دفترچه پاسخ

آزمون ۲۸ شهریور ۱۴۰۴

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲ و ریاضی پایه	کاظم اجلالی-علی آزاد-مهدی براتی-شاهین پروازی-عادل حسینی-سجاد داوطلب-وحید راحتی-علی سرآبادانی-نیما سلطانی احسان صادقی-حمید علیزاده-احسان غنی‌زاده-حمید مام‌قادری-سیدسپهر متولیان-امیر مرادیان-علی مرشد-مجتبی نادری مهدی نصراللهی-امین نصراله-حسن نصرتی‌ناهوک-جهانبخش نیکنام
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-عباس اسدی‌امیرآبادی-علی ایمانی-محمد بحیرایی-جواد حاتمی-حسین حاجیلو-محمد خندان-شهریار رحمانی علیرضا شریف‌خطیبی-علی فتح‌آبادی-فرشاد فرامرزی-محمدابراهیم گیتی‌زاده-سینا محمدپور-مهرداد ملوندی-میلاد منصوری سرژ یقیازاریان‌تبریزی
	آمارواحتمال وریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-رضا توکلی-جواد حاتمی-فرزانه خاکپاش-محمد خندان-علیرضا شریف‌خطیبی-مرتضی فهیم‌علوی مهرداد ملوندی-نیلوفر مهدوی-سروش موئینی-هومن نورائی
	فیزیک	بابک اسلامی-زهره آقامحمدی-محمدعلی راست‌پیمان-بهنام رستمی-امیر ستارزاده-مهدی سلطانی-محمدرضا شیروانی‌زاده محمد عظیم‌پور-پوریا علاقه‌مند-مسعود قره‌خانی-محسن قندچلر-مصطفی کیانی-علیرضا گونه-غلامرضا محبی امیر محمودی‌انزابی-حسین مخدومی-سیدعلی میرنوری-حسام نادری-مصطفی واثقی
	شیمی	مریم اکبری-محمدرضا پورجاوید-کامران جعفری-ایمان حسین‌نژاد-موسی خیاط‌علیمحمدی-حمید ذبحی-یاسر راش حسن رحمتی‌کوکنده فرزاد رضایی-روزبه رضوانی-رضا سلیمانی-آرویـن شجاعی-مینا شرافتی‌پور-امیرحسین طیبی رسول عابدینی‌زواره-محمد عظیمیان‌زواره محمدپارسا فراهانی-محمد کوهستانیان-حسن لشکری-محمدحسن محمدزاده‌مقدم سیدمحمد معروفی-مرتضی نصیرزاده-محمد وزیری

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی‌پایه	هندسه	آمارواحتمال وریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	سیدسپهر متولیان	مهرداد ملوندی	مهرداد ملوندی	حسام نادری	آرش ظریف
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب یاسین کشاورزی مهرداد ملوندی	امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	سینا صالحی حسین بصیرترکمبور زهره آقامحمدی	یاسر راش مجتبی محجوب امیرعلی بیات فرزاد حلاج‌مقدم
مسئول درس	سیدسپهر متولیان	مهرداد ملوندی	مهرداد ملوندی	حسام نادری	آرش ظریف
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران (مستندسازی)	معصومه صنعت‌کار-مهسا محمدنیا-احسان میرزینلی-سجاد سلیمی-فرشته کمبرانی			پرهام مهرآرا سجاد بهارلویی	محسن دستجردی بیتا مرادی آتیلا ذاکری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح الهزاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

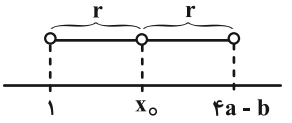
گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۱

۱- **گزینهٔ «۳»** *(حمید علیزاده)*



$$x_0 = a - 3b = 3a + b \Rightarrow 2a = -4b \Rightarrow a = -2b$$

$$r = 4a - b - x_0 = x_0 - 1 \Rightarrow 4a - b - (3a + b) = a - 3b - 1$$

$$\Rightarrow a - 2b = a - 3b - 1 \Rightarrow b = -1 \,,\, a = 2 \Rightarrow x_0 = 5$$

توجه: اگر مجموعه را به صورت $(3a + b \,,\, 4a - b) \cup (1 \,,\, a - 3b)$ در نظر می‌گرفتیم، مجموعهٔ $(3 \,,\, 1) \cup (1 \,,\, -1)$ به دست می‌آمد که $x_0 = 1$ در گزینه‌ها وجود ندارد.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(علی آزاد)*

ابتدا برای به‌دست آوردن حد تابع در نقطهٔ $x = 3$ می‌بایست معادلهٔ خط را در بازهٔ $[1, 4)$ به‌دست آورد:

$$A(1,4), B(4,7) \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{7-4}{4-1} = 1$$

$$f(x) = x + c \xrightarrow{A(1,4)} 4 = 1 + c \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x + 3$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6 \Rightarrow a = 6$$

حال برای محاسبهٔ حد خواسته شده می‌بایست ضریب b را در معادلهٔ سهمی به‌دست آورد. با جایگذاری نقطهٔ $(4, 10)$ در معادلهٔ سهمی خواهیم داشت:

$$f(x) = x^2 - bx + 18 \xrightarrow{(4,10)} 10 = 16 - 4b + 18 \Rightarrow b = 6$$

$$\Rightarrow \left(\lim_{x \to 6^+} [f(x)]\right) - [\lim_{x \to 6^-} f(x)] = [(-2)^-] - [6^2 - 6 \times 6 + 18]$$

$$= -3 - 18 = -21$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۴۰)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(حمید علیزاده)*

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = 3$ حد دارد ولی تابع در این نقطه تعریف نشده و مقدار ندارد. پس گزینهٔ «۴» صحیح نیست.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۹)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(مجتبی نادری)*

وقتی $x \to (\frac{1}{4})^-$، این یعنی x با مقادیر کمتر از $\frac{1}{4}$ به این عدد نزدیک می‌شود یعنی $0 < x < \frac{1}{4}$، بنابراین $\frac{1}{x} > 4$ و این یعنی $\frac{1}{x}$ کمی بیشتر از عدد ۴ است، پس:

$$\lim_{x \to (\frac{1}{4})^-} [\frac{1}{x}] = [4^+] = 4$$

به‌طور مشابه وقتی $x \to (\frac{1}{2})^-$ آنگاه $0 < x < \frac{1}{2}$ و لذا $\frac{1}{x} > 2$ و این یعنی $-\frac{3}{x}$ کمی کمتر از عدد ۶- است، پس:

$$\lim_{x \to (\frac{1}{3})^-} [-\frac{2}{x}] = [(-6)^-] = -7$$

و لذا خواهیم داشت:

$$\text{حاصل حد} = 4 + (-7) = -3$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۶)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(وحید راهتی)*

$$\lim_{x \to \frac{5\pi}{4}} \frac{[\cos x] + 2}{\sin 4x - 1} = \frac{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] + 2}{0 - 1} = \frac{-1 + 2}{-1} = -1$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۴۰)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(علی آزاد)*

$$\lim_{x \to a} g^2(x) = (\lim_{x \to a} g(x))^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = \pm\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\pm\frac{1}{5}} = 4 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \pm\frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \to a} (g(x) - 2f(x)) = \lim_{x \to a} g(x) - 2\lim_{x \to a} f(x)$$

$$= (\pm\frac{1}{5}) - 2(\pm\frac{4}{5}) = \pm\frac{7}{5}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۴۰)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(علی آزاد)*

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 + x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = -2$$

با توجه به اینکه حد مخرج کسر صفر می‌باشد، می‌بایست $x = -1$ ریشهٔ صورت کسر نیز باشد.

$$۲(-۱)^۳+(-۱)^۲+a(-۱)+b=۰\Rightarrow b-a=۱$$

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳+x^۲+ax+b & x+۱ \\ \hline -(۲x^۳+۲x^۲) & ۲x^۲-x+(a+۱) \\ \hline -x^۲+ax+b & \\ -(-x^۲-x) & \\ \hline (a+۱)x+b & \\ -((a+۱)x+(a+۱)) & \\ \hline b-a-۱=۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۳+x^۲+ax+b}{x^۲-x-۲}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x^۲-x+(a+۱))}{(x-۲)(x+۱)}$$

$$=\frac{۲+۱+a+۱}{-۳}=-۲\Rightarrow ۴+a=۶\Rightarrow a=۲$$

$$\xrightarrow{b-a=۱} b=۳\Rightarrow a+b=۵$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(شاهین پروازی)*

ابتدا حد تابع $y=x^۲-۶x+۱۷$ را در یک همسایگی $x=۳$ حساب می‌کنیم:

$$y=(x-۳)^۲+۸$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳}(x^۲-۶x+۱۷)=۸$$

توجه کنید مقادیر سهمی $y=x^۲-۶x+۱۷$ با مقادیر بیشتر از ۸ به آن نزدیک می‌شود، پس داریم:

$$\lim_{x\to ۳} f\left(x^۲-۶x+۱۷\right)=\lim_{x\to ۸^+} f(x)=\lim_{x\to ۸^+}\frac{۴\sqrt[۳]{x}-x}{x^۲-۶۴}$$

$$=\lim_{x\to ۸^+}\frac{۴\sqrt[۳]{x}-x}{x^۲-۶۴}=\lim_{x\to ۸^+}\frac{\sqrt[۳]{x}(۴-\sqrt[۳]{x^۲})}{(x-۸)(x+۸)}$$

$$=\lim_{x\to ۸^+}\frac{\sqrt[۳]{x}(۲-\sqrt[۳]{x})(۲+\sqrt[۳]{x})}{(\sqrt[۳]{x}-۲)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)(x+۸)}$$

$$=\lim_{x\to ۸^+}\frac{-\sqrt[۳]{x}(۲+\sqrt[۳]{x})}{(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)(x+۸)}=-\frac{۱}{۲۴}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

