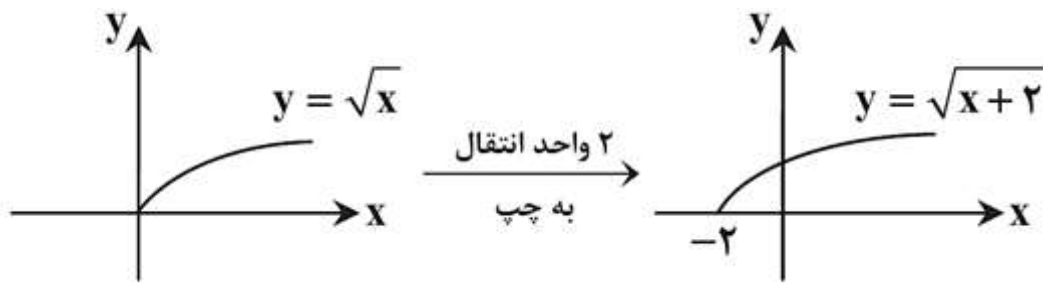
گزینه ۲:  $y = 1 - |x - 1|$



گزینه ۳:  $y = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$



گزینه ۴:  $y = \sqrt{x + 2} - 3$



باتوجه به نمودارها، واضح است که گزینه ۴ پاسخ است.

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

ایران توشه  
IranTooshe.ir



شرط وارون پذیری یک تابع، یک به یک بودن آن است؛ پس یک به یک بودن یا نبودن دو تابع را بررسی می‌کنیم.  
تابع یک به یک تابعی است که به ازای ورودی‌های متمایز  $(x)$ ، خروجی‌های  $(y)$  یکسان ندهد. تابع  $f(x)$  یک به یک نیست، زیرا:

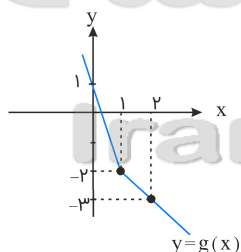
$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow f(1)=0 \\ x=0 \Rightarrow f(0)=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0), (1,0)$$

برای بررسی یک به یک بودن تابع  $g(x)$  بهتر است نمودار آن را رسم کنیم. اول تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و بعد نمودارش را رسم می‌کنیم.

$$g(x) = \begin{cases} (x-1) - 2x = \underbrace{-x-1}_{y_1} & ; x \geq 1 \\ -(x-1) - 2x = \underbrace{-3x+1}_{y_2} & ; x < 1 \end{cases}$$

|       |    |    |
|-------|----|----|
| $x$   | ۱  | ۲  |
| $y_1$ | -۲ | -۳ |

|       |    |   |
|-------|----|---|
| $x$   | ۱  | ۰ |
| $y_2$ | -۲ | ۱ |

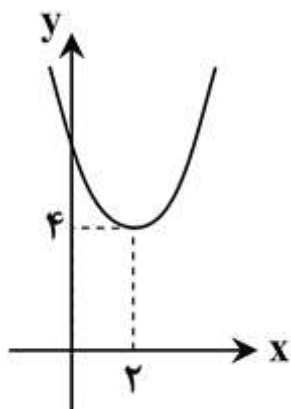


باتوجه به نمودار تابع  $g(x)$  اگر هر خط موازی محور  $x$  ها رسم کنیم نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع  $g(x)$  یک به یک است. در نتیجه  $f$  تابع وارون ناپذیر و  $g$  تابعی وارون پذیر است.

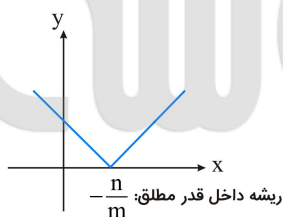
نکته: تابع  $f(x)$  یک به یک است، اگر هر خط موازی محور  $x$  ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند. ابتدا می توان نوشت:

$$f(x) = (x - 2)(x - 4) + 2x = x^2 - 6x + 8 + 2x = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$$

پس نمودار تابع  $f(x)$  به شکل زیر است که با توجه به گزینه ها، تنها در بازه  $[-1, 2]$  یک به یک است.



گزینه دو علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷



دقت کنید که در نمودار تابع  $f(x) = |mx + n|$  نقطه شکستگی نمودار تابع، ریشه داخل قدر مطلق است، پس: حال برای اینکه  $f$  تابعی یک به یک باشد، باید ریشه داخل قدر مطلق در فاصله  $(-1, 2)$  نباشد، پس ابتدا حدود  $a$  را طوری می یابیم که ریشه در فاصله  $(-1, 2)$  باشد سپس مجموعه جواب به دست آمده را از  $\mathbb{R}$  کم می کنیم:

$$2x + a = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{2} \Rightarrow -1 < -\frac{a}{2} < 2 \xrightarrow{\times(-2)} -4 < a < 2$$

پس مجموعه جواب مورد نظر برابر است با:

$$a \in \mathbb{R} - (-4, 2)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۶

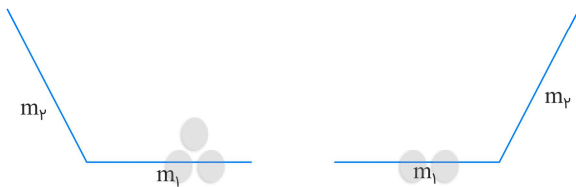
$$f(x) = \begin{cases} (a+1)x & ; x \geq 0 \Rightarrow m_1 = a+1 \\ (a-1)x & ; x < 0 \Rightarrow m_2 = a-1 \end{cases}$$

باتوجه به ضابطه به دست آمده در حالت های مختلف شیب ها، شکل های زیر به دست می آید.

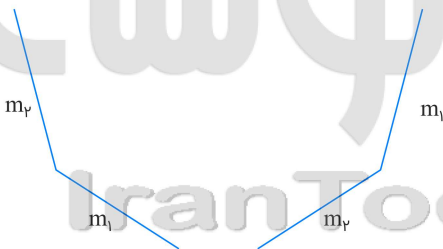
$$m_1 \cdot m_2 < 0 :$$



$$m_1 \cdot m_2 = 0$$



$$m_1 \cdot m_2 > 0 :$$



باتوجه به شکل های رسم شده، تابع زمانی یک به یک است که  $m_1 m_2 > 0$ ، پس:

$$(a+1)(a-1) > 0 \Rightarrow a > 1 \text{ یا } a < -1$$

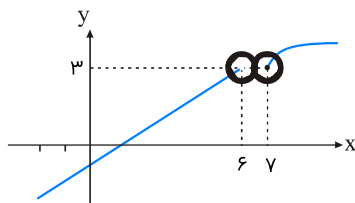
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

ابتدا توجه کنید که هیچ تابع درجه دومی (سه می شکل) بر روی  $\mathbb{R}$  یک به یک نیست، پس می توان نتیجه گرفت  $a - 3 = 0$  یعنی  $a = 3$ ، بنابراین داریم:

$$f(x) = 2x - 3 \Rightarrow af(3) = 3(6 - 3) = 9$$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۵

نمودار تابع  $y = \sqrt{x+2}$  به ازای  $x \geq 7$  به صورت زیر است.



حال باید مقدار ضابطه پایینی تابع حداکثر ۳ شود که این مقدار حداکثر باید به ازای  $x = 6$  به دست آید؛ بنابراین:

$$2 + a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow \max(a) = 1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

به ازای  $x > 3$ ، ضابطه تابع، مربوط به تابعی نزولی و یک‌به‌یک است. برای اینکه به ازای  $x \leq 3$  نیز تابع یک‌به‌یک باشد، لازم است رأس سهمی یعنی  $x = \frac{a}{3}$ ، قبل از ۳ نباشد، یعنی:

$$\frac{a}{3} \geq 3 \Rightarrow a \geq 9$$

شرط دیگر برای یک‌به‌یک بودن تابع این است که مقدار تابع در  $x = 3$  از حد راست تابع در  $x = 3$ ، بزرگ‌تر یا مساوی باشد، یعنی:

$$9 - 3a + b \geq -2 \Rightarrow b \geq 3a - 11$$

به ازای  $a = 6$  و  $b = 7$ ، مقادیر  $a$  و  $b$  کمترین مقدار خود را خواهند داشت و کمترین مقدار  $a + b$  برابر ۱۳ می‌شود.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۵

باتوجه به اینکه تابع  $f$  یک‌به‌یک است، داریم:

$$x + 2f(x) = 5x + 2 \Rightarrow 2f(x) = 5x + 2 - x \Rightarrow 2f(x) = 4x + 2$$

$$\Rightarrow 2f(x) = 2(2x + 1) \Rightarrow f(x) = 2x + 1$$

$$\Rightarrow f \circ f(x) = f(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

نقطه تلاقی با محور  $y$ ها  $\rightarrow x = 0 \Rightarrow f \circ f(0) = 4(0) + 3 = 3$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

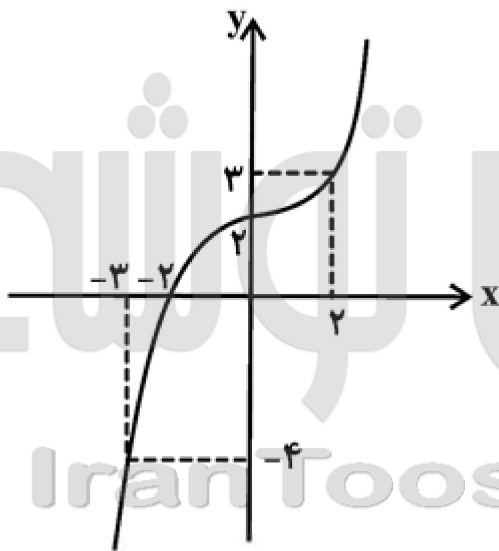
۱ اگر  $f = \{(1, 2), (-1, 3), (4, 4), (3, 5)\}$  باشد، آنگاه تابع  $f - f^{-1}$  از چند زوج مرتب تشکیل شده است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۲  
(۳) ۴  
(۴) ۱

۲ اگر  $g(x) = 3x - 1$  و  $f = \{(1, 2), (-1, 1), (3, 0)\}$ ، آنگاه  $f^{-1} \circ g(1)$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۳ نمودار تابع  $y = -f(x - 1)$  به شکل زیر است. کدام تساوی درست نیست؟



(۱)  $f^{-1}(-3) = 1$

(۲)  $f^{-1}(-2) = -1$

(۳)  $f^{-1}(0) = -3$

(۴)  $f^{-1}(4) = 4$

۴ اگر  $f = \{(0, -2), (3, 2), (a, b)\}$  و  $g = \{(5, 1), (3, 3), (a + 1, 2b)\}$  و  $f^{-1} \circ g(3) = -1$  باشد، مقدار  $f \circ g^{-1}(6)$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) -۳  
(۴) -۲

۵ دامنهٔ تابع وارون تابع  $y = x^2 - 4x + 5$ ،  $(x \leq 1)$ ، کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, 2]$   
(۲)  $[2, +\infty)$   
(۳)  $(-\infty, 1]$   
(۴)  $[1, +\infty)$

۶ اگر  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  کدام عدد زیر در دامنه تابع وارون  $f$  موجود نیست؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۷ وارون  $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$  از کدام نقطه می‌گذرد؟

- (۱) (۱, -۱) (۲) (۱, ۲) (۳) (-۱, ۰) (۴) (-۱, ۲)

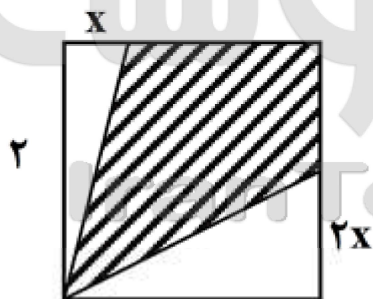
۸ اگر  $f^{-1} : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ،  $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$  ، آنگاه  $f(3)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۱۸

۹ تابع  $f$  با دامنه  $(2, 3)$  و ضابطه  $f(x) = [-x]x + [x]$  تعریف شده است. مقدار  $f^{-1}(-5)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{2}$  (۲)  $\frac{7}{3}$  (۳) ناموجود (۴)  $\frac{8}{3}$

۱۰ در مربع شکل زیر،  $f(x)$  برابر با مساحت ناحیه هاشورخورده است. مقدار  $f^{-1}(2)$  کدام است؟ ( $0 < x < 1$ )



- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{2}{5}$

۱۱ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^2 - Ax + 3$  ;  $x > 3$  وارون‌پذیر است. اگر  $f^{-1}(-5) = 4$  باشد، آنگاه  $f^{-1}(-2)$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۲ در تابع  $f(x) = x^3 + x + 2$ ، اگر محل برخورد  $f^{-1}(x)$  با محور  $x$ ها را  $A'$  بنامیم و نقطه  $A$  قرینه  $A'$  نسبت به خط  $y = x$  باشد، آنگاه اندازه پاره خط  $AA'$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$



۱۳ نمودار وارون تابع  $f(x) = x^3 + 3x + a$ ، خط  $2x + 5y = 8$  را در نقطه  $A(b, 2)$  قطع می‌کند. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) -۱۴  
(۳) ۱۵ (۴) -۱۵

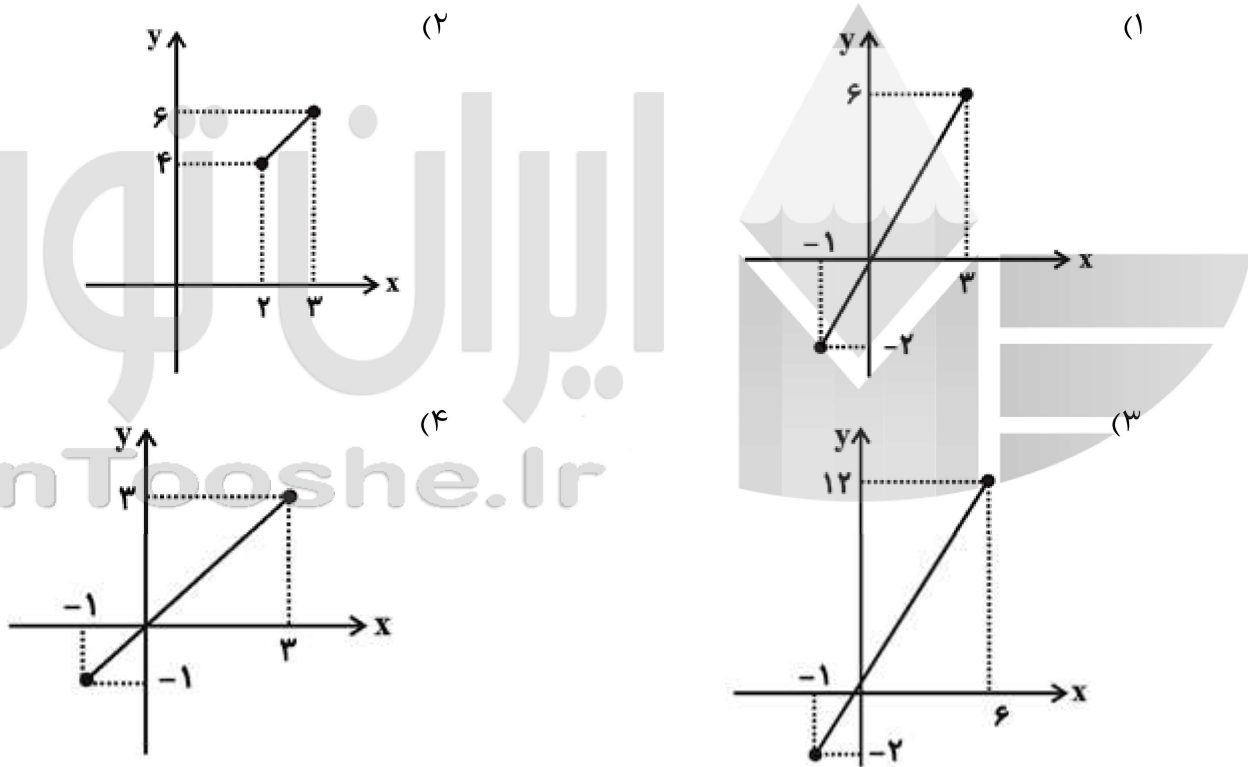
۱۴ اگر دو خط  $3x - 4y = b$  و  $bx + ay = -16$  نسبت به خط  $y = x$  قرینه یکدیگر باشند، مقدار  $b - a$  کدام است؟

- (۱)  $\pm 14$  (۲)  $\pm 2$   
(۳)  $\pm 12$  (۴)  $\pm 4$

۱۵ اگر در تابع خطی  $f$ ،  $f(2) = 4$  و  $f^{-1}(-5) = -1$  باشد، مقدار  $f^{-1}(3 + f(4))$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲)  $\frac{11}{3}$   
(۳) ۳ (۴)  $4/5$

۱۶  $f$  تابعی خطی با دامنه  $[-1, 3]$  است که از دو نقطه  $(-1, 2)$  و  $(1, 4)$  می‌گذرد. نمودار تابع  $g(x) = f(x) + f^{-1}(x)$  کدام است؟



۱۷ مساحت مثلث محصور بین نمودار توابع  $f(x) = 2x - a$  و  $f^{-1}(x)$  و محور  $x$ ها برابر ۲۷ است. نمودار تابع  $f(x)$  محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟ ( $a > 0$ )

- (۱) ۶ (۲) ۳  
(۳) ۴ (۴) ۲

$$y = \frac{x+3}{5}; x \leq 3 \quad (2)$$

$$y = x - 3; x \geq 3 \quad (4)$$

$$y = \frac{x+3}{5}; x \leq 2 \quad (1)$$

$$y = x - 3; x \geq 2 \quad (3)$$

تابع معکوس تابع  $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$  در بزرگ‌ترین بازه‌ای که معکوس پذیر است، کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}; x \leq 1 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}; x \leq 1 \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = x - 1; x \geq -1 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = x + 1; x \geq -1 \quad (3)$$

ضابطه معکوس تابع  $y = |x^2 - 2x|$  در بزرگ‌ترین بازه‌ای که صعودی است، کدام است؟

$$x \geq 1; 1 - \sqrt{x-1} \quad (2)$$

$$x \leq 1; 1 + \sqrt{1-x} \quad (4)$$

$$x \geq 0; 1 - \sqrt{1+x} \quad (1)$$

$$x \geq 0; 1 + \sqrt{1+x} \quad (3)$$

ضابطه وارون تابع  $y = 2x + |x|$  کدام است؟

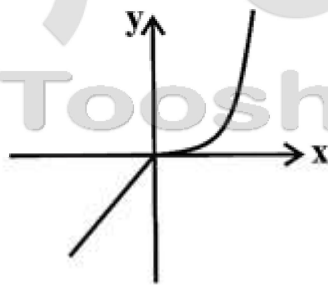
$$y = -\frac{2x - |x|}{3} \quad (2)$$

$$y = \frac{2x - |x|}{3} \quad (4)$$

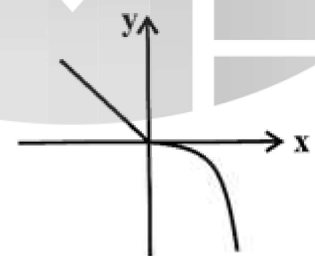
$$y = -\frac{2x + |x|}{3} \quad (1)$$

$$y = \frac{2x + |x|}{3} \quad (3)$$

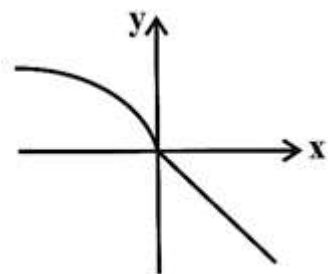
نمودار معکوس تابع  $f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; x \geq 0 \\ |x| & ; x < 0 \end{cases}$  کدام است؟



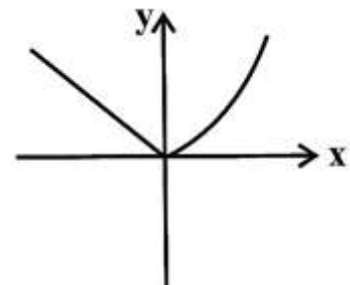
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

تابع  $f(x) = x^2 - 6x + 3$  را با دامنه محدود شده  $D_f = (-\infty, 0)$  در نظر بگیرید. وارون این تابع در کدام گزینه آمده است؟

$$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+6}; x > 3 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+6}; x > 3 \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+6}; x < 3 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+6}; x < 3 \quad (3)$$

۲۴ تابع وارون تابع  $y = x + \sqrt{x}$  به صورت  $y = (\frac{\sqrt{ax+1}-1}{b})^2$  است. مقدار  $\frac{a}{b}$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۴  
(۴) ۶

۲۵ نمودار وارون تابع  $f(x) = 1 - \sqrt{x+3}$  از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

- (۱) اول  
(۲) دوم  
(۳) سوم  
(۴) چهارم

۲۶ اگر  $f(x) = \frac{1}{x}(x - \frac{1}{x})$  به ازای  $x > 0$  تعریف شده باشد، حاصل  $f^{-1}(\frac{1}{x}) - f^{-1}(\frac{-1}{x})$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲)  $\frac{2}{x}$   
(۳)  $\frac{3x^2+2}{3x}$   
(۴)  $\frac{2}{x}\sqrt{x^2+1}$

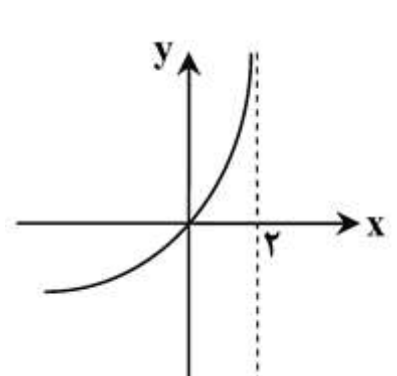
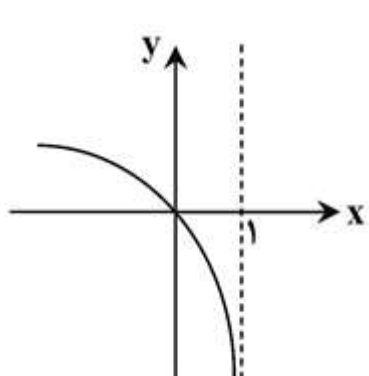
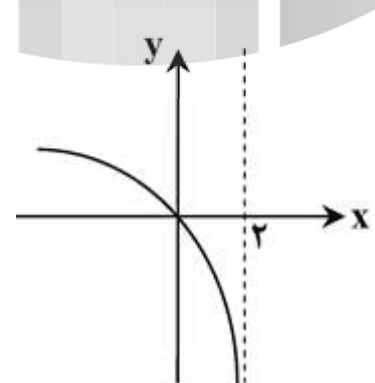
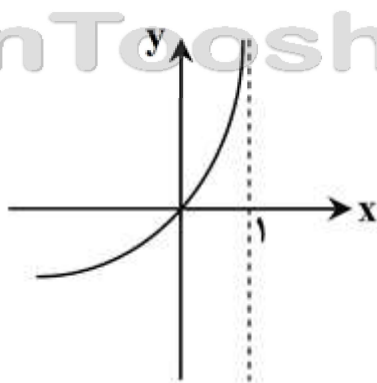
۲۷ دو تابع  $g(x) = \frac{x^2+b}{2x}$  و  $f(x) = ax + \sqrt{x^2+1}$  وارون یکدیگرند. حاصل  $a+b$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) -۲  
(۳) ۳  
(۴) صفر

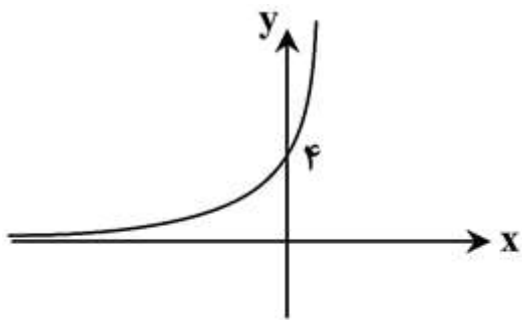
۲۸ ضابطهٔ وارون تابع  $f(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt{x-2}}$  کدام است؟

- (۱)  $f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 1 ; x \geq 1$   
(۲)  $f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 3 ; x \geq 1$   
(۳)  $f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 1 ; x \geq 2$   
(۴)  $f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 3 ; x \geq 2$

۲۹ نمودار وارون تابع  $f(x) = 1 - 2^{-x}$  شبیه کدام گزینه است؟



۳۰ اگر نمودار  $f$  به شکل زیر باشد، دامنه تابع  $y = \sqrt{f^{-1}(3x - 2)}$  کدام است؟



