

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله دوم

پایه دوازدهم

۰۶ / شهریور / ۱۴۰۵

۰۶ - ۱۴۰۵

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۶

ویژگی‌های برنامۀ راهبردی آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز در تابستان ۱۴۰۵-۰۶

- ۱- دور هدرس پایه دهم
- ۲- دور هدرس پایه یازدهم
- ۳- مطالعه بخشی از درس پایه دوازدهم
- ۴- امکان فرایند ترکیبی هر کدام از موارد فوق

پایه	مرحله	اول	دوم	سوم	چهارم
پایه دهم	۲۳ مرداد	۶ شهریور	۲۰ شهریور	۳ مهر	
پایه یازدهم		✓	✓	✓	✓
پایه دوازدهم		-	✓	✓	-

با توجه به موارد فوق دفتر چه آزمون خیلی سبز در این آزمون از ۳ قسمت تشکیل شده است.

هر داوطلب باید در جلسه آزمون به یک یا دو قسمت (که قبلاً در پیل کار برای انتخاب کرده است) پاسخ دهد.

آزمون مرحله دوم (همین دفتر چه ای که در دست دارید) آغاز پیشروی پایه دهم، یازدهم و دوازدهم است.

تمامی سرفصل‌های دوازدهم، مجدداً از مهر، در برنامۀ راهبردی دیده شده است.



آزمون آزمایشی خیلی سبز

تیم اجرایی و تألیف آزمون

بیتا ابراهیمی - عادل حسینی - مینا کریمزاده

سرپرست تولید

الناز علی یاری زاده

ویراستاران فنی

نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - زهرا صفری
الهه صفری - فاطمه علی اکبری - محیا غنی فرد
ساناز فلاحی - نادره ناز آوری - ساعده نمازی

رسام

ندا فخاری
سارا گنجی آزادپور

صفحه آرایی

مریم حسین زاده - سیده سخائی - الهام سهرابی
ظاهره صادق نژاد - مائده صبری - نیلوفر فرخجسته
فاطمه قیاسوند - مهدیه گل پور - دریا لطفی



پایه دهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	مازیار احمدی ناو - کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - بابک سادات - علی شهبابی - مصطفی کرمی محمد گودرزی - سروش موئینی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه	کیوان صارمی - حمید گلزاری
فیزیک	علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	مهدی براتی - محمد قهرمانی نژاد - هادی عبادی - یاسر عبداللهی - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مستقل درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل زاده سروش موئینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر سهند محمدکریم نژاد ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جعفری آثار مریم گلی حسنلو	علیرضا جباری هادی نجفی	آیدین طهماسبقی زاده مدیا عیدی امیر محمودی انزابی سعید مجبی فاطمه نجفی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	صدرا عبادی یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده پارسا فراهانی محمد مهدی کریمیان	محمدتقی جهانپیان علیرضا فرضعلی هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

ریاضی دهم

۱

در یک الگوی خطی، جمله هفتم برابر صفر است. جمله دهم این الگو چند برابر جمله پنجم آن است؟

۴) -۲

۳) -۱/۵

۲) ۳

۱) ۲

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

جمله عمومی یک الگوی خطی، $a_n = \alpha n + \beta$ است.

گام اول: جمله عمومی الگو را $a_n = \alpha n + \beta$ در نظر می گیریم. جمله هفتم را برابر صفر قرار می دهیم:

$$a_7 = 7\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -7\alpha$$

پس $a_n = \alpha(n - 7)$ است.

گام دوم: حالا خواسته سؤال را حساب می کنیم:

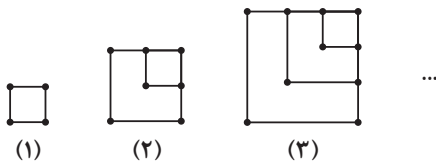
$$\frac{a_{10}}{a_5} = \frac{3\alpha}{-2\alpha} = -1/5$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



با توجه به الگوی شکل‌های زیر، شکل چهل و پنجم چند نقطه دارد؟

۲



۱۳۶ (۱)

۱۳۷ (۲)

۱۳۸ (۳)

۱۳۹ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در الگوی a_n ، اگر اختلاف جملات متوالی یکسان یا به عبارت دقیق‌تر $a_{n+1} - a_n = c$ باشد که در آن c یک عدد ثابت است، الگو، خطی و جمله عمومی آن $a_n = cn + h$ است، یعنی مقدار اختلاف جملات متوالی، ضریب n در الگوی خطی است.

گام اول: هر شکل نسبت به شکل قبلی ۳ رأس بیشتر دارد، بنابراین طبق درس باکس، جمله عمومی تعداد رأس‌های شکل n ام برابر $t_n = 3n + h$ است.

گام دوم: شکل اول ۴ رأس دارد:

$$\Rightarrow t_1 = 3 + h = 4 \Rightarrow h = 1$$

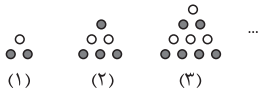
گام سوم: در نتیجه $t_n = 3n + 1$ است و خواسته سؤال برابر می‌شود با:

$$t_{45} = 3 \times 45 + 1 = 136$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

با توجه به الگوی شکل‌های زیر، در شکل بیست و پنجم، اختلاف تعداد دایره‌های سیاه و سفید کدام است؟

۳



۱۳ (۱)

۱۲ (۲)

۲۶ (۳)

۲۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

مجموع‌های خاص:

نکته

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2 \\ 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) \end{cases}$$

گام اول: شکل بیست و پنجم شامل ۲۶ ردیف است که ردیف‌های فرد (شروع از بالا) مربوط به دایره‌های سفید و ردیف‌های زوج مربوط به دایره‌های سیاه است.

گام دوم: یعنی تعداد دایره‌های سفید در شکل بیست و پنجم برابر $1 + 3 + 5 + \dots + 25$ و تعداد دایره‌های سیاه آن نیز برابر $2 + 4 + 6 + \dots + 26$ است. طبق نکته داریم:

$$\text{تعداد دایره‌های سفید: } w_{25} = 13^2 = 169$$

$$\text{تعداد دایره‌های سیاه: } b_{25} = 2 \times \frac{13 \times 14}{2} = 182$$

گام سوم: خواسته سؤال اختلاف w_{25} و b_{25} است که برابر ۱۳ است.

اختلاف تعداد دایره‌های سیاه و سفید در شکل (۱) برابر ۱، در شکل‌های (۲) و (۳) برابر ۲، در شکل‌های (۴) و (۵) برابر ۳، ... و در نتیجه در شکل‌های (۲۴) و (۲۵) برابر ۱۳ است.

تیزبازی

الگوهای تعداد دایره‌های سفید و سیاه شکل n م به صورت زیر هستند:

به‌جور دیگر

$$w_n = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 & ; \text{ فرد } n \\ \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) & ; \text{ زوج } n \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} \left(\frac{n+1}{2} + 1\right) & ; \text{ فرد } n \\ \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 & ; \text{ زوج } n \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$b_n - w_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & ; \text{ فرد } n \\ \frac{n}{2} + 1 & ; \text{ زوج } n \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_{25} - w_{25} = \frac{25+1}{2} = 13$$

۴ جملات دنباله $t_n = 3n - 1$ را به صورت زیر دسته‌بندی کرده‌ایم:

$\{2\}, \{5, 8\}, \{11, 14, 17\}, \dots$

میانگین اعداد دسته بیستم کدام است؟

۶۰۱ (۴)

۶۰۰/۵ (۳)

۶۰۰ (۲)

۵۹۹/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

میانگین n عدد که تشکیل دنباله حسابی بدهند، برابر میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد است.

گام اول: تعداد اعداد هر دسته در دسته‌بندی داده‌شده، برابر شماره آن دسته است. یعنی تا انتهای دسته نوزدهم، $1 + 2 + 3 + \dots + 19 = 190$ جمله از جملات دنباله t_n مصرف می‌شود.

گام دوم: طبق نکات پاسخ قبلی داریم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 19 = \frac{19 \times 20}{2} = 190$$

یعنی عدد اول دسته بیستم ۱۹۱ امین جمله دنباله t_n است:

$$t_{191} = 3 \times 191 - 1 = 572$$

به طریق مشابه، عدد آخر دسته بیستم را نیز پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210 \\ t_{210} = 3 \times 210 - 1 = 629 \end{cases}$$

گام سوم: یعنی دسته بیستم به صورت زیر است:

$\{572, 575, 578, \dots, 626, 629\}$

که میانگین آن‌ها طبق نکته سؤال، برابر $\frac{572 + 629}{2} = 600/5$ است.

دنباله میانگین اعداد دسته‌ها را می‌نویسیم:

$2, \frac{13}{2}, 14, \frac{49}{2}, \dots$

$$\bar{x}_{20} = \frac{3 \times 400 + 1}{2} = 600/5$$

این دنباله، درجه دوم است و جمله عمومی آن $\bar{x}_n = \frac{3n^2 + 1}{2}$ است، پس داریم:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

به‌جور دیگر

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

دنباله $k, 1-3k, 6+k, \dots$ حسابی است. جمله بیستم این دنباله کدام است؟

۵

۵۶/۵ (۴)

۵۶ (۳)

۵۵/۵ (۲)

۵۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

جمله عمومی دنباله حسابی a_n که قدرنسبت آن برابر d است، به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است.

اگر x, y و z سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، تساوی $x + z = 2y$ برقرار است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: به کمک ویژگی جملات متوالی دنباله حسابی مقدار k را حساب می کنیم:

$$k + 6 + k = 2(1 - 3k) \Rightarrow 2k + 6 = 2 - 6k \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

گام دوم: پس دنباله حسابی زیر را داریم:

$$-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{11}{4}, \dots$$

که قدرنسبت آن $d = \frac{5}{4} - (-\frac{1}{4}) = 3$ است. جمله عمومی این دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = -\frac{1}{4} + (n-1) \times 3 \Rightarrow a_n = \frac{6n-5}{4}$$

گام سوم: مقدار جمله بیستم را پیدا می کنیم:

$$a_{20} = \frac{120-5}{4} = \frac{115}{4} = 56 \frac{1}{4}$$

مقادیر a ، $1+2a$ و $5-a$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله نخست این دنباله باشد،

(سوال آنگور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

جمله نهم کدام است؟

۱۴/۷۵ (۴)

۱۲/۲۵ (۳)

۴/۲۵ (۲)

۲/۷۵ (۱)

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

بین دو عدد ۴ و ۱۲۸، نه واسطه هندسی قرار داده‌ایم، بزرگ‌ترین واسطه چند برابر کوچک‌ترین واسطه است؟

۶

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۱۶√۲ (۲)

۸√۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

اگر بین دو عدد a و b به تعداد n واسطه هندسی قرار دهیم، $n+2$ عدد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی با قدرنسبت

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$
 می‌دهند.

اگر a و b هم‌علامت و n فرد باشد، q می‌تواند منفی نیز باشد.

گام اول: ابتدا قدرنسبت دنباله هندسی تشکیل شده را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$q = \pm \sqrt[n+1]{\frac{128}{4}} = \pm \sqrt[9+1]{32} = \pm \sqrt[10]{32}$$

گام دوم: بزرگ‌ترین واسطه، $M = \frac{128}{q}$ و کوچک‌ترین واسطه، $m = 4q$ است و نسبت این دو برابر می‌شود با:

$$\frac{M}{m} = \frac{\frac{128}{q}}{4q} = \frac{32}{q^2} = \frac{32}{2} = 16$$



دنباله $1, x, y, \dots$ هندسی و دنباله $\frac{5}{4}, 2y-1, \dots$ حسابی است. حاصل $x+y$ کدام می تواند باشد؟

۷

(۴) -۲

(۳) -۱

(۲) $\frac{15}{4}$

(۱) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه ۲

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

اگر a, b و c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، تساوی $b^2 = ac$ برقرار است.

گام اول: طبق ویژگی جملات متوالی دنباله هندسی، $x^2 = y$ و طبق ویژگی جملات متوالی دنباله حسابی، $x + 2y - 1 = 5$ است.

گام دوم: دو معادله بالا را با هم در نظر می گیریم، به معادله $x + 2x^2 - 1 = 5$ می رسیم:

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 6 = (x+2)(2x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{یا} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

گام سوم: در هر حالت مقدار y و در نتیجه حاصل $x+y$ را حساب می کنیم:

$$\bullet x = -2 \xrightarrow{y=x^2} y = 4 \Rightarrow x+y = 2$$

$$\bullet x = \frac{3}{2} \xrightarrow{y=x^2} y = \frac{9}{4} \Rightarrow x+y = \frac{15}{4}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت



دنباله حسابی $a_n: -1, 2, \dots$ مفروض است، اگر قدرنسبت دنباله هندسی $k + a_3, k + \frac{a_4}{4}, k + a_5, \dots$ برابر q باشد، مقدار q کدام است؟

$$\frac{9}{7} \quad (4)$$

$$\frac{9}{8} \quad (3)$$

$$\frac{8}{7} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا جمله عمومی دنباله حسابی را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ d = 2 - (-1) = 3 \end{cases} \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} a_n = 2(n-1) - 1 = 2n - 4$$

گام دوم: پس:

$$a_3 = 2(3) - 4 = 2$$

$$a_4 = 2(4) - 4 = 4$$

$$a_5 = 2(5) - 4 = 6$$

البته بعد از این که فهمیدیم که قدرنسبت دنباله حسابی برابر ۳ است، می‌توانستیم دنباله را ادامه دهیم:

$$a_n: -1, 2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $a_3 \quad a_4 \quad a_5$

گام سوم: پس $k - 5, k + 2, k + 11$ باید سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، یعنی باید تساوی زیر برقرار باشد:

$$(k+2)^2 = (k-5)(k+11)$$

$$k^2 + 4k + 4 = k^2 + 6k - 55 \Rightarrow 2k = 59 \Rightarrow k = \frac{59}{2}$$

گام چهارم: یعنی $\frac{49}{2}, \frac{63}{2}, \frac{81}{2}$ جملات متوالی دنباله هندسی مورد نظر هستند. قدرنسبت این دنباله برابر است با:

$$q = \frac{\frac{81}{2}}{\frac{63}{2}} = \frac{\frac{63}{2}}{\frac{49}{2}} = \frac{9}{7}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۹ اگر $\frac{\Delta \sin x - \cos x}{2 \sin x + \cos x} = 3$ باشد، حاصل $\tan x - \cot x$ کدام است؟

$$-\frac{15}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{17}{4} \quad (1)$$

$$\frac{17}{4} \quad (4)$$

$$\frac{15}{4} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

طرفین وسطین کنین و $\tan x$ رو به دست بیارین.

Hint

گام اول: در تساوی داده شده، طرفین وسطین می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی

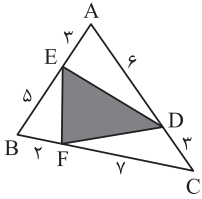
$$\Delta \sin x - \cos x = 6 \sin x + 2 \cos x \Rightarrow -\sin x = 4 \cos x \Rightarrow \tan x = -4$$

گام دوم: در نتیجه $\cot x = -\frac{1}{4}$ است و داریم:

$$\tan x - \cot x = -4 + \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$$

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

در شکل زیر، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث DEF است؟



$$\frac{45}{17} \quad (1)$$

$$\frac{54}{19} \quad (2)$$

$$\frac{108}{29} \quad (3)$$

$$\frac{108}{41} \quad (4)$$

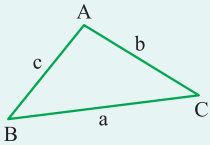
پاسخ: گزینه ۲

Hint

درس Box

مساحت مثلث‌های گوشه رو از مساحت مثلث ABC کم کن.

کاربرد مثلثات در محاسبه مساحت مثلث:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

گام اول: ابتدا نسبت مساحت‌های مثلث‌های AED، BEF و CDF را به مساحت مثلث ABC حساب می‌کنیم:

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AE \cdot AD \cdot \sin \hat{A}}{\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}} = \frac{3 \times 6}{8 \times 9} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{BEF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} BE \cdot BF \cdot \sin \hat{B}}{\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B}} = \frac{5 \times 2}{8 \times 9} = \frac{5}{36}$$

$$\frac{S_{CDF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} CD \cdot CF \cdot \sin \hat{C}}{\frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \hat{C}} = \frac{3 \times 7}{9 \times 9} = \frac{7}{27}$$

گام دوم: حالا می‌توانیم نسبت مساحت مثلث DEF را به مساحت مثلث ABC حساب کنیم:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \left(\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} + \frac{S_{BEF}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CDF}}{S_{ABC}} \right) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{27} \right) = 1 - \frac{35}{54} = \frac{19}{54}$$

پس مساحت مثلث ABC، $\frac{54}{19}$ مساحت مثلث DEF است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

انتهای کمان θ روی دایره مثلثاتی در ناحیه دوم دستگاه مختصات، نقطه $P(-\frac{1}{3}, a)$ است. مقدار $\cot \theta$ کدام است؟

فقط $\sin \theta$ مثبت است.

(۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

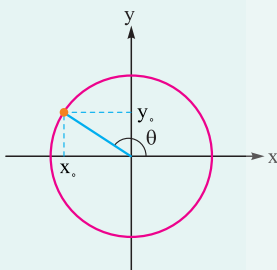
(۳) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

دایره مثلثاتی: اگر انتهای کمان θ روی دایره مثلثاتی نقطه (x_0, y_0) باشد، داریم:



$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ x_0 = \cos \theta, y_0 = \sin \theta \\ \tan \theta = \frac{y_0}{x_0}, \cot \theta = \frac{x_0}{y_0} \end{cases}$$

گام اول: ابتدا طبق روابط درس باکس داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow a = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

اما طبق فرض نقطه P در ناحیه دوم دستگاه مختصات قرار دارد و عرض آن باید مثبت باشد؛ بنابراین مقدار $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ قابل قبول است.

گام دوم: هم چنین طبق روابط درس باکس، $\cot \theta$ برابر است با:

$$\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۱۲ اگر $\sin \alpha \cot \alpha = |\cos \alpha|$ و $\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha}} - \cot \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{|\sin \alpha|}$ باشد، انتهای کمان α روی دایره مثلثاتی در کدام

ناحیه دستگاه مختصات قرار می‌گیرد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۱

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی:

درس Box

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan \theta \times \cot \theta = 1 \\ 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{cases}$$

گام اول: از تساوی اول استفاده می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\sin \alpha \cot \alpha = \sin \alpha \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cos \alpha \xrightarrow{\sin \alpha \cot \alpha = |\cos \alpha|} \cos \alpha = |\cos \alpha|$$

یعنی $\cos \alpha$ عددی مثبت است، پس انتهای کمان α می‌تواند در ناحیه‌های اول یا چهارم قرار بگیرد.

گام دوم: از رابطه دوم استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha}} - \cot \alpha = \frac{1}{|\sin \alpha|} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{|\sin \alpha|}$$

$$\Rightarrow \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\cos \alpha}{|\sin \alpha|} \Rightarrow \sin \alpha = |\sin \alpha|$$

یعنی $\sin \alpha$ نیز عددی مثبت است، پس انتهای کمان α در ناحیه اول دستگاه مختصات قرار دارد.

اگر $\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \tan \alpha = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$ و $\frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\frac{1}{\cot \alpha}$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

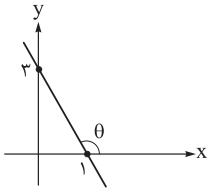
(سؤال ۱۸ کنکور تهرانی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

- (۱) چهارم (۲) سوم (۳) دوم (۴) اول

کنکور

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

با توجه به شکل زیر، حاصل عبارت $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$ چند برابر $\sqrt{10}$ است؟



۱) $0/4$

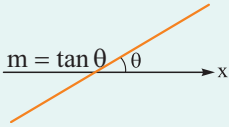
۲) $0/28$

۳) $0/3$

۴) $0/26$

پاسخ: گزینه ۲

رابطه بین شیب خط و مثلثات: شیب هر خط، برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور X می‌سازد:



گام اول: شیب خط برابر -3 است، پس $\tan \theta = -3$ است.

گام دوم: انتهای کمان θ روی دایره مثلثاتی، در ناحیه دوم دستگاه مختصات قرار می‌گیرد، بنابراین $\sin \theta$ مثبت و $\cos \theta$ منفی است. گام سوم: حالا مقادیر $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\tan \theta = -3} 1 + \tan^2 \theta = 1 + 9 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$$

$$\xrightarrow{\cos \theta < 0} \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\xrightarrow{\tan \theta = -3} -3 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{-\frac{\sqrt{10}}{10}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

گام چهارم: خواسته سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^3 = \frac{27 \times 10 \times \sqrt{10}}{1000} = 0/27\sqrt{10}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

اگر $\tan \theta + \cot \theta = \sqrt{5}$ باشد، حاصل $\sin^4 \theta + \cos^2 \theta$ کدام است؟ **۱۴**

۰/۵ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۷ (۲)

۰/۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

گام اول: ابتدا عبارت $\sin^4 \theta + \cos^2 \theta$ را ساده تر می نویسیم:

$$\sin^4 \theta + \cos^2 \theta = \sin^4 \theta + 1 - \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \underbrace{(1 - \sin^2 \theta)}_{\cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \sin^4 \theta + \cos^2 \theta = 1 - (\sin \theta \cos \theta)^2$$

گام دوم: حالا کافی است، طبق نکته بالا حاصل $\sin \theta \cos \theta$ را حساب کنیم:

$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \sqrt{5} \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \sin^4 \theta + \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = ۰/۸$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۱۵ اگر α حاده و $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۴)

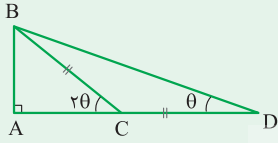
$\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳)

$\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (۲)

$\frac{\sqrt{10}}{10}$ (۱)

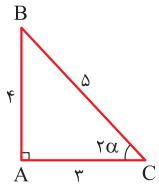
پاسخ: گزینه (۳)

مطابق شکل زیر، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی θ و 2θ را به هم مرتبط کرد:

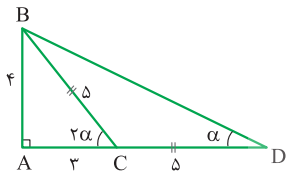


BC = CD است.

گام اول: در مثلث قائم‌الزاویه، زاویه 2α را چنان فرض می‌کنیم که کسینوس آن برابر $\frac{3}{5}$ باشد:



حالا اگر AC را به اندازه BC امتداد دهیم، به زاویه α می‌رسیم:



گام دوم: در شکل بالا $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} = 4\sqrt{5}$ و در نتیجه $\sin \alpha = \frac{AB}{BD} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

دو نقطه A و B به فاصله ۴ از هم قرار دارند و می‌دانیم فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصله ۲ و از B به فاصله $x^2 - x$ است. اگر x عددی مثبت باشد، آن گاه اختلاف مقادیر قابل قبول x کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

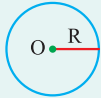
۲ (۲)

۱ (۱)

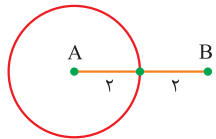
پاسخ: گزینه ۱

درس Box

مجموعه نقاطی از یک صفحه که از نقطه O واقع در آن صفحه به فاصله ثابت R باشند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R قرار دارند.



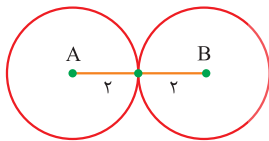
گام اول: همه نقاطی که به فاصله ۲ از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ واقع‌اند.



گام دوم: تمام نقاطی که به فاصله $x^2 - x$ از B قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع $x^2 - x$ قرار دارند.

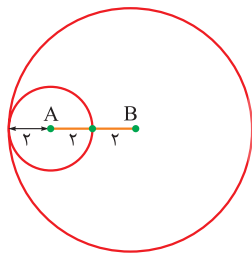
گام سوم: چون گفته شده فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد که در شرایط مسئله صدق می‌کند، پس دو دایره فقط یک نقطه مشترک دارند؛ بنابراین دو حالت زیر را داریم:

حالت اول:



$$\Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

حالت دوم:



$$\Rightarrow x^2 - x = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 3) = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 3$$

گام چهارم: اختلاف مقادیر x برابر $3 - 2 = 1$ می‌باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل

مربعی به طول ضلع $2\sqrt{2}$ مفروض است. چند نقطه روی محیط این مربع وجود دارد، به طوری که فاصله آن از یکی از قطرهای آن برابر $\sqrt{5}$ باشد؟

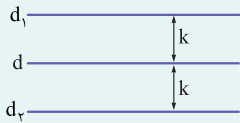
(۲) ۲
(۴) بی شمار

(۱) هیچ
(۳) ۴

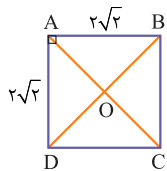
پاسخ: گزینه ۱

درس Box

مجموعه نقاطی از یک صفحه که از خط d واقع در آن صفحه به فاصله ثابت k باشند، دو خط موازی با آن خط هستند که در طرفین آن خط و به فاصله k از آن قرار گرفته‌اند.

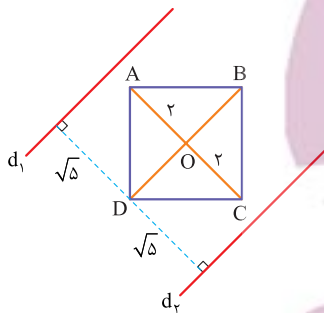


گام اول: مربع $ABCD$ به طول ضلع $2\sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم. طول قطر مربع می‌شود ۴ (قضیه فیثاغورس در $\triangle ABD$)، پس در این مربع داریم:



$$AC = BD = 4 \Rightarrow OA = OB = OC = OD = 2$$

گام دوم: می‌دانیم نقاطی از صفحه که از قطر BD به فاصله $\sqrt{5}$ واحد باشند، روی دو خط d_1 و d_2 موازی با BD و به فاصله $\sqrt{5}$ واحد از آن قرار دارند. چون $\sqrt{5} > 2$ ، پس مطابق شکل، هیچ کدام از دو خط d_1 و d_2 ، مربع را قطع نمی‌کنند و در نتیجه نقطه‌ای روی مربع وجود ندارد که از قطر BD به فاصله $\sqrt{5}$ واحد باشد.



به همین ترتیب، هیچ نقطه‌ای روی محیط مربع وجود ندارد که فاصله آن از قطر AC برابر یا $\sqrt{5}$ باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

در یک مستطیل به اضلاع ۳ و $\sqrt{6}$ عمودمنصف قطر، یکی از دو ضلع بزرگ تر مستطیل را در نقطه M قطع می کند. مجموع فواصل M، از رأس های این مستطیل، کدام است؟

$$\begin{aligned} & ۸ \quad (۲) \\ & ۲(۳ + \sqrt{6}) \quad (۴) \end{aligned}$$

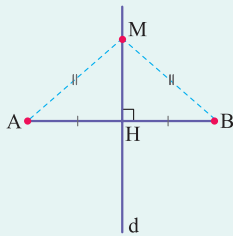
$$\begin{aligned} & ۶ + \sqrt{۱۰} \quad (۱) \\ & ۹ \quad (۳) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۳

ویژگی عمودمنصف یک پاره خط:

درس Box

(۱) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است:

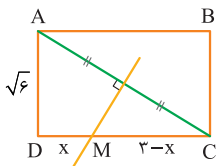


$$M \in AB \text{ عمودمنصف} \Rightarrow MA = MB$$

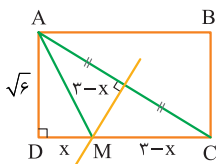
(۲) هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد:

$$MA = MB \Rightarrow M \in AB \text{ عمودمنصف}$$

گام اول: چون $\sqrt{6} > ۳$ است، پس طول مستطیل ۳ و عرض آن $\sqrt{6}$ می باشد. در مستطیل، عمودمنصف قطر را رسم می کنیم تا طول مستطیل را در M قطع کند. با فرض $DM = x$ ، MC برابر $۳ - x$ است:



گام دوم: چون M روی عمودمنصف پاره خط AC است؛ پس $MA = MC = ۳ - x$ می باشد:

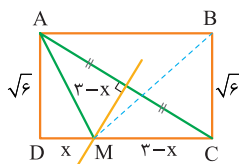


حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث ADM داریم:

$$(۳ - x)^2 = (\sqrt{6})^2 + x^2 \Rightarrow ۹ - ۶x + x^2 = ۶ + x^2 \Rightarrow ۶x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AM = ۳ - x = \frac{۵}{۲}$$

گام سوم: به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث BCM، داریم:

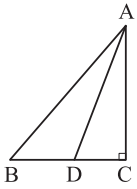
$$BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} \Rightarrow BM = \sqrt{۶ + \frac{۲۵}{۴}} = \sqrt{\frac{۴۹}{۴}} = \frac{۷}{۲}$$



پس:

$$MA + MB + \underbrace{MC + MD}_{CD} = \frac{۵}{۲} + \frac{۷}{۲} + ۳ = ۹$$

در شکل زیر، AD نیمساز زاویه $\hat{BAC}$ است. اگر $BD = ۵$ و $AB - AC = ۳$ باشد، آن گاه مساحت مثلث ABC کدام است؟



کدام است؟

۵۴ (۱)

۴۵ (۲)

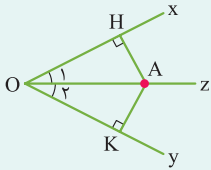
۵۰ (۳)

۴۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

ویژگی نیمساز یک زاویه:

(۱) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است:

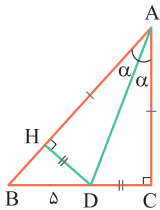


$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow AH = AK$$

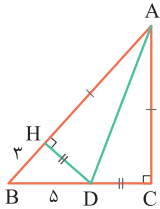
(۲) هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد:

$$AH = AK \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

گام اول: چون D روی نیمساز زاویه A می باشد، کافی است از D بر ضلع AB عمود DH را رسم کنیم. در این صورت $DC = DH$ و $AC = AH$ می باشند:



چون در صورت سؤال گفته شده $AB - AC = ۳$ است و از آن جایی که $AC = AH$ می باشد؛ پس $AB - AH$ ، یعنی BH برابر ۳ می باشد:



گام دوم: حال در مثلث قائم الزاویه BHD به کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$BD^2 = DH^2 + BH^2 \Rightarrow 5^2 = DH^2 + 3^2 \Rightarrow DH = 4$$

چون $DH = CD$ است؛ پس $CD = 4$ می باشد.

گام سوم: به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow (x+3)^2 = 9^2 + x^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 81 + x^2 \Rightarrow 6x = 72 \Rightarrow x = 12$$

پس:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2} \times 12 \times 9 = ۵۴$$

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

در مثلث ABC نیمسازهای دو زاویه داخلی B و C در نقطه I و نیمسازهای زاویه داخلی B و زاویه خارجی C در نقطه J یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر $\hat{BIC} = 3\hat{IJC}$ ، آن‌گاه زاویه بین نیمسازهای خارجی زاویه B و C چند درجه است؟

۴۵ (۴)

۴۰ (۳)

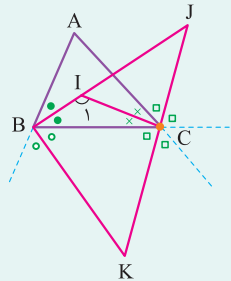
۵۵ (۲)

۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

در شکل زیر که I نقطه برخورد نیمسازهای داخلی B و C، J نقطه برخورد نیمساز داخلی B و نیمساز خارجی C و K نقطه برخورد نیمسازهای خارجی B و C است، داریم:



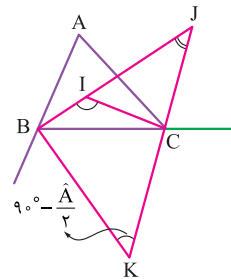
$$\hat{I}_1 = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}, \quad \hat{J} = \frac{\hat{A}}{2}, \quad \hat{K} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\hat{ICJ} = \hat{IBK} = 90^\circ$$

گام اول: ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم. از رابطه $\hat{BIC} = 3\hat{IJC}$ نتیجه می‌گیریم:

$$(90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}) = 3(\frac{\hat{A}}{2}) \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

گام دوم: حالا مطابق شکل زیر، زاویه بین نیمسازهای خارجی زاویه B و C برابر است با:



$$\hat{BKC} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

در چهارضلعی زیر، اگر طول قطر BD عددی طبیعی باشد، اختلاف بین حداقل و حداکثر مقادیر قابل قبول برای آن

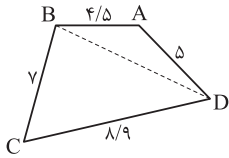
کدام است؟

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

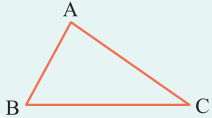
۷ (۴)



پاسخ: گزینه ۴

درس Box

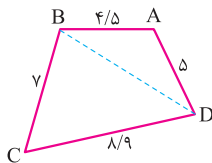
در هر مثلث، طول هر ضلع از مجموع طول‌های دو ضلع دیگر کمتر و از اختلاف طول‌های دو ضلع دیگر بیشتر است، مثلاً در شکل زیر:



$$|AB - AC| < BC < AB + AC$$

گام اول: با توجه به قضیه نامساوی مثلثی در مثلث ABD داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$AD - AB < BD < AD + AB$$

$$\Rightarrow 5 - 4/5 < BD < 5 + 4/5 \Rightarrow 9/5 < BD < 11/5 \quad (1)$$

گام دوم: به طور مشابه طبق قضیه نامساوی مثلثی، در مثلث BCD می‌توان نوشت:

$$CD - BC < BD < CD + BC \Rightarrow 8/9 - 7 < BD < 8/9 + 7 \Rightarrow 1/9 < BD < 65/9 \quad (2)$$

گام سوم: رابطه‌های (۱) و (۲) باید هم‌زمان برقرار باشند؛ پس اشتراک آن‌ها را در نظر می‌گیریم و در نتیجه داریم:

$$1/9 < BD < 9/5 \quad (*)$$

گام چهارم: با توجه به (*)، کم‌ترین و بیشترین مقدار طبیعی قابل قبول برای طول BD، به ترتیب برابر است با ۲ و ۹ که اختلاف آن‌ها می‌شود $9 - 2 = 7$.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

کدام یک از احکام کلی زیر، مثال نقض دارد؟ **۲۲**

- (۱) مجموع زوایای خارجی هر مثلث، دو برابر مجموع زوایای داخلی آن است.
- (۲) چهارضلعی که سه زاویه قائمه دارد، مستطیل است.
- (۳) نقطه تلاقی ارتفاع‌های یک مثلث درون یا بیرون آن مثلث واقع است.
- (۴) طول ارتفاع وارد بر هر ضلع یک مثلث، حداکثر برابر با طول میانه وارد بر آن ضلع است.

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ها را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم:

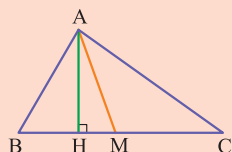
✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): مجموع زوایای داخلی و خارجی هر مثلث به ترتیب 180° و 360° است، پس این حکم کلی درست است.

گزینه (۲): مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° است، پس در صورتی که اندازه سه تا از زوایا 90° باشد، زاویه چهارم آن هم 90° می‌شود و در این صورت چهارضلعی مستطیل است، پس این حکم کلی درست است.

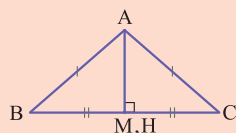
گزینه (۳): در مثلث قائم‌الزاویه، محل تلاقی ارتفاع‌ها، رأس قائمه، یعنی روی محیط مثلث است؛ پس این حکم کلی درست نیست.

گزینه (۴): به شکل زیر دقت کنید. اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آن‌گاه در مثلث قائم‌الزاویه AHM داریم:



$$AM > AH$$

اما اگر $AB = AC$ ، آن‌گاه $AM = AH$ ، پس همواره داریم $AH \leq AM$ ؛ یعنی این حکم کلی درست است.



$$AM = AH$$

(سوال ۲۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

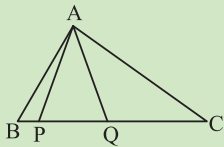
برای کدام گزاره، می‌توان مثال نقض ارائه کرد؟

- (۱) هر چهارضلعی که قطرهای یکدیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است.
- (۲) اندازه میانه‌های وارد بر اضلاع مساوی در هر مثلث، با هم برابرند.
- (۳) هر چهارضلعی با قطرهای برابر و عمود بر هم، مربع است.
- (۴) نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث هم‌رسند.

ایران نوننه
توشه ای برای موفقیت

کنکور

۲۳ در شکل زیر اگر $\Delta BP = ۳PQ = ۲QC$ ، آن گاه نسبت مساحت مثلث ABQ به مساحت مثلث ACP کدام است؟

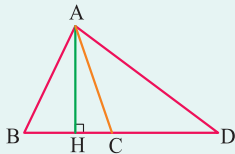


- / ۴۸ (۱)
- / ۵۴ (۲)
- / ۵۸ (۳)
- / ۶۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

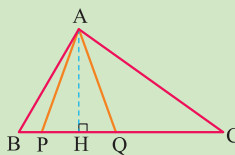
اگر دو مثلث، دارای یک ارتفاع مشترک باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع مشترک، مثلاً در شکل زیر، داریم:



$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{BC}{CD}, \quad \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$$

گام اول: از $\Delta BP = ۳PQ = ۲QC$ نتیجه می‌گیریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

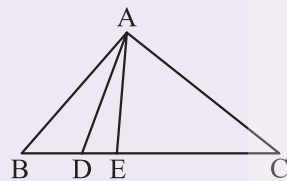


$$\frac{\Delta BP}{۳۰} = \frac{۳PQ}{۳۰} = \frac{۲QC}{۳۰} \Rightarrow \frac{BP}{۶} = \frac{PQ}{۱۰} = \frac{QC}{۱۵} = x$$

$$\Rightarrow BP = ۶x, \quad PQ = ۱۰x, \quad QC = ۱۵x$$

گام دوم: با توجه به درس باکس، داریم:

$$\frac{S_{ABQ}}{S_{ACP}} = \frac{BQ}{CP} = \frac{۶x + ۱۰x}{۱۰x + ۱۵x} = \frac{۱۶}{۲۵} \times \frac{۴}{۴} = ۰/۶۴$$



در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو

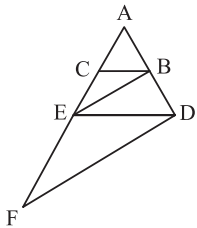
برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{BC}{DE}$ و $\frac{DE}{BD}$ را به دست آورید.

(هئرسه (۱) - تمرین ۳ صفحه ۳۳ کتاب درسی)

کتاب
درسی

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۲۴ در شکل زیر $BE \parallel DF$ ، $BC \parallel DE$ ، $AC = ۲$ و $EF = ۳$ است. طول پاره خط CE کدام است؟



(۱) $\sqrt{۶}$

(۲) $\frac{۹}{۵}$

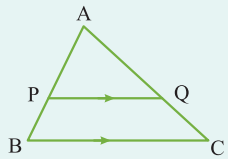
(۳) $\sqrt{۷} - ۱$

(۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

در شکل زیر دو نقطه P و Q را به ترتیب روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که $PQ \parallel BC$ ، در این صورت:

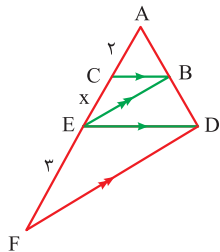


$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \quad (\text{قضیه تالس})$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} \quad (\text{تعمیم قضیه تالس})$$

گام اول: فرض کنید طول پاره خط CE برابر x باشد:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



قضیه تالس را با توجه به پاره خط‌های موازی در مثلث‌های ADE و ADF می‌نویسیم:

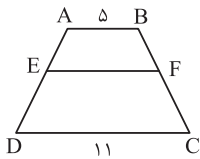
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ADE : BC \parallel DE \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD} \\ \triangle ADF : BE \parallel DF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BD} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{AE}{EF} \quad (*)$$

گام دوم: اندازه پاره خط‌ها را در رابطه $(*)$ جای گذاری می‌کنیم:

$$\frac{۲}{x} = \frac{۲+x}{۳} \Rightarrow ۲x + x^2 = ۶ \Rightarrow x^2 + ۲x + ۱ = ۷ \Rightarrow (x+۱)^2 = ۷$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱ = \sqrt{۷} \Rightarrow x = \sqrt{۷} - ۱ \\ x+۱ = -\sqrt{۷} \Rightarrow x = -\sqrt{۷} - ۱ \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

در شکل زیر، EF موازی قاعده‌های دوزنقه است. اگر $CF = ۲BF$ ، آن‌گاه نسبت مساحت بزرگ‌ترین دوزنقه، به مساحت کوچک‌ترین دوزنقه کدام است؟



۴ / ۴ (۱)

۳ (۲)

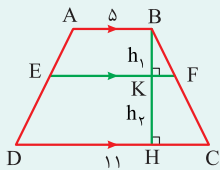
۴ / ۵ (۳)

۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

در شکل زیر، EF با قاعده‌های دوزنقه $ABCD$ موازی است، داریم:



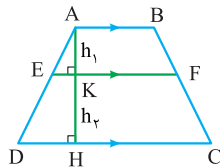
$$۱) \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

$$۲) \frac{AE}{ED} = \frac{BK}{KH}$$

$$۳) \frac{AE}{ED} = \frac{EF - AB}{CD - EF}$$

گام اول: با توجه به درس بکس داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\frac{BF}{FC} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{EF - AB}{CD - EF} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{EF - 5}{11 - EF} \Rightarrow 11 - EF = 2EF - 10 \Rightarrow EF = 7$$

گام دوم: نسبت مساحت دوزنقه‌های کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{\frac{1}{2}(\Delta + 7) \times h_1}{\frac{1}{2}(11 + 7) \times h_2} \Rightarrow \frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{12}{18} \times \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

گام سوم: از $\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}} = \frac{1}{3}$ نتیجه می‌گیریم:

$$S_{ABFE} = S, S_{EFCD} = 3S \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{ABFE}} = \frac{S + 3S}{S} = 4$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

در کدام یک از موارد زیر، تعداد یکاهای اصلی SI بیشتر است؟

- (۱) ثانیه، کلون، گرم، پاسکال
(۲) متر، مول، کولن، درجه سلسیوس
(۳) کیلوگرم، کندلا، ژول، کیلومتر
(۴) آمپر، درجه سلسیوس، مول، کیلوگرم

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

مجمع عمومی اوزان و مقیاس‌ها، هفت کمیت را به عنوان کمیت‌های اصلی انتخاب کرده است. کمیت‌هایی که یکای آن‌ها برحسب یکاهای اصلی بیان می‌شوند، کمیت‌های فرعی هستند. در جدول زیر، ۷ کمیت اصلی و یکای آن‌ها و در جدول بعدی، چند نمونه کمیت فرعی آمده است.

کمیت‌های اصلی و یکاهای اصلی دستگاه بین‌المللی (SI):

کمیت	نام یکا	نماد یکا
طول	متر	m
جرم	کیلوگرم	kg
زمان	ثانیه	s
دما	کلون	K
مقدار ماده	مول	mol
جریان الکتریکی	آمپر	A
شدت روشنایی	کندلا (شمع)	cd

چند مثال از یکاهای فرعی دستگاه بین‌المللی (SI):

کمیت	نام یکا	یکای فرعی بر حسب یکاهای اصلی
تندی و سرعت	متر بر ثانیه (m/s)	m/s
شتاب	متر بر مربع ثانیه (m/s ²)	m/s ²
نیرو	نیوتون (N)	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$
فشار	پاسکال (Pa)	$\frac{kg}{m \cdot s^2}$
انرژی	ژول (J)	$\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

- گزینه (۱): دو یکای ثانیه و کلون، یکای اصلی SI هستند. یکای اصلی جرم، کیلوگرم است و پاسکال، یکایی فرعی است.
گزینه (۲): متر و مول، یکای اصلی SI هستند. یکای اصلی دما، کلون و کولن، یکایی فرعی است.
گزینه (۳): کیلوگرم و کندلا یکای اصلی SI هستند، اما ژول و کیلومتر یکای اصلی نیستند.
گزینه (۴): به جز درجه سلسیوس، سه یکای دیگر اصلی هستند.

۲۷ یکای کدام یک از کمیت‌های زیر برحسب یکاهای اصلی $\frac{kg}{m.s^2}$ است؟

- (۱) نیرو
(۲) انرژی
(۳) فشار
(۴) توان

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

در تساوی کمیت‌های فیزیکی، یکای دو طرف باید یکسان باشد، هم‌چنین یکاهای یکسان را می‌توانیم با هم جمع و تفریق کنیم. مثلاً در رابطه $A = B + CD$ ، اگر A از جنس شتاب با یکای m/s^2 باشد، B هم باید از جنس شتاب باشد، پس یکای آن m/s^2 است و یکای CD هم باید برابر m/s^2 باشد، پس اگر C از جنس تندی با یکای m/s باشد، D باید از جنس عکس زمان با یکای $\frac{1}{s}$ باشد.

$$[A] = [B] + [C] \times [D]$$

وقتی می‌خواهیم یکای فرعی یک کمیت فیزیکی را در SI نشان دهیم، برای سادگی در نوشتار، می‌توانیم نماد آن کمیت را داخل یک کروشه قرار دهیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} [A] = [B] \Rightarrow [B] = m/s^2 \\ [A] = [C] \times [D] \Rightarrow m/s^2 = m/s \times [D] \Rightarrow [D] = \frac{1}{s} \end{cases}$$

یکای کمیت‌های هر گزینه را برحسب یکاهای اصلی می‌نویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

(۱) گزینه $F = ma \Rightarrow [F] = [m][a] = \frac{kg.m}{s^2} \times$

(۲) گزینه $K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow [K] = [m][v^2] = kg \times \left(\frac{m}{s}\right)^2 = \frac{kg.m^2}{s^2} \times$

(۳) گزینه $P = \frac{F}{A} \Rightarrow [P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\frac{kg.m}{s^2}}{m^2} = \frac{kg}{m.s^2} \checkmark$

(۴) گزینه $P = \frac{U}{t} \Rightarrow [P] = \frac{[U]}{[t]} = \frac{\frac{kg.m^2}{s^2}}{s} = \frac{kg.m^2}{s^3} \times$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

نام وسیله اندازه‌گیری شکل زیر چیست و دقت اندازه‌گیری این وسیله در SI کدام است؟

۲۸



(۱) کولیس، 10^{-5}

(۲) کولیس، 10^{-3}

(۳) ریزسنج، 10^{-5}

(۴) ریزسنج، 10^{-3}

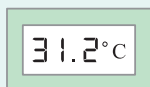
پاسخ: گزینه ۱

درس Box

کمینه درجه‌بندی این خط‌کش، ۱ mm است.



دقت این خط‌کش، ۱ mm است.



دقت این دماسنج، 1°C است.

(۲) در بسیاری از کارگاه‌های صنعتی، اندازه‌گیری طول با ابزارهای دقیق‌تر از خط‌کش میلی‌متری انجام می‌شود، این ابزارها کولیس و ریزسنج نام دارند که به دو صورت مدرج و رقمی ساخته می‌شوند. شکل‌های (الف) و (ب) به ترتیب یک ریزسنج رقمی و یک کولیس رقمی را نشان می‌دهند.



(۳) پیشوندهای یکاها و نماد آنها را در جدول زیر می‌بینید. از ردیف چهارم به بعد آنها را حتماً به خاطر بسپارید که از این‌جا به بعد از آنها خیلی استفاده می‌کنیم.

پیشوندهای یکاها					
نماد	پیشوند	ضریب	نماد	پیشوند	ضریب
y	یوکتو	10^{-24}	Y	یوتا	10^{24}
z	زپتو	10^{-21}	Z	زتا	10^{21}
a	آتو	10^{-18}	E	اِگزا	10^{18}
f	فمتو	10^{-15}	P	پتا	10^{15}
p	پیکو	10^{-12}	T	ترا	10^{12}
n	نانو	10^{-9}	G	گیگا (جیگا)	10^9
μ	میکرو	10^{-6}	M	مگا	10^6
m	میلی	10^{-3}	k	کیلو	10^3
c	سانتی	10^{-2}	h	هکتو	10^2
d	دسی	10^{-1}	da	دکا	10^1

شکل، یک کولیس رقمی را نشان می‌دهد و دقت آن براساس آخرین رقمی که بیان می‌کند، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{دقت اندازه‌گیری} = 0.01 \text{ mm} \xrightarrow{\text{در SI}} \text{دقت} = 10^{-2} \text{ mm} \times \frac{10^{-3} \text{ m}}{1 \text{ mm}} = 10^{-5} \text{ m}$$



۲۹ ارتفاع هواپیمایی برابر ۴۰۰۰۰ پا (فوت) است. این مقدار بر حسب کیلومتر برابر کدام است؟ (هر فوت معادل ۱۲ اینچ و هر اینچ برابر ۲/۵ cm است.)

$$۱/۹۲(۲)$$

$$۱/۲(۱)$$

$$۱۹/۲(۴)$$

$$۱۲(۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

فقط کافیست از روش تبدیل زنجیره‌ای استفاده کنید.

Hint

درس Box

روش تبدیل زنجیره‌ای: برای تبدیل یکای یک کمیت به یکاهای دیگر، از روش تبدیل زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم، به این صورت

$$۱ \text{ cm} = ۱۰^{-۲} \text{ m}$$

که ابتدا تساوی بین دو یکا را که از یک نوع هستند، می‌نویسیم، مثلاً:

کسر تبدیل حاصل از تساوی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{۱ \text{ cm}}{۱۰^{-۲} \text{ m}} = ۱ \quad \text{یا} \quad \frac{۱۰^{-۲} \text{ m}}{۱ \text{ cm}} = ۱$$

برای تبدیل یکاها، باید کسری را انتخاب کنیم که پس از ساده‌شدن به یکای مورد نظر سؤال برسیم، مثلاً برای نوشتن تندی ۶ km/s

بر حسب m/s داریم:

$$۶ \text{ km/s} = ۶ \frac{\text{km}}{\text{s}} \times \frac{۱۰^{-۳} \text{ m}}{۱ \text{ km}} = ۶ \times ۱۰^{-۳} \text{ m/s}$$

از روش تبدیل زنجیره‌ای داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$۴۰۰۰۰ \text{ فوت} = ۴۰۰۰۰ \text{ فوت} \times \frac{۱۲ \text{ اینچ}}{۱ \text{ فوت}} \times \frac{۲/۵ \text{ cm}}{۱ \text{ اینچ}} \times \frac{۱۰^{-۲} \text{ m}}{۱ \text{ cm}} \times \frac{۱ \text{ km}}{۱۰^{-۳} \text{ m}} = ۱۲ \text{ km}$$

دستگاه بریتانیایی یکاها، دستگاهی است که در برخی از کشورها مانند آمریکا و انگلستان همچنان استفاده می‌شود. یکای اصلی طول در این دستگاه پا (فُوت) و یکای کوچک‌تر آن اینچ است، به طوری که ۱ ft = ۱۲ in است. ارتفاع هواپیمایی را که در فاصله ۳۰۰۰۰ پا از سطح آزاد دریاها در حال پرواز است، بر حسب متر به دست آورید؟ هر اینچ ۲/۵۴ سانتی‌متر است.

(فیزیک (۱) - سوال ۱۱ صفحه ۲۰ کتاب درسی)

کتاب
درسی

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

گیاهی در مدت ۲۵ شبانه‌روز، ۲/۷ m رشد می‌کند. آهنگ رشد این گیاه چند میکرومتر بر دقیقه است؟

۳۰

۷۵ (۴)

۱۲/۵ (۳)

۷/۵ (۲)

۱/۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

تغییر هر کمیت نسبت به زمان را آهنگ آن کمیت می‌گویند، یعنی آهنگ تغییر کمیت A به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{آهنگ تغییر کمیت A} = \frac{\text{تغییر کمیت A}}{\text{تغییر زمان}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

برای مثال، آهنگ تغییر حجم برابر است با:

$$\text{آهنگ تغییر حجم} = \frac{\text{تغییر حجم}}{\text{مدت زمان تغییر حجم}} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

آهنگ رشد گیاه طبق اطلاعات سؤال برابر است با:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\text{آهنگ رشد گیاه} = \frac{۲/۷ \text{ m}}{۲۵ \text{ شبانه‌روز}}$$

خواسته سؤال، آهنگ رشد گیاه بر حسب میکرومتر بر دقیقه است؛ از روش تبدیل زنجیره‌ای داریم:

$$\text{آهنگ رشد گیاه} = \frac{۲/۷ \text{ m}}{۲۵ \text{ day}} \times \frac{۱ \mu\text{m}}{۱۰^{-۶} \text{ m}} \times \frac{۱ \text{ day}}{۲۴ \text{ h}} \times \frac{۱ \text{ h}}{۶۰ \text{ min}} = ۷۵ \mu\text{m} / \text{min}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

جرم جسمی ۸ مرتبه اندازه گیری شده که حاصل این اندازه گیری ها بر حسب گرم مقادیر زیر است. نتیجه اندازه گیری جرم این جسم بر حسب گرم با کدام مقدار زیر باید گزارش شود؟

۳۹/۰, ۴۱/۵, ۲۶/۰, ۴۳/۰, ۴۲/۵, ۵۱/۰, ۴۰/۵, ۳۹/۵

۴۱/۰ (۲)

۴۰/۴ (۱)

۴۲/۰ (۴)

۴۱/۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

عوامل مؤثر در دقت اندازه گیری:

(۱) دقت وسیله اندازه گیری: کمترین مقداری که با آن وسیله می توانیم اندازه بگیریم.

(۲) مهارت کسی که اندازه می گیرد.

(۳) تعداد دفعات اندازه گیری: برای دقت بیشتر در اندازه گیری، آزمایش را چند بار تکرار می کنیم، سپس داده های پرت را کنار گذاشته و از سایر داده ها میانگین می گیریم.

گام اول: ابتدا داده ها را مرتب می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۲۶/۰, ۳۹/۰, ۳۹/۵, ۴۰/۵, ۴۱/۵, ۴۲/۵, ۴۳/۰, ۵۱/۰

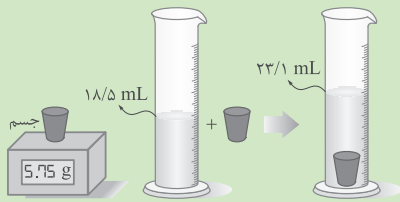
گام دوم: ۲۶/۰ و ۵۱/۰ داده های پرت هستند و از محاسبات خارج می شوند، زیرا با سایر داده ها، اختلاف قابل توجهی دارند، میانگین سایر داده ها را به دست می آوریم:

$$\text{میانگین گزارش شده} = \frac{۳۹/۰ + ۳۹/۵ + ۴۰/۵ + ۴۱/۵ + ۴۲/۵ + ۴۳/۰}{۶} = \frac{۲۴۶/۰}{۶} = ۴۱/۰$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۳۲

برای تعیین چگالی یک جسم جامد، ابتدا جرم و حجم آن را مطابق شکل زیر اندازه گیری می کنیم. چگالی این جسم در SI برابر کدام است؟ (جسم در آب حل نمی شود).