مقدار تابع و حدود چپ و راست را حساب می‌کنیم:

$$f\left(\frac{\pi}{۶}\right)=b[۴\sin\frac{\pi}{۶}]+[\frac{-\pi}{\frac{\pi}{۶}}]=۲b-۶$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}^-} b[۴\sin x]+[-\frac{\pi}{x}]=b-۷$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}^+}\frac{a\sin ۶x}{۶x-\pi}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}^+}\frac{a\sin(\pi-۶x)}{-(\pi-۶x)}=-a$$

پس برای پیوستگی در $x=\frac{\pi}{۶}$، سه مقدار بالا باید برابر باشند:

$$\Rightarrow\begin{cases}۲b-۶=b-۷\Rightarrow b=-۱\\ b-۷=-a\Rightarrow a=۸\end{cases}\Rightarrow a-b=۹$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیر مرادیان)*

تابع f چون شامل $[x]$ می‌باشد پس ممکن است در نقاط صحیح ناپیوسته باشد، ($x>۰$ و $x\in\mathbb{Z}$ را بررسی می‌کنیم)

$$x=۱\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}[x](x-۱)=(۱)(۰)=۰\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}[x](x-۱)=(۰)(۰)=۰\\ f(۱)=۱\times(۰)=۰\end{cases}\Rightarrow$$ در $x=۱$ پیوسته است.

$$x=۲\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}[x](x-۱)=۲\times(۱)=۲\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}[x](x-۱)=(۱)(۱)=۱\\ f(۲)=۲\times(۱)=۲\end{cases}\Rightarrow$$ در $x=۲$ پیوسته نیست.

پس اگر $a=۲$ باشد، تابع f در بازهٔ $(۰,۲)$ پیوسته می‌باشد. دقت کنید که به ازای $a>۲$ تابع f در نقطهٔ $x=۲$ ناپیوسته می‌باشد.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۶ و ۱۴۵ تا ۱۵۱)

حسابان ۲

۱۱- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

ضابطهٔ تابع تبدیل یافته به‌صورت $g(x)=f(2x)-\frac{5}{4}$ است. ضابطه‌های g را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}-\sqrt{1-2x} & ; \quad x<\frac{1}{2}\\ 6x-4x^2-\frac{5}{4} & ; \quad x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$$

حال معادلهٔ $g(x)=0$ را برای هر کدام از ضابطه‌ها حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{3}{4}-\sqrt{1-2x}=0\Rightarrow 1-2x=\frac{9}{16}\Rightarrow x=\frac{7}{32} & \text{قابل‌قبول}\\ 6x-4x^2-\frac{5}{4}=0\xrightarrow{\Delta=16} x=\frac{6\pm 4}{8}\xrightarrow{x\geq\frac{1}{2}} x=\frac{5}{4}\end{cases}$$

مجموع صفرهای تابع برابر است با:

$$\frac{7}{32}+\frac{5}{4}=\frac{47}{32}$$

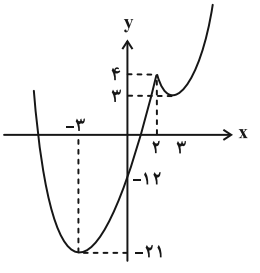
(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

$$f(x)=\begin{cases}x^2-6x+12 & ;x\geq 2\\ x^2+6x-12 & ;x\leq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x-3)^2+3 & ;x\geq 2\\ (x+3)^2-21 & ;x\leq 2\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



بنابراین تابع f روی بازه $[2,-3]$ و هر زیرمجموعه‌ای از آن اکیداً صعودی و روی بازه $[3,2]$ و هر زیرمجموعه‌ای از آن اکیداً نزولی است. پس کمترین مقدار a برابر ۳- و بیشترین مقدار b برابر ۳ است و در نتیجه بیشترین مقدار ممکن $b-a$ برابر ۶ است.

(حسابان ۲- تابع؛ مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۸)

۱۳- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

با استفاده از اتحاد $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$ چندجمله‌ای $P(x)$ را تجزیه می‌کنیم.

$$P(x)=x^{10}+x^5=(x^2)^5+x^5$$
$$=(x^2+x)((x^2)^4-(x^2)^3x+(x^2)^2x^2-(x^2)x^3+x^4)$$
$$=(x^2+x)(x^8-x^7+x^6-x^5+x^4)$$
$$=(x^2+x)Q(x)$$

بنابراین داریم:

$$Q(x)=x^8-x^7+x^6-x^5+x^4\Rightarrow Q(-1)=5$$

(حسابان ۲: تابع؛ مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۲۲)

۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

ابتدا ضابطه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=a\left(\frac{1-\cos 2b\pi x}{2}\right)+c=-\frac{a}{2}\cos 2b\pi x+\frac{a}{2}+c$$

کم‌ترین مقدار تابع بالا به ازای $\cos 2b\pi x=-1$ رخ می‌دهد، پس $a+c=-3$ است. از طرفی بیش‌ترین مقدار نیز به ازای $\cos 2b\pi x=1$ رخ می‌دهد، داریم:

$$۲=-\frac{a}{۲}(۱)+\frac{a}{۲}+c\Rightarrow c=۲\xrightarrow{a+c=-۳}a=-۵$$

$$\Rightarrow f(x)=۲-۵\sin^۲ b\pi x$$

دورهٔ تناوب تابع f برابر با دورهٔ تناوب تابع $\cos ۲b\pi x$ است، پس در این سؤال داریم:

$$T_f=\frac{۲\pi}{۲|b|\pi}=\frac{۱}{|b|}=۶\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow f(x)=۲-۵\sin^۲(\frac{\pi}{۶}x)$$

$$\Rightarrow f(۱۲۰۱)=۲-۵\sin^۲(\frac{۱۲۰۱\pi}{۶})$$

$$=۲-۵\sin^۲(۲۰۰\pi+\frac{\pi}{۶})=۲-۵\sin^۲\frac{\pi}{۶}=۲-۵(\frac{۱}{۴})=\frac{۳}{۴}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۵- **گزینهٔ «۱»** *(کاظم اجلالی)*

دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\pi x}{۲}\neq(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x\neq ۲k+۱\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

یعنی اعداد فرد در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. بنابراین باید فقط سه عدد فرد عضو بازهٔ $(-a^۲+۱\,,۴)$ باشند. این اعداد باید، ۳، ۱ و ۱- باشند، بنابراین داریم:

$$-۳\leq -a^۲+۱<-۱$$

$$-۴\leq -a^۲<-۲\Rightarrow ۲<a^۲\leq ۴\Rightarrow \sqrt{۲}<|a|\leq ۲$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(حمید مام‌قادری)*

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$$

$$=۱-۲(\sin x\cos x)^۲=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$$

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \sin^۲ ۲x=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin ۲x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow ۲x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(جوانبخش نیکنام)*

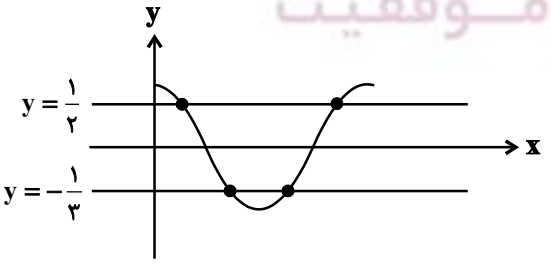
معادله را بر حسب $\cos\theta$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۳(۲\cos^۲\theta-۱)-۲(\frac{۱+\cos\theta}{۲})+۳=۰$$

$$\Rightarrow ۶\cos^۲\theta-\cos\theta-۱=۰$$
$$\Rightarrow (۳\cos\theta+۱)(۲\cos\theta-۱)=۰$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۳}$$

حال برای پیدا کردن تعداد جواب‌ها، نمودار $y=\cos x$ و خطوط $y=\frac{۱}{۲}$ و $y=-\frac{۱}{۳}$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل بالا، خط‌ها نمودار تابع کسینوس را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

(حسابان ۲- مثلثات؛ مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۴۴)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(شاهین پروازی)*

اختلاف زوایای $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ ، $\frac{\pi}{۲}$ است:

$$\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۲}=\frac{۳\pi}{۴}$$

پس معادله به صورت زیر خواهد شد:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۲}\right)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

از اتحاد $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{۲}\sin(\theta+\frac{\pi}{۴})$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

جواب‌های این معادله در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲},\pi\right]$، $\frac{\pi}{۳}$ و $-\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها صفر می‌شود.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(سیدسپهر متولیان)*

$$\tan۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}=\frac{۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۳}\right)}{۱-\left(\frac{\sqrt{۲}}{۳}\right)^{۲}}=\frac{\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}}{۱-\frac{۲}{۹}}=\frac{\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}}{\frac{۷}{۹}}=\frac{۶\sqrt{۲}}{۷}$$

$$\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{\tan۲\alpha-\tan\beta}{۱+\tan۲\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{۶\sqrt{۲}}{۷}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱+\frac{۶\sqrt{۲}}{۷}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$\Rightarrow \tan(۲\alpha-\beta)=\frac{\frac{۵\sqrt{۲}}{۱۴}}{\frac{۱۳}{۷}}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲۶}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحهٔ ۴۲)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(کاظم اجلالی)*

توجه کنید که $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ جواب‌های معادله هستند، زیرا:

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴})=۱+\tan(\frac{۲\pi}{۲})\Rightarrow \tan\frac{\pi}{۴}=۱+\tan\pi\Rightarrow ۱=۱+۰$$

$$\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴})=۱+\tan(۲\times\frac{۳\pi}{۲})\Rightarrow \tan\frac{۵\pi}{۴}=۱+\tan۳\pi\Rightarrow ۱=۱+۰$$