(۱)  $[4, +\infty)$

(۲)  $(0, 4]$

(۳)  $[2, +\infty)$

(۴)  $(0, 2]$

۳۱ اگر  $f(x) = 3 - 2x$  باشد، دامنه تعریف  $y = \sqrt{f^{-1}(2x^2 + 3)} - x$  در کدام گزینه آمده است؟

(۱)  $[0, 1]$

(۲)  $[-1, 0]$

(۳)  $[-1, 1]$

(۴)  $[-2, 1]$

۳۲ اگر  $f(x) = x^3 + x + 1$  باشد، آنگاه در کدام بازه، تابع  $y = (f - f^{-1})(x)$  بالای محور  $x$  ها قرار دارد؟

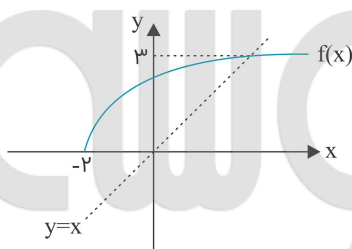
(۱)  $(-2, 0)$

(۲)  $(-1, +\infty)$

(۳)  $(-4, 1)$

(۴)  $(-\infty, 1)$

۳۳ اگر نمودار تابع  $f(x)$  به شکل زیر باشد، دامنه  $\sqrt{\frac{x}{x - f^{-1}(x)}}$  کدام است؟



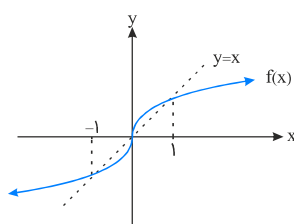
(۱)  $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$

(۲)  $[-2, 0] \cup [3, +\infty)$

(۳)  $[0, 3]$

(۴)  $[0, 3]$

۳۴ نمودار تابع  $f(x)$  مطابق شکل زیر است. دامنه تابع  $y = \sqrt{\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x^2 - 1}}$  کدام است؟



(۱)  $[0, 1]$

(۲)  $(-\infty, 0] - \{-1\}$

(۳)  $(-1, 0]$

(۴)  $[0, +\infty) - \{1\}$

۳۵ اگر  $f(x) = \frac{x+5}{x+k}$  و  $f \circ f(x) = x$  باشد، مقدار  $f(k)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$

(۲)  $-\frac{1}{4}$

(۳)  $\frac{9}{4}$

(۴)  $-\frac{9}{4}$

۳۶

دوتایی مرتب  $(a, b)$  کدام می‌تواند باشد تا نمودار وارون تابع  $y = \frac{2x}{a} - b$  بر خود تابع منطبق نباشد؟

- (۱)  $(2, 0)$  (۲)  $(-2, 0)$   
(۳)  $(-2, 5)$  (۴)  $(2, 5)$

۳۷

اگر تابع  $f(x) = ax + 2$  با وارونش در بیش از یک نقطه تقاطع داشته باشند، مقدار  $f^{-1}(3)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱  
(۳) ۵ (۴) -۵

۳۸

اگر نمودار تابع خطی  $f$ ، نمودار وارون خود را فقط در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند و  $f(1) = 2$  باشد، نمودار تابع  $f^{-1}$  محور  $x$ ها را در کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۲  
(۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{5}{3}$

۳۹

در تابع خطی  $f$ ، اگر  $f(2) = 5$  و نمودارهای دو تابع  $f$  و  $f^{-1}$  غیرمتقاطع باشند، آنگاه  $f(4)$  برابر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۵  
(۳) ۶ (۴) ۷

۴۰

نمودار  $f(x) = \sqrt{x+a}$ ، نمودار  $f^{-1}(x)$  را در دو نقطه قطع می‌کند. حدود  $a$  کدام است؟

- (۱)  $a > -\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{4} < a \leq 0$   
(۳)  $0 \leq a < \frac{1}{4}$  (۴)  $a > \frac{1}{4}$

۴۱

اگر محل برخورد نمودار تابع  $f(x) = 2x - |x| + 1$  با نمودار تابع وارونش، نقطه  $A(a, b)$  باشد، حاصل  $a + b$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر  
(۳) ۱ (۴) ۲

۴۲

اگر  $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$  باشد، آنگاه مجموع طول نقاط برخورد نمودار تابع  $f$  با نمودار وارون آن کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۲  
(۳) ۳ (۴) -۴

۴۳

مجموعه طول نقاط مشترک نمودار توابع  $f(x) = \sqrt[3]{4-x^3}$  و  $f^{-1}(x)$ ، چند عضو دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲  
(۳) ۳ (۴) این مجموعه نامتناهی است.

۴۴ نمودار وارون تابع  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  در چند نقطه خط  $y = 3x$  را قطع می‌کند؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) صفر

۴۵ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^2 - x + 5$  و دامنه  $D_f = [1, +\infty)$  مفروض است. وارون این تابع محور  $x$ ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

- (۱) ۵  
(۲)  $\frac{1+\sqrt{26}}{2}$   
(۳)  $\frac{1-\sqrt{26}}{2}$   
(۴) نقطه برخورد ندارد.

۴۶ وارون تابع  $y = \frac{2x-1}{x-2}$ ، نیمساز ناحیه دوم و چهارم را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع می‌کند. طول پاره خط  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$   
(۲)  $2\sqrt{2}$   
(۳)  $4\sqrt{2}$   
(۴)  $8\sqrt{2}$

۴۷ اگر  $f(x) = 4 - \sqrt{x-3}$  باشد، طول نمودار رسم شده تابع  $g(x) = f \circ f^{-1}(x) + f^{-1} \circ f(x)$  برابر با کدام گزینه است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$   
(۲)  $\sqrt{3}$   
(۳) ۲  
(۴)  $\sqrt{5}$

۴۸ با فرض آنکه  $f(x) = 4\sqrt{x-1} + 3$ ، نمودار تابع  $y = 2f(f^{-1}(x))$  کدام است؟



۴۹ اگر  $f^{-1}(x) - f(4) = x + 6$  و  $f(x)$  یک تابع خطی باشد، آنگاه  $f(4)$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) -۱  
(۳) ۱۱  
(۴) -۱۱

۵۰ اگر به ازای هر عدد حقیقی  $(g \circ f)^{-1}(2x - 1) = x$  و  $f(x) = x^3 + 2$  باشد، مقدار  $g^{-1}(3)$  کدام است؟  $f$  و  $g$  معکوس پذیرند و  $(D_g = \mathbb{R})$

- (۱) ۹  
(۲) ۱۰  
(۳) ۴  
(۴) ۸

۵۱ اگر نمودار تابع  $y = 2f^{-1}(x - 1) + 3$  از نقطه  $(3, 7)$  بگذرد، کدام نقطه زیر، قطعاً روی نمودار تابع  $y = f(x + 1)$  قرار ندارد؟

- (۱)  $(3, 2)$   
(۲)  $(2, 4)$   
(۳)  $(1, 2)$   
(۴)  $(3, 4)$

۵۲ در تابع خطی  $f$  رابطه  $4f(2x) = f(8x - 1) - 5$  برقرار است. اگر  $f^{-1}(3) = 5$  باشد، مقدار  $m$  از تساوی  $f^{-1}(m) = 2$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

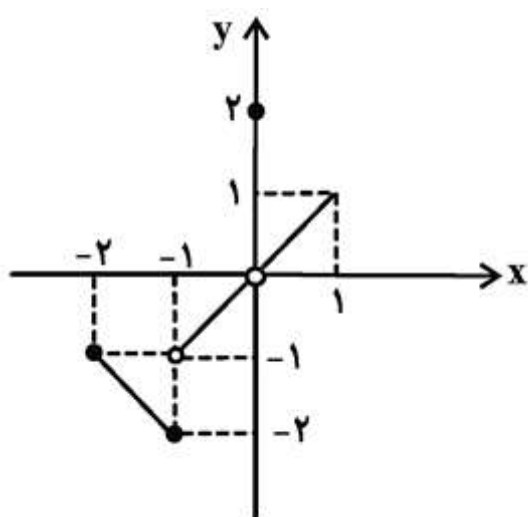
۵۳ اگر  $f$  تابعی یک به یک،  $f(-2) = \frac{5}{3}$  و  $g(x) = 2 - 3f(5x - 1)$  باشد، حاصل  $g^{-1}(-3)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{5}$   
(۲)  $-\frac{3}{5}$   
(۳)  $\frac{1}{5}$   
(۴)  $-\frac{1}{5}$

۵۴ دو تابع  $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 6), (4, 7)\}$  و  $g(x) = x + \sqrt{x}$  مفروض اند. به ازای چند مقدار  $a$ ،  $f^{-1}(g(3a)) = 3$  است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۱

۵۵ اگر  $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-2x}$  و نمودار تابع  $y = g(x)$  به صورت زیر باشد، در این صورت به ازای چه مقداری از  $a$ ،  $f(g^{-1}(a)) = 1$  است؟



- (۱) -۲  
(۲) -۱  
(۳) ۱  
(۴) صفر

۵۶

اگر به ازای هر عدد حقیقی داشته باشیم:  $(fog)^{-1}(2x - 4) = \frac{x}{2}$  و  $g(x) = 2x^3 + 1$ ، آنگاه نمودار وارون تابع  $f(x)$ ، محور  $y$ ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۵۷

برد تابع  $f(x) = 2^{x+1}$  را به بازه  $(a, b]$  محدود کرده‌ایم تا برای تابع  $g(x) = \sqrt{6 - 2x}$  ترکیب  $gof^{-1}$  تعریف شود. حداکثر مقدار  $(b - a)$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۶  
(۳) ۸  
(۴) ۱۶

۵۸

اگر  $(fog^{-1})(x) = \sqrt[3]{2x^5 + 1}$  باشد، حاصل  $(gof^{-1})(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{(x-1)^3}{2}$   
(۲)  $1 - f^{-1}(\sqrt[5]{x-1})$   
(۳)  $\sqrt[5]{\frac{x^3-1}{2}}$   
(۴)  $1 - g^{-1}(\sqrt[5]{x-1})$

۵۹

اگر  $f(x) = x + 2$  و  $g(x) = 2x^2 - 8x + 1$  باشند، آنگاه حاصل جمع ریشه‌های معادله  $gof^{-1}(x) = 0$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{25}{2}$   
(۲)  $\frac{25}{2}$   
(۳) ۸  
(۴) -۸

۶۰

اگر  $f = \{(0, -1), (1, 2), (-2, 3), (3, 1), (2, 5)\}$  و  $g = \{(1, -3), (3, 2), (4, 1)\}$  باشد، آنگاه مجموع اعضای برد تابع  $(gof^{-1})^{-1}$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴



گزینه ۲

۱

اگر در تابع وارون پذیر  $f$  داشته باشیم،  $(a, b) \in f$  آنگاه  $(b, a) \in f^{-1}$ .

$$f = \{(1, 2), (-1, 3), (4, 4), (3, 5)\}$$

$$\Rightarrow D_f = \{1, -1, 4, 3\}$$

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, -1), (4, 4), (5, 3)\}$$

$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$D_{f-f^{-1}} = D_f \cap D_{f^{-1}} = \{1, -1, 4, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{3, 4\}$$

بنابراین تابع  $f - f^{-1}$  شامل دو زوج مرتب است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

گزینه ۱

۲

$$f^{-1} \circ g(1) = f^{-1}(g(1)) = f^{-1}(\underbrace{3 \times 1 - 1}_2) = f^{-1}(2) \xrightarrow{(1,2) \in f} f^{-1}(2) = 1$$

نکته: وقتی  $(a, b) \in f$  است، یعنی  $f(a) = b$  یا معادلاً  $f^{-1}(b) = a$  است.