۰ / ۸ (۱)

۱ / ۲۵ (۲)

۸۰۰ (۳)

۱۲۵۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا به کمک شکل، جرم و حجم استوانه توخالی را به دست آورید، سپس با جای گذاری آن ها در رابطه چگالی ($\rho = \frac{m}{V}$)، چگالی را برحسب یکای SI به دست آورید.

درس Box

چگالی، نسبت جرم به حجم یک ماده است؛ یکای آن در SI، کیلوگرم بر مترمکعب (kg / m^3) و رابطه آن به صورت زیر است:

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \begin{matrix} \text{جرم (kg)} \\ \text{حجم (m}^3\text{)} \end{matrix}$$

چگالی (kg / m^3)

یکی از یکاهای متداول چگالی g / cm^3 است که برای تبدیل آن به یکاهای kg / m^3 و $\frac{\text{g}}{\text{L}}$ (و برعکس) به روش زیر عمل می کنیم:

$$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \xrightarrow{\times 10^{-3}} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{\text{g}}{\text{L}}$$

گام اول: طبق شکل، جرم جسم جامد، برابر با $\text{g} \ 5 / ۷۵$ است. حجم آن هم برابر با حجم مایع جابه جا شده است، پس:

$$V_{\text{جسم}} = 23 / 1 - 18 / 5 = 4 / 6 \text{ mL}$$

گام دوم: خواسته سؤال، محاسبه چگالی جسم در SI است، پس:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{5 / ۷۵}{4 / 6} = 1 / ۲۵ \text{ g} / \text{mL} \times \frac{1 \text{ mL}}{10^{-3} \text{ L}} = 1250 \text{ g} / \text{L} = 1250 \text{ kg} / \text{m}^3$$

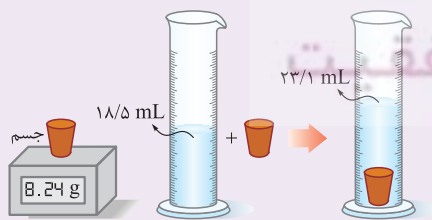
پاسخ خیلی تشریحی

آگه به یک دقت نکلی و یکا رو بر حسب SI ننویسی، توی دایم گزینه (۲) می افتی.

گول نخوری

برای تعیین چگالی یک جسم جامد، ابتدا جرم و حجم آن را مطابق شکل زیر پیدا کرده ایم. با توجه به داده های روی شکل، چگالی جسم را بر حسب g / L و g / cm^3 حساب کنید.

(فیزیک (۱) - سؤال ۱۸ صفحه ۲۲ کتاب درسی)



کتاب درسی

۳۳

شعاع قاعده یک مخروط همگن و توپر برابر ۱۰ cm و ارتفاع آن ۲۰ cm است. اگر چگالی ماده سازنده این مخروط 5 g/cm^3 باشد، جرم آن برابر چند کیلوگرم است؟ ($\pi = 3$)

۳۰ (۴)

۱۰ (۳)

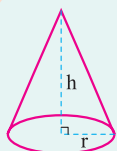
۳ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

یادآوری محاسبه حجم مخروط:



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

V: حجم (m^3)

r: شعاع قاعده (m)

h: ارتفاع (m)

گام اول: ابتدا حجم مخروط را محاسبه می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (10)^2 (20) = \frac{2000\pi}{3} \text{ cm}^3$$

گام دوم: با جای گذاری داده ها در رابطه چگالی، جرم را بر حسب گرم به دست آورده و در نهایت به کیلوگرم تبدیل می کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = 5 \times \frac{2000\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \times 10^4 \text{ g} \xrightarrow{\pi=3} m = 10^4 \text{ g} \times \frac{1 \text{ kg}}{10^3 \text{ g}} = 10 \text{ kg}$$

شعاع قاعده یک مخروط توپر برابر ۱۰ cm و ارتفاع آن ۲۰ cm است. اگر جرم این مخروط $5/4 \text{ kg}$ باشد، چگالی

(سوال ۷۲ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت اول)

مخروط در SI چه قدر است؟ ($\pi = 3$)

۸۱۰۰ (۲)

۲۷۰۰ (۱)

۸/۱ (۴)

۲/۷ (۳)

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۳۴ در یک قطعه جواهر به حجم $3/5 \text{ cm}^3$ ، طلا و نقره به کار رفته است. اگر جرم آن $48/5$ گرم باشد، طلای به کار رفته

در قطعه چند گرم است؟ ($\rho_{\text{طلا}} = 19 \text{ g/cm}^3$ و $\rho_{\text{نقره}} = 10 \text{ g/cm}^3$)

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) $28/5$ (۴) $29/5$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

جواهر از طلا و نقره ساخته شده، پس با استفاده از جرم کل و چگالی طلا و نقره، جرم طلای به کار رفته را به دست می آوریم:

$$m_{\text{جواهر}} = m_{\text{طلا}} + m_{\text{نقره}} \Rightarrow 48/5 = m_{\text{طلا}} + m_{\text{نقره}} \Rightarrow m_{\text{نقره}} = 48/5 - m_{\text{طلا}} \quad (1)$$

$$V_{\text{جواهر}} = V_{\text{طلا}} + V_{\text{نقره}} \xrightarrow{\rho = \frac{m}{V}} V_{\text{جواهر}} = \frac{m_{\text{طلا}}}{\rho_{\text{طلا}}} + \frac{m_{\text{نقره}}}{\rho_{\text{نقره}}} \xrightarrow{(1)} V_{\text{جواهر}} = \frac{m_{\text{طلا}}}{\rho_{\text{طلا}}} + \frac{(48/5 - m_{\text{طلا}})}{\rho_{\text{نقره}}}$$

$$\Rightarrow 3/5 = \frac{m_{\text{طلا}}}{19} + \frac{48/5 - m_{\text{طلا}}}{10} = \frac{10m_{\text{طلا}} + 921/5 - 19m_{\text{طلا}}}{190} \Rightarrow 665 = 921/5 - 9m_{\text{طلا}}$$

$$\Rightarrow m_{\text{طلا}} = 28/5 \text{ g}$$

در یک قطعه جواهر به حجم 5 cm^3 ، طلا و نقره به کار رفته است. اگر جرم آن 68 گرم باشد، نقره به کار رفته در قطعه

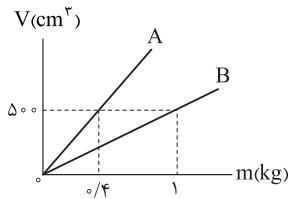
(سوال ۶۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ (قارچ از کشور))

چند گرم است؟ ($\rho_{\text{طلا}} = 19 \text{ g/cm}^3$ و $\rho_{\text{نقره}} = 10 \text{ g/cm}^3$)

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

نمودار حجم بر حسب جرم دو مایع A و B به شکل زیر است. اگر جرم یکسانی از این دو مایع مخلوط شوند، چگالی مخلوط حاصل چند کیلوگرم بر لیتر است؟



$$\frac{7}{8} \quad (1)$$

$$\frac{8}{7} \quad (2)$$

$$\frac{7000}{8} \quad (3)$$

$$\frac{8000}{7} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

چگالی مخلوط: اگر دو یا چند ماده را با هم مخلوط کنیم، چگالی مخلوط حاصل از رابطه زیر محاسبه می‌شود: (در صورت تغییر نکردن حجم)

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots}$$

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2 + \dots}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \dots}$$

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots}$$

اگر جرم و چگالی، جزء داده‌ها یا خواسته‌های سؤال باشد:

اگر حجم و چگالی، جزء داده‌ها یا خواسته‌های سؤال باشد:

با کمک رابطه چگالی مخلوط داریم:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_A + m_B}{V_A + V_B} = \frac{\frac{m_A}{\rho_A} + \frac{m_B}{\rho_B}}{\frac{m_A}{\rho_A} + \frac{m_B}{\rho_B}} \xrightarrow{m_A = m_B} \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{2}{\frac{1}{\rho_A} + \frac{1}{\rho_B}}$$

طبق رابطه بالا، به چگالی دو مایع نیاز داریم، پس:

$$\rho_A = \frac{m_A}{V_A} \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} \rho_A = \frac{0.4}{\frac{500}{1000 \times 10^{-3}}} = \frac{4}{5} \text{ kg/L}$$

$$\rho_B = \frac{m_B}{V_B} \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} \rho_B = \frac{1}{\frac{700}{1000 \times 10^{-3}}} = 2 \text{ kg/L}$$

حالا داده‌ها را در رابطه چگالی به دست آمده قرار می‌دهیم:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{2}{\frac{1}{\rho_A} + \frac{1}{\rho_B}} = \frac{2}{\frac{1}{\frac{4}{5}} + \frac{1}{2}} = \frac{8}{7} \text{ kg/L}$$

ایران توشه ای برای موفقیت

آگه هواست به یکای فواسته شده در صورت سؤال نباشه، توی رام گزیننه (۴) می افقی.

پاسخ خیلی تشریحی

گول نخوری

۳۶

چگالی سرب، $\frac{3}{4}$ برابر چگالی آهن است. اگر شعاع داخلی و خارجی کره توخالی سربی A به ترتیب برابر $2a$ و $4a$ و شعاع کره آهنی توپر B برابر $3a$ باشد، جرم کره A چند برابر جرم کره B است؟

$\frac{9}{4}$ (۴)

$\frac{4}{9}$ (۳)

$\frac{9}{28}$ (۲)

$\frac{28}{9}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

Hint

درس Box

(۱) حجم کره توپر از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$V = \frac{4}{3} \pi r^3$
شعاع کره (m) حجم (m^۳)

(۲) حجم کره توخالی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$V = \frac{4}{3} \pi (r^3 - r'^3)$
شعاع داخلی شعاع خارجی

گام اول: ابتدا حجم کره توخالی A و کره توپر B را محاسبه می‌کنیم:

$V_A = \frac{4}{3} \pi (r_{\text{خارجی}}^3 - r_{\text{داخلی}}^3) = \frac{4}{3} \pi (64a^3 - 8a^3) = \frac{4 \times 56}{3} \pi a^3$

$V_B = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (3a)^3 = 36 \pi a^3$

گام دوم: از نسبت چگالی‌ها کمک می‌گیریم تا نسبت جرم‌ها را به دست آوریم:

$\rho_A = \frac{3}{2} \rho_B \Rightarrow \frac{m_A}{V_A} = \frac{3}{2} \times \frac{m_B}{V_B} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{3}{2} \times \frac{V_A}{V_B} = \frac{3}{2} \times \frac{\frac{4 \times 56}{3} \pi a^3}{36 \pi a^3} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{4 \times 56}{2 \times 36} = \frac{28}{9}$

پاسخ خیلی تشریحی

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

کدام یک از عبارتهای زیر درست است؟ ۳۷

- (۱) شیشه نوعی آمورف است و از سردکردن آهسته مایع به وجود می آید.
- (۲) عموماً فاصله بین ذرات سازنده مایع بیشتر از فاصله بین ذرات سازنده جامد است.
- (۳) سرعت پدیده پخش در گازها از سرعت پدیده پخش در مایعها بیشتر است.
- (۴) حالت ماده، تنها به چگونگی حرکت ذرههای سازنده آن بستگی دارد.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه ها را تک به تک بررسی می کنیم:

- گزینه (۱): نادرست است؛ در اثر سردکردن سریع مایع، جامد بی شکل (آمورف) به دست می آید که ذرات آن در طرحهای نامنظمی کنار هم قرار دارند، مثل شیشه.
- گزینه (۲): نادرست است؛ فاصله ذرات سازنده جامد و مایع تقریباً یکسان و در حدود یک آنگستروم است.
- گزینه (۳): درست است؛ پدیده پخش در مایعها کندتر از گازها رخ می دهد، زیرا تندی میانگین مولکولهای مایع، بسیار کم تر از گازهاست.
- گزینه (۴): نادرست است؛ ذرههای سازنده مواد همواره در حرکت اند و به یکدیگر نیرو وارد می کند، بنابراین حالت ماده به چگونگی حرکت این ذرهها و اندازه نیروی بین آنها بستگی دارد.

ایران تونلنه
توشه ای برای موفقیت

وضعیت مایعی که یک لوله موئین شیشه‌ای به طور قائم در آن فرو رفته، به شکل زیر است. کدام یک از موارد زیر

درباره این مایع درست است؟



الف) نیروی هم‌چسبی مایع از نیروی دگرچسبی مایع و شیشه، بزرگ‌تر است.

ب) نیروی هم‌چسبی مایع از نیروی دگرچسبی مایع و شیشه، کوچک‌تر است.

پ) مایع، شیشه را تر می‌کند.

ت) مایع، شیشه را تر نمی‌کند.

۲) الف و ت

۱) الف و پ

۴) ب و ت

۳) ب و پ

پاسخ: گزینه ۲

اثر موئینگی:

درس Box

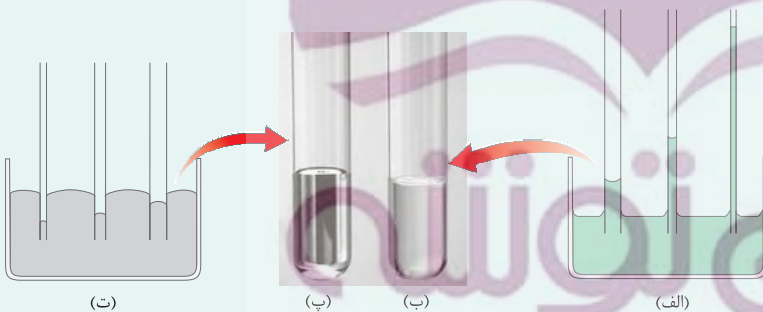
لوله‌هایی که قطر داخلی آن‌ها در حدود یک‌دهم میلی‌متر باشد، معمولاً لوله موئین نامیده می‌شوند. مایعات درون لوله موئین بر اثر اختلاف نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های مایع و سطح با نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های مایع، رفتار خاصی از خود نشان می‌دهند:

الف) رفتار آب در لوله موئین:

اگر چند لوله موئین شیشه‌ای و تمیز را وارد یک ظرف آب کنیم، آب در لوله‌های موئین بالا می‌رود، ارتفاع آب در لوله موئین بالاتر از سطح آب داخل ظرف است و سطح آب در داخل لوله فرو رفته (✓) است (اصطلاحاً می‌گوییم آب شیشه را تر می‌کند)، هم‌چنین هر چه قطر قطر لوله موئین کمتر باشد، ارتفاع ستون آب در آن بیشتر می‌شود.

ب) رفتار جیوه در لوله موئین:

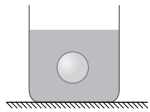
اگر همین آزمایش را با جیوه انجام دهیم، ارتفاع جیوه در لوله موئین پایین‌تر از سطح جیوه داخل ظرف است، سطح جیوه در داخل لوله برآمده (✓) است (اصطلاحاً می‌گوییم جیوه شیشه را تر نمی‌کند)، هر چه قطر قطر لوله موئین کمتر باشد، ارتفاع ستون جیوه کمتر می‌شود.



سطح مایع در لوله به صورت برآمده است، پس نیروی هم‌چسبی مایع از نیروی دگرچسبی مایع و شیشه، بزرگ‌تر است. هم‌چنین مایع سطح شیشه را تر نمی‌کند (حالت قرار گرفتن مایع در لوله موئین مشابه حالت قرار گرفتن جیوه است).

✓ پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر، کره‌ای به شعاع ۲۰ cm درون شاره‌ای به چگالی $۱/۵ \text{ g/cm}^3$ غوطه‌ور و در حال تعادل است. اختلاف فشار بین بالاترین و پایین‌ترین نقطه کره چند کیلوپاسکال است؟ ($g = ۱۰ \text{ N/kg}$)



۳ (۱)

۶ (۲)

۳۰۰۰ (۳)

۶۰۰۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

نیروی عمودی سطح (N)

$$P = \frac{F}{A}$$

فشار (Pa) ← P = F / A
مساحت سطح (m^2)

فشار به صورت نسبت اندازه نیروی عمودی وارد بر سطح به مساحت تعریف می‌شود.

چگالی
(kg/m^3)

$$P = \rho g h \rightarrow (m)$$

عمق (m) → $P = \rho g h$
شتاب گرانش زمین (N/kg)

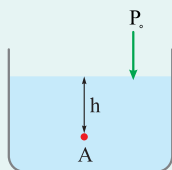
فشار ناشی از شاره‌ها به عمق شاره وابسته است و طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

فشار کل در عمق h از سطح یک مایع که سطح آزاد آن در تماس با هوا است به صورت زیر محاسبه می‌شود که در این رابطه فشار هوا، یعنی فشار در سطح مایع.

$$P = P_0 + \rho g h$$

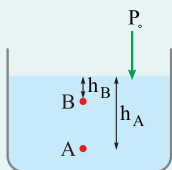
فشار ناشی از مایع
فشار هوا

مثال در شکل زیر، فشار نقطه A برابر است با:



$$P_A = P_0 + \rho g h$$

اختلاف فشار بین دو نقطه از مایع، به دلیل اختلاف عمق دو نقطه ایجاد می‌شود در شکل زیر، برای دو نقطه A و B داریم:



$$\begin{cases} P_A = P_0 + \rho g h_A \\ P_B = P_0 + \rho g h_B \end{cases} \Rightarrow P_A - P_B = \Delta P = P_0 + \rho g h_A - P_0 - \rho g h_B \Rightarrow \Delta P = \rho g (h_A - h_B)$$

چون کره درون شاره، غوطه‌ور و در حال تعادل است، چگالی کره و شاره با هم برابرند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اختلاف فشار بین بالاترین و پایین‌ترین نقطه کره ناشی از اختلاف ارتفاع دو نقطه (به اندازه قطر کره) است، یعنی:

$$\Delta P = \rho g \Delta h = ۱/۵ \times ۱۰^3 \times ۱۰ \times ۴۰ \times ۱۰^{-2} = ۶۰۰۰ \text{ Pa} = ۶ \text{ kPa}$$

اگر هواست به تبدیل یک نباشه، توی دایره گزینه (۱) می‌افتی و اگر به جای قطر، شعاع کره رو به عنوان اختلاف ارتفاع در نظر بگیری، اشتباهاً سراغ گزینه‌های (۱) یا (۳) می‌ری.

گول نخوری

۴۰

درون استوانه‌ای به شعاع قاعده 10 cm ، مقداری مایع به چگالی 850 g/L می‌ریزیم و فشار در کف استوانه برابر 80 cmHg می‌شود. اگر همین مقدار مایع را درون ظرفی مکعبی به ضلع 30 cm بریزیم، فشار در کف ظرف چند سانتی‌متر جیوه می‌شود؟ ($\pi = 3$) و فشار هوا 71 cmHg فرض شود.

۸۰ (۴)

۷۶ (۳)

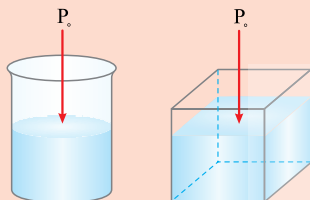
۷۴ (۲)

۷۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: فشار در کف استوانه را داریم، پس فشار ناشی از مایع را به دست می‌آوریم: (فشار ناشی از مایع در استوانه را با P_1 و فشار ناشی از مایع در مکعب را با P_2 نشان می‌دهیم.)



$$P_{\text{کل}} = P_0 + P_1 \Rightarrow P_1 = P_{\text{کل}} - P_0 = 80 - 71 = 9 \text{ cmHg}$$

گام دوم: چون مایع تغییر نکرده، از رابطه نسبتی فشار داریم:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{F_{\text{استوانه}}}{A_{\text{استوانه}}}}{\frac{F_{\text{مکعب}}}{A_{\text{مکعب}}}} = \frac{F_{\text{استوانه}}}{F_{\text{مکعب}}} \times \frac{A_{\text{مکعب}}}{A_{\text{استوانه}}} \xrightarrow{F_{\text{استوانه}} = F_{\text{مکعب}} = mg} \frac{9}{P_2} = \frac{A_{\text{مکعب}}}{\underbrace{A_{\text{استوانه}}}_{\pi a^2}} = \frac{(30)^2}{3 \times (10)^2} \Rightarrow P_2 = 3 \text{ cmHg}$$

گام سوم: خواسته سؤال، فشار در کف ظرف مکعبی شکل است، پس:

$$P'_{\text{کل}} = P_0 + P_2 = 71 + 3 = 74 \text{ cmHg}$$

دقت کنید! مایع، دانه اضافی بوده و نیازی بهوش نداریم.

کنکور

درون استوانه‌ای به شعاع قاعده 10 cm ، مقداری مایع به چگالی 1200 g/L می‌ریزیم و فشار در کف استوانه برابر 106 kPa می‌شود. اگر همین مقدار مایع را درون ظرفی مکعبی به ضلع 30 cm بریزیم، فشار در کف ظرف چند کیلوپاسکال می‌شود؟ ($\pi = 3$ ، $g = 10 \text{ N/kg}$ و فشار هوا 10^5 Pa فرض شود.)

(سؤال ۶۵ کنکور تهری ۱۴۰۴ (خارج از کشور))

۱۰۶ (۴)

۱۰۴ (۳)

۱۰۳ (۲)

۱۰۲ (۱)

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

فشار در عمق ۱۱۶ سانتی‌متری آب استخری برابر ۱۰۰ kPa است، فشار هوای محیط چند سانتی‌متر جیوه است؟

$$(g = 10 \text{ N/kg} \text{ و } \rho_{\text{جیوه}} = 13.6 \text{ g/cm}^3, \rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3)$$

۶۶ (۴)

۶۵ (۳)

۶۴ (۲)

۶۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

تبدیل یکای فشار از پاسکال به cmHg:

درس Box

$$P_{(\text{Pa})} = \rho_{\text{جیوه}} \times g \times h_{(\text{m})} \xrightarrow{\text{تبدیل m به cm}} P_{(\text{Pa})} = \frac{\rho_{\text{جیوه}}}{10} \times P_{(\text{cmHg})}$$

گام اول: فشار در عمق ۱۱۶ سانتی‌متری استخر ناشی از آب و فشار هواست، پس:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

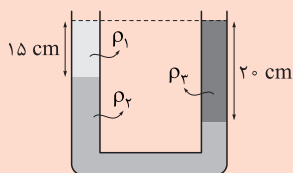
$$P = P_0 + \rho gh \Rightarrow 100 \times 10^3 = P_0 + 10 \times 10 \times 116 \times 10^{-2} \Rightarrow P_0 = 10^5 - 11600 = 88400 \text{ Pa}$$

گام دوم: فقط کافی است فشار به دست آمده بر حسب پاسکال را بر حسب سانتی‌متر جیوه بنویسیم تا تست حل شود:

$$P_{(\text{Pa})} = \frac{\rho_{\text{جیوه}}}{10} \times P_{(\text{cmHg})} \Rightarrow 88400 = \frac{13600}{10} \times P_{(\text{cmHg})} \Rightarrow P = 65 \text{ cmHg}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۴۲ در شکل زیر، سه مایع مخلوط‌نشدنی با چگالی‌های ρ_1 ، ρ_2 و ρ_3 به حال تعادل قرار دارند. اگر $\rho_2 = 2\rho_1$ باشد، نسبت $\frac{\rho_3}{\rho_1}$ چه قدر است؟



(۱) $\frac{4}{5}$

(۲) $\frac{5}{4}$

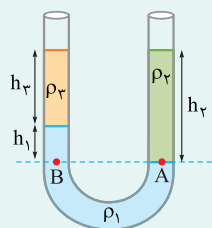
(۳) $\frac{7}{8}$

(۴) $\frac{8}{7}$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

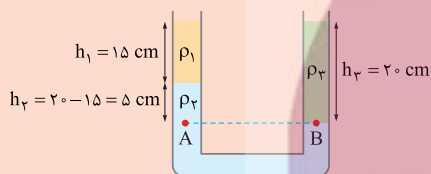
طبق اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز، اگر دو نقطه در یک مایع قرار داشته باشند و هم‌تراز باشند، فشار دو نقطه با هم برابر است. در شکل مقابل، نقاط A و B در یک مایع هم‌تراز هستند، پس هم‌فشار هم هستند، یعنی:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_2 g h_2 + P_0 = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + P_0$$

$$\Rightarrow \rho_2 h_2 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ برای دو نقطه هم‌فشار A و B داریم:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + P_0 = \rho_2 g h_2 + P_0$$

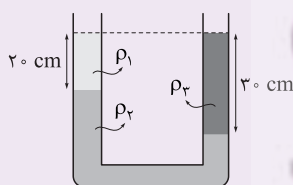
$$\Rightarrow \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = \rho_2 g h_2$$

$$\xrightarrow{\rho_2 = 2\rho_1} \rho_1 (15) + 2\rho_1 (5) = \rho_2 (20) \Rightarrow 25\rho_1 = 20\rho_2$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

در شکل زیر، سه مایع مخلوط‌نشدنی با چگالی‌های ρ_1 ، ρ_2 و ρ_3 به حال تعادل قرار دارند. اگر $\rho_2 = 2\rho_1$ باشد،

(سوال ۷۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (فارج از کشور))



(۲) $\frac{5}{4}$

(۴) $\frac{4}{3}$

نسبت $\frac{\rho_3}{\rho_1}$ چه قدر است؟

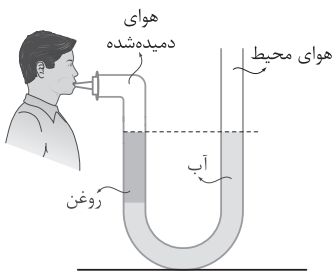
(۱) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{3}{4}$

کنکور

ایران تونل
ترشه ای برای موفقیت

در شکل زیر، شخص درون یک لوله U شکل می‌دمد. اگر فشار پیمانه‌ای هوای درون ریه این شخص برابر 1 kPa باشد، ارتفاع روغن برابر چند سانتی‌متر است؟ ($\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3$ ، $\rho_{\text{روغن}} = 0.8 \text{ g/cm}^3$ و $g = 10 \text{ N/kg}$)



۱۰ (۱)

۱۲/۵ (۲)

۲۵ (۳)

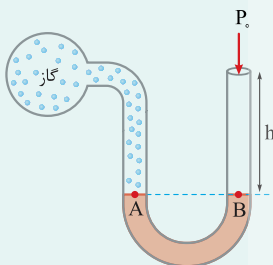
۵۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

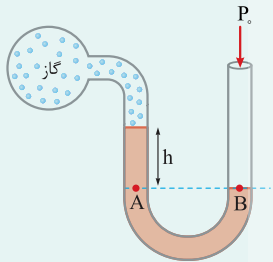
مانومتر وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری فشار گاز درون مخزن به کار می‌رود. مطابق شکل زیر، یک سر لوله U شکل مانومتر، به مخزن گاز متصل است و سر دیگر آن باز بوده در تماس با هوا است. کافی است دو نقطه هم‌تراز در آن را مشخص کنیم. در این صورت سه حالت رخ می‌دهد:

حالت ۱: ارتفاع مایع در دو لوله یکسان باشد:



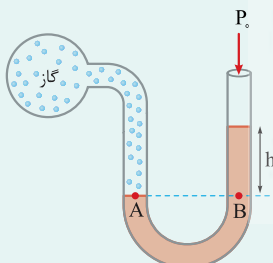
$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_0$$

حالت ۲: ارتفاع مایع در لوله متصل به مخزن بیشتر باشد:



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho gh = P_0 \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_0 - \rho gh \Rightarrow P_{\text{گاز}} < P_0$$

حالت سوم: ارتفاع مایع در لوله متصل به مخزن کم‌تر باشد:



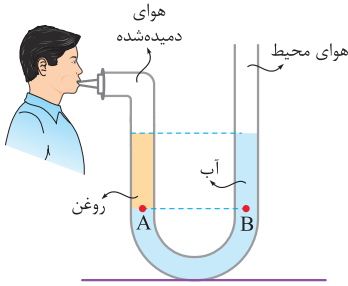
$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = \rho gh + P_0 \Rightarrow P_{\text{گاز}} > P_0$$

فشار پیمانه‌ای: تفاوت فشار مطلق و فشار هوا است و آن را با P_g نمایش می‌دهند.

$$P_g = P - P_0 = \rho gh$$

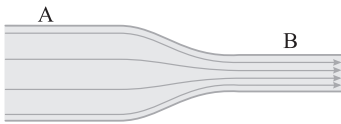
فشار مایع
فشار پیمانه‌ای (فشار مایع)

نقاط هم تراز را مشخص می کنیم، به کمک اصل هم فشاری نقاط هم تراز در یک مایع، داریم: (روغن را با اندیس O و آب را با اندیس W نمایش می دهیم.)



$$\begin{aligned}
 P_A &= P_B \Rightarrow P_{\text{روغن}} + \rho_o g h_o = P_o + \rho_w g h_w \\
 \Rightarrow P_g &= P_{\text{روغن}} - P_o = \rho_w g h_w - \rho_o g h_o \\
 \xrightarrow{h_w = h_o = h} & 1 \times 10^3 = 10^3 \times 10 \times h - 0.8 \times 10^3 \times 10 \times h \\
 \Rightarrow 1 &= 10h - 8h = 2h \Rightarrow h = \frac{1}{2} \text{ m} = 50 \text{ cm}
 \end{aligned}$$





در شکل روبه‌رو، شاره تراکم‌ناپذیری که حجم لوله را پر کرده است، در راستای افقی جاری است و شعاع مقطع لوله در قسمت A، ۲ برابر شعاع مقطع لوله در قسمت B است. کدام یک از عبارات‌های زیر درست است؟

- الف) آهنگ شارش شاره در مقطع B، ۴ برابر آهنگ شارش شاره در مقطع A است.
 ب) تندی شاره در مقطع B، ۲ برابر تندی شاره در مقطع A است.
 پ) تندی شاره در مقطع B، ۴ برابر تندی شاره در مقطع A است.
 ت) فشار شاره در مقطع B، کم‌تر از فشار شاره در مقطع A است.

(۲) الف و ت

(۴) پ و ت

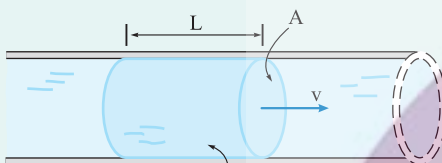
(۱) الف و ب

(۳) ب و ت

پاسخ: گزینه ۴

آهنگ شارش حجمی شاره:

برای شاره تراکم‌ناپذیر، اگر در مدت زمان Δt ، حجم معینی از شاره به اندازه $\Delta V = AL$ و با تندی v ، از مقطع A یک لوله عبور کند:



حجم این بخش شاره برابر AL است.

$$(آهنگ شارش حجمی شاره) = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{AL}{\Delta t} = Av$$

معادله پیوستگی:

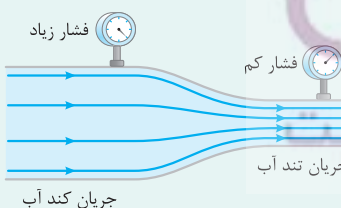
هنگامی که یک شاره از دو سطح مقطع متفاوت لوله‌ای می‌گذرد، تندی یکسانی ندارد ولی آهنگ شارش شاره در هر مقطع، یکسان است.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

در یک شاره تراکم‌ناپذیر، مقدار شاره‌ای که در مدت Δt از سطح مقطع A_1 می‌گذرد، درست برابر مقدار شاره‌ای است که در همین مدت از سطح مقطع A_2 می‌گذرد.

اصل برنولی:

برای شاره‌ای که به طور لایه‌ای و در امتداد افق حرکت می‌کند، در مسیر حرکت شاره و با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد.



جریان کند آب

جریان تند آب

گام اول: با توجه به معادله پیوستگی، آهنگ شارش حجمی شاره در هر دو مقطع A و B یکسان است؛ بنابراین عبارت «الف» نادرست است.

گام دوم: با استفاده از معادله پیوستگی، تندی شاره در دو مقطع A و B را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$A_A v_A = A_B v_B \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{A_A}{A_B} = \frac{\pi r_A^2}{\pi r_B^2} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 \xrightarrow{r_A = 2r_B} \frac{v_B}{v_A} = 2^2 = 4$$

بنابراین عبارت «ب» نادرست و عبارت «پ» درست است.

گام سوم: با توجه به اصل برنولی، از آن‌جا که تندی شاره در قسمت B بیشتر از تندی شاره در قسمت A است، بنابراین فشار

شاره در قسمت B، کم‌تر از فشار شاره در قسمت A است و عبارت «ت» درست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام یک از موارد زیر درست است؟ ۴۵

- (۱) بال‌های هواپیما طوری طراحی شده‌اند که هنگام پرواز آن، تندی هوا در زیر بال بیشتر از بالای بال است.
- (۲) در روزهایی که باد می‌وزد، ارتفاع موج‌های دریا یا اقیانوس پایین‌تر از ارتفاع میانگین می‌شود.
- (۳) در مسیر حرکت شارهای که به طور لایه‌ای و در امتداد قائم حرکت می‌کند، با افزایش تندی شار، فشار آن الزاماً کاهش می‌یابد.
- (۴) چگالی جسمی که بر سطح مایعی شناور است، از چگالی مایع کم‌تر و نیروی شناوری وارد بر این جسم با وزن آن هم‌اندازه است.

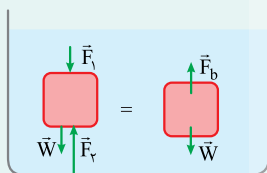
پاسخ: گزینه ۴

نیروی شناوری:

درس Box

ارشمیدس پی برد که وقتی تمام یا قسمتی از یک جسم در شارهای فرو رود، شار نیروی بالاسوی خالصی بر آن وارد می‌کند که نیروی شناوری نام دارد.

هرچه حجم قسمتی از جسم که درون شار غوطه‌ور است، بزرگ‌تر باشد، نیروی شناوری بیشتری بر آن وارد می‌شود.



$$F_b > F_g$$

$$F_b = \text{نیروی شناوری (N)}$$

$$F_b = F_g - F_g$$

وقتی جسمی به وزن W و چگالی ρ' کاملاً وارد شارهای به چگالی ρ می‌شود، سه حالت زیر ممکن است:

(الف) اگر $\rho' > \rho$ باشد، $W > F_b$ بوده و جسم رو به پایین حرکت می‌کند تا ته‌نشین شود.

(ب) اگر $\rho' = \rho$ باشد، $W = F_b$ بوده و تمام جسم درون شار غوطه‌ور می‌ماند.

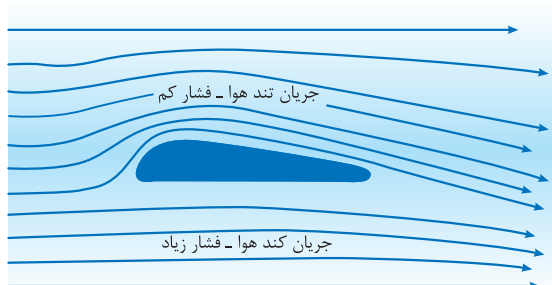
(پ) اگر $\rho' < \rho$ باشد، $W < F_b$ بوده و جسم رو به بالا حرکت می‌کند تا به سطح شار برسد.

در حالت «پ»، پس از رسیدن جسم به سطح شار و برقراری حالت تعادل، بخشی از جسم، درون شار غوطه‌ور و بخشی دیگر بیرون از شار، شناور می‌شود. F_b نیز کاهش یافته و با W برابر خواهد شد، زیرا پس از شناور شدن جسم فقط حجم قسمت غوطه‌ور در تعیین نیروی F_b نقش دارد.

درستی یا نادرستی موارد مطرح‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

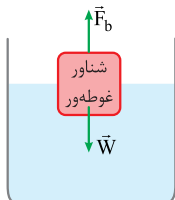
گزینه (۱): نادرست است؛ شکل زیر، قسمتی از یک بال هواپیما را نشان می‌دهد. بال‌های هواپیما طوری طراحی شده‌اند که تندی هوا در بالای بال بیشتر از زیر آن است. در نتیجه با توجه به اصل برنولی، فشار هوای بالای بال، کم‌تر از فشار هوای زیر آن است، به این ترتیب نیروی رو به بالا به بال هواپیما وارد می‌شود.



گزینه (۲): نادرست است؛ طبق اصل برنولی، وزش باد در بالای سطح آب دریا و اقیانوس، سبب کاهش فشار هوای روی سطح آب دریا و اقیانوس، نسبت به حالت معمولی (P_0) می‌شود و با ایجاد مکش رو به بالا، به افزایش ارتفاع میانگین موج‌های دریا کمک می‌کند.

گزینه (۳): نادرست است؛ برای شاره‌ای تراکم‌ناپذیر که به صورت لایه‌ای و در امتداد افقی حرکت می‌کند، با افزایش تندی شاره، فشار آن الزاماً کاهش می‌یابد، اما در این‌جا، مسیر حرکت شاره در امتداد قائم است و باید تغییر ارتفاع مایع نیز در نظر گرفته شود. (بررسی حرکت قائم شاره، خارج از سطح کتاب فیزیک دبیرستان است.)

گزینه (۴): درست است؛ با توجه به مطالب ارائه‌شده در درس باکس، باید چگالی جسم از چگالی مایع کم‌تر باشد تا بتواند بر سطح مایع شناور شود. از طرفی چون جسم ساکن است، نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و داریم:



$$F_b - W = 0 \Rightarrow F_b = W$$



درستی یا نادرستی عبارتهای زیر درباره فراوان ترین عنصر در سیاره مشتری به ترتیب چگونه است؟

هیدروژن

- دارای ۳ ایزوتوپ طبیعی و پایدار است.
- نافلز است و جزء ۸ عنصر فراوان تر سیاره زمین محسوب نمی شود.
- اولین عنصری است که پس از مهبانگ پا به عرصه جهان گذاشته است.
- در خورشید، طی واکنش های هسته ای به هلیوم تبدیل می شود.

(۲) نادرست - درست - درست - درست

(۱) درست - درست - درست - درست

(۴) درست - درست - نادرست - نادرست

(۳) نادرست - نادرست - نادرست - نادرست

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت اول، نادرست و عبارتهای دوم و سوم و چهارم درست اند.

فراوان ترین عنصر در مشتری، هیدروژن است.

بررسی عبارتهای:

عبارت اول: یک نمونه طبیعی از عنصر هیدروژن، مخلوطی از سه ایزوتوپ است.

در بین ایزوتوپ های طبیعی، ایزوتوپ های ^1H و ^2H پایدار هستند، اما ایزوتوپ ^3H ناپایدار است.

عبارت دوم: عنصر هیدروژن، یک عنصر نافلزی است. عنصر هیدروژن در بین عناصر اصلی سازنده زمین قرار ندارد:

$\text{Fe} > \text{O} > \text{Si} > \text{Mg} > \text{Ni} > \text{S} > \text{Ca} > \text{Al}$ عنصر اصلی سازنده زمین

عبارت سوم: طبق نظریه مهبانگ، چند میلیارد سال پیش، فیللی یهووی یک انفجار بسیار بزرگ رخ داده است که در نتیجه آن، انرژی

بسیار زیادی آزاد شده و در آن شرایط، ذره های زیراتمی مانند الکترون، پروتون و نوترون پدید آمده اند و پس از مدتی، عنصرهای

هیدروژن و هلیوم، چشم به جهان گشوده اند!

روند تشکیل عنصرها به صورت متصغر و مفید! به شکل زیر است:

عنصرهای سنگین تر مانند آهن و طلا → عنصرهای سبک مانند لیتیم و کربن → هلیوم → هیدروژن

عبارت چهارم: انرژی گرمایی و نور خیره کننده خورشید قائم! به دلیل تبدیل هیدروژن به هلیوم (تبدیل عنصر سبک تر به عنصر

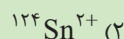
سنگین تر!) در واکنش های هسته ای است.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۴۷ با توجه به جدول زیر، در کدام گونهٔ شیمیایی، تعداد نوترون‌ها برابر با مجموع «تعداد پروتون‌ها و نصف تعداد

A 10x10 grid representing the periodic table. The grid is divided into three main regions: a light green region on the left (groups 1-10), a light blue region on the right (groups 11-18), and a light purple region in the center (groups 3-10). The elements Sr, Co, and Sn are labeled in the purple region, and Cl is labeled in the blue region.

الكترون‌ها» است؟



پاسخ: گزینہ ۲

نکته

برای همه یون‌ها، چه مثبت و چه منفی، رابطه تعداد الکترون و پروتون را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{بار یون (با در نظر گرفتن علامت)} - \text{تعداد پروتون} = \text{تعداد الکترون}$$

بررسی همه گزینه‌ها:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینۀ (۱): با توجه به جدول تناوبی، عدد اتمی استرانسیم (Sr) برابر ۳۸ است:

$${}_{\text{r}\lambda}^{90}\text{Sr} \begin{cases} e^- = \text{r}\lambda \\ n = 90 - \text{r}\lambda = \Delta\text{r} \end{cases} \Rightarrow \Delta\text{r} \neq \text{r}\lambda + \frac{\text{r}\lambda}{2} \quad \times$$

گزینہ (۲): با توجہ بہ جدول تناوبی، عدد اتمی قلع (Sn) برابر ۵۰ است:

$${}_{50}^{124}\text{Sn}^{2+} \begin{cases} e^{-} = 50 - 2 = 48 \\ n = 124 - 50 = 74 \end{cases} \Rightarrow V_f = 50 + \frac{48}{2} \checkmark$$

گزینه (۳): عدد اتمی کلر (Cl) برابر ۱۷ است:

$${}_{17}^{35}\text{Cl}^{-} \begin{cases} e^{-} = 17 + 1 = 18 \\ n = 35 - 17 = 18 \end{cases} \Rightarrow 18 \neq 17 + \frac{18}{2} \quad \times$$

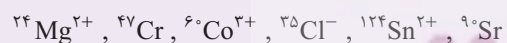
گزینه (۴): با توجه به جدول تناوبی، عدد اتمی کبالت (Co) برابر ۲۷ است:

$$\rho_{\text{V}}^{\circ} \text{Co}^{r+} \begin{cases} e^{-} = 27 - 3 = 24 \\ n = \rho_{\text{V}}^{\circ} - 27 = 33 \end{cases} \Rightarrow 33 \neq 27 + \frac{24}{2} \quad \times$$

با مراجعه به جدول دور‌های عنصرها، در کدام گونه‌های شیمیایی زیر، تعداد نوترون‌ها برابر با مجموع «تعداد پروتون‌ها

(شیمی) (۱) - تمرین‌های دوره‌ای صفحه ۶۴ کتاب درسی)

و نصف تعداد الکترون‌ها» است؟



ایران توشه

کدام موارد زیر، درباره اورانیم (^{235}U) درست است؟

الف) ایزوتوپی از آن با ۱۴۳ نوترون، فراوانترین ایزوتوپ آن است.

ب) معروفترین عنصر پرتوزای طبیعی است.

پ) غنی‌سازی ایزوتوپی آن، یکی از مراحل مهم چرخه تولید سوخت هسته‌ای است.

ت) نخستین عنصری است که توسط انسان در راکتورهای هسته‌ای ساخته شد.

(۱) ب - پ

(۳) الف - ب

(۲) الف - ت

(۴) پ - ت

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

الف) عدد جرمی ایزوتوپی از اورانیم با ۱۴۳ نوترون برابر است با:

$$A = Z + n \Rightarrow A = 92 + 143 = 235$$

این ایزوتوپ، ^{235}U بوده که فراوانی آن در مخلوط طبیعی از ۷/۰ درصد کم‌تر است.

ب) درسته! اورانیم عنصری طبیعی و پرتوزا است و شناخته‌شده‌ترین عنصر پرتوزا به حساب می‌آید.

پ) از ایزوتوپ ^{235}U ، اغلب به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی استفاده می‌شود، اما فراوانی این ایزوتوپ در مخلوط طبیعی

ایزوتوپ‌های اورانیم، کم است؛ به همین دلیلی فرایند غنی‌سازی ایزوتوپی به منظور افزایش مقدار این ایزوتوپ انجام می‌شود. این

فرایند یکی از مراحل مهم چرخه تولید سوخت هسته‌ای است.

ت) تکنسیم (^{99}Tc) نخستین عنصری بود که در واکنشگاه (راکتور) هسته‌ای ساخته شد.

کنکور

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

• اورانیم ۲۳۵، فراوانترین ایزوتوپ اورانیم است.

• اورانیم، معروفترین عنصر پرتوزای طبیعی است.

• از اورانیم ۲۳۵، در واکنشگاه‌های اتمی استفاده می‌شود.

• غنی‌سازی ایزوتوپی، یکی از مراحل مهم چرخه تولید سوخت هسته‌ای می‌باشد.

۴ (۴)

۳ (۳)

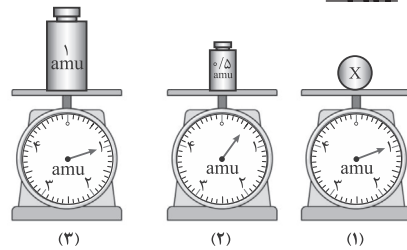
۲ (۲)

۱ (۱)

(سوال ۷۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت اول)

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

با توجه به شکل‌های زیر، کدام مورد نادرست است؟ (اعداد تقریبی هستند.)



(۱) ترازوی (۱) را می‌توان مربوط به ذره زیراتمی با نماد ${}^1_0\text{n}$ دانست.

(۲) X می‌تواند سنگین‌ترین ایزوتوپ طبیعی و پایدار هیدروژن باشد.

(۳) اگر هر اتم ${}^{12}_6\text{C}$ را به ۲۴ قسمت تقسیم کنیم، ترازوی (۲) جرم هر یک از این قسمت‌ها را نشان می‌دهد.

(۴) جرم فراوان‌ترین ایزوتوپ طبیعی منیزیم، حدود ۱۶ برابر مجموع جرم ترازوهای (۱) و (۲) است.



پاسخ: گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): درسته! جرم نوترون حدود ۱ amu است.

در جدول زیر، برخی از ویژگی‌های الکترون، پروتون و نوترون آورده شده است:

نام ذره	نماد	بار الکتریکی نسبی	جرم amu
الکترون	${}^0_{-1}\text{e}$	-۱	۰/۰۰۰۵
پروتون	${}^1_{+1}\text{p}$	+۱	۱/۰۰۷۳
نوترون	${}^1_0\text{n}$	۰	۱/۰۰۸۷

گزینه (۲): ایزوتوپ مورد نظر ${}^1_1\text{H}$ است. جرم اتمی ${}^1_1\text{H}$ به تقریب برابر با ۲ amu یا ۲ u است.

گزینه (۳): اتم کربن-۱۲ (${}^{12}_6\text{C}$)، تنها اتمی است که از نظر عددی، مقدار جرم اتمی آن دقیقاً با عدد جرمی‌اش برابر است؛ بنابراین

اگر هر اتم ${}^{12}_6\text{C}$ را به ۲۴ قسمت تقسیم کنیم، ترازوی (۲) جرم هر یک از قسمت‌ها را ۰/۵ amu نشان می‌دهد.

گزینه (۴): جرم اتمی فراوان‌ترین ایزوتوپ طبیعی منیزیم (${}^{24}_{12}\text{Mg}$) به تقریب برابر ۲۴ است.

$$\text{جرم اتمی فراوان‌ترین ایزوتوپ طبیعی منیزیم} = \frac{24}{(1 + 0/5)_{1/5}} = 16$$

ایران توانا
توشه‌ای برای موفقیت

۵۰

عنصر A دارای سه ایزوتوپ ^{84}A ، ^{86}A و ^{88}A است. اگر جرم اتمی میانگین A برابر $86/4 \text{ amu}$ باشد، کدام گزینه به ترتیب می‌تواند مربوط به درصد فراوانی این ایزوتوپ‌ها از سبک به سنگین باشد؟ (جرم اتمی ایزوتوپ‌ها را معادل با عدد جرمی آن‌ها در نظر بگیرید.)

$$(۲) ۰.۴۰\%, ۰.۴۰\%, ۰.۲۰\%$$

$$(۱) ۰.۳۰\%, ۰.۵۰\%, ۰.۲۰\%$$

$$(۴) ۰.۴۵\%, ۰.۲۵\%, ۰.۳۰\%$$

$$(۳) ۰.۳۰\%, ۰.۴۰\%, ۰.۳۰\%$$

پاسخ: گزینه ۲

جرم اتمی میانگین به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M = \underbrace{M_1}_{\text{جرم اتمی ایزوتوپ سبکتر}} + \frac{F_2}{F_{\text{کل}}} \underbrace{(M_2 - M_1)}_{\text{تفاوت جرم اتمی ایزوتوپ دوم با ایزوتوپ سبکتر}} + \frac{F_3}{F_{\text{کل}}} \underbrace{(M_3 - M_1)}_{\text{تفاوت جرم اتمی ایزوتوپ سوم با ایزوتوپ سبکتر}} + \dots$$



با توجه به این که فراوانی هر ۳ ایزوتوپ مجهول است و با یک معادله نمی‌توان آن‌ها را به دست آورد، باید یکی یکی گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینه (۱):

$$M = 84 + \frac{50}{100} (86 - 84) + \frac{30}{100} (88 - 84) = 86/2 \quad \times$$

گزینه (۲):

$$M = 84 + \frac{40}{100} (86 - 84) + \frac{40}{100} (88 - 84) = 86/4 \quad \checkmark$$

گزینه (۳):

$$M = 84 + \frac{40}{100} (86 - 84) + \frac{30}{100} (88 - 84) = 86 \quad \times$$

گزینه (۴):

$$M = 84 + \frac{25}{100} (86 - 84) + \frac{45}{100} (88 - 84) = 86/3 \quad \times$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر درصد فراوانی ایزوتوپ‌های ^{88}A و ^{86}A را به ترتیب برابر a و b در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$86/4 = 84 + \frac{a}{100} \times 2 + \frac{b}{100} \times 4 \Rightarrow 240 = 2a + 4b \Rightarrow a + 2b = 120$$

په‌جور دیگه

فقط با اعداد گزینه (۲)، این رابطه برقرار می‌شود.

گول نخوری

امیدواریم گول نخورده باشین و بدون محاسبه، گزینه (۱) رو انتخاب نکرده باشین!

برای عنصرهایی با دو ایزوتوپ، جرم اتمی میانگین همواره به جرم اتمی ایزوتوبی نزدیک‌تر است که درصد فراوانی بیشتری دارد؛ مثلاً لیتیم دو ایزوتوپ طبیعی ^6Li و ^7Li دارد که درصد فراوانی ^7Li بیشتر است؛ به همین دلیل جرم اتمی میانگین لیتیم ($6/94 \text{ amu}$) به جرم اتمی ایزوتوپ ^7Li نزدیک‌تر است.

ولی *هواستون باشه* که برای عنصرهایی با ۳ ایزوتوپ به بالا، این نکته لزوماً برقرار نیست؛ یعنی جرم اتمی میانگین همواره به جرم ایزوتوبی که درصد فراوانی بیشتری دارد، نزدیک‌تر نیست، مثلاً در این‌جا دیدیم که با این که جرم اتمی میانگین به جرم اتمی ایزوتوپ ^{86}A نزدیک‌تر است، اما درصد فراوانی این ایزوتوپ با ^{88}A برابر است.

این نکته برای عنصرهایی با چند ایزوتوپ، زمانی برقرار است که درصد فراوانی یکی از ایزوتوپ‌ها، به طور فاحشی از دیگر ایزوتوپ‌ها بیشتر باشد؛ مثلاً نئون دارای ۳ ایزوتوپ ^{20}Ne (با فراوانی $90/5\%$)، ^{21}Ne (با فراوانی $0/27\%$) و ^{22}Ne (با فراوانی $9/23\%$) است و چون فراوانی ایزوتوپ ^{20}Ne خیلی بیشتر از دو ایزوتوپ دیگر است، جرم اتمی میانگین نئون ($20/18 \text{ amu}$) به جرم اتمی این ایزوتوپ نزدیک‌تر می‌باشد.

یک نوع آلیاژ، شامل ۹۰ درصد جرمی مس و ۱۰ درصد جرمی قلع است. با $۲/۷$ کیلوگرم مس، چند کیلوگرم از این آلیاژ را می‌توان تهیه کرد و شمار مول‌های قلع مورد نیاز برای تهیه این مقدار آلیاژ به تقریب کدام است؟
($\text{Sn} = ۱۱۹$, $\text{Cu} = ۶۴: \text{g.mol}^{-1}$)

$$۳/۲ - ۵ (۲)$$

$$۲/۵ - ۵ (۱)$$

$$۳/۲ - ۳ (۴)$$

$$۲/۵ - ۳ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به درصد جرمی فلز مس (Cu) در آلیاژ، جرم آلیاژی که با استفاده از $۲/۷$ کیلوگرم فلز مس می‌توان تهیه کرد را محاسبه می‌کنیم:

$$۲/۷ \text{ kg Cu} \times \frac{۱۰۰۰ \text{ g}}{۱ \text{ kg}} \times \frac{۱۰۰ \text{ g آلیاژ}}{۹۰ \text{ g Cu}} \times \frac{۱ \text{ kg}}{۱۰۰۰ \text{ g}} = ۳ \text{ kg آلیاژ}$$

گام دوم: با توجه به درصد جرمی فلز قلع (Sn) در آلیاژ، شمار مول‌های این فلز را در ۳ کیلوگرم از آلیاژ مورد نظر حساب می‌کنیم:

$$۳ \text{ kg آلیاژ} \times \frac{۱۰۰۰ \text{ g}}{۱ \text{ kg}} \times \frac{۱۰ \text{ g Sn}}{۱۰۰ \text{ g آلیاژ}} \times \frac{۱ \text{ mol Sn}}{۱۱۹ \text{ g Sn}} \approx ۲/۵ \text{ mol Sn}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16: g.mol^{-1}$)

- (الف) جرم اتم هیدروژن در 100 گرم آب با جرم اتم هیدروژن در 300 گرم HCN برابر است.
 (ب) در هر مول از یون پایدار نیتروژن، $6/02 \times 10^{24}$ الکترون وجود دارد.
 (پ) جرم 5 مول CO_2 از جرم $3/01 \times 10^{24}$ مولکول N_2O بیشتر است.
 (ت) اگر جرم مولی آسپرین ($C_9H_8O_x$) برابر $180 g.mol^{-1}$ باشد، آسپرین یک مولکول 20 اتمی است.

- (۱) الف - ب
 (۲) پ - ت
 (۳) الف - ت
 (۴) ب - پ

پاسخ: گزینه ۱

عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

(الف) برای مقایسه جرم اتم‌های هیدروژن (H) موجود در 100 گرم آب (H_2O) و 300 گرم HCN ، کافی است شمار مول‌های H را در آن‌ها مقایسه کنیم:

$$100 g H_2O \times \frac{1 \text{ mol } H_2O}{18 g H_2O} \times \frac{2 \text{ mol } H}{1 \text{ mol } H_2O} = \frac{100}{9} \text{ mol } H$$

$$300 g HCN \times \frac{1 \text{ mol } HCN}{27 g HCN} \times \frac{1 \text{ mol } H}{1 \text{ mol } HCN} = \frac{100}{9} \text{ mol } H$$

با توجه به این که شمار مول‌های H موجود در 100 گرم H_2O و 300 گرم HCN برابر است، می‌توان نتیجه گرفت که جرم اتم‌های H نیز در آن‌ها یکسان است.

