



فصل ۱: بخش پذیری و هم بخشیت

درس ۱: بخش پذیری در اعداد صحیح

عدد صحیح نامفر a و عدد صحیح b را در نظر بگیرید، اگر b بر a بخش پذیر باشد
نویسیم a ، عدد b را می شمارد (a عادی کند عدد b را) و با نماد $a|b$

نمایش می دهیم.

توجه: b بر a بخش پذیر است یعنی وجود دارد عدد صحیح q به طوری که $b = aq$.

$$b = aq \iff a|b$$

سوال: کدامیک از گزاره های زیر صحیح است؟

ص ۱۴ - ۲ (الف)

ص ۱۲ - ۲ (ب)

ص ۲۴ - ۲ (پ)

ع ۲ - ۵ (ت)

ص ۲ - ۵ (ث)

به طور قراردادی $\rightarrow$ ص ۵ - ۵ (ج) می پذیریم

سوال: جاهای خالی را پر کنید.

الف) $7|42 \iff 42 = 7 \times \dots$

ب) $91|13 \iff 91 = 13 \times 7$

پ) $54|-6 \iff 54 = (-6) \times (-9)$

ت) $18|0 \iff 18 = 0 \times 18$

ث) $a|1 \implies a = 1$ یا $a = -1$ *



ایران توانمند
توسعه انسانی با خلاقیت

8 مثال: n را چنان باید که $2 \mid (n-5)$.

$$n-d=r \Rightarrow n=v \quad \text{b} \quad n-d=1 \Rightarrow n=y$$

$$h-d=-r \Rightarrow h=r \quad \text{b.} \quad h-d=-1 \Rightarrow h=f$$

مثال: ثابت کنید: $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$

$$\int_{-}^{+} \text{Ans: } a^n = a^m \times a^{n-m} \xrightarrow{q=a^{n-m}} a^m | a^n$$

مثال: اگر $ab=cd$ (a, b, c, d اعداد صحیح ناصفرند) در این صورت پنج رابطه عادی در این تساوی نتیجه بگیرید.

$$a|cd, b|cd, c|ab, d|ab, ab|cd$$

15 خواص رابطه عادی کردن :

1. اگر عدد a ، عدد b را بشمارد k نگاه هر مغرب عدد b را نیز می شمارد.

$a|b \Rightarrow a|mb$ به عبارت دیگر :



ایران تونله
تونس ای برای موفقیت

3 March 2018
۵ رجب ۱۴۳۹

توجه: اگر $a \mid b$ ، نگاه میتوان رفت: $a \mid mb$ و کافیست $m=b$ (فرض شود)

$(\text{ " " } m = b^p \text{ " " " " }) \quad a | b^p \text{ (ب)}$
 $(\text{ " " } m = b^g \text{ " " " " }) \quad a | b^g \text{ (پ)}$

مثال: در صورتی که $a|b$ و $n \in \mathbb{N}$ ثابت نیز $a|b^n$.

طبیق خاصیت! داریم $a|mb$ ، کافیت به جای m عدد b^{n-1}

$$a|b^{n-1} \times b \Rightarrow a|b^n$$

سوال: آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت $ka|kb$ ؟ عکس آن چگونه؟
($k \neq 0$)

$$a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times k} kb = kaq \Rightarrow ka|kb$$

عکس این موضوع نیز صحیح است یعنی از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$.

$$ka|kb \Rightarrow kb = kaq \xrightarrow{:k} b = aq \Rightarrow a|b$$

نتیجه: اگر $a|b$ ، آنگاه می‌توان دو طرف در هر عدد صحیح نامنفی ضرب یا بر آن تقسیم کرد.

سوال: آیا از این $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت a حد اقل یکی از دو عدد b و c را عاقد می‌کند. خیر به عنوان نمونه:

$$6|3 \times 8 \not\Rightarrow 6|3 \text{ یا } 6|8$$

خلاصه: اگر m عدد طبیعی کمتر از a باشد، آنگاه کدام گزاره صحیح است؟

- الف $a|mb$
- ب $ma|b$
- پ $ma|mb$

عید نوروز (تعطیل)

۲. خاصیت نقی : $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

رابطه :

$$a|b \Rightarrow b = a q_1 \quad (1)$$

$$b|c \Rightarrow c = b q_2 \xrightarrow{(1)} c = b(a q_1) = a \underbrace{(b q_1)}_q \Rightarrow a|c$$

مثال : با استفاده از خاصیت نقی، برابر هر عدد طبیعی n ، سالج دهید :

$$a|b \Rightarrow a|b^n$$

$$a|b \wedge b|b^n \xrightarrow{\text{نقی}} a|b^n$$

۳. هرگاه عددی، دو عدد را بشمارد که نقطه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می شمارد.

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

به قدرت دیگر :

رابطه :

$$a|b \Rightarrow b = a q_1$$

$$a|c \Rightarrow c = a q_2$$

$$\left. \begin{array}{l} b = a q_1 \\ c = a q_2 \end{array} \right\} \rightarrow b \pm c = a (q_1 \pm q_2) \Rightarrow a|b \pm c$$

تست : اگر $a|۱۶$ و $a|۱۲$ ، کدام گزاره صحیح نیست ؟

$$a|۴ \quad a|۲۸ \quad a|۳۲ \quad a|۱۴$$

$$۱۶ - ۱۲ = ۴ \Rightarrow a|۴$$

$$۱۶ + ۱۲ = ۲۸ \Rightarrow a|۲۸$$

$$۱۶ \times ۲ = ۳۲ \Rightarrow a|۳۲$$

بنابراین گزینه زیر صحیح نیست یعنی « $a|۱۴$ صحیح نیست

مثال: اگر $v|ra+b$ نشان دهنده $v|ra+db$.

$$\begin{aligned} v|v(a+b) &\Rightarrow v|va+vb \\ v|ra+b &\Rightarrow v|2(ra+b) \Rightarrow v|4a+2b \end{aligned} \quad \rightarrow v|ra+db$$

سوال: آیا از آنکه $a|b+c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$ ؟

خیر به طور مثال $2|5+3$ ولی $2 \nmid 5$ و $2 \nmid 3$.

۴. اگر $a|b$ و $b \neq 0$ نگاه $|a| \leq |b|$.

اثبات:

$$a|b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{b \neq 0} q \neq 0 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} 1 \leq |q|$$

$$\xrightarrow{|a|} |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq |b|$$

نتیجه مهم: اگر $a|b$ و $b|a$ نگاه $a=\pm b$.

اثبات:

$$\begin{aligned} a|b &\Rightarrow |a| \leq |b| \\ b|a &\Rightarrow |b| \leq |a| \end{aligned} \Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$$

تست: به ازای چند مقدار صحیح m داریم $m^2+1|m$ و $m|m^2+1$ ؟
هیچ مقدار مقدار ۱ مقدار بیش از ۱ مقدار

$$m^2+1=\pm 2m \Rightarrow m^2 \mp 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m \mp 1)^2 = 0 \Rightarrow m \mp 1 = 0$$

$$\Rightarrow m = \pm 1 \rightarrow \text{به ازای ۲ مقدار برابر } m$$

نکته: اگر $a|b$ و $a \neq 0$ نگاه $b=0$ است.

است: اگر a و b دو عدد طبیعی باشند که $a \leq b$ و $b|b-a$ ، نگاه:

$$a=1 \quad a=b \quad b=1 \quad b=2$$

طبق نکته فوق، هیچ b عدد کوچکتر خود نیست $b-a$ را عاود کرده است،

پس $b-a=0$ و در نتیجه $b=a$ است.

نکته: اگر $a|c$ و $b|c$ نگاه $a|b$ و $b|c$.

به طور مثال اگر عدد بر ۴ بخش پذیر باشد آنگاه آن عدد بر ۲ و ۳ نیز بخش پذیر است.

است: هرگاه $n \in \mathbb{Z}$ و $2n|n(n-1)$ ، کدام نتیجه زیر نادرست است؟

$$2|n-1 \quad 2n|n^2-n^2 \quad n|n^2-n \quad 2|n^2-n$$

$$\begin{array}{l} 2n|n(n-1) \xrightarrow{\text{نکته فوق}} 2|n(n-1) \Rightarrow 2|n^2-n \\ 2n|n(n-1) \xrightarrow{\text{نکته فوق}} n|n(n-1) \Rightarrow n|n^2-n \\ 2n|n(n-1) \xrightarrow{\text{طرف را در } n \text{ ضرب}} 2n|n^2(n-1) \Rightarrow 2n|n^3-n^2 \end{array}$$

لذا گزینه ۴ یعنی $2|n-1$ نادرست است زیرا به ازای $n=0$ داریم:

$$2|-1 \quad \text{که نادرست است.}$$

حل چند نمونه سوال مهم:

۱- m را چنان بیابید که برای هر عدد صحیح n داشته باشیم $n|m^2+m-2$.

می دانیم به ازای هر عدد صحیح n داریم $n|0$. پس:

$$m^2+m-2=0 \Rightarrow m=1 \quad \text{و} \quad m=-2$$

۲- اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $7m+6$ و $4m+5$ بر a بخش پذیر باشند، ثابت کنید $a=\pm 1$.

$$\begin{array}{l} a|7m+6 \xrightarrow{\times 4} a|28m+24 \\ a|4m+5 \xrightarrow{\times 7} a|28m+35 \end{array} \Rightarrow a|1 \Rightarrow |a| \leq 1$$

$$\Rightarrow |a|=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

۳- a چند مقدار طبیعی مختلف می‌تواند باشد تا به ازای حداقل یک عدد صحیح n داشته باشیم $a \mid 2n+1$ و $a \mid 4n-2$ ؟

$$\left. \begin{array}{l} a \mid 2n+1 \xrightarrow{\times d \text{ طرف را}} a \mid 10n+d \\ a \mid 4n-2 \xrightarrow{\times 2 \text{ طرف را}} a \mid 10n-2 \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1, 2$$

۴- اگر $a \mid b$ ثابت کنید:

الف) $a \mid -b$

$$a \mid b \xrightarrow{\times (-1) \text{ طرف را}} a \mid -b$$

ب) $a \mid b$

$$a \mid b \xrightarrow{\text{تعدد}} -a \mid b \wedge a \mid a \Rightarrow -a \mid a$$

پ) $a \mid -b$

$$a \mid b \xrightarrow{\times (-1)} -a \mid -b$$

۵- آیا از اینکه $a \mid b$ و $c \mid d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت $a+c \mid b+d$ ؟

خیر به طور مثال $2 \mid 8$ و $3 \mid 6$ ولی $2+3 \nmid 8+6$ یعنی $5 \nmid 14$

۶- اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ نشان دهید $ac \mid bd$.