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۴

گزینه ۴

۳

باتوجه به نمودار تابع  $g(x) = -f(x - 1)$  داریم:

$$g(2) = 3 \Rightarrow -f(2 - 1) = 3 \Rightarrow f(1) = -3 \Rightarrow f^{-1}(-3) = 1$$

$$g(0) = 2 \Rightarrow -f(0 - 1) = 2 \Rightarrow f(-1) = -2 \Rightarrow f^{-1}(-2) = -1$$

$$g(-2) = 0 \Rightarrow -f(-2 - 1) = 0 \Rightarrow f(-3) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = -3$$

$$g(-3) = -4 \Rightarrow -f(-3 - 1) = -4 \Rightarrow f(-4) = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = -4$$

$$f^{-1}(4) = 4 \text{ درست نیست.}$$

تساوی

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

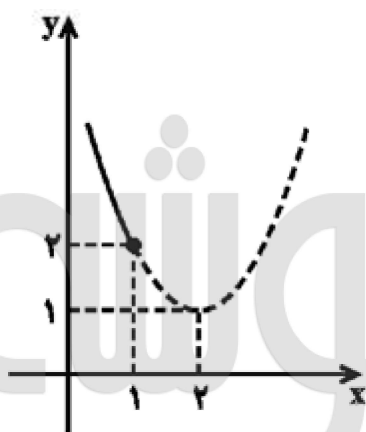
نکته:  $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha$

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ g(3) = -1 &\Rightarrow f^{-1}(g(3)) = -1 \xrightarrow{g(3)=3} f^{-1}(3) = -1 \Rightarrow f(-1) = 3 \Rightarrow (-1, 3) \in f \Rightarrow (a, b) = (-1, 3) \\ &\Rightarrow a = -1, b = 3 \Rightarrow g = \{(5, 1), (3, 3), (0, 6)\} \\ f \circ g^{-1}(6) &= f(g^{-1}(6)) = f(0) = -2 \end{aligned}$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

دامنه تابع وارون با برد تابع اصلی برابر است، پس برد تابع با ضابطه  $y = x^2 - 4x + 5$  را با شرط  $x \leq 1$  به دست می‌آوریم.  
برای این منظور، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$y = x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) + 1 \Rightarrow y = (x - 2)^2 + 1$$



همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، با شرط  $x \leq 1$ ، برد تابع بازه  $[2, +\infty)$  است که همان دامنه تابع وارون است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

راه حل اول:

می دانیم:

$$D_f = R_{f^{-1}}, \quad R_f = D_{f^{-1}}$$

بنابراین با توجه به برد تابع  $f$  به راحتی می توان فهمید کدام عدد در دامنه  $f^{-1}$  وجود ندارد.

$$D_f : x \in 1$$

$$y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} \Rightarrow f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$$

با توجه به اینکه  $\frac{3}{x-1}$  همواره مخالف صفر است، بنابراین  $f(x) \in 2$  است؛ پس در دامنه تابع  $f^{-1}$ ، ۲ وجود نخواهد داشت.

راه حل دوم:

ضابطه تابع وارون را به دست می آوریم:

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow yx - y = 2x + 1 \Rightarrow yx - 2x = y + 1$$

$$x(y-2) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow x \in 2$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

اگر  $(a, b) \in f$ ، آنگاه  $(b, a) \in f^{-1}$  است، پس داریم:

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 - \sqrt{3-2} = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow (2, 1) \in f \Rightarrow (1, 2) \in f^{-1}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

عدد ۳ ورودی  $f$  می باشد؛ بنابراین خروجی  $f^{-1}$  خواهد بود، پس:

$$f^{-1}(x) = 3 \Rightarrow \sqrt{x-2} + 1 = 3 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Rightarrow x-2 = 4 \Rightarrow x = 6$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

وقتی  $۲ < x < ۳$  باشد،  $-۳ < -x < -۲$  است و داریم:

$$[x] = ۲, [-x] = -۳ \Rightarrow f(x) = -۳x + ۲$$

برای محاسبه  $f^{-1}(-۵)$  باید  $f(x)$  را مساوی  $-۵$  قرار دهیم:

$$-۳x + ۲ = -۵ \Rightarrow ۳x = ۷ \Rightarrow x = \frac{۷}{۳} \Rightarrow f\left(\frac{۷}{۳}\right) = -۵ \Rightarrow f^{-1}(-۵) = \frac{۷}{۳}$$

توجه: اگر مقدار  $x$  بین  $۲$  و  $۳$  نمی‌شد باید "ناموجود" را انتخاب می‌کردیم.

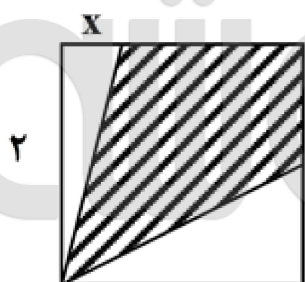
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

نکته: مساحت مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمه  $a$  و  $b$  برابر با  $\frac{1}{2}ab$  است.

نکته: اگر  $f$  تابعی وارون‌پذیر باشد، آنگاه:

$$f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha$$

اگر مساحت دو ناحیه‌ای را که هاشور ندارد از مساحت مربع کم کنیم، مساحت ناحیه هاشورخورده به دست می‌آید.



$$f(x) = ۲^۲ - \frac{1}{۲} \times ۲ \times x - \frac{1}{۲} \times ۲ \times ۲x = ۴ - ۳x$$

با فرض  $f^{-1}(۲) = \alpha$  داریم:

$$f(\alpha) = ۲ \Rightarrow ۴ - ۳\alpha = ۲ \Rightarrow ۳\alpha = ۲ \Rightarrow \alpha = \frac{۲}{۳}$$

IranTooshe.ir

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

اگر دو تابع  $f$  و  $f^{-1}$  وارون هم باشند، آنگاه:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

بنابراین:

$$f^{-1}(-5) = 4 \Rightarrow f(4) = -5$$

$$f(4) = 4^2 - 4A + 3 = -5 \Rightarrow A = 6$$

بنابراین  $f(x) = x^2 - 6x + 3$ . برای محاسبه  $f^{-1}(-2)$  خواهیم داشت:

$$f^{-1}(-2) = a \Leftrightarrow -2 = f(a)$$

$$\Rightarrow -2 = a^2 - 6a + 3 \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 1)(a - 5) = 0 \xrightarrow{x > 3} a = 5 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 5$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸

نقطه  $A$  قرنیۀ  $A'$  نسبت به خط  $x = 0$  است، پس اگر  $A'$  نقطه‌ای روی تابع  $f^{-1}(x)$  باشد، نقطه متناظرش یعنی نقطه  $A$  روی تابع  $f(x)$  است که جای طول و عرض آن عوض شده است؛ بنابراین:

$$f(x) = x^3 + x + 2 \xrightarrow{x=0} y = 2 \Rightarrow A(0, 2) \Rightarrow A'(2, 0)$$

$$AA' = \sqrt{(0 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = 2\sqrt{2}$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

مختصات نقطه  $A(b, 2)$  در معادله  $2x + 5y = 8$  صدق می‌کند، پس:

$$2b + 10 = 8 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow A(-1, 2)$$

$$A(-1, 2) \in f^{-1} \Rightarrow A'(2, -1) \in f$$

$$\Rightarrow f(2) = 8 + 6 + a = 14 + a = -1 \Rightarrow a = -15$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲۰ ۱۳۹۸

نکته ۱: اگر  $f$  یک تابع یک به یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع  $f^{-1}$  کافی است، قرینه  $f$  را نسبت به خط  $y = x$  (نیمساز ربع اول و سوم) به دست آوریم.

: برای به دست آوردن ضابطه وارون یک تابع یک به یک مانند  $f$ ، در معادله  $y = f(x)$  صورت امکان  $x$  را بر حسب  $y$  حساب می‌کنیم، سپس با تبدیل  $y$  به  $x$ ،  $f^{-1}(x)$  را به دست می‌آوریم.

مطابق نکته ۱، چون این دو خط نسبت به خط  $y = x$  قرینه یکدیگر هستند، پس معکوس یکدیگرند؛ لذا به کمک نکته ۲، معکوس خط  $3x - 4y = b$  را به دست می‌آوریم:

$$3x - 4y = b \Rightarrow 3x = b + 4y \Rightarrow x = \frac{b + 4y}{3} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{b + 4x}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{b}{3}$$

از طرفی:

$$bx + ay = -16 \Rightarrow y = \frac{-bx - 16}{a} \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x - \frac{16}{a}$$

از مقایسه دو معادله خط نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{4}{3} = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -\frac{4}{3}a & (1) \\ -\frac{16}{a} = \frac{b}{3} \Rightarrow ab = -48 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری (۱) در (۲)}} -\frac{4}{3}a^2 = -48 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6 \xrightarrow{(1)} b = \pm 8$$

$$b - a = \pm 14$$

بنابراین:

نکته: اگر  $f$  تابعی وارون پذیر باشد و داشته باشیم  $f(a) = b$ ، آنگاه:  $f^{-1}(b) = a$   
 نکته: فرم کلی تابع خطی به صورت  $y = ax + b$  است.  
 فرض کنیم ضابطه تابع به صورت  $f(x) = ax + b$  باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} f(2) = 4 \Rightarrow 2a + b = 4 \\ f^{-1}(-5) = -1 \Rightarrow f(-1) = -5 \Rightarrow -a + b = -5 \Rightarrow a = 3, b = -2 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه این تابع خطی به صورت  $f(x) = 3x - 2$  است. برای به دست آوردن مقدار خواسته شده ابتدا مقدار  $f(4)$  را به دست می آوریم:

$$f(4) = 3 \times 4 - 2 = 10 \Rightarrow f^{-1}(3 + f(4)) = f^{-1}(3 + 10) = f^{-1}(13)$$

راه حل اول:

اگر فرض کنیم  $f^{-1}(13) = t$  می توان نتیجه گرفت  $f(t) = 13$ ، بنابراین:

$$3t - 2 = 13 \Rightarrow 3t = 15 \Rightarrow t = 5$$

راه حل دوم:

نکته: برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک معکوس پذیر  $f(x)$  محاسبه می کنیم و سپس با تبدیل  $y$  به  $x$ ، ضابطه  $f^{-1}(x)$  را به دست می آوریم.  
 با استفاده از نکته، معکوس تابع خطی  $f(x)$  را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} y &= 3x - 2 \Rightarrow y + 2 = 3x \Rightarrow x = \frac{y + 2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3} \\ \Rightarrow f^{-1}(13) &= \frac{13 + 2}{3} = 5 \end{aligned}$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

معادله خط گذرنده از دو نقطه  $(-1, 2)$  و  $(1, 4)$  را می نویسیم.

$$m = \frac{4 - 2}{1 + 1} = 1, y - 2 = 1(x + 1) \Rightarrow y = x + 3 \Rightarrow f(x) = x + 3$$

ضابطه  $f^{-1}$  را به دست می آوریم:

$$y = x + 3 \Rightarrow x = y - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 3$$

دامنه  $f^{-1}$  همان برد  $f$  است.

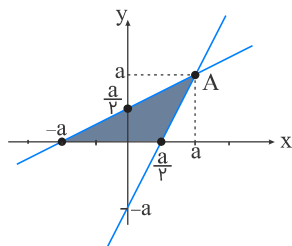
$$D_{f^{-1}} = R_f = [f(-1), f(3)] = [2, 6]$$

$$D_g = D_{f+f^{-1}} = D_f \cap D_{f^{-1}} = [-1, 3] \cap [2, 6] = [2, 3]$$

$$g(x) = (x + 3) + (x - 3) = 2x$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۷

ابتدا نقطه تقاطع دو تابع  $f$  و  $f^{-1}$  را می‌یابیم:



$$y = f(x) = 2x - 6 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+6}{2}$$

$$2x - 6 = \frac{x+6}{2} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow A(6, 6)$$

$$S = \frac{\frac{3}{2} \times 6}{2} = 27 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

$$f(x) = 2x - 6$$

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین نمودار تابع  $f(x)$  محور طول‌ها را در  $x = 3$  قطع می‌کند.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲۰ ۱۳۹۸

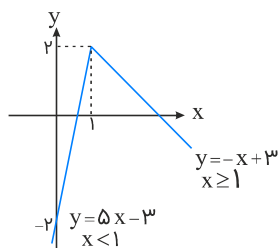
ایران توشه  
IranTooshe.ir





تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق، نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} 2x - 3x + 3 = -x + 3 & ; x \geq 1 \\ 2x + 3x - 3 = 5x - 3 & ; x < 1 \end{cases}$$



پس تابع در بازه  $(-\infty, 1]$  صعودی است و داریم:

$$y = 5x - 3 \xrightarrow{\text{وارون}} x = 5y - 3 \Rightarrow y = \frac{x + 3}{5}$$

که باتوجه به برد تابع اولیه در این بازه، دامنه تابع معکوس  $x \leq 2$  است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

گزینه ۴

۱۹

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - \sqrt{(x-1)^2} = x - |x-1|$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} x - x + 1 = 1 & ; x > 1 \\ x + x - 1 = 2x - 1 & ; x \leq 1 \end{cases}$$