(ب) یون $^{14}_7N^{3-}$ به آرایش الکترونی گاز نجیب نئون (Ne) می‌رسد و به همین دلیل دارای 10 الکترون است؛ بنابراین شمار الکترون‌های موجود در هر مول یون $^{14}_7N^{3-}$ برابر است با:

$$1 \text{ mol } ^{14}_7N^{3-} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ یون } ^{14}_7N^{3-}}{1 \text{ mol } ^{14}_7N^{3-}} \times \frac{10 e^-}{1 \text{ یون } ^{14}_7N^{3-}} = 6/02 \times 10^{24} e^-$$

(پ)

$$5 \text{ mol } CO_2 \times \frac{44 g CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 220 g CO_2$$

$$3/01 \times 10^{24} \text{ مولکول } N_2O \times \frac{1 \text{ mol } N_2O}{6/02 \times 10^{23} \text{ مولکول } N_2O} \times \frac{44 g N_2O}{1 \text{ mol } N_2O} = 220 g N_2O$$

بنابراین می‌توان گفت که جرم 5 مول CO_2 و $3/01 \times 10^{24}$ مولکول N_2O ، با هم برابر است.

$$CO_2 \text{ جرم مولی} = 12 + 2(16) = 44 g.mol^{-1}$$

$$N_2O \text{ جرم مولی} = 12(14) + 16 = 44 g.mol^{-1}$$

از آن‌جا که جرم مولی این دو ماده یکسان است؛ بنابراین جرم شمار مول‌های یکسان از آن‌ها، برابر خواهد بود. با توجه به این که $3/01 \times 10^{24}$ مولکول N_2O معادل 5 مول از آن است؛ بنابراین می‌توان گفت که جرم 5 مول CO_2 و $3/01 \times 10^{24}$ مولکول N_2O ، با هم برابر است.

(ت) با توجه به جرم مولی آسپرین، مقدار x در فرمول مولکولی آن را حساب می‌کنیم:

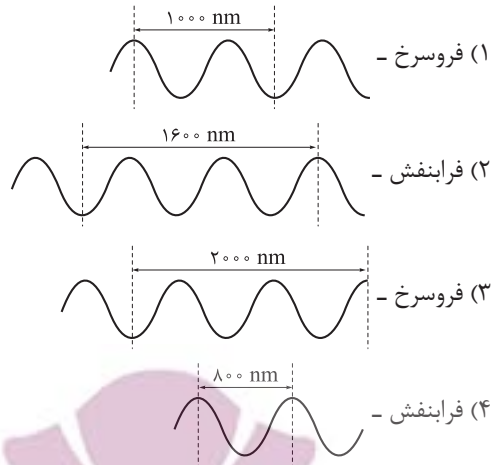
$$9(12) + 8(1) + x(16) = 180 g.mol^{-1} \Rightarrow 16x = 64 \Rightarrow x = 4$$

بنابراین فرمول مولکولی آسپرین به صورت $C_9H_8O_4$ بوده و آسپرین یک مولکول 21 اتمی است!

پاسخ خیلی تشریحی ✓

به‌جور دیگر

پرتویی با طول موج 800 nm در کدام محدوده طیف الکترومغناطیسی قرار دارد و کدام شکل را می توان به آن نسبت داد؟

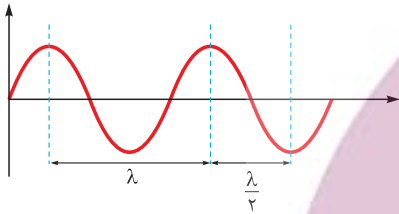


پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

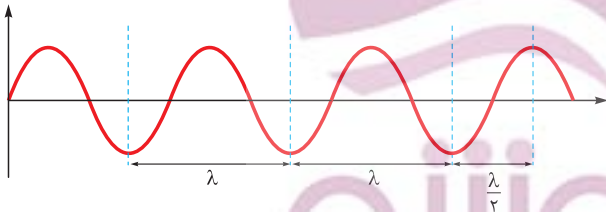
طول موج نور مرئی بین 400 تا 700 نانومتر است. طول موج پرتوهای فروسرخ بلندتر از پرتوهای موجود در گستره مرئی است. برای بررسی شکل ها باید بدانیم که طول موج، معادل با فاصله دو قله متوالی یا دو دره متوالی است.

گزینه (۱):



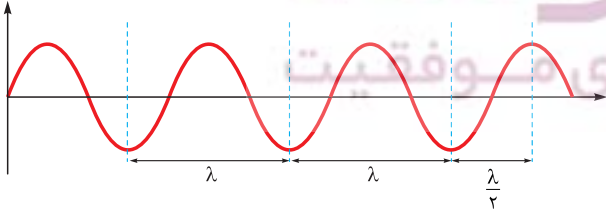
$$\lambda + \frac{\lambda}{2} = 1000 \text{ nm} \Rightarrow \frac{3}{2}\lambda = 1000 \text{ nm} \Rightarrow \lambda = \frac{2000}{3} \approx 667 \text{ nm} \times$$

گزینه (۲):



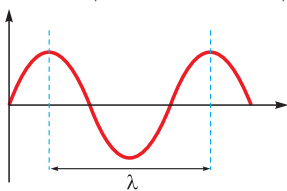
$$\lambda + \lambda + \frac{\lambda}{2} = 1600 \text{ nm} \Rightarrow \frac{5}{2}\lambda = 1600 \text{ nm} \Rightarrow \lambda = 640 \text{ nm} \times$$

گزینه (۳):



$$\lambda + \lambda + \frac{\lambda}{2} = 2000 \text{ nm} \Rightarrow \frac{5}{2}\lambda = 2000 \text{ nm} \Rightarrow \lambda = 800 \text{ nm} \checkmark$$

گزینه (۴):



$$\lambda = 800 \text{ nm} \checkmark$$

با توجه به شکل داده شده که مربوط به طیف نشری خطی هیدروژن در گستره مرئی است، کدام موارد از مطالب داده شده درست است؟

(۱) (۲) (۳) (۴)

الف) نوار شماره (۱) دارای بیشترین انرژی است.

ب) نوار شماره (۳) حاصل انتقال الکترون از لایه پنجم به حالت پایه اتم هیدروژن است.

پ) پرتو مربوط به نوار (۴) بنفش رنگ بوده و نسبت به پرتو مربوط به نوار (۲)، انحراف بیشتری در عبور از منشور دارد.

ت) طول موج ۷۵ درصد از نوارهای نشان داده شده، کوتاه تر از ۵۰۰ nm است.

(۱) الف - ب
(۲) پ - ت
(۳) ب - پ
(۴) الف - ت

پاسخ: گزینه ۲

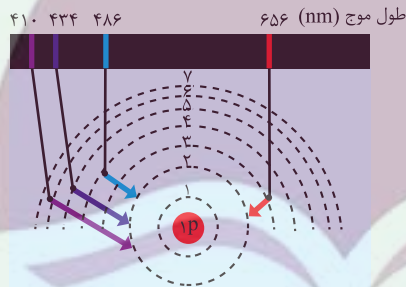
عبارت های «پ» و «ت» درست اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نکته

در گستره مرئی طیف نشری خطی اتم های هیدروژن، چهار خط یا نوار رنگی وجود دارد. این خطوط مربوط به انتقال الکترون از لایه های بالاتر (۶، ۵، ۴، ۳) به لایه دوم ($n = 2$) هستند. ویژگی ها و چگونگی تشکیل این خطوط این پوریاست:

رنگ نوار	طول موج (nm)	چگونگی تشکیل
بنفش	۴۱۰	مربوط به انتقال الکترون از $n = 6$ به $n = 2$
نیلی	۴۳۴	مربوط به انتقال الکترون از $n = 5$ به $n = 2$
آبی	۴۸۶	مربوط به انتقال الکترون از $n = 4$ به $n = 2$
سرخ	۶۵۶	مربوط به انتقال الکترون از $n = 3$ به $n = 2$



بررسی عبارت ها:

الف) رنگ نوار شماره (۱)، سرخ است و دارای کمترین انرژی است.

ب) نوار شماره (۳) مربوط به انتقال الکترون از لایه پنجم به لایه دوم است.

پ) رنگ نوار شماره (۴) و (۲) به ترتیب بنفش و آبی است. انحراف رنگ بنفش از آبی بیشتر است (انرژی با انحراف رابطه مستقیم دارد).

هر چه طول موج یک نور مرئی کوتاه تر باشد یا انرژی آن بیشتر باشد، میزان انحراف آن پس از عبور از منشورها بیشتر است: انرژی پرتو $\propto$ میزان شکست و انحراف پرتو

ت) از بین ۴ پرتو نشان داده شده: بنفش (۴۱۰ nm)، نیلی (۴۳۴ nm) و آبی (۴۸۶ nm)، طول موجی کم تر از ۵۰۰ nm دارند؛ یعنی ۳ پرتو از ۴ پرتو (۷۵٪).

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) هر زیرلایه، با اعداد کوانتومی n و l مشخص می‌شود.
 (۲) از رابطه $a = 4l + 2$ ، گنجایش الکترونی هر زیرلایه (a) را می‌توان معین کرد.
 (۳) نسبت حداکثر گنجایش الکترونی یک لایه با عدد کوانتومی اصلی n به شمار زیرلایه‌های الکترونی موجود در آن، برابر n است.
 (۴) مجموع عدد کوانتومی فرعی زیرلایه‌های موجود در لایه الکترونی چهارم برابر ۶ است.

پاسخ: گزینه ۳

گزینه (۳) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): هر لایه الکترونی، خود از یک یا چند زیرلایه ساخته شده است. در واقع زیرلایه‌ها، بخش‌های کوچک‌تر یک لایه الکترونی هستند. در مدل کوانتومی اتم، برای مشخص کردن نوع زیرلایه‌ها، از عدد کوانتومی فرعی (l) استفاده می‌شود و به ازای هر عدد کوانتومی فرعی (l)، یک نماد حرفی خاص به زیرلایه مربوطه اختصاص داده شده است. برای درک بهتر موضوع جدول زیر را ببینید:

۴	۳	۲	۱	۰	عدد کوانتومی فرعی (l)
g	f	d	p	s	نماد حرف زیرلایه

گزینه (۲): یک زیرلایه با عدد کوانتومی فرعی l ، حداکثر گنجایش $4l + 2$ الکترون را دارد:

$$4l + 2 = \text{حداکثر گنجایش الکترونی در یک زیرلایه}$$

f	d	p	s	نماد زیرلایه
۳	۲	۱	۰	عدد کوانتومی فرعی (l)
$4(3) + 2 = 14$	$4(2) + 2 = 10$	$4(1) + 2 = 6$	$4(0) + 2 = 2$	حداکثر گنجایش الکترونی زیرلایه ($4l + 2$)

گزینه (۳): یک لایه الکترونی با عدد کوانتومی اصلی n ، حداکثر گنجایش $2n^2$ الکترون را دارد. هر لایه الکترونی با عدد کوانتومی اصلی n ، n تا زیرلایه دارد:

$$\frac{\text{حداکثر گنجایش الکترونی یک لایه}}{\text{شمار زیرلایه‌های الکترونی موجود در آن}} = \frac{2n^2}{n} = 2n$$

گزینه (۴): در لایه چهارم، ۴ زیرلایه با $l = 0$ تا $l = 3$ وجود دارد ($4s, 4p, 4d, 4f$).

$$6 = 0 + 1 + 2 + 3 = \text{مجموع عدد کوانتومی فرعی زیرلایه‌های موجود در لایه الکترونی چهارم}$$

ایران تونش
توشه‌ای برای موفقیت

۵۶ شمار الکترون‌های ظرفیتی کدام اتم، با شماره دوره آن در جدول تناوبی برابر است؟

۱۵ B (۲)

۱۲ A (۱)

۳۴ E (۴)

۲۲ M (۳)

پاسخ: گزینه ۳

نکته

با توجه به آرایش الکترونی اتم‌ها، می‌توان شمار الکترون‌های ظرفیتی آن‌ها و موقعیت آن‌ها در جدول دوره‌ای را پیدا کرد.

نوع دسته	آرایش الکترون‌های ظرفیتی	تعداد الکترون‌های ظرفیتی	رابطه شماره گروه و تعداد الکترون‌های ظرفیتی
s (گروه‌های ۱ و ۲ و هلیوم)	ns	توان ns (تعداد الکترون‌های بیرونی‌ترین لایه الکترونی)	تعداد الکترون‌های ظرفیتی = شماره گروه (به جز هلیوم)
d (گروه‌های ۳ تا ۱۰)	(n-1)d ns	مجموع توان ns و (n-1)d (تعداد الکترون‌های دو زیرلایه آخر)	تعداد الکترون‌های ظرفیتی = شماره گروه
p (گروه‌های ۱۳ تا ۱۸)	ns np	مجموع توان ns و np (تعداد الکترون‌های بیرونی‌ترین لایه الکترونی)	تعداد الکترون‌های ظرفیتی + ۱۰ = شماره گروه

در همه دسته‌ها، شماره دوره، برابر با بزرگ‌ترین ضریب (n) در آرایش الکترونی است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱):

$${}_{12}\text{A} : [{}_{10}\text{Ne}] 3s^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{شماره دوره} = 3 \\ \text{شمار الکترون‌های ظرفیتی} = 2 \end{cases}$$

گزینه (۲):

$${}_{15}\text{B} : [{}_{10}\text{Ne}] 3s^2 3p^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{شماره دوره} = 3 \\ \text{شمار الکترون‌های ظرفیتی} = 5 \end{cases}$$

گزینه (۳):

$${}_{22}\text{M} : [{}_{18}\text{Ar}] 3d^2 4s^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{شماره دوره} = 4 \\ \text{شمار الکترون‌های ظرفیتی} = 4 \end{cases}$$

گزینه (۴):

$${}_{34}\text{E} : [{}_{18}\text{Ar}] 3d^1 4s^2 4p^4 \Rightarrow \begin{cases} \text{شماره دوره} = 4 \\ \text{شمار الکترون‌های ظرفیتی} = 6 \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

کدام مورد درست است؟ ۵۷

(۱) در اتم یازدهمین عنصر دوره چهارم جدول تناوبی، نسبت شمار الکترون‌های دارای $l = 0$ به شمار الکترون‌های دارای $l = 2$ ، برابر $8/0$ است.

(۲) شمار زیرلایه‌های الکترونی پرشده در اتم عنصر A که در دوره ۴ و گروه ۶ قرار دارد، با همین شمار در اتم عنصر B متعلق به دوره ۴ و گروه ۱۲، برابر است.

(۳) در اتم عنصر M، شمار الکترون‌های لایه سوم، $2/5$ برابر شمار الکترون‌های لایه چهارم است.

(۴) اختلاف عدد اتمی دو عنصری که زیرلایه با $l = 2$ در اتم آن‌ها برای اولین بار، پر و نیمه‌پر می‌شود، برابر ۵ است.

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): عدد اتمی عنصرهای دوره چهارم از ۱۹ تا ۳۶ است؛ بنابراین عدد اتمی یازدهمین عنصر دوره چهارم برابر ۲۹ است:

$${}_{29}\text{Cu} : [\text{Ar}] 3d^1 4s^1 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌ها با } l=0}{\text{شمار الکترون‌ها با } l=2} = \frac{1(1s^2 2s^2 3s^2 4s^1)}{10(3d^1)} = 0/7$$

گزینه (۲):

۵ زیرلایه $\Rightarrow 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 \Rightarrow$ زیرلایه‌های پرشده $\Rightarrow 3d^5 4s^1 \Rightarrow$ دوره ۴، گروه ۶

۷ زیرلایه $\Rightarrow 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^1 4s^2 \Rightarrow$ زیرلایه‌های پرشده $\Rightarrow 3d^1 4s^2 \Rightarrow$ دوره ۴، گروه ۱۲

گزینه (۳):

$${}_{35}\text{M} : [\text{Ar}] 3d^1 4s^2 4p^5 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌ها با } n=3}{\text{شمار الکترون‌ها با } n=4} = \frac{18(3s^2 3p^6 3d^1)}{7(4s^2 4p^5)} \neq 2/5$$

گزینه (۴): زیرلایه با عدد کوانتومی $l = 2$ ، همان زیرلایه d است که حداکثر گنجایش 10 الکترون را دارد:

$${}_{29}\text{Cu} : [\text{Ar}] 3d^1 4s^1 \Rightarrow 29 - 24 = 5$$

$${}_{24}\text{Cr} : [\text{Ar}] 3d^5 4s^1 \Rightarrow$$

نخستین اتم با زیرلایه ۳d نیمه‌پر

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

اگر مجموع $(n + l)$ الکترون‌های ظرفیتی اتم A از دسته p دوره چهارم جدول تناوبی برابر ۲۸ باشد، آرایش الکترون - نقطه‌ای A به کدام صورت است؟

- (۱) $\dot{\ddot{A}}:$ (۲) $\dot{\ddot{A}}:$ (۳) $\cdot\ddot{\ddot{A}}:$ (۴) $\cdot\ddot{\ddot{A}}:$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

آرایش الکترونی عنصرهای دسته p به $ns^2 np^x$ ختم می‌شود:

$$4s^2 4p^x \Rightarrow (n + l) = \underbrace{2(4 + 0)}_{4s} + \underbrace{x(4 + 1)}_{4p} = 28 \Rightarrow 8 + 5x = 28 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$$

آرایش الکترونی اتم A به $4s^2 4p^4$ ختم می‌شود، یعنی دارای ۶ الکترون ظرفیتی است و آرایش الکترون - نقطه‌ای آن به صورت $\cdot\ddot{\ddot{A}}:$ می‌باشد.



- (۱) از میان عنصرهای جدول دوره‌ای، هفت عنصر به صورت دواتمی در طبیعت یافت می‌شوند.
 (۲) همه اتم‌های نافلز با گرفتن الکترون، به آرایش گاز نجیب می‌رسند.
 (۳) نماد شیمیایی آنیون نافلز X که در آرایش الکترون - نقطه‌ای اتم آن یک جفت نقطه وجود دارد، به صورت X^- است.
 (۴) منیزیم کلرید یک ترکیب یونی سه‌تایی است؛ زیرا در هر واحد فرمولی آن، ۳ یون وجود دارد.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

همه نافلزها با گرفتن الکترون، به آرایش گاز نجیب می‌رسند؛ مثلاً اکسیژن با گرفتن الکترون از سدیم (تشکیل ترکیب یونی سدیم اکسید)، به آرایش گاز نجیب نئون (Ne) می‌رسد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): هفت عنصر (H, N, O, F, Cl, Br, I)، در دما و فشار اتاق به شکل مولکول‌های دواتمی وجود دارند اما دقت کنید که فقط N_2 و O_2 در طبیعت یافت می‌شوند.

گزینه (۳): آرایش الکترون - نقطه‌ای نافلز X به صورت $\ddot{X} \cdot$ است و یون سه بار منفی (X^{3-}) تشکیل می‌دهد.

گزینه (۴): منیزیم کلرید ($MgCl_2$) یک ترکیب یونی دواتمی است، زیرا فقط از دو عنصر ساخته شده است. ملاک تشکیل ترکیب‌های یونی به دواتمی یا چندتایی، تعداد عنصرهای سازنده آن‌ها است و نه تعداد یون‌ها در فرمول شیمیایی!

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل کدام مورد، ۳ برابر نسبت شمار کاتیون(ها) به آنیون(ها) در فرمول

شیمیایی آلومینیم اکسید است؟

(۲) کلسیم نیتريد

(۱) سدیم سولفيد

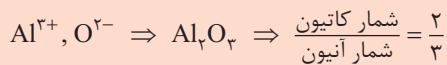
(۴) ليتيم كلريد

(۳) پتاسيم فلوئوريد

پاسخ: گزینه ۱

گام اول: نسبت شمار کاتیون به آنیون در آلومینیم اکسید را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم: چک می‌کنیم که در تشکیل کدام ترکیب، شمار الکترون‌های مبادله‌شده، ۳ برابر نسبت شمار کاتیون به آنیون در آلومینیم اکسید است:

$$\text{شمار الکترون‌های مبادله‌شده} = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

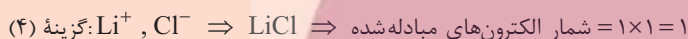
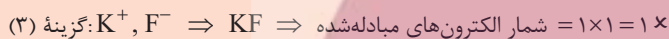
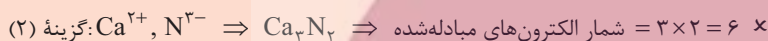
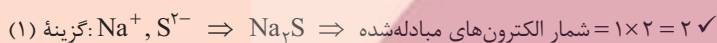
شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل ترکیب‌های یونی را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

نکته

تعداد آنیون $\times$ قدرمطلق بار آنیون = تعداد کاتیون $\times$ بار کاتیون = شمار الکترون‌های مبادله‌شده

به عنوان نمونه، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل هر واحد فرمولی از Na_2O برابر با $2 \times 2 = 4$ است.

بررسی گزینه‌ها:



شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل کدام مورد، ۳ برابر نسبت شمار کاتیون(ها) به آنیون(ها) در فرمول شیمیایی

کنکور

(سؤال ۷۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

آلومینیم سولفات است؟

(۲) کبالت (III) اکسید

(۱) سدیم کربنات

(۴) ليتيم فرمات

(۳) پتاسيم استات

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

دانلود رایگان تمام
آزمون‌های آزمایشی
در کانال تلگرام ما :

آزمون‌های آزمایشی

 t.me/Azmoonha_Azmayeshi

- ✓ دسترسی سریع
- ✓ رایگان و دائمی
- ✓ معتبر و جامع
- ✓ ویژه کنکور سراسری

آزمون
مخصوص
تمام
پایه‌ها و
تمام
رشته‌ها

موفقیت
+ برنامه
تلاش



 t.me/Azmoonha_Azmayeshi 

پایه یازدهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	مازیار احمدی ناو - کوروش اسلامی - فرشاد حسنزاده - عادل حسینی - بابک سادات - علی شهبازی - مصطفی کرمی محمد گودرزی - سروش موئینی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه	کیوان صارمی - حمید گلزاری
آمار و احتمال	سروش موئینی
فیزیک	علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	مهدی براتی - محمد قهرمانی نژاد - هادی عبادی - یاسر عبداللهی - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مستعمل درس	گزینشگر	مؤلف پاسخنامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضلزاده سروش موئینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر سهند محمدکریم نژاد ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	سعید قندچی	سروش موئینی	سروش موئینی	سید عباس حسینی	مریم نظری منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جعفری آثار مریم گلی حسنلو	علیرضا جباری هادی نجفی	آیدین طهماسقلی زاده مدیا عیدی امیر محمودی انزلی سعید محبی فاطمه نجفی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	صدرا عبادی یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده پارسا فراهانی محمد مهدی کریمیان	محمدتقی جهانیان علیرضا فرضعلی هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

حسابان یازدهم

۶۱

در دنباله حسابی ...، ۵، ۲، -۱، حداقل چند جمله ابتدایی آن را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۵۵۰ بیشتر شود؟

۲۳ (۴)

۲۲ (۳)

۲۱ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

مجموع n جمله اول دنباله حسابی a_n با قدرنسبت d از روابط زیر به دست می آید:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

گام اول: جمله اول دنباله داده شده ۱- و قدرنسبت آن ۳ است؛ بنابراین طبق روابط درس باکس داریم:

$$S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n$$

گام دوم: باید نامعادله $S_n > 550$ را حل کنیم:

$$\Rightarrow \frac{3n^2 - 5n}{2} > 550 \Rightarrow 3n^2 - 5n - 1100 > 0$$

با تجزیه عبارت $3n^2 - 5n - 1100$ به کمک روش روسی داریم:

$$(n-20)(3n+55) > 0 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n > 20 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq 21$$

پس باید حداقل ۲۱ جمله اول را جمع کنیم تا حاصل از ۵۵۰ بیشتر شود.

بعد از به دست آوردن S_n ، با استفاده از گزینه‌ها داریم:

$$S_{20} = \frac{20 \times 55}{2} = 550$$

یعنی مجموع ۲۰ جمله اول برابر ۵۵۰ شده است و چون ما بیشتر از ۵۵۰ را می‌خواهیم باید حداقل ۲۱ جمله را جمع کنیم.

به‌جور دیگر

در دنباله حسابی ...، ۵، ۸، ۱۱، حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

(حسابان (۱) - تمرین ۳ صفحه ۶ کتاب درسی)

کتاب
درسی

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۶۲ مجموع ده جمله اول دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = \frac{1}{2^n} + (-1)^n$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{2^{10}}$

(۱) $-\frac{1}{2^{10}}$

(۴) $1 - \frac{1}{2^{10}}$

(۳) $1 + \frac{1}{2^{10}}$

پاسخ: گزینه ۴

مجموع دو دنباله هندسی رو می‌بینی.

Hint

مجموع n جمله اول دنباله هندسی a_n با قدرنسبت q از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

درس Box

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{qa_n - a_1}{q - 1}$$

اگر فرض کنیم $b_n = (\frac{1}{2})^n$ و $c_n = (-1)^n$ باشد، مجموع ده جمله اول این دو دنباله، برابر مجموع ده جمله اول دنباله a_n است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{cases} b_n = (\frac{1}{2})^n \Rightarrow S_n = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow S_{10} = 1 - \frac{1}{2^{10}} \\ c_n = (-1)^n \Rightarrow S_n = \begin{cases} -1 & ; \text{ فرد } n \\ 0 & ; \text{ زوج } n \end{cases} \Rightarrow S_{10} = 0 \end{cases}$$

$1 - \frac{1}{2^{10}}$

در نهایت خواسته سؤال برابر است با:

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

مجموع معکوس جذر جواب‌های معادله $4x^2 + (k-1)x + 1 = 0$ برابر ۳ است. مجموع جواب‌های معادله $3x^2 - kx - 1 = 0$ کدام است؟ **۶۳**

کدام است؟

$\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}$

$\frac{4}{3}$ (۲)
-۲ (۴)

$-\frac{4}{3}$ (۱)
۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

اگر α و β جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، مجموع جواب‌ها $S = -\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب آن‌ها $P = \frac{c}{a}$ است.

روابط دیگر بین α و β به صورت زیر است:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{S^2}{P} - 2$$

$$\xrightarrow{\alpha, \beta > 0} \begin{cases} \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \\ \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \sqrt{SP + 2P\sqrt{P}} \\ \alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta} = \sqrt{S^3 - 3SP + 2P\sqrt{P}} \end{cases}$$

گام اول: اگر جواب‌های معادله $4x^2 + (k-1)x + 1 = 0$ را α و β در نظر بگیریم، داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$S = \alpha + \beta = \frac{1-k}{4}, P = \alpha\beta = \frac{1}{4}$$

گام دوم: مجموع معکوس جذر α و β برابر $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ است که طبق فرض باید برابر ۳ قرار دهیم:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{S + 2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{1-k}{4} + 2(\frac{1}{4})}}{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{5-k}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{5-k}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow k = -4$$

گام سوم: مجموع جواب‌های معادله $3x^2 - kx - 1 = 0$ برابر $\frac{k}{3}$ است که به ازای $k = -4$ برابر $-\frac{4}{3}$ است.

مجموع جذر معکوس ریشه‌های معادله $36x^2 - (m+14)x + 1 = 0$ برابر ۵ است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله

(سوال ۱۸ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

$mx^2 + 3x + 2 = 0$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۳ (۲)

-۲ (۱)

کنکور

۶۴ جواب‌های معادله $x^2 + 3x = 1$ اعداد α و β هستند، اگر $\frac{\alpha+k}{\beta-1} + \frac{\beta+k}{\alpha-1} = 2$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱/۸ (۴)

۱/۶ (۳)

۱/۴ (۲)

۱/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: α و β جواب‌های معادله $x^2 + 3x - 1 = 0$ هستند، پس:

$$S = \alpha + \beta = -3$$

$$P = \alpha\beta = -1$$

گام دوم: حالا عبارت $\frac{\alpha+k}{\beta-1} + \frac{\beta+k}{\alpha-1}$ را بر حسب S و P می‌نویسیم:

$$\frac{\alpha+k}{\beta-1} + \frac{\beta+k}{\alpha-1} = \frac{(\alpha+k)(\alpha-1) + (\beta+k)(\beta-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + (k-1)(\alpha+\beta) - 2k}{\alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1}$$

بنابراین به کمک روابط درس‌پاکس پاسخ قبل داریم:

$$\frac{\alpha+k}{\beta-1} + \frac{\beta+k}{\alpha-1} = \frac{S^2 - 2P + (k-1)S - 2k}{P - S + 1}$$

گام سوم: از مقادیر گام اول استفاده می‌کنیم و حاصل عبارت بالا را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$\frac{9 + 2 - 3(k-1) - 2k}{-1 + 3 + 1} = 2 \Rightarrow \frac{14 - 5k}{3} = 2 \Rightarrow k = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

۶۵ به ازای چند مقدار طبیعی m ، سهمی $y = x^2 + mx + 3 - m$ فقط از ناحیه چهارم دستگاه مختصات نمی گذرد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

براساس چهار مشخصه a ، b و c و $\Delta = b^2 - 4ac$ ، می توان وضعیت سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را در دستگاه مختصات تعیین کرد:

ردیف	وضعیت	شرایط
۱	سهمی بالا محور x است.	$a > 0, \Delta < 0$
۲	سهمی پایین محور x است.	$a < 0, \Delta < 0$
۳	سهمی از بالا بر محور x مماس است.	$a > 0, \Delta = 0$
۴	سهمی از پایین بر محور x مماس است.	$a < 0, \Delta = 0$
۵	سهمی حداکثر از سه ناحیه می گذرد.	$\Delta < 0$ یا $\Delta > 0, \frac{c}{a} \geq 0$
۶	سهمی دقیقاً از سه ناحیه می گذرد.	$\Delta > 0, \frac{c}{a} \geq 0$
۷	سهمی فقط از ناحیه اول نمی گذرد.	$\Delta > 0, a < 0, b < 0, c \leq 0$
۸	سهمی فقط از ناحیه دوم نمی گذرد.	$\Delta > 0, a < 0, b > 0, c \leq 0$
۹	سهمی فقط از ناحیه سوم نمی گذرد.	$\Delta > 0, a > 0, b < 0, c \geq 0$
۱۰	سهمی فقط از ناحیه چهارم نمی گذرد.	$\Delta > 0, a > 0, b > 0, c \geq 0$
۱۱	سهمی از هر چهار ناحیه می گذرد.	$\frac{c}{a} < 0$

گام اول: ابتدا Δ ی سهمی را بر حسب m به دست می آوریم:

$$\Delta = m^2 - 4(3 - m) = m^2 + 4m - 12 = (m + 6)(m - 2)$$

گام دوم: حالا طبق ردیف ۱۰ جدول درس باکس داریم:

$$\begin{cases} \Delta = (m + 6)(m - 2) > 0 \Rightarrow m < -6 \text{ یا } m > 2 & (۱) \\ a = 1 > 0 & \checkmark \\ b > 0 \Rightarrow m > 0 & (۲) \\ c \geq 0 \Rightarrow 3 - m \geq 0 \Rightarrow m \leq 3 & (۳) \end{cases}$$

گام سوم: از اشتراک مجموعه های (۱)، (۲) و (۳)، مجموعه مقادیر قابل قبول برای m بازه $[2, 3]$ به دست می آید که فقط یک عدد صحیح را شامل می شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۶۶ حدود k کدام باشد تا معادله $k(x^4 + x^2 + \frac{1}{4}) = 4x^2 + \frac{1}{4}$ حداکثر تعداد جواب‌های ممکن را داشته باشد؟

۴ جواب

(۲, ۴) (۲)

(۱, ۴) (۱)

(۰, ۲) (۴)

(۱, ۲) (۳)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ را با شرط $a \neq 0$ ، معادله درجه چهارم دومجذوری می‌نامند. این معادله با تغییر متغیر $t = x^2 \geq 0$ به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شود.

با در نظر گرفتن پارامترهای a, b, c و $\Delta = b^2 - 4ac$ ، حالت‌های زیر را برای جواب‌های این معادله داریم:

ردیف	شرایط	وضعیت جواب‌های معادله
۱	$\Delta < 0$	جواب حقیقی ندارد.
۲	$\Delta = 0, ab > 0$	جواب حقیقی ندارد.
۳	$\Delta = 0, ab < 0$	$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$ جواب‌های معادله هستند.
۴	$ab > 0, c = 0$	$x = 0$ تنها جواب معادله است.
۵	$ab < 0, c = 0$	$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{a}}, x = 0$ سه جواب معادله هستند.
۶	$\Delta > 0, ac > 0, ab > 0$	معادله جواب حقیقی ندارد.
۷	$\Delta > 0, ac > 0, ab < 0$	معادله چهار جواب دارد که دوه‌دو قرینه یکدیگرند.
۸	$ac < 0$	معادله دو جواب دارد که قرینه یکدیگرند.

گام اول: معادله را بازنویسی می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$kx^4 + kx^2 + \frac{k}{4} = 4x^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow kx^4 + (k-4)x^2 + \frac{k-1}{4} = 0$$

معادله درجه چهارم است، پس حداکثر تعداد جواب‌های آن برابر ۴ است.

گام دوم: مطابق شرایط ردیف ۷ جدول درس‌باکس، معادله در شرایط زیر ۴ جواب حقیقی دارد:

$$\Delta = (k-4)^2 - 4k\left(\frac{k-1}{4}\right) = k^2 - 8k + 16 - 2k^2 + 2k = -k^2 - 6k + 16 = -(k+8)(k-2) > 0$$

$$\Rightarrow -8 < k < 2 \quad (۱)$$

$$k\left(\frac{k-1}{4}\right) > 0 \xrightarrow{\text{خارج ریشه‌ها}} k < 0 \text{ یا } k > 1 \quad (۲)$$

$$k(k-4) < 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} 0 < k < 4 \quad (۳)$$

گام سوم: از اشتراک مجموعه‌های (۱)، (۲) و (۳)، مجموعه مقادیر قابل قبول برای k ، بازه $(1, 2)$ به دست می‌آید.

تنها جواب معادله $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+k}{x+1} = 3$ ، برابر $x = m$ است. حاصل $k + m$ کدام است؟ **۶۷**

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول: در سمت چپ تساوی، مخرج مشترک می گیریم: **پاسخ خیلی تشریحی**

$$\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+k}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1) + (x-2)(x+k)}{(x-2)(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 + (k-2)x - 2k - 1}{x^2 - x - 2} = 3$$

با طرفین وسطین داریم:

$$3x^2 - 3x - 6 = 2x^2 + (k-2)x - 2k - 1$$

$$\Rightarrow x^2 - (k+1)x + 2k - 5 = 0 \quad (*)$$

در حالت های زیر معادله بالا، فقط یک جواب دارد:

گام دوم: الف) Δ ی معادله برابر صفر باشد:

$$\Delta = (k+1)^2 - 4(2k-5) = k^2 - 6k + 21 = 0$$

هیچ مقدار حقیقی برای k پیدا نمی شود.

گام سوم: ب) معادله (*) دو جواب داشته باشد که یکی از آن ها به دلیل این که ریشه مخرج است، قابل قبول نباشد:

$$\xrightarrow{x=2 \text{ قابل قبول نباشد.}} -3 = 0 \Rightarrow 4 - 2(k+1) + 2k - 5 = 0 \Rightarrow \text{غیرممکن}$$

$$\xrightarrow{x=-1 \text{ قابل قبول نباشد.}} 1 + k + 1 + 2k - 5 = 0 \Rightarrow k = 1$$

در این شرایط، معادله $\frac{x-1}{x-2} + 1 = 3$ را داریم:

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x-2} = 2 \Rightarrow 2x - 4 = x - 1 \Rightarrow x = 3$$

که تنها جواب آن $m = 3$ است. خواسته سؤال $k + m = 4$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

سرعت محمد در انجام کاری $۱/۵$ برابر سرعت علی است و اگر این دو نفر کار را همزمان شروع کنند، در ۶ ساعت به اتمام می‌رسانند. این دو نفر کار را با هم شروع می‌کنند و بعد از گذشت ۴ ساعت، محمد کار را رها می‌کند. علی چند ساعت دیگر باید کار کند تا آن را به اتمام برساند؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۵/۵ (۲)

۴/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

فرض کنید شیء ۱ کاری را در مدت زمان t_1 ، شیء ۲ در مدت زمان t_2 ، ...، شیء n در مدت زمان t_n به اتمام برساند. اگر این n شیء همزمان با هم شروع به کار کنند و کار در مدت زمان T به اتمام برسد، رابطه زیر را داریم:

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \dots + \frac{1}{t_n} = \frac{1}{T}$$

گام اول: مدت زمان انجام کار توسط علی را a و مدت زمان انجام کار توسط محمد را m در نظر می‌گیریم. طبق فرض، سرعت محمد $۱/۵$ برابر سرعت علی است، پس $m = \frac{2}{3}a$ است و طبق رابطه درس باکس داریم:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{a} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{\frac{2}{3}a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{3}{2a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{2a} = \frac{1}{6} \Rightarrow a = ۱۵ \text{ ساعت}$$

و در نتیجه $m = ۱۰$ ساعت است.

گام دوم: این دو نفر اگر با هم کار کنند، در هر یک ساعت $\frac{1}{6}$ کار انجام می‌شود، بنابراین در ۴ ساعت، $\frac{2}{3}$ کار به اتمام می‌رسد. حالا اگر محمد انصراف دهد، $\frac{1}{3}$ باقی‌مانده را علی باید به تنهایی انجام دهد که مدت زمان انجام آن برابر است با:

$$\Delta t = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{15}} = ۵ \text{ ساعت}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

مجموع جواب‌های معادله $2x^2 = x + \sqrt{2x^2 - x + 2}$ چه قدر از حاصل ضرب آن‌ها بیشتر است؟ **۶۹**

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$2x^2 - x$ رو متغیر جدید بگیر.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: معادله زیر را داریم:

$$2x^2 - x = \sqrt{2x^2 - x + 2}$$

که اگر $2x^2 - x$ را t بگیریم به معادله $t = \sqrt{t+2}$ می‌رسیم.

گام دوم: طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\xrightarrow{t \geq 0} t^2 = t + 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1) = 0 \xrightarrow{t \geq 0} t = 2$$

گام سوم: یعنی در اصل باید معادله $2x^2 - x = 2$ را بر حسب x حل کنیم:

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 2 = 0$$

مجموع جواب‌های این معادله برابر $\frac{1}{2}$ و حاصل ضرب آن‌ها برابر -1 است. مجموع به اندازه $\frac{3}{2}$ از حاصل ضرب بیشتر است.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۷۰ معادله $x^2 - \sqrt{x-2} = x - \sqrt{2-\sqrt{2x}}$ چند جواب دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

به حدود x دقت کن.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بهتر است ابتدا محدوده قابل قبول برای x را به دست آوریم:

$$\sqrt{x-2} : x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2x}} : 2-\sqrt{2x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x} \leq 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$$

از اشتراک دو محدوده به دست آمده برای x ، تنها جواب ممکن برای معادله، $x = 2$ است.

گام دوم: اگر $x = 2$ را نیز در معادله جای گذاری کنیم، می بینیم که صدق نمی کند؛ بنابراین معادله جواب ندارد.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۷۱ معادله $\frac{|x+2|}{2} = x^2 + 4x + m$ سه جواب دارد. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جواب کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۴)

۱ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

از روش رسم کمک بگیر.

Hint

درس Box

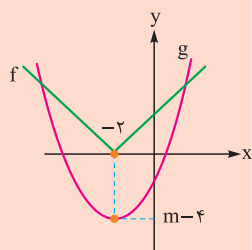
اگر مقصود سؤال صرفاً تعداد جواب‌های یک معادله باشد، می‌توانیم از روش هندسی کمک بگیریم؛ بدین ترتیب که دو تابع مناسب مانند f و g پیدا می‌کنیم که:

• اولاً نمودارهای آن‌ها قابل رسم باشند.

• ثانیاً تعداد نقاط تقاطع این دو نمودار، یعنی تعداد جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ ، تعداد جواب‌های معادله اصلی را نتیجه بدهد.

گام اول: اگر فرض کنیم $f(x) = \frac{|x+2|}{2}$ و $g(x) = x^2 + 4x + m = (x+2)^2 - 4 + m$ باشد، معادله صورت سؤال $f(x) = g(x)$ است و طبیعتاً تعداد نقاط تلاقی نمودارهای توابع f و g ، برابر تعداد جواب‌های معادله است.

گام دوم: حالا این دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



گام سوم: برای این که تعداد نقاط مشترک دو نمودار برابر ۳ شود، لازم است که رأس سهمی بر نقطه $(-2, 0)$ منطبق شود؛ یعنی:

$$m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$$

گام چهارم: در این شرایط جواب‌های معادله α ، -2 و $-4 - \alpha$ هستند. دقت کنید که دو جواب α و $-4 - \alpha$ نسبت به -2 متقارن‌اند. حالا α را پیدا می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x > -2} \frac{x+2}{2} = (x+2)^2 \xrightarrow{(x+2) \neq 0} x+2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

گام پنجم: در نتیجه بزرگ‌ترین جواب $\alpha = -1/5$ و کوچک‌ترین جواب $-4 - \alpha = -2/5$ است که اختلاف آن‌ها برابر ۱ است.

اگر معادله $|4x-2| = x^2 - x + a$ دارای سه ریشه حقیقی باشد، ریشه بزرگ‌تر معادله کدام است؟

(سؤال ۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

۵ / ۵ (۴)

۵ (۳)

۴ / ۴ (۲)

۴ (۱)

کنکور

معادله $x - \frac{x}{|x|} = mx + m + 1$ دو جواب دارد. حدود m کدام است؟ **۷۲**

$$m > 1 \quad (۲)$$

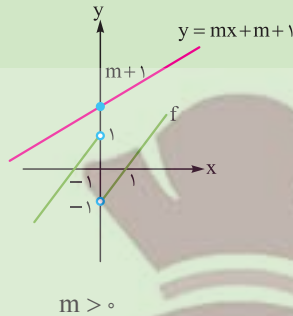
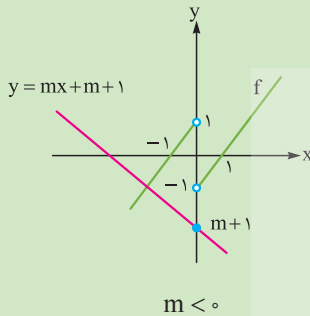
$$-1 < m < 1 \quad (۱)$$

$$-2 < m < 0 \quad (۴)$$

$$m < -1 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه **۴**

گام اول: خط $y = mx + m + 1$ و نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{x}{|x|}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم: **پاسخ خیلی تشریحی ✓**



گام دوم: با توجه به شکل بالا، تعداد نقاط مشترک، هنگامی برابر ۲ است که m منفی باشد و ثانیاً عرض از مبدأ خط، یعنی $m + 1$ در بازه $(-1, 1)$ باشد:

$$\begin{cases} m < 0 & (۱) \\ -1 < m + 1 < 1 \Rightarrow -2 < m < 0 & (۲) \end{cases}$$

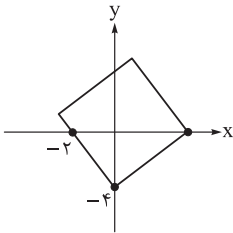
از اشتراک دو محدوده به دست آمده، محدوده قابل قبول برای m ، $-2 < m < 0$ است.

نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y = 3$ معادله‌های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید. **کتاب درسی**

الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$

ب) $y = |x^2 - 6x|$

ایران توننده
توشه ای برای موفقیت



مساحت مربع شکل مقابل کدام است؟ **۷۳**

۶۳ (۱)

۶۴ (۲)

۸۱ (۳)

۸۰ (۴)

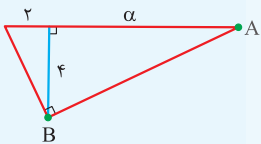
پاسخ: گزینه ۴

Hint از شیب خطوط استفاده کن.

گام اول: شیب خط گذرنده از نقاط $(\alpha, 0)$ و $(0, -4)$ باید قرینه و معکوس شیب خط گذرنده از نقاط $(-2, 0)$ و $(0, -4)$ باشد:

$$\Rightarrow \frac{0 - (-4)}{\alpha - 0} = -\frac{1}{\frac{0 - (-4)}{-2 - 0}} \Rightarrow \frac{4}{\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 8$$

رأسی را که روی محور X قرار گرفته است، نقطه $A(\alpha, 0)$ در نظر می‌گیریم، براساس شکل زیر و روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$2\alpha = 4^2 = 16 \Rightarrow \alpha = 8$$

گام دوم: دو رأس این مربع نقاط $A(8, 0)$ و $B(0, -4)$ هستند و به سادگی می‌توانیم طول ضلع آن را حساب کنیم:

$$AB = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$$

مساحت مربع برابر ۸۰ است.



پاسخ خیلی تشریحی

به‌چور دیگه

ایران توننه
توشه‌ای برای موفقیت

۷۴

نقطه A روی یکی از نیمسازهای دو خط $2x - y = 1$ و $x + 2y = 3$ قرار دارد. کمترین فاصله نقطه A از مبدأ

مختصات کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{2}{\sqrt{10}}$ (۲)

$\frac{4}{\sqrt{10}}$ (۱)

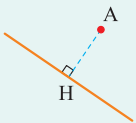
پاسخ: گزینه ۲

درس Box

فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از یکدیگر برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:



$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو نیم خط آن زاویه به یک فاصله است.

نکته

گام اول: نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی نیمسازهای دو خط $2x - y - 1 = 0$ و $x + 2y - 3 = 0$ قرار دارد، بنابراین از این دو خط به یک فاصله است:

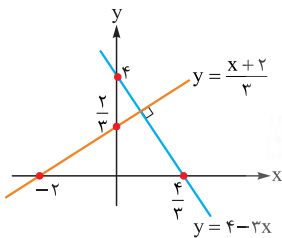
$$AH = \frac{|2\alpha - \beta - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2\alpha - \beta - 1|}{\sqrt{5}}$$

$$AH' = \frac{|\alpha + 2\beta - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|\alpha + 2\beta - 3|}{\sqrt{5}}$$

گام دوم: AH و AH' را برابر قرار می دهیم:

$$\Rightarrow |2\alpha - \beta - 1| = |\alpha + 2\beta - 3| \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta - 1 = \alpha + 2\beta - 3 \Rightarrow \beta = \frac{\alpha + 2}{3} \\ 2\alpha - \beta - 1 = -\alpha - 2\beta + 3 \Rightarrow \beta = 4 - 3\alpha \end{cases}$$

گام سوم: یعنی نقطه A روی یکی از خطهای $y = \frac{x+2}{3}$ یا $y = 4 - 3x$ قرار دارد:



گام چهارم: فاصله مبدأ از این دو خط حساب می کنیم:

• $y = \frac{x+2}{3} \Rightarrow x - 3y + 2 = 0 \Rightarrow OA = \frac{2}{\sqrt{10}}$

• $y = 4 - 3x \Rightarrow 3x + y - 4 = 0 \Rightarrow OA = \frac{4}{\sqrt{10}}$

گام پنجم: از بین مقادیر به دست آمده برای OA، کمترین مقدار $\frac{2}{\sqrt{10}}$ است.

قرینه نقطه $A(2, -1)$ نسبت به خط $y = 2x - 1$ نقطه A' است. فاصله نقطه A' از مبدأ مختصات کدام است؟ **۷۵**

۱/ $\sqrt{5}$ (۲)

۲/ $4\sqrt{5}$ (۱)

۳/ $4\sqrt{3}$ (۴)

۴/ $6\sqrt{3}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲



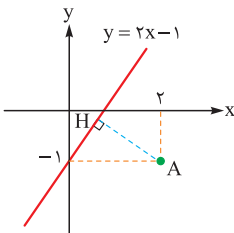
• اگر شیب خطی m باشد، شیب خط عمود بر آن $-\frac{1}{m}$ است.

• اگر A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه O باشد، داریم:

$$A' = 2O - A$$

گام اول: در ابتدا باید مختصات نقطه H را در شکل زیر به دست آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



شیب خط گذرا از نقاط A و H برابر $-\frac{1}{2}$ است. حالا معادله این خط را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ A(2, -1) \end{cases} \Rightarrow y - (-1) = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

گام دوم: حالا دو خط $y = 2x - 1$ و $y = -\frac{1}{2}x$ را تقاطع می‌دهیم تا مختصات نقطه H به دست آید:

$$2x - 1 = -\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{5}{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} y = -\frac{1}{5}$$

گام سوم: بنابراین باید قرینه نقطه $A(2, -1)$ را نسبت به نقطه $H(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ به دست آوریم:

$$A' = 2H - A \Rightarrow A'(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$$

گام چهارم: فاصله نقطه A' را از مبدأ مختصات حساب می‌کنیم:

$$OA' = \sqrt{(-\frac{6}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2} = \frac{3}{5}\sqrt{5} = \frac{3}{5}\sqrt{5} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

در مثلثی به طول اضلاع ۴، ۶ و ۸، دایره محاطی داخلی در نقطه تماس، ضلع متوسط مثلث را به کدام نسبت تقسیم می کند؟

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

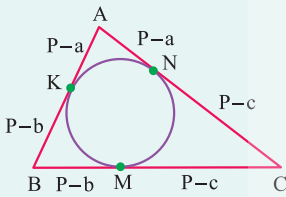
مشاوره این سؤال براساس تمرین ۶ صفحه ۳۰ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است و از ایده های مورد توجه و پرتکرار در سؤالات کنکور به شمار می رود.

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

(۱) اندازه مماس های رسم شده از یک نقطه خارج دایره بر آن دایره، برابر یکدیگرند.

(۲) مطابق شکل، اگر دایره محاطی داخلی مثلث ABC به طول اضلاع $BC = a$ ، $AC = b$ ، $AB = c$ ، به ترتیب در نقاط M، N و K بر اضلاع BC، AC و AB مماس باشد، آن گاه:

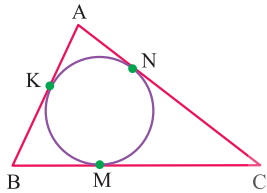


$$\begin{cases} AN = AK = P - a \\ BM = BK = P - b \\ CM = CN = P - c \end{cases}$$

در روابط فوق P نصف محیط مثلث ABC است.

گام اول: فرض کنید در مثلث ABC، $a = ۸$ ، $b = ۶$ و $c = ۴$ باشد. در این صورت نصف محیط مثلث ABC برابر است با:

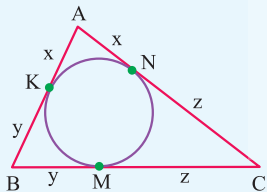
$$P = \frac{۴ + ۶ + ۸}{۲} = ۹$$



گام دوم: ضلع $AC = b = ۶$ ، ضلع متوسط مثلث ABC است، پس نسبت قطعات ایجاد شده روی این ضلع توسط نقطه تماس دایره محاطی داخلی به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{P-a}{P-c} = \frac{۹-۸}{۹-۴} = \frac{1}{5}$$

می دانیم طول مماس های رسم شده از یک نقطه خارج دایره بر آن دایره برابر یکدیگرند، پس مطابق شکل و با توجه به مقادیر داده شده، داریم:



$$\begin{cases} x + y = ۴ \\ x + z = ۶ \\ y + z = ۸ \end{cases}$$

از طرفی طبق فرض $x + y + z = \frac{18}{2} = ۹$ ، بنابراین:

$$\begin{cases} x = (x + y + z) - (y + z) = ۹ - ۸ = ۱ \\ z = (x + y + z) - (x + y) = ۹ - ۴ = ۵ \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{1}{5}$$

به جور دیگه

در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. نسبت شعاع دایره محیطی مثلث ABC، به شعاع دایره محیطی مثلث ABH کدام است؟

$$\sqrt{\frac{4}{3}} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

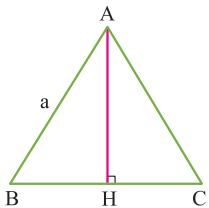
درس Box

(۱) شعاع دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع، $\frac{2}{3}$ طول ارتفاع آن است.

(۲) طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a ، برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

(۳) شعاع دایره محیطی هر مثلث قائم‌الزاویه، برابر است با نصف طول وتر آن.