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow b = a q_1 \\ c \mid d \Rightarrow d = c q_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\times} bd = ac (q_1 q_2) \Rightarrow ac \mid bd$$

۷- اگر $a \mid b$ نشان دهید $a^n \mid b^n$. (توجه: عکس این موضوع نیز صحیح است، یعنی می‌توان از دو طرف ریشه n ام گرفت)

$$a \mid b \Rightarrow b = a q_1 \Rightarrow b^n = (a q_1)^n \Rightarrow b^n = a^n \underbrace{q_1^n}_{q_2} \Rightarrow a^n \mid b^n$$

۸- اگر k ای در $\mathbb{Z}$ باشد که داشته باشیم $a \mid k+1$ ثابت کنید:
 $2d \mid 14k^2 + 28k + 6$

$$\begin{aligned} a \mid k+1 & \xrightarrow{\times 2} 2a \mid 2k+2 \\ & \xrightarrow{+} 2d \mid 14k^2 + 28k + 6 \\ & \xrightarrow{\times a} 2d \mid 20k + a \end{aligned}$$

۹- درستی یا نادرستی گزاره‌ها زیر را تعیین کنید.
 الف) $a \mid b-c \iff a \mid c-b$ درست (کافایت طرف راست در (۱۱) منطبق)
 ب) $a \mid b-c \iff a \mid b+c$ نادرست به طور مثال $3 \mid 10-1$ ولی $3 \nmid 10+1$
 پ) $a \mid b \iff a \mid ab$ درست، زیرا اگر $a \mid b$ آنگاه $a \mid ab$ یعنی $a \mid b$ و $a \mid ab$.

ت) اگر p عدد اول باشد و a عدد طبیعی به طوری که $a \mid p$ ، آنگاه $a=1$ یا $a=p$.
 درست، زیرا در اعداد طبیعی هر عدد اول فقط بر خودش و ۱ بخش پذیر است.
 توجه داشته باشیم که اگر $a \in \mathbb{Z}$ آنگاه از $a \mid p$ می‌توان نتیجه گرفت:
 $a = -p$ یا $a = p$ یا $a = -1$ یا $a = 1$

۱۰- اگر $a > 1$ و $a \mid 9k+4$ و $a \mid 5k+3$ ثابت کنید a عدد اول است.

$$\begin{aligned} a \mid 5k+3 & \xrightarrow{\times 9 \text{ طرف راست}} a \mid 45k+27 \\ a \mid 9k+4 & \xrightarrow{\times 5 \text{ طرف راست}} a \mid 45k+20 \end{aligned} \Rightarrow a \mid 7 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=7$$

 اما با توجه به $a > 1$ ، باید $a=7$ باشد پس a عدد اول است.

۱۱- اگر a عدد طبیعی باشد و دو عدد $9k+7$ و $7k+6$ را عا داشته،
 ثابت کنید $a=1$ یا $a=d$ است.

$$\begin{aligned} a \mid 9k+7 & \xrightarrow{\times 7 \text{ طرف راست}} a \mid 63k+49 \\ a \mid 7k+6 & \xrightarrow{\times 9 \text{ طرف راست}} a \mid 63k+54 \end{aligned} \Rightarrow a \mid 5 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=d$$

۱۲- اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ نشان دهید $a \mid mb \pm nc$.

$$\begin{aligned} a \mid b & \xrightarrow{\times m \text{ طرف راست}} a \mid mb \\ a \mid c & \xrightarrow{\times n \text{ طرف راست}} a \mid nc \end{aligned} \xrightarrow{\pm} a \mid mb \pm nc$$

۱۳- اگر $m, n \in \mathbb{N}$ ، $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $a|b \Rightarrow a^m|b^n$ ، $m \leq n$

$$a|b \xrightarrow{m \text{ تکرار}} a^m|b^m \xrightarrow{b^{n-m} \text{ طرف را } \times} a^m|b^m \times b^{n-m} \Rightarrow a^m|b^n$$

۱۴- اگر $a^3|b^4$ نشان دهید:

الف) $a^4|b^{24}$

$$a^3|b^4 \xrightarrow{\text{سوال ۱۳}} (a^3)^2|(b^4)^2 \Rightarrow a^6|b^8 \xrightarrow{b^{16} \text{ طرف را } \times} a^6|b^{24}$$

ب) $a^2|b^5$

$$\left. \begin{array}{l} a^2|a^2 \text{ و } a^3|b^4 \Rightarrow a^2|b^4 \Rightarrow a|b^4 \\ a^3|b^4 \xrightarrow{b \text{ طرف را } \times} a^3|b^5 \Rightarrow a|b^5 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2|b^5$$

۱۵- m را چنان بیابید که به ازای هر عدد گویا $n \neq 0$ داشته باشیم $m^2 - 2m + 1 | n$.

$$m^2 - 2m + 1 = \pm 1 \begin{cases} m^2 - 2m = 0 \Rightarrow m = 0 \vee m = 2 \\ m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \vee m = 2 \end{cases}$$

۱۶- اگر a, b, c اعداد صحیح باشند به طوری که $c|a-b$ و $0 < b < a < b+c$ چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

ایران تونل

$$c|a-b \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$$

توضیح: برای $a-b=0$ نامساوی مفروض

۱۷- ثابت کنید:

الف) $a|b \Rightarrow a|b+ma$ (هر مضرب از a را می‌توان به طرف راست افزود)

$$\begin{array}{l} a|b \\ a|ma \end{array} \xrightarrow{+} a|b+ma$$

ب) $11|2a-4b \Rightarrow 11|2a+7b$

$$11|2a-4b \xrightarrow{+11b} 11|2a+7b$$

ج) $7|a-4b \Rightarrow 7|4a-10b$

$$7|a-4b \xrightarrow{+7(a-4b)} 7|-4a+10b \xrightarrow{+11b} 7|4a-10b$$

۱۸- اگر x, y, z سه عدد طبیعی باشند به طوریکه $xyz \mid xy + xz$

نشان دهید $z = y$

$$\xrightarrow{\div x} yz \mid y+z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \mid y+z & \xrightarrow{r_1 - y} y \mid z \\ z \mid y+z & \xrightarrow{r_1 - z} z \mid y \end{cases} \Rightarrow |y| = |z| \Rightarrow y = z$$

۱۹- ثابت کنید

الف) $a \mid a+b \Rightarrow a \mid b$

$$a \mid a+b \xrightarrow{r_1 - a} a \mid a+b-a \Rightarrow a \mid b$$

$$\left. \begin{array}{l} a \mid a+b \\ a \mid a \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid b$$

ب) $a+b \mid a \Rightarrow a+b \mid b$

$$\left. \begin{array}{l} a+b \mid a \\ a+b \mid a+b \end{array} \right\} \Rightarrow a+b \mid b$$

پ) $a-b \mid b \Rightarrow a-b \mid a+b$

$$\left. \begin{array}{l} a-b \mid b \quad (1) \\ a-b \mid a-b \end{array} \right\} \xrightarrow{+} a-b \mid a \quad (2) \xrightarrow{(1)+(2)} a-b \mid a+b$$

$$r_1: a-b \mid b \xrightarrow{\times 2} a-b \mid 2b \xrightarrow{r_1 + (a-b)} a-b \mid a+b$$

۲۰- نشان دهید هیچگاه زیر هیچ نیست:

$$a+b \mid a-b \Rightarrow a+b \mid a$$

$$a=1, b=-2: -2 \mid 1 \neq -2 \mid 1$$

نتیجه

خلاصه‌ای از قواعد گفته شده :

تعریف : $a|b \Leftrightarrow b=aq$, و $a|0$

$a|b^n$ ($n>0$) , $a|b+ma$, $a|b \Rightarrow a|mb$: قواعد مشتق

$a|b \Leftrightarrow a^m|b^m$ ($m \neq 0$) و $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n$ ($n>0$) : قواعد در طرف

خاصیت تقی : $a|b$, $b|c \Rightarrow a|c$

خواص متفرقه :

$$1. a|b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b|$$

$$2. |a| > |b| , a|b \Rightarrow b=0$$

$$3. a|b|c \Rightarrow a|c \wedge b|c$$

$$4. a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

$$5. a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م.) :

دو عدد ۱۲ و ۱۸ را در نظر بگیرید. مقسوم علیه‌های این دو عدد عبارتند از :

$$12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18$$

مقسوم علیه‌های مشترک این دو عدد ۱، ۲، ۳، ۶ است. بزرگترین آنها

۶ است، بنابراین ب.م.م دو عدد ۱۲، ۱۸، برابر ۶ است

$$6 = \text{b.m.m.}(12, 18) \text{ صحیح است.}$$

تعریف : عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b

(که حداقل یکی از آنها صفر نیست) گوئیم، هرگاه d مقسوم علیه

مشترک a و b باشد، a و b مقسوم علیه مشترک بزرگتر از d



۱۷

فروردین

6 April 2018

۱۹ رجب ۱۳۹۷

نکته : به عبارت دیگر $d = (a, b)$ ، ابرقوتها این :

$d|a$ و $d|b$ (الف)

$m \leq d \Rightarrow m|a$, $m|b$ (ب)

مثال: حاصل هر یک را بنویسید.

۹ $(12, 1) = 1$ (پ) $(5, 5) = 5$ (ب) $(21, 4) = 3$ (الف)

۱۰ $(-8, -6) = 2$ (ج) $(4, -4) = 2$ (ث) $(4, 4) = 1$ (ت)

۱۱ **توجه:** دو عدد a و b را نسبت به هم اول یوسم هرگاه $(a, b) = 1$.