تابع به ازای  $x > 1$  یک تابع ثابت و در نتیجه معکوس ناپذیر است. بنابراین معکوس تابع را به ازای  $x \leq 1$  محاسبه می‌کنیم:

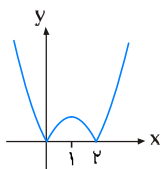
$$f^{-1} \text{ دامنه } f \text{ برد } : x \leq 1 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow 2x - 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow f^{-1} \text{ دامنه } = \{x | x \leq 1\}$$

$$y = 2x - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} ; x \leq 1$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۷



مطابق شکل این تابع در  $[2, +\infty)$  صعودی است (البته در  $(0, 1)$  هم صعودی است ولی بزرگ‌ترین بازه نیست).

$$\begin{aligned} x > 2 : y &= x^2 - 2x \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1 - 1 \\ &= (x - 1)^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = (x - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y + 1} = x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 1} \end{aligned}$$

از طرفی  $\sqrt{y + 1} = x - 1 \xrightarrow{x \geq 2} \sqrt{y + 1} \geq 1 \Rightarrow y \geq 0$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۷

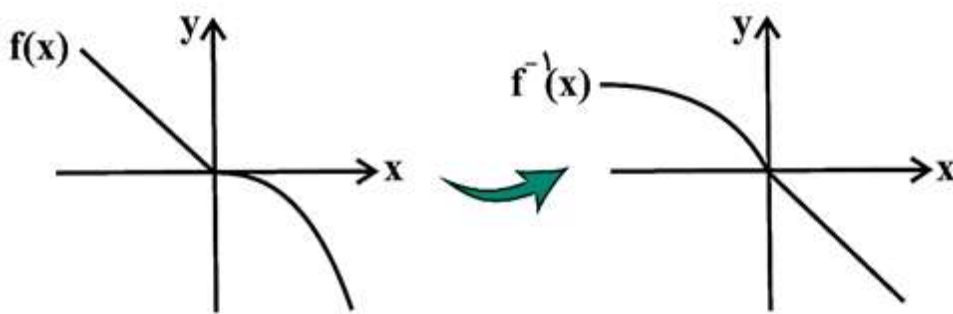
$$y = \begin{cases} x & ; x < 0 \\ 3x & ; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع وارون} : y = \begin{cases} x & ; x < 0 \\ \frac{1}{3}x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تابع وارون} : y = \frac{2x - |x|}{3}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

نمودار  $f$  و  $f^{-1}$  نسبت به خط  $y = x$  متقارن هستند.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; x \geq 0 \\ |x| & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$



قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

برای یافتن وارون تابع  $f$  باید  $x$  را بر حسب  $y$  به دست آوریم:

$$x^2 - 6x + 3 = y \xrightarrow{+6} x^2 - 6x + 9 = y + 6 \\ \Rightarrow (x - 3)^2 = y + 6 \Rightarrow x - 3 = \pm \sqrt{y + 6}$$

باتوجه به دامنه داده شده،  $x$  منفی است، پس  $x - 3$  نیز منفی است؛ پس در عبارت بالا فقط علامت منفی پشت رادیکال مورد قبول است:

$$x - 3 = -\sqrt{y + 6} \Rightarrow x = 3 - \sqrt{y + 6} \quad (*)$$

چون طبق دامنه محدود شده داریم  $x < 0$ ، پس:

$$3 - \sqrt{y + 6} < 0 \Rightarrow 3 < \sqrt{y + 6} \Rightarrow 9 < y + 6 \Rightarrow y > 3 \quad (**)$$

روابط  $(*)$  و  $(**)$  ضابطه و دامنه وارون تابع  $f$  را مشخص می کنند:

$$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x + 6} ; x > 3$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

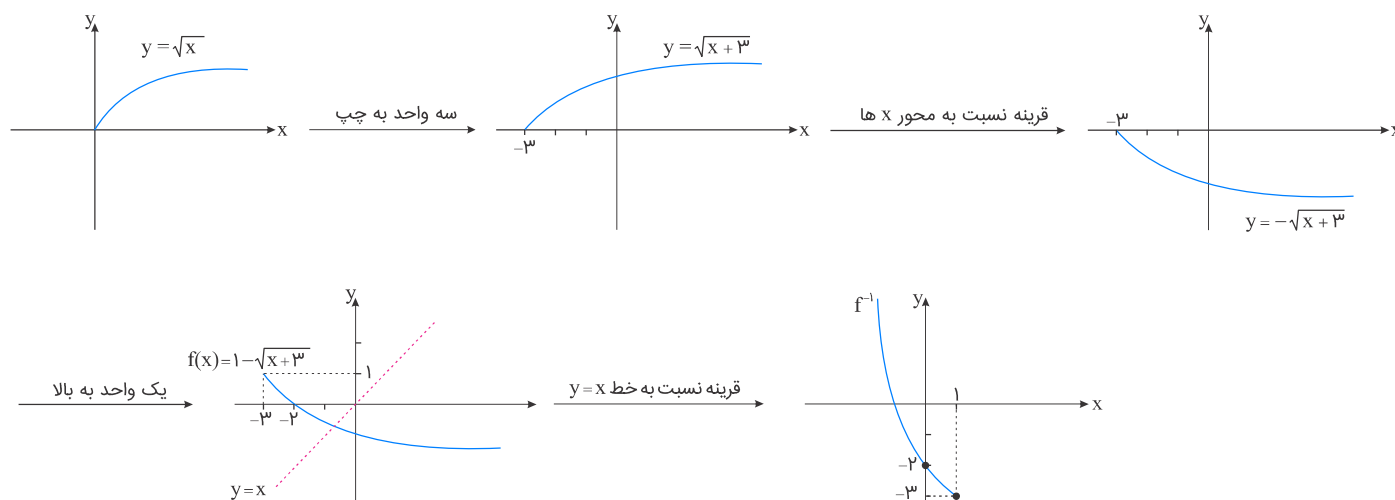
$$f(x) = y = x + \sqrt{x} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4y + 1}{4} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{4y + 1}}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{\sqrt{4y + 1} - 1}{2}\right)^2$$

$$\xrightarrow[\text{عوض می کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را}} y = \left(\frac{\sqrt{4x + 1} - 1}{2}\right)^2 = f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

نمودار تابع  $f(x) = 1 - \sqrt{x+3}$  را با استفاده از انتقال نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  رسم می‌کنیم و سپس نمودار را نسبت به خط  $y = x$  قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع  $f^{-1}$  به دست آید:



پس  $f^{-1}$  از ناحیه اول عبور نمی‌کند.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸

ابتدا معکوس تابع  $y = \frac{1}{x} \left( x - \frac{1}{x} \right)$  را می‌یابیم.

$$y = \frac{1}{x} \left( x - \frac{1}{x} \right) \Rightarrow 2y = \frac{x^2 - 1}{x} \Rightarrow x^2 - 2xy - 1 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{درجه ۲}]{\text{حل معادله}} x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{x > 0 \text{ چون}} x = \sqrt{y^2 + 1} + y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \\ f^{-1}\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{-1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - f^{-1}\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

در تابع وارون می‌دانیم که:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

در این مسئله  $f$  و  $g$  وارون یکدیگرند. با انتخاب دو عدد مناسب داریم:

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0 \Rightarrow g(1) = 0 \Rightarrow \frac{1+b}{2} = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$g(2) = \frac{2 + (-1)}{2 \times 2} = \frac{1}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \Rightarrow \frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = 2 \Rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{5}{4} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a + b = 2$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

$$D_f = [2, +\infty)$$

$$\sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{x-2} \geq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{1 + \sqrt{x-2}} \geq \sqrt[3]{1} = 1 \Rightarrow R_f = [1, +\infty)$$

$$y = f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x-2}} \Rightarrow y^3 = 1 + \sqrt{x-2}$$

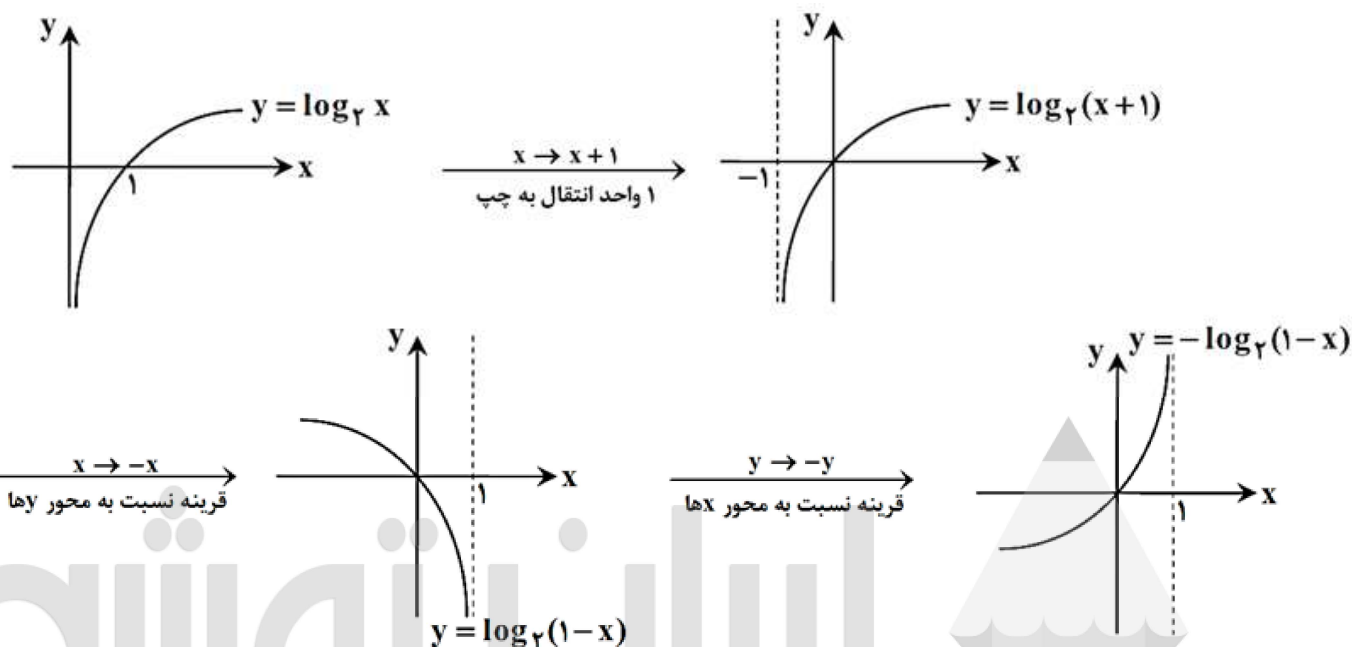
$$\Rightarrow (y^3 - 1)^2 = x - 2 \Rightarrow y^6 - 2y^3 + 1 = x - 2$$

$$\Rightarrow x = y^6 - 2y^3 + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{6}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 3 \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = [1, +\infty)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۸

ابتدا ضابطه  $f^{-1}(x)$  را به دست می آوریم.

$$y = 1 - 2^{-x} \Rightarrow 2^{-x} = 1 - y \Rightarrow -x = \log_2^{(1-y)} \\ \Rightarrow x = -\log_2^{(1-y)} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\log_2^{(1-x)}$$



گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

نکته: اگر  $f$  تابعی صعودی باشد، داریم:  $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

نکته: اگر  $a \in D_{f^{-1}}$ ، آنگاه:  $f(f^{-1}(a)) = a$

باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$f^{-1}(3x - 2) \geq 0 \xrightarrow{f \text{ صعودی}} f(f^{-1}(3x - 2)) \geq f(0) \Rightarrow 3x - 2 \geq 4 \Rightarrow 3x \geq 6 \Rightarrow x \geq 2$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

چون  $f(x)$  یک خط است و هر خطی یک به یک است، بنابراین معکوس پذیر نیز هست، پس داریم:

$$y = f(x) = 3 - 2x \Rightarrow y - 3 = -2x \Rightarrow x = \frac{3 - y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3 - x}{2}$$

در نتیجه داریم:

$$f^{-1}(2x^2 + 3) - x = \frac{3 - (2x^2 + 3)}{2} - x = \frac{-2x^2 - 2x}{2}$$

دامنه تابع داده شده برابر است با:

$$f^{-1}(2x^2 + 3) - x \geq 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 - 2x}{2} \geq 0 \Rightarrow -2x^2 - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x \leq 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} x & & -1 & 0 & \\ \hline 2x^2 + 2x & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۵ ۲

