

درس ۱ استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی انسان‌ها انکارناپذیر است. همه ما در زندگی روزمره و یا در زندگی حرفه‌ای خود نیازمند کسب توانمندی در این زمینه هستیم. تسلیم عقل در برابر استدلال موهبتی الهی است که امکان تعامل بین انسان‌ها و توسعه علوم گوناگون و رشد و بالندگی را در زمینه‌های مختلف برای بشر فراهم ساخته است. استدلال و اثبات در ریاضیات نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن روتبه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش‌های استدلال و اثبات در ریاضی است.

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید:

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.

ب) عدد $2^n + 1$ به ازای همه عددهای طبیعی n ، عددی اول است.

حل: گاهی ممکن است برای فهم یک گزاره، مثال‌هایی را برای صدق آن بررسی کنیم.

برای نمونه برای گزاره الف داریم:

$$5 + 6 + 7 = 18$$

$$10 + 11 + 12 = 33$$

$$25 + 26 + 27 = 78$$

$$31 + 32 + 33 = 96$$

در همه موارد حاصل جمع‌های به دست آمده، درستی گزاره الف را نشان می‌دهند همچنین برای

$n=1, n=2, n=3, n=4$ حاصل $2^n + 1$ به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ است

که همگی اعداد اول هستند و ظاهراً بر درستی گزاره ب دلالت می‌کنند.

آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند، اگر کافی نیست آیا

ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟

در مورد الف هر چقدر مثال ارائه کنید، مشاهده خواهید کرد که گزاره برقرار است، اما در مورد

گزاره ب، اگر $n=5$ آن گاه:

$$2^5 + 1 = 33 = 3 \times 11$$

که به وضوح نشان می‌دهد، حاصل یک عدد اول نیست. همین «مثال نقض» نشان می‌دهد که گزارهٔ ب در حالت کلی درست نیست. این روش استدلال به صورت معمول برای رد کردن یک حکم کلی به کار می‌رود و استدلال به کمک «مثال نقض» است.

در مورد گزاره الف با اینکه نمی‌توانید مثال نقضی ارائه کنید، اما درستی گزاره با ارائه مثال به دست نمی‌آید. مثلاً یک احتمال این است که نتوانید مثال نقضی ارائه کنید و یا اینکه تاکنون مثال نقضی برای آن ارائه نشده باشد. به هر حال در اینجا اثبات دشوار نیست. کافی است سه عدد طبیعی را با n ، $n+1$ و $n+2$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

که نشان می‌دهد گزاره الف در حالت کلی درست است.

این نوع اثبات کردن را «اثبات مستقیم» می‌نامند. البته اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد. هدف این کتاب طرح اثبات‌های دشوار نیست^۱. محتوای آموزش این درس در چارچوب مطالبی است که تاکنون آموخته‌اید. در کار در کلاس نمونه‌هایی از استدلال به روش «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» را مشاهده خواهید کرد.

کار در کلاس

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. گزاره صحیح است. اثبات: کافیست دو عدد فرد را با $2n-1$ و $2m-1$ به فرض

$$2n-1 + 2m-1 = 2n+2m-2 = 2(n+m-1) \rightarrow \text{عدد زوج} \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{اگر } x=9 \text{ و } y=16 \text{، آنگاه:}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4=7 \rightarrow \sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

بنابراین گزاره صحیح نیست.

پ) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

گزاره صحیح است. اثبات: کافیست سه عدد طبیعی متوالی را با $n+1$ ، $n+2$ و $n+3$ به فرض $n \in \mathbb{N}$ نمایش دهیم. داریم:

$$(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1) \times n! \times 3!}{n! \times 3!} = \frac{(n+3)!}{n! \times 3!} \times 3! = \underbrace{\binom{n+3}{3}}_{\in \mathbb{N}} \times 6$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+2)(n+3) \text{ بر } 6 \text{ بخش پذیر است}$$

ت) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

$$\text{اگر } n=4 \text{ آنگاه: } 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15 \quad \text{عدد اول نیست. بنابراین گزاره غلط است.}$$

ث) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

گزاره صحیح است. اثبات: کافیست دو عدد گویا را $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نمایش دهیم. a, b, c, d اعداد صحیح بوده و b, d مخالف صفر باشند، بنابراین:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{\text{عدد صحیح}}{\text{عدد صحیح نام‌صفر}}$$

ج) اگر برای هر سه مجموعه A, B, C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$

اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$ ، $C = \{4\}$ ، آنگاه $A \cup B = A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$ ولی $B \neq C$.

چ) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $k+1$ مربع کامل است.

گزاره صحیح است. اثبات: کافیست $k = n(n+1)$ به فرض $n \in \mathbb{N}$ در نظر گرفته شود، بنابراین:

$$k+1 = n(n+1) + 1 = n^2 + n + 1 = (n+1)^2 \rightarrow \text{مربع کامل}$$

خواباندنی

یافتن مثال نقض ممکن است کار بسیار دشواری باشد. گاهی سال‌ها وقت برای یافتن مثال نقض لازم بوده است. به طور مثال عبارت $n^2 + 1$ را برای n ‌های طبیعی در نظر بگیرید. اگر حاصل این عبارت را برای $n = 1, 2, 3, \dots$ به دست آورید هیچ کدام مجذور کامل نمی‌باشند. آیا به نظر شما می‌توان حکم کرد که «برای n ‌های طبیعی عبارت $n^2 + 1$ هیچ‌گاه مجذور کامل نیست». پاسخ منفی است! سرینسکی ریاضی‌دان معاصر لهستانی، کوچک‌ترین عدد طبیعی که به ازای آن $n^2 + 1$ مجذور کامل باشد را ارائه کرد. این عدد ۲۹ رقم دارد! عدد $28587374425398721716763060185626431027744401$ مثال نقض مورد نظر است.

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

حل: دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد:

الف) n زوج است، به عبارت دیگر $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$): در این حالت داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1$$

که حاصل یک عدد فرد است.

ب) n فرد است، یعنی $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$): در این حالت هم داریم:

$$\begin{aligned} n^2 - 5n + 7 &= (2k - 1)^2 - 5(2k - 1) + 7 = 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 7 \\ &= 4k^2 - 14k + 13 = 2(2k^2 - 7k + 6) + 1 \end{aligned}$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

به عبارت دیگر زوج بودن n ، فرد بودن $n^2 - 5n + 7$ را نتیجه می‌دهد.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن $n^2 - 5n + 7$ را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به صورت گزاره $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ شیوه اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$\begin{aligned} p \vee q \Rightarrow r &\equiv r \vee \sim(p \vee q) \\ &\equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q) \\ &\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \end{aligned}$$

به طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزاره دلخواه داریم:

$$P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n \Rightarrow r \equiv (P_1 \Rightarrow r) \wedge (P_2 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (P_n \Rightarrow r)$$

نوعی دیگری از در نظر گرفتن حالت‌های ممکن، در مثال زیر ارائه شده است.

مثال: ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.

حل: برای a دو حالت ممکن است رخ دهد:

الف) اگر $a = 0$ ، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟) زیرا گزاره $a = 0$ یا $b = 0$ یک ترکیب فصلی است و اگر $a = 0$ درست فرض شود، کل ترکیب درست خواهد بود.

ب) اگر $a \neq 0$ ، در این حالت a^{-1} (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab = 0$ در a^{-1} داریم:

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0$$

$$\Rightarrow b = 0$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.

مقطع در حالتی که a فرد است، b فرد، فرد باشند زیرا اگر حداقل یکی از آن‌ها زوج باشد، ab زوج خواهد بود.
بنابراین با فرض $a = 2n-1$ و $b = 2m-1$ ، $n, m \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$a^2 + b^2 = (2n-1)^2 + (2m-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4m^2 - 4m + 1 = 4n^2 - 4n + 4m^2 - 4m + 2 = 4(n^2 - n + m^2 - m + \frac{1}{2})$$

که حاصل عدد زوج است.

ب) $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ است و $n \in S$ اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n \in A$.

کافیست هر شش عضو S را بررسی کنیم (در نظر گرفتن تمام حالت‌ها):

$$\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1 \rightarrow \text{زوج نیست} \\ n=2 &\Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{4 \times 9}{4} = 9 \rightarrow \text{زوج نیست} \\ n=3 &\Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{9 \times 16}{4} = 36 \rightarrow \text{زوج است} \\ n=4 &\Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{16 \times 25}{4} = 100 \rightarrow \text{زوج است} \\ n=5 &\Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{25 \times 36}{4} = 225 \rightarrow \text{زوج نیست} \\ n=6 &\Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{36 \times 49}{4} = 441 \rightarrow \text{زوج نیست} \end{aligned}$$

بنابراین فقط برای $n=3$ و $n=4$ ، $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج است. بنابراین $n \in A$.

اثبات غیر مستقیم

اثبات به روش برهان خلف

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیرمستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرض نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات و محاورات روزمره هم ممکن است از این روش استدلال استفاده کنیم. آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه مورد نظرمان، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن بست یا تناقض منجر می‌شود.

مثال: ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل: فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است. اگر (فرض خلف) $r+x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل $r+x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r+x-r \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

مثال: حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل: فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر باشد و x عددی گنگ باشد ولی rx عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست. بنابراین $(\frac{1}{r})(rx) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض در تناقض است.

مثال: a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

حل: برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. a_1, a_2, a_3 را به ترتیب ۵، ۸ و ۱ در نظر می‌گیریم و b_1, b_2, b_3 را ۸، ۱ و ۵ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) = (5 - 8)(8 - 1)(1 - 5) = (-3)(7)(-4) = 84$$

اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل $a_1 - b_1, a_2 - b_2$ و $a_3 - b_3$ هم باید فرد باشند (چرا؟) و در نتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$ باید عددی فرد باشد. اما مجموع این سه عبارت صفر است!

زیرا فقط حاصلضرب سه عدد فرد، عددی فرد خواهد شد و در صورتی که حداقل یکی از آنها زوج باشد، حاصلضرب زوج می‌شود.

کار در کلاس

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش پرهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

پرهان خلف: بگیریم $\frac{1}{x}$ عددی نویا باشد، از طرفی ما داریم x عددی نویا ناممکن، عددی نویا است پس وارنج $\frac{1}{x}$ یعنی $\frac{1}{\text{نویا}}$ نویا نویا است، با فرض سوال تناقض دارد، پس $\frac{1}{x}$ عددی نویا است.

ب) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

پرهان خلف: بگیریم $f+g$ در $x=a$ پیوسته باشد، از طرفی فرض داریم دو تابع پیوسته، پیوسته است.

پس $(f+g)-f=g$ در $x=a$ پیوسته است، با فرض سوال تناقض دارد پس $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

اگر P و Q دو گزاره هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آنگاه گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آنگاه P و Q دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آنها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم. در عمل به‌طور معمول درستی یا نادرستی گزاره‌ای که معمولاً ساده‌تر است را انتخاب می‌کنیم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به‌طور مثال اگر P و Q سه گزاره باشند و $Q \Leftrightarrow R$ و $P \Leftrightarrow Q$ یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به هر حال ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعدادی متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

مثال: ترکیب دو شرطی $(a, b \in \mathbb{R}), a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$ درست نیست (چرا؟)

زیرا $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ و نمی‌توان به‌طور قطع ادعا کرد $a^2 = b^2 \Rightarrow a = -b$

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدام یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

ب) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$ **درست**

تأویست: به‌طور مثال از $-2 < 2$
نتیجه می‌شود که $4 < 9$ **دائماً**
نامساوی مستلزم نیست

مثال: اگر $a > 0$ ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$

اگر $a > 0$ ، داریم: $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$

این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم‌ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم‌ارز هستند؟ **زیرا می‌توان طرفین یک نامساوی را در هر عدد مثبت (مانند a) ضرب یا بر آن تقسیم کرد.** اثبات کدام یک ساده‌تر است؟ اثبات $a^2 + 1 \geq 2a$ ساده‌تر است.

$a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$

همچنین

$a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$

و در نهایت:

آخرین گزاره یعنی $(a-1)^2 \geq 0$ همواره برقرار است، به عبارت دیگر حکم هم‌ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است. پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات را (با شرط $a > 0$) به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد:

$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$

$\Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$ همواره برقرار است.

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می‌کنیم و از عباراتی نظیر: آنچه که شما می‌گویید معادل این است که یا گفته شما به مثابه آن است که در آنجا باید از قوانین و ادبیات مورد پذیرش طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی. در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زندگی روزمره هم ممکن است پس از چند مرحله به نتیجه برسیم.

مثال: ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

حل: اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ گزاره همیشه درست.

$a^2 + ab + b^2 \geq 0$

مثال: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید:

حل: $a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$

اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزاره همیشه درست (سمت راست) هم‌ارز است.

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0 \text{ گزاره همیشه درست.}$$

البته ممکن است شما هم راه حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید.

شیوه‌ای که در این قسمت از درس مورد استفاده قرار گرفت را برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان به کار برد.

کاور دو کلاسی

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟

بله هم‌ارزند باشند. (اثبات)

$$n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2(2k^2) \rightarrow \text{زوج است} \quad ; \quad \text{زوج } n \text{ به دو زوج } n^2 \text{ منتهی می‌شود}$$

اثبات عکس: اگر n^2 زوج است و n فرد است، n^2 زوج است.

برهان خلف: اگر n زوج نباشد پس n عددی فرد خواهد بود یعنی:

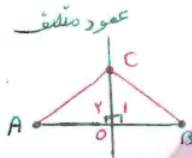
$$n=2k-1 \Rightarrow n^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1 \rightarrow \text{فرد است} \rightarrow \text{تناقض}$$

بنابراین: n^2 زوج است $\Leftrightarrow n$ زوج است

ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

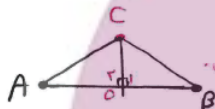
۱) نقطه C روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد. ۲) فاصله نقطه C از دو سر پاره خط AB یکسان است.

اثبات ۱ $\Rightarrow$ ۲ :



$$\begin{aligned} \hat{O}_1 &= \hat{O}_2 \\ AO &= BO \\ OC &= OC \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{من فرض} \\ \text{است} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle AOC \cong \triangle BOC \Rightarrow AC = BC \Rightarrow \text{فاصله نقطه } C \text{ از دو سر پاره خط } AB \text{ یکسان است}$$

اثبات ۲ $\Rightarrow$ ۱ :



بفرض $AC=BC$ ، ارتفاع OC دارد زیرا AB را رسم کردیم و OC عمود منصف است.

$$\begin{aligned} AC &= BC \\ OC &= OC \\ \hat{O}_1 &= \hat{O}_2 = 90^\circ \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{وترسای قائمه} \\ \text{است} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle AOC \cong \triangle BOC \Rightarrow AO = BO \Rightarrow \text{عمود منصف پاره خط } AB \text{ است}$$

بنابراین: ۱ $\Leftrightarrow$ ۲ یعنی دو گزاره هم‌ارزند.

تمرین

پاسخ تمرینها در صفحات بعد می‌باشد.

۱) گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌علامت (مخالف صفر) باشند داریم :

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

۲) عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^2 < x$.

۳) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2$$

۴) آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که

۵) آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که :

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$(a+b \neq 0)$$

۶) گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

① الف اگر x و y دو عدد حقیقی همعلامت (مثبت منفی) باشند داریم:

x و y همعلامت، بنابراین $x > 0$ خواهد بود.

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \iff xy \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \geq 2xy \iff x^2 + y^2 \geq 2xy \iff x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\iff (x-y)^2 \geq 0 \quad \text{همیشه درست}$$

بیا برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

(I) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\iff 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\iff \underline{x^2 + x^2} + \underline{y^2 + y^2} + \underline{z^2 + z^2} - \underline{2xy} - \underline{2yz} - \underline{2zx} \geq 0$$

$$\iff (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0 \quad \text{همیشه درست}$$

(II) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\iff 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$

$$\iff \underline{x^2 + x^2} + \underline{y^2 + y^2} + \underline{1 + 1} - \underline{2xy} - \underline{2x} - \underline{2y} \geq 0$$

$$\iff (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \quad \text{همیشه درست}$$

② عدد حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3 < x^2$. جواب: $x = 1$, $x = -1$ و $x = -2$ و ...

③ اگر α و β دو عدد گسسته باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گسسته است.

(I) اگر $\alpha - \beta$ گویا باشد از طرفی $\alpha + \beta$ گویا است پس مجموع آنها یعنی $2\alpha = \alpha + \beta + \alpha - \beta$ گویا بوده و در نتیجه α نیز گویا است که با فرض تناقض دارد پس $\alpha - \beta$ گسسته است.

(II) اگر $\alpha + 2\beta$ گویا باشد از طرفی $\alpha + \beta$ گویا است پس تفاضل آنها یعنی $\beta = (\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta)$ گویا است که با فرض تناقض دارد پس β گسسته است.

④ آیا اعدادی جمع مانند x و y وجود دارند که $x^2 + y^2 = (x+y)^2$

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \implies 2xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$$

همان‌طور که از اعداد x و y باید صفر باشند به طور مثال $x = 0$ و $y = 7$ جواب است.

⑤ آیا مقادیر حقیقی و نامفرد a و b چنان وجود دارند که: $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (با $a+b \neq 0$)

خیر- اثبات: برهان خلف بگیریم چنین اعدادی وجود داشته باشد، بنابراین:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \implies \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \implies (a+b)^2 = ab \implies a^2 + b^2 + 2ab = ab$$

$$\implies a^2 + b^2 + ab = 0 \implies 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 0 \implies a^2 + b^2 + ab = 0$$

$$\implies a^2 + b^2 + ab = 0 \implies a = 0 \wedge b = 0 \wedge a+b = 0 \implies \text{تناقض}$$

⑥ الف) مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است. صحیح است زیرا :

$$\left. \begin{array}{l} \text{عدد فرد: } 2n-1 \\ n \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{مربع}} (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 2(2n^2 - 2n) + 1 \rightarrow \text{فرد است} \\ \xrightarrow{\text{مکعب}} (2n-1)^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1 = 2(4n^3 - 6n^2 + 3n) - 1 \rightarrow \text{فرد است} \end{array}$$

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است. صحیح است زیرا :

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $n+1$ و $n+2$ و $n+3$ و $n+4$ و $n+5$: پنج عدد طبیعی متوالی

$$\text{میانگین (عدد)} = \frac{\text{مجموع اعداد}}{\text{تعداد اعداد}} = \frac{5n+15}{5} = n+3 = \text{عدد وسطی}$$

درس ۲ بخش پذیری در اعداد صحیح^۱

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی از چیزها را، بدون آنکه باقی‌مانده‌ای داشته باشیم، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیاء، توسط شمارنده‌ها می‌گویند. مثلاً، ۱۲ شیء را می‌توان با شمارنده‌های مثبت عدد ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ دسته‌بندی یا شمارش کرد. در این فصل برای نمایش این مفهوم از نماد «|» استفاده کرده و مثلاً می‌نویسیم $2|12$ و می‌خوانیم عدد ۲ عدد ۱۲ را می‌شمارد یا عاد می‌کند. بیان دیگر این مفهوم آن است که بگوییم عدد ۱۲ بر عدد ۲ بخش پذیر است (باقی‌مانده تقسیم صفر است).

توجه داشته باشید که دسته‌بندی کردن اشیاء در دسته‌های صفر تایی یا شمارش تعدادی شیء خاص به صورت صفر تا صفر کار بی‌معنایی است؛ لذا صفر هیچ عدد غیر صفری را نمی‌شمارد و هیچ عدد غیر صفری بر صفر بخش پذیر نمی‌باشد در ضمن توجه داشته باشید که هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش پذیر است؛ یعنی اگر a عددی طبیعی باشد $1|a$ و $a|a$. (عدد ۱ هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد بر خودش بخش پذیر است).

حال با توجه به اینکه مفهوم بخش پذیری بر b a بر a معادل است با اینکه بنویسیم $a|b$ (عدد a ، عدد b را می‌شمارد یا عدد a ، عدد b را عاد می‌کند) مفهوم بخش پذیری را می‌توان برای هر دو عدد صحیح به کار برد، مثلاً می‌توان گفت، عدد $28 -$ بر 4 بخش پذیر است (زیرا، $28 = 4 \times 7$) یا باقی‌مانده تقسیم $28 -$ بر عدد 4 صفر است) پس در حالت کلی و با تعمیم مفهوم عاد کردن به مجموعه اعداد صحیح عاد کردن به صورت زیر تعریف می‌شود.

عدد صحیح a ، که مخالف صفر است^۲، شمارنده عدد b است - یا a ، b را می‌شمارد یا $a|b$ یا b بر a بخش پذیر است - هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به طوری که $b=aq$.

اگر عدد b بر عدد a بخش پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند می‌نویسیم $a \nmid b$

۱- در سراسر این فصل منظور از عدد، عدد صحیح است.

۲- اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

۱ با توجه به تعریف رابطه عادی کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $7 \mid 63 \Leftrightarrow 63 = 7 \times 9$

ب) $7 \mid 91 \Leftrightarrow 91 = 7 \times 13$

پ) $(-6) \times (-9) = 54 \Leftrightarrow 54 \mid 6$

ت) $5 \times (-7) = -35 \Leftrightarrow 5 \mid -35$

ث) $18 \mid 0 \Leftrightarrow 0 = 18 \times 0$

ج) $a = -1$ یا $a = +1 \Rightarrow a \mid 1$

ج) $13 \mid 26$ و $2 \mid 26 \Rightarrow 2 \times 13 = 26$

۲ با استفاده از تعریف عادی کردن و قوانین ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که $3^5 \mid 3^9$ و سپس ثابت کنید:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$$

$$(3^9 = 3^5 \times 3^4 \Rightarrow 3^5 \mid 3^9) \quad (3^4 = 3^2 \times 3^2)$$

$$a^n = a^m \times a^{n-m} \Rightarrow a^m \mid a^n$$

ویژگی‌های رابطه عادی کردن

ویژگی ۱: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$$

مثال: $3 \mid 6 \Rightarrow 3 \mid 6 \times 5, 3 \mid 6 \times 4, 3 \mid 6 \times (-7), \dots$

نتیجه: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه b^n را می‌شمارد و در حالت کلی b^n را می‌شمارد که $n \in \mathbb{N}$ است. یعنی:

$$\begin{cases} \text{الف) } a \mid b \Rightarrow a \mid b^2 \\ \text{ب) } a \mid b \Rightarrow a \mid b^n \end{cases}$$

برای اثبات (الف) کافی است از ویژگی ۱ استفاده کرده و m را مساوی b فرض کنیم؛ و برای اثبات (ب) نیز کافی است $m = b^{n-1}$ فرض شود.

سؤال: آیا از اینکه $a \mid bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عادی می‌کند؟ **خیر نمی‌توان چنین نتیجه‌ای گرفت.** به گزاره‌های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید:

الف) $3 \mid 9$ و $3 \mid 6$ و $3 \mid 6 \times 9$

ب) $3 \mid 5$ و $3 \mid 6$ و $3 \mid 6 \times 5$

ج) $6 \mid 4$ و $6 \mid 3$ و $6 \mid 3 \times 4$

سؤال: آیا از اینکه $a \mid b$ می‌توان نتیجه گرفت که $ka \mid kb$ ؟ آیا از $ka \mid kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a \mid b$ ؟ ($k \neq 0$)

$$a \mid b \Rightarrow b = \overset{\text{در } k \text{ ضرب}}{aq} \Rightarrow kb = kaq \Rightarrow ka \mid kb$$

$$ka \mid kb \Rightarrow kb = \overset{\text{بر } k \text{ تقسیم}}{kaq} \Rightarrow b = aq \Rightarrow a \mid b$$

ویژگی ۲: اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

$$a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$$

اثبات: $\begin{cases} a|b \Rightarrow b = aq_1 \quad (1) \\ b|c \Rightarrow c = bq_2 \end{cases}$

$$c = bq_2 \xrightarrow{(1)} c = aq_1q_2 \xrightarrow{q_1q_2=q} c = aq \Rightarrow a|c$$

این خاصیت را «خاصیت تعدی» برای رابطه عاد کردن می‌نامیم.

سؤال: با استفاده از خاصیت تعدی برای رابطه عاد کردن، نشان دهید که:

$$a|b \Rightarrow a|b^n$$

اثبات: تعدی $a|b$: طبق فرض
 $b|b^n \Rightarrow a|b^n$ و می‌دانیم

ویژگی ۳: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

اثبات: $\begin{cases} a|b \Rightarrow b = aq_1 \\ a|c \Rightarrow c = aq_2 \end{cases} \Rightarrow b \pm c = a(q_1 \pm q_2) \Rightarrow a|b \pm c$

سؤال: آیا از اینکه $a|b + c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|b$ یا $a|c$ ؟ خیر به طور مثال $3|5 \pm 3$ ولی $3 \nmid 5$ و $3 \nmid 3$

ویژگی ۴: اگر $a|b$ و $b \neq 0$ در این صورت $|a| \leq |b|$.

اثبات: چون $a|b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq 0$ پس $q \neq 0$ و چون $q \in \mathbb{Z}$ لذا $|q| \geq 1$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را

در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$1 \leq |q| \Rightarrow |a| \times 1 \leq |a| |q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq |b|$$

نتیجه: اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.

اثبات: در صورتی که یکی از اعداد صفر باشند، دیگری نیز صفر خواهد بود زیرا فقط صفر می‌تواند صفر را عاد کند. اما در حالتی که هر دو عدد ناصفر باشند، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow |a| \leq |b| \\ b|a \Rightarrow |b| \leq |a| \end{cases} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

کار در کلاس

۱ اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m+6)$ و $(6m+5)$ بر a بخش پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.

$$\begin{cases} a|7m+6 \Rightarrow a|42m+36 \\ a|6m+5 \Rightarrow a|42m+35 \end{cases} \Rightarrow a|(42m+36) - (42m+35)$$

$$\Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1 \quad (\text{چرا؟})$$

$$|a| \leq 1 \xrightarrow{|a| \in \mathbb{N}} |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۲ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$.

$$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n \xrightarrow{q^n=q'} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n|b^n$$

۳ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که $ac|bd$.

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = aq_1 \\ c|d \Rightarrow d = cq_2 \end{array} \right\} \Rightarrow b \times d = (a \times c) \underbrace{(q_1 q_2)}_q$$

$$\Rightarrow b \times d = a \times c \times q \Rightarrow ac|bd$$

۴ اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb \pm nc$.

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow a|mb \\ a|c \Rightarrow a|nc \end{array} \right\} \xrightarrow{\pm} a|mb \pm nc$$

(از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید).

شما در سال‌های قبل با تعریف و مفهوم اعداد اول آشنا شده‌اید و می‌دانید که هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول، که ثابت شده است مجموعه‌ای نامتناهی است، به صورت $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ نمایش داده می‌شود.

تذکر: با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این صورت $a=1$ یا $a=p$.

مثال: اگر عدد طبیعی a دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+6)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=1$ یا $a=5$.

$$a|9k+7 \Rightarrow a|7 \times (9k+7)$$

$$\Rightarrow a|63k+49$$

$$a|7k+6$$

$$\Rightarrow a|9 \times (7k+6) \Rightarrow a|63k+54$$

$$\Rightarrow a|(63k+54) - (63k+49)$$

$$\Rightarrow a|5 \Rightarrow a=5 \text{ یا } a=1$$

خواندنی

می‌دانیم که هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی $10!$ عدد $10!$ را عاد می‌کند (چرا؟) و به‌طور کلی می‌توان نوشت: $\forall k \leq n, k|n!$ ؛ بنابراین عدد $100!+2$ و $100!+3$ و $\dots$ و بالاخره عدد $100!+100$ همه اعدادی غیراول هستند. بنابراین با توجه به اینکه اعداد $(100!+2)$ و $(100!+3)$ و $\dots$ و $(100!+100)$ ، تعداد ۹۹ عدد طبیعی و متوالی‌اند ما توانسته‌ایم ۹۹ عدد طبیعی متوالی بیابیم که هیچ کدام اول نباشند.

آیا شما می‌توانید ۱۵ عدد طبیعی متوالی بیابید که هیچ کدام اول نباشند؟ $16!+2, 16!+3, \dots, 16!+16$

(برای اینکه نشان دهیم عدد $100!+7$ بر ۷ بخش‌پذیر است، کافی است از عدد ۷ در دو عدد $100!$ و ۷،

فاکتور بگیریم یا با استفاده از خواص عاد کردن بنویسیم: $7|100!+7 \Rightarrow 7|100!$ و $7|7$)

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

می‌خواهیم با توجه به تعریف رابطه عادی کردن، مفاهیم ب.م.م (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک) و ک.م.م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد را معرفی کنیم.

توجه دارید که مقسوم‌علیه همان شمارنده است. به عبارت دیگر، اگر بنویسیم $a|b$ ، یعنی a شمارنده b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است؛ و نیز توجه دارید که b مضرب a است، یعنی $b=aq$ یا $a|b$.

تعریف: عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $d=(a,b)$ ، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد و اگر دو شرط زیر برقرار باشد آنگاه $d=(a,b)$.

(الف) $d|a, d|b$

(ب) $\forall m > 0 : m|a, m|b \Rightarrow m \leq d$

شرط (الف) مقسوم‌علیه مشترک بودن را برای d تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که d از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m بزرگ‌تر یا مساوی است.

اگر داشته باشیم $(a,b)=1$ در این صورت می‌گوییم، a و b نسبت به هم اول‌اند.

مثال: $(1,12)=1$, $(7,11)=1$, $(4,9)=1$, $(3,4)=1$

$(4,-6)=2$, $(-6,4)=2$, $(0,6)=6$, $(8,16)=8$, $(6,9)=3$

تعریف: عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $c=[a,b]$ ، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد، و اگر این دو شرط برقرار باشد آنگاه $c=[a,b]$

(الف) $a|c$, $b|c$

(ب) $\forall m > 0 : a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$

توضیح دهید که هریک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

شرط (الف) مضرب مشترک بودن را برای c تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که از مضرب مشترک دلخواهی

چون m ، کوچکتر یا مساوی است.

مثال: $[3,4]=12$, $[6,4]=12$, $[1,8]=8$, $[-4,16]=16$

مثال:

کار در کلاس

۱ با توجه به تعاریف ب.م.م و ک.م.م ثابت کنید:

(الف) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$ $\xrightarrow{a|b} |a||b|$

شرط اول: $|a||b|$

شرط دوم: $\forall m > 0 : m|a \wedge m|b \Rightarrow m|a \Rightarrow |m| \leq |a| \xrightarrow{m > 0} m \leq |a|$

(ب) $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

شرط اول: $|b||a| \xrightarrow{a|b} |a||b|$

شرط دوم: $\forall m > 0 : a|m \wedge b|m \Rightarrow b|m \Rightarrow |b| \leq |m| \xrightarrow{m > 0} |b| \leq m$

راهنمایی: برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب.م.م را برای $|a|$ بررسی کنیم، یعنی نشان دهیم که $|a|$

و... و نیز برای هر $m > 0$ که $m|a$ و $m|b$ نشان دهیم $m \leq |a|$ و همین‌طور برای اثبات (ب)...

۲ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، ثابت کنید، $(p, a) = 1$

$$(p, a) = d \begin{cases} d \mid p \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = p \\ d \mid a \end{cases} \quad (1)$$

و این با فرض $p \nmid a$ تناقض دارد $d = p \Rightarrow p \mid a$

پس فقط $d = 1$ یا $(p, a) = 1$.

تذکر: توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند، مطلب کار در کلاس ۲ ممکن است برقرار نباشد:

مثال: $(4, 6) = 2 \neq 1$ ولی $4 \nmid 6$

قضیه تقسیم و کاربردها

ممکن است در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b ، باقی مانده صفر نباشد، یعنی a بر b بخش پذیر نباشد $(b \nmid a)$. در این صورت قضیه تقسیم که به بیان آن خواهیم پرداخت (این قضیه را بدون اثبات می پذیریم) کمک می کند تا بحث بخش پذیری در $\mathbb{Z}$ را کامل کنیم.

قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

مثال: اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم داریم: $q = 3$ و $r = 4$ ، و به عبارت دیگر $25 = (7 \times 3) + 4$. حال اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم و $q = -3$ در نظر بگیریم، در این صورت تساوی $4 - 25 = 7 \times (-3) - 4$ حاصل می شود که نمی توان (-4) را به عنوان باقی مانده معرفی کرد، زیرا طبق قضیه تقسیم باقی مانده باید نامنفی و کوچک تر از مقسوم علیه باشد در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسوم علیه، شرایط قضیه تقسیم را برقرار می کنیم:

$$\begin{aligned} -25 &= 7 \times (-3) - 4 = 7 \times (-3) - 4 - 7 + 7 \\ &= 7 \times (-3) - 7 + 3 = 7 \underbrace{[(-3) - 1]}_q + 3 = 7q + 3 \Rightarrow r = 3 \end{aligned}$$

تذکر: همان طور که از دوره ابتدایی به خاطر دارید در تقسیم عدد a بر b ، a را مقسوم، b را مقسوم علیه، q را خارج قسمت و r را باقی مانده می نامیم.

مثال: اگر باقی مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} \text{طبق فرض: } m &= 17q_1 + 5 \\ \text{طبق فرض: } n &= 17q_2 + 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2m = 2 \times 17q_1 + 10 \\ -5n = (-5) \times 17q_2 - 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q_1 - 5q_2) - 5$$

$$= 17(2q_1 - 5q_2) - 5 - 17 + 17$$

$$= 17(\underbrace{2q_1 - 5q_2}_{q_r} - 1) + 17 - 5$$

$$\Rightarrow (2m - 5n) = 17(\underbrace{q_r - 1}_q) + 12$$

$$= 17q + 12 \Rightarrow r = 12$$

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیه تقسیم، می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b ، و با توجه به اینکه باقی‌مانده تقسیم یعنی r در رابطه $0 \leq r < b$ صدق می‌کند، برای a بر حسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح a را بر ۵ تقسیم کنیم در این صورت یا a بر ۵ بخش پذیر است، یعنی $r = 0$ ، یا باقی‌مانده تقسیم a بر ۵ عدد ۱ است یا ... یا باقی‌مانده تقسیم ۴ است؛ به عبارت دیگر، $a = 0 \dots$ یا $a = 5k + 3$ یا $a = 5k + 1$ یا $a = 5k$ یا $a = 5k + 4$ پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

مسئله ۱: اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $2k$ یا $2k + 1$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

حل: کافی است m را بر ۲ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$$m = 2k + r, \quad 0 \leq r < 2 \Rightarrow m = 2k \text{ یا } m = 2k + 1$$

مسئله ۲: ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می‌شود.

حل: کافی است p را بر ۶ تقسیم کنیم، در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$$p = 6k \quad (1)$$

$$p = 6k + 1 \quad (2)$$

$$p = 6k + 2 \quad (3)$$

$$p = 6k + 3 \quad (4)$$

$$p = 6k + 4 \quad (5)$$

$$p = 6k + 5 \quad (6)$$

p در حالت (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اول بودن آن تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از ۳ داریم:

$$p = 3(2k + 1)$$

یا $p = 3k'$ یا $3 | p$ که با اول بودن p در تناقض است و لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

(توجه دارید که عکس مطلب فوق در حالت کلی برقرار نیست؛ مثلاً $25 = 6 \times 4 + 1$) ولی ۲۵ اول نیست.)

مسئله ۳: ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ نوشته می‌شود، سپس

نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(8t + 1)$ نوشته می‌شود (باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است).

حل : فرض کنیم $a \in \mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$$a = 4k \quad (۱)$$

$$a = 4k + 1 \quad (۲)$$

$$a = 4k + 2 \quad (۳)$$

$$a = 4k + 3 \quad (۴)$$

(چهار مجموعه $A_1 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k\}$ و $A_2 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 1\}$ و $A_3 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 2\}$ و $A_4 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 3\}$ را افزای می کنند.)
حالت های (۱) و (۳) زوج بوده و لذا $a = 4k + 1$ یا $a = 4k + 3$

$$\text{اگر } a = 4k + 1 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(\underbrace{2k^2 + k}_{k'}) + 1 = 8k' + 1$$

$$\text{اگر } a = 4k + 3 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8(\underbrace{2k^2 + 3k + 1}_{t}) + 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 8t + 1$$

تمرین

۱ فرض می کنیم $ab = cd$, a, b, c, d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطه عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۲ ثابت کنید : اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۳ اگر $a > 1$ و $a|9k + 4$ و $a|5k + 3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $5|4k + 1$ ، ثابت کنید : $25|16k^2 + 28k + 6$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$ ، همواره می توان نتیجه گرفت که $a + c|b + d$ ؟

۶ ثابت کنید : الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول اند.

(راهنمایی : فرض کنید $d = (m, m + 1)$ و ثابت کنید $d|1$ و نتیجه بگیرید $d = 1$).

۷ اگر $p \neq q$ و هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q) = 1$.

۸ اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید :

$$m \leq n, a|b \Rightarrow a^m|b^n$$

۹ اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $a + 2|b$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 3)$ بر ۸ را بیابید.

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3 - n$

(راهنمایی : برای n سه حالت $n = 3k$ و $n = 3k + 1$ و $n = 3k + 2$ در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3|n^3 - n$).

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر ۳! بخش پذیر است.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید: $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $([m^2, m], m^5)$

ب) $(2m, 6m^2)$

پ) $(3m+1, 3m+2)$

ت) $[m^4, (m^2, m^3)]$

ث) $[(72, 48), 120]$

۱ فرض می‌کنیم $ab = cd$ و a, b, c, d اعداد صحیح و ناصفرند در این صورت پنج رابطه عادی از این تساوی نتیجه بگیرید.

$$a|cd, b|cd, c|ab, d|ab, ab|cd$$

۲ ثابت کنید: اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

$$a|b \xrightarrow{\text{و ضرب در ۱}} a|(-1) \times b \Rightarrow a|-b$$

$$-a|a, a|b \xrightarrow{\text{و ضرب در ۲ منفی}} -a|b$$

$$a|b \Rightarrow (-1)a|(-1)b \Rightarrow -a|-b$$

۳ اگر $a > 1$ و $a|4k+4$ و $a|5k+3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

$$a|4k+4 \xrightarrow{\text{در ۵ ضرب}} a|20k+20$$

$$a|4k+3 \xrightarrow{\text{در ۹ ضرب}} a|36k+27 \Rightarrow a|(20k+20) - (36k+27) \Rightarrow a|7 \xrightarrow{a>1} a=7 \Rightarrow a \text{ عددی اول است}$$

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $5|4k+1$ ، ثابت کنید: $25|16k^2+28k+6$

$$5|4k+1 \xrightarrow{\text{در ۴ ضرب}} 25|16k^2+8k+4$$

$$\xrightarrow{\text{در ۵ ضرب}} 25|20k+5 \quad \left. \begin{array}{l} 25|16k^2+8k+4 \\ 25|20k+5 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 25|16k^2+28k+9$$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$ ، همواره می توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$ ؟

خیر، به طور مثال $۲|۲$ و $۲|۴$ ولی $۲+۲ \nmid ۲+۴$.

۶ ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند.

$$\text{برای } m \in \mathbb{Z}, (m, m+1) = d \Rightarrow d|m \wedge d|m+1 \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(m+1)-m \Rightarrow d|1 \xrightarrow{d \geq 1} d=1$$

ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول اند.

$$\text{برای } k \in \mathbb{Z}, (2k+1, 2k+3) = d \Rightarrow d|2k+1 \wedge d|2k+3 \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(2k+3)-(2k+1) \\ \Rightarrow d|2 \xrightarrow{\text{زوجیت}} d=1$$

۷ اگر $p \neq q$ و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q) = 1$.

برهان خلف: $(p, q) = d, d \neq 1$ نباریم:

$$d|p \wedge d|q \xrightarrow{d \neq 1} d=p \wedge d=q \Rightarrow p=q \quad \text{تناقض}$$

۸ اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $m \leq n, a|b \Rightarrow a^m|b^n$

$$a|b \xrightarrow{m \text{ بار}} a^m|b^m \xrightarrow{b^m \times b^{n-m}} a^m|b^m \times b^{n-m} \Rightarrow a^m|b^n$$

۹ اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

$$\begin{aligned} a &= 7k + 5 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56k + 40 \\ a &= 8k' + 7 \xrightarrow{\times 7} 7a = 56k' + 49 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفریق}} a = 56k - 56k' - 9 \\ \underline{-9 = -56 + 47} \quad a = 56k - 56k' - 56 + 47 \\ \Rightarrow a = 56(k - k' - 1) + 47 \Rightarrow \text{باقیمانده } r = 47$$

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $a+2|b$ در این صورت باقی مانده تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر ۸ را بیابید.

$$\text{برای } n \in \mathbb{Z}, a = 2n+1 \xrightarrow{b|a+2} b|2n+3 \Rightarrow b \text{ عدد فرد} \Rightarrow b = 2m+1, m \in \mathbb{Z} \\ a^2 + b^2 + 3 = (2n+1)^2 + (2m+1)^2 + 3 = 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 + 4m + 1 + 3 \\ = 4n(n+1) + 4m(m+1) + 4 = 4k + 4k' + 4 = 4(k+k') + 4 \Rightarrow r=4$$

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3 - n$

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$$

$$\text{اگر } n=2k \Rightarrow n^3 - n = 2k(2k-1)(2k+1) \Rightarrow 2|n^3 - n$$

$$\text{اگر } n=2k+1 \Rightarrow n^3 - n = (2k+1)(2k)(2k+2) = 2k(2k+1)(2k+2) \Rightarrow 2|n^3 - n$$

$$\text{اگر } n=2k+2 \Rightarrow n^3 - n = (2k+2)(2k+1)(2k+3) = 2(k+1)(2k+1)(2k+3) \Rightarrow 2|n^3 - n$$

بنابراین در هر حالت $2|n^3 - n$ داریم.

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

با فرض $a = bq + r$ داریم :

$$\begin{matrix} n|a \\ n|b \end{matrix} \Rightarrow n|bq \quad \left. \begin{matrix} a - bq = r \\ a - bq = r \end{matrix} \right\} \Rightarrow n|r$$

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است.

برای هر عدد صحیح a دلخواه این سه حالت زیر وجود دارد :

$$\text{حالت اول: } a=2k \Rightarrow 3|a$$

$$\text{حالت دوم: } a=2k+1 \Rightarrow a+2=2k+3 \Rightarrow a+2=2(k+1) \Rightarrow 2|a+2$$

$$\text{حالت سوم: } a=2k+2 \Rightarrow a+4=2k+6 \Rightarrow a+4=2(k+3) \Rightarrow 2|a+4$$

بنابراین همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۲ بخش پذیرند.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

با فرض $n \in \mathbb{Z}$ ، دو عدد صحیح متوالی را به صورت n و $n+1$ در نظر می گیریم :

$$(n+1)^3 - n^3 = \cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 - \cancel{n^3} = 3n(n+1) + 1 = 2(\underbrace{3k}_{2k}) + 1 \Rightarrow \text{عدد فرد است.}$$

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر ۳! بخش پذیر است.

اعداد صحیح متوالی را به صورت $n+1$ ، n و $n-1$ در نظر می گیریم. حاصل ضرب آن ها $n^3 - n$ خواهد

شد و قبلاً (تمرین ۱۱) نشان دادیم که $3|n^3 - n$ ، پس $3|n^3 - n$ بر ۳ بخش پذیر است.

از طرفی حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، مضرب ۲ است پس حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی،

بر ۲ بخش پذیر است.

بنابراین $n^3 - n$ بر ۶ یعنی ۳! بخش پذیر است، در نتیجه $3!|n^3 - n$.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید : ($m \in \mathbb{Z}$)

الف) $([m^2, m], m^5)$

$$(\underbrace{[m^2, m]}_{m^2}, m^5) = (m^2, m^5) = m^2, \quad m \neq 0$$

ب) $(2m, 6m^3)$

$$(2m, 6m^3) = 2|m|, \quad m \neq 0 \quad (\text{توجه داشته باشیم } 2m \mid 6m^3)$$

پ) $(3m+1, 3m+2)$

$$(3m+1, 3m+2) = 1 \quad (\text{توجه داشته باشیم } 3m+1, 3m+2 \text{ دو عدد صحیح متوالیند})$$

ت) $[m^4, (m^2, m^3)]$

$$[m^4, \underbrace{(m^2, m^3)}_{m^2}] = [m^4, m^2] = |m^2|, \quad m \neq 0$$

ث) $[(72, 48), 120]$

$$(\underbrace{[72, 48]}_{24}, 120) = [24, 120] = 120 \quad (\text{توجه داشته باشیم } 24 \mid 120)$$

توشه ای برای موفقیت

فعالیت

در درس قبل دیدیم که باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نماینده یک مجموعه از اعداد در نظر بگیریم که باقی‌مانده تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد، داریم:

(مجموعه اعدادی را که باقی‌مانده تقسیم آنها بر عدد m ، مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم)

$$A_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots, 16, \dots\} = [0]_4$$

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 1\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, \dots, 13, \dots, 21, \dots\} = [1]_4$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 2\} = \{\dots, -6, \dots, 2, 6, 10, \dots\} = [2]_4$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 3\} = \{\dots, -13, \dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} = [3]_4$$

- ۱ دو عضو دلخواه از مجموعه A_1 را در نظر بگیرید. آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟
بله مضرب ۴ است. به طور مثال اگر ۸ و ۱۶ انتخاب شوند $16 - 8 = 8$ مضرب ۴ می‌باشد.
- ۲ از مجموعه A_1 دو عضو دلخواه را در نظر بگیرید و تفاضل آنها را حساب کنید. آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟
بله مضرب ۴ است. به طور مثال: $13 - 5 = 8$ مضرب ۴ است.
- ۳ نتیجه‌ای را که از ۱ و ۲ گرفتید در حالت کلی برای هر دو عضو دلخواه از A_1 اثبات کنید.

$$a, b \in A_1 \Rightarrow \begin{cases} a = 4k_1 + 1 \\ b = 4k_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = (4k_1 + 1) - (4k_2 + 1)$$

$$\Rightarrow a - b = 4(k_1 - k_2) \Rightarrow 4 \mid a - b$$

- ۴ آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعه A_2 همگی بر عدد ۴، باقی‌مانده یکسان دارند؟
بله در مورد مجموعه A_2 چه می‌توان گفت؟ تفاضل هر دو عدد دلخواه از A_2 ، مضرب ۴ است.

می‌دانیم مجموعه‌های A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 یک‌افراز برای مجموعه $\mathbb{Z}$ هستند و بنابراین هر دو عدد صحیح، مانند a و b ، یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند و یا هر کدام در یک مجموعه

واقع‌اند (A_1, A_2, A_3 اشتراکی با هم ندارند. چرا؟) بنا به تعریف افراز، نباید اشتراک داشته باشند.

و لذا اگر a و b هر دو در یک مجموعه از این چهار مجموعه باشند (باقی‌مانده تقسیم a و b بر ۴ مساوی باشد

یا اصطلاحاً a و b بر ۴ هم‌باقی‌مانده باشند) همواره $a - b \mid 4$ و اگر این‌طور نباشد $4 \nmid a - b$.

تعریف: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b ، اگر $m \mid a - b$ ، می‌گوییم « a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانه m »؛ و می‌نویسیم $a \equiv b \pmod{m}$. تعریف رابطه هم‌نهشتی به پیمانه m ، به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b \quad (m \in \mathbb{N})$$

مثال:
$$\begin{cases} 12 \equiv 2 \pmod{5}, -11 \equiv 1 \pmod{6} \\ -29 \equiv -5 \pmod{10}, 23 \equiv -7 \pmod{3} \end{cases}$$

قرارداد: مجموعه همه اعداد صحیح که باقی‌مانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، یعنی

$$A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$$

را کلاس یا دسته هم‌نهشتی r به پیمانه m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

برای استفاده از رابطه هم‌نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم که با توجه به تعریف این رابطه

و خواص رابطه عادی کردن، ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی به راحتی اثبات می‌شوند. شما در کامل کردن اثبات‌ها شرکت کنید.

سه خاصیت مهم در هم‌نهشتی:

$$1- \forall m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}: a \equiv a \pmod{m} \quad (\text{هر عدد صحیح با خودش هم‌نهشت است}).$$

$$2- \text{برای هر } m \in \mathbb{N} \text{ و اعداد صحیح } a, b: a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{m}$$

$$3- \text{برای هر } m \in \mathbb{N} \text{ و اعداد صحیح } a, b, c: a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m} \quad (\text{خاصیت تعدی})$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + c \pmod{m} \\ a - c \equiv b - c \pmod{m} \end{cases}$$

ویژگی ۱: به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid a + c - b - c$$

$$\Rightarrow m \mid (a + c) - (b + c) \Rightarrow (a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$$

مثال: با توجه به فعالیت قبل فرض کنیم، $7 \equiv -1 \pmod{4}$ یا $[-1, 7] \in A_4$ در این صورت اگر ۵ واحد به دو

طرف این هم‌نهشتی اضافه کنیم فاصله این دو عدد یا تفاضل آنها همچنان حفظ شده و همان ۸ که مضرب ۴ است باقی می‌ماند.

به عبارت دیگر، اعداد حاصل یعنی $7 + 5 = 12$ و $-1 + 5 = 4$ نیز در A_4 قرار خواهند گرفت.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

ویژگی ۲: دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid c \times (a - b) \Rightarrow m \mid ac - bc$$

$$\Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

اثبات:

تذکر: عکس ویژگی ۲ برقرار نیست، یعنی اگر $a \equiv^m b$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \equiv^m b$ (قانون حذف برای رابطه هم‌نهشتی در حالت کلی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید. $2 \times 2 \equiv^2 3 \times 2$ ولی $2 \not\equiv^2 3$

$$a \equiv^m b \Rightarrow a^n \equiv^m b^n$$

ویژگی ۳: (دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند.) ($n \in \mathbb{N}$)

مثال: $(5 \equiv^3 2 \Rightarrow 5^3 \equiv^3 2^3)$

اثبات: (از اتحاد $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم)

$$a \equiv^m b \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv^m b^n$$

تذکر: می‌دانیم $5^2 \equiv^4 3^2$ ولی $5 \not\equiv^4 3$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که **عکس ویژگی ۳ برقرار نیست.**

$$a \equiv^m b, c \equiv^m d \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv^m bd & (1) \\ a + c \equiv^m b + d & (2) \\ a - c \equiv^m b - d & (3) \end{cases}$$

ویژگی ۴: دو طرف دو رابطه هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و در هم ضرب کرد.

$$(15 \equiv^5 10, 7 \equiv^5 2 \Rightarrow 15 \times 7 \equiv^5 10 \times 2 \text{ و } 15 \times 2 \equiv^5 10 \times 7)$$

$$\text{و } 15 + 7 \equiv^5 10 + 2 \Rightarrow 22 \equiv^5 12$$

اثبات ①:

$$\begin{aligned} a \equiv^m b &\Rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{\times c} m \mid ac - bc \\ c \equiv^m d &\Rightarrow m \mid c - d \xrightarrow{\times b} m \mid bc - bd \\ &\Rightarrow m \mid (ac - bc) + (bc - bd) \Rightarrow m \mid ac - bd \Rightarrow ac \equiv^m bd \end{aligned}$$

اثبات ② و ③ به عهده شما:

$$\left. \begin{aligned} a \equiv^m b &\Rightarrow m \mid a - b \\ c \equiv^m d &\Rightarrow m \mid c - d \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\pm} m \mid (a - b) \pm (c - d) \Rightarrow m \mid (a \pm c) - (b \pm d) \Rightarrow a \pm c \equiv^m b \pm d$$

تذکر مهم: اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت $a \equiv^m r$

$$a = mq + r \Rightarrow a \equiv^m r$$

$$(179 = 11 \times 16 + 3 \Rightarrow 179 \equiv^{11} 3)$$

اثبات :

$$a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m \mid a - r \Rightarrow a \equiv r^m$$

نتیجه ۱ : هرگاه بخواهیم کوچک ترین عدد نامنفی و هم نهشت با عدد a به پیمانه m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی مانده را به دست آوریم.

مثال: $296 \equiv ? \pmod{11} \Rightarrow 296 \equiv 10$

نتیجه ۲ : اگر دو عدد a و b تقسیم بر عدد طبیعی m ، هم باقی مانده باشند در این صورت $a \equiv b^m$.

مثال : باقی مانده تقسیم عدد $A = (27)^7 + 19$ را بر ۱۳ بیابید.

$$27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow \underbrace{(27)^7}_{\equiv 1^7} \equiv 1 \pmod{13} \text{ و } 19 = 13 \times 1 + 6$$

$$\Rightarrow \underbrace{19}_{\equiv 6} \xrightarrow{\text{با توجه به ① و ②}} (27)^7 + 19 \equiv 1 + 6 \xrightarrow{\text{با توجه به ①}} A \equiv 7 \pmod{13} \Rightarrow r = 7$$

پس باقی مانده A بر ۱۳، برابر با ۷ می باشد.

مثال : باقی مانده تقسیم عدد $A = (1000)^{13} \times 12 + 10$ را بر ۷ بیابید.

$$1000 = 7 \times 142 + 6 \Rightarrow 1000 \equiv 6 \pmod{7} \text{ و } 6 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 1000 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \equiv (-1)^{13} = -1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 \equiv (-1) \times 12 = -12 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \equiv (-12) + 10 = -2 \pmod{7} \text{ و } -2 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow r = 5$$

$$a \equiv b^m \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

ویژگی ۵ : می توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$\begin{aligned} \text{طبق فرض: } a &\equiv b^m \\ \Rightarrow a \pm mt &\equiv b \pm mk^m \\ \text{می دانیم: } mt &\equiv mk^m \end{aligned}$$

مثال : می دانیم $7 \equiv 2^5$ اگر به سمت چپ رابطه $3 \times 5 = 15$ و به سمت راست آن $5 \times 5 = 25$ واحد اضافه کنیم خواهیم داشت $7 + 15 \equiv 2 + 25^5$ یا $22 \equiv 27^5$ که این رابطه برقرار است.

$$ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

ویژگی ۶: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم‌نهشتی را بر م‌م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم. (این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم)

نتیجه مهم: اگر $ac \equiv bc$ و $(c, m) = 1$ در این صورت $a \equiv b \pmod{m}$ در واقع قاعده حذف در هم‌نهشتی‌ها، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است.

مثال: واضح است که $4 \times 6 \equiv 4 \times 3$ و چون $(4, 3) = 1$ پس $6 \equiv 3$.

فعالیت

همان‌طور که در دوره ابتدایی آموختید عددنویسی در مبنای ۱۰ انجام می‌شود؛ که در آن ارزش مکانی ارقام، ده تا ده تا در نظر گرفته می‌شود (ده تا یکی می‌شود ده تا و ده تا ده تا یکی می‌شود صد تا و ده تا صد تا یکی می‌شود هزار تا و ...). بنابراین به راحتی می‌توانیم هر عدد را در مبنای ده بسط بدهیم. به عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$1397 = 1 \times 1000 + 3 \times 100 + 9 \times 10 + 7$$

$$\Rightarrow 1397 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10 + 7$$

۱ هر یک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط بدهید:

$$1388109 = 1 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 9$$

$$13571122 = 1 \times 10^7 + 3 \times 10^6 + 5 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2$$

۲ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1358112$ را بر عدد ۹ بیابید.

می‌دانیم $10 \equiv 1$ و بنابر ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی $10^n \equiv 1$ بنابراین:

$$A = 1 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 1 \times 10 + 2$$

$$10^6 \equiv 1 \Rightarrow 1 \times 10^6 \equiv 1$$

$$10^5 \equiv 1 \Rightarrow 3 \times 10^5 \equiv 3$$

$$10^4 \equiv 1 \Rightarrow 5 \times 10^4 \equiv 5$$

$$10^3 \equiv 1 \Rightarrow 8 \times 10^3 \equiv 8$$

$$10^2 \equiv 1 \Rightarrow 1 \times 10^2 \equiv 1$$

$$10 \equiv 1 \Rightarrow 1 \times 10 \equiv 1$$

$$2 \equiv 2$$

$$A \equiv 1 + 3 + 5 + 8 + 1 + 1 + 2$$

با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها داریم:

اگر دقت کنید سمت راست هم نهشتیِ اخیر مجموع ارقام A است. بنابراین می‌توان گفت «باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_2 a_1 a_0}$ را بسط دهید و در هم نهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار دهید، سپس همین نتیجه‌گیری را در حالت کلی بررسی کنید.

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

کار در کلاس

۱ با توجه به اینکه $10^3 \equiv 1$ ، نتیجه می‌گیریم، $10^k \equiv 1$ ، $\forall k \in \mathbb{N}$ ، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

۲ می‌دانیم که $10^1 \equiv -1$ ؛ بنابراین برای هر n زوج، $10^n \equiv 1$ و برای هر n فرد، $10^n \equiv -1$. حال اگر در هم نهشتی به پیمانه ۱۱ و در بسط عدد $A = 4985327$ به جای توان‌های زوج عدد ۱۰، عدد یک و به جای توان‌های فرد عدد ۱۰، عدد (-۱) قرار دهیم باقی‌مانده تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A = 4 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + \dots + 2 \times 10^1 + 7$$

$$\Rightarrow A \equiv 4 \times \dots + \dots \times (-1) + \dots \times 1 + \dots + 2 \times (-1) + 7$$

$$\Rightarrow A \equiv 7 - 2 + 3 - 5 + 8 - 9 + 4 = 6 \Rightarrow r = \dots$$

۳ می‌دانیم $10^2 \equiv 1$ و $10^5 \equiv 1$ و $10^{\dots} \equiv 1$ در این صورت:

$$\forall k \in \mathbb{N}; 10^k \equiv \dots \text{ و } 10^k \equiv \dots \text{ و } 10^k \equiv \dots$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ به جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم نهشتی‌های به پیمانه ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$A = 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \times a_{n-1} + \dots + \dots \times a_2 + \dots + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv \dots \text{ و } A \equiv \dots \text{ و } A \equiv a_0$$

نتیجه حاصل را برای یافتن باقی‌مانده تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

۱ با توجه به اینکه $1^3 \equiv 1$ ، نتیجه می گیریم، $\forall k \in \mathbb{N}, 1^k \equiv 1$ ، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی مانده تقسیم عدد $A=598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلی برای یافتن باقی مانده تقسیم و بخش پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

$$A = 5 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8$$

$$\left. \begin{array}{l} 10^5 \equiv 1 \xrightarrow{\times 5} 5 \times 10^5 \equiv 5 \\ 10^4 \equiv 1 \xrightarrow{\times 9} 9 \times 10^4 \equiv 9 \\ 10^3 \equiv 1 \xrightarrow{\times 8} 8 \times 10^3 \equiv 8 \\ 10^2 \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3 \times 10^2 \equiv 3 \\ 10^1 \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \times 10^1 \equiv 4 \\ 8 \equiv 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} A \equiv 5+9+8+3+4+8 \Rightarrow A \equiv 1 \Rightarrow r=1$$

قاعده: باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳.

۲ می دانیم که $1^{11} \equiv -1$ ؛ بنابراین برای هر n زوج، $1^n \equiv 1$ و برای هر n فرد، $1^n \equiv -1$. حال اگر در هم نهشتی به پیمانه ۱۱ و در بسط عدد $A=4985327$ به جای توان های زوج عدد 1^0 ، عدد یک و به جای توان های فرد عدد 1^0 ، عدد (-1) قرار دهیم باقی مانده تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A = 4 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + \dots + 2 \times 10^1 + 7$$

$$\Rightarrow A \equiv 4 \times 1 + 9 \times (-1) + 8 \times 1 + \dots + 2 \times (-1) + 7$$

$$\Rightarrow A \equiv 7 - 2 + 3 - 5 + 8 - 9 + 4 = 6 \Rightarrow r = 6$$

۳ می دانیم $1^0 \equiv 0$ و $1^5 \equiv 0$ و $1^k \equiv 0$ در این صورت: $\forall k \in \mathbb{N}; 1^k \equiv 0$ و $1^5 \equiv 0$ و $1^k \equiv 0$. بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ به جای توان های عدد 1^0 (در هم نهشتی های به پیمانه ۲ و ۵ و 1^0) صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$A = 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \times a_{n-1} + 0 \times a_{n-2} + \dots + 0 \times a_2 + 0 \times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv a_0 \text{ و } A \equiv a_0 \text{ و } A \equiv a_0$$

نتیجه حاصل را برای یافتن باقی مانده تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش پذیری بر این اعداد را بیان کنید. باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲، همان باقیمانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲ می باشد. بنابراین عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن بر ۲ بخش پذیر باشد یعنی رقم یکان آن عدد زوج باشد.

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۵، همان باقیمانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۵ می باشد. بنابراین عددی بر ۵ بخش پذیر است که رقم یکان آن بر ۵ بخش پذیر باشد یعنی رقم یکان آن صفر یا پنج باشد.

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰، همان رقم یکان آن عدد می باشد. بنابراین عددی بر ۱۰ بخش پذیر است که رقم یکان صفر باشد.

یکی از کاربردهای هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبهٔ روزهای هفته برحسب تاریخ داده شده، مشخص شده است. به‌عنوان مثال: اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، ۲۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته خواهد بود؟ برای پاسخ دادن به سؤالاتی شبیه این سؤال فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

می‌دانیم هر روز از روزهای هفته، مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود. به‌عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این صورت $19 = 12 + 7$ فروردین و $26 = 19 + 7$ فروردین نیز یکشنبه می‌باشد. در بحث تقویم و روزهای هفته دقت دارید که شش ماه اول سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال غیر از اسفند (که، به‌جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

حال فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی ماه چند شنبه است؟ با توجه به مطالب مذکور ۱۶ دی و ۲۳ دی یکشنبه بوده و کافی است از ۲۳ دی تا ۲۸ دی ۵ روز بعد را حساب کنیم که به روز **جمعه** می‌رسیم.

حال اگر فاصلهٔ ۹ دی تا ۲۸ دی را حساب کنیم ($28 - 9 = 19$) مشاهده می‌شود که ۱۹ روز فاصله داریم و چون $19 \equiv 5^7$ لذا کافی است یکشنبه را مطابق جدول مقابل مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم که ۵ روز بعد چه روزی از هفته است یا عدد ۵ متناظر با کدام روز است.

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، فاصلهٔ ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن؛ یعنی $131 = 12 + 3 \times 30 + 29 = d$

از طرفی $131 \equiv 5^7$ و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ۵ پنجشنبه است، یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.

۲ از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

می‌دانیم هفتم تیر پنجشنبه می‌باشد. بنابراین:

$$d = (31 - 7) + 2 \times 31 + 4 \times 30 + 22 \equiv 3 + (-1) + 1 + 1 = 4^7$$

پ	ج	ش	ی	د	س	چ
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

دوشنبه است. ➡

معادلهٔ هم‌نهشتی

تعریف: یک رابطهٔ هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \equiv b^m$ را یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌نامیم؛ و منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی پیدا کردن همهٔ جواب‌هایی چون $x \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند، یعنی $ax \equiv b^m$. ($a, b \in \mathbb{Z}$)

به عنوان مثال، معادله $x \equiv 2^3$ را در نظر بگیرید. در این معادله x می تواند ۲ یا ۵ باشد. عدد بعدی که می تواند به جای x قرار بگیرد و در معادله صدق کند عدد ۸ است و اگر بخواهیم تمام جواب های این معادله یا جواب های عمومی آن را داشته باشیم کافی است از تعریف هم نهستی استفاده کنیم،

$$x \equiv 2^3 \Rightarrow 3 \mid x - 2 \Rightarrow (x - 2) = 3k \Rightarrow x = 3k + 2$$

که اگر k را به ترتیب صفر و ۱ و ۲ قرار بدهیم همان جواب های $x_0 = 2$ و $x_1 = 5$ و $x_2 = 8$ را به دست می آوریم و برای هر $k \in \mathbb{Z}$ ، جوابی برای معادله به دست می آید. در معادله فوق ضریب x عدد یک است و اگر ضریب x عددی غیر از یک باشد برای دست یابی به جواب های عمومی معادله باید ضریب x را حذف کنیم که ویژگی های ۵ و ۶ و نتیجه ویژگی ۶ به ما کمک می کنند.