۱۲ تست: اگر $x \mid 18$ و $x \mid 12$ و برابر هر $n \in \mathbb{Z}$ که $n \mid 18$ و $n \mid 12$ داشته باشیم
۱۳ x کی آن نگاه: $x=18$ $x=12$ $x=6$ $x=3$

۱۴ جواب: طبق تعریف x همان ب.م.م ۱۲، ۱۸ است. یعنی $x = (12, 18) = 6$

۱۵ تست: اگر $a \in \mathbb{Z}$ ، $a \neq 0$ ، کدام گزینه صحیح نیست؟

۱۶ $(a, -1) = 1$ $(a, -a) = |a|$ $(a, |a|) = |a|$ $(a, 0) = 0$

۱۷ گزینه صحیح نیست زیرا طبق تعریف ب.م.م همواره مثبت است. در ضمن $(a, 0) = |a|$.

۱۸ **نکته:** $a \mid b \Rightarrow (a, b) = |a|$

۱۹ **رابطه:**

$a \mid b \Rightarrow |a| \mid |b|$ **سرداول:** $|a| \mid a$

$|a| \mid |b| \Rightarrow |a| \leq |b| \Rightarrow m \mid a \Rightarrow m \mid b$ **سردوم:** $m > 0$

۲۱ با توجه به برقرار هر دو شرط، اثبات تمام است

۸ مثال: حاصل $(10! و ۱۲!)$ چیست؟

۹ $10! \mid 12! \Rightarrow (10!, 12!) = 10!$

۱۰ مثال: اگر $a^3 \mid b^4$ مقدار (a, b^2) را بیابید.

۱۱ $(a, b^2) = |a|$ **نکته:** $a^3 \mid b^4 \xrightarrow{b^2 \times a^2} a^5 \mid b^4 \xrightarrow{b^2 \times a^3} a^8 \mid b^4 \xrightarrow{b^2 \times a^6} a^{11} \mid b^4$

نکته ۲: $(a, b) = (a, b+ma) = (a+mb, b)$
 (هر مضرب از a را می توان به b اضافه یا کم کرد، همچنین هر مضرب از b را می توان به a اضافه یا کم کرد.)

سوال: حاصل $(40, 402)$ را بنویسید.

$$(40, 402) = (40, 2) = 2$$

سوال: اگر $(a, b) = d$ مقدار $(a, b+ab+3a^2)$ را بنویسید.

$$(a, b+ab+3a^2) = (a, b) = d$$

نکته ۳: $(ka, kb) = |k|(a, b)$ و $(a^n, b^n) = (a, b)^n$

سوال: در صورتی که $(2a, 2b) + (-2a, -2b) = 20$ مقدار (a^3, b^3) را بنویسید

$$(a, b) = 2 \Rightarrow (a, b) = 2 \Rightarrow 2(a, b) + 2(a, b) = 20 \Rightarrow 2(a, b) = 20 \Rightarrow (a, b) = 10$$

$$(a^3, b^3) = (a, b)^3 = 2^3 = 8$$

حل چند نمونه سوال مهم:
 ۱- اگر P عدد اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $P \nmid a$ ثابت کنید $(P, a) = 1$.

$$(P, a) = d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|P \end{cases} \Rightarrow d=P \vee d=1$$

اگر $d=P$ باشد پس طبق ① داریم $P|a$ که با فرض تناقض دارد.

پس $d=1$ است یعنی $(P, a) = 1$.

۲- با فرض $(a, b) + (-a, -b) + (2a+3b, 2a) - (a^2, b^2) = 4$ مقدار

$$(2a, 2b-6a) \text{ را تعیین کنید.}$$

$$(a, b) + (a, b) + \underbrace{(2b, 2a)}_{2(a, b)} - (a, b)^2 = 4$$

$$(a, b) = d \Rightarrow 4d - d^2 = 4 \Rightarrow d^2 - 4d + 4 = 0 \Rightarrow d = 2$$

$$(2a, 2b-6a) = (2a, 2b) = 2(a, b) = 2d = 4$$

۳- با فرض $n \in \mathbb{N}$ ، بزرگترین مقسوم علیه مشترک در عدد $2n+3$ و

$$(2n+3, 4n+6) \text{ را تعیین کنید.}$$

$$(2n+3, 4n+6) = (2n+3, 2n) = (2, n) = 1$$

۴- اگر p یک عدد اول باشد، $(a, p^r) = p$ ، $(b, p^r) = p^r$ ، حاصل (ab^r, p^r) را بیابید.

$$\begin{aligned} (a, p^r) = p &\Rightarrow p \mid a \\ (b, p^r) = p^r &\Rightarrow p^r \mid b \end{aligned} \xrightarrow{\times} p^r \mid ab^r \Rightarrow (ab^r, p^r) = p^r$$

۵- به ازای چه مقدار از a داریم $(a, 15) = \frac{a}{5}$ ؟

$$\begin{aligned} \frac{a}{5} \in \mathbb{N} &\Rightarrow a \mid 5 \\ \frac{a}{5} \mid 15 &\xrightarrow{\times 5} a \mid 75 \Rightarrow a \mid 5 \end{aligned} \Rightarrow a \mid 5 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 5$$

۶- اگر $p \neq q$ و p, q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q) = 1$.

برهان خلف: نگیریم $d \neq 1$ و $(p, q) = d$ باشند انتقاد:

$$d \mid p \wedge d \mid q \xrightarrow{d \neq 1} d = p \wedge d = q \Rightarrow p = q$$

۷- ثابت کنید:

(الف) هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اولند.

$$\text{دو برابر: } (n, n+1) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid n \\ d \mid n+1 \end{cases} \xrightarrow{d \mid 1} d = 1$$

$$(n, n+1) = (n, 1) = 1 \quad \text{دو برابر:}$$

(ب) هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اولند.

$$\text{دو برابر: } (r_{n+1}, r_{n+2}) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid r_{n+1} \\ d \mid r_{n+2} \end{cases} \xrightarrow{d \mid 2} d = 1$$

دو برابر:

$$(r_{n+1}, r_{n+3}) = (r_{n+1}, 2) = 1$$

کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م.):

دو عدد ۴ و ۶ را در نظر بگیرید، مضارب مثبت این دو عدد عبارتند از:

$$4 : 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, \dots$$

$$6 : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \dots$$

مضارب مشترک این دو عدد ... ۱۲، ۲۴، ۳۶، ... می باشد، کوچکترین آنها ۱۲ است.

بنابراین ک.م.م دو عدد ۴ و ۶ برابر ۱۲ است و می نویسیم: $[4, 6] = 12$

تعریف: عدد طبیعی C را ک.م.م دو عدد صحیح نامنفرد a و b گوئیم، هرگاه C مضرب

مشترک a و b بوده و a و b مضرب مشترک کوچکتر از C نداشته باشند.

عبارت دیگر $[a, b] = C$ اگر و تنها اگر:

$$a|C \text{ و } b|C \quad (\text{الف})$$

$$a|m \wedge b|m \Rightarrow C \leq m \quad \forall m > 0 \quad (\text{ب})$$

مثال: حاصل هر یک را بنویسید.

شهادت حضرت امام موسی کاظم (ع) (۱۸۳۱ هـ.ق)

$$[1, 8] = 8 \quad (\text{ب})$$

$$[6, 10] = 30 \quad (\text{الف})$$

$$[-2, -3] = 6 \quad (\text{ت})$$

$$[-4, 16] = 16 \quad (\text{پ})$$

$$[a, b] = [a, -b] = [-a, b] = [-a, -b] \quad \text{توجه:}$$

توجه: برای تعیین ک.م.م دو عدد ابتدا آن‌ها را به عوامل اول تجزیه کرده پس از ضرب حاصل هر مضرب مشترک و کمترین مضرب مشترک با بیشترین توان، ک.م.م را حساب کرد.

مثال: کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۳۶ و ۵۴ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

$$144 \quad 108 \quad 72 \quad 54$$

$$36 = 2^2 \times 3^2 \text{ و } 54 = 2 \times 3^3 \Rightarrow [36, 54] = 2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$$

$$a|b \Rightarrow [a, b] = |b| \quad \text{نکته:}$$

$$a|b \Rightarrow a|a \quad \text{درجته:}$$

$$a|m \wedge b|m \Rightarrow |a| \leq |m| \Rightarrow |a| \leq |m| \quad \forall m > 0 \quad \text{شرط دوم}$$

با توجه به برقرار هر دو شرط، اجابت تمام است.

مثال: اگر $(a, b) = d$ آنگاه $[a, d]$ کدام است؟

$$|ab| \quad |ad| \quad |a| \quad d$$

$$(a, b) = d \Rightarrow d|a \xrightarrow{\text{نکته ۱}} [a, d] = |a|$$

سؤال: اگر $a^2 | b^2$ ، مقدار $[a, b]$ را بیابید.

$$a^2 | b^2 \xrightarrow{b \times b} a^2 | b^4 \xrightarrow{b^2} a | b^2 \Rightarrow [a, b^2] = |b^2| = b^2$$

$$[ka, kb] = |k| \times [a, b]$$

نکته ۲: نسبت: کوچکترین مضرب مشترک بین دو عدد گسسته a و a را $|a|$ می‌گویند.

$$[2a, 5a] = |a| [2, 5] = |a| \times 10 = 10|a|$$

$$[a^n, b^n] = [a, b]^n$$

سؤال: در صورتی که $[2a, 2b] + [-a, -b] = ۸۴$ ، مقدار $[a^2, b^2]$ را

$$\text{محاسبه می‌کنیم:} \Rightarrow 2[a, b] + [a, b] = ۸۴ \Rightarrow 3[a, b] = ۸۴ \Rightarrow [a, b] = ۲۸$$

$$[a^2, b^2] = [a, b]^2 = ۲۸^2$$

سؤال: بابت سؤال نقص سؤال در صورتی که در حالت کلی صحیح نیست.

$$[2, 4] = ۱۰$$

$$[2, 4+1 \times 2] = [2, 6] = ۱۲$$

$$\Rightarrow [2, 4] \neq [2, 4+1 \times 2]$$

سؤال: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد طبیعی ۱۱ و کوچکترین مضرب مشترک آن‌ها ۶۶ است. آن دو عدد را بیابید.

$$(a, b) = ۱۱ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۱a' \\ b = ۱۱b' \end{cases}$$

$$[a, b] = [11a', 11b'] = ۱۱[a', b'] = ۶۶ \Rightarrow [a', b'] = ۶$$

$$\begin{cases} a' = 1 \Rightarrow a = ۱۱ \\ b' = 6 \Rightarrow b = ۶۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a' = 2 \Rightarrow a = ۲۲ \\ b' = 3 \Rightarrow b = ۳۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a' = 3 \Rightarrow a = ۳۳ \\ b' = 2 \Rightarrow b = ۲۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a' = 6 \Rightarrow a = ۶۶ \\ b' = 1 \Rightarrow b = ۱۱ \end{cases}$$

بنابراین آن دو عدد ۱۱ و ۶۶ یا آن دو عدد ۲۲ و ۳۳ می‌باشند.

$$\begin{array}{r} \text{مقسوم علیه} \rightarrow \\ 13 \overline{) 10} \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$$

مقسوم
خارج قسمت
باقی مانده

قضیه تقسیم: از تقسیم عدد ۱۳ بر عدد ۵ داریم:

در دوره ابتدای آموختیم بهایر تعیین قسمت تقسیم

باید تسلسل $13 = (5 \times 2) + 3$ برقرار باشد.