اکنون با شرط $x\neq\frac{\pi}{۲}$ و $x\neq\frac{۳\pi}{۲}$ می‌توان نوشت:

$$\tan(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{۴}}{۱+\tan x\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{\tan x-۱}{۱+\tan x}$$

$$\tan۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲}x}$$

بنابراین معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\tan x-۱}{\tan x+۱}=۱+\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲}x}$$

اگر فرض کنیم $t=\tan x$ معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{t-۱}{t+۱}=۱+\frac{۲t}{۱-t^{۲}}\Rightarrow \frac{t-۱}{t+۱}=\frac{۱-t^{۲}+۲t}{۱-t^{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{t-۱}{t+۱}=\frac{-t^{۲}+۲t+۱}{(۱-t)(۱+t)}\Rightarrow -(t-۱)^{۲}=-t^{۲}+۲t+۱$$

$$\Rightarrow -t^{۲}+۲t-۱=-t^{۲}+۲t+۱\Rightarrow -۱=۱$$ غ ق ق

پس معادله جواب دیگری ندارد و فقط $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ جواب‌های آن در بازهٔ $(۰\ ,\ ۲\pi)$ هستند. مجموع جواب‌های آن ۲π است.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی ۱

۲۱- **گزینهٔ «۳»** *(احسان غنی‌زاده)*

دو حالت داریم:

حالت اول:

$$x^۲+۱=۶x-۴\Rightarrow x^۲-۶x+۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۵)(x-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x-۵=۰\Rightarrow x=۵ & \text{غ ق ق} \\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱ & \text{ق ق} \end{cases}$$

حالت دوم:

$$x^۲+۱+۶x-۴=۱۳\Rightarrow x^۲+۶x-۱۶=۰$$

$$\Rightarrow (x+۸)(x-۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x+۸=۰\Rightarrow x=-۸ & \text{غ ق ق} \\ x-۲=۰\Rightarrow x=۲ & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین ۲ تا جواب برای x داریم که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\text{مجموع مقادیر برای } x = ۱+۲=۳$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۲۲- **گزینهٔ «۲»** *(علی سرآبادانی)*

با انتخاب سه نقطهٔ غیر هم‌خط، یک مثلث رسم می‌شود. فقط باید از پاره‌خط‌هایی که ۳ نقطه و ۵ نقطه روی آن‌ها قرار دارد، این سه نقطه را انتخاب نکرد. لذا طبق اصل متمم داریم:

$$\binom{۱۰}{۳}-\binom{۵}{۳}-\binom{۳}{۳}=۱۲۰-۱۰-۱=۱۰۹$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۲۳- **گزینهٔ «۱»** *(امین نصراله)*

$$\binom{n}{۲}+\binom{n-۱}{۲}=۲۵\Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}+\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲}=۲۵$$

$$\Rightarrow \frac{(n-۱)(n+n-۲)}{۲}=۲۵$$

$$\Rightarrow \frac{(n-۱)(۲n-۲)}{۲}=۲۵$$

$$\Rightarrow (n-۱)^۲=۲۵\Rightarrow n-۱=\pm ۵$$

$$\Rightarrow n=-۴ \text{ یا } n=۶ \Rightarrow n=۶ \text{ قابل قبول است}$$

$\Rightarrow$ **تعداد کل کتاب‌ها:** $n+(n-۱)=۶+۵=۱۱$

$$\binom{۱۱}{۴}=\frac{۱۱\times ۱۰\times ۹\times ۸}{۴\times ۳\times ۲}=۳۳۰$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(حسن نصرتی ناهوک)*

سه حرف C، I و M در آخر کلمه به $۳!$ حالت مختلف قرار می‌گیرند. از بین حروف باقیمانده D، Y، N، A، S، طبق فرض A نباید اول قرار گیرد، پس برای خانهٔ اول ۴ حالت داریم و برای خانه‌های بعدی به ترتیب $۴,۳,۲,۱$ حالت داریم. طبق اصل ضرب:

حرف A نباشد

$$\boxed{۴}\boxed{۴}\boxed{۳}\boxed{۲}\boxed{۱}\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$$

حروف C، I، M

$$n(B)=۴\times ۴!\times ۳!$$

همچنین تعداد کل حالت‌های ساختن کلمه‌های هشت حرفی برابر است با: $n(S)=۸!$**، پس:**

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴\times ۴!\times ۳!}{۸!}=\frac{۴\times ۴!\times ۶}{۸\times ۷\times ۶\times ۵\times ۴!}=\frac{۱}{۷۰}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(احسان صادقی)*

ما به $\binom{۷}{۵}=۲۱$ طریق می‌توانیم یک زیرمجموعهٔ ۵ عضوی از مجموعهٔ ۷ عضوی مورد نظر انتخاب کنیم. برای این‌که عضو A در زیرمجموعه انتخابی بوده و عضوهای E و F همزمان در آن نباشند، باید چهار عضو از مجموعهٔ $\{B,C,D,E,F,G\}$ را طوری انتخاب کنیم که یا E در آن باشد یا F و یا هیچ‌کدام در آن نباشند. پس تعداد حالات برابر می‌شود با:

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

$$= ۱۵ - ۶ = ۹ \quad \underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{انتخاب همزمان E و F برای مجموعه}} - \underbrace{\binom{۶}{۴}}_{\substack{\text{تعداد کل حالات انتخاب} \\ \text{۴ عضو از ۶ عضو}}}$$

پس با احتمال $\frac{۹}{۲۱} = \frac{۳}{۷}$ می‌توان زیرمجموعهٔ مذکور را انتخاب کرد.

(ریاضی ۱- ترکیبی- صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۵۱)

۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(علی مرشد)*

اگر تعداد مهره‌های سبز ظرف n باشد، داریم:

اگر $n > ۱$ باشد:

$$\frac{۱}{۲} = \frac{\binom{n}{۲} + \binom{۳}{۲}}{\binom{n+۳}{۲}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{\frac{n(n-۱)}{۲} + ۳}{\frac{(n+۳)(n+۲)}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{\frac{n^۲ - n + ۶}{۲}}{\frac{n^۲ + ۵n + ۶}{۲}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{n^۲ - n + ۶}{n^۲ + ۵n + ۶}$$

$$\Rightarrow n^۲ - ۷n + ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = ۶ \\ n = ۱ \end{cases}$$

اگر $n = ۱$ باشد:

$$\frac{۱}{۲} = \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۱+۳}{۲}} \Rightarrow \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۴}{۲}} = \frac{۳}{\frac{۴ \times ۳}{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

پس به‌ازای $n = ۱$ نیز تساوی برقرار است و $n = ۱$ نیز قابل قبول است.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

۲۷- **گزینهٔ «۴»** *(مهدی براتی)*

ابتدا هر یک از پیشامدها را مشخص می‌کنیم:

$$A = \{(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۵),(۲,۶),(۳,۶),(۴,۱),(۵,۱),(۵,۲),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳)\}$$

$$B = \{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\}$$

$$A \cap B = \{(۱,۵),(۵,۱)\}$$

$$n(A' - B) = n(A' \cap B') = n((A \cup B)')$$
$$= n(U) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)]$$
$$= ۳۶ - ۱۲ - ۹ + ۲ = ۱۷$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۶)

۲۸- **گزینهٔ «۴»** *(سجاد داوطلب)*

معمولاً در جامعه‌های با حجم کم و در دسترس می‌توانیم ویژگی تمام اعضا را بررسی کنیم. در این حالت اصطلاحاً می‌گوییم سرشماری کرده‌ایم.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۸)

۲۹- **گزینهٔ «۱»** *(نیما سلطانی)*

- جرم یک درخت کمی پیوسته است.

- تعداد گل‌های یک بازیکن کمّی گسسته است.

- جنسیت کیفی است و هیچ ترتیبی ندارد پس کیفی اسمی است.

- فصل‌های یک سال کیفی ترتیبی است.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۷۰)

۳۰- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی نصراللهی)*

سرعت دوندگان یک مسابقه متغیر کمی پیوسته است.

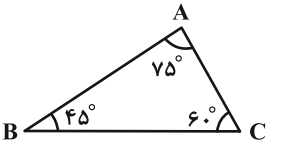
سایر گزینه‌ها متغیر کمی گسسته هستند.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۷۰)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۲

۳۱- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)



با توجه به شکل و نوشتن قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{AB}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\Rightarrow\sqrt{۲}AB=\sqrt{۳}AC$$

$$\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}AC\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{۶}}{۲}AC$$

با توجه به فرض مسئله $AB+AC=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ است، پس:

$$AB+AC=\frac{\sqrt{۶}}{۲}AC+AC=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۶}}{۲}+۱}=\sqrt{۲}$$

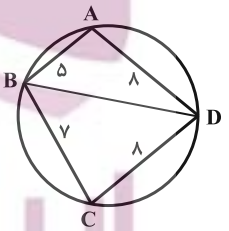
حال با نوشتن دوبارهٔ قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AC}{\sin۴۵^\circ}=\frac{BC}{\sin۷۵^\circ}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{BC}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}\Rightarrow BC=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۳)

۳۲- **گزینهٔ «۱»** (محمد خندان)

قطر BD را رسم می‌کنیم.



چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، پس هر دو زاویهٔ روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند و کسینوس آنها قرینهٔ یکدیگر است. در نتیجه:

$$\cos\hat{A}=-\cos\hat{C}$$

حال با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث ABD و BCD داریم:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABD}: BD^۲=AB^۲+AD^۲-۲AB.AD.\cos\hat{A}\\ \overset{\Delta}{BCD}: BD^۲=BC^۲+CD^۲-۲BC.CD.\cos\hat{C}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}BD^۲=۲۵+۶۴-۲\times۵\times۸\times\cos\hat{A}\\ BD^۲=۴۹+۶۴-۲\times۷\times۸\times\cos\hat{C}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۸۹-۸۰\cos\hat{A}=۱۱۳-۱۱۲\cos\hat{C}\xrightarrow{\cos\hat{A}=-\cos\hat{C}}$$

$$۱۹۲\cos\hat{A}=-۲۴\Rightarrow\cos\hat{A}=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow BD=\sqrt{۹۹}=۳\sqrt{۱۱}$$

$$\cos\hat{A}=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow\sin\hat{A}=\sqrt{۱-\left(-\frac{۱}{۸}\right)^۲}=\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$$

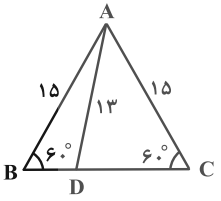
حال با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی را به‌دست می‌آوریم:

$$۲R=\frac{BD}{\sin\hat{A}}\Rightarrow R=\frac{BD}{۲\sin\hat{A}}=\frac{۳\sqrt{۱۱}}{۲\times\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}}=\frac{۴\sqrt{۱۱}}{\sqrt{۷}}=\frac{۴\sqrt{۷۷}}{۷}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۰ تا ۶۷)

۳۳- **گزینهٔ «۴»** (مهرداد ملوندی)

مطابق شکل فرض می‌کنیم ضلع AB به نقطهٔ D نزدیک‌تر است. با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها اندازهٔ پاره‌خط‌های BD و CD مشخص می‌شود.



$$AD^۲=AB^۲+BD^۲-۲AB\times BD\times\cos۶۰^\circ$$

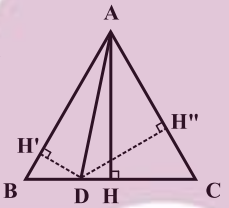
$$\Rightarrow ۱۶۹=۲۲۵+BD^۲-۲\times۱۵\times BD\times\frac{۱}{۲}\Rightarrow BD^۲-۱۵BD+۵۶=۰$$

$$\Rightarrow(BD-۷)(BD-۸)=۰\xrightarrow{BD<CD}\begin{cases}BD=۷\\ CD=۸\end{cases}$$

حال با نوشتن نسبت مساحت در مثلث‌های ABD و ACD داریم:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{۱}{۲}BD\times AH}{\frac{۱}{۲}CD\times AH}=\frac{\frac{۱}{۲}DH'\times AB}{\frac{۱}{۲}DH''\times AC}$$

$$\Rightarrow\frac{DH'}{DH''}=\frac{BD}{CD}=\frac{۷}{۸}=۰/۸۷۵$$



توجه: در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BDH' و CDH'' نیز می‌توانستیم با نوشتن نسبت مثلثاتی سینوس برای زاویهٔ ۶۰°، نسبت مورد نظر را به دست آوریم.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۳۴- **گزینهٔ «۱»** (محمد بحیرایی)

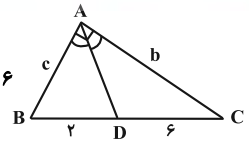
با توجه به شکل و فرض مسئله داریم:

$$\text{نیمساز } AD: \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{c}{b}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow b=۳c\ (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: AC^۲+AB^۲=BC^۲\Rightarrow b^۲+c^۲=۶۴$$

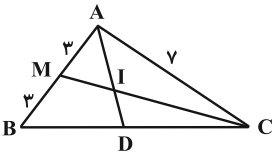
$$\xrightarrow{(۱)}۹c^۲+c^۲=۶۴\Rightarrow c^۲=\frac{۶۴}{۱۰}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}b.c=\frac{۳}{۲}c^۲=\frac{۳}{۲}\times\frac{۶۴}{۱۰}=۹/۶$$



(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۳۵- **گزینهٔ «۴»** (میلاد منصوری)



طبق قضیهٔ میانه‌ها در مثلث ABC داریم:

$$AC^2+BC^2=2CM^2+\frac{AB^2}{2}\Rightarrow 49+81=2CM^2+18$$

$$2CM^2=112\Rightarrow CM^2=56\Rightarrow CM=2\sqrt{14}$$

AI نیمساز زاویهٔ داخلی A در مثلث AMC است، بنابراین طبق قضیهٔ نیمسازهای زاویه‌های داخلی داریم:

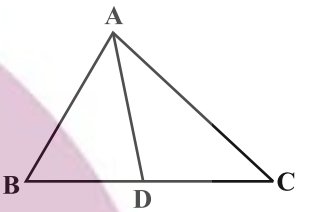
$$\frac{MI}{CI}=\frac{AM}{AC}=\frac{3}{7}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}\frac{MI}{CM}=\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow MI=\frac{3\sqrt{14}}{5}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(بواد هاتمی)*

با در اختیار داشتن طول دو ضلع مثلث و اندازهٔ زاویهٔ بین این دو ضلع، طول نیمساز داخلی زاویه از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:



$$AD=\frac{2bc\cos\frac{\hat{A}}{2}}{b+c}=\frac{2\times9\times6\times\cos60^\circ}{9+6}=\frac{2\times54\times\frac{1}{2}}{15}=\frac{18}{5}=3/6$$

(هندسه ۲- مشابه تمرین ۵ صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۳۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق قضیهٔ استوارت در مثلث ABC داریم:

$$AB^2\times DC+AC^2\times BD=AD^2\times BC+BD\times DC\times BC$$

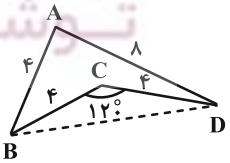
$$\Rightarrow 49\times6+AC^2\times3=36\times9+3\times6\times9$$

$$\Rightarrow 294+3AC^2=324+162\Rightarrow 3AC^2=192$$

$$\Rightarrow AC^2=64\Rightarrow AC=8$$

(هندسه ۲- مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۶۷)

۳۸- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*



کافی است از B به D وصل کنیم و سپس قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث BCD به‌کار ببریم:

$$\overset{\Delta}{BCD}: DB^2=BC^2+CD^2-2BC\times CD\times\cos120^\circ$$

$$=4^2+4^2-2\times4\times4\left(-\frac{1}{2}\right)=48\Rightarrow BD=4\sqrt{3}$$

اکنون قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث ABD به‌کار می‌بریم:

$$\overset{\Delta}{ABD}: BD^2=AB^2+AD^2-2AB\times AD\times\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow 48=16+64-2\times4\times8\times\cos\hat{A}\Rightarrow\cos\hat{A}=\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{A}=60^\circ$$

حال مساحت چهارضلعی ABCD را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{ABCD}=S_{ABD}-S_{BCD}$$

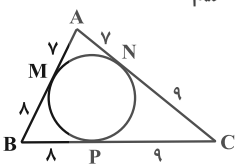
$$=\frac{1}{2}AB\times AD\times\sin\hat{A}-\frac{1}{2}\times BC\times CD\times\sin\hat{C}$$

$$=\frac{1}{2}\times4\times8\times\sin60^\circ-\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin120^\circ=4\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۳۹- **گزینهٔ «۳»** *(سینا ممرپور)*

می‌دانیم طول دو مماس رسم‌شده از هر نقطهٔ خارج دایره بر آن، با هم برابر است، پس مطابق شکل داریم:



یعنی طول اضلاع مثلث ABC برابر ۱۵، ۱۶ و ۱۷ است.

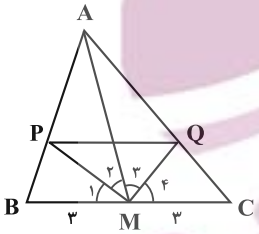
با معلوم بودن طول سه ضلع مثلث، ابتدا مساحت را با قاعدهٔ هرون به‌دست آورده و سپس شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را محاسبه می‌کنیم:

$$P=\frac{15+16+17}{2}=24\Rightarrow S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(b-c)}$$

$$=\sqrt{24\times9\times8\times7}=24\sqrt{21}\Rightarrow r=\frac{S}{P}=\frac{24\sqrt{21}}{24}=\sqrt{21}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۷۱ تا ۷۴)

۴۰- **گزینهٔ «۳»** *(محمد خندان)*



با توجه به قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در دو مثلث AMB و AMC داریم:

$$\left.\begin{aligned}\overset{\Delta}{AMB}:\frac{AP}{BP}=\frac{AM}{BM}=\frac{6}{3}=2\\ \overset{\Delta}{AMC}:\frac{AQ}{QC}=\frac{AM}{CM}=\frac{6}{3}=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC}$$

بنابراین با توجه به عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم که $PQ\parallel BC$ است.

در نتیجه داریم:

$$\frac{PQ}{BC}=\frac{AP}{AB}=\frac{AP}{AP+BP}=\frac{AM}{AM+BM}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow PQ=\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}\times6=4$$

حال با توجه به این‌که MP و MQ نیمساز زوایای داخلی در دو مثلث AMB و AMC هستند، می‌توان نوشت:

$$\hat{M}_1+\hat{M}_2+\hat{M}_3+\hat{M}_4=180^\circ\xrightarrow[\hat{M}_3=\hat{M}_4]{\hat{M}_1=\hat{M}_2}\hat{M}_2+\hat{M}_3=90^\circ$$

پس مثلث PMQ قائم‌الزاویه است و طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$MP^2+MQ^2=PQ^2=4^2=16$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

هندسه ۳

۴۱- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا شریف‌فطیبی)*

$$A=\begin{bmatrix}2a+1 & a-2\\ b+1 & a-b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a-2=0\\ b+1=0\end{cases}\xrightarrow[b=-1]{a=2}A=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}a & b+1\\ a-2 & c\end{bmatrix}\xrightarrow[b=-1]{a=2}B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های $AB=16$

تذکر: در ماتریس اسکالر، درایه‌های خارج قطر اصلی برابر صفر و درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر یکدیگرند، پس در ماتریس B، c لزوماً برابر ۲ است.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۲، ۱۷ و ۱۸)

۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ماتریس قطری ماتریسی است که درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن همگی برابر صفر هستند.

$$B\times A=\begin{bmatrix}3 & b\\ 2 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+b & 6+4b\\ 2a-1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6+4b=0\Rightarrow b=-\frac{3}{2}\\ 2a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}\end{cases}$$

با جای‌گذاری مقادیر a و b، ماتریس $B\times A$ ماتریس صفر خواهد شد که مجموع تمام درایه‌های آن برابر صفر می‌شود.