مثال: جواب های عمومی معادله $4x \equiv 17^5$ را به دست آورید.

$$4x \equiv 17^5, 17^5 \equiv 2 \Rightarrow 4x \equiv 2$$

$$\begin{array}{c} \text{ویژگی ۵} \\ \Rightarrow 4x \equiv 2 + (2 \times 5) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{ویژگی ۵} \\ \Rightarrow 4x \equiv 12 \Rightarrow \cancel{4}x \equiv \cancel{4} \times 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow x \equiv 3 \Rightarrow x = 5k + 3$$

$$(5 \mid x - 3 \Rightarrow x - 3 = 5k \Rightarrow x = 5k + 3)$$

مثال: همه اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش پذیر باشند.

حل: اگر آن عدد را x فرض کنیم باید $7 \mid 3x - 13$ یا $3x \equiv 13^7$

$$3x \equiv 13^7 \Rightarrow 3x \equiv 13 - 7 = 6$$

$$\begin{array}{c} \text{ویژگی ۷} \\ \Rightarrow \cancel{3}x \equiv \cancel{3} \times 2 \Rightarrow x = 7k + 2 \end{array}$$

قضیه: معادله هم نهستی $ax \equiv b^m$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) \mid b$. این قضیه را بدون اثبات می پذیریم.

نتیجه: اگر $(a, m) = 1$ چون برای هر b ، همواره $1 \mid b$ پس معادله $ax \equiv b^m$ همواره دارای جواب است.

مثال: معادله $6x \equiv 11^9$ دارای جواب نیست زیرا، $3 \nmid 11$ و $3 \mid 11^9$ و معادله $4x \equiv 18$ دارای جواب است. چرا؟ چون $(4, 6) = 2 \mid 18$

$$4x \equiv 18 \Rightarrow 2 \times 2x \equiv 2 \times 9, (2, 6) = 2$$

$$\begin{array}{c} \text{ویژگی ۶} \\ \Rightarrow 2x \equiv 9 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 9$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 9 + 3 = 12$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x \equiv \cancel{2} \times 6 \Rightarrow x = 3k + 6$$

این معادله را حل کنید:

حل معادلات سیاله و کاربردهای آن

فعالیت

۱ آیا می‌توانید یک کیسه ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)

یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنه ۴ کیلویی و یک وزنه ۳ کیلویی است.

$$4 \times 4 + 1 \times 3 = 19$$

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟

$$1 \times 4 + 3 \times 5 = 19$$

در واقع شما به دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادله $4x + 3y = 19$ هستید.

(x تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به کار رفته و y تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به کار رفته است)

۲ اگر در قسمت قبل بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟

باید جواب‌هایی چون $x, y \in W$ و x و y بیابیم که $4x + 2y = 19$ چون مجموع دو عدد زوج همواره زوج است پس چنین x و y ای در W وجود ندارد.

تعریف: هرگاه بخواهیم جواب‌های معادله $ax + by = c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $c \in \mathbb{Z}$ و a و b در این صورت معادله مذکور ($ax + by = c$) را یک معادله سیاله درجه اول یا خطی می‌نامیم.

تبدیل یک معادله سیاله به معادله هم‌نهشتی

معادله سیاله $ax + by = c$ دارای دو مجهول است و به دو صورت می‌تواند به یک معادله هم‌نهشتی (با مجهول x یا y) تبدیل شود:

$$ax + by = c \Rightarrow ax - c = (-b)y \Rightarrow -b \mid ax - c \Rightarrow b \mid ax - c$$

$$\Rightarrow ax \equiv c \pmod{b} \quad (b > 0) \quad \text{و} \quad ax \equiv c \pmod{-b} \quad (b < 0) \quad \text{یا} \quad ax \equiv c \pmod{|b|}$$

$$by \equiv c \pmod{a} \quad \text{و} \quad by \equiv c \pmod{-a}$$

و به طریق مشابه می‌توان نوشت:

تذکر: برای سهولت در حل معادله سیاله، بهتر است از بین دو عدد $|a|$ و $|b|$ ، هر کدام کوچکتر است به عنوان پیمانه انتخاب شود.

به عنوان نمونه در حل معادله سیاله $2x + 3y = 7$ ، می‌توان به دو صورت معادله هم‌نهشتی نوشت: $2x \equiv 7 \pmod{3}$ یا $3y \equiv 7 \pmod{2}$ ولی بهتر است در حالتی که پیمانه کوچکتر است، یعنی $3y \equiv 7 \pmod{2}$ نوشته شود.

تذکر: با توجه به قضیه قبل نتیجه می‌گیریم که «شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که، $c \mid (a, b)$ »

۱ با تبدیل معادله سیاله $4x + 5y = 9$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جواب های عمومی این معادله سیاله را بیابید.

$$\begin{aligned} 4x + 5y = 9 &\Rightarrow 4x \equiv 9 \\ &\Rightarrow 4x \equiv 9 - 5 \Rightarrow 4x \equiv 4 \\ &\Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x = 5k + 1 \\ &\Rightarrow 4(5k + 1) + 5y = 9 \\ &\Rightarrow 20k + 4 + 5y = 9 \\ &\Rightarrow 20k + 5y = 5 \\ &\Rightarrow 4k + y = 1 \Rightarrow y = -4k + 1 \end{aligned}$$

۲ در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می توان عمل وزن کردن را انجام داد.

کافی است جواب های عمومی معادله $4x + 3y = 19$ را (بر حسب k) بیابیم و به ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشند تعداد حالت ها را شمارش کنیم:

$$\begin{aligned} 4x + 3y = 19 &\Rightarrow 4x \equiv 19 \\ &\Rightarrow 4x \equiv 1 \Rightarrow 4x \equiv 1 + 3 \\ &\Rightarrow x \equiv 1 \times 4^{-1} \Rightarrow x = 3k + 1 \\ &\Rightarrow 4(3k + 1) + 3y = 19 \\ &\Rightarrow 12k + 4 + 3y = 19 \\ &\Rightarrow 12k + 3y = 15 \Rightarrow 4k + y = 5 \\ &\Rightarrow y = -4k + 5 \\ k = 0 &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \text{ و } k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

به ازای $k = 2$ و بیشتر از آن $y < 0$ و به ازای $k = -1$ و کمتر از آن $x < 0$ که قابل قبول نمی باشند و لذا به دو صورت فوق می توان این کیسه ۱۹ کیلویی را وزن کرد.

مثال: به چند طریق می توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

حل: اگر x و y را به ترتیب تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم حل این مثال معادل است با تعداد جواب های نامنفی $2000x + 5000y = 18000$

$$2000x + 5000y = 18000$$

$$\Rightarrow 2x + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 18 \text{ و } 18 \equiv 8$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x \equiv \cancel{2} \times 4$$

$$\Rightarrow x \equiv 4 \Rightarrow x = 5k + 4$$

$$\Rightarrow 2(5k + 4) + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 10k + 8 + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 10k + 5y = 10 \Rightarrow y = -2k + 2$$

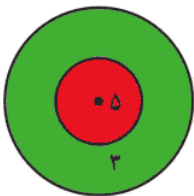
$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ و } k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{فقط به ازای } 1 \text{ و } 0 \text{ برای } x \text{ و } y \text{ جواب‌ها نامنفی هستند})$$

پس به دو طریق امکان تبدیل کردن ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.
مثال: در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)
حل: اگر تعداد چلو خورش قورمه‌سبزی و چلو خورش قیمه سفارش داده شده را به ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت:

$$x + y = 5 \Rightarrow x \equiv 5 \Rightarrow x = k + 5$$

$$\Rightarrow k + \cancel{5} + y = \cancel{5} \Rightarrow y = -k$$

چون x و y اعدادی نامنفی هستند پس باید $k \in \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.



مثال: تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایره هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایره با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره بزرگ‌تر و خارج دایره کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همه تیرها به داخل دایره بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟
حل: اگر x و y را به ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم:

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \equiv 42$$

$$\Rightarrow 5x \equiv 42 + 3 \Rightarrow \cancel{5}x \equiv \cancel{5} \times 9$$

$$\Rightarrow x = 3k + 9$$

$$5(3k + 9) + 3y = 42$$

$$\Rightarrow 15k + 45 + 3y = 42$$

$$\Rightarrow 15k + 3y = -3 \Rightarrow y = -5k - 1 \quad x, y \in \mathbb{W} \Rightarrow k \in \{-1, -2, -3\} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=14 \end{cases}$$

($x=6$ و $y=4$ یعنی تیرانداز ۶ تیر را به دایره کوچک تر و ۴ تیر را به دایره بزرگ تر زده است).

پاسخ تمرین

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته هم نهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

$$\text{به دسته هم نهشتی } \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 9k + 3\} = [3]_9 \text{ تعلق دارد} \Rightarrow 1398 \equiv 1+3+9+8 \equiv 21 \equiv 3 \pmod{9}$$

۲ اگر $k \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان پذیر است

(به عبارت دیگر، $k \in [0]_3$ یا $k \in [1]_3$ یا $k \in [2]_3$)

$$k \equiv 0 \pmod{3} \text{ یا } k \equiv 1 \pmod{3} \text{ یا } k \equiv 2 \pmod{3}$$

باقی مانده تقسیم هر عدد صحیح همچون k بر عدد ۳، پس از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ می باشد به عبارت دیگر

$$k \equiv 0 \pmod{3} \text{ یا } k \equiv 1 \pmod{3} \text{ یا } k \equiv 2 \pmod{3}$$

۳ اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n \mid m$ ثابت کنید $a \equiv b \pmod{n}$.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a-b \xrightarrow[\text{تعدی}]{n \mid m} n \mid a-b \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

۴ فرض کنیم، $a \equiv b \pmod{m}$ و $b \equiv c \pmod{n}$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \equiv c \pmod{d}$.

$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} &\xrightarrow[\text{توزین ۲}]{d \mid m} a \equiv b \pmod{d} \\ b \equiv c \pmod{n} &\xrightarrow[\text{توزین ۳}]{d \mid n} b \equiv c \pmod{d} \end{aligned} \Rightarrow a \equiv c \pmod{d}$$

۵ ثابت کنید: اگر باقی مانده های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن گاه $a \equiv b \pmod{m}$.

روش اول: بگیریم باقی مانده تقسیم دو عدد a و b بر m برابر r باشد، در نتیجه:

$$a \equiv r \pmod{m} \wedge b \equiv r \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

روش دوم: $a \equiv b \pmod{m} \xrightarrow[\text{توزین هم نهشتی}]{m \mid a-b} a-b = m(q_1 - q_2) \Rightarrow m \mid a-b$

$$\begin{aligned} a &= mq_1 + r \\ b &= mq_2 + r \end{aligned} \Rightarrow a-b = m(q_1 - q_2) \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

عکس تمرین ۵: اگر $a \equiv b \pmod{m}$ آن گاه باقی مانده تقسیم دو عدد a و b بر m ، مساوی است.

اثبات: بگیریم باقی مانده تقسیم a بر m برابر r_1 ، باقی مانده تقسیم b بر m برابر r_2 باشد، پس:

$$\begin{aligned} a &= mq_1 + r_1 \\ b &= mq_2 + r_2 \end{aligned} \Rightarrow a-b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2) \quad (1)$$

$$\text{از طرفی: } a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a-b = mq_3 \quad (2)$$

$$\text{از (1) و (2): } mq_3 = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$$

$$\Rightarrow r_1 - r_2 = m(q_3 - q_1 + q_2) \Rightarrow m \mid r_1 - r_2 \Rightarrow r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$$

از طرفی: $0 \leq r_1, r_2 < m \Rightarrow |r_1 - r_2| < m$

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای ختام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \times a^n + \binom{n}{1} \times a^{n-1}b + \binom{n}{2} \times a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} \times a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$.

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} a^n &\equiv a^n \pmod{ab} \\ \binom{n}{1} a^{n-1} b &\equiv 0 \pmod{ab} \\ \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 &\equiv 0 \pmod{ab} \\ \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 &\equiv 0 \pmod{ab} \\ &\vdots \\ \binom{n}{n-1} a b^{n-1} &\equiv 0 \pmod{ab} \\ \binom{n}{n} b^n &\equiv b^n \pmod{ab} \end{aligned} \quad \xrightarrow{+} \quad (a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$$

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است.

طبق تمرین قبلی (تمرین ۷) می‌توان نوشت:

$$(23)^{51} = (11+12)^{51} \equiv 11^{51} + 12^{51} \pmod{132}$$

عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر ۱۳۲ بخش پذیر است $\rightarrow 23^{51} - 11^{51} - 12^{51} \equiv 0 \pmod{132}$

۹ باقی مانده تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

$$\begin{aligned} 2^{11} &\equiv 9 \pmod{23} \xrightarrow{\times 9} 2^{11} \times 9 \equiv 81 \pmod{23} \xrightarrow{-23} 81 - 23 \times 3 = 12 \pmod{23} \\ 12 &\xrightarrow{\times 2} 24 \pmod{23} \xrightarrow{-23} 1 \pmod{23} \\ 1 &\xrightarrow{+7} 8 \pmod{23} \xrightarrow{\times 9} 72 \pmod{23} \xrightarrow{-23 \times 3} 72 - 69 = 3 \pmod{23} \\ 3 &\xrightarrow{\times 9} 27 \pmod{23} \xrightarrow{-23} 4 \pmod{23} \end{aligned}$$

۱۰ اگر دو عدد $(3a-5)$ و $(4a-7)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(9a+6)$ را به دست آورید.

طبق تمرین ۹، دو عدد $4a-7$ و $3a-5$ به بیانه ۱، با یکدیگر هم نیستند:

$$4a-7 \equiv 3a-5 \pmod{1} \Rightarrow 4a-3a \equiv 7-5 \pmod{1} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{1}$$

$$9a \equiv 18 \pmod{1} \xrightarrow{+6} 9a+6 \equiv 24 \pmod{1} \xrightarrow{-24} 9a+6 \equiv 0 \pmod{1} \Rightarrow \text{رقم یکان ۰ است}$$

۱۱ باقی مانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!$ را بر 10 به دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

$$\left. \begin{array}{l} 1! \equiv 1 \\ 2! \equiv 2 \\ 3! \equiv 6 \\ 4! = 24 \equiv 4 \\ 5! = 120 \equiv 0 \\ 6! \equiv 0 \\ \vdots \\ 500! \equiv 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} A \equiv 1 + 2 + 6 + 4 + 0 + \dots + 0 = 13 \xrightarrow{13 \equiv 3} A \equiv 3$$

رقم یکان عدد A ، ۳ است.

۱۲ جواب های عمومی معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را به دست آورید.

$$\Rightarrow 7x \equiv 11 \pmod{5} \Rightarrow 7x \equiv 11 + 5 \times 1 = 16 \pmod{5}$$

$$\xrightarrow{\div 7} x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 2, k \in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{7x + 5y = 11} 7(5k + 2) + 5y = 11 \Rightarrow y = -7k - 2, k \in \mathbb{Z}$$

۱۳ به چند طریق می توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی را x و تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی را y در نظر می گیریم. بنابراین:

$$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 29$$

$$5y \equiv 29 \pmod{2} \Rightarrow 5y \equiv 29 - 12 \times 2 = 5 \pmod{2} \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow y = 2k + 1$$

$$\xrightarrow{2x + 5y = 29} 2x + 5(2k + 1) = 29 \Rightarrow x = -5k + 12$$

k	۰	۱	۲
$y = 2k + 1$: تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی	۱	۳	۵
$x = -5k + 12$: تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی	۱۲	۷	۲

به ۳ طریق می توان خرید کرد $\Rightarrow$

۱۴ معادله های هم نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب های عمومی آنها را به دست آورید.

الف) $423x \equiv 79 \pmod{11}$ ، $79 \equiv 2 \pmod{11}$ ، $423 \equiv 5 \pmod{11}$: میابیم $5x \equiv 2 \pmod{11}$: معادله هم نهشتی $\Rightarrow x \equiv 10 \pmod{11}$ ، $k \in \mathbb{Z}$

ب) $8x \equiv 20 \pmod{12}$

$$8x \equiv 20 - 12 = 8 \pmod{12} \xrightarrow{\div 4, (8, 12) = 4} x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$$

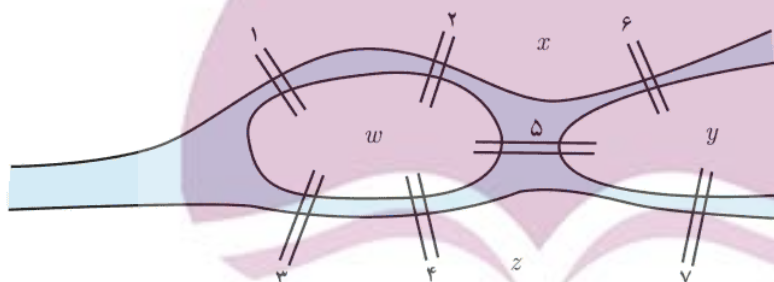
ج) $51x \equiv 11 \pmod{6}$

معادله جواب ندارد $\Rightarrow 3 \nmid 11$ و $(51, 6) = 3$

درس ۱ معرفی گراف

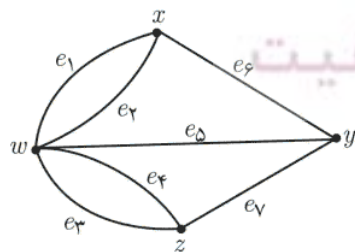
در اوایل قرن هجدهم، معمایی فکر برخی از اهالی شهر کونیگسبرگ (در حال حاضر در روسیه) را به خود مشغول کرده بود.

رودخانه این شهر که از میان شهر عبور می کرد مانند آنچه در شکل زیر می بینید، شهر را به چند قسمت تقسیم می کرد. برخی از مردم این شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل ها، به نقطه شروع حرکت بازگشت؟



شکل ۱

لئونارد اوایلر^۱ (۱۷۸۳ - ۱۷۰۷)، ریاضی دان برجسته سوئیسی، برای حل این مسئله از شکل زیر، که امروزه به آن «گراف» می گوئیم، کمک گرفت و با استفاده از استدلال ثابت کرد که این کار امکان پذیر نیست.



شکل ۲

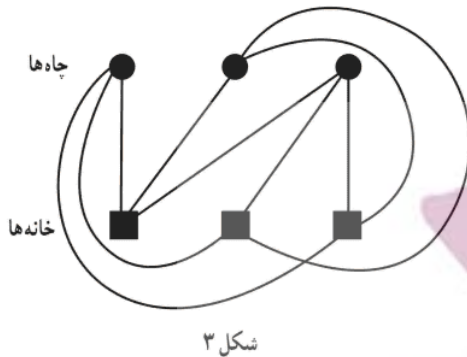
اگر چهار ناحیه x و y و z و w را با ۴ نقطه نمایش دهیم و به ازای هر پل که بین دو ناحیه قرار دارد نقاط متناظر با آن ناحیه ها را به هم وصل نماییم شکل مقابل به دست می آید که گراف حاصل از مدل سازی مسئله مذکور است. مدل سازی بسیاری از مسائل با گراف، دسته بندی منظم و تفکر منطقی درباره آنها را آسان تر می نماید.

اگرچه بیشتر مورخان تاریخ ریاضی شروع بحث گراف را از این مسئله اوایلر می دانند، اما بی تردید

^۱ Leonhard Euler

متفکران و ریاضی‌دانان دیگری پیش از آن تاریخ نیز برای حل مسائل از مدل‌سازی با گراف بهره گرفته‌اند. به‌طور مثال در حدود ۱۰۰ سال پیش از آن شیخ بهایی، ریاضی‌دان ایرانی^۱ (۱۰۰۰-۹۲۵ خورشیدی) مسئله‌ای به این صورت طرح کرد:

سه خانه و سه چاه آب، مانند شکل مقابل مفروض‌اند. آیا می‌توان از هر چاه به هر خانه یک کانال آب حفر کرد به طوری که هیچ دو کانالی یکدیگر را قطع نکنند؟



حل این مسئله هم ارتباط نزدیکی به مباحث گراف دارد. اگر خانه‌ها و چاه‌ها را ۶ نقطه مشخص کنیم و کانال‌ها را با خط‌ها یا منحنی‌ها نمایش دهیم در این صورت دو مجموعه مجزای ۳ عضوی از نقاط داریم که باید نقاط مجموعه اول به تک‌تک نقاط مجموعه دوم وصل شوند. شکل حاصل از این کار یک گراف است و می‌توان نشان داد که این کار نشدنی است و لااقل دو تا از خط‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند. حال به مثالی از تحلیل یک وضعیت به کمک گراف می‌پردازیم.

مثال ۵: تیم فوتبال a, b, c, d, e در یک گروه قرار دارند و تیم‌ها دوبه‌دو با هم بازی می‌کنند و برخی از این بازی‌ها انجام شده است و اطلاعات زیر را داریم:

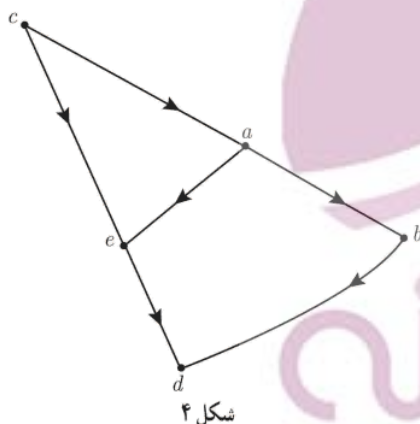
تیم a تیم‌های b و e را برده و به c باخته است.

تیم b به a باخته و از d برده است.

تیم c از تیم‌های a و e برده است.

تیم d به تیم‌های b و e باخته است.

تیم e به a و c باخته و از تیم d برده است.



برای نمایش تمام اطلاعات بالا به‌صورت خلاصه، از نموداری به شکل ۴ استفاده می‌کنیم که به ازای هر تیم یک نقطه می‌گذاریم و هر دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر تیم‌های مربوط به آنها با هم بازی کرده باشند؛ و جهت خط یا منحنی‌ای که دو نقطه را به هم وصل می‌کند باید از تیم برنده به سمت تیم بازنده باشد.

حال با یک نگاه به نمودار رسم شده، علاوه بر دریافت اطلاعات بالا به سادگی به سؤال‌های زیر نیز می‌توان جواب داد.

— مشخص کنید هر تیم با کدام تیم‌ها بازی نکرده است.

a, d, b, e, c, d بازی نکرده‌اند.

— اگر هر برد ۳ امتیاز داشته باشد در بازی‌هایی که تا اینجا انجام شده

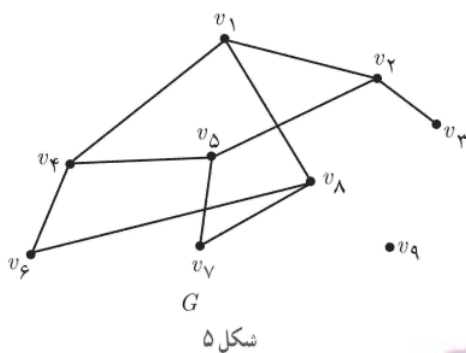
است کدام تیم‌ها بیشترین امتیاز را کسب کرده‌اند؟ **a, c**

۱- دکتر مهدی بهزاد، متولد ۱۳۱۵، ریاضی‌دان مشهور ایرانی، یکی از پیشگامان نظریه گراف در ایران است. بسیاری از پژوهش‌گران در این زمینه او را پدر علم گراف در ایران می‌دانند.

مسئله : سؤال دیگری مطرح کنید که با دیدن نمودار گراف مثال قبل بتوان به آن جواب داد.

سوال : کدام تیم فقط بُرد و کدام تیم فقط باخت داشته است ؟

پاسخ : تیم c فقط بُرد و تیم d فقط باخت داشته اند.



همان طور که دیدیم یک گراف متشکل است از مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها، که به هر یک از این نقاط **رأس** و به هر یک از پاره‌خط‌ها **یال** می‌گوییم. توجه کنید که یال‌ها لازم نیست حتماً پاره‌خط راست باشند و می‌توانند به صورت منحنی نیز باشند و در هر سر یال باید رأسی قرار داشته باشد. همان طور که دیدیم یک گراف را می‌توان با رسم نمودار آن نشان داد و نیز می‌توان آن را با نمادهای ریاضی معرفی کرد. در ادامه به شکلی ساده چند تعریف مقدماتی و نحوه نمایش یک گراف را بررسی می‌کنیم.

گراف G را با ۹ رأس و ۱۰ یال، مانند شکل ۵، در نظر می‌گیریم و با بررسی آن برخی تعاریف را نیز مطرح می‌نماییم. با توجه به اینکه یک گراف مجموعه‌ای از رئوس و یال‌هاست می‌توان به جای نمایش آن با شکل بالا، با نمادهای ریاضی مجموعه یال‌ها و رئوس آن را به صورت زیر نمایش داد.

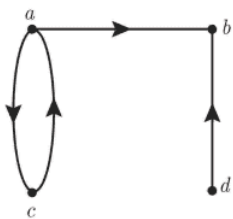
$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_8, v_9\}$$

مجموعه رأس‌های گراف G

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_8, v_2v_3, v_2v_5, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_7, v_6v_8, v_7v_8, v_8v_9\}$$

مجموعه یال‌های گراف G

به وضوح، با داشتن شکلی گراف، شما می‌توانید مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید و همچنین با داشتن دو مجموعه $V(G)$ و $E(G)$ می‌توانید ابتدا به تعداد $n(V(G))$ تعداد اعضای مجموعه $V(G)$ که آن را با $|V(G)|$ نیز نمایش می‌دهیم (نقطه رأس) مشخص نمایید و سپس با توجه به $E(G)$ رأس‌های متناظر را به هم وصل نمایید.



همان طور که در مثال تیم‌های فوتبال ملاحظه کردید گاهی اوقات لازم است برای یال‌ها جهت تعیین کنیم. به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، **گراف جهت‌دار** می‌گوییم. در این حالت برای نمایش اینکه جهت یک یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است یال‌ها را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم. به طور مثال مجموعه رئوس و یال‌های گراف جهت‌دار شکل ۶ را این گونه نمایش می‌دهیم.

$$V = \{a, b, c, d\} \quad E = \{(a, b), (a, c), (c, a), (d, b)\}$$

کارد کلاسی

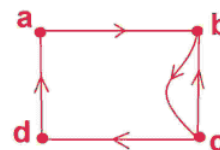
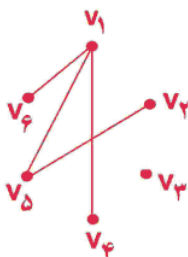
— دو مجموعه $V(G)$ و $E(G)$ به صورت زیر داده شده‌اند. با توجه به آنها شکل گراف مورد نظر را بکشید.

الف) $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$

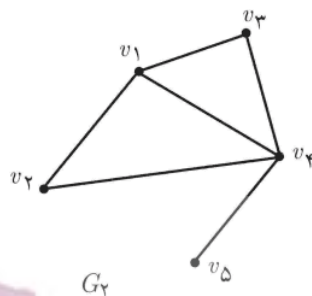
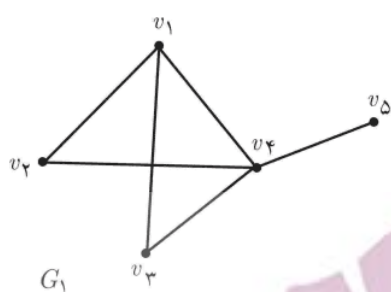
$$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_5, v_5v_1, v_5v_6\}$$

ب) $V(G) = \{a, b, c, d\}$

$$E(G) = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a)\}$$



توجه: برای رسم نمودار یک گراف (شکل گراف) روش یکتایی مدنظر نیست. آنچه مهم است این است که باید مشخص باشد که گراف مورد نظر گراف چند رأس و چند یال دارد و کدام یال به کدام رئوس متصل است. به طور مثال با نوشتن مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر یک از شکل‌های زیر، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.



شکل ۷

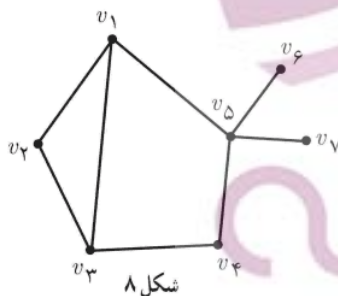
$$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G_1) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5\}$$

$$E(G_2) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5\}$$

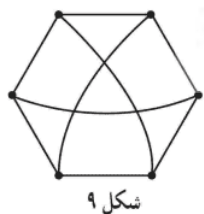
■ **مرتبه و اندازه یک گراف:** تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبه آن گراف می‌گوییم و با $p(G)$ نمایش می‌دهیم و تعداد یال‌های گراف یعنی $|E(G)|$ را اندازه گراف G می‌گوییم و با $q(G)$ نمایش می‌دهیم. معمولاً برای راحتی کار به جای $p(G)$ از p و به جای $q(G)$ از q استفاده می‌کنیم. به طور مثال گراف‌های نمایش داده شده در شکل ۷ از مرتبه ۵ و اندازه ۶ هستند. بنابراین $p=5$ و $q=6$.



شکل ۸

■ **درجه یک رأس:** درجه رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل‌اند و آن را با $deg_G(v)$ یا به طور ساده‌تر با $deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر زوج باشد آن را رأس زوج می‌نامیم. به طور مثال در شکل مقابل داریم:

$$deg(v_1) = 3, \quad deg(v_5) = 4$$



شکل ۹

■ **گراف K - منتظم:** گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k - منتظم می‌نامیم. مثلاً گراف شکل ۹ یک گراف ۳ - رئوس ۶ - منتظم است.

■ **رأس تنها:** به رئوسی که درجه آن صفر باشد؛ یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها (یا یزوله) می‌گوییم.

■ **گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند، یعنی هیچ یالی نداشته باشد، گراف تهی می‌نامیم.** بنابراین منظور از گراف تهی n رئوس، گرافی شامل n رأس تنها و بدون یال است.

درجه سایر رئوس گراف شکل ۸ را بنویسید و مشخص کنید کدام رئوس فرد و کدام رئوس زوج اند.

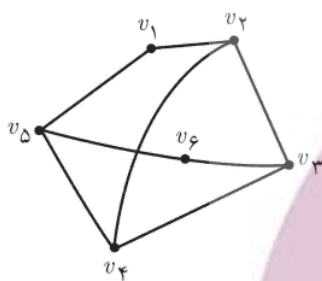
$$\text{رئوس درجه فرد} \Rightarrow d(v_1)=3, d(v_7)=3, d(v_6)=1, d(v_8)=1$$

$$\text{رئوس درجه زوج} \Rightarrow d(v_2)=2, d(v_4)=2, d(v_5)=4$$



شکل ۱۰

بین دو رأس از یک گراف ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد. همچنین یک یال ممکن است یک رأس را به خود آن رأس وصل نماید که در این صورت به این یال **طوقه**^۱ گفته می‌شود. این دو مورد در شکل ۱۰ نمایش داده شده‌اند. گرافی را که در آن هیچ یک از این دو مورد اتفاق نیفتاده باشد را **گراف ساده** می‌گوییم. دیدیم که گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده نیست. ما در این کتاب فقط گراف‌های ساده را بررسی خواهیم کرد و از این به بعد منظورمان از گراف، گراف ساده است.



شکل ۱۱

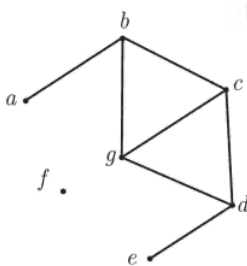
■ **دو رأس مجاور (همسایه):** دو رأس u و v را دو رأس همسایه یا مجاور گوئیم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند، یعنی $uv \in E(G)$. به طور مثال در گراف شکل ۱۱، رأس v_1 با رئوس v_2 و v_3 همسایه است و رأس v_2 با رئوس v_1 و v_3 و v_4 همسایه است.

توجه: در زمان رسم نمودار یک گراف توجه داشته باشید که هیچ یالی خودش را قطع نکند و همچنین هیچ یالی نباید از روی رأسی که مربوط به دو سر آن یال نیست عبور نماید.