در حالت کلی می توان گفت:

اگر a عدد صحیح و b عدد طبیعی باشد در این صورت (با تقسیم a بر b)

اعداد صحیح q و r پیدا می شود که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ \underline{q} \\ r \end{array}$$

یعنی: $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$

همانگونه در بالا اشاره شد، a را مقسوم، b را مقسوم علیه، q را

خارج قسمت و r را باقی مانده نامند.

مثال: اگر $a = 12q - 5$ و $a, q \in \mathbb{Z}$ ، باقی مانده تقسیم a بر ۱۲ را

محاسبه کنید.

$$a = 12q - 5 = 12q - 12 + 7 = 12(q - 1) + 7 \Rightarrow r = 7$$

مثال: اگر $a = 15k - 5$ باشد، باقی مانده a بر ۳ را محاسبه کنید.

$$a = 15k - 5 = 3(5k) - 6 + 1 = 3(5k - 2) + 1 \Rightarrow r = 1$$

تست: باقی مانده تقسیم $99^{100} - 2$ بر ۹۹ کدام است؟

صفر ۱ ۳ ۴۸

$$99^{100} - 1 = 98q \Rightarrow 99^{100} - 1 \Rightarrow 98 \mid 99^{100} - 1$$

$$99^{100} - 2 = 98q - 1 = 49(2q) - 1 = 49(2q) - 49 + 48$$

$$\Rightarrow 99^{100} - 2 = 49(2q - 1) + 48 \Rightarrow r = 48$$

تست: باقی مانده تقسیم -26 بر ۵ کدام است؟

$$-26 = -5 \times 5 + 4 \Rightarrow r = 4$$

ست: اگر $n|a+1$ ، $n|b+۳$ ، و $n > ۵$ ، باقیانده تقسیم ab بر n کدام است؟
 ۱ ۲ ۳ ۴

$$n|a+1 \Rightarrow a+1 = nq_1 \Rightarrow a = nq_1 - 1$$

$$n|b+۳ \Rightarrow b+۳ = nq_2 \Rightarrow b = nq_2 - ۳$$

$$\Rightarrow ab = (nq_1 - 1)(nq_2 - ۳) = n^2q_1q_2 - ۳nq_1 - nq_2 + ۳$$

$$\Rightarrow ab = n(nq_1q_2 - ۳q_1 - q_2) + ۳ \Rightarrow r = ۳$$

۳

ست: باقیانده تقسیم a بر ۱۷ برابر ۷ است. باقیانده تقسیم $۲a+۱$ بر ۱۷ کدام است؟
 ۱ ۲ ۳ ۴

$$a = ۱۷k + ۷ \Rightarrow ۲a + 1 = ۳۴k + ۱۵$$

$$\Rightarrow ۲a + 1 = ۴(۹k) + ۱۲ + ۳ = ۴(۹k + ۳) + ۳ \Rightarrow r = ۳$$

مثال: اگر باقیانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب k و ۳ باشد، در این صورت باقیانده تقسیم عدد $(۲m - ۵n)$ بر ۱۷ را بدست آورید.

$$m = ۱۷q_1 + k \quad , \quad n = ۱۷q_2 + ۳$$

$$\Rightarrow ۲m - ۵n = ۲ \times ۱۷q_1 + ۲k - ۵ \times ۱۷q_2 - ۱۵$$

$$= ۱۷(۲q_1 - ۵q_2) - ۱۵$$

$$= ۱۷(۲q_1 - ۵q_2) - ۱۷ + ۲$$

$$= ۱۷(۲q_1 - ۵q_2 - ۱) + ۲ \Rightarrow r = ۲$$

۲

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کف قسمة تقسیم :

اگر عدد صحیحی مثل a را بر ۲ تقسیم کنیم به دو حالت زیر می‌دهد :

۱- a بر ۲ بخش پذیر باشد یعنی باقیانده صفر شود در این صورت : $a = 2k$

۲- a بر ۲ بخش پذیر نبوده و باقیانده آن ۱ شود یعنی : $a = 2k + 1$

۳- a بر ۲ بخش پذیر نبوده و باقیانده آن ۲ شود پس : $a = 2k + 2$

به عبارت دیگر طبق قسمة تقسیم $a = 2k + r$ و $0 \leq r < 2$ می‌باشد پس :
 $r = 0$ یا $r = 1$ یا $r = 2$ است .

مسئله ۱ : اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $2k$ یا $2k + 1$

(زوج یا فرد) می‌توان نوشت .

طبق قسمة تقسیم ، اگر m را بر ۲ تقسیم کنیم داریم :

$$m = 2k + r \text{ و } 0 \leq r < 2 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \Rightarrow m = 2k \\ r = 1 \Rightarrow m = 2k + 1 \end{cases}$$

نتیجه : داریم هر عدد صحیح ، یا زوج است یا فرد .



فروردین
20 April 2018
۳ شعبان ۱۴۳۹

مسئله ۲ : ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد ، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می‌شود .

کافیست p را بر ۶ تقسیم کنیم ، طبق قسمة تقسیم با ۶ حالت رو برو می‌شویم :

$p = 6k + 0 \rightarrow$ غیر قابل قبول ، زیرا $6k$ اول نیست
 $p = 6k + 1$

$p = 6k + 2 = 2(3k + 1) \rightarrow$ غیر قابل قبول ، زیرا $6k + 2$ اول نیست

$p = 6k + 3 = 3(2k + 1) \rightarrow$ غیر قابل قبول ، زیرا $6k + 3$ اول نیست

$p = 6k + 4 = 2(3k + 2) \rightarrow$ غیر قابل قبول ، زیرا $6k + 4$ اول نیست

$$p = 6k + 5$$

بنابراین برای p فقط دو حالت توانستیم بنویسیم که قابل قبول باشد :

$$p = 6k + 1 \quad \text{یا} \quad p = 6k + 5$$

مسئله ۳: الف) ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k+1$

یا $4k+3$ نوشته می شود.

طبق قضیه تقسیم، از تقسیم a بر ۴ یکی از ۴ حالت زیر رخ می دهد:

غیر قابل قبول زیرا $4k$ فرد نیست $\rightarrow a = 4k + 0$

$$a = 4k + 1$$

غیر قابل قبول زیرا $4k+2$ فرد نیست $\rightarrow a = 4k + 2 = 2(2k+1)$

$$a = 4k + 3$$

بنابراین a برابر فقط دو حالت نوشته می شود: $4k+1$ یا $4k+3$

ب) نشان دهید مربع هر عدد فرد به شکل $8t+1$ است.

طبق الف، بر هر عدد فرد a از دو حالت زیر تعریف می شود:

$$a = 4k + 1 \xrightarrow{\text{مربع}} a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 = 8t + 1$$

$$a = 4k + 3 \xrightarrow{\text{مربع}} a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8t' + 1$$

توجه:

در مسئله (۱) نشان دادیم هر عدد صحیح بصورت $2k$ یا $2k+1$ است یعنی مجموعه $\mathbb{Z}$ را

می توان به دو مجموعه $A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ و $A_1 = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ افزایش کرد.

حال با توجه به این که بر هر عدد صحیح a چهار حالت $4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ ، $4k+3$

تعریف می شود، می توان گفت: مجموعه $\mathbb{Z}$ به ۴ مجموعه زیرافراز می شود:

$$B_1 = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}, B_2 = \{4k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, B_3 = \{4k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$B_4 = \{4k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

سوال: مجموعه $\mathbb{Z}$ را به ۳ مجموعه افزایش کنید.

$$A_1 = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}, A_2 = \{4k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, A_3 = \{4k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

حل چند نمونه سوال :

۱- اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر اعداد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم عدد a بر ۵۶ باید.

$$\begin{aligned} a &= 7q_1 + 5 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56q_1 + 40 \\ a &= 8q_2 + 7 \xrightarrow{\times 7} 7a = 56q_2 + 49 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \rightarrow a = 56(q_1 - q_2) - 9 \\ & \quad \quad \quad -56 + 47 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 56(q_1 - q_2 - 1) + 47 \Rightarrow r = 47$$

۲- اگر a عدد صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در این صورت باقیمانده تقسیم عدد (a^2+b^2+2) را بر ۱ باید.

$$\overbrace{a \text{ عدد صحیح فرد}} \Rightarrow a = 2n+1 \quad \underline{b|a+2} \quad b|2n+3$$

$$\Rightarrow \overbrace{b \text{ فرد}} \Rightarrow b = 2m+1$$

$$a^2 + b^2 + 2 = (2n+1)^2 + (2m+1)^2 + 2 = 4n^2 + 4n + 4m^2 + 4m + 4$$

$$= 4n(n+1) + 4m(m+1) + 4$$

ضرب دو عدد متوالی
عدد زوج است

$$= 4k + 4k' + 4 = 4(k+k') + 4 \Rightarrow r = 4$$

۳- اگر n عدد صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3-n$

$$\text{میانبر: } n^3 - n = n(n-1)(n+1)$$

برای عدد صحیح n سه حالت بررسی می شود:

$$\checkmark \text{ اگر } n=3k \Rightarrow n^3-n = \underbrace{3k(3k-1)(3k+1)}_{q_1} \Rightarrow 3|n^3-n$$

$$\checkmark \text{ اگر } n=3k+1 \Rightarrow n^3-n = (3k+1)(3k)(3k+2) = \underbrace{3k(3k+1)(3k+2)}_{q_1'} \Rightarrow 3|n^3-n$$

$$\checkmark \text{ اگر } n=3k+2 \Rightarrow n^3-n = (3k+2)(3k+1)(3k+3) = \underbrace{3(k+1)(3k+2)(3k+1)}_{q_2} \Rightarrow 3|n^3-n$$

بنابراین همیشه ثابت است

۴- اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند ثابت کنید باقیانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ q \\ \hline r \end{array} \rightarrow a = bq + r \xrightarrow{a=nk, b=nk'} \quad 19$$

$$nk = nk'q + r \Rightarrow r = n(k - k'q) \Rightarrow r \text{ بر } n \text{ بخش پذیر است} \quad 20$$

۵- اگر a عدد صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۲ بخش پذیر است.