گام اول: طول ضلع مثلث ABC را a در نظر می‌گیریم، بنا به درس‌بکس، اگر شعاع دایره محیطی این مثلث را با R_1 نمایش دهیم، داریم:



$$R_1 = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

گام دوم: $\triangle ABH$ ، مثلثی قائم‌الزاویه، به طول وتر a است، پس اگر شعاع دایره محیطی آن را با R_2 نمایش دهیم، داریم:

$$R_2 = \frac{1}{2} a$$

گام سوم: خواسته سؤال، برابر است با:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} a}{\frac{1}{2} a} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

مطابق شکل، دو دایره به مرکز O رسم شده‌اند. اگر $\angle AOB = 72^\circ$ ، آن‌گاه مساحت قسمت رنگی به کدام عدد

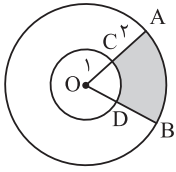
نزدیک‌تر است؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

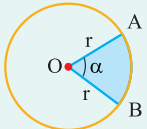
۷ (۴)



پاسخ: گزینه ۱

درس Box

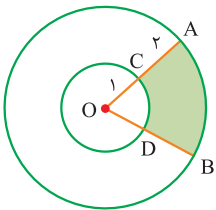
به سطح محصور بین دو شعاع از یک دایره، قطاع می‌گوییم، مثلاً قسمت رنگی در شکل زیر، یک قطاع α درجه با شعاع r است. مساحتش هم از این رابطه محاسبه می‌شود:



$$S_{\text{قطاع } AOB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times (\pi r^2)$$

گام اول: مساحت ناحیه رنگی، برابر است با اختلاف مساحت‌های دو قطاع OAB و OCD :

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم: ابتدا مساحت هر کدام از قطاع‌ها را به دست می‌آوریم:

$$S_1 = \frac{72^\circ}{360^\circ} (\pi \times r^2) = \frac{9}{5} \pi$$

مساحت قطاع OAB :

$$S_2 = \frac{72^\circ}{360^\circ} (\pi \times 1^2) = \frac{1}{5} \pi$$

مساحت قطاع OCD :

گام سوم: مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با:

$$S_1 - S_2 = \frac{9}{5} \pi - \frac{1}{5} \pi = \frac{8}{5} \pi$$

با فرض $\pi \approx 3$ و با در نظر گرفتن گزینه‌ها، مقدار $\frac{8}{5} \pi$ ، به عدد ۵ نزدیک‌تر است.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

مطابق شکل زیر، دو وتر موازی به طول‌های ۹ و ۷ در یک دایره رسم شده‌اند. اگر فاصله بین این دو وتر ۴ باشد،

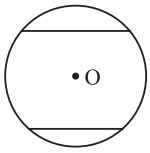
مساحت دایره، چند برابر π است؟

۱) $20/75$

۲) $21/25$

۳) $21/75$

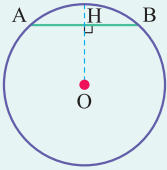
۴) $22/25$



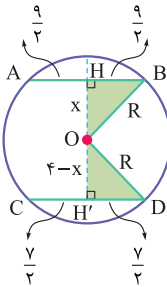
پاسخ: گزینه ۲

درس Box

اگر از مرکز دایره، عمودی بر یک وتر دلخواه رسم شود، حتماً آن وتر را نصف می‌کند، مثلاً در شکل زیر اگر $OH \perp AB$ باشد، می‌توانیم بگوییم $AH = HB$ است:



گام اول: وترهای AB و CD موازی‌اند، بنابراین اگر از مرکز دایره، عمودی بر یکی از آن‌ها رسم کنیم بر دیگری هم عمود خواهد بود. این کار را در شکل زیر انجام داده‌ایم. این عمودها هر دو وتر را نصف می‌کنند، یعنی $HB = \frac{9}{2}$ و $HD = \frac{7}{2}$ است. در ادامه فرض می‌کنیم $OH = x$ باشد، در این صورت چون فاصله دو وتر موازی ۴ است، $OH' = 4 - x$ می‌شود. گام دوم: با نوشتن فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه رنگی، مقدار x را پیدا می‌کنیم:



$$\begin{cases} \triangle OHB : R^2 = x^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\ \triangle OH'D : R^2 = (4-x)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{سمت چپ تساوی‌ها برابرند.}} x^2 + \frac{81}{4} = (4-x)^2 + \frac{49}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{81}{4} = (16 + x^2 - 8x) + \frac{49}{4} \Rightarrow 8x = 8 \Rightarrow x = 1$$

گام سوم: در آخر با جای‌گذاری $x = 1$ در تساوی « $R^2 = x^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$ » شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$R^2 = x^2 + \frac{81}{4} = 1 + \frac{81}{4} = \frac{85}{4} \Rightarrow S = \pi R^2 = \frac{85}{4} \pi = 21/25 \pi$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مستطیل ABCD به اضلاع $AB = 4$ و $AD = 6$ مفروض است. اگر دایره‌ای به قطر AD رسم کنیم، فاصله نزدیک‌ترین نقطه دایره از رأس C کدام است؟

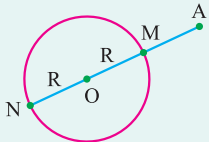
- (۱) ۲
- (۲) $1/5$
- (۳) $\sqrt{5}$
- (۴) $1 + \sqrt{2}$

مشاوره یک سؤال متوسط از مبحث «وضعیت نقطه و دایره». توجه داشته باشید با این‌که روش یافتن نزدیک‌ترین و دورترین نقطه دایره از یک نقطه در کتاب درسی مطرح نشده است، اما در کنکور خواسته شده است.

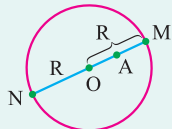
پاسخ: گزینه ۱

درس‌Box

نقطه A و دایره $C(O, R)$ مفروض‌اند. اگر خط گذرنده از A و O، دایره را در M و N قطع کند، آن‌گاه M و N به ترتیب نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره از نقطه A هستند و داریم:

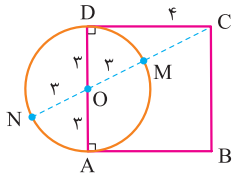


$$AM = OA - R, AN = OA + R$$



$$AN = OA + R, AM = R - OA$$

گام اول: چون پاره خط AD به طول ۶ واحد، قطر دایره است، پس شعاع دایره $\frac{6}{2} = 3$ واحد است. خط گذرنده از O و C را رسم می‌کنیم تا دایره را در M و N قطع کند. با توجه به درس‌بکس باید طول CM را بیابیم:



گام دوم (محاسبه خواسته سؤال): در مثلث قائم‌الزاویه ODC بنا به قضیه فیثاغورس، داریم:

$$OC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

در نهایت می‌توان گفت:

$$\text{کم‌ترین فاصله C از نقاط دایره} = CM = OC - OM = 5 - 3 = 2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونش
توشه‌ای برای موفقیت

۸۱ طول مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۷ برابر با ۱۲ است. بیشترین فاصله بین نقاط این دو دایره کدام است؟

(۱) ۲۴

(۲) ۲۳

(۳) ۲۲

(۴) ۲۱

مشاوره محاسبه طول مماس‌های مشترک، از تیپ سؤال‌های مهم، هم در آزمون‌های چهارگزینه‌ای و هم آزمون‌های تشریحی است. حتماً فرمول‌های آن را بلد باشید و حواستان باشد که فرمول مماس مشترک خارجی و فرمول مماس مشترک داخلی را جابه‌جا حفظ نکنید

پاسخ: گزینه ۱

از فرمول مماس مشترک داخلی، فاصله بین مرکزها را به دست آورید و برای محاسبه بیشترین فاصله بین نقاط دو دایره، از رسم شکل استفاده کنید.

Hint

اگر دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O', r')$ مماس مشترک داخلی داشته باشند، طول مماس مشترک داخلی آن‌ها برابر است با $\sqrt{OO'^2 - (r + r')^2}$.

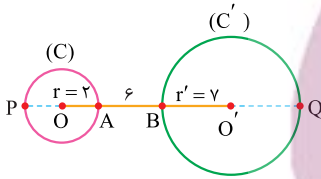
درس‌Box

گام اول: سؤال می‌گوید طول مماس مشترک داخلی دو دایره $C(O, 2)$ و $C'(O', 7)$ برابر با ۱۲ است و خودمان می‌دانیم که طول مماس مشترک داخلی این دو دایره $\sqrt{OO'^2 - (7 + 2)^2}$ است، پس:

پاسخ خیلی تشریحی

$$12 = \sqrt{OO'^2 - 9^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 144 = OO'^2 - 81 \Rightarrow OO'^2 = 225 \Rightarrow OO' = 15$$

گام دوم: با توجه به این که فاصله بین مرکزهای دو دایره $OO' = 15$ است، شکل مناسب را رسم می‌کنیم:

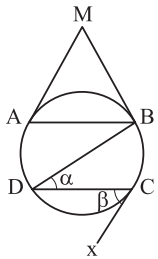


همان‌طور که می‌بینید، بیشترین فاصله بین نقاط دو دایره C و C' برابر با طول پاره خط PQ است و داریم:

$$PQ = OO' + (r + r') \Rightarrow PQ = 15 + (2 + 7) = 24$$

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

در شکل زیر MA، MB و Cx بر دایره مماس هستند. اگر $AB \parallel CD$ ، $\beta = 1/5 \alpha$ و $\hat{M} = 3^\circ$ باشد، اندازه کمان CD چند درجه است؟



چند درجه است؟

- (۱) ۱۰۰
(۲) ۹۰
(۳) ۱۱۰
(۴) ۱۲۰

مشاوره این سؤال ترکیبی از مفاهیم زوایای محاطی و ظلّی و ویژگی وترهای موازی در دایره است که مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل ۹۸ طراحی شده است.

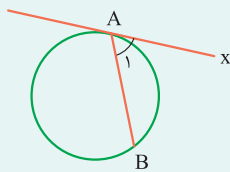
پاسخ: گزینه ۲

Hint

درس Box

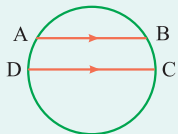
به برابری اندازه کمانهای $\widehat{AD}$ و $\widehat{BC}$ دقت کنید.

(۱) اندازه هر زاویه ظلّی، برابر نصف اندازه کمان مقابل آن است:



$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

(۲) اندازه کمانهای محصور به دو وتر موازی در دایره برابر یکدیگر است:



$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

گام اول: دو زاویه $\hat{MAB}$ و $\hat{MBA}$ هر دو ظلّی هستند، پس داریم:

$$\hat{MAB} = \hat{MBA} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$\Delta AMB: \hat{M} + \hat{MBA} + \hat{MAB} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\hat{MAB} = 180^\circ - 3^\circ = 177^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 177^\circ$$

گام دوم: می‌دانیم اندازه کمانهای محصور بین دو وتر موازی برابر یکدیگرند، از طرفی کمان BC روبه‌رو به زاویه محاطی $\hat{D} = \alpha$ است، پس داریم:

$$\widehat{BC} = 2\alpha$$

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} = 2\alpha$$

از طرفی Cx بر دایره مماس است، پس زاویه $\hat{DCx}$ ظلّی است و داریم:

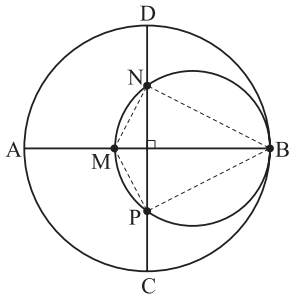
$$\hat{DCx} = \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{CD} = 2\beta \xrightarrow{B=1/5\alpha} \widehat{CD} = 3\alpha$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \Rightarrow 177^\circ + 2\alpha + 3\alpha + 2\alpha = 360^\circ \Rightarrow 7\alpha = 183^\circ \Rightarrow \alpha = 26.14^\circ$$

گام سوم: در نهایت، داریم:

$$\widehat{CD} = 2\beta = 3\alpha = 78.43^\circ$$

مطابق شکل، دو دایره بر هم مماس و قطرهای AB و CD از دایره بزرگ تر بر هم عمود هستند. اگر $AM = 4$ و $DN = 3$ باشد، آن گاه مساحت چهارضلعی $MNBP$ کدام است؟



- (۱) ۷
(۲) $6\sqrt{2}$
(۳) $7/5$
(۴) $4\sqrt{5}$

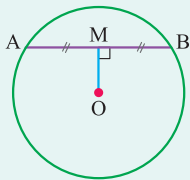
مشاوره شکل این سؤال را در یکی از تمرین‌های کتاب درسی داریم و با ایده گرفتن از این شکل، در کنکور هم سؤال داشته‌ایم. این سؤال، مشابه سؤال کنکور طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۳

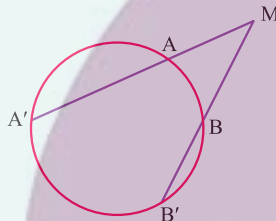
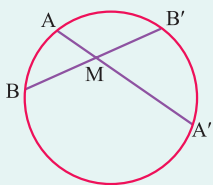
درس Box

(۱) نقطه تقاطع هر دو قطر دلخواه یک دایره، مرکز آن است.

(۲) اگر از مرکز یک دایره به وترى از آن دایره عمود کنیم، پای عمود، وتر را نصف می‌کند:

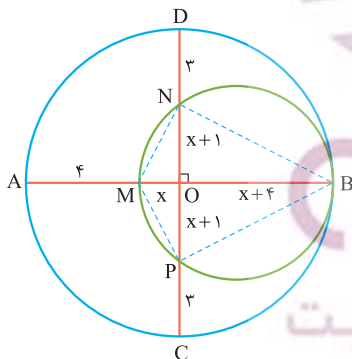


(۳) روابط طولی در دایره: در هر دو شکل زیر، داریم:



$$MA \times MA' = MB \times MB'$$

گام اول: در دایره کوچک قطر MB عمود بر وتر NP آن را نصف می‌کند. فرض کنیم $OM = x$ ، در این صورت شعاع دایره بزرگ برابر $OA = OB = OD = OC = x + 4$ است. داریم:



$$PC = OC - OP = OD - ON = DN = 3$$

$$ON = OP = (x + 4) - 3 = x + 1$$

گام دوم: بنا به رابطه طولی وترهای متقاطع در دایره کوچک در نقطه O داریم:

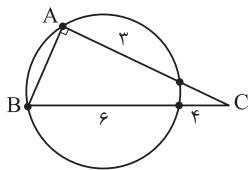
$$OM \times OB = ON \times OP \Rightarrow x(x + 4) = (x + 1)(x + 1) \Rightarrow x^2 + 4x = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

گام سوم: قطرهای چهارضلعی $BPMN$ بر هم عمودند، پس:

$$S_{BPMN} = \frac{1}{2} BM \times NP = \frac{1}{2} (2x + 4)(2x + 2) = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = 7/5$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل رسم شده، شعاع دایره کدام است؟



$$\frac{3\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (4)$$

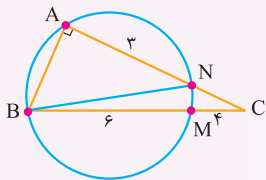
$$3 \quad (1)$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

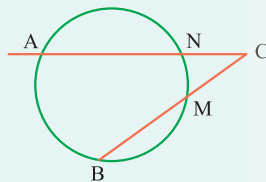
اگر قطر دایره است.

Hint



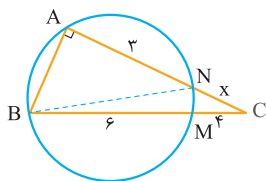
اگر مطابق شکل، امتدادهای دو وتر AN و BM در نقطه C متقاطع باشند، داریم:

$$CN \times CA = CM \times CB$$



گام اول (محاسبه طول CN): با استفاده از روابط طولی در دایره، داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$CN \times CA = CM \times CB \Rightarrow x(x+3) = 4 \times 10$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x = 40 \Rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \times \\ x = 5 \checkmark \end{cases}$$

گام دوم (محاسبه طول AB): از قضیه فیثاغورس در مثلث ABC استفاده می‌کنیم. داریم:

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

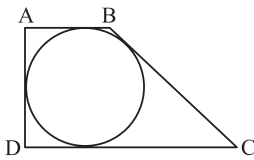
گام سوم: از آن‌جا که زاویه محاطی A قائمه است، داریم:

$$\frac{1}{2} \widehat{BMN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMN} = 180^\circ \Rightarrow \text{BN قطر نیم دایره است.}$$

گام چهارم: بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث ABN، داریم:

$$BN = \sqrt{AB^2 + AN^2} \Rightarrow BN = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85} \Rightarrow 2R = \sqrt{85} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{85}}{2}$$

مطابق شکل، در دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ دایره محاطی آن رسم شده است. اگر $\hat{B} = 15^\circ$ ، آن گاه نسبت مساحت دایره به مساحت دوزنقه کدام است؟



(۱) $\frac{\pi}{6}$

(۲) $\frac{\pi}{3 + \sqrt{3}}$

(۳) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

(۴) $\frac{\pi}{4 + \sqrt{3}}$

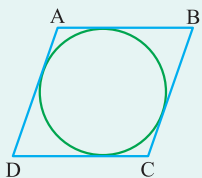
پاسخ: گزینه ۱

در چهارضلعی محیطی $ABCD$ داریم: $AB + DC = AD + BC$.

Hint

درس Box

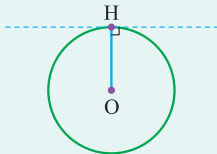
چهارضلعی $ABCD$ محیطی است، اگر و تنها اگر مجموع اضلاع روبه‌روی آن با هم برابر باشد، مثلاً در شکل زیر داریم:



$ABCD \Leftrightarrow AB + DC = AD + BC$
محیطی

(۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع رو به زاویه 30° ، نصف وتر و ضلع رو به زاویه 60° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.

(۲) شعاع دایره، در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است:



نکته

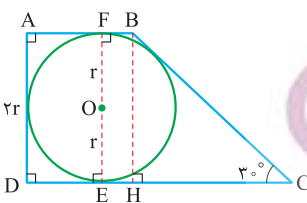
گام اول: ارتفاع دوزنقه محیطی برابر قطر دایره محاطی آن است و مجموع قاعده‌های دوزنقه محیطی هم برابر مجموع ساق‌های آن است؛ در نتیجه با داشتن این اطلاعات، مساحت دوزنقه که برابر است با نصف مجموع دو قاعده ضرب در ارتفاع دوزنقه، محاسبه می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: ابتدا توجه کنید که اگر $\hat{B} = 15^\circ$ آن گاه $\hat{C} = 3^\circ$. مطابق شکل،

OE و OF در نقاط تماس بر قاعده‌های CD و AB عمودند، پس OF و OE یک امتدادند و EF قطر دایره محاطی است و برابر با ارتفاع دوزنقه است:

$AD = BH = EF = 2r$



گام سوم: مطابق با درس باکس، چون $ABCD$ دوزنقه محیطی است؛ پس:

$AB + DC = AD + BC = 2r + BC$ (۱)

برای محاسبه طول BC در مثلث قائم‌الزاویه BHC داریم:

$\hat{C} = 3^\circ$, $BH = 2r \Rightarrow BC = 2BH = 4r$

پس در رابطه (۱) داریم:

$AB + DC = 2r + 4r = 6r$

در نهایت:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BH(AB + DC) = \frac{1}{2} \times 2r \times 6r = 6r^2$

پس خواسته سؤال برابر است با:

$\frac{\pi r^2}{6r^2} = \frac{\pi}{6}$

آمار و احتمال

۸۶

اگر A مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۶ باشد، متمم A نسبت به مرجع $U = (-2, 7]$ شامل چند عدد صحیح است؟
 ۴ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

مفهوم و ویژگی‌های متمم:

درس Box

تعریف: متمم مجموعه A نسبت به مرجع U را با A' نشان می‌دهیم:

$$A' = U - A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

ویژگی‌ها:

$$A \cup A' = U, \quad A \cap A' = \emptyset, \quad A - A' = A, \quad A' - A = A'$$

$$(\emptyset)' = U, \quad U' = \emptyset, \quad (A')' = A$$

متمم در روابط مجموعه‌ها:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$$

$$A' - B' = B - A, \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B', \quad A \cap B' = A - B$$

گام اول: شمارنده‌های طبیعی عدد ۶ عبارت‌اند از ۱, ۲, ۳, ۶. پس:

$$A = \{1, 2, 3, 6\}$$

گام دوم: متمم A نسبت به U برابر است با:

$$A' = U - A = (-2, 7] - \{1, 2, 3, 6\}$$

روی محور هم نشان می‌دهیم:



گام سوم: در A' اعداد صحیح -۱ و ۰ و ۴ و ۵ و ۷ را داریم. یعنی:

$$n(A' \cap \mathbb{Z}) = 5$$

به بیان دیگر A' شامل ۵ عدد صحیح است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

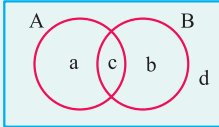
از ۱۴۰ مشتری یک فروشگاه، ۷۰ نفر کارت بانکی نوع A و ۴۵ نفر کارت نوع B دارند. اگر تعداد افرادی که هیچ یک از دو کارت را ندارند، دو برابر تعداد افرادی باشد که هر دو نوع کارت را دارند، چند نفر از مشتریان فقط یک نوع کارت دارند؟

۶۵ (۲)
۱۰۰ (۴)

۹۰ (۱)
۱۱۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

محاسبه تعداد اعضا در اجتماع و اشتراک و تفاضل:



$$n(A') = n(U) - n(A)$$

تعداد اعضای A' :

$$n(\text{در } A \text{ یا } B \text{ یا هر دو}) = n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

ناحیه a و b و c ← تعداد اعضای اجتماع
حداقل یکی از آنها

$$n(A - B) = n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B)$$

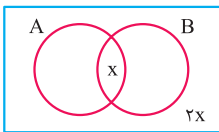
ناحیه a ← تعداد اعضای تفاضل:

$$n(\text{هیچ کدام}) = n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$$

ناحیه d ← تعداد اعضای بیرون A و B
نه در A نه در B

گام اول: اطلاعات سؤال را در نمودار ون می آوریم:

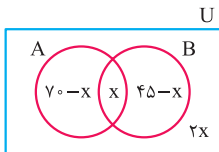
پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$n(A) = 70, n(B) = 45, n(A' \cap B') = 2n(A \cap B)$$

هیچ یک هر دو

گام دوم: پس $n(A - B) = 70 - x$ و $n(B - A) = 45 - x$ و نمودار به شکل زیر تکمیل می شود:



گام سوم: از $n(U) = 140$ داریم:

$$70 - x + x + 45 - x + 2x = 115 + x = 140 \Rightarrow x = 25$$

گام چهارم: مشتری هایی که «فقط یک نوع» کارت دارند در $(A - B) \cup (B - A)$ هستند و تعداد آنها برابر است با:

$$70 - x + 45 - x = 115 - 2x = 115 - 50 = 65$$

ریشه دوم کدام عدد، عضو مجموعه $\mathbb{Z} - (\mathbb{R} - \mathbb{Q}')$ است؟

۲/۲۵ (۴)

۲/۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مجموعه‌های مهم و پرکاربرد اعداد:

درس Box

نام	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}'$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{P}$	$\mathbb{O}$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{N}$
توصیف	اعداد حقیقی	گنگ	گویا	صحیح	اعداد حساسی	اعداد اول	اعداد فرد	اعداد زوج	اعداد طبیعی

خواص اعداد گنگ ($x \in \mathbb{Q}'$):

- اعداد گنگ نمایش کسری (با صورت و مخرج صحیح) ندارند.
- در نمایش اعشاری آن‌ها، ارقام بعد از ممیز تا ∞ بدون تکرار می‌آیند.
- انواع مختلف دارند، $\sqrt{2}$ ، $\log 3$ ، π ، $\sin 1^\circ$ همگی گنگ هستند.

گام اول: ریشه‌های دوم گزینه‌ها را بنویسیم:

گزینه (۱): $\pm\sqrt{2}$ گزینه (۲): ± 2 گزینه (۳): $\pm\sqrt{2/5}$ گزینه (۴): $\pm 1/5$

گام دوم: $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}')$ یعنی اعداد حقیقی که گنگ نباشند؛ پس می‌شود اعداد گویا. حالا $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ یعنی اعداد گویای غیر صحیح.

در بین گزینه‌ها فقط ریشه‌های دوم گزینه (۴) یعنی $\pm 1/5$ گویای غیر صحیح‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

به ازای چند پیشامد A، گزاره‌نمای زیر ارزش درست دارد؟

«در پرتاب دو سکه، احتمال این که پیشامد A رخ دهد، برابر $\frac{3}{4}$ است.»

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزاره‌نما، دامنه، متغیر و جواب:

درس Box

گزاره‌نما جمله‌ای خبری و دارای یک یا چند متغیر است که با جای‌گذاری مقادیر متغیر، به گزاره‌ای درست یا نادرست تبدیل می‌شود. مجموعه‌ی مقادیری که به جای متغیر گزاره‌نما می‌توان قرار داد را «دامنه» می‌نامیم. مجموعه‌ی مقادیری از دامنه که گزاره‌نما را به گزاره‌ی درست تبدیل می‌کنند، «جواب» می‌نامیم.

گزاره‌نما	دامنه x (D)	جواب x (S)
x مضرب ۳ است.	اعداد صحیح	$\{..., -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$
$X \subseteq \{1, 2, 3\}$	مجموعه‌ها	تمام زیرمجموعه‌های $\{1, 2, 3\}$
در پرتاب دو سکه $P(X) = \frac{1}{4}$	پیشامدهای پرتاب دو سکه	پیشامدهای تک‌عضوی $\{rr\}, \{pr\}, \{rp\}, \{pp\}$
$x^2 - 5x - 6 = 0$	اعداد حقیقی	ریشه‌های معادله: $x = -1, x = 6$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در پرتاب دو سکه، فضای نمونه‌ای ۴ عضو دارد:

$$S = \{pp, pr, rp, rr\}$$

گام دوم: در این فضای ۴ عضوی، وقتی $P(A) = \frac{3}{4}$ است، یعنی پیشامد A سه عضو دارد:

$$n(A) = 3$$

گام سوم: پس سؤال می‌پرسد چند پیشامد ۳ عضوی داریم، یعنی مجموعه‌ی ۴ عضوی S چند زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دارد؟ جواب می‌شود:

$$\binom{4}{3} = 4$$

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

تعداد اعضای مجموعه جواب گزاره‌نمای $x^2 - x = 1$ با کدام دامنه، با بقیه متفاوت است؟

Q (۴)

(۳) $(-1, 0)$

W (۲)

N (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

مجموعه جواب گزاره‌نما به دامنه بستگی دارد.

در معادله‌ها و نامعادله‌ها، با کمک اطلاعات حسابان جواب را پیدا می‌کنیم. بعد با توجه به دامنه متغیر، مجموعه جواب را به دست می‌آوریم. مثلاً گزاره‌نمای $x^2 - 4 = 0$ در دامنه $\mathbb{N}$ ، جواب $S = \{2\}$ را دارد و در دامنه $\mathbb{Z}$ ، جواب $\{\pm 2\}$ را دارد. در دامنه $\mathbb{Q}$ ، جواب $\emptyset$ دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در معادله $x^2 - x - 1 = 0$ ، ریشه‌ها اعداد $1 + \frac{1}{2}$ و $1 - \frac{1}{2}$ هستند. (چون جمع ضرایب معادله صفر است، یک ریشه ۱ و یک ریشه $\frac{c}{a}$ است.)

$$\begin{cases} D = \mathbb{N} \\ D = W \end{cases} \Rightarrow S = \{\} \quad \text{گام دوم: با دامنه } \mathbb{N} \text{ یا } W \text{ فقط جواب } x = 1 \text{ را داریم، پس:}$$

$$D = (-1, 0) \Rightarrow S = \{-\frac{1}{2}\}$$

در دامنه $D = (-1, 0)$ فقط جواب $x = -\frac{1}{2}$ را داریم:

$$D = \mathbb{Q} \Rightarrow S = \{1, -\frac{1}{2}\}$$

اما در دامنه $\mathbb{Q}$ هر دو جواب را داریم؛ بنابراین:

یعنی با این دامنه، تعداد اعضای جواب با بقیه گزینه‌ها متفاوت است.

(گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) جواب تک‌عضوی دارند و گزینه (۴) جواب دوعضوی)

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

اگر $p \wedge q$ درست و $p \Rightarrow r$ نادرست باشد، آن گاه گزاره $\sim p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ هم‌ارز کدام است؟

$\sim r$ (۴)

q (۳)

F (۲)

T (۱)

پاسخ: گزینه ۱

جبر گزاره‌ها ($\wedge$ ، $\vee$ ، $\Rightarrow$ و $\Leftrightarrow$) :

درس Box

گزاره	$p \wedge q$ ترکیب عطفی	$p \vee q$ ترکیب فصلی	$p \Rightarrow q$ شرطی	$p \Leftrightarrow q$ دوشرطی
شرط درستی	p و q هر دو درست	حداقل یکی از p و q درست	هر دو درست باشند یا p نادرست باشد.	p و q مثل هم باشند.
حالت خاص یا نکته	$p \wedge F \equiv F$ $p \wedge \sim p \equiv F$	$p \vee T \equiv T$ $p \vee \sim p \equiv T$	$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ شرطی به فصلی تبدیل می‌شود.	$p \Leftrightarrow p \equiv T$ $p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$
نقیض	$\sim p \vee \sim q$ تک‌تک نقیض و علامت برعکس	$\sim p \wedge \sim q$ هر کدام نقیض و علامت برعکس	$p \wedge \sim q$ شرط، درست و جواب، نادرست باشد.	$\sim p \Leftrightarrow q$ فقط یکی نقیض می‌شود.

گام اول: $p \wedge q$ درست است، یعنی هم p و هم q درست هستند.

گام دوم: $p \Rightarrow r$ نادرست است، پس p درست و r نادرست است.

گام سوم: با این ارزش‌ها داریم: $q \wedge r \equiv T \wedge F \equiv F$ و $\sim p \equiv F$ ، پس در گزاره دوشرطی هر دو طرف نادرست‌اند و $F \Leftrightarrow F$ درست خواهد بود، یعنی گزاره نهایی هم‌ارز T است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

نقیض گزاره «برای هر عدد طبیعی n ، اگر n زوج باشد، آن گاه n^2 حداقل برابر ۴ است» در کدام گزینه آمده است؟

$$\exists n \in \mathbb{N}; n \in E \Rightarrow n^2 < 4 \quad (۲)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; n \in E \Rightarrow n^2 < 4 \quad (۱)$$

$$\exists n \in \mathbb{N}; n \in E \wedge n^2 < 4 \quad (۴)$$

$$\exists n \notin \mathbb{N}; n \in E \wedge n^2 < 4 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

گزاره‌های سوردار و نقیض آن‌ها:

درس Box

$\forall$ سور عمومی: وقتی می‌گوییم $\forall x; P(x)$ ، یعنی گزاره زمانی درست می‌شود که همه x های دامنه در $P(x)$ صدق کنند.

$\exists$ سور وجودی: وقتی می‌گوییم $\exists x; P(x)$ ، یعنی گزاره زمانی درست است که حداقل یک x در $P(x)$ صدق کند.

اگر گزاره‌ای سوردار را نقیض کنیم، نوع سور هم عوض می‌شود:

نکته

$$\sim (\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

$$\sim (\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

گام اول: خود گزاره می‌گوید:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}}_{\text{برای هر عدد طبیعی } n}; \underbrace{n \in E}_{\text{اگر } n \text{ زوج باشد}} \Rightarrow \underbrace{n^2 \geq 4}_{\text{آن گاه } n^2 \text{ حداقل ۴ است.}}$$

گام دوم: برای نقیض کردن، نوع سور عوض می‌شود:

$$\exists n \in \mathbb{N}$$

گام سوم: نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $p \wedge \sim q$ است، پس:

$$\sim (n \in E \Rightarrow n^2 \geq 4) \equiv n \in E \wedge n^2 < 4$$

گام چهارم: پس نقیض گزاره به صورت $\exists n \in \mathbb{N}; n \in E \wedge n^2 < 4$ است.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

اگر $A = \{-1, 2, x\}$ و $B = \{2y, 3, \sqrt{z}\}$ و $A \cup B = A \cap B$ ، آن گاه مقدار xyz کدام است؟

-۲۴ (۴)

-۳ (۳)

-۱۲ (۲)

-۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

شرط تساوی دو مجموعه و بیان‌های آن:

اگر دو مجموعه A و B مساوی باشند، هر کدام زیرمجموعه دیگری است:

الف) $A \times B = B \times A$

به جای $A = B$ ممکن است بیان‌های زیر گفته شود:

ب) $A \cup B = A \cap B$

وقتی A و B مساوی‌اند، تمام اعضای A در B هستند و بالعکس. دقت کنید که با این تعریف، ترتیب و تکرار اعضا، اثری در مجموعه ندارد:

$\{1, 1, 2, 2, 2\} = \{2, 1\}$

گام اول: $A \cup B = A \cap B$ یعنی $A = B$ ، پس $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، یعنی اعضای A در B هستند و اعضای B هم در A هستند.

گام دوم: عضو ۳ باید در B باشد، پس $x = 3$.

عضو ۱- در A باید در B باشد ($\sqrt{z}$ هرگز ۱- نیست)، پس $2y = -1$.

عضو ۲ در A باید در B باشد، پس $\sqrt{z} = 2$.

گام سوم: بنابراین داریم: $x = 3$ و $y = -\frac{1}{2}$ و $z = 4$ و در نتیجه:

$xyz = 3(-\frac{1}{2})(4) = -6$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای سه مجموعه ناتهی A و B و C، حاصل $(A \cap B) - (A \cap C)$ برابر کدام است؟

(۲) $A \cap (B - C)$

(۱) $A - (B \cup C)$

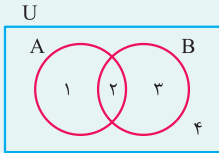
(۴) $(B - C) - A$

(۳) $(A - B) \cap (A - C)$

پاسخ: گزینه ۲

روابط جبر مجموعه‌ها و کاربرد نمودار ون:

درس Box



برای دو مجموعه A و B، در نمودار ون می‌توانیم $A \cup B$ و $A \cap B$ و ... را ببینیم:

مجموعه	A	A'	B	B'	$A \cap B$	$A \cup B$	$A - B$	$B - A$	$A' \cap B'$
نواحی	۱ و ۲	۳ و ۴	۲ و ۳	۱ و ۴	۲	۱ و ۲ و ۳	۱	۳	۴

ویژگی‌ها و روابط جبر مجموعه‌ها:

جابجایی: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

شرکت‌پذیری: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

پخش (توزیع‌پذیری): $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ و $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

جذب: $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$

شبه‌جذب: $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$, $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

دمورگان: $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

تبدیل «-» به اشتراک: $A - B = A \cap B'$

روابط با $\emptyset$: $A - \emptyset = A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

روابط با U: $A \cup U = U$, $A \cap U = A$, $A - U = \emptyset$, $U - A = A'$

روابط با A' : $A \cup A' = U$, $A \cap A' = \emptyset$, $A - A' = A$, $A' - A = A'$

روابط با زیرمجموعه: $A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \\ A - B = \emptyset \end{cases}$

اگرچه در آزمون کار خوبی نیست! اما حل به روش جبر مجموعه را ببینید:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

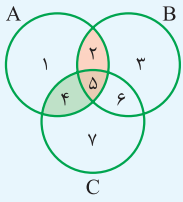
$(A \cap B) - (A \cap C) \xrightarrow{\text{تبدیل «-» به } \cap} (A \cap B) \cap (A \cap C)' \xrightarrow{\text{دمورگان}} (A \cap B) \cap (A' \cup C')$

$\xrightarrow{\text{پخش}} [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C'] \xrightarrow{\text{شرکت‌پذیری}} A \cap (B \cap C') \xrightarrow{\text{تبدیل } \cap \text{ به «-»}} A \cap (B - C)$
این می‌شود $\emptyset$

که همان گزینه (۲) است.

در آزمون، از نمودار ون کمک می‌گیریم:

گام اول:

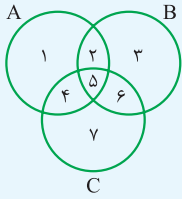


$$A \cap C: 4, 5$$

$$A \cap B: 2, 5$$

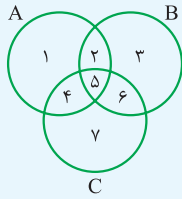
$(A \cap B) - (A \cap C)$ ناحیه‌ای است که ۲ و ۵ هست و ۴ و ۵ نیست که در شکل آن را با ۲ نشان داده‌ایم.

گام دوم: حالا گزینه‌ها را هم نشان می‌دهیم:



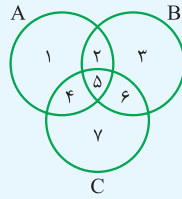
گزینه (۴)

در $B - C$ هست و در A نیست. می‌شود $\{3\}$



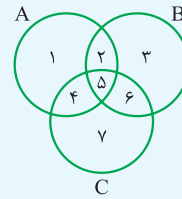
گزینه (۳)

بین $A - C$ و $A - B$ مشترک است. می‌شود $\{1\}$



گزینه (۲)

بین A و $B - C$ مشترک است. می‌شود $\{2\}$



گزینه (۱)

در A هست ولی در $B \cup C$ نیست می‌شود $\{1\}$

پس جواب گزینه (۲)، درست است.

یک مجموعه ۶ عضوی، چند افراز دارد که شامل زیرمجموعه‌های ۱ و ۲ و ۳ عضوی باشد؟

۴۰ (۴)

۲۰ (۳)

۳۰ (۲)

۶۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

افراز یک مجموعه: افراز یعنی تفکیک مجموعه A به زیرمجموعه‌های ناتهی و جدا از هم که اجتماعشان A شود. مثلاً $A = \{1, 2, 3, 4\}$ افرازهای زیر را دارد:

یک قسمتی	دو قسمتی	سه قسمتی	چهار قسمتی
$\{1, 2, 3, 4\}$	مثلاً $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ یا مثلاً $\{1, 2, 3\}, \{4\}$	مثلاً $\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}$	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

تعداد کل افرازاها:

n(A)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد افراز A	۱	۲	۵	۱۵	۵۲	۲۰۳

تعداد حالت‌های افراز به بخش‌های مشخص:

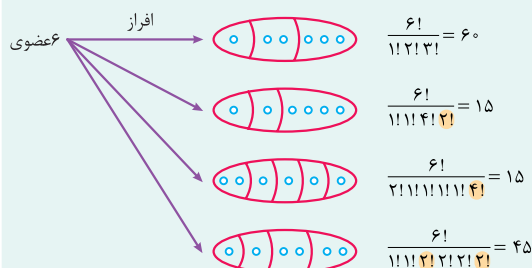
اگر یک مجموعه n عضوی را به زیرمجموعه‌های n_1 و n_2 و n_3 و ... عضوی افراز کنیم، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad \text{یعنی} \quad \frac{n!}{\text{تعداد هر قسمت}}$$

$$\frac{n!}{\text{تکرار! هر قسمت}}$$

و اگر در تعداد، اعضای تکراری داریم:

مثلاً:



می‌خواهیم افراز به شکل $\{a\}, \{b, c\}, \{d, e, f\}$ بسازیم. طبق درس باکس تعداد حالت برابر است با:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{6!}{1! 2! 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1} = 60$$

په جور دیگه

ابتدا برای زیرمجموعه ۳ عضوی، ۳ تا ۶ عضو برداریم:

$$\binom{6}{3}$$

پس از ۳ عضو مانده، دوتا برداریم و در زیرمجموعه دو عضوی قرار دهیم:

$$\binom{3}{2}$$

یک عضو دیگر را هم در زیرمجموعه ۱ عضوی می‌گذاریم:

$$\binom{1}{1}$$

پس جواب می‌شود:

$$\binom{6}{3} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = 20 \times 3 \times 1 = 60$$

فیزیک یازدهم

۹۶

بار الکتریکی هسته اتم کربن یک بار یونیده ($^{12}\text{C}^+$) چند نانوکولن است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

(۲) 8×10^{-10}

(۱) $1/6 \times 10^{-10}$

(۴) $1/92 \times 10^{-9}$

(۳) $9/6 \times 10^{-10}$

پاسخ: گزینه ۳

Hint

به کمک اصل‌های پایستگی و کوانتیده‌بودن بار الکتریکی و با توجه به این که هسته اتم کربن یک بار یونیده، ۶ پروتون دارد، بار الکتریکی هسته را محاسبه کنید.

درس Box

اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی: بار یک جسم همواره مضرب صحیحی از بار الکترون ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$) است. در واقع هرگاه از یک جسم n الکترون بگیریم، بار جسم برابر با $+ne$ و اگر به جسم n الکترون بدهیم، بار جسم برابر با $-ne$ می‌شود.
 $q = \pm ne \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

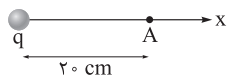
اگر جسم به اندازه n الکترون بگیرد، علامت بار منفی می‌شود و اگر جسم n الکترون از دست بدهد، علامت بار مثبت می‌شود.

هسته اتم کربن یک بار یونیده ۶ پروتون دارد، پس بار هسته $+6e$ است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$q = ne \Rightarrow q = 6e = 6 \times 1/6 \times 10^{-19} = 1/1 \times 10^{-18} \text{ C} = 1 \times 10^{-18} \text{ C}$$

در شکل زیر، میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -4 \text{ nC}$ در نقطه A بر حسب نیوتون بر کولن کدام



است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$

- (۱) $900 \vec{i}$
(۲) $90 \vec{i}$
(۳) $-900 \vec{i}$
(۴) $-90 \vec{i}$

پاسخ: گزینه ۳

Hint

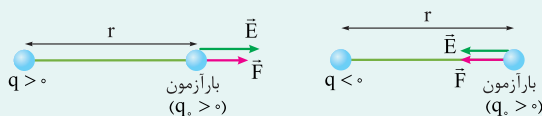
کافی است، داده‌ها را در رابطه میدان الکتریکی $(E = k \frac{|q|}{r^2})$ جای گذاری کنید و سپس با قراردادن بار مثبت آزمون در نقطه A، جهت میدان الکتریکی را مشخص کنید.

درس Box

بزرگی میدان الکتریکی بار q در فاصله r از آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \quad (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$

برای تشخیص جهت میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار، بار آزمون مثبت ($q_0 > 0$) را در نقطه مورد نظر قرار می دهیم، جهت نیروی وارد شده به بار q_0 هم جهت با میدان الکتریکی حاصل از بار q در آن نقطه است.



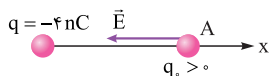
طبق شکل‌های بالا، میدان الکتریکی بار مثبت در جهتی است که از بار دور شود و میدان الکتریکی بار منفی در جهتی است که به بار نزدیک شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فقط کافی است، داده‌ها را در رابطه $E = k \frac{|q|}{r^2}$ جای گذاری کنیم:

$$E = \frac{k|q|}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-9}}{(20 \times 10^{-2})^2} = 900 \text{ N/C}$$

گام دوم: بار آزمون مثبت را در نقطه A قرار می دهیم تا جهت میدان مشخص شود:



پس میدان در جهت منفی محور x است، یعنی:

$$\vec{E} = (-900 \text{ N/C}) \vec{i}$$

دو کره رسانای باردار با قطر یکسان، هنگامی که به فاصله ۲ m از هم قرار می گیرند، به یکدیگر نیروی الکتریکی ۱۰۸ N وارد می کنند. کره ها را به وسیله یک سیم رسانا، به هم وصل می کنیم. در این حالت، نیروی الکتریکی که به هم وارد می کنند، ۳۶ N می شود. تعداد الکترون هایی که از یک کره به کره دیگر منتقل می شود، چه قدر است؟
($e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}\text{ C}$ و $k = ۹ \times ۱۰^۹ \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

$$۱/۲۵ \times ۱۰^{۱۳} (۲)$$

$$۵ \times ۱۰^{۱۳} (۱)$$

$$۱/۲۵ \times ۱۰^{۱۵} (۴)$$

$$۵ \times ۱۰^{۱۵} (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

(۱) طبق قانون کولن، دو بار الکتریکی q_1 و q_2 که در فاصله r از هم قرار دارند، به هم نیروی الکتریکی وارد می کنند که بزرگی این نیرو از رابطه زیر به دست می آید:

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$$

ثابت کولن ($۹ \times ۱۰^۹ \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

(۲) پایستگی بار الکتریکی: جمع جبری بارهای الکتریکی در یک دستگاه همواره ثابت است، یعنی بار نه به وجود می آید و نه از بین می رود، فقط از جسمی به جسم دیگر منتقل می شود، پس وقتی دو جسم را با هم تماس می دهیم، مجموع جبری بار اجسام قبل از تماس با مجموع بارها بعد از تماس برابر است، یعنی:

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2$$

بارها قبل از تماس بارها بعد از تماس

اگر دو کره رسانای مشابه را به هم تماس دهیم و از هم جدا کنیم، بار هر کره پس از تماس از رابطه زیر به دست می آید:

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2 \xrightarrow{q'_1 = q'_2} q_1 + q_2 = 2q'_1 \Rightarrow q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

گام اول: با توجه به این که نیروی الکتریکی بین کره ها در همان فاصله، بعد از تماس کاهش یافته، پس بار آن ها ناهم نام است و در اثر تماس، اندازه بارها کاهش پیدا کرده؛ به کمک رابطه کولن داریم:

$$F = \frac{k |q_1 q_2|}{r^2} \xrightarrow[r=۲\text{ m}, F=۱۰۸\text{ N}]{k=۹ \times ۱۰^۹ \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}} ۱۰۸ = \frac{۹ \times ۱۰^۹ \times |q_1 q_2|}{۴} \Rightarrow |q_1 q_2| = ۴۸ \times ۱۰^{-۱۲}\text{ C}^2$$

$$\xrightarrow{q_1 \text{ و } q_2 \text{ ناهم نام}} q_1 q_2 = -۴۸ \times ۱۰^{-۱۲}\text{ C}^2 \xrightarrow{\text{تبدیل به } (\mu\text{C})^2} q_1 q_2 = -۴۸ (\mu\text{C})^2 \quad (I)$$

$$F' = \frac{k |q'_1 q'_2|}{r^2} \xrightarrow[r=۲\text{ m}, F'=۳۶\text{ N}]{k=۹ \times ۱۰^۹ \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}} ۳۶ = \frac{۹ \times ۱۰^۹ \times q'^2}{۴}$$

$$\Rightarrow q'^2 = ۱۶ \times ۱۰^{-۱۲}\text{ C}^2 \Rightarrow q' = \pm ۴ \times ۱۰^{-۶}\text{ C} \Rightarrow q' = \pm ۴\text{ }\mu\text{C}$$

گام دوم: با توجه به این که دو کره مشابه هستند، داریم:

$$q'_1 = q'_2 = q' = \frac{q_1 + q_2}{2} \Rightarrow q_1 + q_2 = 2q' = 2 \times \pm ۴ = \pm ۸\text{ }\mu\text{C} \quad (II)$$

گام سوم: حالا با حل معادلات (I) و (II)، بار اولیه کره ها را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = ۸\text{ }\mu\text{C} \\ q_1 q_2 = -۴۸ (\mu\text{C})^2 \end{cases} \Rightarrow q_1 = ۱۲\text{ }\mu\text{C}, q_2 = -۴\text{ }\mu\text{C}, q' = ۴\text{ }\mu\text{C}$$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = -۸\text{ }\mu\text{C} \\ q_1 q_2 = -۴۸ (\mu\text{C})^2 \end{cases} \Rightarrow q_1 = -۱۲\text{ }\mu\text{C}, q_2 = ۴\text{ }\mu\text{C}, q' = -۴\text{ }\mu\text{C}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام چهارم: مقدار بار جابه‌جاشده بین کره‌ها را محاسبه می‌کنیم و سپس تعداد الکترون‌هایی که از یک کره به کره دیگر منتقل شده را پیدا کنیم.

$$\Delta q = |q' - q_1| = |4 - 12| = 8 \mu\text{C}$$

$$\Delta q = ne \Rightarrow n = \frac{\Delta q}{e} = \frac{8 \times 10^{-6}}{1.6 \times 10^{-19}} = 5 \times 10^{13}$$

کنکور

دو کرهٔ رسانای باردار مشابه، هنگامی که به فاصلهٔ ۲ m از هم قرار می‌گیرند، به یکدیگر نیروی الکتریکی ۰/۰۲۷ N وارد می‌کنند. کره‌ها را به وسیلهٔ یک سیم رسانا، به هم وصل می‌کنیم. در این حالت، نیروی الکتریکی که به هم وارد می‌کنند، ۰/۰۰۹ N می‌شود. تعداد الکترون‌هایی که از یک کره به کره دیگر منتقل می‌شود، چه قدر است؟

$$(e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \text{ و } k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$

(سوال ۶۹ کنکور تهرانی ۱۴۰۴ (فارج از کشور))

$$2 / 25 \times 10^{12} (2)$$

$$2 / 25 \times 10^{14} (4)$$

$$2 / 5 \times 10^{13} (1)$$

$$2 / 5 \times 10^{15} (3)$$

روی محور x ، بارهای الکتریکی $q_1 = 40 \mu C$ ، q_2 و q_3 به ترتیب در مکان‌های $x_1 = 0$ ، $x_2 = 4 \text{ m}$ و $x_3 = 5 \text{ m}$ قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر q_2 برابر صفر باشد، نیروی الکتریکی وارد بر بار q_1 از طرف بار q_3

بر حسب نیوتون کدام است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$

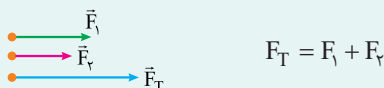
- (۱) $0 / 36 \vec{i}$
(۲) $-0 / 36 \vec{i}$
(۳) $0 / 0.36 \vec{i}$
(۴) $-0 / 0.36 \vec{i}$

پاسخ: گزینه ۴

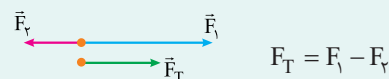
درس Box

اگر به جای دو ذره، تعدادی بار الکتریکی نقطه‌ای داشته باشیم، نیروی الکتریکی وارد بر هر ذره، برآیند نیروهایی است که هر یک از ذره‌های دیگر در غیاب سایر ذره‌ها، بر آن ذره وارد می‌کنند. برای محاسبه نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر بار الکتریکی، سه حالت زیر رخ می‌دهد:

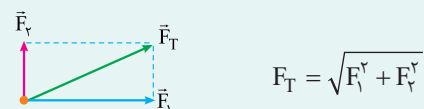
(الف) نیروها هم‌راستا و هم‌جهت:



(ب) نیروها هم‌راستا و خلاف جهت:

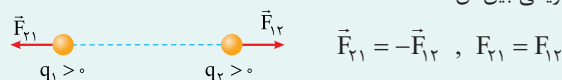


(پ) نیروهای عمود بر هم:



نیروی که دو بار الکتریکی نقطه‌ای به هم وارد می‌کند:

(الف) اگر دو بار الکتریکی نقطه‌ای همنام باشند، نیروی الکتریکی بین آن‌ها دافعه است.

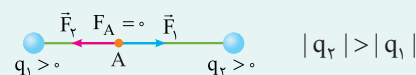


(ب) اگر دو بار الکتریکی نقطه‌ای ناهمنام باشند، نیروی الکتریکی بین آن‌ها جاذبه است.



تعیین نقطه‌ای که نیروی الکتریکی خالص دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در آن نقطه صفر است:

(۱) اگر دو بار همنام باشند، نیروی الکتریکی خالص در نقطه‌ای بین دو بار، روی خط واصل بارها و نزدیک بار کوچک‌تر صفر است.

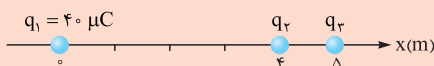


(۲) اگر دو بار ناهمنام باشند، نیروی الکتریکی خالص در نقطه‌ای خارج دو بار، روی خط واصل دو بار و نزدیک بار کوچک‌تر صفر است.



گام اول: وضعیت بارهای الکتریکی را روی محور x نشان می‌دهیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



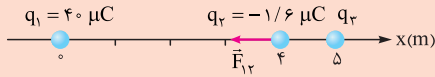
بار q_3 خارج دو بار قرار دارد و نیروی الکتریکی وارد بر آن صفر است، پس علامت بارهای q_1 و q_2 مخالف هم است و چون $q_1 > 0$ است در نتیجه $q_2 < 0$ است.

گام دوم: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 صفر است، پس طبق قانون کولن داریم:

$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow \frac{k |q_1| |q_3|}{r_{13}^2} = \frac{k |q_2| |q_3|}{r_{23}^2} \Rightarrow \frac{40}{5^2} = \frac{|q_2|}{1^2}$$

$$\Rightarrow |q_2| = 1/6 \mu C \xrightarrow{q_2 < 0} q_2 = -1/6 \mu C$$

گام سوم: نیروی الکتریکی وارد بر بار q_2 از طرف بار q_1 برابر است با:



$$F_{12} = \frac{k |q_1 q_2|}{r^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{40 \times 10^{-6} \times 1/6 \times 10^{-6}}{4^2} = 36 \times 10^{-3} N \Rightarrow \vec{F}_{12} = (-36 \times 10^{-3} N) \vec{i}$$

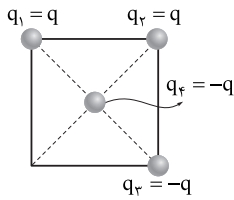
روی محور x ، بارهای الکتریکی $q_1 = 40 \mu C$ ، q_2 و q_3 به ترتیب در مکان‌های $x_1 = 0$ ، $x_2 = 4$ m و $x_3 = 5$ m قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر q_3 برابر صفر باشد، چند میکروکولن است؟

(سؤال ۶۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

- | | |
|-------------|------------|
| ۲ (۲) | ۱۲ / ۵ (۱) |
| -۱۲ / ۵ (۴) | -۲ (۳) |

کنکور

در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی سه رأس مربع و یک بار الکتریکی نقطه‌ای روی مرکز مربع قرار دارد. اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 چند برابر اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_4 است؟



$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{10} \quad (1)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

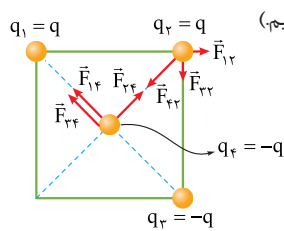
پاسخ: گزینه ۱

Hint

نیروهای وارد بر بارهای q_2 و q_4 را محاسبه و نیروی خالص وارد بر هر کدام را به دست آورید و سپس نسبت نیروهای خالص

را طبق خواسته سؤال محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی



گام اول: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بارهای q_2 و q_4 را رسم می‌کنیم: (q را مثبت فرض می‌کنیم)

گام دوم: ضلع مربع را a و F را برابر با $\frac{kq^2}{a^2}$ می‌گیریم، سپس نیروی وارد بر q_2 را بر حسب F می‌نویسیم:

$$F_{12} = \frac{kq_1q_2}{a^2} \xrightarrow{q_1=q_2=q} F_{12} = F$$

$$F_{22} = \frac{k|q_2||q_2|}{a^2} \xrightarrow{q_2=|q_2|=q} F_{22} = F$$

$$F_{32} = \frac{k|q_2||q_3|}{(a\sqrt{2})^2} \xrightarrow{q_3=|q_3|=q} F_{32} = \frac{1}{2}F$$

$\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{22}$ بر هم عمود هستند، پس برابند آنها می‌شود با:

$$F' = \sqrt{2}F$$

$$F_{net,2} = \sqrt{(\sqrt{2}F)^2 + (\frac{1}{2}F)^2} = F\sqrt{6}$$

$\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{22}$ نیز بر هم عمود هستند، در نتیجه داریم:

گام سوم: گام دوم را برای بار q_4 تکرار می‌کنیم:

$$F_{14} = \frac{kq_1|q_4|}{(a\sqrt{2})^2} \xrightarrow{q_1=|q_4|=q} F_{14} = \frac{1}{2}F$$

$$\frac{F_{14}=F_{34}}{F_{14}=F_{34}} \rightarrow F_{14} = \frac{1}{2}F$$

$$F_{24} = \frac{k|q_2||q_4|}{(a\sqrt{2})^2} \xrightarrow{|q_2|=|q_4|=q} F_{24} = \frac{1}{2}F$$

$\vec{F}_{14}$ و $\vec{F}_{34}$ در یک جهت هستند، پس:

$$F'' = F_{14} + F_{34} = F$$

$\vec{F}_{24}$ و F'' بر هم عمود هستند، در نتیجه:

$$F_{net,4} = \sqrt{(F)^2 + (\frac{1}{2}F)^2} = \frac{1}{2}F\sqrt{5}$$

گام چهارم: خواسته سؤال نسبت $\frac{F_{net,2}}{F_{net,4}}$ است:

$$\frac{F_{net,2}}{F_{net,4}} = \frac{F\sqrt{6}}{\frac{1}{2}F\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

۱۰۱

بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 از فاصله r بر بار نقطه‌ای $q_2 = -5 \mu C$ ، نیروی الکتریکی 8 N وارد می‌کند. بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در فاصله $2r$ از آن چند نیوتون بر کولن است؟

$$1/6 \times 10^{-6} \quad (2)$$

$$6/4 \times 10^{-6} \quad (1)$$

$$4 \times 10^{-5} \quad (4)$$

$$8 \times 10^{-5} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با کمک رابطه کولن و جای گذاری داده‌ها، داریم:

$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2} \Rightarrow 8 = \frac{k |q_1| (5 \times 10^{-6})}{r^2} \Rightarrow \frac{k |q_1|}{r^2} = \frac{8}{5} \times 10^6 = 1/6 \times 10^6 \text{ N/C}$$

رابطه $\frac{k |q_1|}{r^2}$ ، میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در فاصله r است و خواسته سؤال میدان الکتریکی در فاصله $2r$ ، پس:

$$E = \frac{k |q_1|}{(2r)^2} = \frac{k |q_1|}{4r^2} = \frac{1}{4} \times (1/6 \times 10^6) = 1/24 \times 10^6 = 4 \times 10^{-5} \text{ N/C}$$

سؤال، بزرگی میدان را در فاصله $2r$ می‌خواهد، اگر با معادله $\frac{k |q_1|}{r^2} = 1/6 \times 10^6 \text{ N/C}$ که میدان در فاصله r است سراغ گزینه‌ها بروی، توی دایره گزینه (۲) می‌افتی.