(هندسه ۳- مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۲۱)

۴۳- **گزینهٔ «۳»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*

راه حل اول:

$$A^2=3A-4I\Rightarrow A^2-3A=-4I\Rightarrow A(A-3I)=-4I$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{4}A(A-3I)=I\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3I)$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{4}A+\frac{3}{4}I=mA+nI\Rightarrow\begin{cases}m=-\frac{1}{4}\\ n=\frac{3}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow m+n=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

راه حل دوم:

$$A^{-1}=mA+nI\xrightarrow{\times A}A^{-1}A=mA^2+nIA$$

$$\Rightarrow I=mA^2+nA\qquad(1)$$

$$A^2=3A-4I\Rightarrow 4I=3A-A^2\Rightarrow I=-\frac{1}{4}A^2+\frac{3}{4}A\quad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow m=-\frac{1}{4}\ \text{و}\ n=\frac{3}{4}\Rightarrow m+n=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۰ تا ۲۳)

۴۴- **گزینهٔ «۱»** *(میلاد منصوری)*

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=3-2=1$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$AX=\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}\Rightarrow X=A^{-1}\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ -11\end{bmatrix}$$

$$AX'=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow X'=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

مجموع مجهولات دستگاه اول برابر $8+(-11)=-3$ و مجموع مجهولات دستگاه دوم برابر $2+(-1)=1$ است، پس مجموع مجهولات دستگاه اول، (۳-) برابر مجموع مجهولات دستگاه دوم است.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ تا ۲۶)

۴۵- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

معادلات همهٔ دستگاه‌ها را مرتب کرده و شرط داشتن بی‌شمار جواب را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ «۱»: $\begin{cases}2x-3y=3\\ -4x+6y=1\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{-4}=\frac{-3}{6}\neq\frac{3}{1}$ (فاقد جواب)

گزینهٔ «۲»:

$$\begin{cases}x-3y=2\\ -3x+9y=-6\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{-3}=\frac{-3}{9}=\frac{2}{-6}$$ (بی‌شمار جواب)

گزینهٔ «۳»:

$$\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{۲} \neq \frac{-۵}{۱}$$ (جواب منحصر به فرد)

گزینهٔ «۴»: (فاقد جواب)

$$\begin{cases} x+۳y=۵ \\ -۲x-۶y=۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{-۲} = \frac{۳}{-۶} \neq \frac{۵}{۱}$$

(هندسه ۳- مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۲۶)

۴۶- **گزینهٔ «۴»** *(شهریار رحمانی)*

$$AB^{-۱} + I = AB^{-۱} + BB^{-۱} = (A+B)B^{-۱}$$

$$\Rightarrow \left|AB^{-۱} + I\right| = |A+B|\left|B^{-۱}\right| = ۶ \times \frac{۱}{۲} = ۳$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲، ۲۳ و ۲۷ تا ۳۱)

۴۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با استفاده از دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۲ & ۲ & -۲ \end{vmatrix} = (-۲-۸+۰) - (۲-۴+۰) = -۱۰-(-۲) = -۸$$

$$|B| = |A^۲| = |A|^۲ = ۶۴$$

اگر $B = \begin{bmatrix} b & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & b \end{bmatrix}$ باشد، در این‌صورت داریم:

$$|B| = b^۳ = ۶۴ \Rightarrow b = ۴$$

$$۳ \times ۴ = ۱۲$$ = مجموع درایه‌های ماتریس B

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۲ و ۲۷ تا ۳۱)

۴۸- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

چون A وارون‌پذیر است، پس $|A| \neq ۰$ خواهد بود. دترمینان ماتریس A برابر است با:

$$|A| = \begin{vmatrix} |A|^۲ & ۴|A| \\ ۲ & |A| \end{vmatrix} = |A|^۳ - ۸|A| \Rightarrow |A|^۳ = ۹|A|$$

$$\xrightarrow{|A| \neq ۰} |A|^۲ = ۹ \Rightarrow |A| = \pm ۳$$

داریم:

$$\frac{|A|^۲ - ۱}{|A| + ۲} \begin{cases} \xrightarrow{|A|=۳} \frac{۹-۱}{۳+۲} = \frac{۸}{۵} = ۱/۶ \\ \xrightarrow{|A|=-۳} \frac{۹-۱}{-۳+۲} = \frac{۸}{-۱} = -۸ \end{cases}$$

(هندسه ۳- مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۳۰)

۴۹- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی)*

اگر دترمینان را برحسب سطر اول آن محاسبه کنیم، داریم:

$$-(x-a)\begin{vmatrix} a-x & x-c \\ b-x & ۰ \end{vmatrix} + (x-b)\begin{vmatrix} a-x & ۰ \\ b-x & c-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x-a)\left[۰-(x-c)(b-x)\right] + (x-b)\left[(a-x)(c-x)-۰\right]$$

$$= -(x-a)(x-c)(x-b) + (x-b)(x-a)(x-c) = ۰$$

بنابراین حاصل دترمینان به ازای تمامی مقادیر حقیقی x، برابر صفر است و در نتیجه معادله بی‌شمار جواب حقیقی دارد.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۵۰- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا شریف‌طبیی)*

دترمینان ماتریس را با بسط نسبت به سطر اول به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & x & x^۲ \\ ۱ & x^۲ & x^۳ \\ ۱ & x^۳ & x \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow \left(x^۳ - x^۶\right) - x\left(x - x^۳\right) + x^۲\left(x^۳ - x^۲\right) = ۰$$

$$\Rightarrow x^۳ - x^۶ - x^۲ + x^۴ + x^۵ - x^۴ = ۰ \Rightarrow x^۳ - x^۶ - x^۲ + x^۵ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۳\left(۱-x^۳\right) - x^۲\left(۱-x^۳\right) = ۰ \Rightarrow \left(x^۳ - x^۲\right)\left(۱-x^۳\right) = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲(x-۱)\left(۱-x^۳\right) = ۰$$

$$\Rightarrow -x^۲(x-۱)^۲\left(x^۲+x+۱\right) = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۱$$

پس این معادله دو ریشهٔ متمایز دارد.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

هندسه ۱

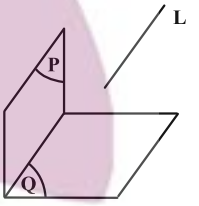
۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمد شهران)*

از یک نقطه خارج یک صفحه، تنها یک خط عمود بر صفحه مفروض می‌توان رسم کرد و تمام صفحات گذرنده از این خط، بر صفحهٔ مفروض عمود هستند، بنابراین از یک نقطه خارج یک صفحه، یک خط و بی‌شمار صفحه عمود بر صفحهٔ مفروض قابل رسم است.

(هندسه ۱- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۵۲- **گزینهٔ «۱»** *(محمدابراهیم کیتی‌زاده)*

اگر خط L با صفحهٔ P موازی باشد، مطابق شکل L لزوماً بر Q عمود نیست، پس گزینهٔ «۱» نادرست است.



(هندسه ۱- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

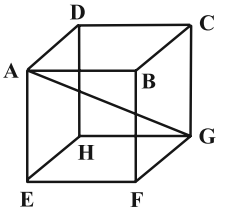
۵۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمدابراهیم کیتی‌زاده)*

می‌دانیم اگر خطی با یکی از دو صفحهٔ موازی، متقاطع باشد، حتماً با دیگری نیز متقاطع است، پس هر صفحهٔ موازی با صفحهٔ P، دو خط d و d' را قطع می‌کند و خط واصل بین دو نقطهٔ تلاقی، شرایط مسئله را داراست.

(هندسه ۱- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۵۴- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

مطابق شکل زیر، قطر AG با یال‌های BC، CD، DH، BF، EF و EH متنافر است.



(هندسه ۱- مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۸۲)

۵۵- **گزینهٔ «۱»** *(فرشاد فرامرزی)*

مکعب بزرگ از $۴\times۴\times۳=۴۸$ مکعب کوچک تشکیل شده است. حداکثر مکعب‌هایی که می‌تواند برداشته شود برابر است با: $۴۸-۹=۳۹$ که در این‌صورت تنها یک ردیف به شکل B باقی می‌ماند.

همچنین حداقل باید $۳\times۴=۱۲$ مکعب از شکل برداشته شود (۳ ستون مکعب از بالا به پایین که هر کدام شامل ۴ مکعب هستند). در نتیجه تفاضل حداقل و حداکثر تعداد مکعب‌هایی که باید برداشته شود، برابر است با:

$$۳۹-۱۲=۲۷$$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

۵۶- **گزینهٔ «۴»** *(علی فتح‌آبادی)*

فرض کنید n مکعب را روی هم قرار داده باشیم. بدیهی است که فقط ۴ وجه جانبی مکعب پایینی و مکعب‌های میانی قابل رؤیت هستند و در مکعب بالایی، علاوه بر ۴ وجه جانبی، وجه بالایی آنها نیز دیده می‌شود، بنابراین داریم:

$$\text{مجموع تعداد وجوه قابل رؤیت} = ۵+(n-۱)\times۴=۴n+۱$$

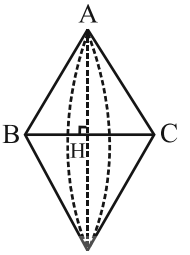
$$\text{مجموع اعداد قابل رؤیت} = ۵(۴n+۱) \Rightarrow ۲۴۵=۵(۴n+۱)$$

$$\Rightarrow ۴n+۱=۴۹ \Rightarrow ۴n=۴۸ \Rightarrow n=۱۲$$

(هندسه ۱- مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۹۱)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۵۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*



اگر مثلث متساوی‌الاضلاعی را حول قاعده آن دوران دهیم، آنگاه مطابق شکل دو مخروط با قاعده یکسان ایجاد می‌شود که شعاع قاعده هر کدام برابر طول ارتفاع وارد بر قاعده مثلث و ارتفاع هر کدام برابر نصف طول قاعده مثلث است.