بزرگترین عدد صحیح دلخواه a که حالت قابل بررسی است:

$$a \text{ بر } 2 \text{ بخش پذیر است} \rightarrow a = 2k \quad 11$$

$$a+2 \text{ بر } 2 \text{ بخش پذیر است} \Rightarrow a+2 = 2k+2 = 2(k+1) \Rightarrow a = 2k \quad 12$$

$$a+4 \text{ بر } 2 \text{ بخش پذیر است} \Rightarrow a+4 = 2k+4 = 2(k+2) \Rightarrow a = 2k \quad 13$$

۶- ثابت کنید تفاضل مکعب ها دو عدد صحیح متوالی، عدد فردی است.

دو عدد صحیح متوالی $k, k+1$ را در نظر بگیرید:

$$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1 = 3k(k+1) + 1 \quad 16$$

$$= 2(\frac{3k}{2}) + 1 = 2m+1 \rightarrow \text{فرد است} \quad 17$$

این دو عدد صحیح متوالی $2k, 2k+1$ باشند:

$$(2k+1)^3 - (2k)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 - 8k^3 = 12k^2 + 6k + 1 \quad 20$$

$$= 2(6k^2 + 3k) + 1 = 2n+1 \rightarrow \text{فرد است} \quad 21$$

۷- ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد متوالی همواره بر ۳! بخش پذیر است.
 ۹- گوییم آن سه عدد زوج متوالی $n-1, n, n+1$ باشند، حاصلضرب آن سه عدد n^3-n است.

طبق مسئله از قبل (سوال ۲) می‌دانیم $2 \mid n^3-n$.
 از طرفی حاصلضرب دو عدد متوالی، همواره زوج است پس $2 \mid n^3-n$.
 بنابراین $6 \mid n^3-n$ یعنی n^3-n بر ۶ بخش پذیر است.

پنجم نمونه تست:

۱- عدد $xy(x-y)+1$ بر کدام یک از اعداد زیر ممکن است بخش پذیر باشد؟
 ۴ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴)
 در صورتی که حداقل یکی از اعداد x یا y زوج باشند، عدد $xy(x-y)+1$ فرد است.
 اما در حالتی که x و y هر دو فرد باشند $x-y$ زوج بود و در نتیجه $xy(x-y)+1$ فرد است.
 پس در هر حالت، عدد $xy(x-y)+1$ عدد فرد است پس نمی‌تواند بر ۲ یا ۶ یا ۱۰ بخش پذیر باشد و ممکن است بر ۳ بخش پذیر باشد.
 لذا گزینه (۲) صحیح است.

۲- اگر عدد صحیح n بر ۳ بخش پذیر نباشد، n^2 به کدام صورت است؟

① $2k-1$ ② $9k-2$ ③ $2k+1$ ④ $9k^2+1$

$$n = 3q + 1 \Rightarrow n^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1 = 3k + 1$$

$$n = 3q + 2 \Rightarrow n^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 9q^2 + 12q + 3 + 1 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1 = 3k' + 1$$

پس گزینه (۳) صحیح است.

۳- اجتماع دو مجموعه $A = \{4k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ، $B = \{4k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ کدام است؟

① $\{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ② $\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ③ $\{4k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ④ $\{4k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

با توجه به باقیمانده تقسیم هر عدد صحیح بر ۴، میتوانیم اعداد زوج را به صورت

اعداد $4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ ، $4k+3$ افزایش دهد.

که $4k+1$ ، $4k+3$ فرد هستند و با اعداد زوج فرد را با اجتماع آنها بدست

می‌آوریم. پس گزینه (۲) صحیح است.

۴- چند نقطه با مختصات صحیح بر منحنی $x^2 - x + 1 = 3y$ قرار دارد؟

۱) صفر ۲) دو ۳) سه ۴) بیش از ۳

نزینه ۱) $\Rightarrow$ سادریک به برآورد $x^2 - x = 3y + 1$

نشان داریم صفر ۳ نیست

۵- چند نقطه با مختصات صحیح بر منحنی $y = \frac{x^2 - 1}{8}$ وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) بی شمار

اگر x فرد باشد مربع آن $x^2 = 8k + 1$ است پس $y = \frac{8k + 1 - 1}{8} = k$

پس بی شمارن بهما بی شمار نقطه صحیح وجود دارد.

نزینه ۴

sinxcosx.blogfa.com

ملا سعیدی - آبادان

ایران تونلنه
توشه ای برای موفقیت

۱۳۹۷

8 **هم‌نهشتی:** برای هر عدد طبیعی m و هر دو عدد صحیح a و b ، اگر $m \mid a-b$

9 $a \equiv b \pmod{m}$ است و می‌نویسیم: $a \equiv b \pmod{m}$

10 به عبارت دیگر: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid a-b \quad (m \in \mathbb{N})$

11 به طور مثال: $21 \equiv 1 \pmod{4}$ زیرا $21-1=20$ و $4 \mid 20$.

12 **سوال:** نشان دهید: $(a+b)^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod{2}$

13 $(a+b)^2 - (a^2 + b^2) = a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2 = 2ab$ ، $ab \mid 2ab$

14 $\Rightarrow (a+b)^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod{2}$

15 **ویژگی‌ها هم‌نهشتی:**

16 ① $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$

17 **اثبات:**

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid (a+c)-(b+c) \Rightarrow a+c \equiv b+c \pmod{m}$

18 **همچنین:** $m \mid a-b \Rightarrow m \mid (a-c)-(b-c) \Rightarrow a-c \equiv b-c \pmod{m}$

19 ② $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$

20 **اثبات:**

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid c(a-b) \Rightarrow m \mid ac-bc$

21 $\Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$

تذکر: عکس ویژگی ۱ و ۲ برقرار نیست. مثلاً از $ac \equiv bc \pmod{m}$ نمی‌توان نتیجه گرفت: $a \equiv b \pmod{m}$

③ $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m} \quad (n \in \mathbb{N})$

22 **اثبات:**

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$

$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

تذکر: عکس ویژگی ۳ برقرار نیست. مثلاً از $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ نمی‌توان نتیجه گرفت: $a \equiv b \pmod{m}$

④ $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd \pmod{m} \\ a+c \equiv b+d \pmod{m} \end{cases}$

اثبات:

$$a \equiv b \Rightarrow m | a-b \xrightarrow{\times c} m | ac-bc$$

$$c \equiv d \Rightarrow m | c-d \xrightarrow{\times b} m | bc-bd \xrightarrow{+} m | ac-bd \Rightarrow ac \equiv bd$$

$$a \equiv b \Rightarrow m | a-b \xrightarrow{+} m | (a+c)-(b+d) \Rightarrow a+c \equiv b+d$$

$$c \equiv d \Rightarrow m | c-d \xrightarrow{-} m | (a-c)-(b-d) \Rightarrow a-c \equiv b-d$$

سوال: ثابت کنید $97^2 + 144^2 \equiv 4$

$$97 \equiv 2 \xrightarrow{\times 2} 97^2 \equiv 4$$

$$144 \equiv -1 \xrightarrow{\times 1} 144^2 \equiv 1$$

$$\xrightarrow{+} 97^2 + 144^2 \equiv 4$$

تذکره: هرگاه بخواهم همنسبت عدد a را به بیان m تعیین کنم کافیست عدد a را بر m تقسیم کرده و باقیانده (یا) را به دست آورم که:

$$a \equiv r$$

نتیجه:

$$a = mq + r \Rightarrow m | a-r \Rightarrow a \equiv r$$

نتیجه: اگر a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m باقیانده یک داشته باشند:

$$a \equiv b$$

سوال: باقیانده تقسیم عدد $A = 27^7 + 19$ را بر 13 به دست آورید.

$$27 \equiv 1 \xrightarrow{\times 7} 27^7 \equiv 1$$

$$19 \equiv 6 \xrightarrow{+} A \equiv 7 \Rightarrow 1$$

سوال: باقیانده تقسیم عدد $A = (100)^{12} \times 12 + 10$ را بر 13 به دست آورید.

$$100 \equiv 9 \xrightarrow{\times 12} (100)^{12} \equiv 1 \xrightarrow{\times 12} 12 \equiv -1 \xrightarrow{+} A \equiv 3$$

$$A \equiv d \Rightarrow r = d$$

⑤ $a \equiv b \Rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk$

اثبات:

$$a \equiv b$$

$$mt \equiv mk \xrightarrow{+} a \pm mt \equiv b \pm mk$$

⑥ $ac \equiv bc \xrightarrow{(m,c)=d} a \equiv b$

مثال: $90 \equiv 24 \xrightarrow{\div 18} 5 \equiv 2$

تئوهم: اگر $(m,c)=1$ آنگاه:

$$ac \equiv bc \Rightarrow a \equiv b$$

8 مثال: اگر رقم یایی اعداد $da+2$ و $2a+6$ باشد، رقم یایی

9 عدد $7a-3$ را بیابید.