گول نخوری ✖

په جور دیگه ➡

$$F = |q_1| E \Rightarrow 8 = 5 \times 10^{-6} \times E \Rightarrow E = 1/6 \times 10^6 \text{ N/C}$$

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \frac{E'}{E} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \xrightarrow[r'=2r]{E=1/6 \times 10^6 \text{ N/C}} \frac{E'}{1/6 \times 10^6} = \left(\frac{r}{2r}\right)^2$$

$$\Rightarrow E' = 1/6 \times 10^6 \times \frac{1}{4} = 1/24 \times 10^6 = 4 \times 10^{-5} \text{ N/C}$$

بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 از فاصله 60 سانتی‌متری، بر بار نقطه‌ای $q_2 = -5 \mu C$ ، نیروی جاذبه الکتریکی $2 \times 10^{-2} \text{ N}$ وارد می‌کند. بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در فاصله 20 سانتی‌متری آن چند نیوتون بر کولن است؟

(سؤال ۷۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ (فارج از کشور))

$$4 \times 10^{-3} \quad (2)$$

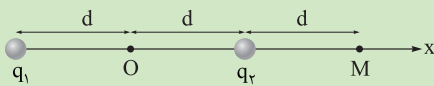
$$6 \times 10^{-3} \quad (1)$$

$$1/2 \times 10^{-4} \quad (4)$$

$$3/6 \times 10^{-4} \quad (3)$$

کنکور

در شکل زیر، یک دوقطبی الکتریکی منطبق بر محور x قرار دارد. اندازه میدان الکتریکی خالص در نقطه O چند برابر اندازه میدان الکتریکی خالص در نقطه M است؟



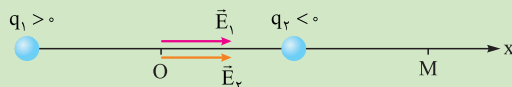
- ۳ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{9}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



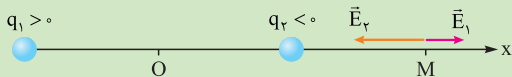
دوقطبی الکتریکی، آرایشی از دو بار هم اندازه و غیرهمنام است که در فاصله مشخصی از هم قرار دارند.

گام اول: با قراردادن بار فرضی مثبت q_0 در نقطه O ، میدان الکتریکی بارهای q_1 و q_2 را رسم می کنیم: (چون شکل مربوط به دوقطبی الکتریکی است، فرض می کنیم $q_1 > 0$ و $q_2 < 0$ است).



$$E_O = E_1 + E_2 \xrightarrow[r_1=r_2=d]{|q_1|=|q_2|=q} E_O = \frac{2kq}{d^2}$$

گام دوم: برای نقطه M هم گام اول را تکرار می کنیم:



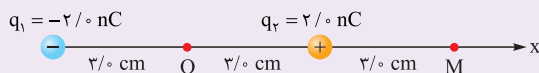
$$E_M = |E_2 - E_1| = \left| \frac{kq}{d^2} - \frac{kq}{9d^2} \right| = \frac{8kq}{9d^2}$$

گام سوم: فقط کافیست نسبت $\frac{E_O}{E_M}$ را به دست آوریم:

$$\frac{E_O}{E_M} = \frac{\frac{2kq}{d^2}}{\frac{8kq}{9d^2}} = \frac{9}{4}$$

شکل زیر، آرایشی از دو بار الکتریکی هم اندازه و غیرهمنام (دوقطبی الکتریکی) را نشان می دهد که در آن فاصله دو بار از هم 6 cm است. میدان الکتریکی خالص را در نقطه های O و M به دست آورید.

(فیزیک (۲) - تمرین ۱-۵ صفحه ۱۶ کتاب درسی)



در شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای روی دو رأس مثلثی قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در رأس سوم مثلث

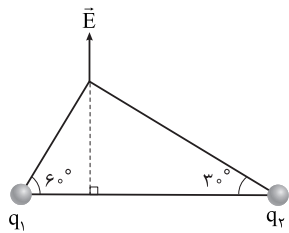
برابر $\vec{E}$ باشد، $\frac{q_2}{q_1}$ برابر کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) $3\sqrt{3}$

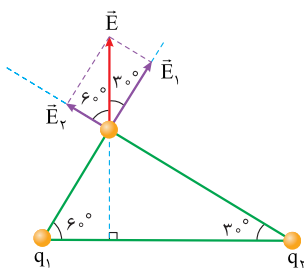
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{9}$



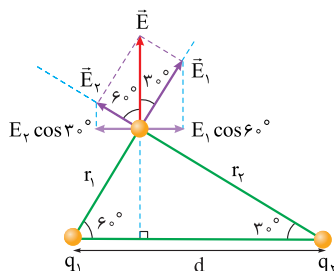
پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به جهت میدان الکتریکی خالص $\vec{E}$ ، جهت میدان‌های E_1 و E_2 را رسم می‌کنیم. همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید هر دو میدان $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ در جهت دور شدن از بارها هستند؛ یعنی هر دو بار، مثبت هستند.



گام دوم: برای این که میدان الکتریکی خالص در جهت $\vec{E}$ باشد، مؤلفه‌های افقی $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ باید یکدیگر را خنثی کنند، یعنی:



$$E_1 \cos 60^\circ = E_2 \cos 30^\circ \Rightarrow \frac{kq_1}{r_1^2} \times \frac{1}{2} = \frac{kq_2}{r_2^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2 \sqrt{3}}{r_2^2} \quad (1)$$

گام سوم: از طرفی r_1 ضلع روبه‌روی به زاویه 30° است، پس:

$$r_1 = \frac{d}{2} = \frac{r_2}{\sqrt{3}}$$

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{d^2 - r_1^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} d$$

گام چهارم: داده‌های مربوط به r_1 و r_2 را در رابطه (۱) جای گذاری می‌کنیم:

$$\frac{q_1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{q_2 \sqrt{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} d\right)^2} \Rightarrow \frac{4q_1}{d^2} = \frac{4q_2 \sqrt{3}}{3d^2} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

در نزدیکی سطح زمین، میدان الکتریکی یکنواختی با بزرگی 150 N/C و جهت رو به پایین وجود دارد. یک الکترون در این فضا قرار دارد. نیروی الکتریکی وارد بر این الکترون چند نیوتون و در چه جهتی است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

(۲) $2/4 \times 10^{-17}$ ، به سمت پایین

(۱) $2/4 \times 10^{-17}$ ، به سمت بالا

(۴) $2/4 \times 10^{-18}$ ، به سمت پایین

(۳) $2/4 \times 10^{-18}$ ، به سمت بالا

پاسخ: گزینه ۱



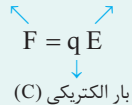
Hint

داده‌ها را در رابطه $F = Eq$ جای گذاری کنید تا اندازه نیروی الکتریکی محاسبه شود، سپس برای مشخص کردن جهت نیرو به علامت بار توجه کنید.

درس Box

اگر ذره‌ای با بار q در میدان الکتریکی E قرار بگیرد، از طرف میدان به ذره نیروی الکتریکی وارد می‌شود.

میدان الکتریکی (N/C) نیروی الکتریکی (N)



• اگر $q > 0$ و $\vec{E}$ و $\vec{F}$ هم جهت هستند.

• اگر $q < 0$ و $\vec{E}$ و $\vec{F}$ در خلاف جهت هم هستند.

بار الکتریکی الکترون، منفی است، پس جهت نیروی الکتریکی وارد بر آن در خلاف جهت میدان الکتریکی و به سمت بالا است. برای محاسبه اندازه نیرو طبق رابطه $F = Eq$ داریم:

$$F = 150 \times 1.6 \times 10^{-19} = 240 \times 10^{-19} = 2/4 \times 10^{-17} \text{ N}$$

آنگاه به منفی بودن بار الکترون توجه نکنی، توی دام گزینه (۲) می‌افتی.

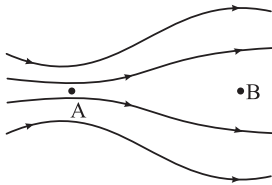


گول نخوری

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۰۵ آرایش خطوط میدان الکتریکی در یک ناحیه به شکل زیر است. کدام مورد، درباره مقایسه پتانسیل الکتریکی (V)

و اندازه میدان الکتریکی (E) در نقاط A و B درست است؟



$$E_A > E_B, V_A > V_B \quad (1)$$

$$E_A > E_B, V_A < V_B \quad (2)$$

$$E_A < E_B, V_A > V_B \quad (3)$$

$$E_A < E_B, V_A < V_B \quad (4)$$

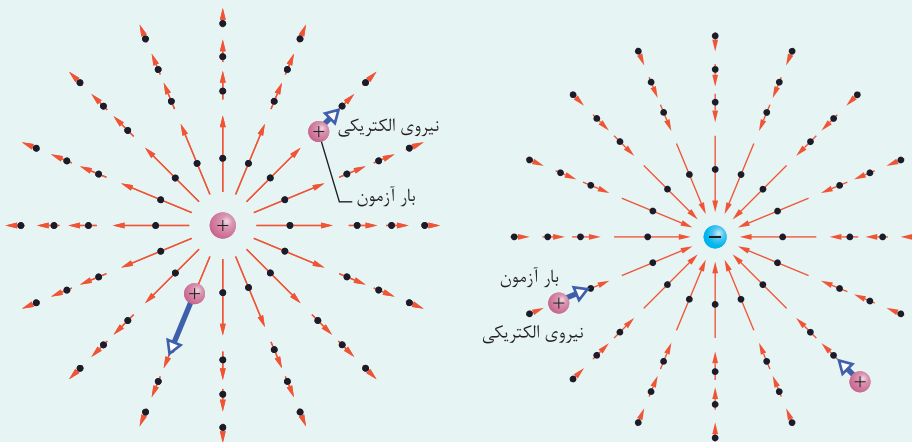
پاسخ: گزینه ۱

درس Box

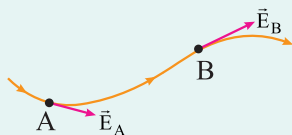
• برای مجسم کردن میدان الکتریکی در فضای اطراف اجسام باردار، از خطهای جهت داری موسوم به خطوط میدان الکتریکی استفاده می کنند.

خطوط میدان الکتریکی ویژگی های زیر را دارند:

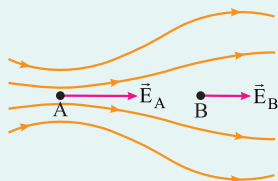
(۱) با توجه به جهت نیروی وارد بر بار مثبت آزمون، خطهای میدان الکتریکی از بار مثبت خارج و به بار منفی وارد می شوند.



(۲) در هر نقطه، بردار میدان الکتریکی باید مماس بر خط میدان الکتریکی عبوری از آن نقطه و در همان جهت باشد.



(۳) میزان تراکم خطوط میدان در هر نقطه از فضا، نشان دهنده اندازه میدان در آن ناحیه است.



(۴) خطوط میدان الکتریکی براینند هرگز یکدیگر را قطع نمی کنند، یعنی از هر نقطه فضا فقط یک خط میدان الکتریکی می گذرد.

• به نسبت تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی به بار ذره که مستقل از نوع و اندازه بار الکتریکی است، اختلاف پتانسیل الکتریکی می گوئیم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

طبق رابطه بالا می توان نوشت:

اگر ذره در جهت میدان حرکت کند، پتانسیل الکتریکی کاهش می یابد و اگر در خلاف جهت میدان حرکت کند، پتانسیل الکتریکی افزایش می یابد.

گام اول: تراکم خطوط میدان الکتریکی در نقطه A بیشتر از نقطه B است، پس:

$$E_A > E_B$$

گام دوم: با حرکت در جهت میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی کاهش می یابد، یعنی:

$$V_A > V_B$$

۱۰۶

در شکل زیر، ذره‌ای با بار منفی از نقطه A، به سمت کره بارداری با بار مثبت تا نقطه B جابه‌جا می‌شود. در این



B • • A

جابه‌جایی، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

(الف) کاری که میدان الکتریکی روی ذره انجام می‌دهد، مثبت است.

(ب) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره افزایش می‌یابد.

(پ) پتانسیل الکتریکی نقطه A بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطه B است.

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

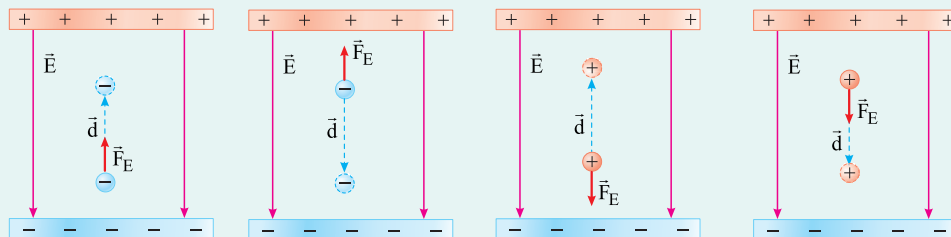
اگر بار الکتریکی q در میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا شود، روی بار کار انجام می‌شود که اندازه این کار برابر با تغییرات انرژی پتانسیل است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

میدان الکتریکی (N / C)

$$\Delta U_E = -W_E = -|q| E d \cos \theta \rightarrow \vec{d} \text{ و } \vec{F}_E \text{ زاویه بین}$$

جابه‌جایی (m) بار الکتریکی (C)

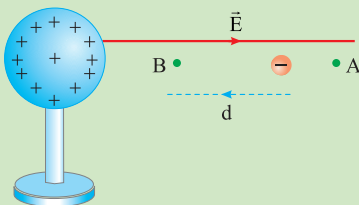
مطابق شکل‌های زیر، کاهشی یا افزایشی بودن انرژی پتانسیل الکتریکی به صورت زیر مشخص می‌شود:



(ت) بار منفی را در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم: میدان الکتریکی کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.	(پ) بار منفی را در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم: میدان الکتریکی کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.	(ب) بار مثبت را در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم: میدان الکتریکی کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.	(الف) بار مثبت را در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌کنیم: میدان الکتریکی کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.
---	--	---	--

ابتدا جهت میدان کره باردار را رسم می‌کنیم. (می‌دانیم میدان الکتریکی بار مثبت در جهت دور شدن از بار است.)

پاسخ خیلی تشریحی ✓



با توجه به شکل، عبارات را بررسی می‌کنیم:

ذره‌ای با بار منفی در خلاف جهت میدان حرکت می‌کند، پس انرژی پتانسیل ذره کاهش می‌یابد ($\Delta U_E < 0$) و طبق رابطه

$W_E = -\Delta U_E$ کاری که میدان الکتریکی روی ذره انجام می‌دهد، مثبت است ($W_E > 0$). (درستی عبارت «الف» و نادرستی

عبارت «ب»)

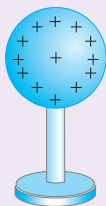
با حرکت در جهت میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد، پس:

(نادرستی عبارت «پ» $V_A < V_B$)

بنابراین فقط عبارت «الف» درست است.

در شکل زیر ذره باردار مثبت و کوچکی را از حالت سکون، از نقطه A به سمت کره باردار که روی پایه عایقی قرار دارد، نزدیک می کنیم و در نقطه B قرار می دهیم. (الف) در این جابه جایی، کار نیروی الکتریکی مثبت است یا منفی؟ (ب) کاری که ما در این جابه جایی انجام می دهیم، مثبت است یا منفی؟ (پ) انرژی پتانسیل ذره باردار در این جابه جایی چگونه تغییر می کند؟ (ت) پتانسیل نقطه های A و B را با هم مقایسه کنید.

(فیزیک (۲) - سؤال ۱۷ صفحه ۴۲ کتاب درسی)



B • + • A

۱۰۷

اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه‌های یک باتری برابر ۱۲ V است. اگر بار الکتریکی $q = -50 \text{ nC}$ از پایانه مثبت به

پایانه منفی این باتری جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند میکروژول و چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) ۶۰۰، کاهش می‌یابد. (۲) ۶۰۰، افزایش می‌یابد.
(۳) ۰/۶، کاهش می‌یابد. (۴) ۰/۶، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

هرگاه بار q در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ جابه‌جا شود و انرژی پتانسیل آن از U_1 به U_2 تغییر کند، اختلاف پتانسیل الکتریکی

بین این دو نقطه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{U_2 - U_1}{q}$$

با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ داریم:

$$\Delta U = q (V_- - V_+) = (-50 \times 10^{-9})(0 - 12) = +600 \times 10^{-9} \text{ J} = +0.6 \text{ } \mu\text{J}$$

(بار الکتریکی از پایانه مثبت به پایانه منفی جابه‌جا شده، یعنی $\Delta V = V_- - V_+$)

آنگاه به جهت حرکت که از پایانه مثبت به پایانه منفی است، توفه‌نگنی و ΔV رو مثبت در نظر بگیریم و یا به علامت بار توفه‌نگنی

توی دام‌گزینۀ (۳) می‌افتی و اگر اشتباهاً به پای 10^{-6} ، 10^{-9} را برای یکای نانوکولن در رابطه قرار بدی، توی دام‌گزینۀ‌های (۱)

و (۲) می‌افتی.

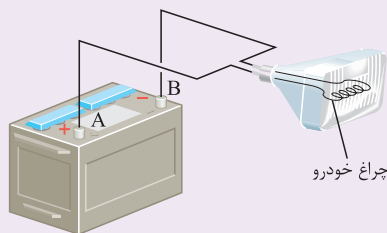
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گول نخوری ✗

اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه‌های باتری خودروی نشان داده شده در شکل برابر ۱۲/۰ V است. اگر بار الکتریکی

$-50/0$ کولن از پایانه منفی به پایانه مثبت باتری جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چه قدر تغییر می‌کند؟

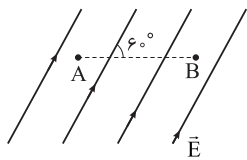
(فیزیک (۲) - مثال ۱۲-۱ صفحه ۲۵ کتاب درسی)



کتاب
درسی

در شکل زیر، اندازه میدان الکتریکی یکنواخت برابر $E = 5 \times 10^3 \text{ N/C}$ و فاصله دو نقطه A و B برابر ۶ cm است.

اگر پتانسیل الکتریکی این دو نقطه به ترتیب برابر V_B و V_A باشد، $V_B - V_A$ برابر چند ولت است؟



(۱) $150\sqrt{3}$

(۲) $-150\sqrt{3}$

(۳) 150

(۴) -150

پاسخ: گزینه ۴

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta U_E = -|q|Ed \cos \theta$$

که اگر بار را مثبت و θ را صفر در نظر بگیریم، داریم:

$$\Delta U_E = -qEd \quad (۱)$$

از طرفی، با توجه به تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی به صورت $\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}$ داریم:

$$\Delta U_E = q\Delta V \xrightarrow{(۱)} q\Delta V = -qEd \Rightarrow E = -\frac{\Delta V}{d}$$

که اگر در خلاف جهت میدان حرکت کنیم:

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

و اگر در جهت میدان حرکت کنیم، چون $\Delta V < 0$ است:

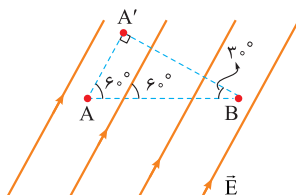
$$E = \frac{-(-\Delta V)}{d} = \frac{\Delta V}{d}$$

پس در حالت کلی، میدان الکتریکی یکنواخت طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$E = \frac{|\Delta V|}{d}$$

در شکل زیر، پاره خط A'B، عمود بر میدان الکتریکی قرار گرفته و نقاط A' و B هم‌پتانسیل هستند، پس برای محاسبه خواسته

سؤال، کافی است $V_{A'} - V_A$ را به دست آوریم:



$$|\Delta V| = Ed = E(AA') = 5 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-2} = 150 \text{ V}$$

اندازه ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف وتر است.

$V_{A'} - V_A$ در جهت میدان است، در نتیجه $\Delta V < 0$ می‌شود، یعنی:

$$V_B - V_A = V_{A'} - V_A = -150 \text{ V}$$

پاسخ خیلی تشریحی

یک جسم فلزی دوکی شکل توپر که روی پایه عایق قرار دارد، در تماس با کلاهک یک مولد واندوگراف، باردار شده است. کدام یک از موارد زیر درباره این جسم درست است؟
 (الف) بار الکتریکی فقط در سطح خارجی آن توزیع می شود.
 (ب) پتانسیل الکتریکی نقاط نوک تیز جسم بیشتر از سایر نقاط آن است.
 (پ) تراکم بار الکتریکی در نقاط نوک تیز جسم بیشتر از سایر نقاط آن است.
 (ت) میدان الکتریکی در داخل جسم، غیر صفر و یکنواخت است.

(۲) الف و پ

(۱) الف و ب

(۴) پ و ت

(۳) ب و ت

پاسخ: گزینه ۲

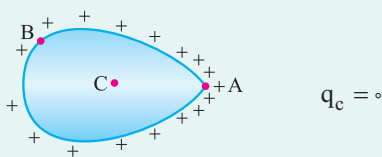
درس Box

هرگاه به یک جسم رسانا، بار داده شود یا جسم در یک میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، پس از مدت زمان بسیار کوتاهی بار در سطح خارجی رسانا توزیع می شود و نحوه توزیع بار در رسانا به گونه ای است که میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر می شود (در واقع بارها در تعادل الکتروستاتیکی قرار می گیرند).

از آن جایی که میدان الکتریکی داخل رسانایی که در تعادل الکتروستاتیکی است، برابر با صفر است؛ بنابراین همه نقاط رسانا پتانسیل یکسانی دارند.

هرگاه به یک جسم رسانای دوکی شکل که روی پایه عایق قرار دارد، بار بدهیم، تراکم بار در نقاط نوک تیز سطح از سایر نقاط بیشتر خواهد بود.

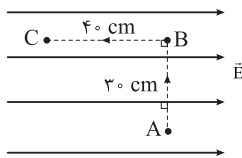
در شکل مقابل، تراکم بار در نقطه A بیشتر از نقطه B است.



الف) وقتی بار q به یک جسم رسانا داده می شود، بار به سطح جسم منتقل می شود تا جسم به تعادل الکتروستاتیکی برسد. در این حالت، تراکم بار در نقاط نوک تیز بیشتر از سایر نقاط است و هنگامی که یک رسانا در تعادل است، پتانسیل الکتریکی تمام نقاط آن با هم برابر است، همچنین میدان الکتریکی خالص درون رسانا صفر است. طبق توضیحات بالا، عبارت های «الف» و «پ» (گزینه ۲) درست هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -8 \mu C$ توسط یک عامل خارجی، از مسیر مشخص شده از نقطه A تا نقطه C جابه‌جا می‌شود. اگر اندازه میدان الکتریکی یکنواخت $4 \times 10^5 \text{ N/C}$ و تندی جسم در دو نقطه A و C برابر باشد، در این جابه‌جایی، کار انجام‌شده توسط عامل خارجی چند ژول است؟



- (۱) $1/28$
(۲) $-1/28$
(۳) $1/6$
(۴) $-1/6$

پاسخ: گزینه ۲

کافی است برای هر قسمت از مسیر، جداگانه رابطه $W_E = |q| E d \cos \theta$ را بنویسید.

Hint

درس Box

(۱) کار انجام‌شده توسط میدان الکتریکی بر ذره‌ای با بار q که در میدان الکتریکی به اندازه d جابه‌جا شده است از رابطه زیر به دست می‌آید:

میدان الکتریکی (N/C) کار نیروی الکتریکی (J)

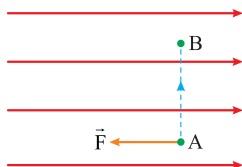
$$W_E = |q| E d \cos \theta \rightarrow \text{زاویه بین نیروی } \vec{F}_E \text{ و جابه‌جایی } \vec{d}$$

بار الکتریکی (C) جابه‌جایی (m)

(۲) کار کل یا مجموع کار انجام‌شده توسط میدان و عامل خارجی، برابر تغییرات انرژی جنبشی است:

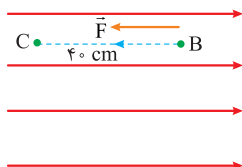
$$W_{\text{میدان}} + W_{\text{خارجی}} = \Delta K$$

گام اول: جابه‌جایی AB بر خط‌های میدان الکتریکی عمود است، پس $\theta = 90^\circ$ ، در رابطه کار انجام‌شده توسط عامل خارجی داریم:



$$W_{AB} = |q| E d \cos \theta \xrightarrow{\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos 90^\circ = 0} W_{AB} = 0$$

گام دوم: در جابه‌جایی B تا C، θ برابر با صفر درجه است و میدان الکتریکی روی بار q کار انجام می‌دهد، پس:



$$W_{BC} = |q| E d \cos \theta = 8 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-2} \times \cos 0^\circ \Rightarrow W_{BC} = +1/28 \text{ J}$$

گام سوم: تندی ذره در نقطه‌های A و C یکسان است، پس تغییرات انرژی جنبشی از A تا C برابر صفر است و داریم:

$$W_{\text{میدان}} + W_{\text{خارجی}} = \Delta K \xrightarrow{\Delta K = 0} W_{\text{میدان}} = W_{AB} + W_{BC} = 0 + 1/28 \text{ J} \rightarrow 1/28 + W_{\text{خارجی}} = 0 \Rightarrow W_{\text{خارجی}} = -1/28 \text{ J}$$

پاسخ خیلی تشریحی

چگالی سطحی بار الکتریکی یک سطح فلزی بزرگ که بار الکتریکی به طور یکنواخت در آن توزیع شده، برابر 8 nC/cm^2 است. در هر میلی‌متر مربع از این سطح، اختلاف تعداد الکترون‌ها و پروتون‌ها برابر کدام است؟
($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

$$5 \times 10^8 \text{ (۲)}$$

$$5 \times 10^7 \text{ (۱)}$$

$$5 \times 10^{10} \text{ (۴)}$$

$$5 \times 10^9 \text{ (۳)}$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

چگالی سطحی بار الکتریکی:

تراکم بار الکتریکی در سطح یک جسم را چگالی سطحی بار الکتریکی می‌گوییم.

σ : چگالی سطحی بار (C/m^2)

Q : بار الکتریکی موجود در سطح (C)

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

A : مساحت سطحی که بار الکتریکی روی آن توزیع شده است. (m^2)

گام اول: با توجه به رابطه چگالی سطحی بار الکتریکی، بار موجود در هر میلی‌متر مربع از این سطح فلزی را محاسبه می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow Q = \sigma A \xrightarrow[A=1 \text{ mm}^2 = 10^{-2} \text{ cm}^2]{\sigma = 8 \text{ nC/cm}^2}$$

$$Q = 8 \times 10^{-2} \text{ nC} = 8 \times 10^{-2} \text{ nC} \times \frac{10^{-9} \text{ C}}{1 \text{ nC}} = 8 \times 10^{-11} \text{ C}$$

گام دوم: در یک جسم خنثی، تعداد الکترون‌ها و پروتون‌ها برابرند، پس Q بار موجود در سطح خارجی جسم رسانا است که به دلیل اختلاف تعداد الکترون‌ها و پروتون‌ها ایجاد شده است. کافی است به کمک رابطه $Q = ne$ تعداد بار بنیادی که این اختلاف را به وجود آورده، محاسبه کنیم:

$$Q = ne \Rightarrow n = \frac{Q}{e} = \frac{8 \times 10^{-11}}{1/6 \times 10^{-19}} = 5 \times 10^8$$

حجم کره فلزی A، ۸ برابر حجم کره فلزی B و بار الکتریکی کره A، ۲ برابر بار الکتریکی کره B است. چگالی سطحی بار الکتریکی کره A، چند برابر چگالی سطحی بار الکتریکی کره B است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

از رابطه $\sigma = \frac{Q}{A}$ ، نسبت چگالی سطحی جسم (۱) به چگالی سطحی جسم (۲) را به دست می آوریم:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \times \frac{A_2}{A_1}$$

اگر جسم ها کروی باشند، با توجه به این که مساحت کره برابر با $A = 4\pi r^2$ است، داریم:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \times \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

گام اول: به کمک رابطه حجم دو کره فلزی، نسبت شعاع ها را به دست می آوریم:

$$V_A = 8V_B \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r_A^3 = 8\left(\frac{4}{3}\pi r_B^3\right) \Rightarrow r_A = 2r_B$$

گام دوم: به کمک رابطه به دست آمده در درس پاکس، داریم:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{Q_A}{Q_B} \times \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 = \frac{2Q_B}{Q_B} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فاصله بین صفحات خازنی برابر d ، مساحت هر یک از صفحه‌های آن 40 cm^2 و بین صفحات آن هوا است. اگر فاصله بین صفحات خازن 4 mm کاهش یابد، ظرفیت خازن $28/8$ پیکوفاراد افزایش می‌یابد. d برابر چند سانتی‌متر است؟

$$(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2})$$

۶ (۴)

۵ (۳)

۰ / ۶ (۲)

۰ / ۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

ظرفیت خازن از ویژگی‌های ساختاری خازن است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow (m^2) \text{ مساحت هر یک از صفحه‌ها}$$

$$\downarrow \rightarrow (m) \text{ فاصله صفحه‌ها از هم}$$

ضریب گذردهی

الکتریکی خلأ

$$(\frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2} \text{ یا } \text{F/m})$$

● ثابت دی‌الکتریک یکا ندارد.

● ثابت دی‌الکتریک هوا برابر یک فرض می‌شود و ثابت دی‌الکتریک سایر مواد نارسانا بزرگ‌تر از یک است.

رابطه ظرفیت خازن را در دو حالت می‌نویسیم و اختلاف آن‌ها را برابر با $28/8 \text{ pF}$ قرار می‌دهیم تا فاصله d را به دست آوریم:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$C_2 - C_1 = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d_2} - \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d_1} = \kappa \epsilon_0 A \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)$$

$$\frac{C_2 - C_1 = 28/8 \text{ pF} = 28/8 \times 10^{-12} \text{ F}, \kappa = 1}{\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2}, A = 40 \text{ cm}^2 = 40 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \rightarrow 28/8 \times 10^{-12} = 1 \times 9 \times 10^{-12} \times 40 \times 10^{-4} \left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} \right)$$

$$\frac{d_1 - d_2 = 4 \text{ mm} = 4 \times 10^{-3} \text{ m}}{10^{-6}} \rightarrow 10^{-6} = \frac{4 \times 10^{-3}}{d_1 d_2} \xrightarrow{d_1 = d} \frac{d_1}{d_2} = \frac{4 \times 10^{-3}}{d - 4 \times 10^{-3}}$$

$$10^{-6} = \frac{10^{-3}}{d(d - 4 \times 10^{-3})} \Rightarrow d^2 - 4 \times 10^{-3} d = 5 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow d^2 - 4 \times 10^{-3} d - 5 \times 10^{-6} = 0 \Rightarrow (d - 5 \times 10^{-3})(d + 10^{-3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 5 \times 10^{-3} \text{ m} = 0.5 \text{ cm} \text{ ق ق} \\ d = -10^{-3} \text{ m} \text{ غ ق} \end{cases}$$

اختلاف پتانسیل دوسر خازنی به ظرفیت $25.5 \mu F$ در صد افزایش می‌یابد و در اثر آن، انرژی ذخیره شده در خازن $90 \mu J$

تغییر می‌کند. بار الکتریکی اولیه ذخیره شده در خازن چند میکروکولن بوده است؟

۶۲ / ۵ (۲)

۴۰ (۱)

۱۲۵ (۴)

۱۰۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

انرژی (J)

انرژی ذخیره شده در خازن از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \rightarrow \text{اختلاف پتانسیل (V)}$$

ظرفیت (F)

ظرفیت خازن: نسبت بار الکتریکی ذخیره شده روی صفحه‌های یک خازن به اختلاف پتانسیل دو سر صفحه‌های آن، همواره عدد ثابتی است که به این نسبت ثابت، ظرفیت خازن می‌گویند:

$$C = \frac{Q}{V} \leftarrow \text{ظرفیت خازن (F)}$$

اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها (V)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به رابطه $U = \frac{1}{2} C V^2$ و ثابت بودن ظرفیت خازن، وقتی اختلاف پتانسیل دو سر خازن افزایش می‌یابد، انرژی ذخیره شده در آن نیز افزایش می‌یابد.

$$V_2 = V_1 + 0.25 V_1 = 1.25 V_1 = \frac{5}{4} V_1 \Rightarrow U_2 > U_1 \Rightarrow \Delta U > 0$$

گام دوم: با توجه به معلوم بودن تغییرات انرژی خازن، اختلاف پتانسیل خازن در حالت اول را به دست می‌آوریم:

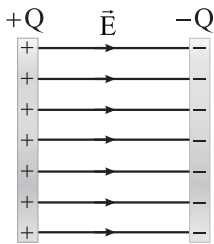
$$U_2 - U_1 = \frac{1}{2} C V_2^2 - \frac{1}{2} C V_1^2 \Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2} C (V_2^2 - V_1^2) \xrightarrow[C=5 \mu F]{\Delta U=90 \mu J, V_2=\frac{5}{4} V_1} 90 = \frac{1}{2} \times 5 \left(\left(\frac{5}{4} V_1 \right)^2 - V_1^2 \right)$$

$$\Rightarrow 36 = \frac{25}{16} V_1^2 - V_1^2 \Rightarrow 36 = \frac{9}{16} V_1^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 6 = \frac{3}{4} V_1 \Rightarrow V_1 = 8 V$$

گام سوم: بار الکتریکی اولیه ذخیره شده در خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$Q_1 = C V_1 \xrightarrow[V_1=8 V]{C=5 \mu F} Q_1 = 5 \times 8 = 40 \mu C$$

در شکل زیر، دو صفحه فلزی که بار الکتریکی آن‌ها هم‌اندازه و ناهم‌نام است، در فاصله معینی از هم قرار دارند. اگر



فاصله دو صفحه نصف شود، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

(الف) اندازه میدان الکتریکی بین دو صفحه، ۲ برابر می‌شود.

(ب) اختلاف پتانسیل الکتریکی دو صفحه، ۲ برابر می‌شود.

(پ) انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در میدان الکتریکی بین دو صفحه، $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

(۱) ظرفیت خازن با ثابت دی الکتریک (κ) و مساحت صفحه‌های آن (A) نسبت مستقیم دارد، ولی با فاصله میان دو صفحه آن (d) نسبت وارون دارد.

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2}$$

بار ذخیره‌شده در خازن (Q)

(۲) انرژی ذخیره‌شده در یک خازن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

انرژی (J)

ظرفیت خازن (F)

(۳) میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن، یکنواخت است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)

$$E = \frac{V}{d}$$

میدان الکتریکی یکنواخت (V/m)

فاصله بین دو صفحه (m)

گام اول: با توجه به ثابت بودن κ و A ، نسبت ظرفیت این خازن در حالت دوم به حالت اول را حساب می‌کنیم.

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{d_1}{d_2} \xrightarrow{d_2 = \frac{1}{2}d_1} \frac{C_2}{C_1} = \frac{d_1}{\frac{1}{2}d_1} = 2$$

بنابراین ظرفیت خازن، ۲ برابر می‌شود.

گام دوم: بار الکتریکی خازن ثابت می‌ماند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$V = \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{C_1}{C_2} \xrightarrow{\frac{C_2}{C_1} = 2} \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}$$

یعنی اختلاف پتانسیل دو سر خازن، نصف می‌شود و مورد «ب» نادرست است.

گام سوم: نسبت میدان الکتریکی بین دو صفحه خازن در حالت دوم به حالت اول را حساب می‌کنیم:

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{V_2}{V_1} \times \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2} \times \frac{d_1}{\frac{1}{2}d_1} = 1$$

یعنی میدان الکتریکی بین دو صفحه، ثابت می‌ماند و مورد «الف» نادرست است.

گام چهارم: نسبت انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در حالت دوم به حالت اول را محاسبه می‌کنیم:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \xrightarrow{Q_1 = Q_2} \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین فقط مورد «پ» درست است.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی

- (۱) در گذشته، استفادهٔ انسان‌ها از مواد، محدود به برخی مواد طبیعی مانند چوب، پشم، سفال و خاک بوده است.
- (۲) با گرمادادن به مواد و افزودن آن‌ها به یکدیگر، به یقین خواص آن‌ها بهبود می‌یابد.
- (۳) امروزه میزان تولید و مصرف نسبی سوخت‌های فسیلی نسبت به مواد معدنی و فلزها بیشتر است.
- (۴) با وجود استخراج مقادیر زیادی ماده از کرهٔ زمین، جرم کلی مواد در کرهٔ زمین به تقریب ثابت می‌ماند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

موادی که از طبیعت به دست می‌آیند، *یه پورایی!* دوباره به طبیعت بازمی‌گردند و در نتیجه **جرم کل مواد** در کرهٔ زمین ثابت می‌ماند. بررسی گزینه‌های نادرست:

- گزینهٔ (۱): سفال جزء مواد ساختگی محسوب می‌شود و نه طبیعی!
- گزینهٔ (۲): گرمادادن به مواد و افزودن آن‌ها به یکدیگر، سبب تغییر و **گاهی** بهبود خواص می‌شود.
- گزینهٔ (۳): امروزه میزان تولید و مصرف نسبی مواد معدنی نسبت به سوخت‌های فسیلی و فلزها بیشتر است.
- فلزها > سوخت‌های فسیلی > مواد معدنی: میزان تولید و مصرف نسبی

۱۱۷ با افزایش عدد اتمی عناصرها در هر دوره و هر گروه از جدول تناوبی، به ترتیب کدام ویژگی آنها افزایش می‌یابد؟
(گاز نجیب هر دوره را در نظر نگیرید.)

- (۱) شعاع اتمی - خصلت فلزی
- (۲) تعداد لایه‌های الکترونی اشغال شده - تعداد الکترون‌های ظرفیتی
- (۳) خصلت نافلزی - شعاع اتمی
- (۴) تعداد الکترون‌های ظرفیتی - تعداد زیرلایه‌های الکترونی اشغال شده

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

روندهای تناوبی در جدول:



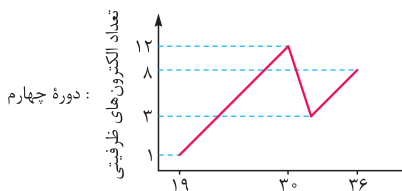
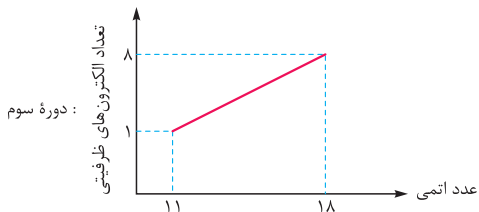
پاسخ خیلی تشریحی

در هر دوره، از چپ به راست، خصلت نافلزی افزایش و در هر گروه، از بالا به پایین، شعاع اتمی افزایش می‌یابد.
بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه (۱): در یک دوره، با افزایش عدد اتمی، شعاع اتمی کاهش می‌یابد.

گزینه (۲): در یک دوره، با افزایش عدد اتمی، تعداد لایه‌های الکترونی اشغال شده ثابت است. همچنین در یک گروه، از بالا به پایین، تعداد الکترون‌های ظرفیتی ثابت است (به جز در گروه ۱۸ به خاطر وجود هلیوم).

گزینه (۴): تعداد الکترون‌های ظرفیتی آنها در دوره اول تا سوم، با افزایش عدد اتمی افزایش می‌یابد، ولی در دوره‌های بعدی ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد:



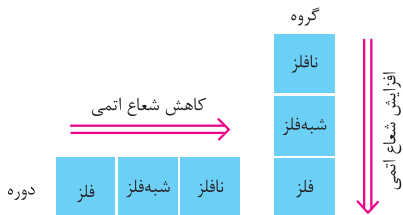
کدام مورد دربارهٔ جدول تناوبی درست است؟

- (۱) در گروه ۱۴، بین اولین عنصر فلزی و اولین عنصر نافلزی، یک عنصر شبه‌فلزی وجود دارد.
- (۲) در دورهٔ چهارم برخلاف دورهٔ سوم، تنها عنصرهای فلزی و نافلزی وجود دارد.
- (۳) در دورهٔ سوم، شمار عنصرهای فلزی با شمار عنصرهای نافلزی برابر است.
- (۴) شعاع اتمی یک عنصر شبه‌فلزی، به یقین از شعاع اتمی عنصر نافلزی هم‌دوره یا هم‌گروه آن بزرگ‌تر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در هر دوره، عنصر سمت راست شبه‌فلز، عنصر نافلز و در هر گروه، عنصر بالایی شبه‌فلز، نافلز می‌باشد.

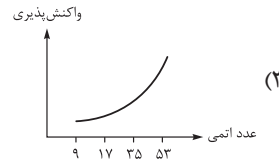
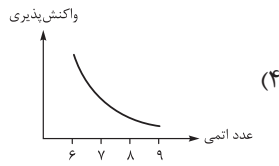
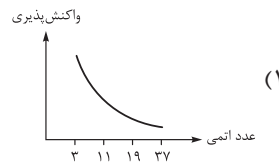
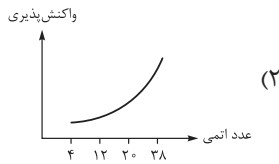


بررسی گزینه‌های نادرست:

- گزینهٔ (۱): در گروه ۱۴ بین اولین عنصر فلزی ($_{50}\text{Sn}$) و اولین عنصر نافلزی ($_{6}\text{C}$)، دو شبه‌فلز وجود دارد ($_{33}\text{Ge}$ ، $_{34}\text{Si}$).
- گزینهٔ (۲): در دورهٔ چهارم همانند دورهٔ سوم، سه نوع عنصر فلزی، نافلزی و شبه‌فلزی وجود دارد.
- گزینهٔ (۳): در دورهٔ سوم، مجموع شمار عنصرهای فلزی و شبه‌فلزی، با شمار عنصرهای نافلزی برابر است.

Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar
فلز			شبه‌فلز	نافلز			

براساس مطالب کتاب درسی، کدام نمودار درباره مقایسه واکنش پذیری عناصرها درست است؟



پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در گزینه (۲) اعداد اتمی داده شده، مربوط به فلزات قلیایی خاکی (گروه دوم) است. با افزایش عدد اتمی این عناصرها، واکنش پذیری افزایش می یابد (نمودار صعودیه).

بررسی گزینه های نادرست:

گزینه (۱): اعداد اتمی داده شده، مربوط به فلزات قلیایی (گروه اول) است. با افزایش عدد اتمی این عناصرها، واکنش پذیری افزایش می یابد (نمودار باید صعودی باشد).

گزینه (۳): اعداد اتمی داده شده مربوط به گروه هالوژن ها (گروه ۱۷) می باشد که در این گروه با افزایش عدد اتمی، واکنش پذیری کاهش می یابد. (نمودار باید نزولی باشد)

گزینه (۴): اعداد اتمی داده شده مربوط به عناصر دوره دوم است که در نافلزهای یک دوره با افزایش عدد اتمی، واکنش پذیری افزایش می یابد (نمودار باید صعودی باشد).

۱۲۰ با توجه به داده‌های جدول زیر که مربوط به عنصرهای دوره چهارم جدول تناوبی است، کدام مورد درست است؟

D^{3+}	E^{x-}	M^{2+}	یون
۱	b	۱/۵	نسبت شمار الکترون‌ها با $l=0$ به $l=2$
۲	۷	a	شمار الکترون‌های آخرین لایه اشغال شده اتم عنصر

(۱) نسبت مقدار b به x برابر ۱/۲ است.

(۲) مجموع $(n+1)$ الکترون‌های ظرفیتی اتم M با عنصر A برابر است.

(۳) عنصر D با آلومینیم هم‌گروه بوده و دارای ۳ الکترون ظرفیتی است.

(۴) مقدار a با شمار الکترون‌ها در بیرونی‌ترین زیرلایه اشغال شده اتم نهمین عنصر واسطه جدول، برابر است.

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا باید عنصرهای مورد نظر را پیدا کنیم:

$$D^{3+} : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^6 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌ها با } l=0}{\text{شمار الکترون‌ها با } l=2} = \frac{6}{6} = 1$$

عنصر D همان $27Co$ است. $D : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^7 / 4s^2$

عنصر E همان $35Br$ است. $E : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^{10} / 4s^2 4p^5$

$$E^{-} : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^{10} / 4s^2 4p^6 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌ها با } l=0}{\text{شمار الکترون‌ها با } l=2} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$M^{2+} : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^4 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌ها با } l=0}{\text{شمار الکترون‌ها با } l=2} = \frac{4}{4} = 1$$

عنصر M همان $24Cr$ است. $M : 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^5 / 4s^1$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۲):

$$M : \text{مجموع } (n+1) \text{ الکترون‌های ظرفیتی اتم } M : (3+2) \times 5 + (4+0) \times 1 = 29$$

آرایش الکترونی فشرده $24A$ به صورت زیر است:



$$A : \text{مجموع } (n+1) \text{ الکترون‌های ظرفیتی اتم } A : (4+0) \times 2 + (4+1) \times 4 = 28$$

گزینه (۳): عنصر D در گروه ۹ و دارای ۹ الکترون ظرفیتی است در حالی که Al در گروه ۱۳ بوده و دارای ۳ الکترون ظرفیتی است.

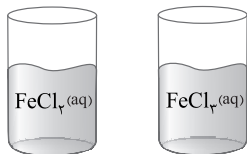
گزینه (۴): اتم نهمین عنصر واسطه $29Cu$ می‌باشد؛ آرایش الکترونی فشرده $29Cu$ به صورت زیر است:



بیرونی‌ترین زیرلایه

شمار الکترون‌های آخرین لایه اشغال شده اتم عنصر M با شمار الکترون‌ها در بیرونی‌ترین زیرلایه اشغال شده اتم $29Cu$ برابر است.

در دو لوله آزمایش جداگانه مطابق شکل‌های زیر، ۲۵ میلی‌لیتر از محلول‌های آهن (II) کلرید و آهن (III) کلرید با غلظت‌های مولی یکسان وجود دارد. اگر به هر دو لوله، مقدار کافی سدیم هیدروکسید اضافه کنیم تا واکنش به طور کامل انجام شود، در کدام لوله، رسوب قرمز - قهوه‌ای رنگ تولید می‌شود و مقایسهٔ شمار مول رسوب تولیدشده در آن‌ها به کدام صورت است؟



(a)

(b)

a = b, a (۲)

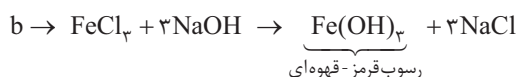
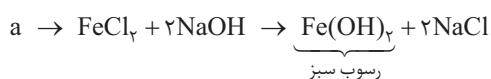
a = b, b (۴)

b > a, a (۱)

a > b, b (۳)

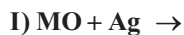
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

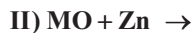


چون ضرایب استوکیومتری FeCl_3 ، Fe(OH)_3 و FeCl_3 با هم برابر است و همچنین حجم و غلظت مولی محلول FeCl_3 با FeCl_3 یکسان است، پس تعداد مول رسوب‌های تولیدشده برابر خواهد بود.

در بین واکنش‌های زیر، تنها یکی از آن‌ها به طور طبیعی انجام می‌شود. بر این اساس کدام مورد نادرست است؟



(MO، نماد اکسید فلز M است.)



(۱) واکنش‌پذیری فلز نقره از فلز M کم‌تر است.

(۲) واکنش $M + Na_2O \rightarrow$ به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

(۳) M می‌تواند فلز مس باشد.

(۴) برای استخراج فلز روی از سنگ معدن آن، نمی‌توان از فلز M استفاده کرد.

پاسخ: گزینه ۲

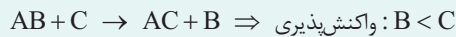
واکنش‌پذیری عناصر:

درس‌Box

واکنش‌پذیری فلزهای قلیایی (مانند سدیم و پتاسیم) از واکنش‌پذیری فلزهای واسطه (مانند آهن و روی) بیشتر است. همچنین واکنش‌پذیری فلزهای واسطه‌ای مانند آهن و روی از فلزهای واسطه‌ای مانند مس، نقره و طلا بیشتر است.

رفتار	واکنش‌پذیری		
	زیاد	کم	ناچیز
نام فلز	سدیم، پتاسیم	آهن، روی	مس، نقره، طلا

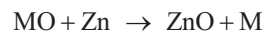
اگر یک واکنش به ما بدهند که در دو طرفش یک عنصر آزاد وجود داشته باشد و بگویند که این واکنش به طور طبیعی انجام می‌شود، ما خیلی سریع می‌توانیم واکنش‌پذیری دو عنصر آزاد در دو طرف معادله را با هم مقایسه کنیم:



عنصر ترکیب عنصر ترکیب

در معادله کلی بالا، واکنش‌پذیری C از B بیشتر بوده است، به همین دلیل میل بیشتری به تشکیل ترکیب داشته؛ از این‌رو با انجام واکنش، **ماش رو با B عوض کرده**.

چون واکنش‌پذیری Zn نسبت به Ag بیشتر است، فقط واکنش دوم انجام می‌شود:



بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): **درسته!** مقایسه واکنش‌پذیری عناصر به صورت زیر است:

واکنش‌پذیری: $Zn > M > Ag$

گزینه (۲): واکنش‌پذیری M از Zn کم‌تر است و Zn نیز از Na کم‌تر می‌باشد؛ پس مقایسه واکنش‌پذیری عناصر به صورت زیر است:

واکنش‌پذیری: $Na > Zn > M$

گزینه (۳): چون واکنش‌پذیری Zn از Cu بیشتر می‌باشد؛ Zn می‌تواند با ترکیبات مس به طور طبیعی واکنش دهد.

گزینه (۴): فلز M نمی‌تواند با ترکیب فلز روی به طور طبیعی واکنش دهد، چون واکنش‌پذیری Zn از M بیشتر است.

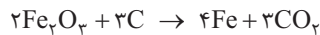
پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر در واکنش استخراج آهن به کمک کربن، به ازای مصرف ۱ تن آهن (III) اکسید با خلوص ۸۰٪، ۸/۴ متر مکعب گاز کربن دی اکسید در شرایط STP تولید شود، بازده درصدی واکنش کدام است؟ (O = ۱۶, Fe = ۵۶: g.mol⁻¹)

۷۵ (۴) ۶۰ (۳) ۵۰ (۲) ۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

معادله موازنه شده واکنش استخراج آهن به کمک کربن به صورت زیر است:



$$0.1 \text{ ton Fe}_2\text{O}_3 \times \frac{10^3 \text{ kg}}{1 \text{ ton}} \times \frac{10^3 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \times \frac{80 \text{ g Fe}_2\text{O}_3}{100 \text{ g Fe}_2\text{O}_3 \text{ خالص}} \times \frac{1 \text{ mol Fe}_2\text{O}_3}{160 \text{ g Fe}_2\text{O}_3}$$

$$\times \frac{3 \text{ mol CO}_2}{2 \text{ mol Fe}_2\text{O}_3} \times \frac{22.4 \text{ L CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{1 \text{ m}^3 \text{ CO}_2}{1000 \text{ L CO}_2} = 16/8 \text{ m}^3 \text{ CO}_2$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 = \frac{8/4 \text{ m}^3 \text{ CO}_2}{16/8 \text{ m}^3 \text{ CO}_2} \times 100 = 50\%$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

به چور دیگه

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{100 \times \frac{80}{100} \times X}{2 \times 160} = \frac{8/4 \times 10^3}{3 \times 22.4/4} \Rightarrow X = 50$$

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) بستر دریا به طور معمول منبعی غنی از برخی فلزهای واسطه مانند منگنز، کبالت و نیکل است.
- (۲) بررسی چرخه عمر به صنایع کمک می‌کند تا به سمت رفتارهای سازگارتر با محیط زیست و توسعه پایدار پیش بروند.
- (۳) روش استفاده از گیاهان جاذب فلز، برای عنصرهای مس و نیکل مناسب است.
- (۴) فلزها منابعی تجدیدناپذیرند و در استخراج آن‌ها، تنها درصد کمی از سنگ معدن به فلز تبدیل می‌شود.

پاسخ: گزینه ۳

گزینه (۳) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

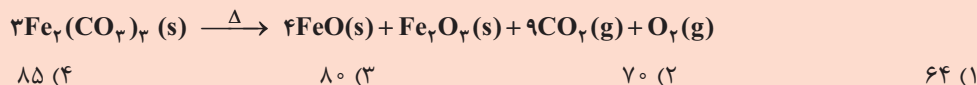
پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی گزینه‌ها:

- گزینه (۱): گنج عظیم در اعماق دریاها، در برخی مناطق محتوی سولفید چندین فلز واسطه و در برخی مناطق دیگر به صورت کلوخه‌ها و پوسته‌هایی غنی از فلزهایی مانند منگنز، کبالت، آهن، نیکل، مس و ... یافت می‌شود.
- گزینه (۲): ارزیابی چرخه عمر، حاصل تلاش برای یافتن شاخص‌هایی است که کمک می‌کنند صنایع گوناگون در مسیر بهره‌گیری از دانش فنی و تخصصی سازگارتر با محیط زیست حرکت کنند و رفتار و عملکرد خود را در مسیر رسیدن به توسعه پایدار اصلاح کنند.
- گزینه (۳): یکی از روش‌های بیرون کشیدن فلز از لابه‌لای خاک، استفاده از گیاهان است. در این روش در معدن یا خاک دارای فلز، گیاهانی را می‌کارند که می‌توانند آن فلز را جذب کنند. سپس گیاه را برداشت می‌کنند، می‌سوزانند و از خاکستر حاصل، فلز را جداسازی می‌کنند. این روش برای استخراج فلزهای روی و نیکل مقرون به صرفه نیست.
- گزینه (۴): درسته!

۱۲۵

نمونه‌ای به جرم ۱۰۰ گرم آهن (III) کربنات ناخالص مطابق معادله زیر به طور کامل تجزیه می‌شود. اگر پس از پایان واکنش، جرم کل مواد جامد درون ظرف برابر ۶۵/۷۶ گرم باشد، درصد خلوص آهن (III) کربنات اولیه به تقریب کدام است؟ (ناخالصی‌ها در واکنش شرکت نمی‌کنند.)