■ **مجموعه همسایه‌های یک رأس:** فرض کنیم $v \in V(G)$ ، به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v » می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردن خود رأس v به $N_G(v)$ «همسایگی بسته رأس v » را به دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به صورت زیر نمایش داد:

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$$

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$



شکل ۱۲

$$N_G(a) = \{b\}$$

$$N_G[a] = \{a, b\}$$

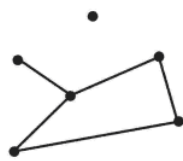
$$N_G(c) = \{b, d, g\}$$

$$N_G[c] = \{b, c, d, g\}$$

$$N_G(f) = \emptyset$$

$$N_G[f] = \{f\}$$

■ **دو یال مجاور:** دو یال را مجاور گوئیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند. به طور مثال در شکل ۱۲، یال‌های bc و cd مجاوراند.

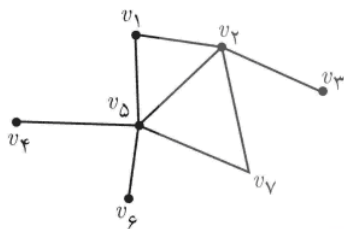


G

شکل ۱۳

■ **بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجه یک گراف:** بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین آنها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به ترتیب آنها را ماکزیمم و مینیمم درجه گراف می‌نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۳ داریم:

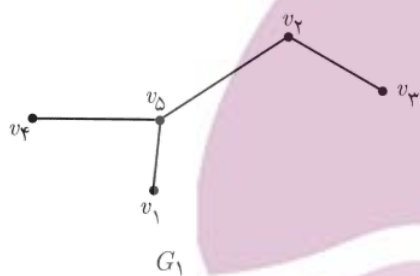
$$\Delta(G) = 3, \quad \delta(G) = 1$$



G

شکل ۱۴

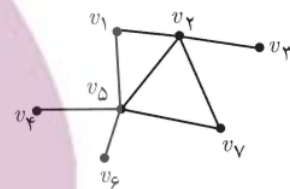
■ **زیرگراف:** یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G ، و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های G باشد. به طور مثال گراف‌های G_1 و G_2 و G_3 که در شکل ۱۵ آمده‌اند، زیرگراف‌هایی از گراف G در شکل ۱۴ هستند.



G_1



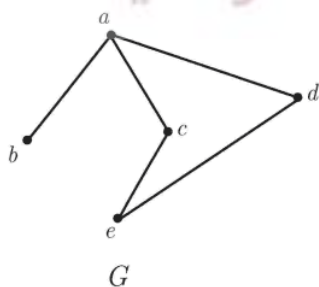
G_2



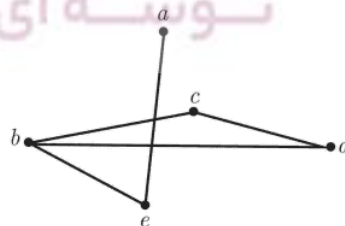
G_3

شکل ۱۵

■ **مکمل یک گراف:** مکمل گرافی مانند G که آن را با G^c یا $\bar{G}$ نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف G است و بین دو رأس از G^c یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد. در شکل ۱۶ یک گراف و مکملش نمایش داده شده است.



G



$\bar{G}$

شکل ۱۶

مسئله ۱: اگر G یک گراف با n رأس و v یک رأس آن باشد و $d_G(v)$ و $d_{\bar{G}}(v)$ به ترتیب درجه رأس v در گراف های G و $\bar{G}$ باشند، مقدار $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v)$ را به دست آورید.

این مجموع برابر است با تعداد یال هایی که امکان رسم آنها از یک رأس در گراف ساده، وجود دارد. از طرفی در یک گراف ساده n راسی حداکثر

$$n-1 \text{ یال از یک راس آن می گذرد بنابراین: } d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n-1$$

مسئله ۲: یک گراف n رأسی حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟

برابر است با تعداد پاره خطهایی که با وجود n نقطه غیر واقع بر خط راست می توان رسم کرد یعنی: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

مسئله ۳: اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ را به دست آورید.

این مجموع برابر است با حداکثر تعداد یال های ممکن در یک گراف ساده n راسی، که بنا به مسئله قبل $\frac{n(n-1)}{2}$ خواهد بود.

■ **گراف کامل:** گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر، مجاور باشد گراف کامل می نامیم. گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می دهیم. می توان گفت K_n یک گراف n رأسی و $n-1$ منتظم است.

مسئله ۱: یک گراف کامل p رأسی چند یال دارد؟ بنا به مسئله ۲ در بالای صفحه، تعداد یال ها برابر است با: $\frac{p(p-1)}{2}$

مسئله ۲: اگر G یک گراف p رأسی باشد، چه رابطه ای بین تعداد یال های گراف های G ، $\bar{G}$ و K_p وجود دارد؟ $q(G) + q(\bar{G}) = q(K_p)$

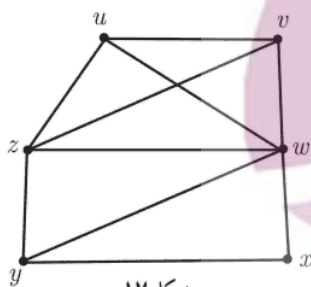
مسئله ۳: مکمل گراف کامل چه نوع گرافی است؟ **گراف تهی**

■ **مسیر:** اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک $u-v$ مسیر) در G دنباله ای از رئوس دوبه دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می کنیم که دنباله متشکل از تنها یک رأس v ، یک مسیر است با طول صفر از رأس v به خودش.

مثال

uvw یک $u-v$ مسیر به طول ۲ است.

$uzyzw$ یک $u-v$ مسیر به طول ۴ است.



شکل ۱۷



شکل ۱۸

■ گرافی را که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد با P_n نمایش می دهیم.

به طور مثال P_5 در شکل ۱۸ نمایش داده شده است.

■ **دور:** دنباله $v_1 v_2 \dots v_n v_1$ ($n \geq 3$) از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک

دور به طول n می نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۷ $uvwxzy$ ، $ywzxy$ ، $uvwxu$ دورهایی به ترتیب با طول ۳ و ۴ و ۶ هستند.



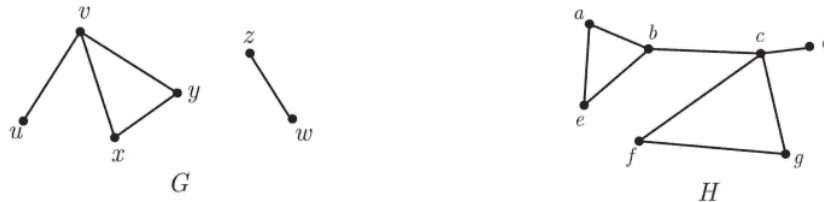
شکل ۱۹

■ گرافی را که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می دهیم.

به طور مثال C_5 در شکل ۱۹ نمایش داده شده است.

مسئله: در گراف شکل ۱۷، دوری به طول ۵ بیابید. $uvwzyu$

■ همبندی و ناهمبندی یک گراف: گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم. به طور مثال گراف H در شکل ۲۰ همبند و گراف G ناهمبند است زیرا مثلاً بین رئوس v و w هیچ مسیری وجود ندارد.



شکل ۲۰

فعالیت



۱ سه گراف دلخواه رسم کنید.

۲ مجموع درجات رئوس هر یک از ۳ گرافی را که رسم کرده‌اید محاسبه کنید.

$$G_1 \text{ مجموع درجات رئوس گراف } G_1 = 2 + 2 + 2 = 6 \quad G_2 \text{ مجموع درجات رئوس گراف } G_2 = 3 + 1 + 1 + 1 = 6 \quad G_3 \text{ مجموع درجات رئوس گراف } G_3 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$$

۳ تعداد یال‌های هر یک از ۳ گراف را محاسبه نمایید.

$$G_1 \text{ تعداد یالهای گراف } G_1 = 3 \quad G_2 \text{ تعداد یالهای گراف } G_2 = 3 \quad G_3 \text{ تعداد یالهای گراف } G_3 = 6$$

۴ حدس می‌زنید چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها و مجموع درجات رئوس یک گراف وجود دارد.

$$(\text{تعداد یال های گراف}) \times 2 = \text{مجموع درجات رئوس گراف}$$

۵ پاسخ خود را با دوستانتان مطرح کرده و در این باره بحث کنید.

فعالیت

۱ یک گراف دلخواه مانند G با n رأس $v_1, v_2, \dots, v_n$ و m یال $e_1, e_2, \dots, e_m$ در نظر بگیرید.

۲ تمام یال‌های گراف G را حذف کنید.

۳ مجموع درجات تمام رئوس گراف حاصل چند است؟ صفر تعداد یال‌های گراف حاصل چند است؟ صفر و این دو عدد چه ارتباطی با هم دارند؟ ظاهراً با هم برابرند!!!

۴ یال e_1 را در جای خود (بین همان دو رأسی که e_1 قبل از حذف شدن بین آنها قرار داشت) قرار دهید و به سؤال ۳ جواب دهید. مجموع درجات برابر ۲ و تعداد یالها ۱ می‌باشد.

۵ تمام یال‌های $e_2, e_3, \dots, e_m$ را یکی یکی در جای خود قرار دهید تا به گراف اولیه G برسید و پس از اضافه کردن هر یال مجدداً برای گراف جدید ساخته شده به سؤال ۳ جواب دهید. مجموع درجات ۴ و تعداد یالها ۲ است. مجموع درجات ۶ و تعداد یالها ۳ است.

مجموع درجات $2m$ و تعداد یالها m است.

۶ آیا مجموع درجات رئوس یک گراف می‌تواند عددی فرد باشد؟ چرا؟

خیر، زیرا با اضافه کردن هر یال، ۲ واحد به مجموع درجات افزوده می‌شود و با توجه به این که مجموع درجات در ابتدا صفر بوده، غیر ممکن است که عددی فرد شود.

$$7 \text{ برای تساوی } \sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_n) = 2m \text{ استدلال خود را بیان نمایید.}$$

در شمارش درجه‌ها، هر یال دارای دو راس است، بنابراین در مجموع آنها هر یال دو بار حساب شده است، پس مجموع درجات دو برابر تعداد یالهاست.

با توجه به آنچه در این فعالیت به دست آوردیم، می‌توان قضیه زیر را بیان نمود.

قضیه: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشند، آنگاه: $\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$

نتیجه: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.
اثبات: فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد G و B مجموعه همه رئوس زوج G باشد. در

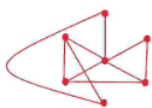
$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$$

این صورت داریم $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ و $\sum_{v \in B} \deg(v)$ زوج اند. (چرا؟) طبق قضیه مجموع درجات رئوس، زوج می باشد پس $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ زوج است.
از طرفی درجه هر رأس B عددی زوج است و مجموع چند عدد زوج، عددی زوج است لذا $\sum_{v \in B} \deg(v)$ زوج می باشد.

بنابراین $\sum_{v \in A} \deg(v)$ نیز عددی زوج است و این نتیجه می دهد که $n(A)$ عددی زوج است. (چرا؟)
درجه هر رأس A فرد می باشد، لذا باید تعداد آنها زوج باشد تا مجموع درجات عددی زوج شود.

فعالیت

یک جمع ۷ نفره از دانش آموزان یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه یک رابطه دوطرفه است، یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست اند و یا هیچ یک با دیگری دوست نیست. اکنون:



الف) گراف G ۷ رأسی را تشکیل دهید به این صورت که به ازای هر دانش آموز یک رأس قرار دهید، سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانش آموزان متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.

ب) با استفاده از قضیه قبل نشان دهید که امکان ندارد درجه تمام رئوس گراف حاصل برابر ۳ باشد.

اگر درجه تمام رئوس گراف حاصل ۳ باشد آنگاه مجموع درجات رئوس $3 \times 7 = 21$ خواهد شد که عددی فرد است و با قضیه تناقض دارد زیرا باید مجموع درجات رئوس عددی زوج باشد.

پ) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید که اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.

اگر تمام نفرات جمع فرد نفری، دارای فرد تا دوست باشند، یعنی در یک گراف تعداد رئوس درجه فرد، فرد است که با نتیجه گرفته شده از قضیه (بالای صفحه) تناقض دارد. لذا چنین موردی امکان پذیر نیست.

فعالیت

فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $\delta(G) \geq 4$. می خواهیم نشان دهیم که G شامل یک مسیر به طول بزرگ تر یا مساوی ۴ است.

۱) رأس v_1 دلخواه را در G در نظر می گیریم. حتماً v_1 به رأس دیگری متصل است. (چرا؟) فرض کنیم آن رأس v_2 باشد. زیرا اگر به رأس دیگری متصل نباشد درجه آن صفر خواهد بود، در حالی که طبق فرض مسئله کمترین درجه ۴ در نظر گرفته شده است.

۲) حتماً v_2 به رأسی به جز v_1 متصل است. (چرا؟) فرض می کنیم آن رأس v_3 باشد. زیرا اگر چنین نباشد، درجه آن ۱ خواهد بود که با فرض مسئله (کمترین درجه ۴ است) تناقض دارد.

۳) حتماً v_3 به رأسی از مجموعه $V(G) - \{v_1, v_2\}$ وصل است (چرا؟) فرض می کنیم آن رأس v_4 باشد. زیرا در غیر این صورت، درجه آن حداکثر ۲ خواهد بود و با فرض مسئله (کمترین درجه ۴ است) تناقض دارد.

۴) حتماً v_4 به رأسی از مجموعه $V(G) - \{v_1, v_2, v_3\}$ وصل است (چرا؟) فرض می کنیم آن رأس v_5 باشد. زیرا اگر چنین نباشد، درجه آن حداکثر ۳ شده که با فرض مسئله (کمترین درجه ۴ است) تناقض دارد.

۵) مسیر $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$ یک مسیر به طول ۴ در گراف G است.

کار در کلاس

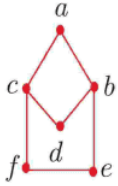
در هر یک از حالت‌های زیر تعداد یال‌های گراف G را به دست آورید.

الف) یک گراف n رأسی K - منتظم است. طبق قضیه: $2q = n \times k \Rightarrow q = \frac{1}{2}nk$

ب) G یک گراف n رأسی کامل است. ($G = K_n$)

درجه هر رأس $n-1$ خواهد بود، در نتیجه گراف $(n-1)$ - منتظم است. لذا طبق قسمت قبل: $q = \frac{1}{2}n(n-1)$

۱ گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.



الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید. $p = 6$, $q = 7$

ب) درجه رأس‌های G را مشخص نمایید.

$$\deg(a) = \deg(d) = \deg(e) = \deg(f) = 2 \quad \text{و} \quad \deg(b) = \deg(c) = 3$$

پ) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟ c, e

ت) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟ $2 + 3 + 2 + 2 + 3 + 2 = 14$

ث) گراف H با مجموعه رأس‌های $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعه یال‌های $E(H) = \{v_1 v_2, v_1 v_3, v_1 v_4, v_2 v_3, v_2 v_4, v_3 v_4\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (ت) در مورد گراف H پاسخ دهید.

$$\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = \deg(v_4) = 3 \quad \text{ب)}$$

$$p = 4 \quad , \quad q = 6 \quad \text{الف)}$$

$$4 \times 3 = 12 \quad \text{ت)}$$

پ) راس f در این گراف تعریف نشده است.

۲ گراف G (شکل ۲۱) را در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

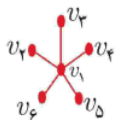
$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\} \quad \text{و} \quad E(G) = \{ab, ae, af, bc, cd, ce, de\}$$

ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید. $\Delta(G) = 3, \delta(G) = 0$

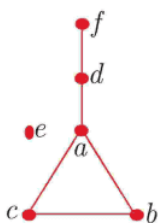
پ) مجموعه همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.

$$N_G(f) = \{a\} \quad \text{و} \quad N_G(g) = \emptyset \quad \text{و} \quad N_G(e) = \{a, c, d\}$$

ت) اگر $N_G(x) = \{a, c\}$ ، آنگاه x کدام رأس است؟ x راسی هست که هم با a و هم با c همسایه باشد. با توجه به شکل، $x = b$ است.



۳ گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_1)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه‌های $N_G(v_i)$ برای $2 \leq i \leq 6$ تک‌عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.



۴ در گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:

$$N_G(a) = \{b, c, d\}$$

$$N_G(b) = \{a, c\}$$

$$N_G(c) = \{a, b\}$$

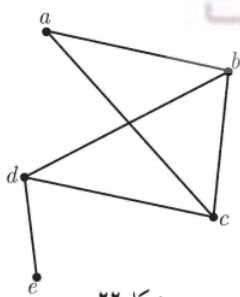
$$N_G(d) = \{a, f\}$$

$$N_G(e) = \{ \}$$

$$N_G(f) = \{d\}$$

گراف G را رسم و اندازه آن را مشخص کنید. $q = 5$

۵ گراف G (شکل ۲۲) رسم شده است. مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف $\bar{G}$ را تعیین نمایید.



شکل ۲۲

تعداد یالهای گراف G - تعداد کل یال‌های ممکن در گراف ۵ راسی (K_5) = تعداد یالهای گراف $\bar{G}$

$$\Rightarrow \bar{G} \text{ مجموع درجات گراف } \bar{G} = \frac{5 \times 4}{2} - 6 = 4 \times 2 = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \deg_G(a) = 2 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(a) = 4 - 2 = 2 \\ \deg_G(c) = 3 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(c) = 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

درجه هر راس در گراف کامل ۴ است

۶ گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

در گراف کامل p راسی تعداد یالها برابر است با $\frac{p(p-1)}{2}$ در نتیجه: $\frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p(p-1) = 72 \Rightarrow p = 9$

از طرفی گراف کامل K_9 یک گراف ۸-منتظم است. بنابراین درجه تمام رئوس یکسان بوده و $\Delta = \delta = 8$ است.



۸ در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r -منتظم از مرتبه n رسم کنید.

الف) $n = 4$ $r = 1$	ب) $n = 4$ $r = 2$
پ) $n = 5$ $r = 2$	ت) $n = 5$ $r = 3$
ث) $n = 6$ $r = 4$	ج) $n = 7$ $r = 3$

۳ × ۵ = ۱۵ امکان پذیر نیست زیرا مجموع درجات عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد.

۳ × ۷ = ۲۱ امکان پذیر نیست زیرا مجموع درجات عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد.

۹ برای هر یک از حالت های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ راسی رسم کنید به طوری که:

الف) یک رأس تنها داشته باشد.	ب) دو رأس تنها داشته باشد.
پ) سه رأس تنها داشته باشد.	ت) چهار رأس تنها داشته باشد.
ث) پنج رأس تنها داشته باشد.	

تنها باشند، راس پنجم نمی تواند به هیچکدام از آنها متصل شود پس راس پنجم نیز تنها خواهد ماند!

۱۰ هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده اند.

نشان دهید نفر هفتم نمی تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

اگر هفت نفر را به عنوان ۷ راس یک گراف در نظر بگیریم و در صورتی که دو نفر با هم دست دهند، بین دو راس منسوب به آنها یال رسم کنیم، در نتیجه ۶ راس گراف درجه ۲ خواهد بود و اگر راس هفتم درجه ۵ باشد، یعنی گراف دارای یک راس درجه فرد است که با نتیجه ی قضیه تناقض دارد زیرا باید تعداد رئوس درجه فرد، زوج تا باشد. پس نفر هفتم نمی تواند با ۵ نفر دست داده باشد.

۱۱ علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد؟ ۵ نفر را به عنوان ۵ راس یک گراف جهت دار در نظر می گیریم. به طور مثال اگر نام علی در فهرست دوستان سامان وجود دارد، یک یال جهت دار از علی به سمت سامان رسم می کنیم. و بر عکس اگر نام سامان در فهرست دوستان علی باشد یک یال جهت دار از سامان به علی رسم می کنیم. به همین ترتیب الی آخر پیش می رویم.

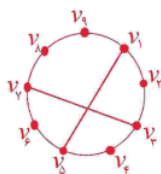
حداکثر تعداد یالها در گراف جهت دار ۵ راسی $p(p-1) = 5 \times 4 = 20$ می باشد.

از طرفی برای هر یال دو حالت داریم (وجود داشتن یا وجود نداشتن آن یال) پس تعداد کل حالات برای آن 2^{20} می باشد.

ب) اگر بودن در فهرست دوستان، رابطه ای دوطرفه داشته باشد؛ یعنی هر دونفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد؟

این قسمت همچون قسمت الف بوده، با این تفاوت که گراف جهت دار نیست، پس حداکثر تعداد یالها $\frac{p(p-1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ می باشد. بنابراین تعداد کل حالات 2^{10} است.

۱۲ یک گراف ۹ راسی رسم کنید به طوری که: الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



دور به طول ۵: $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_1$

دور به طول ۶: $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_1$

دور به طول ۷: $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_1$

دور به طول ۹: $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_1$

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ابتدا همچون قسمت الف گرافی با دوری به طول ۹ رسم می کنیم و از v_1 به v_5 یالی رسم کرده تا دورهایی به طول ۶ و ۵ ساخته شود.

حال برای ساختن دورهایی به طولهای ۷ و ۸ باید یال دیگری رسم کنیم. به طور مثال راس v_1 را انتخاب می کنیم که فقط می توان آن را به راس v_4 رسم کرد زیرا در غیر این صورت دورهایی به طول ۳ یا ۴ ایجاد می شود که خواست مسئله نیست.

اگر مطابق شکل (یال آبی رنگ) v_1 را به v_4 وصل کنیم دور به طول ۸ ایجاد می شود ($v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_1$) ولی دور به طول ۷ ایجاد نمی شود!

همچنین در قسمت قبل مشاهده شد که اگر راس v_1 انتخاب شود، دور به طول ۷ ایجاد شده ولی به طول ۸ ایجاد نمی شود!

به همین ترتیب با انتخاب رئوس دیگر متوجه می شویم که این کار با رسم دو قطر امکان پذیر نیست.

اما در صورتی که سه قطر رسم کنیم، یکی برای ایجاد دورهایی به طول ۵ و ۶ و دیگری برای دور به طول ۷ و سومی برای ایجاد دور به طول ۸، باز هم قابل قبول نبوده زیرا دورهایی به طول ۳ یا ۴ نیز ساخته شده که خواسته مسئله نیست. بنابراین چنین گرافی وجود ندارد.

۱۳ فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq K$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است. درست است. اثبات :

راس دلخواه v_1 را در گراف G در نظر می گیریم ، حتماً v_1 به راس دیگری (مثل v_2) متصل است ، زیرا در غیر این صورت $\delta = 0$ خواهد شد.

همچنین v_2 به راسی به جز v_1 متصل می باشد (مثل v_3) زیرا در غیر این صورت $\delta = 1$ خواهد شد .

حتماً v_3 به راسی به غیر از v_1 و v_2 (مثل v_4) وصل است ، زیرا در غیر این صورت ، حداکثر مقدار δ ، دو خواهد بود.

این روند ادامه دارد تا به راس جدید v_K برسیم که با استدلال مشابه قبل بایستی به راس جدیدی مانند v_{K+1} وصل باشد .

بنابراین مسیر $v_1 v_2 v_3 \dots v_K v_{K+1}$ یک مسیر به طول K در گراف G است.

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K+1$ است. نادرست است . مثال های نقض برای رد آن مطرح می کنیم :

● مثال نقض اول : در گراف یک راسی روبرو $\delta = 0$ ، $K = \delta = 0$ مسیری به طول $1 = 0 + 1$ وجود ندارد .

● مثال نقض دوم : در گراف دو راسی روبرو $\delta = 1$ ، $K = \delta = 1$ مسیری به طول $2 = 1 + 1$ وجود ندارد .

توجه : هر گراف کامل می تواند یک مثال نقض برای آن محسوب شود .

۱۴ یک گراف ۴ رأسی غیرتهی K -منتظم بکشید که :



الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۵ یک گراف ۵ رأسی غیرتهی K -منتظم بکشید که :

الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



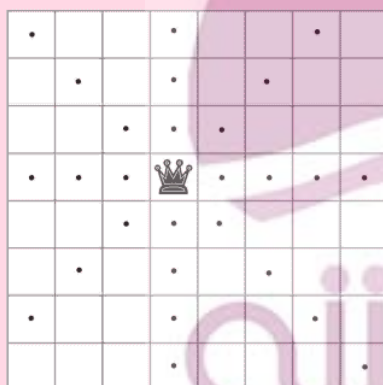
ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



درس ۲ مدل سازی با گراف

برخی از مسائل روزمره زندگی را می توان به کمک مدل سازی نخست به یک مسئله ریاضی تبدیل نمود و سپس با حل مسئله ریاضی، مسئله اصلی را نیز حل کرد. به طور کلی، بعضی مفاهیم ریاضی در مدل سازی مسائل زندگی واقعی بسیار پر کاربرد هستند. «احاطه گری» یکی از این مفاهیم پر کاربرد است که در ادامه با تاریخچه، مفهوم و کاربردهایی از آن آشنا خواهیم شد.

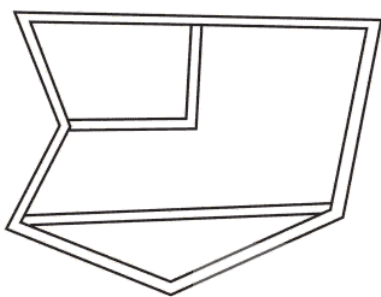
تاریخچه



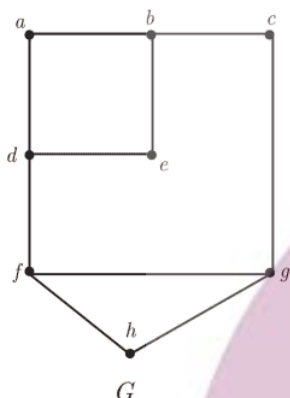
در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند «یافتن حداقل تعداد مهره وزیر که می توانند با چیش مناسب تمام صفحه شطرنج را بپوشانند» (یعنی هر خانه صفحه شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشند) ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود.



تفکر درباره پرسش هایی از این دست باعث به وجود آمدن مفهومی در شاخه گراف در ریاضیات با نام احاطه گری شد. برای آشنایی با این مفهوم به مسئله بعد دقت کنید.



شکل ۱



شکل ۲

شکل مقابل نقشه منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به گونه‌ای نصب شود که دو شرط زیر را داشته باشد:

۱ برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به گونه‌ای نصب شده باشند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.

۲ به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد.

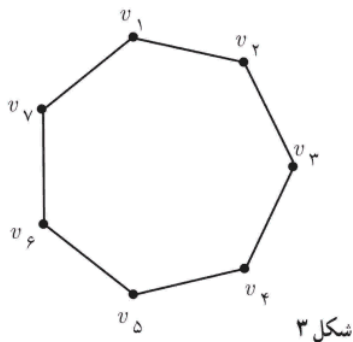
حال فرض کنید منطقه مورد نظر را با گراف شکل ۲ مدل‌سازی کرده باشیم. الف) در این مدل‌سازی تقاطع‌ها و خیابان‌های بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده‌اند؟ **تقاطع‌ها همان رئوس گراف و خیابان‌ها یال‌های گراف هستند.** ب) رأس‌هایی از گراف را مشخص کنید که، با توجه به مدل‌سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط ۱ برآورده گردد. چنین مجموعه‌ای از رئوس را یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف می‌نامیم. به طور مثال مجموعه شامل همه رئوس گراف G ، یک مجموعه احاطه‌گر است. آیا می‌توانید یک مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی مثال بزنید؟ **$\{a, e, g, f\}$**

تعریف: زیر مجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداکثر با یکی از رئوس موجود در D مجاور باشد.

معمولاً به سادگی می‌توان مجموعه‌های مختلفی از رئوس گراف G را مشخص کرد که در شرط ۱ صدق کنند؛ به عبارتی یک گراف می‌تواند مجموعه‌های احاطه‌گر گوناگونی داشته باشد. از طرفی واضح است که هر مجموعه که شامل یک مجموعه احاطه‌گر باشد، احاطه‌گر است. در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد مجموعه احاطه‌گر مینیمم آن گراف می‌نامیم. اگر چنین مجموعه‌ای را برای گراف G بیابیم، این مجموعه در هر دو شرط ۱ و ۲ مطرح شده در مسئله بالا صدق خواهد کرد.

تعریف: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعه احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از گراف G ، یک γ -مجموعه می‌گوییم.



مثال: برای گراف شکل ۳ که دور C_7 است، مجموعه $\{v_1, v_2, v_5, v_7\}$ یک مجموعه احاطه‌گر و مجموعه‌های $\{v_1, v_2, v_5\}$ و $\{v_1, v_2, v_7\}$ دو مجموعه احاطه‌گر مینیم یا اصطلاحاً دو-مینیم هستند؛ و داریم $\gamma(G) = 3$.

مثال: فرض کنید $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ شهرهای یک استان باشند و فاصله‌های مستقیم این شهرها از یکدیگر، دو به دو، مطابق جدول زیر باشد.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	۰	۵۰	۸۰	۴۰	۶۰	۹۰	۵۰	۷۰	۵۰	۶۰	۵۰
b	۵۰	۰	۵۵	۳۰	۶۰	۷۰	۶۰	۶۰	۹۰	۸۵	۸۰
c	۸۰	۵۵	۰	۴۰	۶۰	۲۰	۵۰	۵۵	۱۰۰	۹۵	۹۰
d	۴۰	۳۰	۴۰	۰	۳۰	۵۵	۳۰	۳۰	۸۰	۷۵	۷۰
e	۶۰	۶۰	۶۰	۳۰	۰	۵۰	۱۰	۵۰	۶۰	۵۵	۵۵
f	۹۰	۷۰	۲۰	۵۵	۵۰	۰	۴۰	۴۵	۱۰۰	۹۰	۸۰
g	۵۰	۶۰	۵۰	۳۰	۱۰	۴۰	۰	۵۰	۷۰	۶۵	۶۰
h	۷۰	۶۰	۵۵	۳۰	۵۰	۴۵	۵۰	۰	۶۵	۶۰	۵۵
i	۵۰	۹۰	۱۰۰	۸۰	۶۰	۱۰۰	۷۰	۶۵	۰	۵۰	۱۰
j	۶۰	۸۵	۹۵	۷۵	۵۵	۹۰	۶۵	۶۰	۵۰	۰	۵۰
k	۵۰	۸۰	۹۰	۷۰	۵۵	۸۰	۶۰	۵۵	۱۰	۵۰	۰

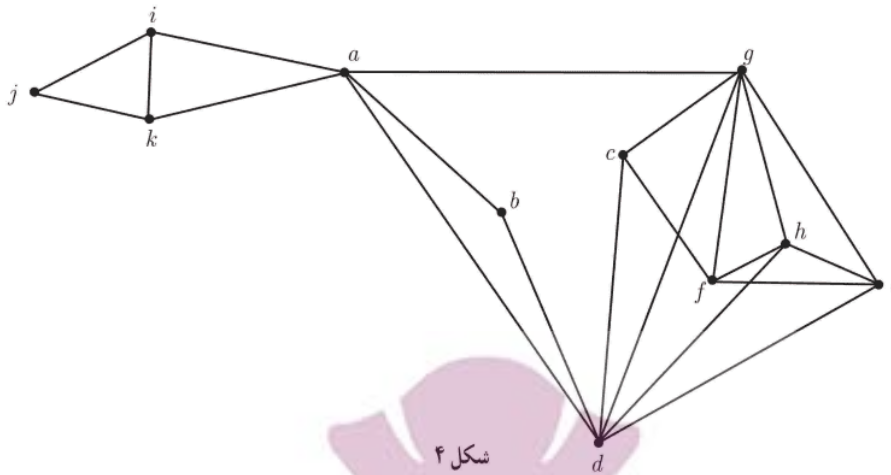
➡ شایسته است در سطر اول نام شهرها با حروف کوچک نوشته شوند. لذا این تغییر اعمال شده است.