10 $da+2 \equiv 2a+6 \Rightarrow 2a \equiv 4 \xrightarrow{+(-10)} 2a \equiv -6$

11 $2a \equiv -6 \xrightarrow{\div 2} a \equiv -3$

12 $\xrightarrow{\times 7} 7a \equiv -14 \xrightarrow{+(20)} 7a \equiv 6 \xrightarrow{-3} 7a-3 \equiv 3$

13 رقم یایی 3 است.

14 حل چند نمونه سوال:

15 1- اگر باقیانده عدد A بر 27 برابر 23 باشد و $2A-3 \equiv x$ ، آنگاه مقدار

16 x برابر است با:

17 $A \equiv 23 \xrightarrow{\times 2} 2A \equiv 46 \xrightarrow{-3} 2A-3 \equiv 43 \equiv 4 \Rightarrow x=4$



۱۴

اردیبهشت

4 May 2018

۱۷ شعبان ۱۴۳۹

۱۳۹۷

۲- اگر باقیانده a و b بر 3 و 4 باشد، باقیانده عدد

$2a+ab+2b$ بر 7 را بیابید.

$a \equiv 3 \xrightarrow{\times 2} 2a \equiv 6$
 $b \equiv 4 \xrightarrow{\times 2} 2b \equiv 8$
 $ab \equiv 12$
 $2a+ab+2b \equiv 6+12+8 \equiv 26 \equiv 5 \pmod{7}$

۲- باقیانده تقسیم 2^{24} بر 17 را بیابید.

$2^4 \equiv 16 \equiv -1 \pmod{17}$

$\xrightarrow{\times 2^4} 2^8 \equiv -1 \pmod{17}$
 $\xrightarrow{\times 2^4} 2^{12} \equiv -1 \pmod{17}$
 $\xrightarrow{\times 2^4} 2^{16} \equiv -1 \pmod{17}$
 $\xrightarrow{\times 2^4} 2^{20} \equiv -1 \pmod{17}$
 $\xrightarrow{\times 2^4} 2^{24} \equiv -1 \pmod{17}$

۴- اگر a مضرب ۱۶ باشد، باقیانده ی تقسیم

$$(16a+1)^2 + (16a+2)^2 + (16a+3)^2 + (16a+4)^2 + (16a+5)^2$$

بر ۴ کدام است؟
 a مضرب ۱۶ است پس a بر ۴ بخش پذیر است پس: $16a \equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{4}$

$$\text{عدد مورد سوال} \equiv (0+1)^2 + (0+2)^2 + (0+3)^2 + (0+4)^2 + (0+5)^2 \pmod{4}$$

$$\equiv 1 + 4 + 9 + 16 + 25 \pmod{4}$$

$$\equiv 54 \pmod{4} \rightarrow 2 \pmod{4}$$

۵- رقم سمت راست عدد $(1! + 2! + 3! + \dots + 1498!)$ را بر عدد ۹ بیاورد.

کدام است؟
 بقیه ده $\equiv 1! \pmod{9}$ و $4! \equiv 4 \pmod{9}$ و $3! \equiv 6 \pmod{9}$ و $2! \equiv 2 \pmod{9}$ و $1! \equiv 1 \pmod{9}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2! + 4! + 6! + \dots + 1498! \equiv 2 + 4 + 0 + \dots + 0 \equiv 6 \pmod{9} \\ 1! + 3! + 5! + \dots + 1497! \equiv 1 + 6 + 0 + \dots + 0 \equiv 7 \pmod{9} \end{cases} \xrightarrow{+} R \equiv 6 + 7 \equiv 12 \equiv 3 \pmod{9}$$

۸- مثال: باقیانده تقسیم عدد $A = 1458$ را بر عدد ۹ بیاورد.

$$A = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 8$$

$$10^9 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 10^n \equiv 1 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow A \equiv 1 + 4 + 5 + 8 \equiv 18 \equiv 0 \pmod{9}$$

طبق این مثال حدس میزنیم: برابر محاسبه باقیانده عدد A بر ۹ کافیست
 باقیانده مجموع ارقام عدد A را بر ۹ حساب کرد.

نکته: باقیانده تقسیم هر عدد طبیعی بر عدد ۹، برابر است با باقیانده مجموع ارقام آن عدد در تقسیم بر عدد ۹.

اثبات: عدد n رقم $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$ را در نظر میگیریم:

$$A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0$$

$$10^9 \equiv 1 \pmod{9} : \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow A \equiv a_{n-1} \times 1 + a_{n-2} \times 1 + \dots + a_1 \times 1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0$$

8 سوال: ثابت کنید باقیانده تقسیم عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$

9 بر 3 برابر است با باقیانده تقسیم مجموع ارقام A بر 3.

$$10 \quad A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0$$

$$11 \quad \text{می دانیم: } 10^3 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: 10^n \equiv 1 \pmod{3}$$

$$12 \quad \Rightarrow A \equiv a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{3}$$

13 سوال: باقیانده تقسیم عدد $A = 4985227$ را بر 11 حساب کنید.

$$14 \quad A = 4 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 7$$

$$15 \quad \text{می دانیم: } 10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 10^{\text{زوج}} \equiv 1 \pmod{11}, \quad 10^{\text{فرد}} \equiv -1 \pmod{11}$$

$$16 \quad \Rightarrow A \equiv 4 \times 1 + 9 \times (-1) + 8 \times 1 + 5 \times (-1) + 2 \times 1 + 2 \times (-1) + 7 \pmod{11}$$

$$17 \quad \Rightarrow A \equiv 4 - 9 + 8 - 5 + 2 - 2 + 7 \pmod{11} \Rightarrow A \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow \text{باقیانده 6 است}$$

18 نکته: باقیانده تقسیم عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$ بر m برابر است

19 (عدد 1 یا 2 یا 3 یا 4 یا 5 یا 6 یا 7 یا 8 یا 9 یا 10 برابر است با باقیانده تقسیم A بر m) (یعنی a_0)

بر هر کدام از این اعداد.

$$20 \quad \text{اثبات:} \quad A = a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0$$

$$21 \quad \text{توجه: برای هر } m \in \mathbb{N}: 10^2 \equiv 0 \pmod{m}, 10^5 \equiv 0 \pmod{m}, 10^8 \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: 10^n \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\Rightarrow A \equiv a_{n-1} \times 0 + a_{n-2} \times 0 + \dots + a_1 \times 0 + a_0 \pmod{m} \Rightarrow A \equiv a_0 \pmod{m}$$

$$A \equiv a_0 \pmod{2}, \quad A \equiv a_0 \pmod{5}, \quad A \equiv a_0 \pmod{10}$$

22 نتیجه: عدد A وقتی بر 2 یا 5 یا 10 بخش پذیر است که رقم یای آن

(یعنی a_0) بر 2 یا 5 یا 10 بخش پذیر باشد.

به عبارت دیگر عدد A وقتی بر 2 یا 5 یا 10 بخش پذیر است که رقم یای آن زوج باشد

و عدد A بر 5 یا 10 بخش پذیر است

و عدد A بر 2 یا 10 بخش پذیر است

قرار دارد: مجموعه اعداد صحیح را باقیانده تقسیم آنرا بر عدد

طبیعی m برابر r می باشد را کلاس یا دسته همبستگی

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$$

مثال: عدد ۱۴۹۸ به کدام دسته همبستگی به پیانده ۹ تعلق دارد؟

$$1498 \div 9 = 166 \text{ با بقیه } 4 \Rightarrow [4]_9 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 9k + 4\}$$

تست: عدد ۲۰۹ به کدام دسته همبستگی به پیانده ۱۲ تعلق دارد؟

$$209 \div 12 = 17 \text{ با بقیه } 5 \Rightarrow [5]_{12} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 12k + 5\}$$

مثال: امروز ۱۸ مرداد ماه، پنجشنبه می باشد، ۲۹ شهریور ماه چندشنبه است؟

$$42 \equiv 0 \Rightarrow 42 \text{ روز } + \rightarrow 12 = 31 - 18 \text{ مرداد}$$

۲۹ شهریور

پ	چ	پ	س	د	ی	س	ج
۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

پنجشنبه می باشد

مثال: اگر در یک سال، اول مهر، شنبه باشد، در این صورت ۱۲ کهن درها سال چند روزی است؟

$$29 = 30 - 1 \text{ مهر}$$

$$131 \equiv 5 \Rightarrow 131 \text{ روز } + \rightarrow 90 = 3 \times 30 \text{ دی + آذر + آبان}$$

۱۲ کهن

پ	چ	پ	س	د	ی	س	ج
۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

پنجشنبه می باشد

مثال: اگر ۱۲ کهن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه درها سال چند روزی از هفته است؟

$$151 = 31 + 4 \times 30 \text{ دی + آذر + آبان + مهر + شهریور}$$

۱۲ کهن

$$163 \equiv 2$$

پ	چ	پ	س	د	ی	س	ج
۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

چهارشنبه

تست: بیت و هفتم اردیبهشت روز سه شنبه است؛ سوّمین شنبه در ماه

اردیبهشت کدام روز ماه است؟ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰

طبق فرض ۲۴ اردیبهشت شنبه است پس شنبه ها عبارتند از:

$$3 \xrightarrow{-7} 10 \xrightarrow{-7} 17 \xrightarrow{-7} 24 \xrightarrow{+7} 31$$

اولین شنبه دوشنبه شنبه

جواب ۱۷ است.

سؤال ۱۷ شهریور سال شنبه است. ۲۲ بهمن این سال چه روز از هفته است؟ شنبه جمعه دوشنبه یکشنبه

۲۲ بهمن + دی + آذر + آبان + مهر + شهریور

$$2 \equiv 9 = 1 + 4 \times 2 + 0 \equiv 22 + 4 \times 20 + 14$$

مثال ها را می توانیم به این شکل و یک بار این

ش	ی	ا	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

در شنبه →

سؤال ۱۸ از انتهای کمان ۱۳۵ روی دایره مثلثاتی به اندازه ۴۰۰ در خلاف جهت دایره حرکت می کنیم، انتهای کمان حاصل کدام است؟

۴۵ ۱۳۵ ۹۰ ۱۸۰



۲۱

اردیبهشت
11 May 2018
۲۴ شعبان ۱۳۹۷

۱۳۹۷

$$45 \equiv 400 \pmod{360}$$

حالا اگر از ۱۳۵ به اندازه ۴۵ خلاف جهت دایره مثلثاتی حرکت کنیم به ۹۰ = ۱۳۵ - ۴۵ می رسیم.