اندازهٔ ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $۴\sqrt{۳}$ برابر است با:

$$h = ۴\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶$$

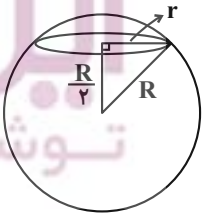
(هندسه ۱- مشابه تمرین ۲ (ت) صفحهٔ ۹۶)

۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(عباس اسدی امیرآبادی)*

$$r^۲ = R^۲ - \frac{R^۲}{۴} = \frac{۳R^۲}{۴} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

$$S = \pi r^۲ = \frac{۳}{۴}\pi R^۲ = ۲۴\pi \text{ (سطح مقطع)}$$

$$\Rightarrow R^۲ = ۳۲ \Rightarrow R = ۴\sqrt{۲}$$

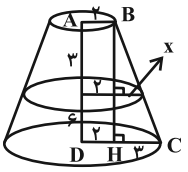


(هندسه ۱- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۵۹- **گزینهٔ «۱»** *(محمد خندان)*

از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ارتفاع، یک مخروط ناقص به‌وجود می‌آید.

سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ای موازی با قاعده‌های ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه با این مخروط ناقص، یک دایره است.



طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BHC داریم:

$$\frac{x}{۳} = \frac{۳}{۹} \Rightarrow ۹x = ۹ \Rightarrow x = ۱$$

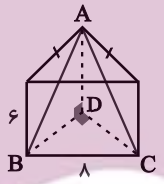
بنابراین مطابق شکل، شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر ۳ است و در نتیجه مساحت سطح مقطع برابر است با:

$$S = \pi(۳)^۲ = ۹\pi$$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۶)

۶۰- **گزینهٔ «۴»** *(حسین حاجیلو)*

از آنجا که مثلث DBC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به طول وتر ۸ است، داریم:



$$BD^۲ + CD^۲ = BC^۲ \Rightarrow x^۲ + x^۲ = ۶۴$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۳۲ \Rightarrow x = ۴\sqrt{۲}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABD بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^۲ = AD^۲ + BD^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۳۶ + ۳۲ = ۶۸$$

$$\Rightarrow AB = ۲\sqrt{۱۷}$$

برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC، طول ارتفاع وارد بر BC را حساب می‌کنیم.

$$\overset{\Delta}{ABH} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AH = \sqrt{AB^۲ - BH^۲} = \sqrt{۶۸ - ۱۶}$$

$$= \sqrt{۵۲} = ۲\sqrt{۱۳}$$

$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{۱}{۲}AH \times BC = \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۱۳}) \times ۸ = ۸\sqrt{۱۳}$$ **بنابراین:**

(هندسه ۱- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

آمار و احتمال

۶۱- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

تأثیر نوشابه‌های گازدار روی معده را با آزمایش یا مشاهده می‌توان بررسی کرد و بررسی میزان قاچاق سوخت در سال گذشته با توجه به اطلاعات ثبت‌شده که همان دادگان است، امکان‌پذیر می‌باشد.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۰۷ و ۱۰۸)

۶۲- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

چون مشتریان فروشگاه به‌صورت گروه‌های ۱۰۰۰ نفره طبقه‌بندی شده و از هر طبقه، نمونهٔ تصادفی ساده می‌گیریم، بنابراین از نمونه‌گیری طبقه‌ای استفاده کرده‌ایم.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۱)

۶۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند، آن روش نمونه‌گیری اریب است. بنابراین آمارشناسان تلاش می‌کنند تا با شناسایی منابع تولید اریبی، نمونه‌گیری‌ها را تا جایی که می‌توانند نااریب کنند و در واقع نمونه‌گیری نااریب، ارزش بالایی برای بررسی یک جامعه دارد.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۰۴، ۱۰۹ و ۱۱۶)

۶۴- **گزینهٔ «۴»** *(محمد فندان)*

با توجه به این‌که از بین ۳۵۰ نفر، قرار است یک نمونهٔ ۵۰ تایی انتخاب کنیم، پس از میان هر ۷ نفر، دقیقاً یک نفر باید انتخاب شود. از آن‌جا که باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴۱ بر ۷، برابر ۶ است، پس اعداد انتخابی به‌صورت $7k+6 \quad (k \in \mathbb{Z}, 0 \le k \le 49)$ می‌باشند که در نتیجه عدد ۳۰۴ نمی‌تواند در میان اعداد انتخابی قرار گیرد.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۰۰ و ۱۰۱)

۶۵- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

در گزینهٔ «۴»، نمونه‌گیری سیستماتیک یا سامانمند صورت گرفته است و تمام دانش‌آموزان مدرسه شانس حضور در نمونهٔ انتخابی را دارند، پس نمونه‌گیری اریب نیست. در گزینهٔ «۱» مدرسان کنکور معمولاً درآمد بیش‌تری نسبت به میانگین معلمان تمام مقاطع دارند، پس نمونه‌گیری اریب است. در گزینهٔ «۲» در نظرسنجی یک وبگاه، ممکن است بخش‌هایی از جامعه دسترسی به اینترنت و امکان حضور در این نظرسنجی را نداشته باشند، پس نمونه‌گیری اریب است. در گزینهٔ «۳» افراد حاضر در کتابخانهٔ مدرسه ممکن است دارای میزان مطالعهٔ بیشتری نسبت به سایر دانش‌آموزان مدرسه باشند، پس نمونه‌گیری اریب است.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۰۳ و ۱۰۴)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۶- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه خاکپاش)*

میانگین اعداد صحیح از ۰ تا N برابر است با:

$$\mu=\frac{0+1+2+\ldots+N}{N+1}=\frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N+1}=\frac{N}{2}$$

از طرفی میانگین نمونه انتخابی برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{3+4+6+8+9+12}{6}=\frac{42}{6}=7$$

بنابراین داریم: $\mu=\bar{x}\Rightarrow\frac{N}{2}=7\Rightarrow N=14$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

۶۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

میانگین جامعه برابر است با: $\mu=\frac{1+2+3+\ldots+99}{99}=\frac{\frac{99\times100}{2}}{99}=50$

نمونه‌های دوتایی که میانگین را برابر ۵۰ برآورد می‌کنند، عبارت‌اند از:

$$\{1,99\},\{2,98\},\{3,97\},\ldots,\{49,51\}$$

یعنی تعداد این نمونه‌ها برابر ۴۹ است. در نتیجه احتمال آن‌که میانگین جامعه و نمونه برابر باشد، برابر است با:

$$P=\frac{49}{\binom{99}{2}}=\frac{49}{\frac{99\times98}{2}}=\frac{49}{99\times49}=\frac{1}{99}$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۵)

۶۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

انحراف معیار برآورد میانگین یک نمونه برابر انحراف معیار جامعه تقسیم بر جذر اندازهٔ نمونه است. بنابراین اگر $n_1=36$ و $n_2=324$ فرض شود، آنگاه داریم:

$$\sigma_{\bar{x}_1}=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\Rightarrow1/5=\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\Rightarrow\sigma=1/5\times6=9$$

$$\sigma_{\bar{x}_2}=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}=\frac{9}{\sqrt{324}}=\frac{9}{18}=0/5$$

(آمار و احتمال- صفحهٔ ۱۱۵)

۶۹- **گزینهٔ «۲»** *(نیلوفر مهروی)*

انحراف معیار برآورد میانگین جامعه برابر است با انحراف معیار جامعه تقسیم بر جذر اندازهٔ نمونه. بنابراین داریم:

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\frac{2}{10}\sigma\Rightarrow\sqrt{n}>5\Rightarrow n>25\Rightarrow n\geq26$$

(آمار و احتمال- صفحهٔ ۱۱۵)

۷۰- **گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهروی)*

اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازهٔ n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$ (μ میانگین و σ انحراف معیار جامعه است)

$$\left.\begin{matrix}\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}=41\\ \bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}=48\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{تفاضل}}\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}=7$$

$$\Rightarrow\xrightarrow{n=196}\sigma=\frac{7\times\sqrt{196}}{4}=\frac{7\times14}{4}=\frac{49}{2}=24/5$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ریاضیات گسسته

۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌طبیی)*

کافی است به جای n، عدد ۱۱ را قرار دهیم. در این‌صورت داریم:

$$n^۲+۷n+۱۱=۱۱^۲+۷\times۱۱+۱۱=۱۱(۱۱+۷+۱)=۱۱\times۱۹$$

یعنی عدد موردنظر، عددی مرکب است و درستی حکم رد می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲ تا ۸)

۷۲- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

روش اول: با توجه به فرض داریم:

$$\begin{cases} a=۷q_۱+۴ \xrightarrow{\times۹} ۹a=۶۳q_۱+۳۶ \\ a=۹q_۲+۵ \xrightarrow{\times۷} ۷a=۶۳q_۲+۳۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} ۲a=۶۳(q_۱-q_۲)+۱$$

برای این‌که طرفین تساوی اخیر را بر ۲ تقسیم کنیم، سمت راست تساوی را با عدد ۶۳، جمع و منها می‌کنیم:

$$۲a=۶۳(q_۱-q_۲)+۱+۶۳-۶۳=۶۳(q_۱-q_۲-۱)+۶۴$$

$$\xrightarrow{\div۲} a=۶۳\left(\frac{q_۱-q_۲-۱}{۲}\right)+۳۲$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۶۳ برابر ۳۲ است.