می‌خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان تأسیس کنیم به طوری که همه شهرهای استان از پوشش امواج رادیویی برخوردار گردند. و از طرفی برای کاهش هزینه‌ها می‌خواهیم کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی را احداث کنیم. اگر هر ایستگاه رادیویی تا ۵۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل چند ایستگاه رادیویی احتیاج داریم و در چه شهرهایی باید آنها را احداث کنیم؟

حل: برای مدل‌سازی این مسئله کافی است گراف مربوط به آن را به این طریق رسم کنیم که به جای هر شهر یک رأس قرار دهیم و سپس دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر فاصله مستقیم آن دو شهر از ۵۰ کیلومتر بیشتر نباشد. در این صورت مجموعه احاطه‌گر مینیم برای گراف مذکور، جواب مسئله را مشخص می‌کند. (چرا؟)

به دلیل وجود خاصیت احاطه‌گری هر شهر از پوشش امواج رادیویی برخوردار می‌گردد. همچنین به جهت مینیم بودن احاطه‌گری، کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی و به دنبال آن کمترین میزان هزینه صورت خواهد گرفت.

با توجه به آنچه گفته شد گراف زیر، گراف حاصل از مدل سازی برای این مسئله است.



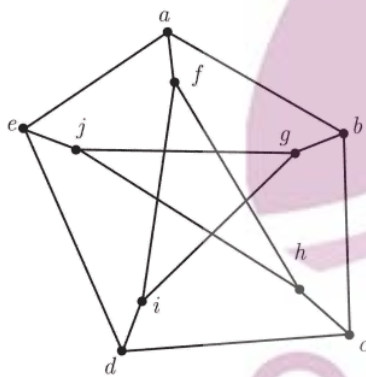
شکل ۴

حال کافی است یک مجموعه احاطه گر مینیم در این گراف بیابیم و ایستگاه های رادیویی را در شهرهای متناظر با رئوس این مجموعه احاطه گر مینیمال مستقر کنیم. یافتن یک مجموعه احاطه گر مینیم برای گراف فوق در تمرینات پایان درس به شما واگذار شده است.

کار در کلاس

۱ مشخص کنید کدام یک از مجموعه های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه گر

هست و کدام نیست؟



شکل ۵

الف) $A = \{a, b, c, d, e\}$ احاطه گر هست

ب) $B = \{f, g, h, i, j\}$ احاطه گر هست

پ) $C = \{a, b, j, h, g\}$ احاطه گر نیست

ت) $D = \{a, i, h\}$ احاطه گر هست

ث) $E = \{f, g, h, e, d\}$ احاطه گر هست

ج) $F = \{f, g, h, e\}$ احاطه گر هست

۲ از مجموعه های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه گر بودند در کدام یک از آنها رأس یا رأس هایی وجود دارد که با حذف

آنها مجموعه باقی مانده هنوز احاطه گر باشد؟ قسمت ث، اگر از مجموعه ی $E = \{f, g, h, e, d\}$ را حذف کنیم، مجموعه جدید

همان مجموعه ی $F = \{f, g, h, e\}$ بوده که احاطه گر است.

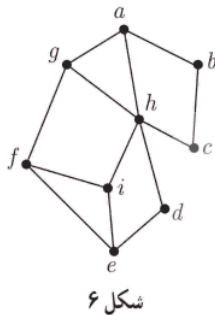
تعریف: یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه گر نباشد احاطه گر مینیمال می نامیم.

۳ مجموعه ای احاطه گر با کمترین تعداد رأس که می توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی های خود مقایسه کنید.

$\{c, j, f\}$

۴ یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیم نباشد. $A = \{a, b, c, d, e\}$

۵ آیا می‌توان هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟ (استدلال کنید) **بله**، اگر $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر باشد، عضوی مانند v_1 را در نظر می‌گیریم، اگر با حذف آن، هنوز مجموعه احاطه‌گر باقی ماند، آن را حذف می‌کنیم، در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می‌دهیم. با توجه به غیر مینیمال بودن مجموعه، قطعاً حداقل یک عضو یافت می‌شود که با حذف آن، هنوز مجموعه احاطه‌گر خواهد ماند.



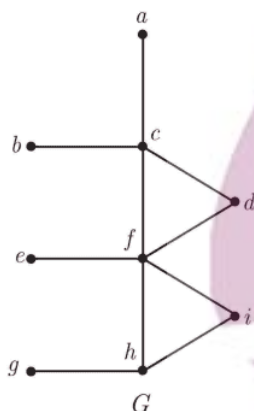
شکل ۶

مثال: در گراف شکل ۶ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید و با حذف برخی رأس‌ها، آن را به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.

حل: مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. از آنجا که با حذف برخی رأس‌های آن (مثلاً رأس a) این مجموعه باز هم احاطه‌گر خواهد بود، لذا احاطه‌گر مینیمال نیست. حال با حذف سه رأس a, c, e از آن، مجموعهٔ $\{b, d, f\}$ حاصل می‌شود که باز هم احاطه‌گر است اما چون این مجموعه با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نخواهد بود لذا احاطه‌گر مینیمال است.

کار در کلاس

در گراف شکل ۷:



شکل ۷

- ۱ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر باشد. $\{c, f, i, g\}$
- ۲ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر مینیمال باشد. $\{c, f, g\}$
- ۳ یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی مشخص نمایید. $\{c, e, h\}$
- ۴ آیا رأسی در گراف G وجود دارد که دو رأس از ۳ رأس a, b, e و g را احاطه کند؟ **خیر**
- ۵ حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند چندتاست؟ $\gamma(G)$ چند است؟ $\gamma(G) = 3$

معرفی یک نماد

با مفهوم جزء صحیح^۱ یک عدد آشنا هستید و می‌دانید که اگر x یک عدد صحیح باشد، $[x]$ برابر با خود x است، و اگر عدد صحیح نباشد، عدد صحیح قبل از x است.

$$[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟ **۳ تاکسی**

۱- گاهی اوقات به جزء صحیح یک عدد، کف آن عدد هم گفته می‌شود. در برخی کتاب‌ها $[a]$ را با $\lfloor a \rfloor$ نمایش می‌دهند و به آن کف a می‌گویند.

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟ ۴ تاکسی

پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟ ۴ تاکسی

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی‌های مورد نیاز به دست می‌آید؟ اگر عدد حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟ تعداد کارمندان را بر عدد ۴ تقسیم می‌کنیم، اگر عدد صحیحی بدست آمد همان عدد تعداد تاکسی‌ها است. در غیر این صورت کوچکترین عدد صحیح بعد از آن، نشان دهنده تعداد تاکسی‌ها می‌باشد.

ث) مفهوم سقف یک عدد که در ادامه مطرح شده است را می‌توان در مواردی مشابه آنچه در اینجا مطرح شد به کار برد.

در صورتی که x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیح بعد از x از $\lceil x \rceil$ استفاده می‌کنیم و آن را سقف x می‌خوانیم. در حالت کلی

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

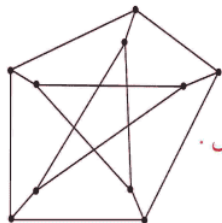
$$\lceil 3/5 \rceil = 3$$

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

$$\lceil 3/5 \rceil = 4$$

■ سؤال: برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟ اعداد صحیح

فعالیت



شکل ۸
 G

۱ در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند.

۲ در گراف مقابل $\Delta = 3$ چند است؟

۳ هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟ هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند یعنی ۴ رأس.

و این تعداد چه ارتباطی با Δ دارد؟ این تعداد همان $\Delta + 1$ است.

۴ آیا ۲ رأس می‌توانند همه رئوس گراف G را احاطه کنند؟ خیر

۵ حداقل $\lceil \frac{10}{4} \rceil$ رأس برای احاطه همه رئوس لازم است. چرا؟ یک رأس آن حداکثر ۴ رأس را احاطه می‌کند. حال اگر ۸ رأس دیگر را چنان انتخاب کنیم که رئوس احاطه شده قبلی مجاور آن نباشند، آنگاه این رأس نیز ۴ رأس دیگر را احاطه می‌کند. لذا از بین ۱۰ رأس ۸ رأس احاطه شده‌اند. که باید برای احاطه ی دو رأس باقی مانده از رأس جدیدی استفاده کنیم، پس حداقل ۳ رأس برای احاطه ی همه ی رأس‌ها نیاز داریم. از طرفی $\lceil \frac{10}{4} \rceil = 3$ می‌باشد.

۶ $\gamma(G)$ چند است؟ $\gamma(G) = 3$

۷ در یک گراف دلخواه با ماکزیمم درجه Δ ، یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟ $\Delta + 1$

۸ تعداد کمتر از $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ رأس نمی‌توانند تمام n رأس یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

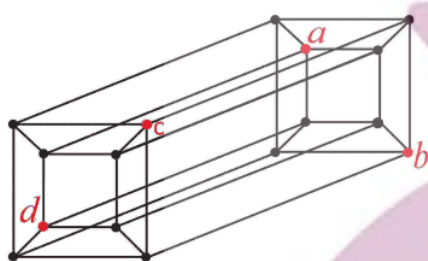
یک رأس دخواه حداکثر $\Delta + 1$ رأس را احاطه می‌کند. حال برای تعیین حداقل تعداد رئوسی که تمام n رأس گراف را احاطه کنند، باید حساب کرد برای جابجایی n مسافر به چند تاکسی با ظرفیت حداکثر $\Delta + 1$ نفر احتیاج داریم. برای این کار نسبت $\frac{n}{\Delta+1}$ را حساب می‌کنیم، اگر عدد صحیح شد که جواب می‌باشد،

در غیر این صورت کوچکترین عدد صحیح بعدی آن جواب است تا اینکه تمام رئوس احاطه شده باشند. و این همان $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ است.

اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد و D یک مجموعه احاطه گر در آن باشد، آنگاه $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq |D|$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازه یک مجموعه احاطه گر است همواره داریم $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می شود در گراف G عدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$ ؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی تواند از آن کمتر شود).

کار در کلاس

۱ یک شبکه رایانه ای متشکل از ۱۶ کامپیوتر را در نظر بگیرید که در آن هر کامپیوتر، مطابق شکل ۹ به چند کامپیوتر دیگر



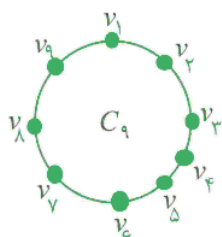
شکل ۹

متصل است. گراف شکل ۹ یک مدل سازی از شبکه مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک کامپیوتر است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که کامپیوترهای نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط اند. می خواهیم مجموعه ای با کمترین تعداد ممکن از کامپیوترها (رأس ها) انتخاب کنیم. به طوری که توسط این مجموعه از کامپیوترها به تمام کامپیوترهای این شبکه وصل باشیم. مجموعه انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه ای است؟ مجموعه ی احاطه گر مینیمم

۲ با توجه به رابطه $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟ $\left\lceil \frac{16}{4+1} \right\rceil = 4$

آیا می توانید مجموعه ای احاطه گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟ $\{a, b, c, d\}$

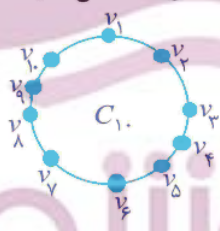
۳ گراف های C_9 و C_{10} ، P_9 ، P_{10} را رسم کنید و عدد احاطه گری هر یک را مشخص نمایید



$$\gamma(C_9) \geq \left\lceil \frac{9}{2+1} \right\rceil = 3$$

$$\{v_2, v_5, v_8\}$$

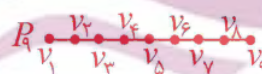
$$\Rightarrow \gamma(C_9) = 3$$



$$\gamma(C_{10}) \geq \left\lceil \frac{10}{2+1} \right\rceil = 4$$

$$\{v_1, v_3, v_6, v_9\}$$

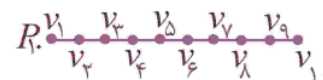
$$\Rightarrow \gamma(C_{10}) = 4$$



$$\gamma(P_9) \geq \left\lceil \frac{9}{2+1} \right\rceil = 3$$

$$\{v_2, v_5, v_8\}$$

$$\Rightarrow \gamma(P_9) = 3$$



$$\gamma(P_{10}) \geq \left\lceil \frac{10}{2+1} \right\rceil = 4$$

$$\{v_1, v_3, v_6, v_9\}$$

$$\Rightarrow \gamma(P_{10}) = 4$$

۴ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد. در گراف P_9 عدد احاطه گری $\left\lceil \frac{9}{2+1} \right\rceil = 3$ است.

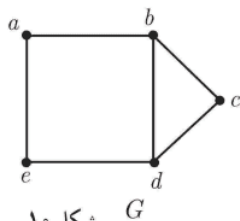
۵ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد.



$$\text{مجموعه احاطه گر مینیمم} = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_{11}\}$$

$$\Rightarrow \gamma(G) = 5 \neq \left\lceil \frac{11}{2} \right\rceil$$

مثال : عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۰ را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



شکل ۱۰

حل : به سادگی می‌توان دید که مجموعه دو عضوی $\{a, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی $\gamma(G) \leq 2$.

اما اگر $\gamma(G) = 1$ ، یعنی یک رأس در گراف G وجود دارد که به تنهایی تمام رئوس دیگر را احاطه کرده است (به تمام رئوس دیگر وصل است) یعنی رأسی با درجه ۴ در گراف وجود دارد که با توجه به گراف G می‌بینیم که چنین رأسی وجود ندارد و لذا $\gamma(G) > 1$. بنابراین $1 < \gamma(G) \leq 2$ و لذا $\gamma(G) = 2$.

روش دیگر برای حل : نوع دیگری از استدلال به این صورت است که با توجه به کران پایین مطرح شده برای $\gamma(G)$ و اینکه $\Delta(G) = 3$ داریم :

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{5}{4} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

بنابراین $2 \leq \gamma(G)$ و با توجه به مجموعه احاطه‌گر دو عضوی ارائه شده در بالا داریم $\gamma(G) \leq 2$ و لذا $\gamma(G) = 2$.

کار در کلاس

۱ تمام ۷- مجموعه‌های (مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم) گراف G در مثال قبل را بنویسید.

$\{a, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{a, d\}, \{a, b\}, \{c, e\}, \{e, d\}$

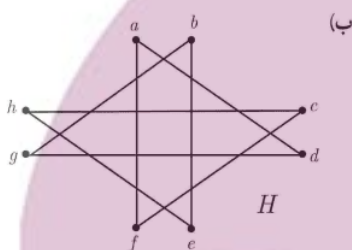
۲ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص کنید.

$$\gamma(H) \geq \left\lceil \frac{8}{2+1} \right\rceil = 3$$

از طرفی $\{a, b, c\}$ یک مجموعه

احاطه‌گری است، بنابراین :

$$\gamma(G) = 3$$



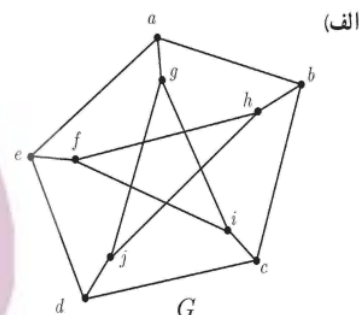
(ب)

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{3+1} \right\rceil = 3$$

از طرفی $\{a, c, h\}$ یک مجموعه

احاطه‌گری است، بنابراین :

$$\gamma(G) = 3$$



(الف)

فعالیت

۱ می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۲ را مشخص کنیم.

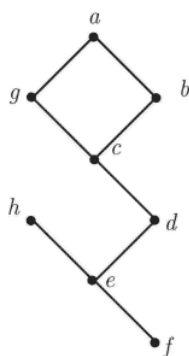
(الف) ابتدا می‌بینیم که با توجه به کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ برای $\gamma(G)$ حداقل $\left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 2$ برای رأس برای احاطه کردن رئوس لازم است اما در مراحل بعدی می‌بینیم که ۲ رأس برای احاطه تمام رئوس این گراف کافی نیست.

(ب) برای احاطه کردن رئوس a, b, c, d و g حداقل دو تا از آنها باید در مجموعه احاطه‌گر باشند. (چرا؟) زیرا $\left\lceil \frac{5}{3+1} \right\rceil = 2$

(پ) برای احاطه کردن رئوس e, f, h حداقل یکی از آنها باید انتخاب شوند. (چرا؟) $\left\lceil \frac{3}{3+1} \right\rceil = 1$

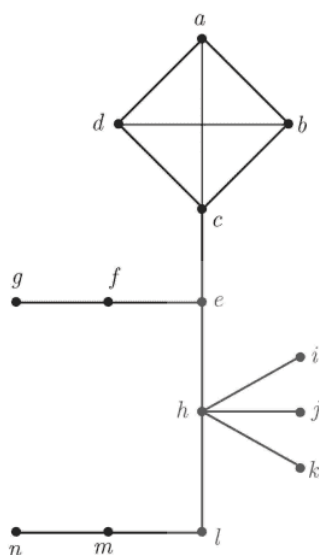
(ت) بنابراین حداقل ۳ رأس باید در هر مجموعه احاطه‌گر از گراف G باشد یعنی $\gamma(G) \geq 3$.

(ث) از طرفی چون $\{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، $\gamma(G) \leq 3$. پس $\gamma(G) = 3$.



G

شکل ۱۲



شکل ۱۳

۲ می‌خواهیم عدد احاطه‌گر گراف شکل ۱۳ را مشخص نماییم.

الف) ابتدا کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ را بررسی می‌کنیم که عدد $\left\lceil \frac{14}{6} \right\rceil = 3$ را

می‌دهد. پس $\gamma(G) \geq 3$.

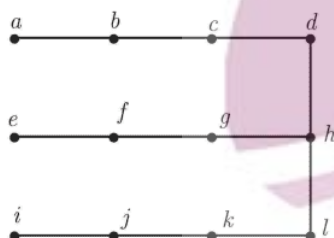
ب) اما حداقل یکی از رئوس a, b, c, d باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{4}{4+1} \right\rceil = 1$

پ) حداقل یکی از رئوس e, f, g باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{3}{3+1} \right\rceil = 1$

ت) حداقل یکی از رئوس h, i, j, k باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{4}{5+1} \right\rceil = 1$

ث) حداقل یکی از رئوس l, m, n باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{3}{2+1} \right\rceil = 1$

ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعه احاطه‌گر باید باشد. لذا $\gamma(G) \geq 4$ و با توجه به اینکه $\{c, f, h, m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq 4$ بنابراین $\gamma(G) = 4$.



شکل ۱۴

مثال: عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۴ را به دست آورید و یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای آن ارائه کنید.

حل: برای احاطه کردن رأس a لازم است یکی از دو رأس a و b در مجموعه احاطه‌گر باشند و بهتر آن است که رأس b انتخاب شود. (چرا؟) زیرا با این انتخاب، رأس c نیز احاطه می‌شود، که برای مینیمم کردن احاطه‌گری مفید است.

به همین صورت رئوس j و f را نیز می‌توان در مجموعه احاطه‌گر در نظر گرفت.

حال مجموعه $\{b, f, j\}$ تمام رئوس گراف به جز سه رأس d, h, l را احاطه می‌کند و برای احاطه این سه رأس نیز کافی است رأس h اضافه شود یعنی $\{b, f, j, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است.

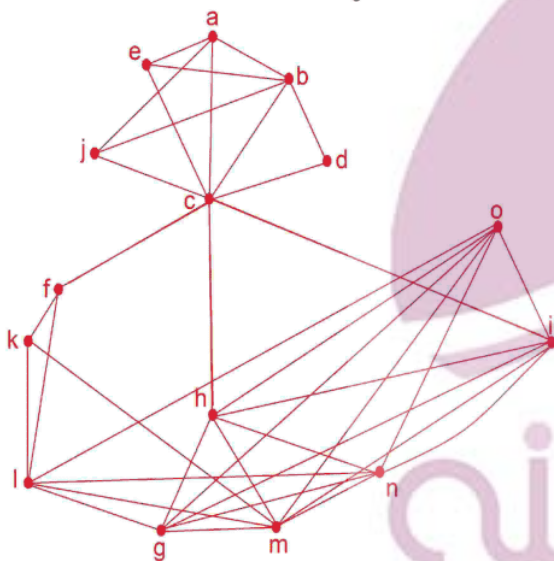
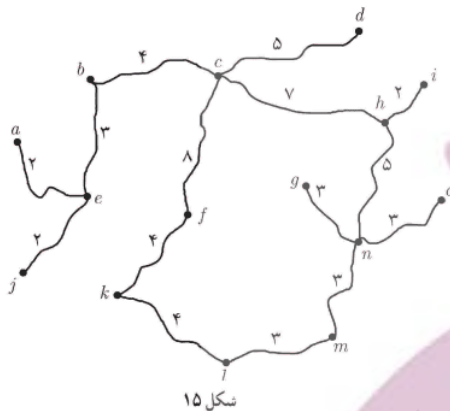
از طرفی با کمتر از ۴ رأس نیز نمی‌توان رئوس این گراف را احاطه کرد. زیرا مثلاً اگر ۳ رأس تمام رئوس را احاطه کنند، چون هیچ رأسی بیش از ۴ رأس را احاطه نمی‌کند (چرا؟) زیرا حداکثر درجه رئوس ۳ است.

باید هر کدام از این ۳ رأس دقیقاً ۴ رأس را احاطه کنند تا تمام ۱۲ رأس گراف احاطه شده باشند این یعنی باید حداقل ۳ رأس از درجه ۳ داشته باشیم و چنین رأس‌هایی در این گراف وجود ندارند. پس حداقل تعداد رئوس لازم برای احاطه تمام رئوس این گراف همان ۴ تا است.

۱ در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس)

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید. حداقل سه ایستگاه باید نصب شود، که می‌توان آن ایستگاه‌ها را به صورت $\{g, a, k\}$ یا $\{f, d, j\}$ یا $\{g, b, i\}$ یا $\{d, c, i\}$ یا ... انتخاب کرد.

ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر b احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟ حداقل دو ایستگاه دیگر باید احداث نمود. این دو ایستگاه می‌تواند $\{i, g\}$ یا $\{f, k\}$ یا ... باشد.



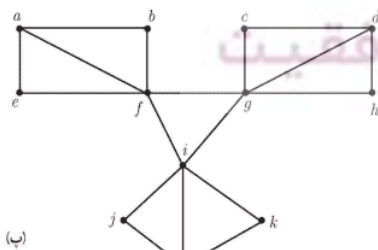
۲ نقشه مقابل نقشه یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به گونه‌ای که فاصله هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشه فوق، مسئله مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.

ابتدا هر روستا را به عنوان یک راس گراف (با حرف کوچک انگلیسی) مشخص می‌کنیم، سپس بین دو راس (دو روستا) به شرطی یال رسم می‌کنیم که فاصله ی بین آن دو بیشتر از ۱۰ کیلومتر نباشد.

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{15}{8+1} \right\rceil = 2$$

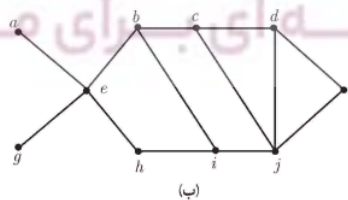
یک مجموعه ی احاطه گری می‌تواند $\{c, m\}$ باشد. بنابراین کفایت دو بیمارستان در روستاهای c, m احداث کرد.

۳ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



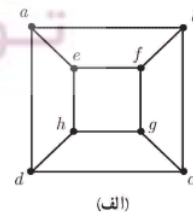
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{5+1} \right\rceil = 2$$

مجموعه $\{f, d, l\}$ یک مجموعه ی احاطه گری برای آن است. پس $\gamma(G) = 3$



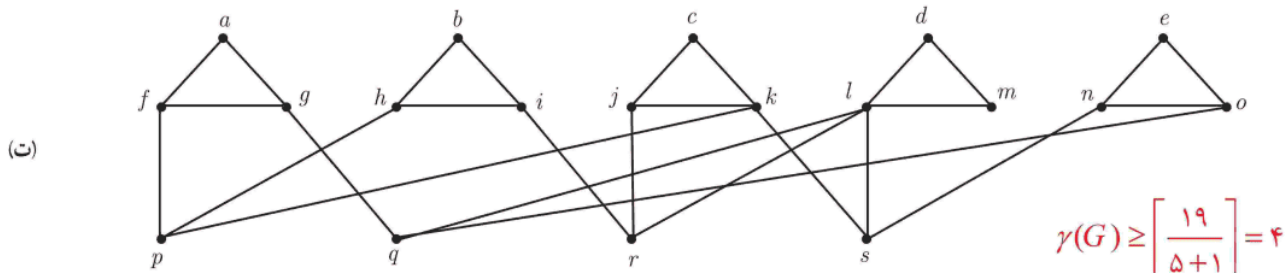
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{4+1} \right\rceil = 2$$

مجموعه $\{e, j\}$ یک مجموعه ی احاطه گری برای آن است. پس $\gamma(G) = 2$

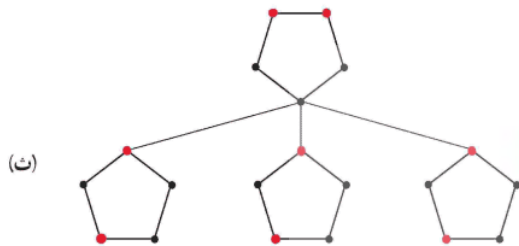


$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$$

مجموعه $\{a, g\}$ یک مجموعه ی احاطه گری برای آن است. پس $\gamma(G) = 2$

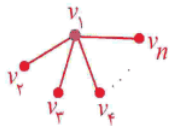


از طرفی از هر مثلث حداقل یک رأس باید انتخاب کنیم ، به عنوان نمونه مجموعه $\{f, i, k, l, e\}$ یک مجموعه احاطه گری آن است . بنابراین : $\gamma(G) = 5$



از طرفی از هر پنج ضلعی حداقل دو رأس باید انتخاب کنیم ،
لذا $4 \times 2 = 8$ یعنی : $\gamma(G) = 8$ به عنوان نمونه رؤس قرمز
رنگ به عنوان یک مجموعه احاطه گری محسوب می شوند .

۴ اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ ، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی‌برد؟ $\Delta(G)$ و



حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.)

حداقل یک رأس با ماکزیمم درجه (رأس فول) وجود دارد .

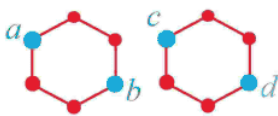
با فرض اینکه گراف دارای n رأس باشد ، حداقل باید $n - 1$ یال داشته باشد که می‌توان شکل مقابل را برای آن پیشنهاد کرد :

حداکثر میزان تعداد یال $\frac{n(n-1)}{2}$ می‌باشد (حالتی که گراف کامل باشد). در هر صورت $\Delta(G) = n - 1$ است .

۵ $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ مشخص کنید .
با توجه به اینکه در هر دو ، حداکثر درجه رؤس ۲ می‌باشد داریم :

$$\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

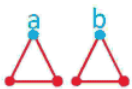
۶ اگر G یک گراف k -منتظم n رأسی باشد نشان دهید $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$
در گراف k -منتظم n رأسی ، $\Delta = \delta = k$ می‌باشد ، بنابراین :



۷ یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد .

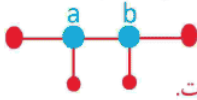
$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{2+1} \right\rceil = 4$ ، مجموعه $\{a, b, c, d\}$ یک مجموعه ی احاطه گری است . بنابراین عدد احاطه گری آن ۴ می‌باشد .

۸ الف) یک گراف ۶ رأسی که ۷-مجموعه آن با اندازه یک باشد رسم کنید .
مجموعه احاطه گری آن $\{a\}$ است .

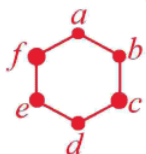


ب) یک گراف ۶ رأسی که ۷-مجموعه آن با اندازه دو باشد رسم کنید . در گراف مقابل مجموعه احاطه گری $\{a, b\}$ است .

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq n$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید .
کافیست گراف را به صورت k بخشی رسم کنیم و در هر بخش راسی که همه ی رؤس آن بخش را احاطه می‌کند در نظر بگیریم .



۹ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد .
مجموعه ی احاطه گری آن $\{a, b\}$ است.



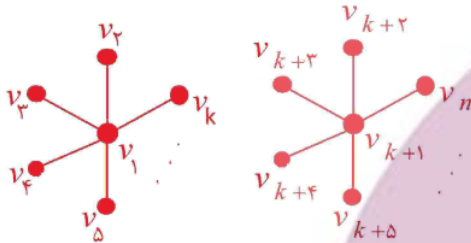
ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد .

گراف مقابل دارای سه مجموعه ی احاطه گری به اندازه ۲ می‌باشد . که عبارتند از :

$\{a, d\}$ و $\{f, c\}$ و $\{e, b\}$

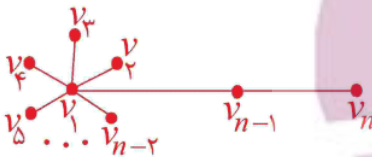
۱۰ برای هر $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 4$) دلخواه توضیح دهید که

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.



کافیست مطابق شکل روبرو، یک گراف دو بخشی رسم کنیم به طوری که یک بخش آن شامل k رأس و بخش دیگر آن شامل $n - k$ رأس باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.



مطابق شکل روبرو باید گراف را رسم کرد، که دو مجموعه‌ی

احاطه‌گری آن $\{v_1, v_n\}$ و $\{v_1, v_{n-1}\}$ می‌باشند.



الف) یک ۷-مجموعه از آن را مشخص نمایید. مجموعه $\{b, e, h, k\}$ یک ۴-مجموعه است.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید. مجموعه $\{b, c, f, g, j, k\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال

۶ عضوی است.

یادآوری و تکمیل

در سال‌های قبل با ابزارهایی همچون اصل جمع و اصل ضرب برای شمارش آشنا شده و با بعضی از تکنیک‌ها و روش‌های شمارش مانند تبدیل r^1 شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم باشد) و ترکیب r^2 شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم نباشد) نیز آشنایی داشته و از آنها در حل مسائل شمارشی استفاده کرده‌اید.

گاهی اوقات برای شمارش در حالت‌های خاص باید از روش‌هایی همچون دسته‌بندی اشیا یا تقسیم کل جایگشت‌های ممکن بر تعداد حالت‌هایی که تکراری یا بی‌اثر محسوب می‌شوند، استفاده کنیم. در این درس با توجه به طرح و حل مثال‌هایی، شما با این روش‌ها آشنا خواهید شد.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «ج»، «پ» و «ژ» و ارقام ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است:

- الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.
- ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.
- پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.
- ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

حله: روشی برای موفقیت

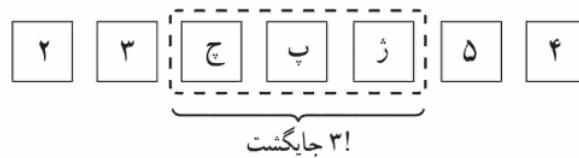
الف) ۳ حرف و ۴ رقم روی هم ۷ شیء متمایز بوده و به ۷ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند.

ب) کافی است ابتدا سه حرف را با هم یک شیء در نظر بگیریم و آنها را با ۴ رقم داده شده روی هم ۵ شیء فرض کنیم. در این صورت ۵! جایگشت دارند؛ در هر جایگشت، سه حرف داده شده هم در عین

$$۱- (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$۲- \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

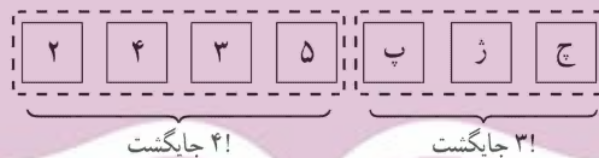
حال که کنار هم هستند ۳! جایگشت دارند و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل رمزهای مورد نظر برابر است با $5! \times 3!$



پ) مشابه قسمت (ب) ابتدا ۴ رقم داده شده را یک شیء فرض می‌کنیم که با ۳ حرف مفروض روی هم ۴ شیء بوده و ۴! جایگشت داشته و در هر جایگشت ۴ رقم داده شده هم ۴! در کنار هم جایگشت دارند، لذا تعداد رمز مورد نظر، طبق اصل ضرب عبارت است از $4! \times 4!$



ت) حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض می‌کنیم که روی هم دو شیء شده و ۳! حروف در کنار هم و ۴! نیز ارقام کنار هم جایگشت دارند که طبق اصل ضرب تعداد رمزهای مورد نظر عبارت است از $2! \times 3! \times 4!$



ما برای حل این مثال از دسته‌بندی اشیاء استفاده کردیم.