پاسخ: گزینه ۲

کاهش جرم مخلوط واکنش به دلیل خروج گاز از ظرف واکنش است:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

مجموع جرم گازهای تولیدشده = کاهش جرم مخلوط واکنش

$$\Rightarrow \text{مجموع جرم } \text{CO}_2 \text{ و } \text{O}_2 = 100 - 65.76 = 34.24 \text{ g}$$

$$34.24 \text{ g}(\text{CO}_2 + \text{O}_2) \times \frac{3 \text{ mol Fe}_2(\text{CO}_3)_3}{(9 \times 44) \text{ g CO}_2 + (1 \times 32) \text{ g O}_2} \times \frac{292 \text{ g Fe}_2(\text{CO}_3)_3}{1 \text{ mol Fe}_2(\text{CO}_3)_3}$$

$$= 70.08 \text{ g Fe}_2(\text{CO}_3)_3 \text{ خالص}$$

$$\text{Fe}_2(\text{CO}_3)_3 \text{ درصد خلوص} = \frac{\text{جرم خالص Fe}_2(\text{CO}_3)_3}{\text{جرم ناخالص Fe}_2(\text{CO}_3)_3} \times 100$$

$$= \frac{70.08}{100} \times 100 = 70.08\% \approx 70\%$$

$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{100 \times \frac{x}{100}}{3 \times 292} = \frac{34.24}{(9 \times 44) + (1 \times 32)} \Rightarrow x = 70.08$$

به‌جور دیگر

کنکور

از تجزیه مقداری کلسیم سولفات دارای ناخالصی بر اثر حرارت، ۱۳/۴۴ لیتر گاز پس از تبدیل به شرایط استاندارد تشکیل می‌شود. اگر جرم ناخالصی باقی‌مانده، برابر ۱۳/۶ گرم باشد، درصد خلوص کلسیم سولفات در مخلوط آغازی کدام است؟ (ناخالصی در واکنش شرکت نمی‌کند، معادله واکنش موازنه شود، $\text{Ca} = 40, \text{S} = 32, \text{O} = 16: \text{g.mol}^{-1}$)



(سوال ۸۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

۹۰ (۴) ۸۵ (۳) ۸۰ (۲) ۷۵ (۱)

مخلوطی از سه آلکان راست‌زنجیر گازی (A، B و X) در دما و فشار اتاق موجود است. اگر با سرد کردن این مخلوط

آلکان B آسان‌تر به مایع تبدیل شود، کدام مورد درست است؟ ($H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)

(۱) میزان فراریت آلکان B از X بیشتر است.

(۲) اگر B، سوخت فندک باشد، در ساختار آلکان A می‌تواند ۹ پیوند اشتراکی وجود داشته باشد.

(۳) اگر X، پروپان باشد، در نام آلکان A پیشوندی که شمار اتم‌های کربن را معلوم کند، وجود ندارد.

(۴) اگر درصد جرمی کربن در آلکان A برابر 80% باشد، درصد جرمی کربن در آلکان B کمتر از 80% است.

پاسخ: گزینه ۳



هر چه نقطه جوش یک گاز بیشتر باشد، در شرایط یکسان، آسان‌تر به مایع تبدیل می‌شود:

$A \rightarrow B$: ترتیب مایع شدن $\Rightarrow A > B$: نقطه جوش

آلکان B که آسان‌تر به مایع تبدیل می‌شود، نقطه جوش بالاتری نسبت به A و X دارد:

X, A, B: نقطه جوش $B > A > X$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): هر چه نقطه جوش یک ماده بیشتر باشد، میزان فراریت آن کم‌تر است.

گزینه (۲): سوخت فندک، بوتان (C_4H_{10}) است. می‌دانیم در آلکان‌های راست‌زنجیر، با افزایش شمار اتم‌های کربن، نقطه جوش افزایش می‌یابد؛ پس اگر B، بوتان با ۱۳ پیوند اشتراکی باشد، X آلکانی با کم‌تر از ۴ اتم کربن و کم‌تر از ۱۳ پیوند اشتراکی است، اما دقت کنید که شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار آلکان‌ها برابر $3n + 1$ است و نمی‌تواند مضرب ۳ (مانند عدد ۹) باشد.



از آن‌جا که هر اتم کربن، چهار الکترون و هر اتم هیدروژن، یک الکترون به اشتراک می‌گذارد و از طرفی هر پیوند اشتراکی شامل دو الکترون است، تعداد پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(\text{تعداد اتم‌های هیدروژن} \times 1) + (\text{تعداد اتم‌های کربن} \times 4)}{2} = \text{تعداد پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها}$$

در ضمن، شمار پیوندهای $C-H$ در هیدروکربن‌ها برابر با شمار اتم‌های هیدروژن آن‌ها است.

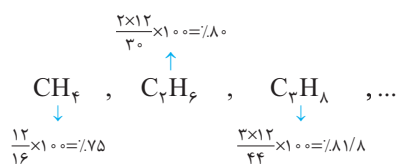
مثال تعداد پیوندهای اشتراکی در یک آلکان n کربنی (C_nH_{2n+2}) برابر با $(3n + 1)$ است:

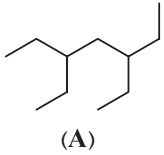
$$\frac{\overbrace{C}^1 + \overbrace{2n+2}^2}{2} = \frac{1 + 2n + 2}{2} = \frac{3n + 3}{2} = 3n + 1$$

در هر آلکان با n اتم کربن، $(n - 1)$ پیوند کربن - کربن ($C-C$) و $(2n + 2)$ پیوند کربن - هیدروژن ($C-H$) وجود دارد. هم‌چنین برای رسم ساختار پیوند - خط یک آلکان با n اتم کربن به $(n - 1)$ خط نیاز است.

گزینه (۳): آلکان‌های راست‌زنجیر ۱ تا ۴ کربنی در دما و فشار اتاق، گازی‌اند. اگر X پروپان (C_3H_8) باشد، B که نقطه جوش بالاتری دارد، آلکانی سنگین‌تر از آن (یعنی بوتان) است؛ پس A می‌تواند آلکان ۱ یا ۲ کربنی (CH_4 , C_2H_6) باشد. در نام آلکان‌های ۱ تا ۴ کربنی (متان، اتان، پروپان و بوتان) پیشوندی که شمار اتم‌های کربن را معلوم کند، وجود ندارد.

گزینه (۴): تعداد اتم‌های کربن آلکان B با نقطه جوش بالاتر، بیشتر از آلکان A است. در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، درصد جرمی کربن افزایش می‌یابد:





کدام موارد زیر دربارهٔ آلکان‌های داده‌شده، درست است؟ ($H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)

(B) $(CH_3)_2CHCH_2CH(CH_3)_2$

الف) در نام‌گذاری A برخلاف B، برای بیان شاخه‌های فرعی از پیشوند استفاده نمی‌شود.

ب) شمار شاخه‌های فرعی متیل در B، دو برابر A است.

پ) جرم مولی B، $25/6$ برابر نخستین عضو خانوادهٔ آلکان‌ها است.

ت) آلکان راست‌زنجیر هم‌کربن با A، در دمای $22^\circ C$ و فشار $1 atm$ به حالت مایع است.

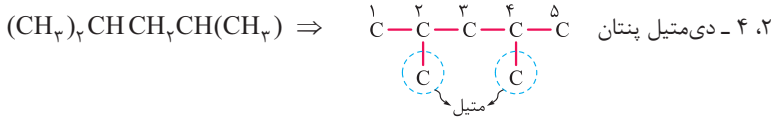
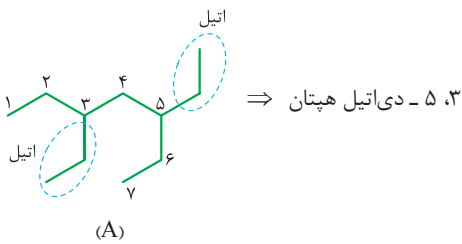
الف و ب (۲)
الف و پ (۴)

پ و ت (۱)
ب و ت (۳)

پاسخ: گزینهٔ ۱

ابتدا هر دو آلکان را نام‌گذاری می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

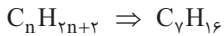


بررسی عبارت‌ها:

الف) در نام هر دو آلکان، پیشوند «دی» وجود دارد.

ب) در آلکان A، اصلاً شاخهٔ فرعی متیل وجود ندارد.

پ) B یک آلکان ۷ کربنه است:



از طرفی نخستین عضو آلکان‌ها، متان با فرمول CH_4 است:

$$\frac{\text{جرم مولی } C_7H_{16}}{\text{جرم مولی } CH_4} = \frac{100}{16} = \frac{25}{4} = 6/25$$

ت) آلکان A دارای ۱۱ اتم کربن است. در شرایط گفته‌شده، آلکان‌های راست‌زنجیر تا ۴ اتم کربن به حالت گاز، از ۵ تا ۱۷ اتم کربن به حالت مایع و از ۱۸ کربن به بعد، به حالت جامدند.

کدام مورد درباره اتیلن (A) و استیلن (B)، نادرست است؟



(۱) A، در بیشتر گیاهان وجود دارد.

(۲) B، سبک‌ترین هیدروکربن سیر نشده است.

(۳) شمار مول گاز اکسیژن مورد نیاز برای سوختن کامل ۱ مول B، بیشتر از سوختن کامل ۱ مول A است.

(۴) درصد جرمی هیدروژن در A با درصد جرمی هیدروژن در همهٔ عضوهای هم‌خانوادهٔ آن، برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اتیلن

اتن (C_2H_2)

استیلن

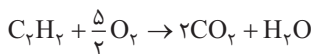
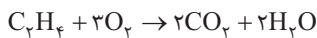
اتین (C_2H_4)

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اتن (نخستین عضو آلکن‌ها) در بیشتر گیاهان وجود دارد.

گزینهٔ (۲): اتین ($C \equiv C - H$)، سبک‌ترین هیدروکربن سیر نشده محسوب می‌شود.

گزینهٔ (۳): معادلهٔ سوختن کامل ۱ مول اتیلن و ۱ مول استیلن به صورت زیر است:



برای سوختن کامل ۱ مول اتیلن به ۳ مول گاز اکسیژن و برای سوختن کامل ۱ مول استیلن، به ۲/۵ مول گاز اکسیژن نیاز است.

گزینهٔ (۴): A، عضو خانوادهٔ آلکن‌ها است. درصد جرمی کربن و هیدروژن در همهٔ آلکن‌ها یکسان بوده و مستقل از شمار اتم‌های کربن آن‌ها است:

$$C_nH_{2n} \text{ در } H \text{ درصد جرمی} = \frac{2n}{14n} \times 100 = \frac{1}{7} \times 100 \approx 14.3\%$$

کدام مطلب درست است؟ ۱۲۹

- (۱) هر چه در نفت خام، درصد نفت کوره بیشتر باشد، قیمت آن بیشتر است.
- (۲) در جرم یکسان از نفت برنت دریای شمال و نفت سنگین ایران، حجم نفت سنگین ایران بیشتر است.
- (۳) نفت برنت دریای شمال در مقایسه با نفت سنگین کشورهای عربی، قیمت کمتری دارد.
- (۴) نقطه جوش ماده‌ای که سوخت هواپیما به طور عمده از آن تهیه می‌شود، از خوراک پتروشیمی بیشتر و از گازوئیل کمتر است.

پاسخ: گزینه ۴

بنزین و خوراک پتروشیمی، نفت سفید (شامل آلکان‌هایی با ۱۰ تا ۱۵ اتم کربن)، گازوئیل و نفت کوره، برخی از موادی هستند که در نفت خام وجود دارند:

نفت کوره > گازوئیل > نفت سفید > بنزین و خوراک پتروشیمی: مقایسه اندازه و جرم مولکول



پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی گزینه‌ها:

- گزینه (۱): هر چه درصد بنزین و خوراک پتروشیمی در نفت خام بیشتر باشد، قیمت آن بیشتر است.
 - گزینه (۲): چگالی نفت سنگین ایران بیشتر از نفت سبک برنت است. با توجه به رابطه $\text{چگالی} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}}$ ، در جرم یکسان، حجم نفتی که چگالی بیشتری دارد، کمتر است.
 - گزینه (۳): درصد بنزین و خوراک پتروشیمی در نفت برنت دریای شمال بیشتر است؛ از این رو قیمت بالاتری دارد.
 - گزینه (۴): سوخت هواپیما به طور عمده از نفت سفید تهیه می‌شود:
- نفت کوره > گازوئیل > نفت سفید > بنزین و خوراک پتروشیمی: نقطه جوش

نسبت جرم کربن به هیدروژن در مولکول یک هیدروکربن برابر ۸ و شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار آن برابر ۵۵ است. تفاوت جرم مولی این ترکیب با نفتالن، با جرم مولی کدام ترکیب برابر است؟ ($H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)

(۲) سیکلوهگزان

(۱) اوکتن

(۴) هپتین

(۳) دکان

پاسخ: گزینه ۳



از آنجا که هر اتم کربن، چهار الکترون و هر اتم هیدروژن، یک الکترون به اشتراک می‌گذارد و از طرفی هر پیوند اشتراکی شامل دو الکترون است، تعداد پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{تعداد اتم‌های هیدروژن} \times 1 + (\text{تعداد اتم‌های کربن} \times 4) = \frac{\text{تعداد پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها}}{2}$$

اگر فرمول هیدروکربن را C_xH_y در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{\text{جرم کربن در } C_xH_y}{\text{جرم هیدروژن در } C_xH_y} = \frac{12x}{y} = \frac{8}{1} \Rightarrow 12x = 8y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

$$C_xH_y \text{ در شمار پیوندها} = \frac{4x + y}{2} = 55 \Rightarrow 4x + y = 110$$

$$\xrightarrow{y = \frac{3}{2}x} 4x + \frac{3}{2}x = 110 \Rightarrow \frac{8}{2}x + \frac{3}{2}x = 110 \Rightarrow \frac{11}{2}x = 110$$

$$\Rightarrow x = 20 \Rightarrow y = 30 \Rightarrow \text{فرمول هیدروکربن} = C_{20}H_{30}$$

حالا از روی فرمول، می‌شه فهمید که تفاوت جرم مولی هیدروکربن مورد نظر با نفتالن ($C_{10}H_8$)، با جرم مولی کدام هیدروکربن داده شده برابر است:

$$C_{20}H_{30} - C_{10}H_8 = C_{10}H_{22} \text{ (آلکان ۱۰ کربنی)}$$

پایه دوازدهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	مازیار احمدی ناو - کوروش اسلامی - فرشاد حسنزاده - عادل حسینی - بابک سادات - علی شهرابی - مصطفی کرمی محمد گودرزی - سروش موئینی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه	کیوان صارمی - حمید گلزاری
آمار و احتمال	سروش موئینی
فیزیک	علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	مهدی براتی - محمد قهرمانی نژاد - هادی عبادی - یاسر عبداللہی - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مستعمل درس	گزینشگر	مؤلف پاسخنامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضلزاده سروش موئینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر سهند محمدکریم نژاد ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	سعید قندچی	سروش موئینی	سروش موئینی	سید عباس حسینی	مریم نظری منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جعفری آثار مریم گلی حسنلو	علیرضا جباری هادی نجفی	آیدین طهماسقلی زاده مدیا عیدی امیر محمودی انزلی سعید محبی فاطمه نجفی
شیمی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	صدرا عبادی یاسر عبداللہی	مرتضی نصیرزاده پارسا فراہانی محمدمهدی کریمیان	محمدتقی جہانپان علیرضا فرضعلی هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

حسابان دوازدهم

۱۳۱

برای رسم نمودار کدام تابع، باید نمودار تابع f را در راستای افقی منقبض کنیم؟

$$y = \frac{1}{4}f(x) \quad (۲)$$

$$y = 2f(x) \quad (۱)$$

$$y = f\left(\frac{x}{4}\right) \quad (۴)$$

$$y = f(2x) \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

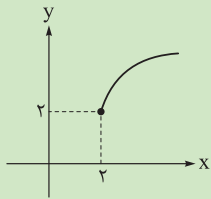
انبساط و انقباض افقی: برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از روی نمودار تابع f ، طول نقاط روی نمودار تابع f را بر k تقسیم می‌کنیم؛ بنابراین اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار تابع f منبسط و اگر $k > 1$ باشد، نمودار منقبض می‌شود.

برای انقباض افقی، قدرمطلق ضریب x باید بزرگ‌تر از ۱ باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۳۳

نمودار تابع f صرفاً با انتقال نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = \sqrt{x}$ به دست می آید. اگر نمودار تابع f مطابق شکل زیر



باشد، حاصل $(f \circ g)(9)$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

تبدیل نمودار توابع:

درس Box

اثر روی نقطه (x, y)	توضیح تبدیل	ضابطه تبدیل	
$(x, y+k)$ $(x+k, y)$	انتقال عمودی: نمودار به اندازه $ k $ واحد به بالا (اگر $k > 0$) یا به پایین (اگر $k < 0$) منتقل می شود. انتقال افقی: نمودار به اندازه $ k $ واحد به راست (اگر $k > 0$) یا به چپ (اگر $k < 0$) منتقل می شود.	$y = f(x) + k$ $y = f(x - k)$	انتقال ها
$(x, -y)$ $(-x, y)$	تقارن نسبت به محور x : نمودار نسبت به محور x قرینه می شود. تقارن نسبت به محور y : نمودار نسبت به محور y قرینه می شود.	$y = -f(x)$ $y = f(-x)$	انعکاس ها
(x, ky) $(\frac{x}{k}, y)$	انبساط / انقباض عمودی: نمودار در راستای عمودی با ضریب $ k $ کشیده (اگر $ k > 1$) یا فشرده (اگر $ k < 1$) می شود. (اگر $k < 0$ باشد، تقارن نسبت به محور x نیز رخ می دهد). انبساط / انقباض افقی: نمودار در راستای افقی با ضریب $\frac{1}{ k }$ فشرده (اگر $ k > 1$) یا کشیده (اگر $ k < 1$) می شود. (اگر $k < 0$ باشد، تقارن نسبت به محور y نیز رخ می دهد).	$y = kf(x)$ $y = f(kx)$	انبساط و انقباض

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: از فرض سؤال به دست می آید که ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = \sqrt{x-a} + b$$

زیرا نمودار آن صرفاً با انتقال نمودار تابع g به دست آمده است.

گام دوم: طبق ضابطه بالا، دامنه و برد تابع f به ترتیب $D_f = [a, +\infty)$ و $R_f = [b, +\infty)$ و مطابق نمودار، این دو به ترتیب $D_f = [2, +\infty)$ و $R_f = [3, +\infty)$ است.

بنابراین به سادگی نتیجه می گیریم که $a = b = 2$ است:

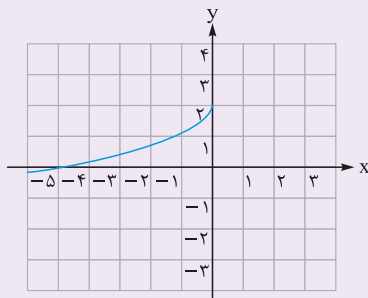
$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x-2} + 2$$

گام سوم: حالا خواسته سؤال را حساب می کنیم:

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g(9) = 3 \\ (f \circ g)(9) = f(g(9)) = f(3) = \sqrt{3-2} + 2 = 3 \end{cases}$$

نمودار تابع زیر فقط از قرینه یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است، ضابطه این تابع را بنویسید.

(حسابان (۲) - تمرین ۴ صفحه ۱۲ کتاب درسی)



نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 3 - \sqrt{2-x}$ مفروض است. نمودار کدام تابع محورهای دستگاه مختصات را قطع نمی کند؟

$$g(x) = f(x-2) + 3 \quad (2)$$

$$g(x) = f(x+2) - 3 \quad (1)$$

$$g(x) = f(x-4) + 3 \quad (4)$$

$$g(x) = f(x+3) - 4 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

بهتره که نمودار تابع f رو رسم کنیم.

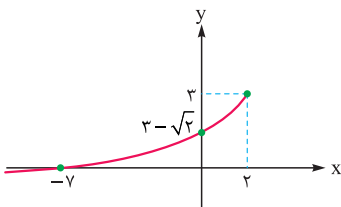
Hint

درس Box

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a + b\sqrt{cx+d}$ یکی از چهار حالت زیر را دارد:

چپ گرا	راست گرا	
نقطه $(-\frac{d}{c}, a)$ $c < 0, b > 0$	نقطه $(-\frac{d}{c}, a)$ $c > 0, b > 0$	رو به بالا
نقطه $(-\frac{d}{c}, a)$ $c < 0, b < 0$	نقطه $(-\frac{d}{c}, a)$ $c > 0, b < 0$	رو به پایین

گام اول: مطابق درس باکس بالا، نمودار تابع f را رسم می کنیم:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: نمودار تابع g نیز بر طبق گزینه ها، فقط از روی انتقال نمودار تابع بالا به دست می آید؛ بنابراین برای این که نمودار انتقال یافته، هیچ کدام از محورهای دستگاه مختصات را قطع نکند، باید نمودار تابع f را بیشتر از ۲ واحد به چپ و بیشتر از ۳ واحد به پایین انتقال دهیم:

$$g(x) = f(x+a) - b : \begin{cases} a > 2 \\ b > 3 \end{cases}$$

که در ضابطه تابع گزینه ۳ این ویژگی برقرار است.

برای رسم نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = 2f(1-x)$ از روی نمودار تابع f ، کدام ترتیب تبدیلات درست است؟

- (۱) یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور y ، انقباض عمودی با ضریب ۲
- (۲) یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور y ، انبساط عمودی با ضریب ۲
- (۳) یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور y ، انبساط عمودی با ضریب ۲
- (۴) یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور y ، انقباض عمودی با ضریب ۲

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

خلاصه تبدیلات نمودار توابع: با دانستن نمودار یک تابع پایه مانند $y = f(x)$ ، می توان نمودار توابع پیچیده تر را از طریق تبدیلات رسم کرد.

(۱) انتقال عمودی و افقی:

انتقال عمودی $y = f(x) + k$:

- اگر $k > 0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد به بالا منتقل می شود.
- اگر $k < 0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازه $|k|$ واحد به پایین منتقل می شود.

انتقال افقی $y = f(x - h)$:

- اگر $h > 0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازه h واحد به راست منتقل می شود.
- اگر $h < 0$ باشد، نمودار $f(x)$ به اندازه $|h|$ واحد به چپ منتقل می شود.

(۲) انبساط و انقباض:

انبساط و انقباض عمودی $y = kf(x)$ (با فرض $k > 0$):

- اگر $k > 1$ باشد، نمودار در راستای محور y ها کشیده (منبسط) می شود (انبساط عمودی).
- اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار در راستای محور y ها فشرده (منقبض) می شود (انقباض عمودی).

انبساط و انقباض افقی $y = f(kx)$ (با فرض $k > 0$):

- اگر $k > 1$ باشد، نمودار در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده (منقبض) می شود (انقباض افقی).
- اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده (منبسط) می شود (انبساط افقی).

(۳) قرینه سازی:

- قرینه نسبت به محور x ها $(y = -f(x))$: نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها قرینه می شود.
- قرینه نسبت به محور y ها $(y = f(-x))$: نمودار $f(x)$ نسبت به محور y ها قرینه می شود.

(۴) تبدیلات قدرمطلق:

قدرمطلق روی کل تابع $(y = |f(x)|)$:

- قسمتی از نمودار $f(x)$ که در بالای محور x هاست، بدون تغییر باقی می ماند.
- قسمتی از نمودار که پایین محور x هاست، حذف شده و قرینه آن نسبت به محور x ها به بالا منتقل می شود.

قدرمطلق روی متغیر $(y = f(|x|))$:

- قسمتی از نمودار $f(x)$ که در سمت راست محور y ها قرار دارد ($x \geq 0$)، بدون تغییر باقی می ماند.
- قسمتی از نمودار که در سمت چپ محور y ها قرار دارد ($x < 0$)، حذف می شود.
- بخش باقی مانده سمت راست نسبت به محور y ها قرینه شده و جایگزین بخش حذفی سمت چپ می شود.

ترتیب اعمال تبدیلات نمودار:

قانون کلی و ترتیب پیشنهادی برای تبدیلات:

برای رسم نمودار تابع $y = af(b(x-h)) + k$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، بهتر است تبدیلات را با ترتیب مشخصی انجام دهیم تا دچار اشتباه نشویم. تبدیلات افقی (مربوط به x) و عمودی (مربوط به y) مستقل از هم عمل می‌کنند.

ترتیب پیشنهادی (انبساط، انقباض و قرینه، سپس انتقال):

(۱) انبساط / انقباض و قرینه افقی: نمودار را براساس ضریب b در راستای افقی منبسط / منقبض یا قرینه می‌کنیم تا به $y = f(bx)$ برسیم.

(۲) انتقال افقی: نمودار حاصل را به اندازه h واحد در راستای افقی جابه‌جا می‌کنیم تا به $y = f(b(x-h))$ برسیم.

(۳) انبساط / انقباض و قرینه عمودی: نمودار حاصل را براساس ضریب a در راستای عمودی منبسط / منقبض یا قرینه می‌کنیم تا به $y = af(b(x-h))$ برسیم.

(۴) انتقال عمودی: نمودار نهایی را به اندازه k واحد در راستای عمودی جابه‌جا می‌کنیم تا به $y = af(b(x-h)) + k$ برسیم.

تفاوت $y = f(b(x+c))$ و $y = f(bx+c)$:



مهم‌ترین نکته در تبدیلات افقی، تشخیص درست مقدار انتقال است. برای این کار، باید ضریب متغیر x را به یک تبدیل کنیم.

راهبرد: همیشه از ضریب b در داخل پرانتز فاکتور بگیرید تا مقدار دقیق انتقال افقی مشخص شود.

$$y = f(bx+c) \Rightarrow y = f\left(b\left(x+\frac{c}{b}\right)\right)$$

از این فرم مشخص می‌شود که:

● انقباض / انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{b}$ اعمال می‌شود.

● انتقال افقی به اندازه $-\frac{c}{b}$ (نه $-c$) انجام می‌شود.

مثال برای رسم نمودار $y = f(2x+6)$:

● ابتدا از ۲ فاکتور می‌گیریم: $y = f(2(x+3))$.

● این یعنی نمودار $y = f(x)$ ابتدا با ضریب $\frac{1}{2}$ دچار انقباض افقی شده و سپس ۳ واحد به چپ منتقل می‌شود.

مطابق درس‌بکس و نکته بالا، می‌توان نمودار تابع f را به چند روش به نمودار تابع g تبدیل کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$۱) y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x+1 \text{ انتقال به چپ}} y = f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow -x \text{ انعکاس افقی}} y = f(1-x) \xrightarrow{\text{انبساط عمودی}} g(x) = 2f(1-x)$$

$$۲) y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -x \text{ انعکاس افقی}} y = f(-x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1 \text{ انتقال به راست}} y = f(1-x) \xrightarrow{\text{انبساط عمودی}} g(x) = 2f(1-x)$$

قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $x = -1$ ، نمودار کدام تابع است؟

(۲) $y = f(-1 - x)$

(۱) $y = f(-\frac{1}{2} - x)$

(۴) $y = f(-2 - x)$

(۳) $y = f(1 - x)$

پاسخ: گزینه ۴

نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(2a - x)$ ، قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $x = a$ است.

نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = 2b - f(x)$ ، قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $y = b$ است.

طبق درس باکس بالا، به نمودار تابع $y = f(2(-1) - x) = f(-2 - x)$ می‌رسیم.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار تابع g ، قرینه نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 3 - |x - 2|$ نسبت به نقطه $(-2, 1)$ است. ضابطه تابع g کدام است؟

$$g(x) = |x + 4| - 2 \quad (2)$$

$$g(x) = |x + 2| - 1 \quad (1)$$

$$g(x) = |x + 6| - 1 \quad (4)$$

$$g(x) = |x| - 2 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴



براساس درس باکس پاسخ قبل، قرینه نمودار تابع f نسبت به نقطه (a, b) ، نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = 2b - f(2a - x)$ است.

در حالت خاص، نمودار تابع $g(x) = -f(-x)$ ، قرینه نمودار تابع f نسبت به مبدأ مختصات است.

طبق نکته باید ضابطه تابع $g(x) = 2 - f(-4 - x)$ را به دست آوریم:

$$\Rightarrow g(x) = 2 - (3 - |-4 - x - 2|) = |x + 6| - 1$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نقطه $A(-1, 1)$ روی نمودار تابع f ، به نقطه $A'(\alpha, \beta)$ روی نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = 3 - f\left(\frac{1+x}{2}\right)$ تبدیل می‌شود. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) 2 ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

پیدا کردن مختصات نقطه در نمودار تبدیل یافته:

گاهی اوقات مختصات یک نقطه خاص مانند (x_0, y_0) از نمودار $y = f(x)$ را داریم و می‌خواهیم مختصات جدید همان نقطه را پس از اعمال یک سری تبدیلات و رسیدن به نمودار $y = kf(ax + b) + h$ پیدا کنیم.

۱) تبدیل مختصات y (تغییرات عمودی): تغییرات عمودی به همان ترتیب روی y_0 اعمال می‌شوند. ابتدا ضرب در k و سپس جمع با h .

$$y_{\text{new}} = ky_0 + h$$

۲) تبدیل مختصات x (تغییرات افقی): به صورت معکوس روی x_0 اعمال می‌شوند، یعنی برای یافتن x_{new} باید معادله زیر را حل کنیم:

$$a \cdot x_{\text{new}} + b = x_0 \Rightarrow x_{\text{new}} = \frac{x_0 - b}{a}$$

مثال نقطه $(4, 5)$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد، مختصات این نقطه روی نمودار $y = 2f(3x - 2) + 1$ کدام است؟

$$y_0 = 5, x_0 = 4$$

اطلاعات اولیه:

$$k = 2, a = 3, b = -2, h = 1$$

ضرایب تبدیل:

محاسبه y جدید:

$$y_{\text{new}} = k \cdot y_0 + h = 2 \times (5) + 1 = 10 + 1 = 11$$

محاسبه x جدید:

$$x_{\text{new}} = \frac{x_0 - b}{a} = \frac{4 - (-2)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

پاسخ نهایی: مختصات نقطه جدید، $(2, 11)$ است.

گام اول: در ضابطه تابع g ، ورودی تابع f به ازای $x = \alpha$ باید برابر -1 شود:

$$\Rightarrow \frac{1+\alpha}{2} = -1 \Rightarrow \alpha = -3$$

گام دوم: حالا $x = -3$ را در ضابطه تابع g جای‌گذاری می‌کنیم:

$$g(-3) = 3 - \underbrace{f(-1)}_1 = 3 - 1 = 2$$

بنابراین $\beta = 2$ است، در نتیجه خواسته سؤال $\alpha + \beta = -1$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مجموع صفرهای تابع f برابر -3 و مجموع صفرهای تابع g با ضابطه $g(x) = f(2x-1)$ برابر 1 است. تعداد صفرهای هر تابع کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: فرض می‌کنیم تعداد صفرهای دو تابع برابر n باشد. در این صورت صفرهای تابع f را $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ می‌گیریم و طبق فرض سؤال داریم:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -3$$

گام دوم: حالا صفرهای تابع g را برحسب α_i به دست می‌آوریم. کافی است ورودی تابع f را برابر α_i قرار دهیم:

$$2x_i - 1 = \alpha_i \Rightarrow x_i = \frac{\alpha_i + 1}{2}$$

در نتیجه $\frac{\alpha_1 + 1}{2}, \frac{\alpha_2 + 1}{2}, \dots, \frac{\alpha_n + 1}{2}$ صفرهای تابع g هستند.

گام سوم: مجموع صفرهای تابع g را برابر یک قرار می‌دهیم:

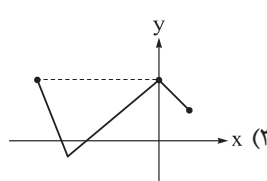
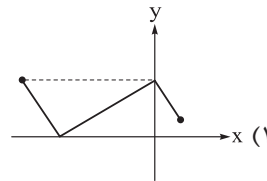
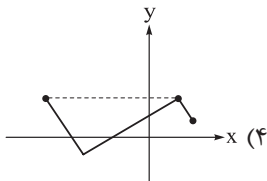
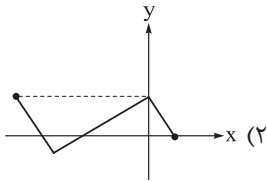
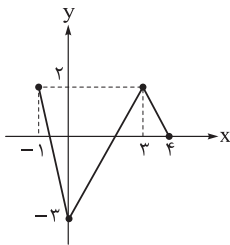
$$\frac{\alpha_1 + 1}{2} + \frac{\alpha_2 + 1}{2} + \dots + \frac{\alpha_n + 1}{2} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + n}{2} = 1$$

طبق رابطه گام اول داریم:

$$\frac{-3 + n}{2} = 1 \Rightarrow -3 + n = 2 \Rightarrow n = 5$$

یعنی دو تابع هر کدام ۵ صفر دارند.

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = \frac{f(x+3)}{2} + 1$ کدام است؟ **۱۳۹**



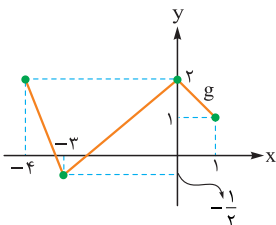
مشاوره برای رسم نمودار تبدیل یافته یک نمودار که از پاره خطها و نیم خطها تشکیل شده است، بهترین راه، به دست آوردن نقاط متناظر نقاط کلیدی (نقاط گوشه‌ای، صفرها و عرض از مبدأ) و سپس وصل کردن آنها به هم است.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: نقاط مهم نمودار تابع f عبارتند از $(-1, 2)$ ، $(0, -3)$ ، $(3, 2)$ و $(4, 0)$. حالا متناظر این نقاط را روی نمودار تابع g پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (-1, 2) : \begin{cases} x+3 = -1 \Rightarrow x = -4 \\ \frac{f(-1)}{2} + 1 = \frac{2}{2} + 1 = 2 \end{cases} &\Rightarrow (-4, 2) \\ (0, -3) : \begin{cases} x+3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ \frac{f(0)}{2} + 1 = \frac{-3}{2} + 1 = -\frac{1}{2} \end{cases} &\Rightarrow (-3, -\frac{1}{2}) \\ (3, 2) : \begin{cases} x+3 = 3 \Rightarrow x = 0 \\ \frac{f(3)}{2} + 1 = \frac{2}{2} + 1 = 2 \end{cases} &\Rightarrow (0, 2) \\ (4, 0) : \begin{cases} x+3 = 4 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{f(4)}{2} + 1 = \frac{0}{2} + 1 = 1 \end{cases} &\Rightarrow (1, 1) \end{aligned}$$

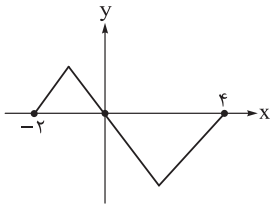


گام دوم: حالا می‌توانیم نمودار تابع g را رسم کنیم:

که در گزینه (۳) به درستی رسم شده است.

۱۴۰

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. دامنه تابع g با ضابطه $g(x) = \sqrt{-xf(4-x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۶ (۱)

۵ (۲)

۴ (۳)

۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

مثل سؤال قبل صفرها رو پیدا کنین، بعدش جدول تعیین علامت بکشین.

گام اول: ابتدا صفرهای تابع $y = f(4-x)$ را به دست می‌آوریم:

$$4-x = -2 \Rightarrow x = 6$$

$$4-x = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$4-x = 4 \Rightarrow x = 0$$

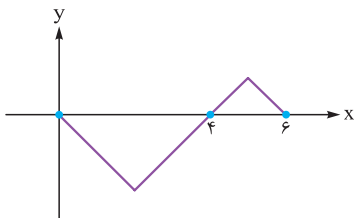
گام دوم: برای به دست آوردن دامنه تابع g ، باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$\Rightarrow -xf(4-x) \geq 0 \Rightarrow xf(4-x) \leq 0$$

حالا به کمک جدول تعیین علامت، مجموعه جواب‌های نامعادله بالا را به دست می‌آوریم:

x	۰	۴	۶
x	+	+	
f(4-x)	-	+	
xf(4-x)	-	+	

دقت کنید که نمودار تابع $y = f(4-x)$ مطابق شکل زیر است:



گام سوم: بنابراین دامنه تابع g ، مجموعه $\{6\} \cup [0, 4]$ است که ۶ عدد صحیح را شامل می‌شود.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

۱۴۱

قرینه نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x-1}$ نسبت به محور y را دو واحد به راست و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g به دست آید. عرض نقطه تقاطع نمودارهای توابع f و g کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: تبدیلات گفته شده را به ترتیب انجام می‌دهیم تا ضابطه تابع g به دست آید:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{x \rightarrow -x} y = f(-x) = \frac{1}{-x-1}$$

$$\xrightarrow[\text{۲ واحد به راست}]{x \rightarrow x-2} y = f(-x+2) = \frac{1}{-(x-2)-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$\xrightarrow[\text{یک واحد به بالا}]{y \rightarrow y+1} g(x) = f(2-x) + 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2-x}{1-x}$$

گام دوم: حالا معادله $f(x) = g(x)$ را حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow[g(x) = \frac{2-x}{1-x}]{\frac{1}{x-1}} \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1} \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$$

عرض نقطه تقاطع برابر $\frac{1}{2}$ است. $f(3) = g(3) = \frac{1}{2}$

کنکور

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

(سؤال ۱۰۶ کنکور تهری ۱۴۰۱ (فارج از کشور))

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

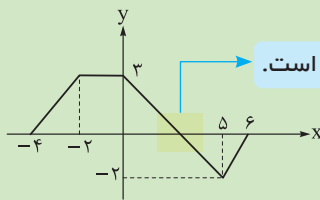
$\frac{\sqrt{10}}{2}$ (۴)

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۳)

۱۴۲

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مساحت سطح محدود به نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(3-x)$ و

محور x در ناحیه اول دستگاه مختصات کدام است؟



طول این نقطه برابر ۳ است.

۱۳/۵ (۱)

۱۲ (۲)

۱۴/۵ (۳)

۱۲/۵ (۴)

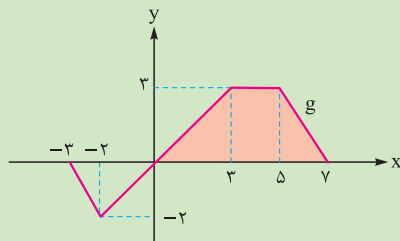
پاسخ: گزینه ۱

چاره‌ای به جز رسم نمودار تابع g نداریم.

Hint

گام اول: به کمک تبدیل نقاط مهم نمودار تابع g را رسم می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی



گام دوم: دوزنقه مشخص شده در شکل بالا، سطح مورد نظر سؤال است که مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{(7+2) \times 3}{2} = 13/5$$

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

کتاب
درسی

(مسایان (۲) - تمرین ۲ صفحه ۱۲ کتاب درسی)

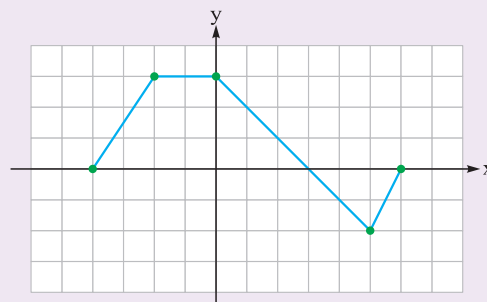
الف) $y = f(-x)$

ب) $y = 2f(x-1)$

پ) $y = -f(x) + 2$

ت) $y = f(2x-1)$

ث) $y = f(3-x)$



تابع f با ضابطه $f(x) = |x+1| - |x-3|$ مفروض است، اگر تابع $g(x) = f(|x-m|)$ ثابت باشد، مجموعه مقادیر

قابل قبول برای m کدام است؟

تابع سراسره‌ای

نمودارش، یک خط افقی است.

$$(-3, 1] \quad (2)$$

$$[-1, 3] \quad (4)$$

$$(-\infty, -3] \quad (1)$$

$$[1, +\infty) \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

۱) رسم نمودار $y = |f(x)|$ (قدرمطلق روی خروجی):

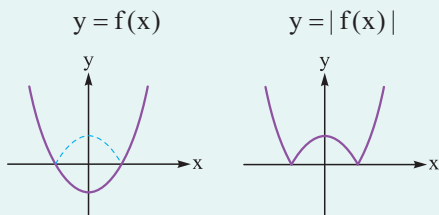
این تبدیل، مقدار خروجی تابع (یعنی محور y) را تحت تأثیر قرار می‌دهد. از آن جایی که قدرمطلق هر عددی، نامنفی است، نمودار $y = |f(x)|$ هرگز پایین‌تر از محور x ها قرار نمی‌گیرد.

مراحل رسم:

۱) نمودار تابع اولیه $y = f(x)$ را رسم کنید.

۲) بخش‌هایی از نمودار را که بالای محور x یا روی آن قرار دارند، بدون تغییر حفظ کنید.

۳) بخش‌هایی از نمودار که پایین محور x قرار دارند را نسبت به محور x ها قرینه کرده و به بالا برگردانید.



تبدیل $y = |f(x)|$ به $y = f(x)$

۲) رسم نمودار $y = f(|x|)$ (قدرمطلق روی ورودی):

این تبدیل، مقدار ورودی تابع (یعنی محور x) را تحت تأثیر قرار می‌دهد و نتیجه آن همیشه یک تابع زوج است که نمودارش نسبت به محور y ها متقارن است.

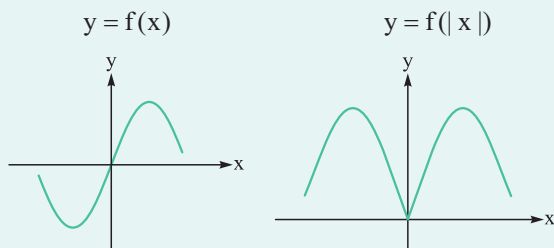
مراحل رسم:

۱) نمودار تابع اولیه $y = f(x)$ را رسم کنید.

۲) بخش سمت چپ محور y ها (قسمتی که $x < 0$ است) را به طور کامل حذف کنید.

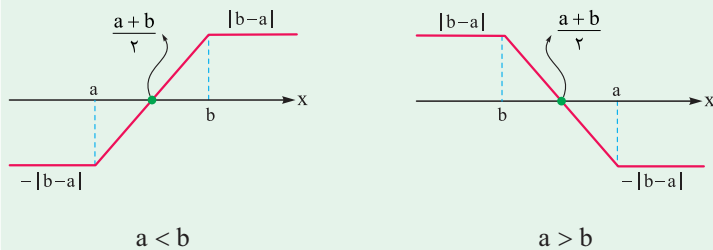
۳) بخش سمت راست محور y ها (قسمتی که $x \geq 0$ است) را حفظ کنید.

۴) همین بخش سمت راست را نسبت به محور y ها قرینه کرده و در سمت چپ جایگزین بخش حذف‌شده کنید.



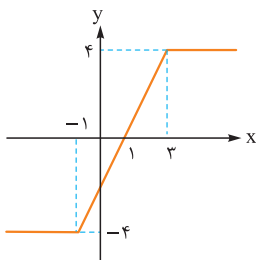
تبدیل $y = f(|x|)$ به $y = f(x)$

نمودار تابع $f(x) = |x - a| - |x - b|$ معروف به نمودار سوسره‌ای:



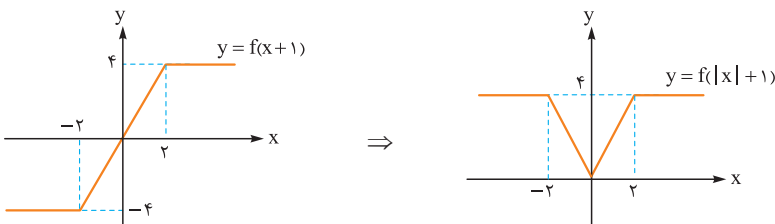
گام اول: ابتدا به کمک نکته بالا، نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



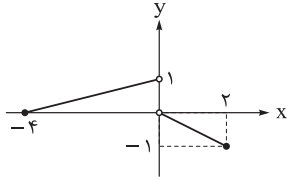
گام دوم: برای رسم نمودار تابع g ، ابتدا نمودار تابع f را m واحد به راست انتقال می‌دهیم و سپس مطابق درس باکس، قرینه بخش $x > 0$ را به جای $x < 0$ آن قرار می‌دهیم. مثلاً اگر $m = -1$ باشد، داریم:

$$g(x) = f(|x| + 1)$$



گام سوم: بنابراین برای این که نمودار تابع g ، خطی افقی شود، لازم است که نمودار تابع f را حداقل سه واحد به چپ انتقال دهیم؛ یعنی $m \leq -3$.

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر معادله $f(x) = g(x)$ بی‌شمار جواب داشته باشد، ضابطه تابع g کدام می‌تواند باشد؟



در یک بازه بر هم منطبق باشند.

$$g(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \quad (1)$$

$$g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \quad (2)$$

$$g(x) = f\left(-\frac{x}{2}\right) - 1 \quad (3)$$

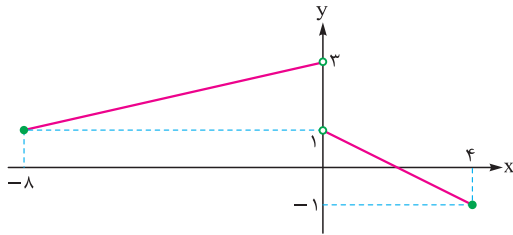
$$g(x) = f(-2x) - 1 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

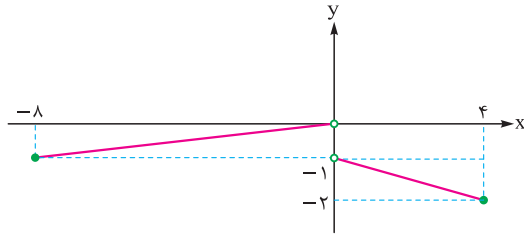
نمودار توابع گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

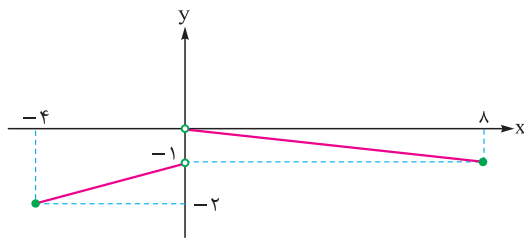
(۱) گزینه $g(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$



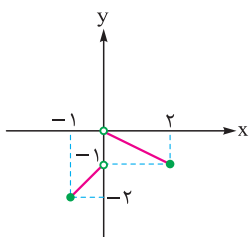
(۲) گزینه $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - 1$



(۳) گزینه $g(x) = f\left(-\frac{x}{2}\right) - 1$



(۴) گزینه $g(x) = f(-2x) - 1$



بنابراین فقط در گزینه (۴) است که نمودارهای دو تابع f و g در یک بازه بر هم منطبق می‌شوند و در نتیجه معادله $f(x) = g(x)$ بی‌شمار جواب خواهد داشت.

تابع وارون پذیر f و تابع g با ضابطه $g(x) = \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{3}\right) - 1$ مفروض اند. ضابطه تابع g^{-1} کدام است؟ **۱۴۵**

$$g^{-1}(x) = 2f^{-1}(3x + 1) \quad (۲)$$

$$g^{-1}(x) = 2f^{-1}(3x + 3) \quad (۱)$$

$$g^{-1}(x) = 3f^{-1}(2x) + 1 \quad (۴)$$

$$g^{-1}(x) = 3f^{-1}(2x) + 3 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

جای x و y رو عوض کنیم.

Hint

گام اول: در تابع g داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$y = g(x) = \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{3}\right) - 1 \Rightarrow 3y + 3 = f\left(\frac{x}{3}\right)$$

حالا برای این که x را بر حسب y بنویسیم، باید وارون تابع f را به طرفین تساوی بالا اعمال کنیم:

$$\frac{x}{3} = f^{-1}(3y + 3) \Rightarrow x = 3f^{-1}(3y + 3)$$

گام دوم: اگر جای x و y را عوض کنیم، به ضابطه وارون تابع g می‌رسیم:

$$g^{-1}(x) = 2f^{-1}(3x + 3)$$

برای رسم نمودار تابع g از روی نمودار تابع f ، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

په‌چور دیکه

$$y = f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \frac{x}{3}]{\text{ضرب طول نقاط در } 3} y = f\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}]{\text{ضرب عرض نقاط در } 3} y = \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\xrightarrow[-1]{\text{عرض نقاط } -1} g(x) = \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{3}\right) - 1$$

حالا با تعویض جای x و y ، تبدیلات بالا روی نمودار تابع f^{-1} انجام می‌دهیم:

$$y = f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{ضرب عرض نقاط در } 3} y = 3f^{-1}(x)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}]{\text{ضرب طول نقاط در } 3} y = 3f^{-1}(3x)$$

$$\xrightarrow[\text{یک واحد به چپ}]{\text{طول نقاط } -1} g(x) = 3f^{-1}(3(x + 1)) = 3f^{-1}(3x + 3)$$

ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} x+y & z-2y & x-2 \\ 0 & y+z & 0 \\ x+y & 0 & z+x \end{bmatrix}$ مفروض است. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A + I$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۵ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

$A = [2]_{1 \times 1}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ \sqrt{2} & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ قطر اصلی $C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ قطر فرعی	(۱) تعداد سطرها و ستون‌هایش برابرند. (۲) فرم کلی مرتبه‌اش به صورت « $n \times n$ » است. (۳) به ماتریس C در روبه‌رو نگاه کنید. به قطر آبی، «قطر اصلی» و به قطر قرمز، «قطر فرعی» می‌گوییم. همان‌طور که می‌بینید، درایه‌های روی قطر اصلی، شماره سطر و ستونشان یکسان است.	ماتریس مربعی
$A = [8], B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ بالای قطر اصلی پایین قطر اصلی	ماتریس مربعی‌ای است که درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی‌اش صفرند. درایه‌های روی قطر اصلی هم آزادند (هر عدد حقیقی‌ای می‌تونن باشن).	ماتریس قطری

گام اول: ماتریس $A = \begin{bmatrix} x+y & z-2y & x-2 \\ 0 & y+z & 0 \\ x+y & 0 & z+x \end{bmatrix}$ به شرطی قطری است که درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی‌اش برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+y=0 \xrightarrow{x=2} y=-2 \\ z-2y=0 \xrightarrow{y=-2} z=-4 \end{cases}$$

قطر اصلی

گام دوم: موارد بالا را در A جای‌گذاری می‌کنیم و $A + I$ را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

جمع درایه‌های روی قطر اصلی $A + I$ می‌شود: $1 - 5 - 1 = -5$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر $2A - B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، بزرگ‌ترین درایهٔ ماتریس A چند برابر کوچک‌ترین درایهٔ

۱۴۷

ماتریس B است؟

$$-2 \quad (2)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$2 \quad (3)$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

گام اول: دستگاه را حل می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{cases} 2A - B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4A - 2B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \\ A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{پایین - بالا}} (4A - 2B) - (A - 2B) = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\div 3} A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در پایین}} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\div 2} B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

گام دوم: بزرگ‌ترین درایهٔ A برابر $\frac{8}{3}$ و کوچک‌ترین درایهٔ B برابر $-\frac{4}{3}$ است که نسبتشان می‌شود: $\frac{\frac{8}{3}}{-\frac{4}{3}} = -2$.

اگر $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ ، $B = [b_{ij}]_{3 \times 4}$ و $C = [c_{ij}]_{4 \times 4}$ باشد، کدام یک از ماتریس‌های زیر قابل تعریف نیست؟

CAB (۲)

ABC (۱)

BAC (۴)

BCA (۳)

پاسخ: گزینه ۴

درس‌Box

(۱) دو ماتریس $A_{m \times n}$ و $B_{p \times q}$ را در نظر بگیرید. ضرب « $A_{m \times n} \times B_{p \times q}$ » به شرطی قابل انجام است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر، یعنی $n = p$ باشد، به زبان فودمونی ضرب « $A_{m \times n} \times B_{p \times q}$ » وقتی انطباق‌پذیره نزدیک‌ها $A_{m \times n}$ و $B_{p \times q}$ دو تا مثال ببینیم:

تعریف‌نشده $\rightarrow$ نزدیک‌ها برابر نیستند: $A_{4 \times 2} \times B_{7 \times 2}$
نزدیک‌ها

تعریف‌شده $\rightarrow$ نزدیک‌ها برابرین: $B_{2 \times 3} \times A_{3 \times 5}$
نزدیک‌ها

الان می‌دانیم ضرب « $A_{m \times n} \times B_{n \times p}$ » انجام‌پذیر و حاصلش یک ماتریس مثل C است، اما سؤال این جاست که «ماتریس C چه مرتبه‌ای دارد؟» برای رسیدن به جواب، این کار را انجام می‌دهیم:

$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$
نزدیک‌ها رو حذف می‌کنیم.

باز هم دو تا مثال ببینید:

$A_{3 \times 4} \times B_{4 \times 5} = C_{3 \times 5}$

$B_{2 \times 3} \times A_{3 \times 2} = C_{2 \times 2}$

(۲) ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد، این یعنی در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$ است، پس در دنیای ماتریس‌ها ترتیب ضرب کردن مهم است؛ بنابراین برای انجام ضربی مثل ABC دو راه داریم:

اول AB را حساب کنیم، بعد حاصلش را در C ضرب کنیم:

$$ABC = (AB) \times C$$

اول BC را حساب کنیم، بعد A را در حاصلش ضرب کنیم:

$$ABC = A \times (BC)$$

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱):

$$A_{4 \times 3} \times B_{3 \times 4} \times C_{4 \times 4} \stackrel{\text{شرکت‌پذیری}}{=} \overbrace{(A_{4 \times 3} \times B_{3 \times 4})}^{X_{4 \times 4}} \times C_{4 \times 4} = X_{4 \times 4} \times C_{4 \times 4} \checkmark$$

برابرند

گزینه (۲):

$$C_{4 \times 4} \times A_{4 \times 3} \times B_{3 \times 4} \stackrel{\text{شرکت‌پذیری}}{=} \overbrace{(C_{4 \times 4} \times A_{4 \times 3})}^{Y_{4 \times 3}} \times B_{3 \times 4} = Y_{4 \times 3} \times B_{3 \times 4} \checkmark$$

برابرند

گزینه (۳):

$$B_{3 \times 4} \times C_{4 \times 4} \times A_{4 \times 3} \stackrel{\text{شرکت‌پذیری}}{=} \overbrace{(B_{3 \times 4} \times C_{4 \times 4})}^{Z_{3 \times 4}} \times A_{4 \times 3} = Z_{3 \times 4} \times A_{4 \times 3} \checkmark$$

برابرند

همین جا معلوم شد که جواب سؤال گزینه (۴) است، ولی تحلیلش را هم ببینید:

$$B_{3 \times 4} \times A_{4 \times 3} \times C_{4 \times 4} \stackrel{\text{شرکت‌پذیری}}{=} \overbrace{(B_{3 \times 4} \times A_{4 \times 3})}^{T_{3 \times 3}} \times C_{4 \times 4} = T_{3 \times 3} \times C_{4 \times 4} \times$$

برابرند

برابر نیستند

۱۴۹ اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 0 & |i-j| > 1 \\ 1 & |i-j| = 1 \\ -2 & |i-j| < 1 \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A^2 کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: درایه‌های A را از روی $a_{ij} = \begin{cases} 0 & |i-j| > 1 \\ 1 & |i-j| = 1 \\ -2 & |i-j| < 1 \end{cases}$ به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

گام دوم: حالا A را در خودش ضرب می‌کنیم تا به A^2 برسیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

که جمع درایه‌هایش می‌شود ۲.