روش دوم: طبق فرض داریم:

$$\left.\begin{matrix} \overset{۷}{a}\equiv \overset{۷}{۴}\equiv ۴+۴\times۷=۳۲ \\ \overset{۹}{a}\equiv \overset{۹}{۵}\equiv ۵+۳\times۹=۳۲ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{[۷,۹]} \overset{۶۳}{a}\equiv ۳۲ \Rightarrow \overset{۶۳}{a}\equiv ۳۲$$

(ریاضیات گسسته- مشابه تمرین ۹ صفحه ۱۶)

۷۳- **گزینهٔ «۳»** *(سروش موئینی)*

عدد A را به‌صورت $۲^{۱۰۰}\times۳^{۵۰}\times۲^۱\times۳^۱$ می‌نویسیم. داریم:

$$A=۲^{۱۰۰}\times۳^{۵۰}\times۶=\left(۲^۲\times۳\right)^{۵۰}\times۶=۱۲^{۵۰}\times۶$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A بر عدد ۱۳ برابر است با:

$$\overset{۱۳}{A}\equiv(-۱)^{۵۰}\times\overset{۱۳}{۶}\equiv۶$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۷۴- **گزینهٔ «۱»** *(مرتضی فهیم‌علوی)*

$$\overline{a۲۴۶۰}^{۱۱}\equiv\overline{۶a۰۲۷}^{۱۱} \Rightarrow ۰-۶+۴-۲+\overset{۱۱}{a}\equiv۷-۲+۰-a+۶$$

$$\Rightarrow \overset{۱۱}{۲a}\equiv\overset{۱۱}{۱۵}\equiv\overset{۱۱}{۴}\xrightarrow[(۲,۱۱)=۱]{\div۲}\overset{۱۱}{a}\equiv۲\Rightarrow a=۲$$

با جای‌گذاری $a=۲$ در عدد $\overline{۹a۳a۲}$ داریم:

$$\overset{۹}{۹۲۳۲۲}\equiv۹+۲+۳+۲+\overset{۹}{۲}\equiv\overset{۹}{۱۸}\equiv۰$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۷۵- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

می‌دانیم معادلهٔ همنهشتی $\overset{m}{ax\equiv b}$ در Z دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a,m)\mid b$. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $(۳۰,۴۲)=۶\Rightarrow ۶\nmid ۱۵$

گزینهٔ «۲»: $(۱۲,۱۸)=۶\Rightarrow ۶\nmid ۹$

گزینهٔ «۳»: $(۸,۲۰)=۴\Rightarrow ۴\nmid ۱۸$

گزینهٔ «۴»: $(۲۷,۱۲)=۳\Rightarrow ۳\mid ۲۱$

(ریاضیات گسسته- مشابه مثال صفحهٔ ۲۵)

۷۶- **گزینهٔ «۲»** *(جواد حاتمی)*

$$\overset{۱۷}{۴۳x}\equiv۲۶\Rightarrow ۹\overset{۱۷}{x}\equiv\overset{۱۷}{۹}\xrightarrow[(۱۷,۹)=۱]{\div۹}\overset{۱۷}{x}\equiv۱$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم x بر ۱۷، برابر ۱ است، بنابراین داریم:

$$x=۱۷k+۱\xrightarrow[k=۶]{\text{کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی}}x=۱۰۳$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

ایران توشه — توشه‌ات برای موفقیت

۷۷- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

اگر x و y را به ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایرهٔ کوچک‌تر و بزرگ‌تر (که خارج دایرهٔ کوچک‌تر باشد) فرض کنیم، آن‌گاه داریم:

$$۷x+۵y=۶۱ \Rightarrow ۷x \overset{۵}{\equiv} ۶۱ \Rightarrow ۷x \overset{۵}{\equiv} ۶۱-۵ \overset{۵}{\equiv} ۷\times ۸$$

$$\xrightarrow[(۵,۷)=۱]{+۷} x \overset{۵}{\equiv} ۸ \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow x=۵k+۳$$

عبارت x را در معادلهٔ سیالهٔ اول جای‌گذاری می‌کنیم تا y پدید آید:

$$۷(۵k+۳)+۵y=۶۱ \Rightarrow ۳۵k+۵y=۶۱-۲۱=۴۰$$

$$\xrightarrow{+۵} y=-۷k+۸$$

از آنجا x و y اعدادی حسابی هستند، پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ y=۸ \end{cases} , \begin{cases} x=۸ \\ y=۱ \end{cases}$$

از آنجا که تیرانداز کمتر از ۱۰ تیر انداخته، پس $x+y<۱۰$ و فقط حالت $x=۸$ و $y=۱$ قابل قبول است.

(ریاضیات گسسته- مشابه مثال صفحهٔ ۲۸)

۷۸- **گزینهٔ «۱»** *(سراسری ریاضی - ۸۹)*

$$۵۷x-۸۷y=۳۴۲ \xrightarrow{+۳} ۱۹x-۲۹y=۱۱۴$$

$$\Rightarrow ۱۹x=۲۹y+۱۱۴ \Rightarrow ۱۹x \overset{۲۹}{\equiv} ۱۱۴ \xrightarrow[(۱۹,۲۹)=۱]{+۱۹} x \overset{۲۹}{\equiv} ۶$$

$$x=۲۹k+۶ \geq ۱۰۰ \Rightarrow k \geq ۴ \Rightarrow x_{min}=۱۲۲$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۱+۲+۲=۵$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰)

۷۹- **گزینهٔ «۴»** *(هومن نورائی)*

اگر تعداد کیسه‌های ۳ و ۵ کیلوگرمی مورد استفاده را به‌ترتیب با x و y نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$۳x+۵y=۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۵y \overset{۳}{\equiv} ۱۰۰ \xrightarrow[(۵,۳)=۱]{+۵} y \overset{۳}{\equiv} ۲۰ \Rightarrow y=۳k+۲۰$$

$$۳x+۵(۳k+۲۰)=۱۰۰ \Rightarrow ۳x=-۱۵k \Rightarrow x=-۵k$$

$$x \geq ۰ \Rightarrow -۵k \geq ۰ \Rightarrow k \leq ۰$$

$$y \geq ۰ \Rightarrow ۳k+۲۰ \geq ۰ \Rightarrow k \geq -\frac{۲۰}{۳}$$

با توجه به اینکه k عددی صحیح است، پس ۷ مقدار ۰، ۱-، ... و ۶- قابل قبول است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

۸۰- **گزینهٔ «۳»** *(رضا توکلی)*

فرض کنید $d=(۴n+۱,۳n-۲)$ باشد. معادلهٔ سیالهٔ موردنظر در صورتی به ازای هر عدد طبیعی دلخواه c، در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است که $d=۱$ باشد.

$$\left.\begin{array}{l} d \mid ۴n+۱ \xrightarrow{\times ۳} d \mid ۱۲n+۳ \\ d \mid ۳n-۲ \xrightarrow{\times ۴} d \mid ۱۲n-۸ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid ۱۱ \Rightarrow d=۱ \text{یا} ۱۱$$

بنابراین کافی است مقادیری از n را که به ازای آن $d=۱۱$ می‌شود، پیدا کرده و از مجموعهٔ اعداد طبیعی دو رقمی حذف کنیم. داریم:

$$۱۱ \mid ۳n-۲ \Rightarrow ۳n-۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳n \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \overset{۱۱}{\equiv} -۹ \xrightarrow[(۳,۱۱)=۱]{+۳} n \overset{۱۱}{\equiv} -۳$$

$$\Rightarrow n=۱۱k-۳ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

پس به ازای هشت مقدار k $(۲ \leq k \leq ۹)$، عدد طبیعی n دو رقمی شده و $d=۱۱$ می‌شود و در نتیجه به ازای $۸۲=۸-۹۰$ عدد طبیعی دو رقمی، $d=۱$ است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

فیزیک ۲

۸۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیر ستارزاده)*

وقتی زاویهٔ $\vec{B}$ با سطح قاب ۳۰° باشد، پس $\theta = ۶۰^\circ$ است، زیرا θ زاویهٔ بین خطوط میدان مغناطیسی $\vec{B}$ با نیم‌خط عمود بر سطح حلقه می‌باشد.

$$\Phi = BA\cos\theta = ۲\times۱۰\times۱۰^{-۴}\times\cos۶۰^\circ = ۰/۰۰۱\text{Wb}$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۸۲- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا گونه)*

با استفاده از نمودار می‌توان آهنگ تغییرات میدان مغناطیسی را به‌دست آورد:

$$\xrightarrow{۰\le t_۱<۰/۰۲s}\frac{\Delta B}{\Delta t}=۲\frac{T}{s}$$
$$\xrightarrow{۰/۰۲s\le t_۲<۰/۰۴s}\frac{\Delta B}{\Delta t}=۰$$
$$\xrightarrow{۰/۰۴\le t_۳<۰/۰۶s}\frac{\Delta B}{\Delta t}=-۲\frac{T}{s}$$

حال با استفاده از قانون القای الکترومغناطیسی فاراده داریم:

$$\varepsilon_{av}=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\Rightarrow\varepsilon_{av}=-NA\cos۰\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow{۰\le t_۱<۰/۰۲s}\varepsilon_{۱,av}=-۱\times۳\times۲۵\times۱۰^{-۴}\times۲=-۱۵\text{mV}$$
$$\xrightarrow{۰/۰۲s\le t_۲<۰/۰۴s}\varepsilon_{۲,av}=۰$$
$$\xrightarrow{۰/۰۴s\le t_۳<۰/۰۶s}\varepsilon_{۳,av}=-۱\times۳\times۲۵\times۱۰^{-۴}\times(-۲)=۱۵\text{mV}$$

بنابراین نمودار نیروی محرکهٔ القایی مطابق با شکل گزینهٔ ۴ خواهد شد.