حال مسئله‌ای را طرح و حل می‌کنیم ولی هیچ توضیحی برای حل آن نمی‌دهیم تا شما خودتان راه حل این مسئله را توضیح دهید.

مثال: ۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم:

الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند (هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانش‌آموزان پایه یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می‌توان آنها را به صورت یک در میان قرار داد؟

الف) $5! \times 4! \times 2!$

ب) $4! \times 5!$

پ) $5! \times 4! = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 5 = 5! \times 4!$

ب) $2 \times (5! \times 5!)$

روش اول:

روش دوم:

جایگشت‌های با تکرار

گاهی اوقات چند شیء تکراری یا یکسان در بین اشیا یافت می‌شود. در این حالت تعداد جایگشت‌های این اشیا با تعداد جایگشت‌ها در حالتی که هیچ دو شیء یکسانی در بین اشیا نباشد، متفاوت بوده و به نظر می‌رسد کمتر باشد. به عنوان مثال تعداد جایگشت‌های سه حرف a, b, c برابر با $3! = 6$ است ولی تعداد جایگشت‌های سه حرف a و a و b برابر با ۳ است (baa, aba, aab) در واقع چون جابه‌جایی دو حرف a حالت جدیدی تولید نمی‌کند و حالت تکراری به حساب می‌آید پس در واقع می‌بایست تعداد کل جایگشت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که دو حرف تکراری می‌توانند جابه‌جا شوند یعنی $2!$ تقسیم کنیم، پس پاسخ این سؤال $3 = \frac{3!}{2!}$ است.

چون دو حرف a به $2!$ طریق می‌توانند با هم جابه‌جا شوند و این تعداد جابه‌جایی به صورت ضربی در $3!$ محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، پس باید با تقسیم $3!$ بر $2!$ از عملیات ضربی خارج شود.

کار در کلاس

محاسبه کنید با ارقام ۱، ۱، ۱، ۲ و ۴ چند رمز چهار رقمی می‌توان نوشت؟
اگر ۴ رقم متمایز بودند جواب این سؤال ۴! بود ولی چون در این ۴! و به صورت ضربی، ۳! حالت ممکن برای یک‌ها محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، لذا کافی است برای رسیدن به جواب، تعداد کل حالت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که رمز ۴ رقمی جدید تولید نمی‌شود تقسیم کنیم یعنی پاسخ، $4 = \frac{4!}{3!}$ است.

اعداد ۴ رقمی ممکن
 $\overbrace{1112, 1121, 1211, 2111}^{4 \text{ رمز ممکن}}$

تذکر: هرگاه n شیء مفروض باشند و در بین آنها k شیء تکراری یا مشابه وجود داشته باشد، برای محاسبه تعداد جایگشت‌های این n شیء ابتدا آنها را متمایز فرض کرده و جایگشت‌های آنها را حساب می‌کنیم و سپس حاصل را بر جایگشت‌های اشیای تکراری (به دلیل ورود در محاسبات به صورت ضربی) تقسیم می‌کنیم؛ یعنی این تعداد برابر است با: $\frac{n!}{k!}$.

با همین استدلال می‌توان قضیه زیر را، که به آن قضیه جایگشت با تکرار می‌گوییم، بیان کرد:

قضیه جایگشت با تکرار: اگر n شیء مفروض باشند، به طوری که n_1 تای آنها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آنها از نوع k ام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

مثال: با ارقام ۱، ۱، ۲، ۲، ۳، ۲، ۴، ۴، ۵، ۴ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

حل: طبق قضیه جایگشت با تکرار

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 2!} \rightarrow \begin{array}{l} \text{تعداد چهارها} \\ \text{تعداد یک‌ها} \\ \text{تعداد دوها} \end{array}$$

مثال : ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟
 کل جایگشت‌های ۹ نفر عبارت از ۹! است که چون دونفری که در اتاق دونفره هستند با جابه‌جایی آنها مجدداً همان دو نفر در همان اتاق بوده و حالت جدیدی تولید نمی‌شود و نیز جابه‌جایی سه نفر و چهار نفر در اتاق‌های سه نفره و چهار نفره حالت جدیدی تولید نمی‌کند و تعداد این جایگشت‌های بی‌اثر برای دو نفر، سه نفر و چهار نفر به ترتیب ۲!، ۳! و ۴! است، پس پاسخ این سؤال طبق قضیه برابر است با $\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$. این مثال به روشی دیگر و با استفاده از ترکیب برای انتخاب افراد (جابه‌جایی افراد انتخاب شده برای اتاق‌ها مهم نیست) :

$$\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4} = \frac{9!}{2! \times 7!} \times \frac{7!}{3! \times 4!} \times 1 = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$$

انتخاب سه نفر از ۷ نفر باقی‌مانده
اتاق سه نفره
انتخاب دو نفر برای
اتاق دونفره

فعالیت

شخصی وارد یک گل‌فروشی می‌شود و می‌خواهد دسته‌گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)
 ۱ هر سطر جدول زیر یک انتخاب را نمایش می‌دهد، شما این جدول را کامل کنید.



دسته گل انتخابی	مریم	رُز	میخک
۱ یک شاخه گل مریم، یک شاخه گل رُز و یک شاخه گل میخک	*	*	*
۲ دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل مریم	*		**
۳ سه شاخه گل رُز	...	***	...
۴ یک شاخه گل میخک و دو شاخه گل رُز	...	**	*
۵ سه شاخه گل مریم	***	...	...
۶ یک شاخه گل میخک و دو شاخه گل مریم	**	...	*
۷ دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل رُز	**	*	...
۸ سه شاخه گل میخک	...	...	***
۹ دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل رُز	...	*	**
۱۰ دو شاخه گل رُز و یک شاخه گل مریم	*	**	...

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای جدا کردن سه نوع گل از دو خط عمودی و برای مشخص کردن تعداد انتخاب‌ها از هر نوع گل از * استفاده شده است.

۲ آیا در هر حالت از حالت های ۱ تا ۱۰ جابه جایی ستاره ها با هم دسته گل جدیدی تولید می کند؟ **خیر**

جابه جایی دو خط عمودی با هم چطور؟ **خیر**

۳ با توجه به قضیه جایگشت با تکرار تعداد کل جایگشت های این ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی) را به دست آورید.

$$\text{تعداد کل جایگشت ها} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \binom{5}{2} = \binom{3+2}{2}$$

۴ این مسئله را در حالت کلی و برای انتخاب دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل بررسی کنید.

n = تعداد ستاره ها = تعداد شاخه گل های انتخابی

$k - 1$ = تعداد خط های عمودی برای جدا کردن k نوع گل

$n + (k - 1)$ = تعداد کل اشیا (شامل ستاره ها و خط های عمودی)

$$\text{تعداد کل جایگشت ها} = \frac{[n + (k - 1)]!}{n! \times (k - 1)!} = \binom{n + (k - 1)}{k - 1}$$

جابه جایی ستاره ها با هم، دسته گل جدیدی تولید نمی کند.

جابه جایی خط های عمود با هم دسته گل جدیدی تولید نمی کند.

مثال: به چند طریق می توان از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟
حل:

$$\begin{aligned} \text{انواع گل} = k = 4 \quad \text{فعالیت قبل} \quad \Rightarrow \quad \binom{n + k - 1}{k - 1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!} \\ \text{تعداد شاخه گل انتخابی به دلخواه} = n = 8 \end{aligned}$$

مثال: به چند طریق می توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل: ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل برمی داریم. $9 - 4 = 5$ شاخه گل باقی مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می کنیم:

$$\begin{aligned} k = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{تعداد حالت های مطلوب} = \binom{n + k - 1}{k - 1} = \binom{8}{3} \\ n = 9 - 4 = 5 \quad \leftarrow \text{تعداد انتخاب های دلخواه} \end{aligned}$$

توشه ای برای موفقیت

فعالیت

می خواهیم تعداد انتخاب های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل را مشخص کنیم. اگر فرض کنیم x_1 تعداد انتخاب ها از گل نوع اول و x_2 تعداد انتخاب ها از گل نوع دوم و x_3 تعداد انتخاب ها از گل نوع سوم باشد، در این صورت می بایست جمع انتخاب ها از سه نوع گل، برابر با ۷ باشد یعنی $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ با توجه به اینکه هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نشان دهنده یک انتخاب هفت تایی از سه نوع گل بوده و برعکس هر انتخاب هفت تایی از این سه نوع گل یک جواب صحیح و نامنفی برای این معادله است جدول زیر را کامل کرده و سپس تعداد جواب های معادله را به دست آورید.

تعداد انتخاب‌ها از گل نوع سوم x_3	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم x_2	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول x_1	$x_1 + x_2 + x_3 = 7$
۶	۰	۱	$1 + 0 + 6 = 7$
۵	۱	۱	$1 + 1 + 5 = 7$
۱	۲	۴	$4 + 2 + 1 = 7$
۰	۷	۰	$0 + 7 + 0 = 7$
۲	۴	۱	$1 + 4 + 2 = 7$
۴	۳	۰	$0 + 3 + 4 = 7$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9}{2} = 36 \text{ گل یعنی،}$$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k

$$\text{نوع گل یعنی برابر است با } \binom{n+k-1}{k-1}$$

کار در کلاس

۱ معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ (راهنمایی: مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

$$\underbrace{(x_1 - 1)}_{y_1} + \underbrace{(x_2 - 1)}_{y_2} + \underbrace{(x_3 - 1)}_{y_3} = 7 - 1 - 1 - 1 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله جدید (همان تعداد انتخاب‌های دلخواه ۴ شاخه گل از بین ۳ نوع گل) پاسخ سوال می‌باشد، که

$$\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15 \text{ برابر است با:}$$

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$. (راهنمایی: ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته و لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و...) دقیقاً مشابه سوال قبل عمل می‌کنیم:

$$\underbrace{(x_1 - 1)}_{y_1} + \underbrace{(x_2 - 1)}_{y_2} + \dots + \underbrace{(x_k - 1)}_{y_k} = n - 1 - 1 - \dots - 1 \Rightarrow y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - k$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله جدید} = \text{تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله ی مورد سوال} = \binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$$

۳ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ باشد؟

$$\left. \begin{aligned} x_1 > 1 &\Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow \underbrace{x_1 - 2}_{y_1} \geq 0 \Rightarrow x_1 = y_1 + 2 \\ x_3 > 3 &\Rightarrow x_3 \geq 4 \Rightarrow \underbrace{x_3 - 4}_{y_3} \geq 0 \Rightarrow x_3 = y_3 + 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_1 + 2 + x_2 + y_3 + 4 + x_4 + x_5 = 14$$

$$\Rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 8$$

$$\binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4} \text{ یعنی، پاسخ می باشد،}$$

۱- طرح سؤال‌هایی برای معادلات سیاله که شرط‌هایی برای x_i ها به صورت $a \leq x_i \leq b$ در آن لحاظ شده باشد در امتحانات و ارزشیابی‌ها جایز نیست.

۴ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ($x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$)

از شرط قرار داده شده ($x_i \geq 1$) نتیجه می شود ، پاسخ مسئله ، همان تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله می باشد ، که طبق

$$\text{سوال ۲ ، برابر است با : } \binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$$

۵ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟

$$\left. \begin{array}{l} x_5 > 2 \Rightarrow \underbrace{x_5 - 2}_{y_5} > 0 \Rightarrow x_5 = y_5 + 2 \\ x_3 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{معادله جدید : } x_1 + x_2 + 4 + x_4 + y_5 + 2 + x_6 = 12$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + y_5 + x_6 = 6$$

$$\text{حال با توجه به رابطه بدست آمده در سوال ۲ ، تعداد جواب ها برابر است با : } \binom{6-1}{5-1} = \binom{5}{4} = 5$$

حال می خواهیم ابزارهای شمارشی دیگری را معرفی کنیم که با استفاده از آنها می توان به حل مسائلی پرداخت که حل آنها با استفاده از روش های معمولی، دشوار و گاهی اوقات بسیار وقت گیر است!

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

مربع های لاتین

سه مدرس به نام های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه $۱۰-۸$ ، $۱۲-۱۰$ و $۴-۲$ در سه کلاس A ، B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هریک از کلاس ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. نام مدرس ها را در جدول مقابل به گونه ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

جلسات کلاس ها	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۴-۲
A	احمدی	کریمی	عباسی
B	عباسی	احمدی	کریمی
C	کریمی	عباسی	احمدی

فعالیت

۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول ۳×۳ از اعداد به دست آورید.

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

- (الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم. (a) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.
 (ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم. (b) هریک از مدرسین در تمام کلاس ها تدریس داشته است.
 (پ) هریک از اعداد در تمام سطرها آمده است. (c) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است.
 (ت) هریک از اعداد در تمام ستون ها آمده است. (d) هریک از مدرسین در هریک از جلسه ها تدریس داشته است.

تعریف: یک جدول مربعی از اعداد $۱، ۲، \dots، n$ به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون های آن با اعداد $۱، ۲، \dots، n$ پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین^۱» می نامیم. (به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می گوئیم.)

۱- اوایل برای نام گذاری این مربع ها از حروف لاتین استفاده می کرد، به همین دلیل این مربع ها به نام مربع های لاتین معروف شده اند.

مثال : دو مربع لاتین 3×3 و دو مربع لاتین 4×4 در زیر نمایش داده شده است.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

کار در کلاس

۱ دو مربع لاتین 5×5 بنویسید.

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱
۴	۵	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴

۲ با استدلال کلاسی بگویند که چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟ زیرا در هر سطر و در هر ستون ، هر کدام از اعداد ۱ تا n فقط یک بار نوشته شده اند .

۳ شکل زیر یک مربع لاتین $n \times n$ است که به آن «مربع لاتین چرخشی» می گوئیم . مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می کنید؟ زیرا در هر سطر و در هر ستون ، هر کدام از اعداد ۱ تا n فقط یک بار نوشته شده اند .

۱	۲	۳	...	...	...	$n-1$	n
n	۱	۲	۳	...	...	$n-2$	$n-1$
$n-1$	n	۱	۲	۳	...	$n-3$	$n-2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۳	۴	۵				۱	۲
۲	۳	۴	...	...	...	n	۱

با توجه به آنچه در کار در کلاس دیدیم برای هر عدد طبیعی مانند n ، مربع لاتین $n \times n$ وجود دارد. حال فرض کنیم یک مربع لاتین مانند شکل زیر داریم و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱، ۲، ۳، ...، n یک مربع جدید به دست آورده ایم. خواهیم دید که مربع به دست آمده نیز یک مربع لاتین خواهد بود، زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می کند که در سطر یا ستونی از مربع اول نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

۳	۴	۱	۲	$1 \rightarrow 3$	۴	۱	۳	۲
۲	۱	۴	۳	$2 \rightarrow 2$	۲	۳	۱	۴
۱	۲	۳	۴	$3 \rightarrow 4$	۳	۲	۴	۱
۴	۳	۲	۱	$4 \rightarrow 1$	۱	۴	۲	۳

با جایگزینی اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ از جدول اول به ترتیب با اعداد ۳، ۲، ۴، ۱ و جدول دوم حاصل شده است.

کار در کلاس

برای هر یک از مربع های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به دست آورید.

۱	۲	۳	$1 \rightarrow 2$	۲	۳	۱
۲	۳	۱	$2 \rightarrow 3$	۳	۱	۲
۳	۱	۲	$3 \rightarrow 1$	۱	۲	۳

۲	۱	۴	۳	$1 \rightarrow 2$	۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱	$2 \rightarrow 1$	۳	۴	۱	۲
۳	۴	۱	۲	$3 \rightarrow 4$	۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴	$4 \rightarrow 3$	۲	۱	۴	۳

۱	۳	۵	۴	۲	$1 \rightarrow 4$	۴	۵	۱	۳	۲
۵	۴	۲	۱	۳	$2 \rightarrow 2$	۱	۳	۲	۴	۵
۲	۱	۳	۵	۴	$3 \rightarrow 5$	۲	۴	۵	۱	۳
۳	۵	۴	۲	۱	$4 \rightarrow 3$	۵	۱	۳	۲	۴
۴	۲	۱	۳	۵	$5 \rightarrow 1$	۳	۲	۴	۵	۱

دو مربع لاتین متعامد

تعریف: فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B «متعامدند» هرگاه هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه های مربع جدید تکرار نشده باشند.

به طور مثال برای دو مربع A و B به صورت زیر داریم :

$A =$

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

$B =$

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

⇒

۲۲	۳۳	۴۴	۱۱
۳۴	۲۱	۱۲	۴۳
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۱۳	۴۲	۳۱	۲۴

یک محک برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین بدین صورت است که برای متعامد بودن باید هر دو جایگاه (درایه) در یکی از مربع ها که اعداد یکسانی دارند، جایگاه های (درایه های) نظیر به آنها از مربع دیگر اعداد متمایزی داشته باشند. این محک معمولاً زمانی که می خواهیم نشان دهیم دو مربع لاتین متعامد نیستند به کار می رود. به این صورت که کافی است در یکی از دو مربع دو درایه یکسان پیدا کنیم به طوری که در جایگاه های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه های یکسان (یکسان با هم و نه لزوماً یکسان با درایه های مربع اول) وجود داشته باشد.

به طور مثال در شکل زیر اگر در مربع لاتین A دو عدد یکسان (مانند a در شکل) به گونه ای بیابیم که در جایگاه های متناظر با آنها در مربع لاتین B (جایگاه های هاشور خورده) نیز اعداد یکسانی باشند، مثلاً خانه های هاشور خورده هر دو حاوی عدد b باشند در این صورت دو مربع A و B متعامد نیستند.

	a		
			a

مثال : در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

(ب)

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

(الف)

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

(ب)

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

حل : الف) مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه‌های دو مربع داده شده به صورت مقابل است و چون عدد دو رقمی تکراری در آن نیست لذا دو ماتریس داده شده متعامدند.

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون اول و جایگاه سطر دوم ستون دوم در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد یک هستند) دارند و دو مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۳ هستند) دارند.

۱		
	۱	

۳		
	۳	

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون دوم و جایگاه سطر چهارم ستون اول در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۲ هستند) دارند.

	۲		
۲			

	۲		
۲			

کار در کلاس

۱ چند مربع لاتین 1×1 وجود دارد؟ یک مربع وجود دارد که به صورت روبه‌روست :

۱	۲
۲	۱

و

۲	۱
۱	۲

تلفیق

۱۲	۲۱
۲۱	۱۲

۲ آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟
خیر، زیرا فقط دو مربع لاتین 2×2 وجود دارد (شکل روبه‌رو)، که تلفیق آنها دارای عضو تکراری است.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

تلفیق

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین 3×3 روبه‌رو متعامدند؟

بله، زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری وجود ندارد.

۴ آیا دو مربع لاتین 4×4 زیر متعامدند؟ بله زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری وجود ندارد.

$A =$	۳	۴	۱	۲
	۴	۳	۲	۱
	۱	۲	۳	۴
	۲	۱	۴	۳

$B =$	۳	۴	۱	۲
	۱	۲	۳	۴
	۲	۱	۴	۳
	۴	۳	۲	۱

تلفیق

	۳۳	۴۴	۱۱	۲۲
	۴۱	۳۲	۲۳	۱۴
	۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
	۲۴	۱۳	۴۲	۳۱

دیدیم که برای $n=1$ و $n=2$ دو مربع لاتین متعامد $n \times n$ وجود ندارد. ثابت شده است^۱ که اگر $n \neq 1$ و $n=2$ و $n=6$ ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود دارد و برای $n=1$ و $n=2$ و $n=6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد.

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B ، مربع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را B' بنامید. بررسی کنید که آیا A و B' متعامدند؟

$1 \rightarrow 2$				
$2 \rightarrow 4$				
$3 \rightarrow 3$				
$4 \rightarrow 1$				

تلفیق

$B' =$	۳	۱	۲	۴
	۲	۴	۳	۱
	۴	۲	۱	۳
	۱	۳	۴	۲

تلفیق

	۳۳	۴۱	۱۲	۲۴
	۴۲	۳۴	۲۳	۱۱
	۱۴	۲۲	۳۱	۴۳
	۲۱	۱۳	۴۴	۳۲

بله متعامدند زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری نداریم.

خواندنی

اولر^۲ در سال ۱۷۸۲ ادعا کرد که برای تمام اعداد طبیعی n به صورت $n = 4k + 2$ ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد. در واقع اولر پس از بررسی‌های زیاد بر روی وجود دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ و به نتیجه نرسیدن در این باره، حدس فوق را مطرح نمود. این مسئله تا سال ۱۹۰۰ حل نشده باقی ماند تا در این سال یک افسر فرانسوی به نام تاری^۳ ثابت کرد که ادعای اولر برای $n = 6$ درست است. تا سال ۱۹۵۹ برای $n = 10$ و اعداد بزرگ‌تر کسی جواب را نمی‌دانست. در سال ۱۹۶۰ یک ریاضی‌دان آمریکایی به نام پارکر^۴ و دو ریاضی‌دان هندی به نام‌های بوس^۵ و شریخاند^۶ ثابت کردند که حدس اولر به جز برای حالت $n = 6$ برای سایر $n = 4k + 2$ درست نیست؛ یعنی برای هر عدد 6 و 2 و $n \neq 1$ حداقل دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود دارد.

۱- اثبات این مطلب در این کتاب مد نظر نیست.

۲- Euler

۳- Tarry

۴- Parker

۵- Bose

۶- Shrikhande

می‌خواهیم نشان دهیم اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به دست می‌آید نیز با مربع لاتین دیگر متعامد است؛ به عبارتی اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_1 مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد، آنگاه A و B_1 نیز متعامدند.

۱ فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_1 نیز مربع لاتین حاصل از تعویض تمام اعداد ۱ و ۲ با هم، در B باشد. (یعنی در B به جای تمام ۱ها، ۲ و به جای تمام ۲ها، ۱ قرار دهیم و آن را B_1 بنامیم.) نشان دهید A و B_1 متعامدند. (راهنمایی: دو درایه یکسان در A را در نظر بگیرید و نشان دهید که جایگاه‌های متناظر با آنها در B_1 نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند.) دو درایه یکسان در A را در نظر می‌گیریم، اگر درایه‌های نظیر آنها در B_1 یکسان باشند، آنگاه این درایه‌ها در B نیز یکسان خواهند بود، که با متعامد بودن A و B تناقض دارد. پس A و B_1 متعامدند.

۲ فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_1 مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد. نشان دهید A و B_1 نیز متعامدند. (راهنمایی: دو درایه یکسان در A را در نظر بگیرید و با برهان خلف نشان دهید درایه‌های نظیر به آنها در B_1 نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند. برای این کار از برهان خلف و خاصیت جایگشت استفاده کنید.) دو درایه یکسان در A را در نظر می‌گیریم، اگر درایه‌های نظیر آنها در B_1 یکسان باشند، آنگاه این درایه‌ها در B نیز یکسان خواهند بود، که با متعامد بودن A و B تناقض دارد. پس A و B_1 متعامدند.

مثال: قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

$= A$

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۴	۲	۵	۳

$= B$

الف) ابتدا فرض کنید بخواهیم برای کار ۵ کارگر با ۵ ماشین ریسندگی در ۵ روز هفته به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر در هر روز با یک ماشین ریسندگی و در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک بار کار کرده باشد. برای حل این مسئله می‌توانیم از یک مربع لاتین 5×5 استفاده کنیم. فرض کنید هر ستون نشان‌دهنده یک کارگر و هر سطر نشان‌دهنده یک روز هفته و هر کدام از اعداد ۱ و ۲ و ... و ۵ که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند نمایانگر یکی از ماشین‌های ریسندگی باشند. بنابراین مثلاً در روز دوشنبه کارگر W_1 با ماشین ریسندگی شماره ۲ کار می‌کند.

ب) حال فرض کنید که در مسئله مطرح شده در قسمت (الف) ۵ نوع الیاف مختلف هم وجود داشته باشد و بخواهیم به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر از هر نوع الیاف هم دقیقاً یک بار استفاده کند.

برای این کار مانند قسمت (الف) یک مربع لاتین می‌کشیم و هر ستون را نشان‌دهنده یک کارگر و هر سطر را نشان‌دهنده یک روز هفته و هر کدام از اعداد ۱ و ۲ و ... و ۵ را که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند

نمایانگر یکی از انواع **الیاف** در نظر می‌گیریم. با توجه به مربع لاتین، مثلاً در روز سه‌شنبه کارگر شماره ۴ با الیاف شماره ۳ کار می‌کند.

پ) حال اگر درایه‌های نظیر از دو مربع A و B را در کنار هم در یک مربع جدید قرار دهیم یک مربع 5×5 به شکل زیر خواهیم داشت و می‌توانیم تمام اطلاعات فوق را از همین مربع استخراج کنیم. به‌طور مثال کارگر شماره ۴ در روز یکشنبه با ماشین شماره ۳ و الیاف شماره ۴ کار می‌کند. تا اینجا برنامه‌ریزی ما با استفاده از دو مربع لاتین انجام شده است، اما دو مربع لاتین A و B متعامد هم هستند و این ویژگی آنها تا اینجا به کار نیامده است. می‌دانیم که متعامد بودن دو مربع A و B به این معناست که مربع دو رنگ حاصل، در هیچ خانه‌ای عدد دو رقمی تکراری ندارد. از آنجا که اعداد سمت چپ شماره ماشین ریسندگی و اعداد سمت راست شماره الیاف مورد استفاده هستند لذا در صورتی که دو مربع استفاده شده متعامد باشند هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به کار رفته است.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
یکشنبه	۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
دوشنبه	۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
سه‌شنبه	۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه	۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

کار در کلاس

- در قسمت (الف) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک‌بار کار کرده است؟
چون مربع نوشته شده، مربع لاتین است و هر عدد نشان دهنده یک ماشین می‌باشد.
- در قسمت (ب) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر با هر یک از الیاف دقیقاً یک‌بار کار می‌کند.
چون مربع مربوطه، مربع لاتین است و هر عدد نمایشگر یک نوع الیاف است.
- در قسمت (پ) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر یک از الیاف‌ها در هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک‌بار به کار گرفته شده است؟ چون A و B متعامدند.

۴ اگر سه برادر تقریباً هم‌سن و سال در خانه سه‌کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به‌گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک‌بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک‌بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

	b_1	b_2	b_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۳	۱	۲

ابتدا برای استفاده سه برادر از ۳ کت در سه روز هفته به‌گونه‌ای برنامه‌ریزی می‌کنیم که هر کدام در هر روز یک کت بپوشد. لذا مربع لاتین روبرو را چنان رسم کرده که هر سطر نشان دهنده یکی از سه روز هفته و هر ستون نشان دهنده یکی از برادران باشد و هر کدام از اعداد ۱ و ۲ و ۳ در آن مربع، نمایانگر یکی از کت‌ها باشد.

	b_1	b_2	b_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

به همین ترتیب یک مربع لاتین دیگر که هر سطر نشان دهنده یکی از روزهای هفته و هر ستون نشان دهنده یکی از برادران است و هر کدام از اعداد ۱ و ۲ و ۳ در آن مربع، نمایانگر یکی از پیراهن‌ها باشد، رسم می‌کنیم. به‌طوری که با مربع قبلی متعامد باشد. (شکل روبرو)

	b_1	b_2	b_3
شنبه	۱۱	۲۲	۳۳
یکشنبه	۲۳	۳۱	۱۲
دوشنبه	۳۲	۱۳	۲۱

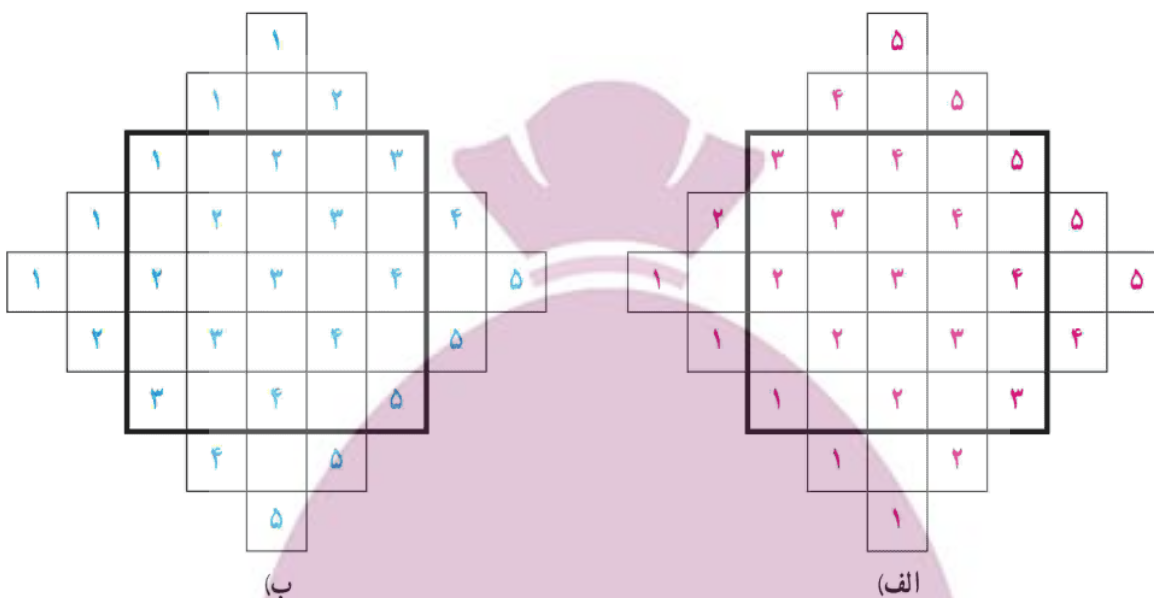
تلفیق دو مربع (شکل روبرو) که متعامد می‌باشد، برنامه مورد نظر را در اختیار ما قرار می‌دهد.
به‌طور مثال در روز شنبه برادر اول باید کت ۱ و پیراهن ۱ را بپوشد و در روز یکشنبه کت ۲ و پیراهن ۳ را بپوشد و ...

تلفیق دو مربع بالا

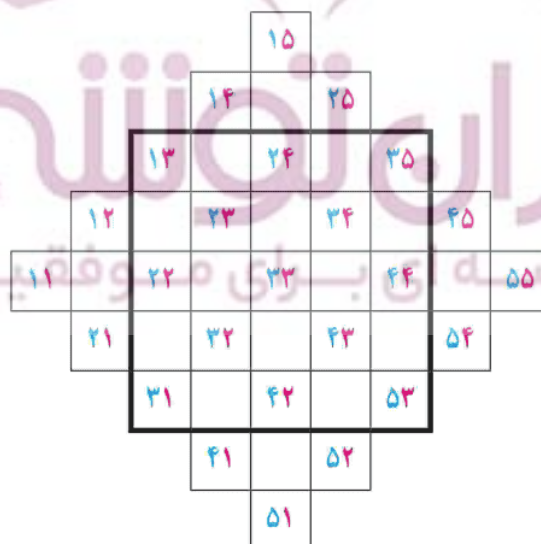
یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد^۱

با انجام مراحل زیر می‌توانید دو مربع لاتین 5×5 متعامد به دست آورید.

۱ اعداد ۱، ۲، ... و ۵ با نظمی خاص (به نحوه چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.