برای اینکه تابع  $y = (f - f^{-1})(x)$  بالای محور  $x$  ها قرار بگیرد، باید:

$$(f - f^{-1})(x) > 0 \Rightarrow f(x) - f^{-1}(x) > 0 \Rightarrow f(x) > f^{-1}(x)$$

در بازه ای نمودار  $f$  بالاتر از نمودار تابع  $f^{-1}$  قرار دارد که نمودار  $f$  بالای خط  $y = x$  باشد در نتیجه برای حل نامعادله فوق، کافی است  $f(x) > x$  را حل کنیم:

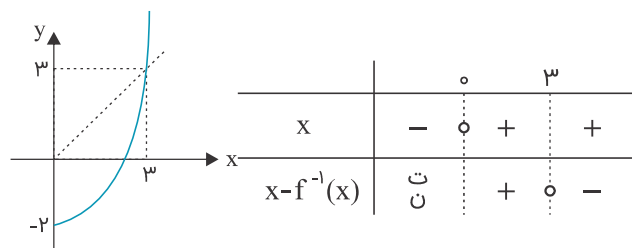
$$f(x) > x \Rightarrow x^3 + x + 1 > x \Rightarrow x^3 > -1 \Rightarrow x > -1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۶ ۱۵

نمودار  $f^{-1}(x)$  را رسم می کنیم:

جدول تعیین علامت را رسم می کنیم (ت.ن: تعریف نشده):

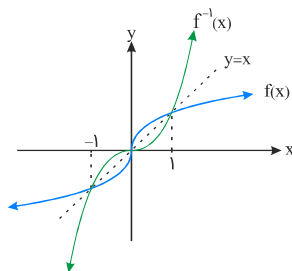
در بازه  $[0, 3]$  زیر رادیکال نامنفی بوده و مخرج کسر نیز صفر نمی شود؛ بنابراین این بازه دامنه تابع است.



قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۷ ۱۲

ابتدا نمودار  $f^{-1}$  را رسم می‌کنیم:

نمودار را در چهار بازه زیر بررسی می‌کنیم:



| بازه                               | $x = -1$<br>$(-\infty, -1)$ | $x = 0$<br>$(-1, 0)$ | $x = 1$<br>$(0, 1)$ | $x = 1$<br>$(1, +\infty)$ |
|------------------------------------|-----------------------------|----------------------|---------------------|---------------------------|
| رابطه                              |                             |                      |                     |                           |
| $f(x) - f^{-1}(x)$                 | +                           | -                    | +                   | -                         |
| $x^2 - 1$                          | +                           | -                    | -                   | +                         |
| $\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x^2 - 1}$ | +                           | +                    | -                   | -                         |
|                                    | تعریف نشده                  |                      | تعریف نشده          |                           |

می‌دانیم که زیر رادیکال همواره باید نامنفی باشد؛ بنابراین

دامنه تابع  $y = \sqrt{\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x^2 - 1}}$  به صورت  $\{-1\} \cup (-\infty, 0]$  است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

چون  $f(f(x)) = x$  است، پس  $f^{-1}(x) = f(x)$ .

در تابع هموگرافیک  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر  $a = -d$  باشد، آنگاه  $f^{-1}(x) = f(x)$  پس در اینجا  $k = -2$  است:

$$f(x) = \frac{2x + 5}{x - 2}$$

$$f(k) = f(-2) = \frac{-4 + 5}{-2 - 2} = -\frac{1}{4}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

$$y = \frac{2x}{a} - b \Rightarrow ay = 2x - ab \Rightarrow x = \frac{ay}{2} + \frac{ab}{2} \Rightarrow y^{-1} = \frac{ax}{2} + \frac{ab}{2}$$

برای اینکه دو نمودار بر هم منطبق باشند، داریم:

$$y^{-1} = y \Rightarrow \frac{ax}{2} + \frac{ab}{2} = \frac{2x}{a} - b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{2}{a} \\ \frac{ab}{2} = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b \text{ هر مقدار می‌تواند باشد} \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} ; a = -2 \\ ; a = 2 \end{matrix}$$

بنابراین (۲, ۵) جواب سؤال است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸



وارون هر تابع خطی، یک تابع خطی است. وارون  $f$  را حساب می‌کنیم:

$$y = ax + 2 \Rightarrow x = \frac{y-2}{a} \xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = \frac{x-2}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{2}{a}$$

اگر  $f$  و  $f^{-1}$  در بیش از یک نقطه برخورد داشته باشند، چون هر دو توابعی خطی هستند، باید بر هم منطبق باشند؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow ax + 2 = \frac{1}{a}x - \frac{2}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{a} \\ 2 = -\frac{2}{a} \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

پس ضابطه  $f$  و  $f^{-1}$  به صورت  $f(x) = f^{-1}(x) = -x + 2$  درمی‌آید.

$$\Rightarrow f^{-1}(3) = -3 + 2 = -1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

چون تابع، معکوس خود را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده است، بنابراین  $(3, 3)$  نقطه مشترک دو تابع  $f$  و  $f^{-1}$  است:

$$\begin{cases} (1, 2) \in f \Rightarrow (2, 1) \in f^{-1} \\ (3, 3) \in f^{-1} \end{cases}$$

در نتیجه معادله تابع خطی  $f^{-1}$  برابر است با:

$$y - 1 = \frac{3-1}{3-2}(x-2) \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 3$$

برای یافتن نقطه تلاقی  $f^{-1}$  با محور  $x$ ها معادله  $f^{-1}(x) = 0$  را حل می‌کنیم:

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

چون نمودارهای دو تابع  $f$  و  $f^{-1}$  غیرمقاطعاند، الزاماً نمودار تابع خطی  $f$  موازی نیمساز ناحیه اول است، پس  $f(x) = x + b$  است.

$$f(2) = 5 \Rightarrow 2 + b = 5 \Rightarrow b = 3$$

پس  $f(x) = x + 3$  در نتیجه  $f(4) = 7$  است.

آزمایشی سنجش علوم تجربی چهارم مرحله دوم ۱۳۹۳

برای یافتن نقطه برخورد  $f(x)$  با  $f^{-1}(x)$  کافی است نقطه برخورد نمودار  $f(x)$  را با خط  $y = x$  به دست بیاوریم:

$$f(x) = x \Rightarrow \sqrt{x+a} = x$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{به توان } ۲ \\ x \geq ۰}]{x+a = x^2} \Rightarrow x^2 - x - a = ۰$$

باتوجه به اینکه  $x \geq ۰$  معادله اخیر باید دو ریشه نامنفی داشته باشد؛ بنابراین:

$$\Delta > ۰ \Rightarrow 1 + 4a > ۰ \Rightarrow a > -\frac{1}{4} \quad (*)$$

$$\text{ب) } x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \geq ۰ \Rightarrow 1 - \sqrt{1+4a} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{1+4a} \leq 1 \Rightarrow 4a \leq ۰ \Rightarrow a \leq ۰ \quad (**)$$

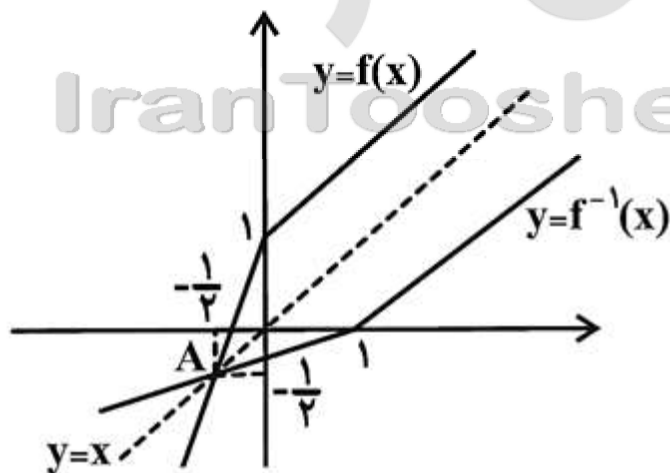
از  $(*)$  و  $(**)$  نتیجه می گیریم:

$$-\frac{1}{4} < a \leq ۰$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۷

تابع را دوضابطه ای کرده و رسم می کنیم:

$$f(x) = 2x - |x| + 1 = \begin{cases} x+1 & ; x \geq ۰ \\ 3x+1 & ; x < ۰ \end{cases}$$



نمودار تابع  $f$  را نسبت به نیمساز ناحیه های اول و سوم ( $y = x$ ) قرینه می کنیم. باتوجه به شکل مشخص است که محل برخورد دو نمودار روی خط  $y = x$  است و دارای طول منفی است؛ بنابراین:

$$x < ۰ : 3x + 1 = x \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a + b = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

ابتدا ضابطه تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2x + 4}{x - 1} \Rightarrow xy - y = 2x + 4 \Rightarrow x = \frac{y + 4}{y - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 4}{x - 2}$$

حال دو ضابطه را برابر باهم قرار می‌دهیم:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow \frac{x + 4}{x - 2} = \frac{2x + 4}{x - 1} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 - 8$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

مجموع طول نقاط برخورد برابر با  $3 = 4 + (-1)$  است.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۷

ابتدا توجه کنید که:

$$y = \sqrt[3]{4 - x^3} \Rightarrow y^3 = 4 - x^3 \Rightarrow x^3 = 4 - y^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4 - y^3}$$

بنابراین  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4 - x^3}$  و در نتیجه  $f^{-1}(x) = f(x)$ ، بنابراین نمودار توابع  $f$  و  $f^{-1}$  بر هم منطبق هستند. در نتیجه مجموعه طول نقاط مشترک این نمودارها نامتناهی است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

ابتدا ضابطه وارون تابع  $f$  را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2x - 1}{x + 2} \Rightarrow yx + 2y = 2x - 1 \Rightarrow x(y - 2) = -2y - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y + 1}{2 - y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{2 - x}$$

بنابراین باید تعداد نقاط تلاقی نمودار تابع  $y = \frac{2x + 1}{2 - x}$  و خط  $y = 3x$  را معین کنیم که برابر با تعداد جوابهای معادله  $\frac{2x + 1}{2 - x} = 3x$  است، پس:

$$2x + 1 = 6x - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

مجموع ضرایب معادله بالا برابر با صفر است؛ پس  $x = 1$  و  $x = \frac{1}{3}$  جوابهای آن هستند.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

اگر وارون تابع با محور طول‌ها در نقطه‌ای مانند  $(\alpha, 0)$  برخورد کند، این نقطه بر روی  $f(x)$  به شکل  $(0, \alpha)$  است؛ پس داریم:

$$f(0) = 5 \Rightarrow \alpha = 5$$

ولی چون دامنه  $f$  بازه  $[1, +\infty)$  است، بنابراین  $0 \notin D_f$  و لذا چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

ابتدا ضابطه وارون تابع داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{2x-1}{x-2} \Rightarrow xy - 2y - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x(y-2) = 2y-1 \Rightarrow x = \frac{2y-1}{y-2}$$

حالا جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم:  $y = \frac{2x-1}{x-2}$

مابطه وارون تابع داده‌شده به صورت  $y = \frac{2x-1}{x-2}$  درمی‌آید (بد نیست بدانید در توابع به فرم  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  اگر  $a = -d$

باشد، وارون تابع با تابع اولیه برابر است)

حالا ضابطه به‌دست‌آمده را با خط  $y = -x$  قطع می‌دهیم:

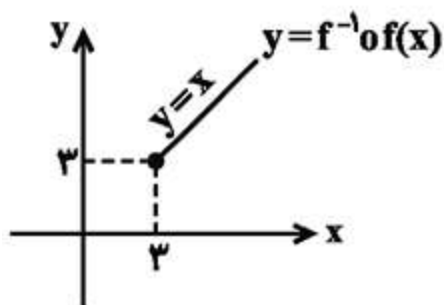
$$\frac{2x-1}{x-2} = -x \Rightarrow -x^2 + 2x = 2x-1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} A(1, -1) \\ B(-1, 1) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

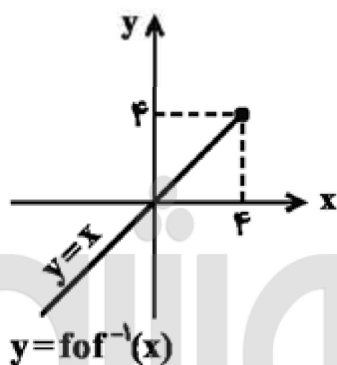
قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