ایران تونل

توشه ای برای موفقیت

معادله همنهستی:

می خواهیم اعداد را بیایم که به پانزده ۲، همنهست با ۱ باشند، برای آن اعداد ما با ۱۰ نمایش دهیم، در این صورت:

$$x \equiv 1 \pmod{2} \xrightarrow{\text{تعریف همنهستی}} x-1 = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

حال ثابت دادن مقادیر مختلف صحیح به k می توان اعداد متناهی برابر x یافت:

k	...	-2	-1	0	1	2	3	...
x	...	-3	-1	1	3	5	7	...

13

توجه: $x = 2k + 1$ را جواب عمومی معادله همنهستی گویند.

مثال: معادله هینش $17 \equiv x \pmod{5}$ را حل کرده و جوابها را
طبیعی کمتر از ۱۰ را بنویسید.

$$fx \equiv IV - d \Rightarrow ex \equiv II \xrightarrow[(e, d)=1]{\div e} x \equiv r \Rightarrow x = dk + r$$

بقسمة باقیمانده $\downarrow$

جوابها/مورد نظر ۳، ۸، ۱۳، ۱۸ میباشد $\Rightarrow$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	۳	۸	۱۳	۱۸	۲۳

مثال: همه اعداد صحیح را بنویسید که سه برابر آنها منتهای ۱۳ بر ۷ بخش پذیر باشد.

$$\begin{aligned} v | r n - 1r &\Rightarrow r n - 1r \stackrel{v}{\equiv} 0 \Rightarrow r n \stackrel{v}{\equiv} 1r \\ &\Rightarrow r n \stackrel{v}{\equiv} 1r - v \Rightarrow r n \stackrel{v}{\equiv} r \xrightarrow[(r,v)=1]{\div r} n \stackrel{v}{\equiv} 1 \\ &\Rightarrow n = vk + r, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

قضیه: معادله همبستگی $a x^m \equiv b$ دارای جواب است،
اگر و فقط اگر $(a, m) \mid b$.

نتیجه: اگر $(a, m) = 1$ بر مبنای n معادله همواره دارای جواب است.

سوال : معادلات زیر را در صورت امکان حل کنید

$$4n \equiv 11 \pmod{9}$$

مقادیر جوابی نهاده $\Rightarrow 11 \times 3, (9,9) = 3$

$$n \equiv 1 \pmod{4}$$

$(\varepsilon, \gamma) = 2$, $2 \mid 18 \Rightarrow$ معادله دارد جواب 1

$$\varepsilon n \stackrel{y}{=} 11 - y \Rightarrow \varepsilon n \stackrel{y}{=} 12 \xrightarrow[(\varepsilon, y) = 2]{\div \varepsilon} n \stackrel{y}{=} 6$$

$$\Rightarrow x \equiv r \Rightarrow x \equiv r - r \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x = rK$$

مثال: اعداد صحیح x را بیابید که در تقسیم بر اعداد ۸ و ۱۲ به ترتیب باقیمانده‌های ۲ و ۱۰ داشته باشند.

$$x \equiv y \xrightarrow{x \equiv 1} x = \wedge k + y \xrightarrow{x \equiv 1} \wedge k + y \equiv 1$$

$$\Rightarrow \Lambda k \equiv \Lambda \xrightarrow[(\Lambda, \mathbb{N}) = \varepsilon]{\div \Lambda} k \equiv 1 \Rightarrow k = rn + 1$$

$$\underline{x = \lambda k + r} \rightarrow x = 78n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

حل معادله خطی با دو بردها (م) :

اگر a, b, c اعداد صحیح ثابت فرض شوند، معادله $ax + by = c$ را معادله سیاله گوئیم به طوریکه $x, y \in \mathbb{Z}$ باشد.

برای حل باید معادله را به یک معادله همبسته بر حسب x یا بر حسب y تبدیل

به طور مثال معادله سیاله $4x + 5y = 9$ را در نظر بگیرد، ابتدا آن را به یک معادله همبسته بر حسب x تبدیل می‌کنیم:

$$4x = -5y + 9$$

$$\Rightarrow 4x \equiv 9 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 9 - 5 = 4 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow x = 5k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$4x + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 4 + 5y = 9 \Rightarrow y = -4k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

مثال: معادله سیاله $4x + 3y = 19$ را بر حسب y به یک معادله همبسته تبدیل کرده و حل کنید.

$$3y = -4x + 19$$

$$\Rightarrow 3y \equiv 19 \pmod{4} \Rightarrow 3y \equiv 19 - 4 = 15 \pmod{4} \Rightarrow y \equiv 5 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow y = 4k + 5, k \in \mathbb{Z}$$

$$4x + 3y = 19 \Rightarrow 4x + 12k + 15 = 19 \Rightarrow x = -3k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۷۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰

تومانی و ۵۰۰۰ تومانی خود کرد؟

x = تعداد اسکناس ۲۰۰۰ تومانی و y = تعداد اسکناس ۵۰۰۰ تومانی

$$2000x + 5000y = 17000 \Rightarrow 2x + 5y = 17$$

$$\Rightarrow 2x = 17 - 5y$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 17 \pmod{5} \Rightarrow 2x \equiv 17 - 5 = 12 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow x = 5k + 6, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + 5y = 17 \Rightarrow 10k + 12 + 5y = 17 \Rightarrow y = -2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

k	-1	0	1
x	1	6	11
y	3	1	-1

۱۶ به دو حالت می‌توان خود کرد $\Rightarrow$

۱۷ حالت اول: یک دو هزار تومانی و سه پنج هزار تومانی

۱۸ حالت دوم: ۶ دو هزار تومانی و ۱ ~ ~ ~

سؤال: در یک رستوران فقط دو نوع غذای مخصوص کمپنیز و قهوه وجود دارد.
 اگر ۵ نفر در این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش
 غذا بدهند. (هر نفر فقط یک پرس غذا میل کند).

$$x + y = 5 \Rightarrow x = -y + 5$$

$$x \equiv 5 \Rightarrow x = k + 5$$

$$x + y = 5 \Rightarrow k + 5 + y = 5 \Rightarrow y = -k$$

k	0	-1	-2	-3	-4	-5
x = تعداد قهوه‌ها	5	4	3	2	1	0
y = قهوه	0	1	2	3	4	5

پس به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا دهند

سؤال: تیر اندازی به سمت یک هدف شامل دو دایره هم مرکز تیر اندازی
 می‌کند، اگر به دایره با شعاع کوچک‌تر بزنند ۵ امتیاز و اگر به دایره بزرگ‌تر
 بزنند ۳ امتیاز می‌گیرند. اگر او کمتر از ۵ تیر، تیر اندازی کرده باشد
 و همه تیرها داخل دایره بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان
 ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برابر او در این تیر
 اندازی می‌تواند ثبت شود

$x =$ تعداد تیرهای ۵ امتیازی و $y =$ تعداد تیرهای ۳ امتیازی

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x = -3y + 42$$

$$5x \equiv 42 \Rightarrow 5x \equiv 42 + 5 = 47 \Rightarrow x \equiv 9$$

$$\Rightarrow x = 3k + 9$$

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 15k + 45 + 3y = 42 \Rightarrow y = -5k - 1$$

k	0	-1	-2
x = تعداد تیرهای ۵	9	8	7
y = تعداد تیرهای ۳	0	4	8

ملاحظه می‌شود در سه حالت وجود دارد و مجموع
 تیر اندازها در هر حالت کمتر از ۵۰ است.

۸ تست: معادله $15x + 14y = 105$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟ ^{۱۳۹۲}

$$15x = -14y + 105$$

$$\Rightarrow 15x \equiv 105 \pmod{14} \Rightarrow x \equiv 7 \pmod{14} \Rightarrow x = 14k + 7$$

$$15x + 14y = 105 \Rightarrow 210k + 105 + 14y = 105 \Rightarrow y = -15k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14k + 7 > 0 \Rightarrow k > -\frac{7}{14} \\ -15k > 0 \Rightarrow k < 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{7}{14} < k < 0 \Rightarrow k = -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, -13, -14, -15$$

۹ تست: کمترین تعداد مقبر لازم برای بسته‌ای که نیاز به ۱۵۰ ریال تمیز دارد، با تعبیر

۹۰، ۵۰ ریال است؟

$$40x + 90y = 150 \Rightarrow 4x + 9y = 15$$

$$\Rightarrow 4x \equiv 15 \pmod{9} \Rightarrow x \equiv 12 \pmod{9} \Rightarrow x = 9k + 12$$

$$4x + 9y = 15 \Rightarrow 36k + 108 + 9y = 15 \Rightarrow y = -4k$$

$$\Rightarrow \min(x+y) = 12 + 0 = 12$$

۱۰ تست: مجموع ارقام بزرگترین عدد سه رقمی که در رابطه $14x + 18y = 10$ صدق

می‌کند، ارقام

$$\Rightarrow 7x + 9y = 5$$

$$\Rightarrow 9y \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow 9y \equiv 5 - 14 = -9 \pmod{7} \Rightarrow y \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow y = 7k - 1$$

$$\Rightarrow y = 7k - 1 \Rightarrow 7k - 1 < 100 \Rightarrow 7k < 101 \Rightarrow k < \frac{101}{7} \Rightarrow k < 14.4 \Rightarrow k = 14$$

$$\Rightarrow \max(y) = 7 \times 14 - 1 = 97$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9 + 7 + 3 = 19$$

حل تمرین‌ها و مسائل

۱- اگر $k \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید، فقط یک از سه حالت زیر اشخاص پذیر است:

$$k \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{یا} \quad k \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{یا} \quad k \equiv 2 \pmod{3}$$

(به عبارت دیگر $k \in [0]_3$ یا $k \in [1]_3$ یا $k \in [2]_3$)

۲- با متناهی تقسیم هر عدد صحیح مجموع k بر ۳ یک از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ می‌باشد، پس $k \equiv 0 \pmod{3}$ یا $k \equiv 1 \pmod{3}$ یا $k \equiv 2 \pmod{3}$ و طبق تعریف همبستگی

۳- اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ، ثابت کنید $a \equiv b \pmod{n}$ ، $n|m$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m|a-b \xrightarrow{n|m} n|a-b \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

۴- فرض کنید $a \equiv_m b$, $b \equiv_n c$, $(m, n) = d$, در این صورت ثابت کنید $a \equiv_d c$.

$$a \equiv_m b \xrightarrow{\text{طبق قضیه ۲}} a \equiv_d b$$

$$b \equiv_n c \xrightarrow{d|n} b \equiv_d c$$

۵- ثابت کنید: اگر باقیانده تقسیم دو عدد a , b بر m مساوی باشد

$$a \equiv_m b$$

آنگاه باقیانده تقسیم a , b بر n برابر است:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv_m r \\ b \equiv_m r \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv_m b$$

ادامه دارد:

$$\begin{array}{l} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{array} \Rightarrow a - b = m(q - q') \Rightarrow m | a - b$$

$$\xrightarrow{\text{تدبیه منتهی}} a \equiv_m b$$

۶- عین تعریف را برای n ثابت کنید.