۱۵۰

فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ باشند و $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. اگر

$$ABC \text{ باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس } A \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

-۶ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

۱) توزیع پذیری: این خاصیت می‌گوید برای ضرب‌هایی مثل $A(B \pm C)$ یا $(B \pm C)A$ ، می‌توانید تساوی‌های زیر را بنویسید:

$$(B \pm C)A = BA \pm CA, \quad A(B \pm C) = AB \pm AC$$

در تساوی‌های بالا حواسمان به ترتیب ضرب کردن بود، مثلاً در تساوی $A(B \pm C) = AB \pm AC$ ، چون A از سمت چپ در $(B \pm C)$ ضرب شده بود، در عبارت $AB \pm AC$ ، A ها را سمت چپ B و C نوشتیم.

۲) فاکتورگیری: یاد گرفتیم که برای ماتریس‌های A ، B و C تساوی $A(B + C) = AB + AC$ برقرار است. اگر به این تساوی از راست به چپ نگاه کنیم، می‌فهمیم که در دنیای ماتریس‌ها عمل فاکتورگیری برقرار است. فقط باید حواسمان باشد که از یک سمت فاکتور بگیریم، مثلاً در عبارت $AX + BX$ می‌توانیم از یک سمت راست فاکتور بگیریم و بنویسیم $(A + B)X$.

ولی اگر عبارتمان به صورت $XA + BX$ باشد با این که یک X مشترک داریم، ولی نمی‌توانیم از آن فاکتور بگیریم، چون یکی سمت راست و دیگری سمت چپ است. خوب است که فاکتورگیری‌های جدول زیر را ببینید:

عبارت	از چپ می‌شه فاکتور گرفت؟	فاکتور گرفتن
$AB + A$	A از سمت چپ	$A(B + I)$
$BA + A$	A از سمت راست	$(B + I)A$
$AXB + AYB$	A از سمت چپ و B از سمت راست	$A(X + Y)B$
$BXA + AYB$	هیچی	—

گام اول: در تساوی داده‌شده از یک A سمت چپ و یک B سمت راست فاکتور می‌گیریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$A \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= A \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \right) B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{-I} B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -\underbrace{A}_{A} B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: به گفته سؤال $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و AB را هم که پیدا کردیم، پس ABC می‌شود:

$$ABC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \Rightarrow 0 + 3 + 3 = 6$$

۱۵۱

ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & b+3 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $(A-B)(A+B) = A^T - B^T$ باشد، مقدار

$a+b$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۲ (صفر)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول: با توجه به رابطه $(A-B)(A+B) = A^T - B^T$ می‌توان نوشت:

$$(A-B)(A+B) = A^T - B^T \Rightarrow A^T + AB - BA - B^T = A^T - B^T \Rightarrow AB - BA = \bar{O} \Rightarrow AB = BA$$

گام دوم: با توجه به نتیجه حاصل از گام اول، ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی دارد، پس:

$$AB=BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & b+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & b+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & a \\ 3 & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10+a & -2+a(b+3) \\ 15+b & -3+b(b+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5a-b \\ 3b+11 & a+b(b+3) \end{bmatrix}$$

گام سوم: از برابری درایه‌های رنگی به a و b می‌رسیم:

$$\begin{cases} 10+a=7 \Rightarrow a=-3 \\ 15+b=3b+11 \Rightarrow 2b=4 \Rightarrow b=2 \end{cases} \Rightarrow a+b=-3+2=-1$$

۱۵۲ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $A(A - mI) = nI$ باشد، مقدار $\frac{m}{n}$ کدام است؟

- $\circ / ۵ (۲)$ $-۰ / ۴۵ (۱)$
 $-۰ / ۵ (۴)$ $\circ / ۴۵ (۳)$

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

قضیه کیلی - همیلتون: این قضیه می گوید مربع هر ماتریس ۲×۲ مثل $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را می توانیم به صورت زیر برحسب خودش و I بنویسیم:

$$A^2 = (a + d)A - (ad - bc)I$$

گام اول: درایه های A را حساب می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

گام دوم: تساوی $A(A - mI) = nI$ را به صورت $A^2 = mA + nI$ که بنویسیم می فهمیم باید به کمک قضیه «کیلی - همیلتون» A^2 را برحسب A و I بنویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (5 + 13)A - ((5)(13) - (5)(5))I = 18A - 40I$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 m n

پس $\frac{m}{n}$ می شود:

$$-\frac{18}{40} = -\frac{9 \times 5}{20 \times 5} = -\circ / ۴۵$$

اگر $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس $A = \begin{bmatrix} e & i & a \\ d & f & g \\ b & c & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۹۷ (۴) ۱۰۰ (۳) ۹۹ (۲) ۹۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) بعضی وقت‌ها تمام درایه‌های حاصل از ضرب دو ماتریس A و B را نمی‌خواهیم، بلکه هدفمان پیدا کردن یک سطر یا ستون آن است:

از ضرب چه «AB» می‌خواهیم؟	فرمول محاسبه	مثال
درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام	$\left[\text{ستون } j \text{ از ماتریس دوم} \right] \times \left[\text{سطر } i \text{ از ماتریس اول} \right]$	مثلاً درایه واقع در سطر دوم و ستون اول ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ می‌شود: $\begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} = 10 - 42 = -32$
سطر i ام	$\left[\text{کل ماتریس دوم} \right] \times \left[\text{سطر } i \text{ از ماتریس اول} \right]$	مثلاً سطر دوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ می‌شود: $\begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 42 & 20 - 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 & -8 \end{bmatrix}$
ستون j ام	$\left[\text{ستون } j \text{ از ماتریس دوم} \right] \times \left[\text{کل ماتریس اول} \right]$	مثلاً ستون اول ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ می‌شود: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 18 \\ 10 - 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -32 \end{bmatrix}$

(۲) اگر دو ماتریس داشتید که در هر دو یا درایه‌های بالای قطر اصلی یا پایین قطر اصلی صفر بود، می‌توانید بعضی از درایه‌های ضربشان را به کمک رابطه‌های زیر به دست بیاورید:

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & d' & e' \\ 0 & b' & f' \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & \bullet & \bullet \\ 0 & bb' & \bullet \\ 0 & 0 & cc' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ d' & b' & 0 \\ e' & f' & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & 0 & 0 \\ \bullet & bb' & 0 \\ \bullet & \bullet & cc' \end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینید؛ در این‌جور ضرب‌ها، صفرهای بالا یا پایین قطر اصلی صفر می‌مانند و درایه‌های قطر اصلی در هم ضرب می‌شوند، بقیه درایه‌ها هم ارزش حفظ کردن ندارند، بهتر است برای محاسبه‌شان ضرب معمولی انجام بدهید.

گام اول: با خواسته سؤال شروع می‌کنیم. درایه‌های سطر اول $A = \begin{bmatrix} e & i & a \\ d & f & g \\ b & c & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ را می‌خواهیم که طبق

مورد (۱) درس باکس این‌جوری به دست می‌آید:

(*) $A = \begin{bmatrix} e & i & a \\ d & f & g \\ b & c & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ سطر اول = سطر اول ماتریس دوم $\times$ سطر اول ماتریس اول

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

گام دوم: پس e ، i و a را داریم که همگی در قطر اصلی ماتریس سمت راست تساوی

قرار دارند. درایه‌های پایین قطر اصلی ماتریس‌های سمت چپ صفرند، پس طبق مورد (۲) درس باکس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(3) & \bullet & \bullet \\ 0 & (2)(2) & \bullet \\ 0 & 0 & (3)(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow a=3, e=4, i=24$$

گام سوم: موارد بالا را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A \text{ سطر اول} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 49 & 20 \end{bmatrix}$$

پس جمع درایه‌های سطر اول A می‌شود $28 + 49 + 20 = 97$.

ماتریس مربعی A از مرتبه ۳ مفروض است. اگر $A^2 = 3A + \alpha I$ و $A^3 = 21A + \beta I$ باشد، مقدار $\alpha - \beta$ کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

نکته

با توجه به این که ماتریس های A و I خاصیت جابه جایی دارند، اتحادهای جبری برایشان برقرار است. چندتا مثال ببینید:

$$(A + I)^2 = A^2 + 2AI + I^2 = A^2 + 2A + I$$

$$(A + I)^3 = A^3 + 3A^2(I) + 3A(I)^2 + I^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$$

$$(A + I)(A^2 - A + I) = A^3 + I^3 = A^3 + I$$

$$(A - I)(A^2 + A + I) = A^3 - I^3 = A^3 - I$$

$$(A - 2I)(A + \delta I) = A^2 + A(-2I + \delta I) + (\delta I)(-2I) = A^2 + A(2I) - 1 \cdot I^2 = A^2 + 2A - 1 \cdot I$$

گام اول: طرفین تساوی $A^2 = 3A + \alpha I$ را به توان ۲ می‌رسانیم. حواسمان هم هست که برای A و αI ، اتحادها برقرارند:

$$(A^2)^2 = (3A + \alpha I)^2 \Rightarrow A^4 = (3A)^2 + \underbrace{(\alpha I)^2}_{\alpha^2 I^2 = \alpha^2 I} + 2(3A)(\alpha I) \Rightarrow A^4 = 9A^2 + \alpha^2 I + 6\alpha A \quad (*)$$

طبق رابطه (*) در تساوی بالا، جای A^2 می‌نویسیم $3A + \alpha I$ تا فقط A و I ببینیم:

$$A^4 = \underbrace{9(3A + \alpha I)}_{27A + 9\alpha I} + \alpha^2 I + 6\alpha A$$

$$\Rightarrow A^4 = (27 + 6\alpha)A + (\alpha^2 + 9\alpha)I$$

به گفته سؤال $A^4 = 21A + \beta I$ است. از مقایسه این تساوی با تساوی آبی‌رنگ بالا نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{cases} 27 + 6\alpha = 21 \Rightarrow 6\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = -1 \\ \alpha^2 + 9\alpha = \beta \xrightarrow{\alpha=-1} (-1)^2 + 9(-1) = \beta \Rightarrow \beta = -8 \end{cases}$$

بنابراین $\alpha - \beta$ می‌شود: $-1 - (-8) = -1 + 8 = 7$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۵۵ اگر $A = [i - j]_{2 \times 2}$ ، $B = \begin{bmatrix} \cot x & 0 \\ 0 & \tan x \end{bmatrix}$ و $C = AB$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^{26}

کدام است؟

۹ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: درایه‌های $A = [i - j]_{2 \times 2}$ را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-2 \\ 2-1 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

گام دوم: $C = AB$ است، پس:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cot x & 0 \\ 0 & \tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\tan x \\ \cot x & 0 \end{bmatrix}$$

گام سوم: طبق درس‌باکس برای محاسبه C^{26} اول C^2 را پیدا می‌کنیم تا ببینیم ماتریس خاصی می‌شود یا نه:

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\tan x \\ \cot x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\tan x \\ \cot x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

خوش‌یختانه به ماتریس خاص $-I$ رسیدیم، حالا می‌توانیم C^{26} را به دست بیاوریم:

$$C^{26} = (C^2)^{13} = (-I)^{13} = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

که حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی‌اش می‌شود: $(-1)(-1) = 1$.

ریاضیات گسسته

۱۵۶

برای چند عضو از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ عدد $2^{2^n} + 1$ فقط دو مقسوم علیه طبیعی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

مثال نقض برای فرمول هایی که ادعای ساختن عدد اول دارند ...

گزاره «به ازای هر مقدار n ، حاصل $f(n)$ اول است.» برای هیچ تابع $f(n)$ درست نیست و همیشه مثال نقض دارد. حالا شاید پیدا کردن مثال نقض سخت باشد، ولی حتماً وجود دارد. چندتا ببینید:

گزاره	$2^n - 1$ اول است ($n > 1$)	$2^n + 1$ اول است.	$4^n + 3$ اول است.	$2^{2^n} + 1$ اول است.
یک مثال نقض	$n = 4$ عدد $2^4 - 1 = 15$ اول نیست.	$n = 3$ عدد $2^3 + 1 = 9$ اول نیست.	$n = 4$ $4^4 + 3 = 259$ اول نیست (مضرب ۷ است).	$n = 5$ $2^{2^5} + 1$ یعنی $2^{32} + 1$ اول نیست (مضرب ۶۴۱ است).

گام اول: عدد اول فقط دو مقسوم علیه طبیعی دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: حاصل $2^{2^n} + 1$ به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ اول است و به ازای $n = 5$ مرکب می شود، پس برای ۴ عضو از مجموعه A ، حاصل اول است.

کدام گزاره نادرست است؟ ۱۵۷

- (۱) جمع دو عدد متوالی، فرد است.
- (۲) جمع سه عدد متوالی، مضرب ۳ است.
- (۳) جمع دو عدد زوج متوالی، مضرب ۶ است.
- (۴) جمع دو عدد فرد متوالی، مضرب ۴ است.

پاسخ: گزینه ۳

اثبات مستقیم، یعنی استفاده از بیان و روش‌های ریاضی؛ برای نشان دادن درستی یک حکم، گاهی از اثبات مستقیم استفاده می‌شود. در اثبات مستقیم، از بیان پارامتری استفاده می‌شود:

درس Box

بیان سؤال	دو عدد طبیعی	دو عدد طبیعی متوالی	دو عدد زوج	دو عدد فرد	دو عدد زوج متوالی	دو عدد فرد متوالی
نمایش در اثبات مستقیم	n, m	$n, n+1$	$2k, 2k'$	$2k+1, 2k'+1$	$2k, 2k+2$	$2k-1, 2k+1$

در اثبات مستقیم معمولاً اعداد گویا را با $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ و ... نشان می‌دهیم. به عنوان مثال احکامی که با اثبات مستقیم ثابت می‌شوند:

(الف) جمع دو عدد متوالی، فرد است.

(ب) مربع و مکعب هر عدد فرد، فرد است.

(پ) میانگین ۵ عدد متوالی همان عدد وسط است.

(ت) جمع دو عدد فرد، زوج است.

(ث) جمع سه عدد متوالی مضرب ۳ است.

(ج) جمع و ضرب و تفریق دو عدد گویا، گویا است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: جمع دو عدد زوج متوالی همیشه مضرب ۶ نیست! مثلاً $4+6=10$ می‌شود 10 که مضرب ۶ نیست.

گام دوم: اثبات گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) را هم ببینید:

فرد $\rightarrow n+n+1=2n+1$: گزینه (۱)

مضرب ۳ $\rightarrow n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$: گزینه (۲)

مضرب ۴ $\rightarrow 2n+1+2n-1=4n$: گزینه (۴)

اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ مضرب ۵ باشد، برای عدد طبیعی n چند جواب یک‌رقمی وجود دارد؟ **۱۵۸**

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

اثبات بخش‌پذیری و باقی‌مانده با بررسی تمام حالت‌ها:

برای اثبات این که عددی در تقسیم بر ۲، ۳، ۴، ۵ و ... (مقسوم‌علیه‌های کوچک) باقی‌مانده خاصی دارد، از بررسی تمام حالت‌ها می‌رویم، مثلاً:

باقی‌مانده بر ۵	باقی‌مانده بر ۳	بررسی زوج یا فرد بودن	هدف
$n = 5k$			تمام حالت‌ها
$n = 5k + 1$	$n = 3k$	$n = 2k$	
$n = 5k + 2$	$n = 3k + 1$	$n = 2k + 1$	
$n = 5k + 3$	$n = 3k + 2$		
$n = 5k + 4$			

مثلاً این حکم‌ها را با «بررسی تمام حالت‌ها» ثابت می‌کنند:

الف) اگر n عددی صحیح باشد، $5 - 3n + n^2$ فرد است.

ب) اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، باقی‌مانده n بر ۴ باید ۰ یا ۳ باشد.

پ) اگر $ab = 0$ باشد، $a = 0$ یا $b = 0$ است.

ت) رقم یکان عدد مربع کامل ۲، ۳، ۷ و ۸ نیست.

ث) عدد مربع کامل بر ۳ باقی‌مانده ۲ ندارد.

گام اول: $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ وقتی مضرب ۵ است که n یا $n+1$ به ۵ بخش‌پذیر باشند.

گام دوم: در بین ۱ تا ۹ مقادیر مناسب n عبارت‌اند از:

$n = \underbrace{4, 9}_{n+1}$ $n = \underbrace{5}_{n}$
مضرب مضرب
۵ است ۵ است

گام سوم: یعنی ۳ مقدار برای n داریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در اثبات حکم زیر به روش برهان خلف، فرض خلف کدام است و به چه تناقضی می‌رسیم؟

اگر x, y, z سه عدد صحیح و x', y', z' همان اعداد با ترتیب دیگری باشند، $n = (x - x')(y - y')(z - z')$ زوج است.

- (۱) n فرد است، صفر زوج است.
(۲) n زوج است، صفر فرد است.
(۳) n فرد است، صفر فرد است.
(۴) n زوج است، صفر زوج است.

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف: برای اثبات بعضی حکم‌ها روش مستقیم (رسیدن از فرض به حکم) قابل استفاده نیست.

در روش غیرمستقیم، فرض می‌کنیم حکم درست نیست (نقیض حکم را فرض می‌کنیم) و نشان می‌دهیم با این فرض، به تناقض می‌رسیم. پس خود حکم باید درست باشد. مثلاً احکامی که با برهان خلف ثابت می‌شوند:

الف) ضرب عدد گویای غیرصفر در عدد گنگ، گنگ است.

ب) اگر x گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ گنگ است.

پ) اگر α و β گنگ و $\alpha + \beta$ گویا باشد، $\alpha - \beta$ گنگ است.

ت) دو خط عمود بر یک خط، موازی‌اند (در صفحه).

ث) $\sqrt{2}$ گنگ است.

ج) بی‌شمار عدد اول وجود دارد.

گام اول: باید نقیض حکم را فرض کرد، پس فرض خلف می‌شود: « n فرد است».

گام دوم: داریم:

$$(x - x')(y - y')(z - z') = \text{فرد}$$

پس هر سه پرانتز فرد هستند:

$$\underbrace{x - x'}_{\text{فرد}}, \underbrace{y - y'}_{\text{فرد}}, \underbrace{z - z'}_{\text{فرد}}$$

گام سوم: پس جمع آن‌ها فرد است: $\text{فرد} + \text{فرد} + \text{فرد} = \text{فرد}$ و به تناقض می‌رسیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۶۰ اگر $x > 0$ باشد، حاصل $f(x) = (x+1)(\frac{1}{x}+1)$ حداقل چه قدر است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

ویژگی جمع عدد با معکوسش، نتیجه‌ای مهم از اثبات بازگشتی:

اگر x و y هم‌علامت باشند، ثابت می‌شود که:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

پس برای عدد مثبت a همواره داریم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

یعنی مجموع یک عدد مثبت و معکوسش همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

برای اعداد منفی، همواره $a + \frac{1}{a} \leq -2$ است.

گام اول: حاصل $(x+1)(\frac{1}{x}+1)$ برابر است با:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + x + 1 = x + \frac{1}{x} + 2$$

گام دوم: چون $x + \frac{1}{x}$ همواره بیشتر یا مساوی ۲ است، داریم:

$$f(x) \geq 4$$

یعنی حداقل مقدار برابر ۴ است.

درس Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۶۱ در اثبات حکم $x^2 + y^2 \geq xy$ به روش اثبات بازگشتی به $(x - \frac{y}{2})^2 + k \geq 0$ رسیدیم. مقدار k کدام است؟

y^2 (۴)

$\frac{y^2}{2}$ (۳)

$\frac{y^2}{4}$ (۲)

$\frac{3y^2}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

اثبات با گزاره‌های هم‌ارز (اثبات بازگشتی):

برای اثبات نامساوی‌ها در اعداد حقیقی، معمولاً از روش بازگشتی می‌رویم. خود حکم را فرض می‌کنیم و با روش‌های اثبات مستقیم، به رابطه درست یا بدیهی می‌رسیم (معمولاً به اتحادهای مربع می‌رسیم). با توجه به این که مراحل طی شده بازگشت پذیرند، مسیر برعکس این استدلال، اثبات مورد نظر ما است:

رابطه درست $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$ خود حکم

احکام زیر با روش بازگشتی اثبات می‌شوند:

الف) برای دو عدد حقیقی نامنفی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (واسطه حسابی از واسطه هندسی کم‌تر نیست).

ب) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$

پ) برای دو عدد هم‌علامت، $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

گام اول: مسیر اثبات به صورت زیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

درست است. $\Leftrightarrow (x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq xy$

گام دوم: پس در مقایسه با صورت سؤال داریم:

$k = \frac{3y^2}{4}$

برای سه مجموعه ناتهی A ، B و C ، با قرار دادن کدام علامت به جای $\square$ گزاره $A \square B = A \square C \Rightarrow B = C$ درست می‌شود؟

$\times$ (۴)

$-$ (۳)

$\cup$ (۲)

$\cap$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

باز هم مثال نقض - ویژگی حذف (ماتریس! بردار! تابع!):

در تمرین‌های کتاب درسی دیدیم که $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$ درست نیست. به راحتی با مثال نقض می‌توان آن را رد کرد. به اصطلاح می‌گوییم اشتراک مجموعه‌ها ویژگی حذف ندارد.

چند چیز دیگر و ویژگی حذفشان را ببینیم:

تابع	ماتریس‌های مربعی	ضرب داخلی بردارها
$f(a) = f(b)$ $\Downarrow$ $a = b$	$A \times B = A \times C$ $\Downarrow$ $B = C$	$a.b = a.c$ $\Downarrow$ $b = c$
باید f یک‌به‌یک باشد.	فقط وقتی A وارون‌پذیر باشد.	حذف ندارد.

اجتماع و اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها ویژگی حذف ندارد.

ضرب دکارتی برای مجموعه‌های ناتهی ویژگی حذف دارد.

گام اول: در تمرین‌های کتاب درسی دیدیم که از $A \cap B = A \cap C$ نمی‌توانیم به $B = C$ برسیم. (مثال نقض مثلاً

$\{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} \cap \{1, 5\}$ است که $B = C$ را نتیجه نمی‌دهد.)

گام دوم: با استدلال مشابهی، ویژگی حذف برای $\cup$ و $-$ هم برقرار نیست:

$$A \cup B = A \cup C \not\Rightarrow B = C \quad \text{و} \quad A - B = A - C \not\Rightarrow B = C$$

گام سوم: اما در مورد ضرب دکارتی مجموعه‌های ناتهی، از $A \times B = A \times C$ ، نتیجه $B = C$ درست است.

نکته

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

چند گزاره از گزاره‌های زیر درست هستند؟

الف) جمع ۷ عدد طبیعی متوالی مضرب ۷ است.

ب) میانگین ۷ عدد طبیعی فرد متوالی، همان عدد وسطی است.

پ) اگر $a_1, a_2, \dots, a_7$ را در ترتیب دیگری $b_1, b_2, \dots, b_7$ بنویسیم، حاصل $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_7 - b_7)$ زوج است.

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

پاسخ: گزینه ۳

باز هم سه تمرین مهم کتاب درسی برای اعداد فرد:

درس Box

اگر n فرد باشد.	اگر n فرد باشد.	اگر n فرد باشد.
با جابه‌جا کردن n عدد، حاصل ضرب $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_n - b_n)$ همیشه زوج است. ✓ مثلاً اگر b ها با جابه‌جایی a ها به دست بیایند، $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_n - b_n)$ حتماً زوج است.	میانگین n جمله متوالی از دنباله حسابی برابر جمله وسطی است. ✓ مثلاً میانگین ۷ عدد متوالی برابر چهارمی است.	جمع n عدد طبیعی متوالی مضرب n است. ✓ مثلاً جمع ۵ عدد متوالی مضرب ۵ است.

این ویژگی‌ها برای n های زوج درست نیستند!



پاسخ خیلی تشریحی ✓

- گام اول: جمع n عدد متوالی می‌شود $\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ، پس جمع ۷ عدد طبیعی متوالی $\frac{7}{2}(a_1 + a_7)$ است که بر ۷ بخش پذیر است. ✓
- گام دوم: در هر دنباله حسابی، میانگین با میانه برابر است، پس میانگین ۷ عدد طبیعی فرد متوالی، همان وسطی است. ✓
- گام سوم: در کاربرد برهان خلف دیدیم که اگر فرض کنیم این حاصل ضرب فرد است، به تناقض می‌رسیم (هر پیرانتز باید فرد باشد، پس جمعشان فرد است، یعنی فرد است!)، پس این هم درست است. ✓

موارد «الف» و «ب» به ترتیب کدام روش استدلال را نشان می‌دهند؟

الف) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q) \Rightarrow r$

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

(۲) بررسی تمام حالت‌ها، استدلال بازگشتی

(۴) اثبات مستقیم، استدلال بازگشتی

(۱) بررسی تمام حالت‌ها، برهان خلف

(۳) اثبات مستقیم، برهان خلف

پاسخ: گزینه ۱

جمع‌بندی روش‌های استدلال:

درس Box

روش	عملکرد
اثبات مستقیم	از فرض به حکم می‌رسیم.
برهان خلف (غیرمستقیم)	نقیض حکم را فرض می‌کنیم و به تناقض می‌رسیم (به جای q ، حکم $p \Rightarrow \sim q$ را ثابت می‌کنیم).
بررسی تمام حالت‌ها	دامنه را به مجموعه‌هایی افراز می‌کنیم و در هر قسمت درستی حکم را با اثبات مستقیم نشان می‌دهیم. از $(p \Rightarrow r)$ و $(q \Rightarrow r)$ به $(p \vee q) \Rightarrow r$ می‌رسیم.
بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز)	خود حکم را فرض می‌کنیم و با اثبات ریاضی به رابطه درست یا بدیهی می‌رسیم، سپس $\Leftrightarrow$ می‌گذاریم. از $p \Leftrightarrow q$ و $q \Leftrightarrow r$ نتیجه می‌گیریم، p و r هم‌ارزند و اگر r درست باشد، p هم درست است.
مثال نقض	درستی حکم را با یک مثال رد می‌کنیم.

با توجه به درس باکس گزینه ۱) درست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

x و y دو عدد حقیقی غیر صفر هستند. اگر $\sqrt[3]{x-y} = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ ، کدام نتیجه درست است؟

(۴) نشدنی

(۳) $y = -x$

(۲) $x = y$

(۱) $|y| = 1$

پاسخ: گزینه ۲

استدلال بازگشتی، یک کاربرد دیگر:

درس Box

معمولاً از استدلال بازگشتی و گزاره‌های هم‌ارز، برای نشان دادن درستی حکم‌ها استفاده می‌کنیم، اما با این استدلال می‌توانیم دو کار دیگر هم انجام دهیم:

نشان دهیم که حکم فقط در حالت‌های خاصی درست است.	نشان دهیم گزاره‌ای هرگز درست نیست.
مثلاً در $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ ، با استدلال بازگشتی می‌فهمیم که فقط به ازای $xy = 0$ درست است.	مثلاً در $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ با استدلال بازگشتی به $a^2 + b^2 + ab = 0$ می‌رسیم که برای $a, b \neq 0$ هرگز درست نیست، پس حکم اول هم هرگز برقرار نیست.

گام اول: به روش بازگشتی، از خود حکم شروع می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\sqrt[3]{x-y} = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} x-y = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^3 = x-y-3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})$$

$$\xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم}} 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}) = 0$$

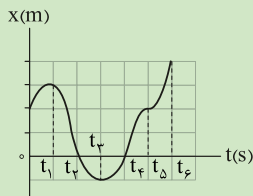
$$x = y$$

گام دوم: x و y صفر نیستند، پس $xy \neq 0$ و داریم $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y}$ و این یعنی:

فیزیک دوازدهم

۱۶۶

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. چه تعداد از عبارات‌های زیر



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

در باره این حرکت درست است؟

(الف) جهت حرکت، ۳ مرتبه تغییر می‌کند.

(ب) جهت بردار مکان متحرک، ۲ مرتبه تغییر می‌کند.

(پ) شتاب متحرک در بازه زمانی t_2 تا t_4 در جهت محور x است.

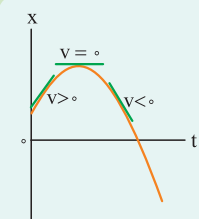
(ت) حرکت متحرک در بازه زمانی t_4 تا t_6 تندشونده است.

پاسخ: گزینه ۳

نکات درس باکس رو به دقت بررسی کن! بعد با عبارات‌های داده شده در سؤال مقایسه کن.

Hint

درس Box



(۱) شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان بیانگر سرعت متحرک است. شرط تغییر جهت متحرک،

تغییر علامت سرعت است که در قله‌ها و دره‌های نمودار $x-t$ رخ می‌دهد (مانند شکل مقابل):

(۲) بردار مکان ($\vec{r}$): برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند، بردار مکان

جسم در آن لحظه نام دارد. هرگاه متحرک از مبدأ مکان ($x=0$) عبور کند، x تغییر علامت می‌دهد

و جهت بردار مکان آن عوض می‌شود.

(۳) در نمودار مکان - زمان برای تشخیص علامت شتاب باید به تقعر نمودار دقت کنیم، اگر نمودار به شکل $\cup$ باشد، یعنی شتاب

مثبت و اگر به شکل $\cap$ باشد، یعنی شتاب منفی است.

(۴) هنگامی که به نقاط ($v=0$) نزدیک می‌شویم، حرکت کندشونده است و هنگامی که از نقاط ($v=0$) دور می‌شویم، حرکت

تندشونده است.

با توجه به نکات درس باکس به بررسی تک‌تک عبارات‌ها می‌پردازیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

(الف) نادرست است؛ در نقطه t_1 و t_3 سرعت صفر شده است و جهت حرکت تغییر کرده است؛ حواستان باشد که در نقطه t_5 فقط

سرعت صفر شده است و تغییر جهت رخ نداده است.

(ب) درست است؛ هرگاه متحرک از مبدأ محور ($x=0$) عبور کند، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد که تنها در لحظه‌های t_1 و t_3

این اتفاق افتاده.

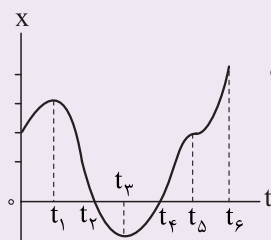
(پ) درست است؛ شکل نمودار در بازه t_2 تا t_4 به صورت $\cup$ است، پس شتاب مثبت و در جهت محور x است.

(ت) درست است؛ در بازه t_4 تا t_6 متحرک در حال دور شدن از نقطه $v=0$ است، شیب خط مماس دائماً در حال افزایش، پس

حرکت تندشونده است.

نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است:

(سؤال ۲ - امتحان نهایی دی ۱۴۰۳ - رشته ریاضی)



(الف) جهت حرکت در کدام لحظه‌ها تغییر کرده است؟

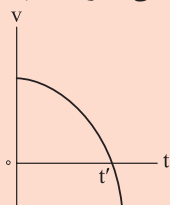
(ب) در کدام بازه زمانی متحرک در خلاف جهت محور x ، در حال نزدیک شدن به مبدأ است؟

(پ) شتاب متحرک در بازه زمانی t_2 تا t_4 در جهت محور x است یا در خلاف آن؟

امتحان
نهایی

۱۶۷

نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی صفر تا t' چه تعداد از کمیت‌های زیر الزاماً در جهت محور x است؟



الف) بردار مکان متحرک

ب) سرعت متحرک

پ) شتاب متحرک

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴) صفر

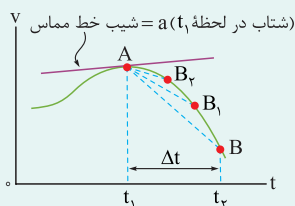
۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

شتاب در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در آن لحظه است.

مطابق شکل، اگر Δt به سمت صفر میل کند ($\Delta t \rightarrow 0$)، خط واصل بین نقطه‌های A و B به تدریج به خط مماس بر نمودار در نقطه A ، میل می‌کند.



به بررسی تک‌تک موارد می‌پردازیم:

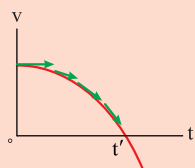
پاسخ خیلی تشریحی ✓

الف) از روی نمودار $v - t$ ، بردار مکان قابل تعیین نیست، زیرا مکان اولیه متحرک معلوم نیست، ممکن است متحرک ابتدا در سمت منفی یا مثبت مبدأ بوده باشد؛ پس بردار مکان متحرک الزاماً در جهت محور x نیست.

ب) با توجه به نمودار، سرعت متحرک در بازه زمانی مورد نظر، در بخش مثبت محور v است و این یعنی سرعت متحرک، در جهت محور x است.

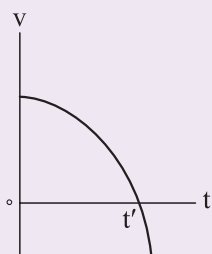
پ) در نمودار $v - t$ ، علامت شتاب به کمک شیب خط مماس بر نمودار به دست می‌آید. همان‌طور که مشخص است در این جا، شیب خط مماس بر نمودار در بازه زمانی صفر تا t' منفی است، پس شتاب متحرک در خلاف جهت محور x است.

پس گزینه (۱) درست است و فقط عبارت «ب» صحیح است.



نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر سرعت متحرک v و شتاب آن a باشد، در بازه 0 تا t' کدام مورد درست است؟

(سؤال ۴۹ کنکور تهری ۱۴۰۳ - نوبت اول)



۱) $v > 0$ و $a > 0$

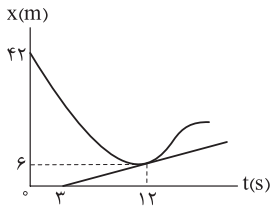
۲) $v < 0$ و $a > 0$

۳) $v > 0$ و $a < 0$

۴) $v < 0$ و $a < 0$

کنکور

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. خط مماس بر نمودار در لحظه $t = ۱۲$ s رسم شده است. تندی متحرک در این لحظه چند برابر اندازه سرعت متوسط آن در ۱۲ ثانیه اول است؟



$$\frac{9}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۱)$$

$$۶ \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

(۱) سرعت در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در آن لحظه است.

تندی لحظه ای با اندازه سرعت لحظه ای برابر است.

(۲) رابطه سرعت متوسط در حرکت روی محور x :

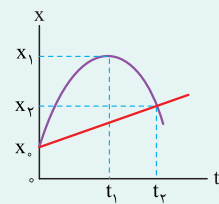
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

v_{av} : سرعت متوسط (m/s)

$\Delta x = x_2 - x_1$: جابه جایی (m)

$\Delta t = t_2 - t_1$: مدت زمان (s)

شیب خط واصل بین دو نقطه در نمودار $x - t$ برابر با سرعت متوسط است:

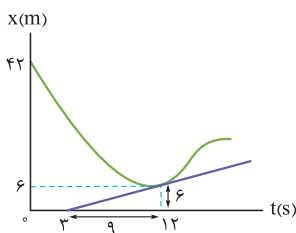


نکته

اگر بازه زمانی بسیار کوچک شود، خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان به خط مماس بر یک نقطه از این نمودار، نزدیک و نزدیک تر می شود تا این که در یک لحظه خاص، شیب این خط مماس، سرعت متحرک در آن لحظه را نشان می دهد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا تندی لحظه ای را با توجه به نمودار داده شده محاسبه می کنیم:



$$t = ۱۲ \text{ s} \text{ در لحظه } v = \text{شیب خط مماس} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ m/s} \Rightarrow s = |v| = \frac{2}{3} \text{ m/s}$$

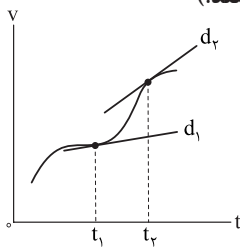
گام دوم: حالا اندازه سرعت متوسط در ۱۲ ثانیه اول را به دست می آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x_2=6 \text{ m}, x_1=42 \text{ m}}{t_2=12 \text{ s}, t_1=0 \text{ s}} \rightarrow V_{av} = \frac{6-42}{12-0} = -\frac{36}{12} = -3 \text{ m/s} \Rightarrow |v_{av}| = 3 \text{ m/s}$$

گام سوم: در پایان، نسبت خواسته شده را می نویسیم:

$$\text{نسبت خواسته شده} = \frac{\text{تندی متحرک در لحظه } t = ۱۲ \text{ s}}{\text{اندازه سرعت متوسط در ۱۲ ثانیه اول}} = \frac{\frac{2}{3}}{3} = \frac{2}{9}$$

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازه شتاب متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 به ترتیب برابر a_1 و a_2 و اندازه شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر a_{av} باشد، کدام مقایسه درست است؟ (خطهای d_1 و d_2 در لحظه‌های t_1 و t_2 بر نمودار مماس هستند).



$$a_1 > a_{av} > a_2 \quad (1)$$

$$a_2 > a_{av} > a_1 \quad (2)$$

$$a_{av} > a_1 > a_2 \quad (3)$$

$$a_{av} > a_2 > a_1 \quad (4)$$

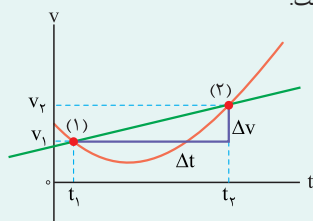
پاسخ: گزینه ۴

با توجه به مفهوم هندسی شیب خط واصل و مماس در نمودار سرعت - زمان، خواسته مسئله را به دست آورید.

Hint

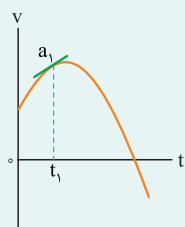
درس Box

در نمودار سرعت - زمان، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار، بیانگر شتاب متوسط است:



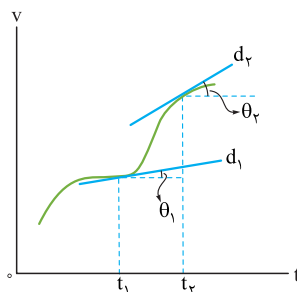
$$a_{av(t_1-t_2)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

هم‌چنین شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در هر لحظه بیانگر شتاب لحظه‌ای است.



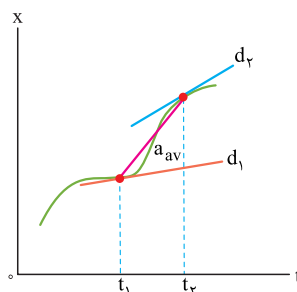
گام اول: ابتدا شیب دو خط d_1 و d_2 را با هم مقایسه می‌کنیم و ارتباط a_1 و a_2 را به دست می‌آوریم. می‌بینیم که خط d_2 شیب بیشتری دارد، پس $a_2 > a_1$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\theta_2 > \theta_1 \Rightarrow \text{شیب خط } d_2 > \text{شیب خط } d_1 \Rightarrow a_2 > a_1$$

گام دوم: خط واصل بین دو نقطه از نمودار در لحظه‌های t_1 و t_2 را رسم می‌کنیم. شیب این خط، شتاب متوسط بین دو لحظه t_1 و t_2 را نشان می‌دهد. اگر شیب این خط را با شیب خطهای d_1 و d_2 مقایسه کنیم، می‌بینیم که a_{av} از هر دو شتاب لحظه‌ای بیشتر است.



$$a_{av} > a_2 > a_1$$

پس:

متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه $t_1 = 2 \text{ s}$ از مکان $x_1 = 21 \text{ m}$ و در لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ از مکان $x_2 = -7 \text{ m}$ عبور می‌کند. در کدام لحظه بر حسب ثانیه، جهت بردار مکان تغییر می‌کند؟

۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

حرکت یکنواخت روی خط راست (سرعت ثابت): در این نوع حرکت، اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است؛ یعنی سرعت متوسط متحرک در هر بازه زمانی دلخواه برابر سرعت لحظه‌ای آن است.

$$v = v_{av}$$



معادله مکان - زمان حرکت با سرعت ثابت:

$$x = vt + x_0$$

x : مکان متحرک در لحظه t (m)

x_0 : مکان اولیه یا مبدأ حرکت، یعنی مکان متحرک در لحظه $t = 0$ (m)

v : سرعت متحرک (m/s)

t : زمان (s)

گام اول: ابتدا سرعت متحرک را به دست می‌آوریم. از آنجایی که سرعت متحرک ثابت است، پس با سرعت متوسط برابر است؛ بنابراین داریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-7 - 21}{10 - 2} = \frac{-28}{8} = -3.5 \text{ m/s}$$

گام دوم: از رابطه $x = vt + x_0$ استفاده می‌کنیم و یکی از زوج داده‌های زمان و مکان متحرک را داخل رابطه قرار می‌دهیم تا مکان اولیه را بیابیم:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[t_1=2 \text{ s}, v=-3.5 \text{ m/s}]{x_1=21 \text{ m}} 21 = -3.5 \times 2 + x_0 \Rightarrow 21 = -7 + x_0 \Rightarrow x_0 = 28 \text{ m}$$

پس معادله مکان - زمان به صورت زیر است:

$$x = -3.5t + 28$$

گام سوم: جهت بردار مکان وقتی تغییر می‌کند که متحرک از مبدأ مکان عبور کند، یعنی زمانی که مکان متحرک مساوی صفر شود.

$$x = -3.5t + 28 \xrightarrow{x=0} 0 = -3.5t + 28 \Rightarrow -28 = -3.5t \Rightarrow t = \frac{-28}{-3.5} \Rightarrow t = 8 \text{ s}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مسیری مستقیم، قطاری به طول ۱۸۰ m که با تندی ثابت ۶۰ km/h در حال حرکت است، وارد تونلی به طول ۲۴۰ m می‌شود. از لحظه‌ای که نیمی از قطار درون تونل قرار گرفته است، چند ثانیه طول می‌کشد تا قطار به طور کامل از تونل خارج شود؟

$$۱۹/۸ (۲)$$

$$۳۰/۶ (۱)$$

$$۲۵/۲ (۴)$$

$$۲۱/۶ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا یکای سرعت قطار را از کیلومتر بر ساعت به متر بر ثانیه تبدیل می‌کنیم.

$$v = 60 \text{ km/h} = 60 \div 3.6 = \frac{50}{3} \text{ m/s}$$

گام دوم: برای محاسبه جابه‌جایی Δx ، بهتر است حرکت یک نقطه مشخص از قطار (مثلاً انتهای قطار) را ردیابی کنیم:

● وضعیت اولیه: گفته شده نیمی از قطار درون تونل است. طول کل قطار ۱۸۰ m است، پس ۹۰ m از آن داخل تونل و ۹۰ m از آن (از جمله انتهای قطار) بیرون از تونل قرار دارد. اگر ابتدای تونل را مبدأ مکان ($x=0$) در نظر بگیریم، مکان فعلی انتهای قطار برابر است با:

$$x_1 = -90 \text{ m}$$

● وضعیت نهایی: قطار زمانی «به طور کامل» از تونل خارج می‌شود که انتهای قطار از انتهای تونل عبور کند. انتهای تونل در فاصله ۲۴۰ m از ابتدای آن قرار دارد، پس مکان نهایی انتهای قطار باید این نقطه باشد:

$$x_2 = 240 \text{ m}$$

اکنون جابه‌جایی کل قطار را محاسبه می‌کنیم:

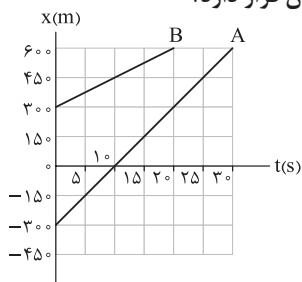
$$\Delta x = x_2 - x_1 = 240 - (-90) = 240 + 90 = 330 \text{ m}$$

گام سوم: چون حرکت قطار یکنواخت است، از رابطه $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم تا بازه زمانی مورد نیاز را پیدا کنیم.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{330 \text{ m}}{\frac{50}{3} \text{ m/s}} \Rightarrow \Delta t = \frac{330 \times 3}{50} = \frac{990}{50} = 19.8 \text{ s}$$

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می کنند، مطابق شکل زیر است.

۵ s پس از عبور دو متحرک از کنار هم، متحرک B در فاصله چند متری مبدأ مکان قرار دارد؟



۸۲۵ (۱)

۹۷۵ (۲)

۱۰۵۰ (۳)

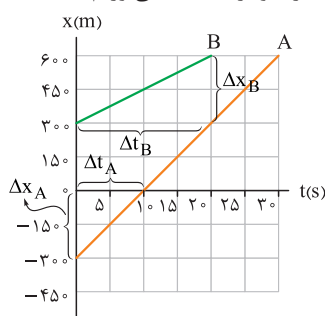
۱۰۷۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

هرگاه دو متحرک در لحظه ای به هم برسند یا از کنار هم بگذرند، می توان در آن لحظه معادله مکان - زمان آن ها را با هم برابر قرار داد و زمان به هم رسیدن را به دست آورد.

گام اول: ابتدا معادله مکان - زمان دو متحرک A و B را با استفاده از اطلاعات داده شده در نمودار به دست می آوریم:



$$x_B = v_B t + x_{B0} = \frac{30}{2} t + 300 = 15t + 300$$

$$x_A = v_A t + x_{A0} = \frac{30}{1} t + (-300) = 30t - 300$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: با توجه به مطلب درس باکس، برای پیدا کردن لحظه به هم رسیدن دو متحرک، این دو معادله را برابر با هم قرار می دهیم:

$$x_A = x_B$$

$$30t - 300 = 15t + 300$$

$$15t = 600 \Rightarrow t = 40 \text{ s}$$

گام سوم: مکان متحرک B را ۵ ثانیه پس از عبور دو متحرک از کنار هم، یعنی در ثانیه ۴۵ را به دست می آوریم:

$$x_B = 15t + 300 \xrightarrow{t=45 \text{ s}} x_B = (15 \times 45) + 300 = 975 \text{ m}$$

معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = t^2 - 4t - 5$ است. در

بازه ای که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟

۱۳ (۴)

۵ (۳)

۲/۶ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

(۱) معادله مکان - زمان، در حرکت با شتاب ثابت روی محور x :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

x : مکان متحرک در لحظه t (m)

x_0 : مکان اولیه متحرک (m)

a : شتاب حرکت (m/s^2)

t : زمان (s)

v_0 : سرعت اولیه (m/s)

با توجه به این که معادله مکان در حرکت با شتاب ثابت از درجه دوم می باشد، نمودار مکان - زمان آن به صورت قسمتی از یک سهمی است و نقطه شروع آن روی محور x ، مکان اولیه (x_0) را نشان می دهد.

اگر گودی این سهمی رو به بالا باشد، شتاب مثبت است:



اگر گودی این سهمی رو به پایین باشد، شتاب منفی است:



$$v = at + v_0$$

(۲) معادله سرعت - زمان، در حرکت با شتاب ثابت روی محور x :

v : سرعت متحرک در لحظه t (m/s)

v_0 : سرعت اولیه (m/s)

a : شتاب (m/s^2)

t : زمان (s)

گام اول: چون معادله مکان - زمان داده شده، درجه ۲ است، رأس سهمی طبق $t = \frac{-B}{2A}$ محاسبه می شود، پس:

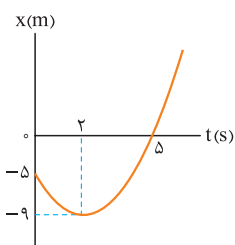
پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$t_{\text{رأس}} = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = +2 \text{ s}, \quad x_{2s} = (2)^2 - 4(2) - 5 = -9 \text{ m}$$

گام دوم: چون ضریب t^2 مثبت است، پس سهمی به صورت  است و نقاط تقاطع نمودار با محور t به صورت زیر محاسبه می شود:

$$x = t^2 - 4t - 5 = (t+1)(t-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ s} \\ t = 5 \text{ s} \end{cases}$$

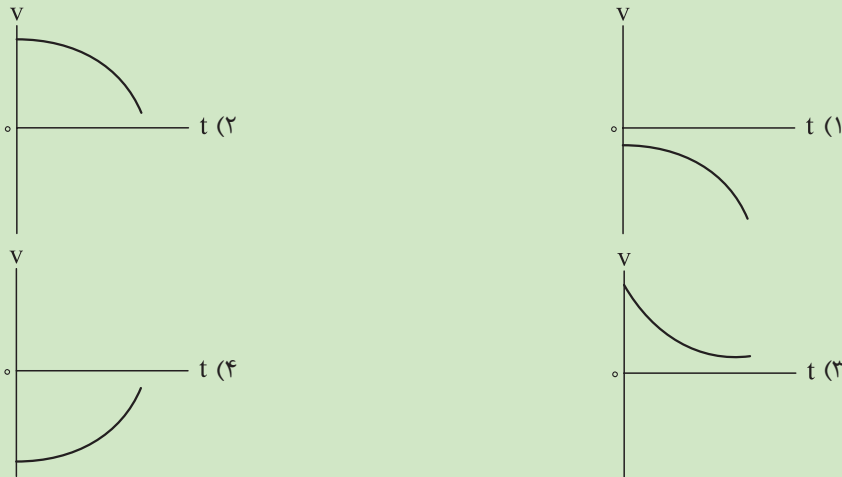
گام سوم: نمودار مکان - مکان را رسم می کنیم و به کمک نمودار، تندی متوسط را در بازه ای که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است را محاسبه می کنیم:



$$d = |x_{2s} - x_0| + |x_{5s} - x_{2s}| = |-9 - (-5)| + |0 - (-9)| = 4 + 9 = 13 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{13}{5} = 2.6 \text{ m/s}$$

جسمی در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. شتاب جسم در حال افزایش و تندی آن در حال کاهش است. نمودار سرعت - زمان این جسم به صورت کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد؟

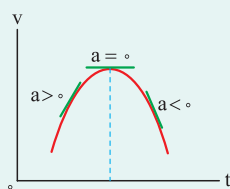


پاسخ: گزینه ۴

سه عبارت مهم سؤال رو داخل گزینه‌ها اسکن کن و با حذف گزینه به جواب برس!

Hint

درس Box



(۱) شتاب در هر لحظه دلخواه t برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در آن لحظه است.

هرچه شیب این خط بیشتر باشد، یعنی اندازه شتاب بزرگ‌تر است.

(۲) اگر نمودار $v - t$ به سمت محور t نزدیک شود، یعنی تندی متحرک در حال کاهش است و

اگر از محور t دور شود، یعنی تندی متحرک در حال افزایش است.

(۳) اگر جسم در جهت محور x حرکت کند، سرعت آن مثبت است و اگر در خلاف جهت محور x حرکت کند، سرعت آن منفی است.

گام اول: طبق صورت سؤال، جسم در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؛ بنابراین سرعت آن منفی است و نمودار در پایین محور t قرار می‌گیرد (رد گزینه‌های (۲) و (۳)).

گام دوم: طبق صورت سؤال، تندی جسم در حال کاهش است؛ بنابراین نمودار باید به محور t نزدیک شود (رد گزینه (۱))؛ بنابراین گزینه (۴) درست است.

توجه داشته باشید که در گزینه (۴)، شیب خط مماس بر نمودار که شتاب حرکت را نشان می‌دهد در حال افزایش است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

جسمی در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، شتاب جسم در حال افزایش و تندی آن در حال کاهش است. نمودار

(سؤال ۳ - امتحان نهایی فروردین ۱۳۰۲، رشته ریاضی)

سرعت - زمان این جسم را به صورت کیفی رسم کنید.

امتحان
نهایی

معادله سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = \frac{1}{4}t^2 - 3t + 4$ است. از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که جهت حرکت متحرک برای دومین مرتبه تغییر می‌کند، شتاب متوسط متحرک بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

- (۱) $\vec{i}$
(۲) $-\vec{i}$
(۳) $2\vec{i}$
(۴) $-2\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

شتاب متوسط ($\vec{a}_{av}$): در هر بازه زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازه زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$\vec{a}_{av}$: شتاب متوسط (m/s^2)

$\vec{v}_1$: سرعت متحرک در لحظه t_1 (m/s)

$\vec{v}_2$: سرعت متحرک در لحظه t_2 (m/s)

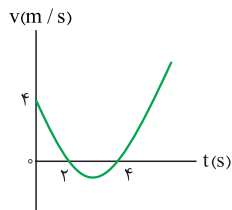
شتاب متوسط کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت ($\Delta \vec{v}$) است، زیرا Δt همواره مثبت است.

گام اول: معادله سرعت - زمان متحرک را برابر با صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم تا معلوم شود که در چه لحظه‌هایی، علامت سرعت و در نتیجه جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند:

$$v = \frac{1}{4}t^2 - 3t + 4 = 0 \xrightarrow{\times 4} t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t-4)(t-2) = 0 \Rightarrow t_1 = 2s \text{ و } t_2 = 4s$$

در لحظه t_2 ، جهت حرکت متحرک برای دومین بار تغییر می‌کند:



گام دوم: حالا شتاب متوسط را در بازه زمانی ۰ تا ۴ s به دست می‌آوریم:

$$t_1 = 0s \Rightarrow v_1 = 4m/s$$

$$t_2 = 4s \Rightarrow v_2 = 0m/s$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-4}{4-0} = -1m/s^2 \Rightarrow \vec{a}_{av} = (-1m/s^2)\vec{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۷۶

دو متحرک با تندی‌های ثابت v_1 و $v_2 > v_1$ روی خط راست طوری حرکت می‌کنند که اگر خلاف جهت هم حرکت کنند، فاصله آن‌ها در هر ثانیه، 12 m تغییر می‌کند و اگر هم‌جهت حرکت کنند، فاصله آن‌ها در هر دقیقه، 180 m تغییر می‌کند. $\frac{v_2}{v_1}$ کدام است؟

$\frac{5}{3}$ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

با استفاده از معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت، در دو حالت داده‌شده، دو معادله به دست آورید و با حل دستگاه معادله‌ها، $\frac{v_2}{v_1}$ را حساب کنید.

درس Box

در سؤالات حرکت با سرعت ثابت می‌توان از روش سرعت نسبی به صورت زیر استفاده کرد:

$v_{\text{نسبی}} = v_A - v_B$

اگر دو متحرک A و B در یک جهت حرکت کنند:

و اگر در خلاف جهت هم حرکت کنند:

$v_{\text{نسبی}} = v_A + v_B$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: معادله حرکت یکنواخت را در حالتی که دو متحرک در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند، می‌نویسیم:

$\Delta x = v \Delta t \xrightarrow[\text{نسبی}]{\Delta x = 12 \text{ m}, \Delta t = 1 \text{ s}} 12 = (v_2 + v_1) \times 1 \quad (\text{I})$

گام دوم: حالا معادله حرکت یکنواخت را برای حالتی که دو متحرک در جهت هم حرکت می‌کنند، می‌نویسیم:

$\Delta x = v \Delta t \xrightarrow[\Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}]{\Delta x = 180 \text{ m}} 180 = (v_2 - v_1) \times 60 \quad (\text{II})$

گام سوم: برای رابطه (I) و (II) دستگاه دو معادله - دو مجهول می‌نویسیم:

$$\begin{cases} v_2 + v_1 = 12 \\ v_2 - v_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow 2v_2 = 15$$

$$v_2 = \frac{15}{2}, \quad v_1 = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{3}$$

کنکور

دو متحرک با تندی‌های ثابت v_1 و $v_2 > v_1$ روی خط راست طوری حرکت می‌کنند که اگر خلاف جهت هم بروند، فاصله آن‌ها در هر ثانیه ۱۶ متر تغییر می‌کند و اگر هم‌جهت حرکت کنند، فاصله آن‌ها در هر دقیقه ۲۴۰ متر تغییر می‌کند.