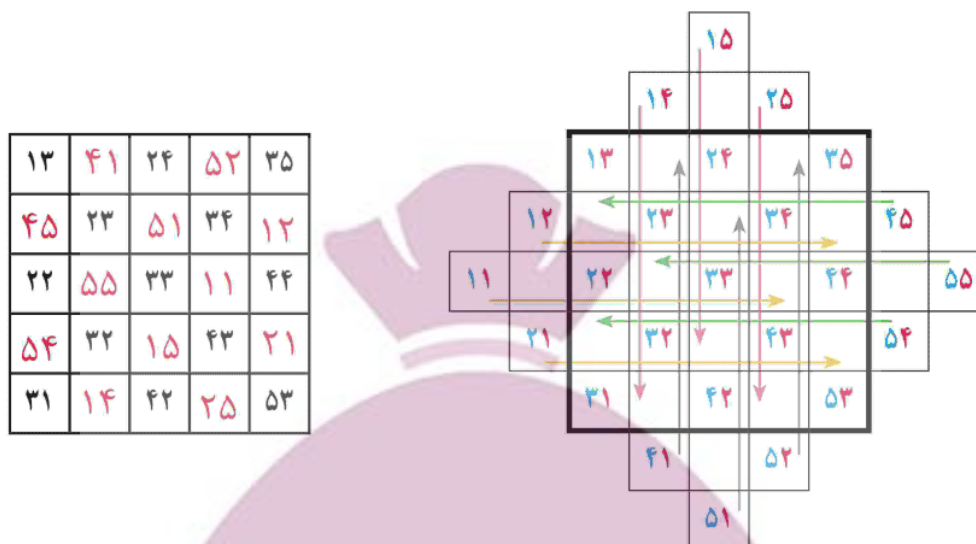


۲ از کنار هم قرار دادن اعداد متناظر از شکل‌های (الف) و (ب) شکل زیر به دست می‌آید که در آن عدد دورقمی تکراری وجود ندارد.



۱- از آنجا که روش ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه غیر فرد چندان ساده نیست، لذا در این کتاب به آن پرداخته نمی‌شود.

۳ حال مربع پررنگ 5×5 وسط، در شکل مرحله ۲ را در نظر بگیرید (شکل زیر) و با انتقال اعداد خارج از این مربع به داخل آن با روش زیر مربع مقابل را پر کنید.



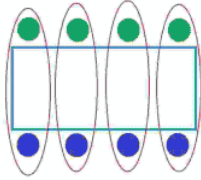
الف) در هر کدام از مربع‌های سمت چپ، ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.
 ب) در هر کدام از مربع‌های سمت راست، ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.
 پ) در هر کدام از مربع‌های بالا، ۵ خانه به پایین انتقال دهید.
 ت) در هر کدام از مربع‌های پایین، ۵ خانه به بالا انتقال دهید.
 ۴ حال دو مربع 5×5 بکشید و در یکی از آنها اعداد سمت چپ در مربع مرحله قبل و در دیگری اعداد سمت راست را قرار دهید. دو مربع لاتین حاصل متعامد خواهند بود.

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

۵ با روشی کاملاً مشابه آنچه دیدید برای هر n فرد می‌توانید دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n به دست آورید.

۱ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



مسئله را به این صورت بیان می‌کنیم که :

مطابق شکل دور یک میز ۴ جفت صندلی روبروی هم داریم که می‌خواهیم ۴ جفت

برادر را روی آنها بنشانیم. طبق اصل شمارش این عمل به ۴! حالت امکان پذیر است.

از طرفی برای هر جفت صندلی که دو برادر می‌خواهند روی آن بنشینند ۲ حالت داریم (کدام برادر روی صندلی آبی و کدام

روی صندلی سبز بنشیند) و با وجود ۴ صندلی طبق اصل شمارش باید ۴! در ۲ ضرب شود. بنابراین جواب مسئله ۴! × ۲! است.

۲ اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک

شامل دو رقم متمایز از A و سه رقم متمایز از B باشد؟

تعداد حالات انتخاب ۲ رقم از ۴ رقم مجموعه A برابر است با: $\binom{4}{2}$

تعداد حالات انتخاب ۳ رقم از ۵ رقم مجموعه B برابر است با: $\binom{5}{3}$

از طرفی تعداد حالات چینش ۵ رقم به صورت یک کد ۵ رقمی برابر ۵! می‌باشد، لذا طبق اصل ضرب جواب مسئله ۵! × $\binom{5}{3}$ × $\binom{4}{2}$ است.

۳ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر

شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر :

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛ چیدن ۹ کتاب بدون هیچ محدودیت به ۹! طریق امکان‌پذیر است.

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

۴ کتاب فیزیک را به عنوان یک پک کتاب که به همراه ۵ کتاب ریاضی، ۶ شیء محسوب می‌شود و تعداد جایگشت آنها ۶! خواهد بود.

از طرفی ۴ کتاب فیزیک به تعداد ۴! طریق با هم امکان جابجایی دارند، لذا طبق اصل ضرب، جواب مسئله ۶! × ۴! است.

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

باید کتاب‌ها بنا به موضوع یکی در میان چیده شوند: $RFRFRFRFR$

لذا برای ریاضی‌ها ۵! و برای فیزیک‌ها ۴! حالت داریم و طبق اصل ضرب در کل ۵! × ۴! روش امکان‌پذیر است.

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

کتاب‌های خاص را به عنوان یک پک ۳ تایی که به ۳! طریق کنار هم قرار می‌گیرند در نظر می‌گیریم.

از طرفی یک پک به همراه ۶ کتاب باقی‌مانده به ۷! طریق می‌توان کنار هم چید.

در نتیجه بنا به اصل ضرب به ۷! × ۳! روش امکان‌پذیر است.

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن ۷! × ۴! باشد.

۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند، به طوری که

همواره دانش‌آموزان پایه دوازدهم پهلوی هم باشند؟

۵ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟ $\frac{6!}{2! \times 3!}$

۶ می‌خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجناس تولید شده خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف

$a, a, b, c, c, d, d, d, d$ ، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟ $\frac{9!}{3! \times 3! \times 2!}$

۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟ $7! = 3! \times 2! \times 2!$

۸ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:

الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛ x_i را به عنوان گل نوع i ام معرفی می‌کنیم در نتیجه جواب مسئله، همان تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \text{ است. بنابراین پاسخ آن } \binom{15}{4} = \binom{11+5-1}{5-1} \text{ است.}$$

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

$$\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} \text{ تعداد جواب‌های صحیح مثبت معادله قسمت قبل، جواب مسئله می‌باشد یعنی:}$$

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

یعنی در معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ شرایط $x_2 \geq 2$ و $x_5 > 3$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیرهای آن برقرار است.

$$\left. \begin{aligned} x_2 \geq 2 &\Rightarrow x_2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x_2 = y_2 + 2 \\ x_5 > 3 &\Rightarrow x_5 \geq 4 \Rightarrow x_5 - 4 \geq 0 \Rightarrow x_5 = y_5 + 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \Rightarrow \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$$

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

یعنی در معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ شرایط $x_3 = 0$ و $x_4 \geq 5$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیرهای آن برقرار است.

$$x_4 \geq 5 \Rightarrow x_4 - 5 \geq 0 \Rightarrow x_4 = y_4 + 5 \xrightarrow{x_3=0} x_1 + x_2 + 0 + y_4 + 5 + x_5 = 11$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_4 + x_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

۹ مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده:

الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$, $x_i > 0$, $2 \leq i \leq 5$

$$\xrightarrow{2 \leq i \leq 5} x_i > 0 \Rightarrow x_i \geq 1 \Rightarrow x_i - 1 \geq 0 \Rightarrow x_i = y_i + 1 \Rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

ب) $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$, $x_1 > 2$, $x_5 \geq 4$

$$\left. \begin{aligned} x_1 > 2 &\Rightarrow x_1 \geq 3 \Rightarrow x_1 - 3 \geq 0 \Rightarrow x_1 = y_1 + 3 \\ x_5 \geq 4 &\Rightarrow x_5 - 4 \geq 0 \Rightarrow x_5 = y_5 + 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 + x_6 = 12$$

$$\Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5 \Rightarrow \binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5}$$

پ) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$, $x_i \geq 1$, $1 \leq i \leq 5$

$$\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

طبق شرط مسئله، باید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) را محاسبه کنیم که برابر است با:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$

بدیهی است که با توجه به ضریب x_2 ، برای آن ۳ حالت می توان در نظر گرفت :

$$\text{حالت اول: } x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

$$\text{حالت دوم: } x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

$$\text{حالت سوم: } x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$36 + 15 + 3 = 54$$

$$\text{ث) } x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$

با توجه به شرایط معادله ، چهار حالت برای x_2 وجود دارد :

$$\text{حالت اول: } x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

$$\text{حالت دوم: } x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$\text{حالت سوم: } x_2 = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$\text{حالت چهارم: } x_2 = 9 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{0+3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$$

$$\text{بنابراین تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله برابر است با: } 10 + 6 + 3 + 1 = 20$$

ایران تونش

توشه ای برای موفقیت

۱۰ به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \xrightarrow{x_i \geq 0} \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

به ۲۱ طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد.

۱۱ به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \xrightarrow{x_i \geq 1} \text{تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی)} = \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

به ۳۵ طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر چنان توزیع کرد که به هر نفر حداقل یک توپ تعلق گیرد.

۱۲ آیا مربع لاتین حاصل از اِعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

خیر امکان ندارد متعامد باشند زیرا اگر مثلاً در جایگشت، $a \rightarrow 1$ باشد، آنگاه در مقابل تمام ۱ های مربع اول، عدد a در مربع دوم ظاهر می شود که در مربع تلفیق زوج $1a$ تکراری خواهد بود.

برای درک بهتر به مربع روبرو همراه با جایگشت آن دقت کنید:

۱	۲	۳	$1 \rightarrow a$	a	?	?
۲	۳	۱	$2 \rightarrow ?$	?	?	a
۳	۱	۲	$3 \rightarrow ?$	?	a	?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۳ مربع لاتین 3×3 مقابل را در نظر بگیرید.

الف) سطر دوم و سوم مربع A را جابه جا کنید و مربع حاصل را A_1 بنامید. آیا A و A_1 متعامدند؟

$A_1 =$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	تلفیق	$\begin{bmatrix} 33 & 11 & 22 \\ 12 & 23 & 31 \\ 21 & 32 & 13 \end{bmatrix}$	متعامدند.
---------	---	-------	--	-----------

ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع A را جابه جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه جا کنید و مربع حاصل را A_2 بنامید. آیا A و A_2 متعامدند؟

$A_2 =$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	و	$A =$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	متعامد نیستند زیرا مطابق شکل روبرو، برای دو عدد یکسان ۱، دو عدد یکسان ۲ نظیر شده است.
---------	---	---	-------	---	---

پ) با توجه به قسمت های الف) و ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می آید؟

خیر، به طور قطع نمی توان گفت، ممکن است متعامد باشند یا نباشند.

۲- آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می آید؟

خیر، در بعضی مواقع ممکن است.

۱۴ قرار است شش مدرس $T_1, T_2, \dots, T_6$ در شش جلسه متوالی در شش کلاس $C_1, C_2, \dots, C_6$ به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

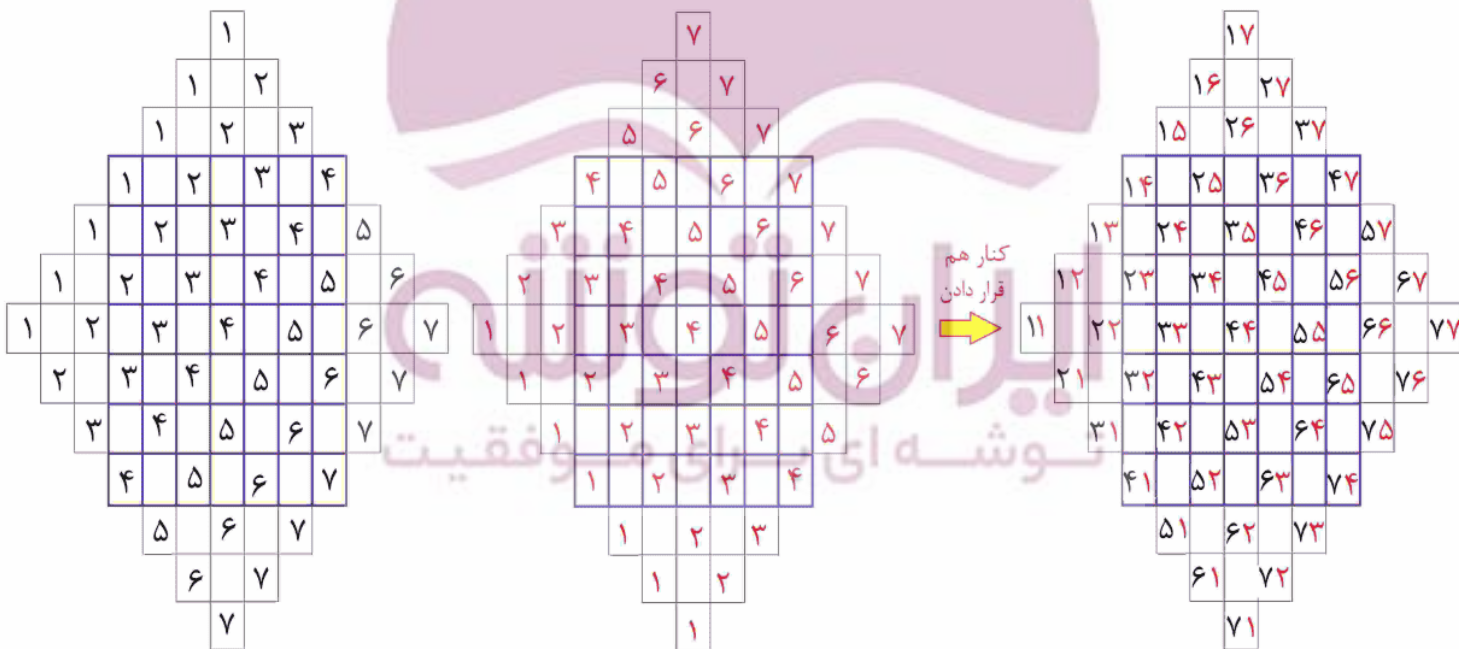
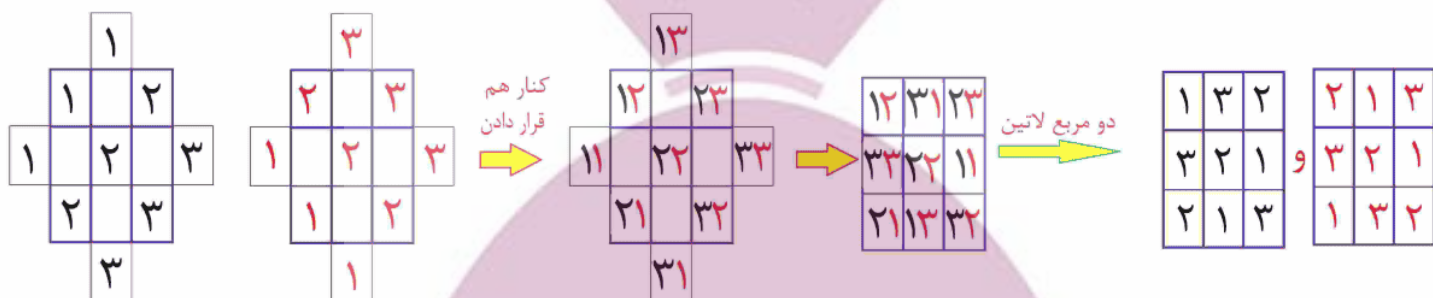
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
جلسه اول	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
جلسه دوم	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
جلسه سوم	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
جلسه چهارم	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3
جلسه پنجم	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2
جلسه ششم	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1

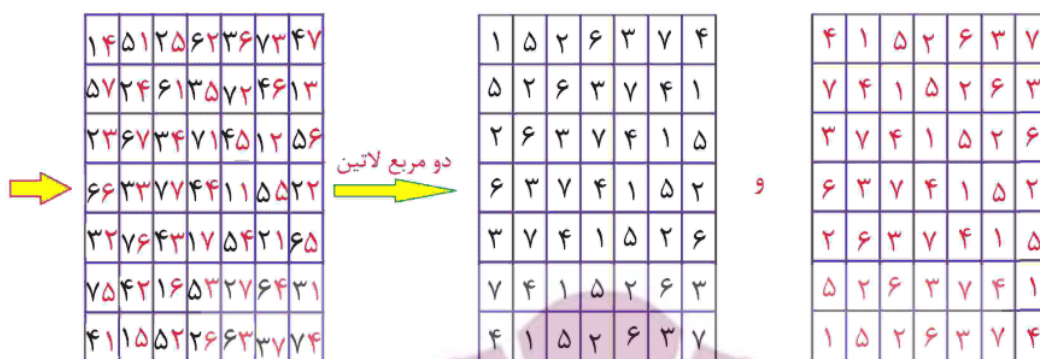
یک مربع لاتین 6×6 که هر سطر آن یکی از جلسات و هر ستون آن یکی از کلاس‌ها را مشخص می‌کند.

به عنوان نمونه معلم T_1 جلسه اول را در کلاس C_1 است.

و معلم T_6 جلسه چهارم را در کلاس C_3 است.

۱۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بنویسید.





۱۶ در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد :

- (الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛
 - (ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛
 - (پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛
 - (ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.
- برای این منظور یک برنامه ریزی انجام دهید.

کافیست دو مربع لاتین 7×7 بنویسیم ، به طوری که سطر های آنها ، روز های هفته و ستون های آنها راننده ها نام گذاری شوند .

((برای سهولت در نوشتن ، راننده ها را a, b, c, d, e, f, g نام گذاری می کنیم))

اگر آن دو مربع را A و B بنامیم ، اعداد درون مربع های A شماره ماشین و اعداد درون مربع های B شماره مسیر را مشخص می کنند .

لذا مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه های آنها ، جواب مسئله است .

برای این منظور از مربع های بدست آمده در سوال ۱۵ استفاده می کنیم :

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
یکشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
دوشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
سه شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
پنجشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
جمعه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

$A =$

و

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
یکشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
دوشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
سه شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
پنجشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
جمعه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴

$B =$

تلفیق

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
یکشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
دوشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
سه شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
پنجشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
جمعه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

به عنوان نمونه راننده a روز شنبه با ماشین شماره ۱ در مسیر شماره ۴ خواهد بود .

عزیزان می توانند به محض آماده شدن دیگر

فایل ها به وبلاگ مراجعه نموده و دانلود کنند .

آدرس وبلاگ: sinxcosx.blogfa.com

همچنین در صورت مشاهده اشتباه در محاسبه و پاسخ

ها بنده را از طریق شماره ۰۹۱۶۸۳۲۴۵۰۰ مطلع سازید .

※سپاسگزارم※

نویسنده پاسخ ها : افشین ملاسعیدی شهرستان : آبادان

با تشکر فراوان از استاد عزیز آقای انارکی که همکاری بسیار زیاد داشته و بنده را در حل مسائل یاری نموده اند.

هزینه این فایل : قرائت صلوات جهت سلامتی

مُنجی عالم بشریت ، قُطب دایره امکان (عج)

روش هایی برای شمارش

درس ۲

اصل شمول و عدم شمول

واضح است که برای محاسبه تعداد اعضای $(A \cup B)$ یعنی $|A \cup B|$ چون اعضای $(A \cap B)$ هم در A و هم در B هستند، اگر اعضای A و B را روی هم حساب کنیم اعضای $(A \cap B)$ دو بار محاسبه شده اند و می بایست یک بار از این مجموع کم شود و لذا خواهیم داشت :

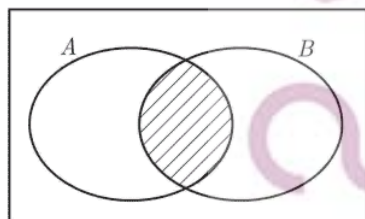
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

این تساوی به اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه معروف است. (برای اختصار آن را اصل شمول می نامیم).

با توجه به تعریف متمم اگر S مجموعه مرجع A و B باشد، داریم :

$$|(A \cup B)'| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

این تساوی نتیجه اصل شمول است.



شکل ۱

نتیجه مهم : اگر S مجموعه ای متناهی و A و B زیرمجموعه های S باشند، در این صورت تعداد اعضای S که در هیچ یک از مجموعه های A و B قرار ندارند برابر است با :

$$|S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

مثال : در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند.

حل : ابتدا با استفاده از اصل شمول تعداد افرادی را که حداقل در یکی از دو رشته ورزشی بازی می کنند مشخص می کنیم و سپس با استفاده از نتیجه اصل شمول تعداد افرادی را که در هیچ رشته ورزشی شرکت ندارند به دست می آوریم.

اگر مجموعه افرادی را که فوتبال و والیبال بازی می کنند به ترتیب F و V بنامیم در این صورت خواهیم داشت :

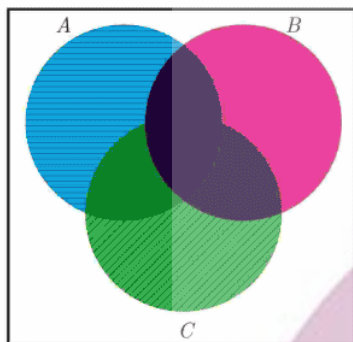
$$|F \cup V| = |F| + |V| - |F \cap V| \Rightarrow |F \cup V| = 15 + 14 - 9 = 20$$

$$\Rightarrow |F \cup V| = 20 = 25 - 5 \Rightarrow |F \cup V| = |S| - |F \cup V| = 25 - 20 = 5$$

اصل شمول را می توان برای بیش از دو مجموعه هم تعمیم داده و بیان کرد که ما در این کتاب برای حداکثر سه مجموعه آن را بیان و مسائلی را با استفاده از این اصل طرح و حل خواهیم کرد.

اصل شمول برای سه مجموعه : اگر A ، B و C زیر مجموعه هایی از مجموعه مرجع S باشند، در این صورت همواره تساوی زیر (اصل شمول) برقرار است :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



شکل ۲

(توضیح دهید چرا اشتراک های دو تایی کم و اشتراک سه تایی اضافه شده است؟)

چون در جمع تکی ها ، اشتراک های دو تایی مکرر شمرده شده اند ، باید اضافی آن

حذف شود . لذا اشتراک های دو تایی را کم می کنیم .

از طرفی طی کم کردن آن اشتراک ها ، اشتراک سه تایی که قبلاً ۳ بار حساب

شده ، ۳ بار هم کم می شود ، پس باید یکبار افزوده گردد .

با استفاده از تعریف متمم ، نتیجه اصل شمول نیز به صورت زیر بیان می شود :

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| \quad (\text{تعداد اعضای } S \text{ که در هیچ یک از } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ قرار ندارند})$$

فعالیت

چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 400$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش پذیر نباشند، بر ۴ بخش پذیر نبوده و بر ۵ نیز بخش پذیر نباشند).

۱ در بین اعداد ۱۲، ۲۵، ۱۰ و ۱۳ کدام یک مورد نظر می باشند؟ ۱۳ زیرا بر هیچکدام از اعداد ۳ و ۴ و ۵ بخش پذیر نیست .

۲ آیا عدد ۶۰ جزء اعداد مورد نظر است؟ خیر ، زیرا بر هر سه عدد ۳ و ۴ و ۵ بخش پذیر است .

۳ اگر مجموعه اعدادی را که بر ۳ بخش پذیرند A و اعداد بخش پذیر بر ۴ را B و اعداد بخش پذیر بر ۵ را C بنامیم، $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ و $\overline{C}$ را تعریف کنید.

$\overline{A}$ = مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش پذیر نیستند . $\overline{B}$ = مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیر نیستند . $\overline{C}$ = مجموعه اعدادی که بر ۵ بخش پذیر نیستند .

آیا مجموعه $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ همه اعداد مورد نظر را شامل می شود؟ بله

۴ آیا تساوی $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \overline{(A \cup B \cup C)}$ برقرار است؟ بله ، زیرا :

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{(A \cup B) \cup C} \stackrel{\text{دمورگان}}{=} \overline{A \cup B} \cap \overline{C} \stackrel{\text{دمورگان}}{=} (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

۵ با توجه به تساوی اخیر و اصل شمول و نتیجه اصل شمول جاهای خالی را پر کرده و تعداد اعداد خواسته شده را

محاسبه کنید. (منظور از [] جزء صحیح است).

$$A = \{1 \leq n \leq 400 \mid 3 \mid n\} \rightarrow |A| = \left[\frac{400}{3} \right] = 133$$

(از هر سه عدد متوالی یکی بر ۳ بخش پذیر است، پس تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا k که بر سه بخش پذیرند برابر است با $\left[\frac{k}{3} \right]$).

$$B = \{1 \leq n \leq 400 \mid 4 \mid n\} \rightarrow |B| = \left[\frac{400}{4} \right] = 100$$

$$C = \{1 \leq n \leq 400 \mid 5 \mid n\} \rightarrow |C| = \left[\frac{400}{5} \right] = 80$$

$(A \cap B)$ یعنی مجموعه اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش پذیرند و با توجه به قضیه ای در نظریه اعداد، «مجموعه اعدادی که بر a و بر b بخش پذیر باشد با مجموعه اعدادی که بر «کم‌م» آن دو عدد یعنی بر $[a, b]$ بخش پذیرند، برابر می باشد». (این قضیه برای سه عدد یا بیشتر نیز برقرار است)

$$|A \cap B| = \left[\frac{400}{[3, 4]} \right] = \left[\frac{400}{12} \right] = 33$$

$$|A \cap C| = \left[\frac{400}{[3, 5]} \right] = \left[\frac{400}{15} \right] = 26$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{400}{[4, 5]} \right] = \left[\frac{400}{20} \right] = 20$$

$$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{400}{60} \right] = 6 \quad ([3, 4, 5] = [[3, 4], 5] = [12, 5] = 60)$$

$$\begin{aligned} |\overline{A \cap B \cap C}| &= |A \cup B \cup C| = |S| - |A \cup B \cup C| \\ &= 400 - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|) \\ &= 400 - (133 + 100 + 80 - 33 - 26 - 20 + 6) = 160 \end{aligned}$$

کار در کلاس

چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 350$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۵، ۴ و ۶ بخش پذیر نباشند؟

(توجه داشته باشید که $[5, 4, 6] = 60$ ، $[4, 6] = 12$ ، $[5, 6] = 30$)

مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۴، را با A و مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۵ را با B و مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۶ را با C نمایش می دهیم. بنابراین:

$$|A| = \left[\frac{350}{4} \right] = 87 \quad \text{و} \quad |B| = \left[\frac{350}{5} \right] = 70 \quad \text{و} \quad |C| = \left[\frac{350}{6} \right] = 58 \quad \text{و} \quad |A \cap B| = \left[\frac{350}{20} \right] = 17$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{350}{30} \right] = 11 \quad \text{و} \quad |C \cap A| = \left[\frac{350}{12} \right] = 29 \quad \text{و} \quad |A \cap B \cap C| = \left[\frac{350}{60} \right] = 5$$

$$|\overline{A \cap B \cap C}| = |A \cup B \cup C| = |S| - |A \cup B \cup C| = 350 - (87 + 70 + 58 - 17 - 11 - 29 + 5) = 187$$

مثال: اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداقل چقدر زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد) (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی هایی که در هر یک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد).

حل: یک رمز ۴ رقمی را به صورت $\overline{abcd}$ نمایش می دهیم که در آن a, b, c, d ارقام صفر تا ۹ می باشند. محاسبه تعداد چنین ارقامی به صورت مستقیم کاری وقت گیر است و امکان دارد رمزهایی را چندبار محاسبه کنیم یا رمزهایی را از قلم بیندازیم، لذا از اصل شمول استفاده می کنیم.

ابتدا مجموعه های A و B را به صورت زیر و مخالف با آنچه مورد نظر مسئله است تعریف می کنیم!

$$A = \{\overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq 7\} \rightarrow |A| = 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

$$B = \{\overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq 8\} \rightarrow |B| = 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

$$(A \cap B) = \{\overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq 7, 8\} \rightarrow |A \cap B| = 8 \times 8 \times 8 \times 8$$

واضح است که منظور از $\overline{A}$ مجموعه اعداد ۴ رقمی است که در هر یک از آنها رقم ۷ به کار رفته است و منظور از $\overline{B}$

اعداد ۴ رقمی است که در آنها عدد ۸ به کار رفته است. البته $(\overline{A} \cap \overline{B})$ یعنی مجموعه اعداد ۴ رقمی که در آنها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ به کار رفته است و تعداد اعضای این مجموعه پاسخ سؤال مطرح شده است.

$$10^4 \rightarrow 10^4 \times 10^4 \times 10^4 \times 10^4 = 10000$$

رقم اول رقم دوم رقم سوم رقم چهارم

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

$$= 10000 - (9^4 + 9^4 - 8^4) = 974$$

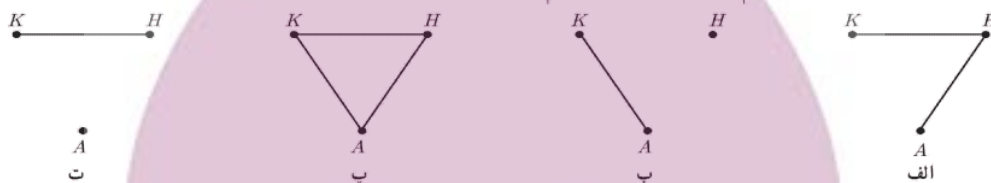
$$974 \times 5 = 4870 = \text{زمان لازم بر حسب ثانیه}$$

کار در کلاس

در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورمه، آبگرم و حاجی آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده‌هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به طوری که پس از تکمیل راه‌ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می‌توان چنین راه‌هایی را طراحی کرد؟

اگر روستاها را K ، A و H بنامیم، در این صورت یافتن تعداد چنین راه‌هایی معادل است با پیدا کردن تعدادی گراف‌های ساده که با سه رأس K ، A و H می‌توان تعریف کرد به طوری که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد.

۱ از چهار گراف ساده زیر کدام‌ها مورد نظرند و کدام‌ها را نباید شمرد؟ گراف‌های ب و ت را نباید شمرد زیرا یک رأس تنها می‌ماند.



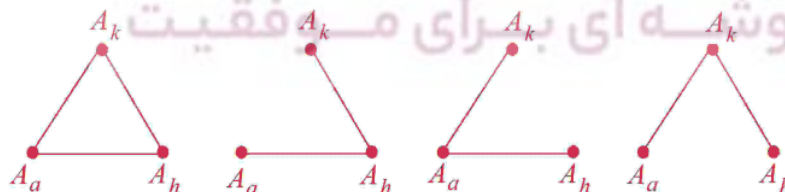
شکل ۳

۲ کل جاده‌های بین سه روستا یعنی کل گراف‌های ممکن که با سه رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با: $|S| = 2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8$ (بین هر دو روستا از این سه روستا می‌توان یک جاده در نظر گرفت که هر جاده می‌تواند در طراحی ما، باشد یا نباشد).

۳ اگر A_k را مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای K تنها بماند تعریف کنیم، به همین صورت A_h و A_a را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول جواب را بیابید و گراف‌های متناظر با آنها را رسم کنید.

$$|A_k| = |A_a| = |A_h| = 2 \quad \text{و} \quad |A_k \cap A_a| = |A_a \cap A_h| = |A_h \cap A_k| = 1 \quad \text{و} \quad |A_k \cap A_a \cap A_h| = 1$$

$$\Rightarrow |\overline{A_k} \cap \overline{A_a} \cap \overline{A_h}| = |\overline{A_k \cup A_a \cup A_h}| = |S| - |A_k \cup A_a \cup A_h| = 8 - (2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 1) = 4$$



۴ توضیح دهید که چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $|A_k| = |A_a| = |A_h| = 2$. لذا ۲ حالت داریم. یکی از روستاها را کنار گذاشته و فقط بین دو روستای دیگر می‌تواند یک جاده باشد یا نباشد.

ب) $|A_k \cap A_a| = |A_k \cap A_h| = |A_a \cap A_h| = 1$. یک رأس مانده و فقط یک حالت داریم و آن گراف تهی است.

پ) $|A_k \cap A_a \cap A_h| = 1$. تمام رئوس بدون یال هستند (بین روستاها جاده نیست) که گراف تهی بوده و فقط یک حالت محسوب می‌شود.

اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد و $|A|=m$ و $|B|=n$ ، در این صورت برای هر $a_i \in A$ که $1 \leq i \leq m$ می‌توان به n طریق $f(a_i)$ را تعریف کرد $f(a_i)=b_1$ یا $f(a_i)=b_2$ یا $f(a_i)=b_3$ یا $f(a_i)=b_4$ یا $f(a_i)=b_5$ و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از A به B برابر است با: $|B|^{|A|}=n^m$. حال اگر $|A|=5$ و $|B|=3$ ، در این صورت می‌خواهیم تعداد توابعی چون f از A به B را تعیین کنیم به طوری که $R_f=B$. (روی تمام اعضای B ، پیکانی رسم شده باشد، به چنین تابع‌هایی، تابع پوشا گفته می‌شود.)