پس:

می‌دانیم  $y = f^{-1} \circ f(x)$  تابعی همانی روی دامنه  $f$  است، پس نمودار  $y = f^{-1} \circ f(x)$  به شکل زیر است: ( $D_f = [3, +\infty)$ )



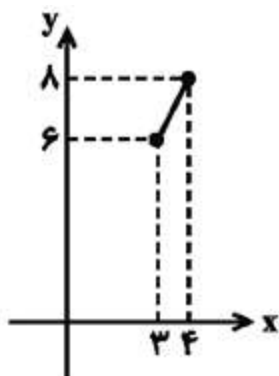
از سوی دیگر  $y = f \circ f^{-1}(x)$  تابع همانی روی برد  $f$  (دامنه  $f^{-1}$ ) است، پس نمودار  $y = f \circ f^{-1}(x)$  به شکل زیر است: ( $R_f = (-\infty, 4]$ )



دامنه  $g(x)$  اشتراک دامنه‌های  $f \circ f^{-1}(x)$  و  $f^{-1} \circ f(x)$  است؛ یعنی:  $D_g = [3, 4]$  و ضابطه  $g(x)$  نیز جمع ضابطه‌های  $f \circ f^{-1}(x) = x$  و  $f^{-1} \circ f(x) = x$  است؛ بنابراین:

$$g(x) = 2x \quad ; \quad 3 \leq x \leq 4$$

پس نمودار  $y = g(x)$  به شکل زیر است:



بنابراین طول نمودار تابع  $g(x)$  برابر است با:

$$d = \sqrt{(3-4)^2 + (6-8)^2} = \sqrt{5}$$

نکته:  $f^{-1}(f(x)) = x, x \in D_f = R_{f^{-1}}, f(f^{-1}(x)) = x, x \in D_{f^{-1}} = R_f$

$$D_f = [1, +\infty), R_f = [3, +\infty)$$

$$y = 2f(f^{-1}(x)) = 2x, x \in [3, +\infty)$$

بنابراین کافی است نمودار تابع  $y = 2x$  را به شرط  $x \geq 3$  رسم کنیم که به گزینه ۳ می‌رسیم.

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۵

$f^{-1}(x) = x + f(4) + 6$  بنابراین  $f^{-1}(x) = x + a$  است؛ یعنی:

$$x + a = x + f(4) + 6 \Rightarrow f(4) = a - 6 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = x + a \Rightarrow y = x + a \Rightarrow x = y - a \Rightarrow f(x) = x - a$$

$$\Rightarrow f(4) = 4 - a \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a - 6 = 4 - a \Rightarrow a = 5$$

$$f(4) = 5 - 6 = -1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۵

$$(g \circ f)^{-1}(2x - 1) = x \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(2x - 1)) = x$$

$$\xrightarrow{x=2} f^{-1}(g^{-1}(3)) = 2 \Rightarrow g^{-1}(3) = f(2) = 2^3 + 2 = 10$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

$$y = 2f^{-1}(x - 1) + 3 \xrightarrow{(3,7)} 7 = 2f^{-1}(2) + 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 2$$

روی نمودار  $(1, 2)$  قرار دارد.  $f$  یک به یک است؛ بنابراین وجود دارد  $f(x + 1)$  نیز یک به یک است و هیچ نقطه دیگری با عرض ۲ ندارد. در نتیجه  $(3, 2)$  قطعاً روی نمودار  $y = f(x + 1)$  قرار ندارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

تابع  $f$  را به صورت  $f(x) = ax + b$  در نظر می‌گیریم؛ بنابراین داریم:

$$f(ax + b) = a(\lambda x - 1) + b - 5 \Rightarrow a + 3b = -5 \quad (1)$$

$$f^{-1}(3) = 5 \Rightarrow f(5) = 3 \Rightarrow 5a + b = 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a = 1, b = -2 \Rightarrow f(x) = x - 2$$

$$\xrightarrow{f(2)=m} m = 2 - 2 = 0$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

$$g^{-1}(-3) = a \Rightarrow g(a) = -3 \Rightarrow 2 - 3f(5a - 1) = -3$$

$$\Rightarrow f(5a - 1) = \frac{5}{3} \Rightarrow 5a - 1 = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

$$f^{-1}(g(3a)) = 3 \Rightarrow f(3) = g(3a) \Rightarrow 6 = 3a + \sqrt{3a}$$

$$\Rightarrow 6 - 3a = \sqrt{3a} \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{6-3a \geq 0} 36 + 9a^2 - 36a = 3a$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 13a + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{4}{3} \end{cases} \quad (\text{غ.ق.ق.}, 0 \leq a \leq 2)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-2x} \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow (1, -2) \in f^{-1}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم  $f(-2) = 1$  است. چون  $f(g^{-1}(a)) = 1$  است، در نتیجه  $g^{-1}(a) = -2$  بوده و از آنجا  $a = g(-2)$  می‌شود و باتوجه به نمودار  $a = -1$  است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$(f \circ g)^{-1}(2x - 4) = \frac{x}{2} \Rightarrow (g^{-1} \circ f^{-1})(2x - 4) = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(2x - 4)) = \frac{x}{2} \quad (*)$$

محل برخورد نمودار وارون تابع  $f(x)$  با محور  $y$ ها، همان  $f^{-1}(0)$  است؛ پس کافی است در رابطه  $(*)$   $x$  را ۲ قرار دهیم:

$$\xrightarrow{x=2} g^{-1}(f^{-1}(2(2) - 4)) = \frac{2}{2} \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(0)) = 1 \xrightarrow{f^{-1}(0)=\alpha} g^{-1}(\alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = g(1) \xrightarrow{g(x)=2x^3+1} \alpha = 2(1)^3 + 1 = 2 + 1 = 3 \xrightarrow{\alpha=f^{-1}(0)} f^{-1}(0) = 3$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

ابتدا معکوس تابع  $f(x) = 2^{x+1}$  را می‌یابیم:

$$f(x) = 2^{x+1} \Rightarrow y = 2^{x+1} \Rightarrow \log_2 y = \log_2 2^{x+1}$$

$$\Rightarrow \log_2 y = x + 1 \Rightarrow x = \log_2 y - 1 = \log_2 y - \log_2 2 = \log_2 \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x}{2}$$

برای آنکه ترکیب  $g \circ f^{-1}$  قابل انجام باشد، باید دامنه  $g \circ f^{-1}$  را بیابیم:

$$D_{g \circ f^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} | f^{-1} \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) | f^{-1} \in D_g\}$$

دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{6 - 2x}$  برابر است با:

$$6 - 2x \geq 0 \Rightarrow 6 \geq 2x \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_g = \{x | x \leq 3\}$$

بنابراین:

$$f^{-1} \in D_g \Rightarrow \log_2 \frac{x}{2} \leq 3 \Rightarrow \frac{x}{2} \leq 8 \Rightarrow x \leq 16$$

$$D_{g \circ f^{-1}} = \{x \in (0, +\infty) | x \leq 16\}$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f^{-1}} = (0, +\infty) \cap (-\infty, 16] = (\underbrace{0}_a, \underbrace{16}_b] \Rightarrow \max(b - a) = 16 - 0 = 16$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۶



$$(f \circ g^{-1})(x) = \sqrt[3]{2x^5 + 1} \Rightarrow g^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt[3]{2x^5 + 1})$$

$$\Rightarrow x = (g \circ f^{-1})(\sqrt[3]{2x^5 + 1})$$

اگر فرض کنیم  $\sqrt[3]{2x^5 + 1} = t$ ، آنگاه  $x = \sqrt[5]{\frac{t^3 - 1}{2}}$  خواهد بود.

$$(g \circ f^{-1})(t) = \sqrt[5]{\frac{t^3 - 1}{2}} \Rightarrow (g \circ f^{-1})(x) = \sqrt[5]{\frac{x^3 - 1}{2}}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۶

$$f(x) = x + 2 = y \Rightarrow x = y - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$$

$$g(f^{-1}(x)) = 0 \Rightarrow g(x - 2) = 0 \Rightarrow 2(x - 2)^2 - \lambda(x - 2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 4x + 4) - \lambda x + 16 + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 16x + 25 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta > 0} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \lambda$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۴

$$(g \circ f^{-1})^{-1} = f \circ g^{-1}$$

$$g^{-1} = \{(-3, 1), (2, 3), (1, 4)\}$$

$$f = \{(0, -1), (1, 2), (-2, 3), (3, 1), (2, 5)\} \Rightarrow f \circ g^{-1} = \{(-3, 2), (2, 1)\}$$

$$R_{f \circ g^{-1}} = \{1, 2\} \Rightarrow 2 + 1 = 3$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۵

۱ عبارت  $P(x) = ax^2 + bx^3 + 2$  بر  $x - 1$  بخش پذیر و باقی مانده تقسیم آن بر  $x + 1$  برابر ۴ است. مقدار  $b$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۲ اگر چندجمله ای  $f(x) = ax^4 - 2x^2 - 1$  بر  $x + 1$  بخش پذیر باشد، معادله  $f(x) = 0$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳ اگر چندجمله ای  $x^3 + ax^2 - (b - 1)x - b$  بر  $x + 3$  و  $x - 2$  بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم آن بر  $x + 4$  کدام است؟

- (۱) -۱۴ (۲) ۳۴ (۳) ۳۸ (۴) -۱۸

۴ تابع اکیداً صعودی  $y = f(x)$  مفروض است. اگر باقیمانده تقسیم چندجمله ای  $f(x)$  بر  $x - 1$  و  $x + 2$  به ترتیب  $a - 2$  و  $a + 1$  باشد،  $a$  کدام می تواند باشد؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۵ باقی مانده تقسیم چندجمله ای  $x^5 + kx^4 + 2x^3 - 5x + 2$  بر  $x^0 + x - 1$  برابر با -۴ است. باقی مانده تقسیم این چندجمله ای بر  $x^2 - x - 2$  کدام است؟

- (۱)  $2x - 4$  (۲)  $-2x + 4$  (۳)  $2x + 4$  (۴)  $-2x - 4$

۶ باقی مانده تقسیم عبارت  $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6) + x$  بر  $x^2 + 7x$  کدام است؟

- (۱) ۷۲۱ (۲)  $721 - x$  (۳)  $720 - x$  (۴)  $720 + x$

۷ اگر چندجمله ای  $mx + n + 3x^3 - x^4$  بر  $x^2 - 5x + 6$  بخش پذیر باشد،  $m + n$  کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) -۱۶ (۴) -۳۲

۸ اگر  $k(x)$  خارج قسمت تقسیم  $x^5 + x^2 - 3x + 4$  بر  $x - 1$  باشد، مقدار  $k(-1)$  چقدر است؟

- (۱) ۲  
(۲) -۲  
(۳) ۵  
(۴) -۵

۹ اگر عبارت  $3 - 4x + ax^2 + 9x^3 - x^6$  بر  $x - 3$  بخش پذیر باشد، مجموع ضرایب جملات خارج قسمت آن کدام است؟

- (۱) -۱  
(۲) -۴  
(۳) ۱  
(۴) ۴

۱۰ اگر باقی مانده تقسیم  $x - b + ax^3 - x^6$  بر  $x^2 + 1$  برابر  $4x - 1$  باشد، باقی مانده تقسیم  $ax^2 + bx$  بر  $x + 1$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

۱۱ اگر چندجمله ای  $f(x - 1)$  بر  $x - 9$  بخش پذیر باشد، چندجمله ای  $f(x^3)$  بر کدام عبارت همواره بخش پذیر است؟

- (۱)  $x - 4$   
(۲)  $x - 8$   
(۳)  $x - 2$   
(۴)  $x + 4$

۱۲ اگر  $f(2x - 1) = x^2 + x + 1$  باشد، باقی مانده  $f(x)$  بر  $x^2 - 1$  کدام است؟

- (۱)  $x - 2$   
(۲)  $x + 2$   
(۳)  $x - 1$   
(۴)  $x + 1$

۱۳ اگر باقی مانده تقسیم عبارت  $p(x)$  بر  $x^2 + 3x + 2$ ،  $2x + 1$  باشد، باقی مانده تقسیم عبارت  $p(x - 1) - p(x - 2)$  بر  $x$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۱۴ اگر باقی مانده تقسیم چندجمله ای  $f(x)$  بر  $x - 1$  و  $x - 2$  به ترتیب ۳ و -۱ باشد، باقی مانده تقسیم  $g(x) = x^2 f(x) - 2x + 1$  بر  $x^2 - 3x + 2$  کدام است؟