(سوال ۵۳ کنکور تهری ۱۴۰۲ (فاج از کشور))

$\frac{v_2}{v_1}$ کدام است؟

$\frac{7}{5}$ (۴)

$\frac{5}{3}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

معادله مکان-زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = -t^2 + 6t + 7$ است. در 10 ثانیه اول حرکت، متحرک چند مرتبه از فاصله 17 متری مبدأ محور عبور می کند؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای آن که متحرک از فاصله 17 متری مبدأ عبور کند، باید معادله مکان - زمان به ازای $x = \pm 17 \text{ m}$ ریشه مثبت غیرمضاعف داشته باشد (ریشه باید مثبت باشد چون t منفی قابل قبول نیست و ریشه باید غیرمضاعف باشد چون اگر ریشه مضاعف باشد متحرک در مکان مورد نظر تغییر جهت می دهد و از آن عبور نمی کند). با این توضیح داریم:

$$x = -t^2 + 6t + 7 \xrightarrow{\text{به ازای } x=17 \text{ m}} 17 = -t^2 + 6t + 7 \Rightarrow t^2 - 6t + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 6^2 - (4 \times 1 \times 10) = -4 < 0 \Rightarrow \text{به ازای } x = 17 \text{ m} \text{ ریشه ندارد}$$

$$x = -t^2 + 6t + 7 \xrightarrow{\text{به ازای } x=-17 \text{ m}} -17 = -t^2 + 6t + 7 \Rightarrow t^2 - 6t - 10 = 0$$

$$\Delta = 6^2 - (4 \times 1 \times -10) = 76 > 0 \Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{76}}{2} \xrightarrow{\sqrt{76} > 10} \begin{cases} t_1 = \frac{6 + \sqrt{76}}{2} > 0 \text{ ق ق} \\ t_2 = \frac{6 - \sqrt{76}}{2} < 0 \text{ غ ق} \end{cases}$$

بنابراین متحرک فقط در لحظه $t_1 = \frac{6 + \sqrt{76}}{2} \text{ s}$ یک بار در مکان $x = -17 \text{ m}$ از فاصله 17 متری مبدأ عبور می کند.

شتاب متوسط متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در ۴ ثانیه اول، برابر $\vec{a}$ و در ۲ ثانیه سوم، برابر $-۳\vec{a}$ است. اگر شتاب متوسط متحرک در ۶ ثانیه اول برابر $(۴ \text{ m/s}^2)\vec{i}$ باشد، $\vec{a}$ بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

- (۱) $۱۲\vec{i}$ (۲) $-۱۲\vec{i}$ (۳) $۱/۲\vec{i}$ (۴) $-۱/۲\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: شتاب متوسط متحرک در ۴ ثانیه اول و دو ثانیه سوم حرکت را می‌نویسیم:

$$\text{شتاب متوسط در } ۴ \text{ ثانیه اول} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v_4 - v_0}{4 - 0} = a \Rightarrow v_4 - v_0 = 4a \quad (I)$$

$$\text{شتاب متوسط در } ۲ \text{ ثانیه سوم} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v_6 - v_4}{6 - 4} = -3a \Rightarrow v_6 - v_4 = -6a \quad (II)$$

گام دوم: رابطه‌های (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_4 - v_0 = 4a \\ v_6 - v_4 = -6a \end{cases} \Rightarrow v_6 - v_0 = -2a$$

گام سوم: رابطه به‌دست آمده در گام دوم را در رابطه شتاب متوسط در ۶ ثانیه اول به کار می‌بریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۴ = \frac{v_6 - v_0}{6 - 0} \Rightarrow v_6 - v_0 = ۲۴ \text{ m/s}$$

$$\begin{cases} v_6 - v_0 = ۲۴ \text{ m/s} \\ v_6 - v_0 = -2a \end{cases} \Rightarrow ۲۴ = -2a \Rightarrow a = -۱۲ \text{ m/s}^2 \Rightarrow \vec{a} = -(۱۲ \text{ m/s}^2)\vec{i}$$

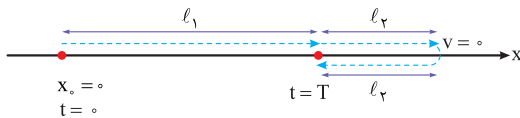
متحرکی در مبدأ زمان از مبدأ مکان شروع به حرکت می‌کند. در بازه زمانی صفر تا T ، بدون آن که جهت بردار مکان تغییر کند، جهت حرکت متحرک یک مرتبه تغییر می‌کند. در این بازه زمانی، اگر مسافت طی شده توسط متحرک ۲ برابر اندازه جابه‌جایی آن باشد، بیشینه اندازه بردار مکان متحرک، چند برابر اندازه بردار مکان متحرک در لحظه T است؟

۱/۵ (۱) ۲ (۲) ۲/۵ (۳) ۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با فرض آن که حرکت در جهت مثبت محور x شروع می‌شود، مسیر حرکت متحرک، مطابق شکل زیر است:



گام دوم: در لحظه‌ای که $v = 0$ می‌شود، متحرک تغییر جهت می‌دهد. در این لحظه، متحرک در بیشترین فاصله از مبدأ محور قرار دارد و اندازه بردار مکان متحرک، بیشینه است.

در بازه زمانی $t = T$ ، مسافت طی شده توسط متحرک، دو برابر اندازه جابه‌جایی آن است و داریم:

$$l_1 + l_2 + l_2 = 2|\Delta x| \xrightarrow{|\Delta x| = l_1} l_1 + 2l_2 = 2l_1 \Rightarrow 2l_2 = l_1$$

گام سوم: نسبت بیشینه اندازه بردار مکان متحرک به اندازه بردار مکان متحرک در لحظه $t = T$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x_{\max}}{x_{t=T}} = \frac{l_1 + l_2}{l_1} \xrightarrow{l_1 = 2l_2} \frac{x_{\max}}{x_{t=T}} = \frac{2l_2 + l_2}{2l_2} = \frac{3l_2}{2l_2} = 1/5$$

اگر حرکت در جهت منفی شروع شود، متحرک از مبدأ عبور کرده و جهت بردار مکانش تغییر می‌کند.

گول نخوری

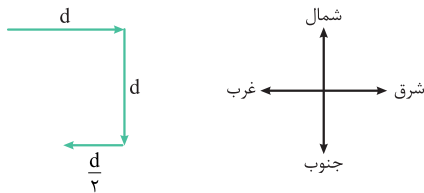
متحرکی در یک صفحه افقی، ابتدا به اندازه d در جهت شرق، سپس به اندازه d در جهت جنوب و در نهایت به اندازه $\frac{d}{2}$ در جهت غرب حرکت می‌کند. در این حرکت، مسافت طی شده توسط متحرک چند برابر اندازه جابه‌جایی آن است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

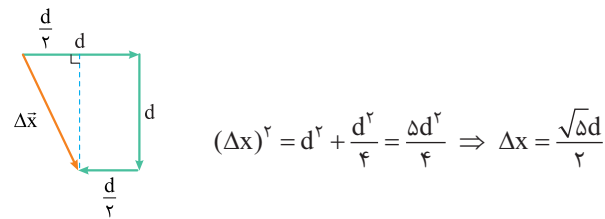
گام اول: ابتدا مطابق متن سؤال، جابه‌جایی‌های متحرک را روی شکل نشان می‌دهیم:



گام دوم: حالا مسافت طی شده و جابه‌جایی در کل حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$\ell = d + d + \frac{d}{2} = \frac{5d}{2}$$

مسافت طی شده



گام سوم: نسبت مسافت طی شده توسط متحرک به اندازه جابه‌جایی آن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\ell}{\Delta x} = \Rightarrow \frac{\frac{5d}{2}}{\frac{\sqrt{5}d}{2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{گویا کردن مخرج}} \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

بردار مکان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های t_1 و t_2 به ترتیب برابر $(6\text{ m})\vec{i}$ و $(-8\text{ m})\vec{i}$ است. اگر در بازه زمانی t_1 تا t_2 ، سرعت متوسط متحرک برابر $(-2\text{ m/s})\vec{i}$ و تندی متوسط آن برابر 6 m/s باشد، بردار مکان متحرک در لحظه‌ای که جهت حرکت آن تغییر کرده، برحسب متر کدام می‌تواند باشد؟ (جهت حرکت متحرک تنها یک مرتبه تغییر کرده است.)

$$\begin{array}{ll} 18\vec{i} \text{ (۲)} & -28\vec{i} \text{ (۱)} \\ -22\vec{i} \text{ (۴)} & 14\vec{i} \text{ (۳)} \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به آن که سرعت متوسط را داریم، Δt یعنی $t_2 - t_1$ را پیدا می‌کنیم:

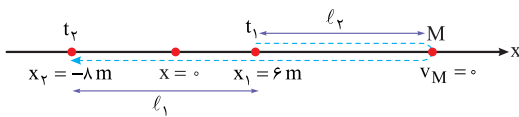
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta x = -8 - 6 = -14\text{ m}]{v_{av} = -2\text{ m/s}} \Delta t = \frac{-14}{-2} \Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = 7\text{ s}$$

گام دوم: حالا با داشتن Δt و معلوم بودن تندی متوسط، مسافت طی شده را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[s_{av} = 6\text{ m/s}]{\Delta t = 7\text{ s}} \ell = 6 \times 7 = 42\text{ m}$$

گام سوم: در حرکت روی محور x ، در لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد، سرعت آن به صفر می‌رسد. مسیر حرکت متحرک را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

الف) اگر حرکت متحرک در جهت مثبت محور x شروع شود:

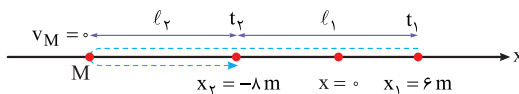


$$2\ell_2 + \ell_1 = 42\text{ m} \xrightarrow[\ell_1 = 6 - (-8) = 14\text{ m}]{\ell_1 = 6 - (-8) = 14\text{ m}} 2\ell_2 + 14 = 42 \Rightarrow 2\ell_2 = 28 \Rightarrow \ell_2 = 14\text{ m}$$

بنابراین بردار مکان متحرک در لحظه‌ای که جهت حرکت آن تغییر کرده $(\vec{x}_M)$ برابر است با:

$$x_M = x_1 + \ell_2 = 6 + 14 = 20\text{ m} \Rightarrow \vec{x}_M = (20\text{ m})\vec{i}$$

ب) اگر حرکت متحرک در جهت منفی محور x شروع شود:



مشابه حالت «الف» داریم:

$$\ell_2 = 14\text{ m}$$

بنابراین مکان متحرک در لحظه‌ای که جهت حرکت آن تغییر کرده $(\vec{x}_M)$ برابر است با:

$$x_M = -8 - \ell_2 = -8 - 14 = -22\text{ m} \Rightarrow \vec{x}_M = -(22\text{ m})\vec{i}$$

بنابراین مکان متحرک در لحظه تغییر جهت یا $\vec{x}_M = (20\text{ m})\vec{i}$ است یا $\vec{x}_M = -(22\text{ m})\vec{i}$ که دومی در گزینه‌ها وجود دارد.

متحرکی روی محور x در حال حرکت است و در لحظه‌های $t_1 = 2 \text{ s}$ ، $t_2 = 4 \text{ s}$ و $t_3 = 7 \text{ s}$ به ترتیب از مکان‌های $x_1 = 4 \text{ m}$ ، $x_2 = -6 \text{ m}$ و $x_3 = 8 \text{ m}$ عبور می‌کند. کدام موارد زیر، دربارهٔ این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 لزوماً درست است؟

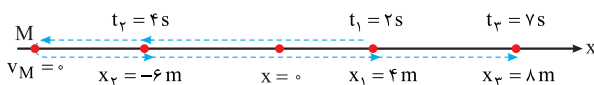
- الف) جهت بردار سرعت متحرک حداقل دو مرتبه تغییر کرده است.
 ب) جهت بردار مکان متحرک حداقل دو مرتبه تغییر کرده است.
 پ) سرعت متوسط متحرک برابر $(0.8 \text{ m/s})\vec{i}$ است.
 ت) تندی متوسط متحرک برابر $4/8 \text{ m/s}$ است.
- (۱) ب و پ
 (۲) پ و ت
 (۳) الف و ت
 (۴) الف و ب

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به داده‌های سؤال، به بررسی تک تک عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) نادرست است؛ جهت بردار سرعت متحرک، می‌تواند یک بار تغییر کرده باشد. مسیر حرکت متحرک در شکل زیر، نشان می‌دهد که متحرک بین لحظه‌های t_1 و t_3 از مکان $x_2 = -6 \text{ m}$ تا نقطه‌ای مانند M به طرف چپ رفته و پس از توقف در نقطه M ، جهت حرکت آن تغییر کرده و در لحظه t_3 به مکان x_3 رسیده است.



بنابراین لازم نیست که حداقل دو بار، جهت حرکت متحرک تغییر کند.

ب) درست است؛ می‌دانیم که هرگاه متحرکی از مبدأ محور عبور کند، جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند. در این‌جا متحرک حداقل یک بار در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 و یک بار دیگر در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 از مبدأ محور عبور می‌کند. توجه داشته باشید که متحرک می‌تواند در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 ، چندین بار رفت و برگشت انجام دهد به گونه‌ای چند بار از مبدأ محور عبور کند. پ) درست است؛

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{x_3=8 \text{ m}, x_1=4 \text{ m}; t_3=7 \text{ s}, t_1=2 \text{ s}} v_{av} = \frac{8-4}{7-2} = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ m/s} \Rightarrow v_{av} = (0.8 \text{ m/s})\vec{i}$$

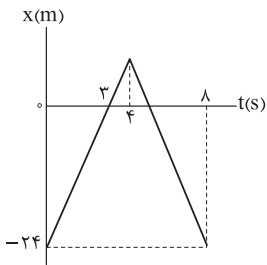
ت) نادرست است؛

$$\ell_{\min} = |-6-4| + |8-(-6)| = 10 + 14 = 24 \text{ m}$$

$$s_{av,\min} = \frac{\ell_{\min}}{\Delta t} = \frac{24}{5} = 4.8 \text{ m/s}$$

با توجه به شکل رسم‌شده در قسمت «الف»، متحرک می‌تواند مسافتی بیشتر از 24 m را پیموده باشد و تندی متوسط آن بیشتر از $4/8 \text{ m/s}$ شود؛ بنابراین عبارت «ت» لزوماً درست نیست.

نمودار مکان-زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی $t_1 = 1$ s تا $t_2 = 5$ s به ترتیب از راست به چپ، تندی متوسط متحرک چند متر بر ثانیه و اندازه شتاب متوسط آن چند متر بر مربع ثانیه است؟



- (۱) ۴، ۴
(۲) ۸، ۴
(۳) ۴، ۸
(۴) ۸، ۸

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در بازه زمانی صفر تا ۳ s، سرعت متوسط متحرک را به دست می‌آوریم. چون در این بازه زمانی، حرکت با سرعت ثابت است، داریم:

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4 - (-24)}{3 - 0} = 8 \text{ m/s}$$

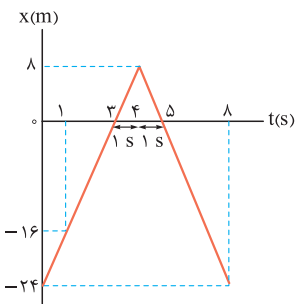
گام دوم: معادله مکان متحرک را در ۴ ثانیه اول حرکت می‌نویسیم و مکان آن را در لحظه $t_1 = 1$ s پیدا می‌کنیم:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[t=t_1=1\text{ s}]{v=8\text{ m/s}, x_0=-24\text{ m}} x_{t=1\text{ s}} = 8 \times 1 + (-24) = -16 \text{ m}$$

به طور مشابه، مکان متحرک در لحظه $t = 4$ s را نیز حساب می‌کنیم:

$$x_{t=4\text{ s}} = 8 \times 4 + (-24) = 32 - 24 = 8 \text{ m}$$

گام سوم: با توجه به تقارن موجود در نمودار، سرعت متحرک در بازه زمانی ۴ s تا ۵ s برابر 8 m/s است و نمودار، محور t را در لحظه $t = 5$ s قطع می‌کند.



گام چهارم: در بازه زمانی $t_1 = 1$ s تا $t_2 = 5$ s، متحرک از مکان $x_1 = -16$ m به مکان $x_2 = 8$ m رفته و پس از تغییر جهت حرکت، به مکان $x_2 = 0$ می‌رسد؛ بنابراین مسافت پیموده‌شده در این بازه زمانی، برابر است با:

$$\ell = |8 - (-16)| + |0 - 8| = 24 + 8 = 32 \text{ m}$$

اکنون می‌توانیم تندی متوسط را به دست آوریم:

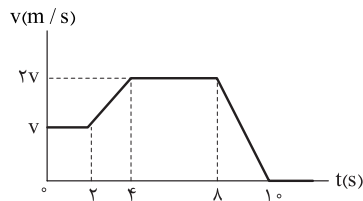
$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{32}{5 - 1} = 8 \text{ m/s}$$

گام پنجم: اندازه شتاب متوسط در بازه زمانی $t_1 = 1$ s تا $t_2 = 5$ s را حساب می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-8 - 8}{5 - 1} = \frac{-16}{4} = -4 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow |a_{av}| = 4 \text{ m/s}^2$$

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازه شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 9 \text{ s}$ ، چند برابر اندازه شتاب آن در لحظه t_1 است؟



$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$\frac{1}{9} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

گام اول: شتاب متحرک در بازه زمانی 2 s تا 4 s ثابت است و داریم:

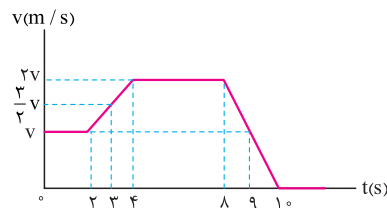
$$a = a_{av} = \frac{2v - v}{4 - 2} = \frac{v}{2}$$

شتاب متحرک در لحظه $t_1 = 3 \text{ s}$ نیز همین $\frac{v}{2}$ است.

گام دوم: در بازه زمانی 2 s تا 4 s ، شیب نمودار سرعت - زمان ثابت است؛ بنابراین سرعت در لحظه $t_1 = 3 \text{ s}$ که دقیقاً در وسط این بازه زمانی قرار دارد، برابر است با:

$$v_{t=3 \text{ s}} = \frac{v + 2v}{2} = \frac{3}{2}v$$

به طور مشابه در بازه زمانی 8 s تا 10 s نیز شیب نمودار ثابت است و لحظه $t_2 = 9 \text{ s}$ دقیقاً در وسط این بازه قرار دارد؛ بنابراین سرعت متحرک در لحظه $t_2 = 9 \text{ s}$ برابر است با:



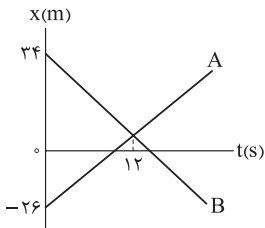
$$v_{t=9 \text{ s}} = \frac{2v + 0}{2} = v$$

گام سوم: نسبت اندازه شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 9 \text{ s}$ به اندازه شتاب آن در لحظه t_1 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_{av}}{a_1} = \frac{\frac{v - 1/2 v}{9 - 3}}{\frac{v}{2}} = \frac{-v}{6v} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{|a_{av}|}{|a_1|} = \frac{1}{6}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. در ۵ ثانیه سوم،



فاصله دو متحرک چند متر و چگونه تغییر می کند؟

- (۱) ۵، کاهش می یابد.
- (۲) ۱۰، کاهش می یابد.
- (۳) ۵، افزایش می یابد.
- (۴) ۱۰، افزایش می یابد.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به نمودار، دو متحرک در لحظه $t = 12 \text{ s}$ به یکدیگر می رسند. معادله مکان دو متحرک را مساوی با هم قرار می دهیم و سرعت نسبی آن ها را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t - 26 \\ x_B = v_B t + 34 \end{cases} \xrightarrow[t = 12 \text{ s}]{x_A = x_B} 12v_A - 26 = 12v_B + 34 \Rightarrow 12(v_A - v_B) = 60 \Rightarrow v_A - v_B = 5 \text{ m/s}$$

گام دوم: معادله مکان در حرکت با سرعت ثابت روی محور x را به صورت نسبی برای دو متحرک A و B می نویسیم:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[x_0 \text{ نسبی} = x_{0A} - x_{0B} = -26 - 34 = -60 \text{ m}]{x \text{ نسبی} = x_A - x_B, v \text{ نسبی} = v_A - v_B = 5 \text{ m/s}} x_A - x_B = 5t - 60$$

گام سوم: فاصله دو متحرک از یکدیگر را در ۵ ثانیه سوم حرکت، یعنی ۱۰ s تا ۱۵ s به دست می آوریم:

$$x_A - x_B = 5t - 60 \Rightarrow \begin{cases} t = 10 \text{ s} \Rightarrow x_A - x_B = 5 \times 10 - 60 = -10 \text{ m} \Rightarrow |x_A - x_B| = 10 \text{ m} \\ t = 15 \text{ s} \Rightarrow x_A - x_B = 5 \times 15 - 60 = 15 \text{ m} \Rightarrow |x_A - x_B| = 15 \text{ m} \end{cases}$$

بنابراین فاصله بین دو متحرک از ۱۰ m به ۱۵ m می رسد، یعنی ۵ m افزایش می یابد.

- (۱) در ۵۰ سال گذشته، شیب افزایش امید به زندگی در مناطق کم‌برخوردار کم‌تر از مناطق برخوردار بوده است.
- (۲) نیروی بین مولکولی غالب در اسیدهای چرب برخلاف استرهای بلندزنجیر، از نوع پیوند هیدروژنی است.
- (۳) مولکول‌های سازندهٔ عسل، قطبی‌اند و در ساختار آن‌ها گروه هیدروکسیل وجود دارد.
- (۴) به لطف صابون‌ها و مواد شوینده که براساس خواص اسیدی و بازی عمل می‌کنند، امروزه بیماری وبا تهدیدی برای جوامع انسانی به حساب نمی‌آید.

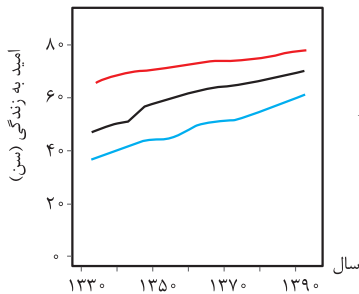
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در ساختار مولکول‌های سازندهٔ عسل، شمار قابل توجهی گروه هیدروکسیل (OH) وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): امید به زندگی در مناطق برخوردار بیشتر از مناطق کم‌برخوردار است اما شیب افزایش امید به زندگی در مناطق کم‌برخوردار بیشتر می‌باشد. به شیب منحنی‌ها در نمودار زیر توجه کنید:



گزینهٔ (۲): اسیدهای چرب همانند استرهای بلندزنجیر، در مجموع ناقطبی‌اند و نیروی بین مولکولی غالب آن‌ها، از نوع وان‌دروالسی است.

گزینهٔ (۴): وبا، هنوز هم می‌تواند برای هر جامعه‌ای تهدیدکننده باشد.

در کدام گزینه، ماده‌ای وجود دارد که برخلاف دو ماده دیگر، انحلال پذیری آن در هگزان بیشتر از آب است؟

- (۱) نمک خوراکی - اتیلن گلیکول - شکر
(۲) اوره - بنزین - روغن زیتون
(۳) وازلین - متانول - اوره
(۴) ید - بنزین - گریس

پاسخ: گزینه ۳

در گزینه (۳)، وازلین ناقطبی است و در هگزان حل می‌شود، در حالی که متانول و اوره، مولکول‌هایی قطبی بوده و انحلال پذیری آنها در آب بیشتر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نام ماده	فرمول شیمیایی	ذره‌های سازنده	محل در آب یا هگزان
نمک خوراکی	NaCl	شبکه‌ای از کاتیون‌ها و آنیون‌ها	آب
بنزین	C_6H_6	مولکول‌های ناقطبی	هگزان
گریس	$C_{18}H_{38}$	مولکول‌های ناقطبی	هگزان
وازلین	$C_{25}H_{52}$	مولکول‌های ناقطبی	هگزان
روغن زیتون	$C_{57}H_{104}O_6$	مولکول‌های ناقطبی	هگزان
چربی موجود در کوهان شتر	$C_{57}H_{110}O_6$	مولکول‌های ناقطبی	هگزان
اتیلن گلیکول	$C_2H_6O_2$	مولکول‌های قطبی	آب
متانول	CH_3OH	مولکول‌های قطبی	آب
اتانول	C_2H_5O	مولکول‌های قطبی	آب
اوره	$CO(NH_2)_2$	مولکول‌های قطبی	آب

درستی یا نادرستی کدام گزینه دربارهٔ اوره با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

(H = ۱, C = ۱۲, N = ۱۴, O = ۱۶ : g.mol⁻¹)

- (۱) مولکولی قطبی است و توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارد.
- (۲) شمار گروه‌های NH_۲ در ساختار آن با شمار گروه‌های هیدروکسیل در ساختار اتیلن گلیکول برابر است.
- (۳) در ۱۲ گرم از آن، ۸/۰ مول اتم هیدروژن وجود دارد.
- (۴) همهٔ عنصرهای سازندهٔ آن در ساختار روغن زیتون نیز وجود دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

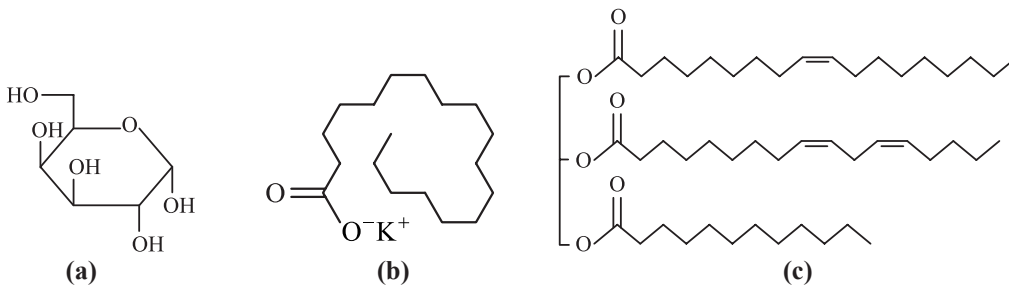
گزینهٔ (۴): برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است. در ساختار اوره (CO(NH_۲)_۲)، اتم نیتروژن وجود دارد که در ساختار روغن زیتون (C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶) وجود ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- گزینهٔ (۱): اوره، قطبی است و به دلیل داشتن پیوند N — H، می‌تواند با مولکول‌های آب، پیوند هیدروژنی برقرار کند.
- گزینهٔ (۲): در ساختار اوره، دو گروه NH_۲ و در ساختار اتیلن گلیکول (HO — CH_۲CH_۲ — OH)، دو گروه OH وجود دارد.
- گزینهٔ (۳): جرم مولی اوره، ۶۰ g.mol⁻¹ است و در هر مول از آن، ۴ مول اتم هیدروژن وجود دارد:

$$۱۲ \text{ g CO(NH}_۲\text{)}_۲ \times \frac{۱ \text{ mol CO(NH}_۲\text{)}_۲}{۶۰ \text{ g CO(NH}_۲\text{)}_۲} \times \frac{۴ \text{ mol H}}{۱ \text{ mol CO(NH}_۲\text{)}_۲} = ۸/۰ \text{ mol H}$$

با توجه به ساختارهای داده شده، کدام مورد نادرست است؟ ($H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$) **۱۸۹**

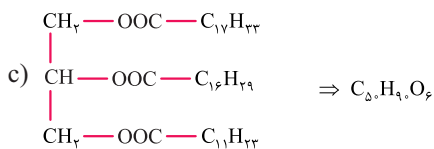
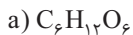


- (۱) نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول (a) با این نسبت در اوره برابر است.
- (۲) حالت فیزیکی ترکیب (b) در دما و فشار اتاق، مانند اتیلن گلیکول است.
- (۳) از واکنش ترکیب (c) با پتاسیم هیدروکسید، می‌توان ترکیب (b) را تولید کرد.
- (۴) تفاوت جرم مولی ترکیب (c) با روغن زیتون برابر با ۹۸ گرم است.

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا باید فرمول همه ترکیب‌ها را بنویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



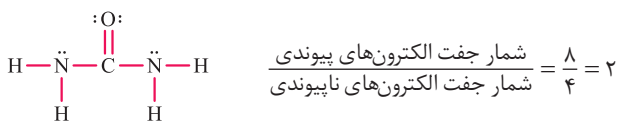
بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): مولکول (a) دارای ۶ اتم اکسیژن و در نتیجه $12 = 6 \times 2$ جفت الکترون ناپیوندی است:

$$\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی} = \frac{\frac{C}{(4 \times 6)} + \frac{H}{(1 \times 12)} + \frac{O}{(2 \times 6)}}{2} = 24$$

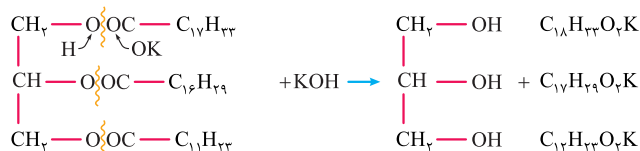
$$\Rightarrow \frac{\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{24}{12} = 2$$

ساختار اوره به صورت زیر است:



گزینه (۲): ترکیب (b) صابون پتاسیم است و مانند اتیلن گلیکول (ضد یخ) در دمای اتاق به حالت مایع می‌باشد.

گزینه (۳): از واکنش ترکیب (c) با پتاسیم هیدروکسید، می‌توان ۳ نوع صابون مایع تهیه کرد که فرمول هیچ‌کدام با ترکیب (b) یکسان نیست:



گزینه (۴): فرمول روغن زیتون، $C_{57}H_{104}O_6$ است:

$$C_{57}H_{104}O_6 - C_{50}H_{98}O_6 = C_7H_{14} = (7 \times 12) + 14 = 98 \text{ g}$$



۱۹۰

در نمونه‌ای به جرم $۱۰۲/۴$ گرم از یک اسید چرب بازنجیر هیدروکربنی سیر شده، $۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۵}$ اتم وجود دارد. جرم مولی صابون جامد حاصل از این اسید چرب، چند گرم بر مول است؟ ($H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶, Na = ۲۳ : g.mol^{-1}$)

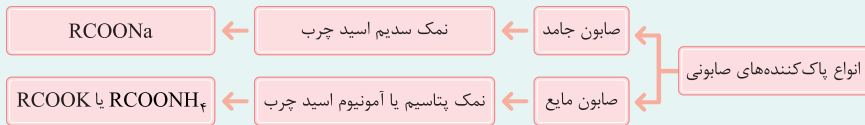
۲۴۲ (۱) ۲۷۰ (۲) ۲۷۸ (۳) ۳۰۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

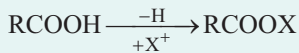
اسیدهای چرب و صابون:

اسیدهای چرب، کربوکسیلیک اسیدهایی ($RCOOH$) هستند که تعداد اتم‌های کربن آن‌ها زیاد است. اگر گروه R در این ترکیب‌ها، گروه آلکیل (زنجر سیر شده) باشد، فرمول عمومی آن‌ها به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است.

صابون، نمک اسید چرب است. پاک‌کننده‌های صابونی به حالت جامد و مایع وجود دارند:



با توجه به فرمول اسیدهای چرب و صابون، برای تبدیل فرمول اسید چرب به صابون، کافی است اتم هیدروژن گروه کربوکسیل را جدا کرده و به جای آن، کاتیون Na^+ ، K^+ یا NH_4^+ قرار دهیم:



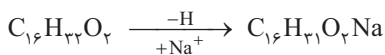
ابتدا باید فرمول اسید چرب را به دست آوریم:

$C_nH_{2n}O_2 \sim (3n + 2)$ اتم

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{۱۰۲/۴}{۱۴n + ۳۲} = \frac{۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۵}}{(3n + 2) \times ۶/۰۳ \times ۱۰^{۲۳}} \Rightarrow \frac{۵۱/۲}{۷n + ۱۶} = \frac{۲۰}{3n + 2}$$

$$\Rightarrow ۱۵۳/۶n + ۱۰۲/۴ = ۱۴۰n + ۳۲۰ \Rightarrow ۱۳/۶n = ۲۱۷/۶ \Rightarrow n = ۱۶ \Rightarrow C_{۱۶}H_{۳۲}O_2$$

فرمول صابون جامد حاصل از این اسید چرب به صورت زیر است:



جرم مولی صابون $= (۱۶ \times ۱۲) + ۳۱ + (۲ \times ۱۶) + ۲۳ = ۲۷۸ g.mol^{-1}$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر فرمول مولکولی اسید چرب و الکل سازنده یک استر سه‌عاملی به صورت $C_7H_{18}O_3$ و $C_{16}H_{34}O_2$ باشد، فرمول

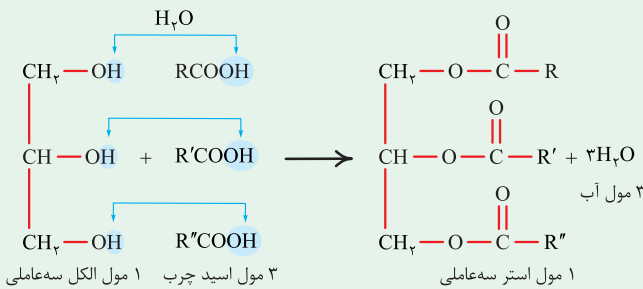
مولکولی این استر سنگین کدام است؟



پاسخ: گزینه ۲



استرها از واکنش الکل‌ها و اسیدهای آلی در محیط اسیدی به دست می‌آیند. بدانید و آگاه باشید که هر استر بلندزنجیر سه‌عاملی، حاصل واکنش بین یک الکل سه‌عاملی و سه اسید چربی یک‌عاملی است:

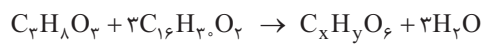


معادله واکنش تولید استر سنگین به صورت زیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

(آب) ۳ + استر سنگین → (اسید چرب) ۳ + (الکل ۳‌عاملی)

اگر شمار اتم‌های کربن و هیدروژن استر سنگین را برابر x و y در نظر بگیریم، به کمک موازنه معادله واکنش، می‌توان x و y را به دست آورد:



$$\left. \begin{array}{l}
 \text{C موازنه: } 3 + (3 \times 16) = x \Rightarrow x = 51 \\
 \text{H موازنه: } 18 + (3 \times 34) = y + (3 \times 2) \Rightarrow y = 92
 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{فرمول استر: } C_{51}H_{92}O_6$$

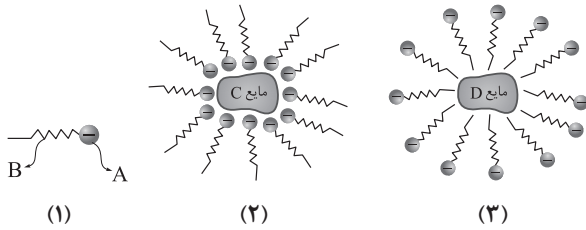
می‌توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

به‌جور دیگر

$$\begin{aligned}
 \text{فرمول استر سنگین} &= \frac{\text{فرمول استر سنگین} - C_3H_7}{3} \Rightarrow \text{فرمول استر سنگین} = 3(\text{فرمول اسید چرب}) + C_3H_7 \\
 &= 3(C_{16}H_{34}O_2) + C_3H_7 = C_{51}H_{92}O_6
 \end{aligned}$$

شکل (۱) ساختار بخش آنیونی صابون و شکل‌های (۲) و (۳) نحوه قرار گرفتن صابون در اطراف آب و روغن است. در

شکل (۱)، کدام بخش، چربی‌گریز و کدام یک از مایع‌های (C) یا (D)، روغن است؟



(۱) A, C

(۲) A, D

(۳) B, C

(۴) B, D

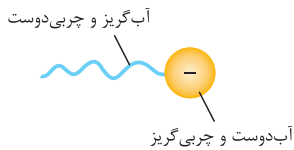
پاسخ: گزینه ۲

جزء آنیونی صابون، خودش دو بخش دارد:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

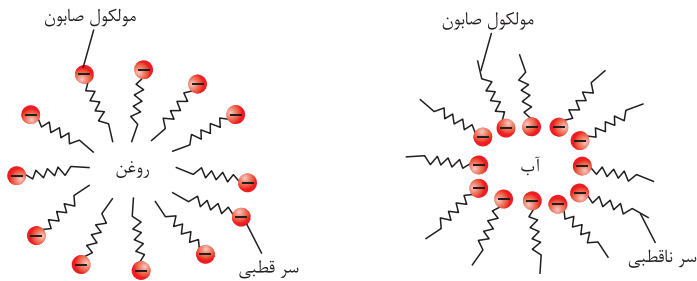
(۱) بخش زنجیر هیدروکربنی که آب‌گریز و در نتیجه چربی‌دوست است و سر ناقطبی صابون را تشکیل می‌دهد.

(۲) بخش —C(=O)—O^- که سر قطبی و آب‌دوست آن است.



مایع C: بخش قطبی صابون با آن جاذبه برقرار کرده است. $\Leftarrow$ C، همان آب است.

مایع D: بخش ناقطبی صابون با آن جاذبه برقرار کرده است. $\Leftarrow$ D، همان روغن است.



در بین مواد «ژله، شربت معده، شیر، چسب، سس مایونز» ماده‌ای که جزء کلوئیدها نیست،

- (۱) مخلوطی همگن و پایدار است
- (۲) از یون‌ها و مولکول‌ها ساخته شده است
- (۳) ناهمگن بوده و ذره‌های سازنده آن با گذشت زمان، ته‌نشین می‌شوند
- (۴) با کلوئیدها، در پایداری، مشابه و در اندازه ذرات، متفاوت است

پاسخ: گزینه ۳



مقایسه محلول‌ها، کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها به طور خلاصه در جدول زیر آمده است:

محلول	کلوئید	سوسپانسیون	نوع مخلوط ویژگی
نور را عبور می‌دهد.	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	رفتار در برابر نور
همگن	ناهمگن	ناهمگن	همگن بودن
پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است / ته‌نشین نمی‌شود.	ناپایدار است / ته‌نشین می‌شود.	پایداری
یون‌ها یا مولکول‌های مجزا	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	ذره‌های ریز ماده	ذره‌های سازنده
مخلوط مس (II) سولفات و آب، آب‌قند، آب‌نمک	هوای آلوده، مه، چسب، شیر، ژله، سس مایونز، رنگ، مخلوط آب، روغن و صابون	آب گل آلود، شربت معده، شربت خاکشیر	نمونه‌های مهم

در بین مواد داده‌شده، فقط شربت معده جزء کلوئیدها نیست. شربت معده، سوسپانسیون و در نتیجه مخلوطی ناهمگن و ناپایدار است و ذره‌های سازنده آن با گذشت زمان ته‌نشین می‌شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

هرگاه مقداری صابون را به مخلوط آب و روغن اضافه کرده و مخلوط را به هم بزنیم، مخلوطی به دست می آید که توانایی پخش نور را

- (۲) ناهمگن - دارد
(۴) ناهمگن - ندارد

- (۱) همگن - ندارد
(۳) همگن - دارد

پاسخ: گزینه ۲

مخلوط آب، روغن و صابون، کلوئید محسوب می شود. ذره های سازنده کلوئید، نور را پخش می کنند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به جدول زیر که نتایج حاصل از یک آزمایش برای مقایسه قدرت پاک کنندگی دو نوع صابون را نشان می دهد، مقدار چه تعداد از موارد a تا d بزرگ تر از 10° است؟ **۱۹۵**

نوع صابون	نوع پارچه	دما ($^\circ\text{C}$)	درصد لکه باقی مانده
صابون بدون آنزیم	نخی	30°	a
صابون بدون آنزیم	نخی	40°	b
صابون آنزیم دار	نخی	30°	10°
صابون آنزیم دار	نخی	40°	c
صابون آنزیم دار	پلی استر	40°	d

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

موارد a, b و d بزرگ تر از 10° هستند.

● صابون بدون آنزیم، قدرت پاک کنندگی کمتری نسبت به صابون آنزیم دار دارد، یعنی بدون آنزیم، درصد لکه باقی مانده بیشتر خواهد بود:

$$a > 10^\circ$$

● با افزایش دما، قدرت پاک کنندگی صابون افزایش می یابد و درصد لکه باقی مانده کم تر می شود:

$$b > 10^\circ, c < 10^\circ$$

● صابون، لکه ها را از روی پارچه نخی بهتر از پارچه پلی استری پاک می کند. تأثیر پارچه نخی حتی بیشتر از میزان افزایش دما به اندازه 10°C است:

$$d > 10^\circ$$

دانش آموزی برای مقایسه قدرت پاک کنندگی دو نوع صابون، کاوشی انجام داد. او از دو نوع صابون برای پاک کردن لکه چربی یکسان از روی دو نوع پارچه استفاده و نتایج آزمایش خود را در جدول زیر یادداشت کرد. با توجه به جدول به پرسش ها پاسخ دهید.

(شیمی (۳) - فود را بیازمایید صفحه ۹ و ۱۰ کتاب درسی)

نوع صابون	نوع پارچه	دما ($^\circ\text{C}$)	درصد لکه باقی مانده
صابون بدون آنزیم	نخی	30°	۲۵
صابون بدون آنزیم	نخی	40°	۱۵
صابون آنزیم دار	نخی	30°	10°
صابون آنزیم دار	نخی	40°	۰
صابون آنزیم دار	پلی استر	40°	۱۵

آ) دما چه اثری بر قدرت پاک کنندگی صابون دارد؟

ب) قدرت پاک کنندگی صابون با افزودن آنزیم چه تغییری می کند؟

پ) آیا میزان چسبندگی لکه های چربی روی پارچه های گوناگون یکسان است؟ از کدام داده جدول چنین نتیجه ای به دست می آید؟

کدام موارد زیر دربارهٔ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، درست است؟

الف) قدرت پاک‌کنندگی آن در آب چشمه به طور قابل توجهی بیشتر از آب دریا است.

ب) اگر فرمول شیمیایی آن به صورت $C_{14}H_{29}SO_3Na$ باشد، در ساختار آن (فاقد پیوند سه‌گانه)، ۵ پیوند دوگانه وجود دارد.

پ) خاصیت بازی دارد و با آلاینده‌ها، واکنش شیمیایی می‌دهد.

ت) عملکردی مشابه با صابون دارد و تهیهٔ آن با قیمت مناسب و در مقیاس انبوه امکان‌پذیر است.

(۱) ب و ت (۲) الف و پ

(۳) ب و پ (۴) الف و ت

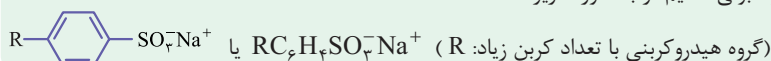
پاسخ: گزینهٔ ۱

عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی

نکته

ساختار کلی پاک‌کننده‌های غیرصابونی سدیم‌دار به صورت زیر است:



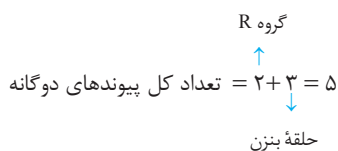
بررسی عبارت‌ها:

الف) پاک‌کننده‌های غیرصابونی با یون‌های موجود در آب سخت، رسوب تشکیل نمی‌دهند، یعنی قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها در آب معمولی و آب سخت، تقریباً یکسان است.

ب) ۳ پیوند دوگانه در حلقهٔ بنزن وجود دارد. باید چک کنیم در گروه R چند پیوند دوگانه وجود دارد:

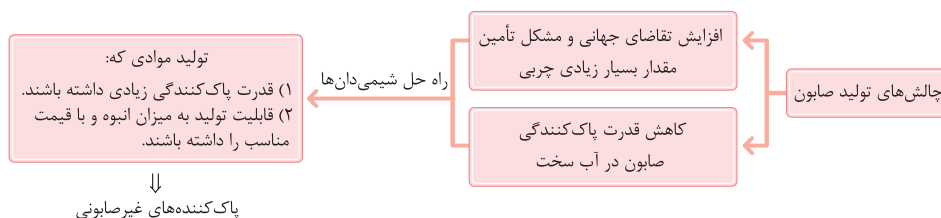


فرمول مولکولی زنجیر ۱۴ کربنهٔ سیرشده (C_nH_{2n+1}) به صورت $C_{14}H_{29}$ است. گروه R پاک‌کننده، ۴ اتم هیدروژن نسبت به حالت سیرشده کم‌تر دارد. با توجه به این که هر پیوند دوگانه، ۲ اتم هیدروژن از هیدروژن‌های یک ترکیب کم می‌کند، گروه R شامل ۲ پیوند دوگانه است:



پ) پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی، خاصیت بازی دارند و براساس برهم‌کنش بین ذره‌ها عمل می‌کنند، با آلاینده‌ها واکنش شیمیایی نمی‌دهند.

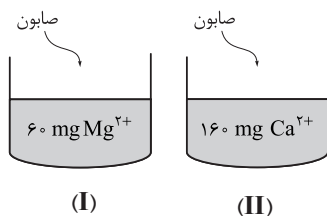
ت) کاملاً درسته!



مطابق شکل زیر، به دو نمونه آب که حاوی یون‌های منیزیم و کلسیم هستند، مقدار کافی و یکسانی صابون رنده شده

(I) به ظرف (II) اضافه می‌کنیم. پس از هم‌زدن و تشکیل رسوب، نسبت جرم رسوب در ظرف (II) به ظرف (I)

به تقریب کدام است؟ ($\text{Ca} = 40, \text{Mg} = 24, \text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1 : \text{g.mol}^{-1}$)



۱/۶۴ (۱)

۱/۸۴ (۲)

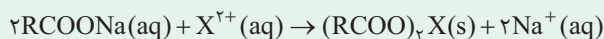
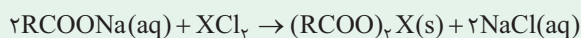
۲/۴۴ (۳)

۲/۴۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

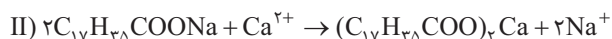
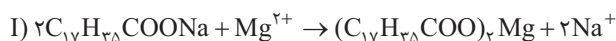


صابون در حضور یون‌های منیزیم و کلسیم موجود در آب سخت، رسوب می‌کند. اگر یون‌های منیزیم و کلسیم را با نماد X^{2+} نشان دهیم، فرم کلی معادله این واکنش‌ها را می‌توان به صورت‌های زیر نشان داد:



در ظرف‌ها، واکنش‌های زیر رخ می‌دهد:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



برای محاسبه جرم رسوب‌ها، به جرم مولی آن‌ها نیاز داریم. برای این کار، ابتدا جرم مولی گروه $\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COO}$ را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی} = (17 \times 12) + 35 + (2 \times 16) = 283 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{(I) جرم مولی رسوب در ظرف} = (2 \times 283) + 24 = 590 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{(II) جرم مولی رسوب در ظرف} = (2 \times 283) + 40 = 606 \text{ g.mol}^{-1}$$

حالا با توجه به جرم یون‌ها، جرم رسوب تشکیل شده در ظرف‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

یون رسوب



$$\frac{60 \times 10^{-3}}{1 \times 24} = \frac{x}{1 \times 590} \Rightarrow x = 5 \times 295 \times 10^{-3} \text{ g}$$



$$\frac{160 \times 10^{-3}}{1 \times 40} = \frac{y}{1 \times 606} \Rightarrow y = 4 \times 606 \times 10^{-3} \text{ g}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{4 \times 606}{5 \times 295} \approx 1/64$$

درستی یا نادرستی مطالب زیر به ترتیب چگونه است؟

- صابون مراغه، خاصیت بازی ندارد و برای موهای معمولی مناسب است.
- پاک کننده های صابونی توانایی پاک کردن آلودگی هایی که به صورت رسوب روی سطوح گوناگون ته نشین شده اند را دارند.
- با اضافه کردن یون فسفات به آب، می توان سختی آب را برطرف کرد.
- نسبت شمار آنیون به کاتیون و شمار اتم های اکسیژن در فرمول شیمیایی، جزء شباهت های صابون و پاک کننده های غیر صابونی است.

(۲) نادرست - درست - درست - درست

(۱) نادرست - نادرست - درست - نادرست

(۴) درست - درست - نادرست - درست

(۳) درست - نادرست - درست - نادرست

پاسخ: گزینه ۱

فقط عبارت سوم درست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت ها:

- صابون مراغه، افزودنی شیمیایی ندارد و به دلیل خاصیت بازی مناسب، برای موهای چرب استفاده می شود.
- برای پاک کردن آلاینده هایی که به صورت رسوب ته نشین شده اند، باید از پاک کننده های خورنده استفاده کرد.
- درست، زیرا یون فسفات با یون های Mg^{2+} و Ca^{2+} تشکیل رسوب $Mg_3(PO_4)_2$ و $Ca_3(PO_4)_2$ می دهد. این پوری دیگه صابون رسوب نمی کنه!
- نسبت شمار آنیون به کاتیون در پاک کننده های صابونی ($RCOONa$) و غیر صابونی ($RC_6H_4SO_3Na$) یکسان و برابر یک است، اما شمار اتم های اکسیژن در این دو پاک کننده برابر نیست.

تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و کربن در یک پاک‌کننده غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده برابر ۱۰ است. جرم ۰/۲ مول از صابون مایعی که شمار اتم‌های کربن یکسانی با این پاک‌کننده دارد، چند گرم است؟ (کاتیون و آنیون سازنده صابون مایع، جزء یون‌های چنداتمی هستند و زنجیر هیدروکربنی در آن یک پیوند $C=C$ دارد.)
($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16, Na = 23, K = 39 : g.mol^{-1}$)

$$57/4 (2)$$

$$57/0 (1)$$

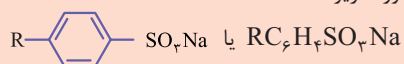
$$61/6 (4)$$

$$61/2 (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ساختار تنها پاک‌کننده غیرصابونی که در کتاب درسی بررسی شده است، به صورت زیر است:



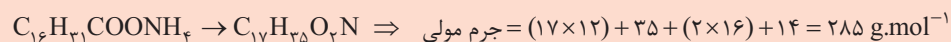
اگر گروه R زنجیر هیدروکربنی سیرشده، یعنی گروه آلکیل (C_nH_{2n+1}) باشد، خواهیم داشت:



$$= (2n+1+4) - (n+6) = n-1 \Rightarrow n-1=10 \Rightarrow n=11$$

$$\Rightarrow \text{فرمول پاک‌کننده: } C_{11}H_{23}C_6H_4SO_3Na = C_{17}H_{27}SO_3Na$$

حالا باید فرمول صابون مایع ۱۷ کربنی را بنویسیم. با توجه به اطلاعات سؤال، کاتیون و آنیون سازنده صابون، چنداتمی هستند، یعنی با صابون آمونیوم ($RCOONH_4$) سروکار داریم. گروه R، ۱۶ کربن و ۱ پیوند دوگانه دارد؛ پس فرمول آن به صورت $C_{16}H_{33-2} = C_{16}H_{31}$ است:



$$\text{جرم } 0/2 \text{ مول} = 0/2 \times 285 = 57 g$$

با توجه به مطالب کتاب درسی، اگر تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و کربن در یک پاک‌کننده غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، برابر ۱۱ باشد، جرم مولی آن، برابر چند است؟ ($S = 32, Na = 23, O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)

(سؤال ۹۹ کنکور تهری ۱۴۰۳ (فارج از کشور))

$$352 (4)$$

$$350 (3)$$

$$348 (2)$$

$$346 (1)$$

نوعی پاک‌کننده که به شکل پودر عرضه می‌شود، شامل مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم است. با توجه به الگوی زیر، کدام مورد درست است؟



- (۱) برخلاف واکنش تشکیل نمک خوراکی از عنصرهای سازنده، واکنشی گرماگیر است.
- (۲) X، گاز اکسیژن است که با ایجاد فشار، قدرت پاک‌کنندگی مخلوط را افزایش می‌دهد.
- (۳) رنگ کاغذ pH در مخلوط پودر اولیه و آب، با رنگ کاغذ pH در محلول سرکه سفید یکسان است.
- (۴) اگر فرآورده دیگر واکنش، NaAl(OH)_4 باشد، مجموع ضرایب مواد در معادله موازنه‌شده واکنش برابر ۱۵ است.

پاسخ: گزینه ۴

درس‌Box

نوعی پاک‌کننده خورنده که به شکل پودر عرضه می‌شود، شامل مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم است. معادله نوشتاری واکنش این مخلوط با آب به صورت زیر است:



- از این پودر برای بازکردن لوله‌ها و مسیرهایی استفاده می‌شود که بر اثر ایجاد رسوب و تجمع چربی‌ها بسته شده‌اند؛ زیرا:
- (۱) سدیم هیدروکسید موجود در این مخلوط می‌تواند با چربی‌ها واکنش داده و صابون تولید کند که باعث از بین رفتن بیشتر چربی می‌شود.
 - (۲) از آن‌جا که این واکنش گرماده است، گرمای آزادشده می‌تواند قدرت پاک‌کنندگی را افزایش دهد و باعث نرم یا ذوب شدن چربی‌ها و در نتیجه آسان‌تر بازشدن لوله‌ها شود.
 - (۳) تولید گاز هیدروژن در این واکنش، قدرت پاک‌کنندگی مخلوط را افزایش می‌دهد، زیرا گاز با ایجاد فشار و ضربه به رسوب‌ها، باعث بازشدن آسان‌تر لوله‌های گرفته‌شده می‌شود.

بررسی گزینه‌ها:

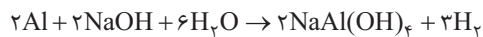
پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): واکنش مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، همانند واکنش تشکیل نمک خوراکی، $2\text{Na(s)} + \text{Cl}_2\text{(g)} \rightarrow 2\text{NaCl(s)}$ ، گرماده است.

گزینه (۲): X، گاز هیدروژن است.

گزینه (۳): مخلوط پودر اولیه و آب، خاصیت بازی دارد، در حالی که سرکه سفید، خاصیت اسیدی دارد. کاغذ pH در محیط‌های بازی به رنگ آبی و در محیط‌های اسیدی به رنگ سرخ درمی‌آید.

گزینه (۴): معادله موازنه‌شده واکنش به صورت زیر است:



$$2 + 2 + 6 + 2 + 3 = 15$$