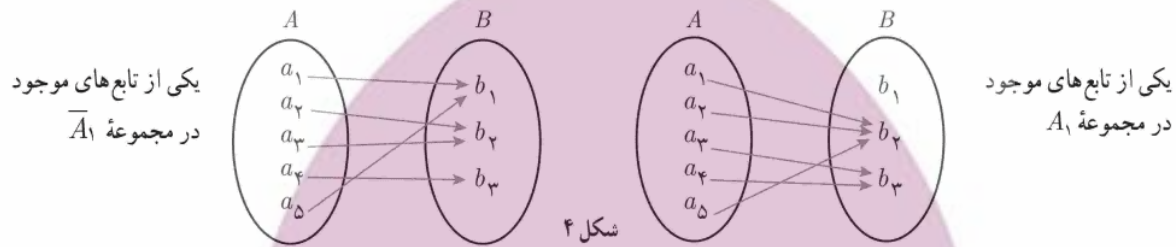
۱ اگر فرض کنیم $B=\{b_1, b_2, b_3\}$ و $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و تعریف کنیم،

$$A_1=\{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_1; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_2=\{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_2; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_3=\{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_3; 1 \leq i \leq 5\}$$

در این صورت $\bar{A}_1$ مجموعه‌ای شامل همه تابع‌هایی از A به B است که حداقل یک پیکان از اعضای A روی b_1 می‌آورند.



شکل ۴

۲ مجموعه $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3)$ را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

$$|S| = 3^5 = 243, |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = 32$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3) = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 243 - (32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0) = 150$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟

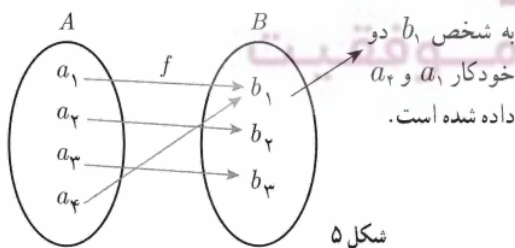
حل: تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است

با پیدا کردن تعداد تابع‌های از یک مجموعه ۴ عضوی مانند A به

یک مجموعه ۳ عضوی مانند B ، به طوری که بُرد این توابع همه

اعضای B باشد. (به هر عضو B حداقل ۱ عضو از A نسبت

داده شود.)



شکل ۵

$$A_i = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$|S| = |B|^{|A|} = 3^4 = 81$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^4 = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36$$

تذکر: تعداد تابع‌هایی چون $f: A \rightarrow B$ با فرض $|A|=m \geq 3$ و $|B|=3$ به طوری که $R_f = B$ ، از رابطه $3^m - (3 \times 2^m - 3)$ به دست می‌آید.

مثال ۸: نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود).

حل: حل این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی که برابر است با $8^4 = 4096$.

فعالیت

می‌خواهیم تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را شمارش کنیم،
۱ اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ برای تعریف f روی هر عضو A مثلاً $f(a_1)$ ، چند راه انتخاب داریم؟ **۶** راه وجود دارد. زیرا $f(a_1)$ می‌تواند b_1 یا b_2 یا b_3 یا b_4 یا b_5 یا b_6 انتخاب شود.
۲ با توجه به اینکه f باید یک‌به‌یک باشد و تعریف یک‌به‌یکی در توابع، پس از تعریف $f(a_1)$ ، برای تعریف f روی a_2 چند راه انتخاب داریم؟ **۵** راه وجود دارد زیرا با انتخاب یکی از b_1 ها برای $f(a_1)$ فقط ۵ انتخاب برای $f(a_2)$ می‌ماند.
۳ با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل r شیء از n شیء بنویسید.

به ۶ طریق می‌توان $f(a_1)$ را تعریف کرد $\rightarrow b_6$ یا b_5 یا b_4 یا b_3 یا b_2 یا b_1 $f(a_1)$

به ۵ طریق می‌توان $f(a_2)$ را تعریف کرد $\rightarrow f(a_2) \neq f(a_1) \Rightarrow f$ یک‌به‌یک است

به ۴ طریق می‌توان $f(a_3)$ را تعریف کرد. $\Rightarrow f(a_3) \neq f(a_1), f(a_2) \Rightarrow f$ یک‌به‌یک است

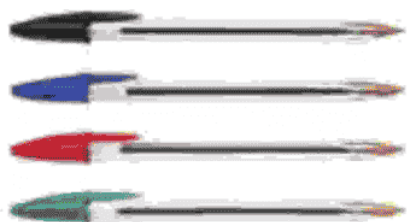
.....
 این نماد همان $P(6, 4)$ می‌باشد

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{6!}{2!} = (6)_4$$

در حالت کلی اگر $|A|=m$ و $|B|=k$ در این صورت با شرط $m \leq k$ تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه A به مجموعه B برابر

$$(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$$

است با تعداد انتخاب‌های m شیء از بین k شیء یا



شکل ۶

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)

حل: تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی یعنی، $\frac{8!}{4!} = 1680$ ، ${}_4P_8$.

اصل لانه کبوتری^۱

اگر از شما سؤال شود که حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید حداقل دو نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است، چه پاسخی می‌دهید؟ بدترین حالت ممکن این است که افراد داخل کلاس از نفر اول هر کدام در یک ماه متفاوت با نفر قبلی به دنیا آمده باشند، تا کجا می‌توان مقاومت کرد؟ واضح است که حداکثر تا ۱۲ نفر با فرض اینکه هر نفر در یک ماه متفاوت از بقیه متولد شده باشد، می‌توان به این روند ادامه داد و هنوز اطمینانی برای اینکه حداقل دو نفر ماه تولدشان مثل هم باشد وجود ندارد، ولی اگر ۱۳ نفر در کلاس حضور داشته باشند این اطمینان حاصل می‌شود! (نفر سیزدهم در هر ماهی متولد شده باشد، ۱ نفر از آن ۱۲ نفر در آن ماه متولد شده است.)

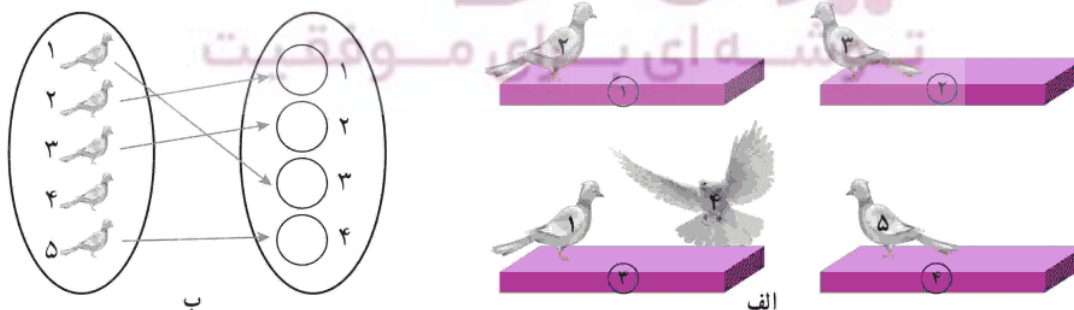


شکل ۷

حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

در این قسمت به بیان اصل لانه کبوتری پرداخته و سپس مسائلی را مطرح می‌کنیم و با استفاده از این اصل و تعمیم آن، مسائل را حل خواهیم کرد.

اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



شکل ۸

۱- اصل لانه کبوتری اصطلاحاً «اصل» نامیده می‌شود و در واقع قضیه‌ای است که با برهان خلف اثبات می‌شود، این اصل را اصل حجره‌ها نیز نامیده‌اند.



مثال: نشان دهید اگر بخوایم ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث هم‌رنگ خواهند شد.

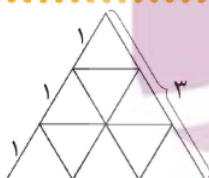
حل: اگر ضلع‌های مثلث را کبوترها و دو رنگ آبی و قرمز را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل کبوتری در یکی از لانه‌ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت (دو کبوتر در یک لانه معادل است با دو ضلع با یک رنگ).

مثال: ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می‌شود به طوری که به پیمانه ۴ هم‌نهیست می‌باشند.
 حل: می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۴ یکی از اعضای مجموعه $R = \{0, 1, 2, 3\}$ است، حال اگر ۵ عدد طبیعی را کبوترها و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۵ عدد باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۴ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۴ هم‌باقی‌مانده بوده و بنابر تعریف هم‌نهیستی باید $a \equiv b \pmod{4}$ و حکم به دست می‌آید.

تمرین: در حالت کلی ثابت کنید در بین هر $(n+1)$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است. (به پیمانه n هم‌نهیست‌اند).

باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر n یکی از اعضای مجموعه $R = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ است، حال اگر $n+1$ عدد طبیعی را کبوترها و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر n را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این $n+1$ عدد باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر n با هم برابر است. اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، آن دو در تقسیم بر n هم‌باقی‌مانده بوده و در نتیجه تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است. به عبارت دیگر $a \equiv b \pmod{n}$.

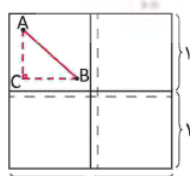
کار در کلاس



۱ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشند.

مطابق شکل، مثلث را به ۹ مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم می‌کنیم. حال ۱۰ نقطه را کبوتر و هر مثلث کوچک را یک لانه فرض می‌کنیم (۹ لانه داریم)، طبق اصل کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می‌گیرند یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت.

از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث کوچک ۱ واحد می‌باشد، فاصله بین دو نقطه ی درون یک مثلث از ۱ واحد کمتر است.



۲ با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.

سوال: ۵ نقطه درون مربعی به ضلع ۲ واحد مفروض است. ثابت کنید، حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود دارد به طوری که فاصله ی آنها از یکدیگر کمتر از $\sqrt{2}$ است.

پاسخ: مطابق شکل روبرو مربع را به چهار مربع یکسان (به ضلع ۱ واحد) تقسیم می‌کنیم.

حال ۵ نقطه را کبوتر و مربعات کوچک را به عنوان ۴ لانه در نظر می‌گیریم. طبق اصل کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه واقع می‌شوند، یعنی حداقل دو نقطه مثل A و B یافت می‌شوند که در یک مربع کوچک قرار می‌گیرند.

حال با توجه به شکل، طبق قضیه فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - \frac{AC \cdot BC}{2} \rightarrow AB^2 < 1^2 + 1^2 \Rightarrow AB^2 < 2 \Rightarrow AB < \sqrt{2}$$

۳ نشان دهید در یک خانواده حداقل ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

هر سال دارای ۴ فصل است که آنها را به عنوان ۴ لانه و هر یک از افراد خانواده را به عنوان یک کبوتر در نظر می گیریم . بنابراین می خواهیم حداقل ۵ کبوتر را در ۴ لانه جای دهیم ، که طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر یافت می شوند که در یک لانه جای گیرند ، یعنی حداقل دو نفر از افراد خانواده وجود دارند که در یک فصل از سال متولد شده اند .

۴ نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه $P \geq 2$ حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد. (راهنمایی : مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این صورت درجات رؤس از ۱ تا $P-1$ تغییر می کند. (۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیه رؤس از ۱ تا $P-2$ تغییر می کند)

با توجه به راهنمایی داده شده مسئله را حل می کنیم :

حالت اول (اگر گراف فاقد رأس تنها باشد) : هر کدام از رؤس گراف را یک کبوتر و هر کدام از درجات ۱ تا $P-1$ را یک لانه فرض می کنیم . بنابراین P کبوتر و $P-1$ تا لانه کبوتر داریم ، که طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه جای می گیرند ، یعنی حداقل دو تا از رؤس دارای درجه یکسان می باشند .

حالت دوم (اگر گراف دارای یک رأس تنها باشد) : درجه آن رأس تنها صفر می باشد ، که با کنار گذاشتن آن ، $P-1$ رأس داریم و آنها را به عنوان کبوتر در نظر می گیریم .

از طرفی هر کدام از این رؤس می توانند درجات ۱ تا $P-2$ داشته باشند . که اگر به عنوان لانه در نظر گرفته شوند ، طبق اصل لانه کبوتری با وجود $P-1$ کبوتر و $P-2$ لانه ، حداقل دو کبوتر یافت می شوند که در یک لانه جای گیرند . یعنی حداقل دو رأس وجود دارد که دارای درجه یکسانند .

آیا نیازی هست حالتی را در نظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

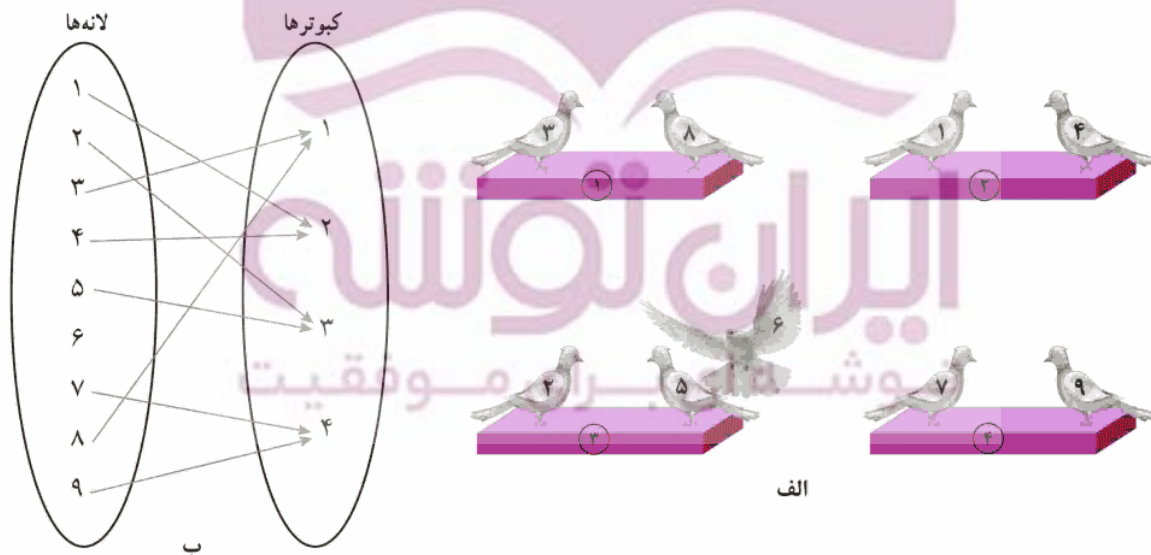
خیر ، زیرا هر چه رأس تنها داشته باشیم ، آنها را کنار گذاشته و از تعداد رؤس و تعداد اعدادی که می توانند درجه ی آنها محسوب شوند ، به یک میزان کاسته می شود و همواره تعداد رؤس بیشتر از تعداد درجات است .

فعالیت

جدول زیر را (با توجه به قراردادادن n کبوتر در n لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کبوتری) مقایسه کنید.

تعداد لانه ها (n)	تعداد کبوترها ($kn+1$)	اطمینان از وجود لانه ای با حداقل ($k+1$) کبوتر
n	$1 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه ای با حداقل ۲ کبوتر
n	$2 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه ای با حداقل ۳ کبوتر
n	$3 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه ای با حداقل ۴ کبوتر
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$kn + 1$	اطمینان از وجود لانه ای با حداقل $k+1$ کبوتر

همان طور که مشاهده می کنید در سطر دوم به ازای $n=4$ و $k=2$ تعداد کبوترها $2 \times 4 + 1 = 9$ می باشد که طبق جدول می بایست لانه ای با حداقل ۳ کبوتر یافت شود و شکل زیر گویای این روش است که اگر در هر لانه یک کبوتر قرار بگیرد و از هر ۵ کبوتر باقی مانده مجدداً در هر لانه ۱ کبوتر قرار بگیرد در نهایت نهمین کبوتر در هر لانه ای قرار بگیرد همان لانه دارای ۳ کبوتر است. توجه دارید که در حالت های زیادی از نشستن کبوترها در لانه ها حداقل ۱ لانه با حداقل ۳ کبوتر می تواند وجود داشته باشد (همه کبوترها در ۱ لانه قرار بگیرند یا ۵ کبوتر در ۱ لانه و ۴ کبوتر در لانه ای دیگر یا ...).



شکل ۱۱

تعمیم اصل لانه کبوتری: هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این صورت لانه ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال: در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

حل: در این مسئله $k+1=7$ یعنی $k=6$ است و n یا تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n=12$ است، پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $kn+1=6 \times 12 + 1 = 73$ باشد.

کار در کلاس

۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟ هر سال ۱۲ ماه و هر هفته ۷ روز است، لذا طبق اصل ضرب $n = 12 \times 7 = 84$.

$$\left. \begin{array}{l} n = 84 \\ k + 1 = 10 \Rightarrow k = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{حداقل تعداد دانش‌آموزان} = kn + 1 = 84 \times 9 + 1 = 757$$

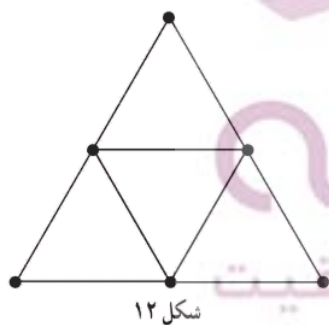
۲ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$$\left. \begin{array}{l} k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4 \\ kn + 1 = 54 \Rightarrow 4n = 53 \Rightarrow n = \left\lceil \frac{53}{4} \right\rceil = 13 \end{array} \right\}$$

۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیر تکراری و مثل هم است؟ (فامیلی‌هایی مثل اشتری و اشراقی مورد نظر است).

تعداد حروف الفبای فارسی ۳۲ می‌باشد، پس برای حرف اول ۳۲ و برای حرف دوم ۳۱ حالت داریم، که طبق اصل ضرب: $n = 32 \times 31 = 992$

$$\left. \begin{array}{l} n = 992 \\ k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{حداقل تعداد افراد حاضر در سالن همایش} = kn + 1 = 2 \times 992 + 1 = 1985$$



شکل ۱۲

مثال: حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.
حل: کافی است مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم‌بندی کنید که در این صورت اگر ۵ نقطه از داخل این مثلث انتخاب کنید طبق اصل لانه کبوتری اطمینان دارید حداقل یکی از مثلث‌ها شامل دست‌کم ۲ نقطه از این ۵ نقطه خواهد بود و فاصله این دو نقطه از طول ضلع مثلث‌های کوچک‌تر کمتر می‌باشد.

مثال: نشان دهید در هر کلاس با n دانش‌آموز ($n \geq 2$) حداقل ۲ دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

حل: قبلاً ثابت کردیم که در هر گراف ساده حداقل ۲ رأس هم‌درجه وجود دارد، لذا کافی است گرافی تعریف کنید که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطه دوستی بین هر دو دانش‌آموز را با یالی بین رأس‌های متناظرشان تعریف کنید.

طبق آنچه راهنمایی شده، گرافی را تعریف می‌کنیم که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطه دوستی بین هر دو دانش‌آموز، یالی بین رأس‌های متناظرشان باشد. بنابراین درجه‌ی هر رأس تعیین‌کننده تعداد دوستان شخص متناظر با آن رأس است.

از طرفی در هر گراف ساده حداقل دو رأس هم‌درجه وجود دارد، یعنی حداقل دو دانش‌آموز وجود دارد که تعداد دوستان آنها با هم برابر است.

۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($1 \leq n \leq 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟

مجموعه اعدادی که بر ۲ بخش پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش پذیرند را با B نمایش می دهیم. بنابراین:

$$|A| = \left\lfloor \frac{90}{2} \right\rfloor = 45 \quad |B| = \left\lfloor \frac{90}{3} \right\rfloor = 30 \quad |A \cap B| = \left\lfloor \frac{90}{6} \right\rfloor = 15$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 45 + 30 - 15 = 60$$

۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟

مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۷ بخش پذیرند را با B نمایش می دهیم. بنابراین:

$$|A| = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50 \quad |A \cap B| = \left\lfloor \frac{200}{28} \right\rfloor = 7 \Rightarrow |A \cap B'| = |A - B| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$$

۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند مشخص کنید:

الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟

$$|F| = 15 \quad |V| = 11 \quad |B| = 9 \quad |F \cap V| = 5 \quad |V \cap B| = 6 \quad |F \cap B| = 3 \quad |F \cup V \cup B| = 34 - 10 = 24$$

$$|F \cup V \cup B| = |F| + |V| + |B| - |F \cap V| - |V \cap B| - |B \cap F| + |F \cap V \cap B| \Rightarrow 24 = 15 + 11 + 9 - 5 - 6 - 3 + |F \cap V \cap B| \Rightarrow |F \cap V \cap B| = 3$$

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟

$$|F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap V \cap B| = 15 - 5 - 3 + 3 = 10$$

پ) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟

$$|V - B| = |V| - |V \cap B| = 11 - 6 = 5$$

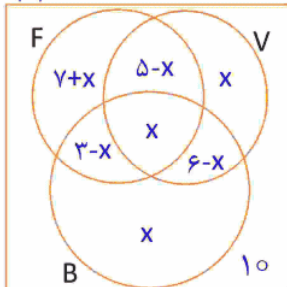
ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟

$$\left. \begin{aligned} \text{فقط فوتبال} &= |F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap V \cap B| = 15 - 5 - 3 + 3 = 10 \\ \text{فقط والیبال} &= |V| - |F \cap V| - |V \cap B| + |F \cap V \cap B| = 11 - 5 - 6 + 3 = 3 \\ \text{فقط بسکتبال} &= |B| - |B \cap F| - |V \cap B| + |F \cap V \cap B| = 9 - 3 - 6 + 3 = 3 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} 16$$

پیشنهاد می شود برای حل این نوع سوالات از نمودار ون به شکل زیر استفاده شود:

روش ساده تر:

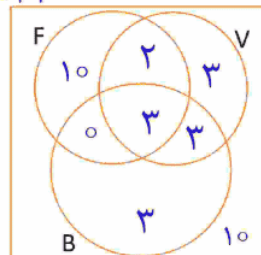
۳۴



$$7 + x + 5 - x + x + 3 - x + x + 6 - x + x + 10 = 34 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین می توان نمودار ون را به شکل زیر باز نویسی کرد:

۳۴



الف) ۳

ب) ۱۰

پ) ۳+۲=۵

ت) ۱۰+۳+۳=۱۶

۴ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

می خواهیم با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ رمز های ۵ رقمی بسازیم که شامل حداقل یک رقم ۲ و یک رقم ۳ و یک رقم ۷ باشند . بدون در نظر گرفتن شرط وجود حداقل یک رقم اعداد گفته شده یعنی در حالت کلی ۹۵ رمز می توان ساخت . به عبارت دیگر : $|S| = 9^5$. مجموعه ی رمز های فاقد رقم ۲ را با A و مجموعه ی رمز های فاقد رقم ۳ را با B و مجموعه ی رمز های فاقد رقم ۷ را با C نمایش می دهیم . بنابراین :

$$|A| = |B| = |C| = 8^5 \quad \text{و} \quad |A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 7^5 \quad \text{و} \quad |A \cap B \cap C| = 6^5$$

$$\underline{|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|} \rightarrow |A \cup B \cup C| = 3 \times 8^5 - 3 \times 7^5 + 6^5$$

$$\Rightarrow |\overline{A \cap B \cap C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 9^5 - (3 \times 8^5 - 3 \times 7^5 + 6^5) = 3390$$

حال در صورتی که امتحان کردن هر ۵ رقمی ۶ ثانیه طول بکشد ، حداکثر $3390 \times 6 = 20340$ ثانیه معادل ۵ ساعت ۳۹ دقیقه وقت لازم است .

۵ چه تعداد تابع چون $f: A \rightarrow B$ می توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A| = 5$ و $|B| = 4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟

تعداد توابع مورد نظر برابر است با 4^5 که هیچکدام از آنها یک به یک نیست ، زیرا تعداد اعضای دامنه ی تابع (A) بیشتر از تعداد اعضای هم دامنه ی تابع (B) است .

۶ به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

روش اول :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{کتاب ۱} & \text{کتاب ۲} & \text{کتاب ۳} & \text{کتاب ۴} & \text{کتاب ۵} & \xrightarrow{\times} & \frac{8!}{3!} \end{array}$$

حالات انتخاب نفرات برای هر کتاب :

روش دوم : تعداد حالت های ممکن برابر است با تعداد توابع یک به یک از مجموعه ای ۵ عضوی به یک مجموعه ی ۸ عضوی :

$$(A)_8 = \frac{8!}{3!}$$

۷ به چند طریق می توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

تعداد این حالت ها برابر است با تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ی ۶ عضوی به یک مجموعه ی ۳ عضوی .
با فرض $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ و $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ ، تعداد توابع پوشا از X به Y را محاسبه می کنیم :

$$Y \Rightarrow |S| = 3^6 \quad \text{مجموعه ی تمام توابع قابل ساخت از } X \text{ به } Y$$

$$A \Rightarrow |A| = 2^6 \quad \text{مجموعه ی تمام توابعی که برد آنها } \{y_1, y_2\} \text{ می باشد (برد فاقد عضو } y_3 \text{ است) .}$$

$$B \Rightarrow |B| = 2^6 \quad \text{مجموعه ی تمام توابعی که برد آنها } \{y_1, y_3\} \text{ می باشد (برد فاقد عضو } y_2 \text{ است) .}$$

$$C \Rightarrow |C| = 2^6 \quad \text{مجموعه ی تمام توابعی که برد آنها } \{y_2, y_3\} \text{ می باشد (برد فاقد عضو } y_1 \text{ است) .}$$

$$\Rightarrow |A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 1 \quad \text{و} \quad |A \cap B \cap C| = 0$$

$$\underline{|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|} \rightarrow |A \cup B \cup C| = 3 \times 2^6 - 3 \times 1 + 0$$

$$\Rightarrow |\overline{A \cap B \cap C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 3^6 - (3 \times 2^6 - 3 \times 1 + 0) = 540$$

۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

در صورتی که هر نفر را به عنوان یک کبوتر و هر روز را یک لانه در نظر بگیریم، می‌خواهیم ۳۶۸ کبوتر را در ۳۶۵ یا ۳۶۶ لانه (هر سال ۳۶۵ روز است به استثناء سالهای کبیسه که ۳۶۶ روز می‌باشند) جای دهیم.
لذا طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو لانه وجود دارد که حداقل دو کبوتر درون آن قرار خواهد گرفت، به عبارت دیگر حداقل ۲ نفر هستند که در یک روز سال متولد شده‌اند.

۹ ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

منظور از یکسان بودن روز هفته و ماه تولد آن است که ایام طبق اعضای مجموعه ی زیر در نظر گرفته شده‌اند:

{(اسفند و جمعه)، ... و (اردیبهشت و شنبه) و (فروردین و جمعه) و (فروردین و پنجشنبه) و (فروردین و چهارشنبه) و (فروردین و سه شنبه) و (فروردین و دوشنبه) و (فروردین و یکشنبه) و (فروردین و شنبه)}

که هر عضو به عنوان یک لانه محسوب شده و در نتیجه $۸۴ = ۷ \times ۱۲$ لانه داریم.

حال در صورتی که هر دانش‌آموز را به عنوان یک کبوتر، در نظر بگیریم، ۵۰۵ کبوتر داریم. بنابراین:

حداقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. $\Rightarrow k + 1 = 7 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow k \times 84 + 1 = 505$

۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (برای سهولت در حل مسئله، سال را غیر کبیسه در نظر می‌گیریم.)

حداقل $۶۹۳۶ = ۳۶۵ \times ۱۹ + ۱$ نفر تماشاگر مسابقه کشتی هستند. $\xrightarrow{n.k+1} \left. \begin{matrix} k+1=20 \Rightarrow k=19 \\ n=365 \end{matrix} \right\}$ تعداد لانه‌ها همان تعداد ایام سال است.

۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

می‌دانیم باقیمانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۲، برابر ۰ یا ۱ می‌باشد.

اگر سه عدد طبیعی را به عنوان کبوترها و باقی مانده تقسیم اعداد طبیعی بر ۲ (یعنی ۰ و ۱) را به عنوان ۲ لانه در نظر بگیریم، طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین اعداد انتخابی، باقیمانده یکسان در تقسیم بر ۲ دارند.

حال این دو عدد که باقیمانده یکسان دارند، هر دو فرد یا هر دو زوج خواهند بود، که در هر صورت مجموعشان عددی زوج است.

۱۲ مجموعه اعداد $A = \{1, 2, \dots, 84\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

اعداد مجموعه ی A در ۴۲ قفس به شکل زیر افراز می‌کنیم:

$$\{42, 43\} \text{ و } \dots \text{ و } \{3, 82\} \text{ و } \{2, 83\} \text{ و } \{1, 84\}$$

قفس‌ها را به عنوان لانه‌ها و اعداد درون آنها را کبوتر در نظر می‌گیریم، به طوری که می‌خواهیم از این لانه‌ها ۴۳ کبوتر به عنوان یک زیر مجموعه ی ۴۳ عضوی انتخاب کنیم.

طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر از یک لانه برداشته خواهند شد، یعنی حداقل دو عدد در زیر مجموعه وجود دارند که مجموع آن‌ها ۸۵ است.

۱۳ مجموعه اعداد $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$ را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده اند، در نظر می گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

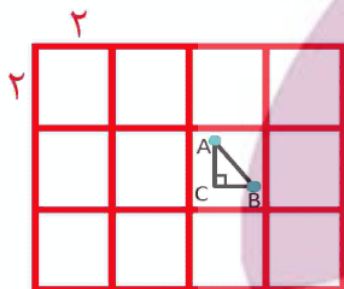
مجموعه A را به ۱۲ زیر مجموعه به شکل زیر افراز می کنیم :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{5, 85\} & A_2 &= \{9, 81\} & A_3 &= \{13, 77\} & A_4 &= \{17, 73\} & A_5 &= \{21, 69\} & A_6 &= \{25, 65\} \\ A_7 &= \{29, 61\} & A_8 &= \{33, 57\} & A_9 &= \{37, 53\} & A_{10} &= \{41, 49\} & A_{11} &= \{45\} & A_{12} &= \{1\} \end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می شود، مجموع اعداد درون زیر مجموعه های دو عضوی برابر ۹۰ است.

زیر مجموعه های فوق را به عنوان ۱۲ لانه در نظر می گیریم که می خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آنها انتخاب کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل از یکی از لانه ۲ کبوتر انتخاب خواهد شد، یعنی حداقل دو عدد انتخاب شده از یک زیر مجموعه هستند. واضح است که مجموع آن دو برابر ۹۰ است.

۱۴ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.



مطابق شکل، مستطیل را به ۱۲ مربع به ضلع ۲ تقسیم می کنیم و هر کدام از آنها را به عنوان یک لانه در نظر می گیریم.

در صورتی که هر نقطه را به عنوان یک کبوتر فرض کنیم، می خواهیم ۱۳ کبوتر را در ۱۲ لانه جای دهیم. طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند، یعنی حداقل دو نقطه مانند A و B در یک مربع واقع خواهند شد.

حال طبق قضیه فیثاغورث :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \xrightarrow{AC < 2, BC < 2} AB^2 < 2^2 + 2^2 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

۱۵ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می باشد.

پنج نقطه با مختصات های صحیح را به عنوان ۵ کبوتر معرفی می کنیم.

برای هر نقطه با مختصات صحیح یکی از چهار حالت $\begin{bmatrix} \text{زوج} \\ \text{زوج} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \text{زوج} \\ \text{فرد} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \text{فرد} \\ \text{زوج} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \text{فرد} \\ \text{فرد} \end{bmatrix}$ وجود دارد، که اگر به عنوان چهار لانه در نظر گرفته شوند،

طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند یعنی، حداقل دو نقطه از آن نقاط از نظر زوج یا فرد بودن مختصات، شبیه هم خواهند بود.

پس مجموع طول های آنها زوج و مجموع عرض های آنها نیز زوج است، در نتیجه مختصات نقطه ی وسط صحیح خواهد شد.