- (۱)  $11 - 9x$   
(۲)  $7 - 4x$   
(۳)  $7 + 4x$   
(۴)  $11 + 9x$

۱۵ در تجزیه عبارت  $x^6 - 64$  به فرم  $(x + 2)p(x)$ ، اگر  $A$  مجموع ضرایب منفی و  $B$  مجموع ضرایب مثبت  $p(x)$  باشد،  $2B - A$  کدام است؟

- (۱) ۴۲  
(۲) ۶۲  
(۳) ۷۴  
(۴) ۸۴

۱۶ اگر  $1 - x^{200} = (1 + x)f(x)$ ، باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x + 1$  کدام است؟

(۱)  $-200$  (۲)  $100$

(۳)  $-100$  (۴)  $200$

۱۷ عبارت  $x^{30} + 1$  بر کدامیک از عبارت‌های زیر بخش‌پذیر نیست؟

(۱)  $x^5 + 1$  (۲)  $x^6 + 1$

(۳)  $x^{10} + 1$  (۴)  $x^2 + 1$

۱۸ چندجمله‌ای  $x^6 + 64$  بر  $x^2 + mx + n$  بخش‌پذیر است. مقدار  $m + n$  کدام است؟

(۱)  $16$  یا  $24$  (۲)  $24$  یا  $-16$

(۳)  $4$  یا  $12$  (۴)  $12$  یا  $-4$

ایران توشه  
IranTooshe.ir



گزینه ۴

۱

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

طبق صورت سؤال باید  $P(1) = 0$  و  $P(-1) = 4$  باشد، پس:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \Rightarrow a(1)^2 + b(1)^3 + 2 = 0 \Rightarrow a + b = -2 \\ P(-1) = 4 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1)^3 + 2 = 4 \Rightarrow a - b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

گزینه ۲

۲

چون  $f(x)$  بر  $x + 1$  بخش پذیر است، پس:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow a - 2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 2x^3 - 1$$

معادله را می توانیم با تغییر متغیر  $x^2 = t$  به شکل  $3t - 2t^2 - 1$  در نظر بگیریم. در این معادله  $\Delta > 0$  و  $P < 0$ ، پس یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است؛ بنابراین  $x^2$  می تواند برابر یک مقدار مثبت قرار گیرد و در این صورت معادله دو ریشه دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

گزینه ۴

۳

واضح است که  $f(-3) = f(2) = 0$ ، بنابراین:

$$f(-3) = 0 \Rightarrow 9a + 2b = 30 \quad (1)$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 4a - 3b = -10 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} 9a + 2b = 30 \\ 4a - 3b = -10 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 6$$

حال باقی مانده تقسیم این چندجمله ای بر  $x + 4$  با داشتن مقادیر  $a$  و  $b$  محاسبه می کنیم.

$$r = f(-4) \Rightarrow r = -64 + 32 + 20 - 6 \Rightarrow r = -18$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x - 1$  و  $x + 2$  به ترتیب برابر  $f(1)$  و  $f(-2)$  می‌باشد.

$$f(1) = a - 2, \quad f(-2) = 2a + 1$$

از طرفی تابع  $y = f(x)$  اکیداً صعودی است، بنابراین داریم:

$$-2 < 1 \Rightarrow f(-2) < f(1)$$

$$\Rightarrow 2a + 1 < a - 2 \Rightarrow a < -3$$

باتوجه به گزینه‌ها  $a$  می‌تواند  $-4$  باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

باقی‌مانده تقسیم  $f(x) = x^{10} + kx^8 + 2x^3 - 5x + 2$  بر  $x - 1$  برابر  $-4$  است. پس:

$$f(1) = -4 \Rightarrow 1 + k + 2 - 5 + 2 = -4 \Rightarrow k = -4$$

باقی‌مانده تقسیم  $f$  بر  $x^2 - x - 2$  عبارتی حداکثر از درجه یک است:

$$f(x) = (x^2 - x - 2)g(x) + \underbrace{ax + b}_{\text{باقی‌مانده}}$$

با جایگذاری ریشه‌های مقسوم‌علیه یعنی  $x = 2$  و  $x = -1$  داریم:

$$x = -1 : f(-1) = 0 - a + b \Rightarrow +1 - 4 - 2 + 5 + 2 = -a + b \\ \Rightarrow -a + b = 2 \quad (1)$$

$$x = 2 : f(2) = 0 + 2a + b \Rightarrow 2^{10} - 2^{10} + 16 - 10 + 2 = 2a + b \\ \Rightarrow 2a + b = 8 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a = 2, b = 4$$

$$\Rightarrow r(x) = ax + b = 2x + 4$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

$$f(x) = (x^2 + \gamma x)Q(x) + ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(0) = b \\ f(-\gamma) = -\gamma a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma^2 \circ = b \\ \gamma^2 \circ = -\gamma a + b \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow R(x) = x + \gamma^2 \circ$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۷

اگر چندجمله‌ای  $P(x) = x^3 - 3x^2 + mx + n$  بر  $(x-2)(x-3)$  بخش پذیر باشد، آنگاه  $P(2) = 0$  و  $P(3) = 0$  بنابراین:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 16 - 24 + 2m + n = 0$$

$$P(3) = 0 \Rightarrow 27 - 27 + 3m + n = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 8 \\ 3m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -8, n = 24 \Rightarrow m + n = +16$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۷

$$x^5 + x^2 - 3x + 4 = (x-1)k(x) + R$$

اگر  $x=1$  در مقسوم جایگزین کنیم،  $R$  به دست می آید:

$$x=1 \Rightarrow R = f(1) = 1 + 1 - 3 + 4 = 3$$

حال در رابطه اولیه به جای  $x$  مقدار  $-1$  را قرار می دهیم:

$$(-1) + 1 + 3 + 4 = (-2)k(-1) + 3 \Rightarrow 7 = (-2)k(-1) + 3 \Rightarrow k(-1) = -2$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴

عبارت  $f(x) = x^6 - 9x^4 + ax^2 + 4x - 3$  بر  $(x - 3)$  در صورتی بخش پذیر است که  $f(3) = 0$  باشد.

$$f(3) = 3^6 - 9 \times 3^4 + 9a + 12 - 3 = 3^6 - 3^2 \times 3^4 + 9a + 9 = 0 \\ \Rightarrow 9a + 9 = 0 \Rightarrow a = -1$$

اگر خارج قسمت را  $Q(x)$  در نظر بگیریم، کافی است  $Q(1)$  را محاسبه کنیم:

$$x^6 - 9x^4 - x^2 + 4x - 3 = (x - 3)(Q(x)) \\ x = 1 \Rightarrow (1 - 9 - 1 + 4 - 3) = (-2)(Q(1)) \\ \Rightarrow -8 = -2Q(1) \Rightarrow Q(1) = 4$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۷

$$x^6 - ax^3 + x - b = (x^2 + 1)Q(x) + 4x - 1$$

$$\xrightarrow{x^2=-1} (-1)^2 - a(-1)x + x - b = 0 + 4x - 1 \Rightarrow (a+1)x + 1 - b = 4x - 1$$

در صورتی تساوی فوق برقرار خواهد بود که:

$$a + 1 = 4, \quad 1 - b = -1 \Rightarrow a = 3, \quad b = 2$$

$$\Rightarrow f(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) = 1 = R \quad (\text{باقی مانده تقسیم } ax^2 + bx \text{ بر } x + 1)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

$$f(x - 1) = (x - 9)Q(x)$$

با تبدیل  $u = x - 1$ ، داریم:

$$f(u) = (u - 8)Q(u + 1)$$

حال با تبدیل  $u = y^3$ ، داریم:

$$f(y^3) = (y^3 - 8)Q(y^3 + 1) \Rightarrow f(y^3) = (y - 2)(y^2 + 2y + 4)Q(y^3 + 1)$$

بنابراین  $f(y^3)$  همواره بر  $y - 2$  بخش پذیر است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۶



راهحل اول:

نکته: اگر در تقسیم  $P(x)$  بر  $B(x)$ ، خارج قسمت  $Q(x)$  و باقی مانده  $R(x)$  باشد، آنگاه رابطه تقسیم به صورت زیر است:

$$P(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

نکته: درجه  $R(x)$  همواره از درجه  $B(x)$  کمتر است، به همین دلیل باقی مانده تقسیم یک چندجمله ای بر یک عبارت درجه دوم را می توان به صورت  $ax + b$  در نظر گرفت.  
ابتدا رابطه تقسیم را برای  $f(x)$  می نویسیم:

$$f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$$

در این رابطه داریم:

$$\begin{cases} f(1) = a + b \\ f(-1) = -a + b \end{cases} \quad (*)$$

کافی است مقادیر  $f(1)$  و  $f(-1)$  را از ضابطه  $f(2x - 1) = x^2 + x + 1$  به دست آوریم:

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 3 \\ x = 0 \Rightarrow f(-1) = 1 \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2$$

پس باقی مانده به صورت  $x + 2$  است.

راهحل دوم:

باتوجه به ضابطه داده شده، داریم:

$$R(1) = f(1) = 3$$

فقط در گزینه ۲ به ازای  $x = 1$  مقدار ۳ به دست می آید.

گزینه دو ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳۹۶

IranTooshe.ir

$$p(x) = (x + 1)(x + 2)q(x) + 2x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(x - 1) = x(x + 1)q(x - 1) + 2x - 1 \\ p(x - 2) = x(x - 1)q(x - 2) + 2x - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(x - 1) - p(x - 2) = x[(x + 1)q(x - 1) - (x - 1)q(x - 2)] + 2$$

در نتیجه باقی مانده تقسیم مورد نظر برابر با ۲ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 3, \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = -1$$

فرض می‌کنیم باقی‌مانده تقسیم  $g(x)$  بر  $x^2 - 3x + 2$  برابر  $ax + b$  باشد، آنگاه:

$$\Rightarrow x^2 f(x) - 2x + 1 = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + (ax + b)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow f(1) - 2 + 1 = a + b \Rightarrow a + b = 2 \\ x = 2 \Rightarrow 4f(2) - 4 + 1 = 2a + b \Rightarrow 2a + b = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 11 \end{cases}$$

پس باقی‌مانده  $R(x) = -9x + 11$  است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳۹۶۲

$$x^6 - 64 = (x + 2) \underbrace{(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32)}_{p(x)}$$

$$A = -2 - 8 - 32 = -42$$

$$B = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$2B - A = 42 + 42 = 84$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۸ ۴

ایران توشه  
IranTooshe.ir



نکته: باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x - a$  برابر است با:  $f(a)$   
 راه حل اول:  
 از طرفین رابطه مشتق می‌گیریم:

$$(1 - x^{200})' = ((1 + x)f(x))' \Rightarrow -200x^{199} = f(x) + (1 + x)f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-1} -200(-1)^{199} = f(-1) + 0 \Rightarrow f(-1) = 200$$

راه حل دوم:

نکته: اگر  $n$  یک عدد طبیعی زوج باشد، داریم:

$$(1 - x^n) = (1 + x)(1 - x + \dots - x^{n-1})$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$1 - x^{200} = (1 + x)(1 - x + x^2 - \dots - x^{199})$$

با جایگذاری این عبارت در عبارت صورت مسئله داریم:

$$(1 + x)(1 - x + x^2 - \dots - x^{199}) = (1 + x)f(x) \Rightarrow f(x) = 1 - x + x^2 - \dots - x^{199}$$

$$\Rightarrow f(-1) = 1 + 1 + \dots + 1 = 200$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۶

با فرض  $x^5 = t$ ، داریم  $x^{30} + 1 = t^6 + 1$  از آنجاکه عبارت  $t^6 + 1$  قابل تجزیه به عامل  $(t + 1)$  نیست، می‌توان گفت  $x^{30} + 1$  بر  $x^5 + 1$  بخش پذیر نیست. به روش مشابه می‌توان ثابت کرد که عبارت  $x^{30} + 1$  بر سایر گزینه‌ها بخش پذیر است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

$$x^6 + 64 = x^6 + 16x^2 + 64 - 16x^2$$

$$= (x^2 + 8)^2 - 16x^2 = (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x)$$

بنابراین:

$$x^2 + mx + n = \begin{cases} x^2 - 4x + 8 \\ \text{یا} \\ x^2 + 4x + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 4 \\ n = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = 12 \\ \text{یا} \\ m + n = 4 \end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۵