اگر $a \equiv_m b$ آنگاه باقیانده تقسیم دو عدد a , b بر m برابر است.

اثبات:

بریم باقیانده تقسیم a بر m برابر r_1 , باقیانده تقسیم b بر m برابر r_2 بگذاریم:

$$\begin{array}{l} a = mq + r_1 \\ b = mq' + r_2 \end{array} \Rightarrow a - b = m(q - q') + (r_1 - r_2)$$

$$\xrightarrow{\text{از نظر ۵}} a \equiv_m b \Rightarrow a - b = mq''$$

$$mq'' = m(q - q') + (r_1 - r_2) \xrightarrow{0 < r_1, r_2 < m} r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$$

۷- با استفاده از بسط دوجمله‌ای ختم می‌شود:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

نابینا برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ همواره $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} a^n &\equiv a^n \pmod{ab} \\ \binom{n}{1} a^{n-1} b &\equiv 0 \pmod{ab} \\ \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 &\equiv 0 \pmod{ab} \\ &\vdots \\ \binom{n}{n-1} a b^{n-1} &\equiv 0 \pmod{ab} \\ \binom{n}{n} b^n &\equiv b^n \pmod{ab} \end{aligned} \quad \xrightarrow{+} \quad (a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$$

۸- با توجه به تمرین ۷ نابینا می‌شود عدد $2^3 - 11 - 12 \equiv 0 \pmod{132}$ بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است.

$$\begin{aligned} 2^3 &\equiv (11+12) \pmod{132} \\ &\equiv 11 + 12 \pmod{132} \\ &\equiv 23 \pmod{132} \\ &\Rightarrow 2^3 - 11 - 12 \equiv 0 \pmod{132} \end{aligned}$$

پس هم برابر است.

۹- باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

$$2^{11} \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^{10} \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^9 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^8 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^7 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^6 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^5 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^4 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^3 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^2 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 1 \equiv 12 \pmod{23}$$

$$2^{11} \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^{10} \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^9 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^8 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^7 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^6 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^5 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^4 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^3 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^2 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 1 \equiv 12 \pmod{23}$$

$$2^{11} \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^{10} \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^9 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^8 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^7 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^6 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^5 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^4 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^3 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2^2 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 2 \equiv 12 \pmod{23} \Rightarrow 1 \equiv 12 \pmod{23}$$

۱۰- اگر دو عدد $2a-d$ و $4a-7$ رقم یک‌پایه برابر داشته باشند، رقم یک‌پایه عدد $9a+6$ را بیابید.

$$2a-d \equiv 4a-7 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 4a-3a \equiv 7-d \pmod{10} \Rightarrow a \equiv 7-d \pmod{10}$$

$$9a+6 \equiv 9(7-d)+6 \pmod{10} \Rightarrow 63-9d+6 \pmod{10} \Rightarrow 69-9d \pmod{10} \Rightarrow 9-9d \pmod{10} \Rightarrow 9(1-d) \pmod{10}$$

۱۱- باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 10!$ را بر ۱۳ بیابید.

$$1! \equiv 1 \pmod{13}, 2! \equiv 2 \pmod{13}, 3! \equiv 6 \pmod{13}, 4! \equiv 24 \equiv 11 \pmod{13}, 5! \equiv 120 \equiv 6 \pmod{13}, 6! \equiv 720 \equiv 5 \pmod{13}, 7! \equiv 5040 \equiv 1 \pmod{13}, 8! \equiv 40320 \equiv 1 \pmod{13}, 9! \equiv 362880 \equiv 1 \pmod{13}, 10! \equiv 3628800 \equiv 1 \pmod{13}$$

$$A \equiv 1+2+6+11+6+5+1+1+1+1 \pmod{13} \Rightarrow A \equiv 44 \pmod{13} \Rightarrow A \equiv 5 \pmod{13}$$

$$A \equiv 5 \pmod{13}$$

$$A \equiv 5 \pmod{13}$$

۱۲ - جوابها را عمومی معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را بدست آورید.

$$7x = -5y + 11$$

$$\Rightarrow 7x \equiv 11 \pmod{5} \Rightarrow 7x \equiv 11 \pmod{5} \xrightarrow{\div 7} x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow x = 5k + 2, k \in \mathbb{Z}$$

$$7x + 5y = 11 \rightarrow 7(5k + 2) + 5y = 11 \Rightarrow y = -7k - 2, k \in \mathbb{Z}$$

۱۳ - به چند طریق می توان ۲۹۰۰۰ تومان را توسط اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی خرد کرد؟

$$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 29$$

$$\Rightarrow 2x = -5y + 29$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 29 \pmod{5} \Rightarrow 2x \equiv 4 \pmod{5} \xrightarrow{\div 2} x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 2, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + 5y = 29 \rightarrow 10k + 10 + 5y = 29 \Rightarrow y = -2k + 4, k \in \mathbb{Z}$$

k	0	1	2
x = تعداد اسکناس ۲۰۰۰ تومانی	2	7	12
y = تعداد اسکناس ۵۰۰۰ تومانی	4	3	1

۱۴ - معادله های هم خطی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب ها را عمومی آنها را بدست آورید.

$$423x \equiv 79 \pmod{11}$$

$$423x \equiv 79 + 11 \pmod{11} \Rightarrow 423x \equiv 90 \pmod{11} \xrightarrow{\div 9} 47x \equiv 10 \pmod{11} \rightarrow 47x \equiv 10 + 29 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 47x \equiv 39 \pmod{11} \xrightarrow{\div 47} x \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow x = 11k + 7, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ب) } 18x \equiv 20 \pmod{12} \xrightarrow{\div 2} 9x \equiv 10 \pmod{6} \rightarrow 9x \equiv 4 \pmod{6}$$

$$\Rightarrow 9x \equiv 2 \pmod{6} \xrightarrow{\div 3} x \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{پ) } 5x \equiv 11 \pmod{11} \quad (5, 11) = 1 \quad 5 \nmid 11$$

۱۵ - اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفند ماه در همان سال چه روز از هفته است؟

$$2 \equiv 7 + 4 \times 20 + (-1 - 30) = \text{اسفند} + \text{پنجشنبه} + \text{دو} + \text{آخر} + \text{آبان} + \text{مهر}$$

یکشنبه است

۱۷- همه اعداد صحیح چون a را باید که d برابر آنها به علاوه 9 بر 11 بخش پذیر باشد.

$$da + 9 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow da \equiv -9 \pmod{11} \Rightarrow da \equiv -9 + 11 \times 1 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow da \equiv 2 \pmod{11} \stackrel{\div d}{\Rightarrow} a \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow a = 11k + 7, k \in \mathbb{Z}$$

۱۸- به چند طریق می‌توان یک کیسه 22 کیلویی را با وزنه‌های 3 و 5 کیلویی وزن کرد؟

$$3x + 5y = 22 \Rightarrow 3x = -5y + 22 \Rightarrow 3x \equiv 22 \pmod{5} \Rightarrow 3x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 3x \equiv 2 \pmod{5} \stackrel{\div 3}{\Rightarrow} x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 4$$

$$\xrightarrow{3x+5y=22} 15k+20+5y=22 \Rightarrow y = -3k+2$$

k	0	1
x	4	9
y	2	-1

وزنه ۳ کیلویی وزنه ۵ کیلویی

به دو طریق می‌توان وزن کرد.

۱۹- به چند طریق می‌توان از بین دوئل یک دسته 9 شامل 5 شاخه گل به دگواه انتخاب کرد؟

$$x + y = 9 \Rightarrow x = -y + 9$$

$$\Rightarrow x \equiv 9 \pmod{9} \Rightarrow x = k + 9$$

$$\xrightarrow{x+y=9} k+9+y=9 \Rightarrow y = -k$$

k	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
x	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

به ده طریق می‌توان انتخاب کرد.

۲۰- شفره در یک مسابقه علمی شرکت کرده و به سوالات ۷ امتیاز و ۹ امتیاز پاسخ داده است و مجموعاً 72 امتیاز کسب کرده است (پاسخ به هر سوال یا امتیاز کامل دارد یا امتیاز ندارد) در این صورت این شخص به چه صورت می‌توانسته این

امتیاز را به دست آورد؟

$$7x + 9y = 72$$

$$\Rightarrow 7x = -9y + 72 \Rightarrow 7x \equiv 72 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow 7x \equiv 72 \pmod{9} \Rightarrow 7x \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow x = 9k$$

$$\xrightarrow{7x+9y=72} 63k+9y=72 \Rightarrow y = -7k+8$$

k	0
x	0
y	8

فقط به یک صورت می‌توان
 72 امتیاز کسب کرد.