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۵)

۸۳- **گزینهٔ «۳»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

با توجه به معادلهٔ شار- زمان، تغییر شار مغناطیسی عبوری از سیملوله را به‌دست می‌آوریم و با توجه به رابطهٔ $\varepsilon_{av}=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$، نیروی محرکه القایی متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$$\xrightarrow{t_۱=\frac{۱}{۱۰۰}s}\Phi_۱=۵\times۱۰^{-۴}\cos(۱۰۰\pi\times\frac{۱}{۱۰۰})$$
$$\Rightarrow\Phi_۱=-۵\times۱۰^{-۴}\text{Wb}$$
$$\xrightarrow{t_۲=\frac{۱}{۵۰}s}\Phi_۲=۵\times۱۰^{-۴}\cos(۱۰۰\pi\times\frac{۱}{۵۰})$$
$$\Rightarrow\Phi_۲=۵\times۱۰^{-۴}\text{Wb}$$

$$\varepsilon_{av}=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=-۸۰\times\frac{۵\times۱۰^{-۴}-(-۵\times۱۰^{-۴})}{\frac{۱}{۵۰}-\frac{۱}{۱۰۰}}=-۸\text{V}$$

$$|I_{av}|=\frac{|\varepsilon_{av}|}{R}\Rightarrow|I_{av}|=\frac{۸}{۲}\Rightarrow|I_{av}|=۴\text{A}$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۵)

۸۴- **گزینهٔ «۱»** *(بهنام رستمی)*

طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده و تعریف جریان الکتریکی متوسط $(I_{av}=\frac{\Delta q}{\Delta t})$ داریم:

$$|\Delta q|=|I_{av}|\Delta t=\frac{|\varepsilon_{av}|}{R}\Delta t\xrightarrow{\varepsilon_{av}=\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}}$$

$$|\Delta q|=\frac{۱}{R}\times\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}\times\Delta t\Rightarrow\Delta q=\frac{|\Delta\Phi|}{R}$$

$$\Rightarrow|\Delta q|=\frac{۱/۶-(-۰/۴)}{۱۰}=۰/۲\text{C}$$

از طرفی طبق رابطهٔ $|\Delta q|=ne$ داریم:

$$n=\frac{|\Delta q|}{e}=\frac{۲\times۱۰^{-۱}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۱۲/۵\times۱۰^{۱۷}$$ الکترون

نکته: طبق رابطهٔ $\Delta q=\frac{|\Delta\Phi|}{R}$، بار الکتریکی القایی به زمان تغییر شار بستگی ندارد.

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۵)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۸۵- **گزینهٔ «۱»** *(پوریا علاقه‌مند)*

با کاهش جریان عبوری از سیم راست، طبق قاعدهٔ دست راست، میدان مغناطیسی درون‌سوی حاصل از جریان آن در محل حلقه کاهش یافته و بنابراین طبق قانون لنز، با کاهش شار مغناطیسی عبوری از حلقه، جریانی ساعتگرد در حلقه القا می‌شود تا با تغییر شار مغناطیسی مخالفت کند.

با ثابت بودن جریان و دور شدن حلقه، اندازهٔ میدان مغناطیسی در محل حلقه کاهش یافته و بنابراین شار عبوری از حلقه کاهش می‌یابد؛ بنابراین طبق قانون لنز، با کاهش شار مغناطیسی عبوری از حلقه، جریانی ساعتگرد در حلقه القا می‌شود تا با تغییر شار مغناطیسی مخالفت کند.

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۸)

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(بهنام رستمی)*

یکای SI شار مغناطیسی، Wb و یکای SI ضریب القاوری، Ω.s بوده و شار مغناطیسی همانند ضریب القاوری، کمیتی نرده‌ای است.

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۲۲)

۸۷- **گزینهٔ «۲»** *(سیدعلی میرنوری)*

با توجه به جهت حرکت میله، با کاهش مساحت حلقه، شار مغناطیسی عبوری از سطح حلقه کاهش یافته، لذا طبق قانون لنز جهت جریان القایی ایجاد شده به گونه‌ای است که با این تغییرات (کاهش) مخالفت کند، بنابراین جهت جریان القایی از D به C و مقداری ثابت است. چرا که:

$$\varepsilon = BLv \Rightarrow I = \frac{BLv}{R} \xrightarrow[\text{ثابت‌اند}]{R, L, v, B} I = \text{ثابت}$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

۸۸- **گزینهٔ «۲»** *(حسین مفرومی)*

ابتدا جریان عبوری از مدار را به‌دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R_{eq}} = \frac{20 - 8}{1 + 1 + 2 + 2} = \frac{12}{6} = 2A$$

(مقاومت‌های موازی ۶ و ۳ اُهمی برابر با مقاومت معادل ۲ اُهم است.)

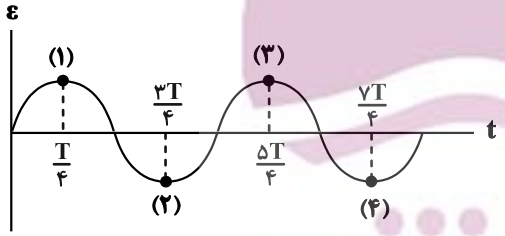
$$U = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-3} \times 2^2 = 4 \times 10^{-3} J = 4mJ$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۲)

۸۹- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی سلطانی)*

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{50\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{6}{50} = \frac{12}{100}s$$



در لحظهٔ $\frac{5T}{4}$ برای سومین بار، اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی بیشینه خواهد شد:

$$5\frac{T}{4} = 5 \times \frac{0/12}{4} = 5 \times 0/03 = 0/15s$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

۹۰- **گزینهٔ «۲»** *(حسین مفرومی)*

گزینهٔ ۲ نادرست است، زیرا از ولتاژ ۴۰۰kV استفاده می‌شود.

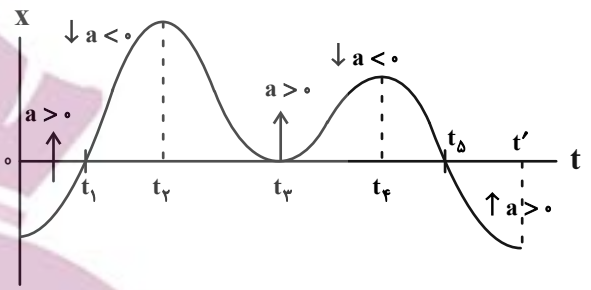
(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۶ و ۱۲۷)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۳

۹۱- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود قره‌خانی)*

جهت حرکت متحرک در نقاطی عوض می‌شود که سرعت از مثبت به منفی یا از منفی به مثبت تغییر کند. (یعنی در قله‌ها و دره‌های نمودار مکان – زمان که شیب نمودار تغییر می‌کند)، پس در لحظات $t_۲$، $t_۳$ و $t_۴$ سرعت صفر شده و جهت حرکت عوض می‌شود.



همچنین طبق قانون دوم نیوتون، جهت نیروی اعمال شده با جهت شتاب متحرک یکی است. پس جاهایی که علامت شتاب تغییر کرده، جهت اعمال نیرو نیز عوض شده است. از آنجا که جهت علامت شتاب ۴ بار عوض شده، پس جهت نیروی وارد شده بر متحرک نیز ۴ بار عوض شده است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۳ تا ۱۳ و ۳۳)

۹۲- **گزینهٔ «۱»** *(زهره آقامحمدی)*

با توجه به اینکه متحرک A، ۱۵ ثانیه زودتر به مقصد می‌رسد، اگر زمان حرکت متحرک A را t ثانیه در نظر بگیریم، زمان حرکت متحرک B برابر با $(t+۱۵)s$ است. از طرفی چون جابه‌جایی هردو متحرک یکسان است، با استفاده از معادلهٔ حرکت داریم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow \Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \frac{۱}{۲}at^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۴}a\right)(t+۱۵)^۲$$

$$\Rightarrow t^۲ = \frac{۱}{۴}(t+۱۵)^۲ \Rightarrow ۲t = t+۱۵ \Rightarrow t_A = ۱۵s\ ,\ t_B = ۳۰s$$

اکنون نسبت سرعت متوسط دو متحرک را محاسبه می‌کنیم.

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta x_A = \Delta x_B} \frac{v_{avA}}{v_{avB}} = \frac{t_B}{t_A} = \frac{۳۰}{۱۵} = ۲$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۹۳- **گزینهٔ «۲»** *(حسام نادری)*

$$h = \frac{۱}{۲}gt^۲ \xrightarrow[g=۱۰\frac{m}{s^۲}]{t=۳/۵s} h = \frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times (۳/۵)^۲ = ۶۱/۲۵m$$

(فیزیک ۳- مشابه امتحان نهایی مرداد ۱۴۰۳: حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۹۴- **گزینهٔ «۴»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

الزاماً هر دو نیروی هم اندازه و در خلاف جهت هم نیروهای عمل و عکس‌العمل نیستند و نیروهای عمل و عکس العمل به یک جسم وارد نمی‌شوند. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند. نیروهای عمل و عکس‌العمل هر دو از یک جنس هستند،هر دو الکتریکی یا گرانشی هستند. گزینهٔ (۳) نیز نادرست است، زیرا نیروی $\vec{W}$ را زمین به جسم وارد می‌کند، لذا عکس‌العمل $\vec{W}$ به مرکز زمین اعمال می‌شود، پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۴ و ۳۵)

(مکمل سوال ۵ پرسش‌های آخر فصل، صفحهٔ ۵۷ کتاب درسی)

۹۵- **گزینهٔ «۴»** *(غلامرضا محبی)*

چون جسم در حال تعادل است، نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. اگر برایند چند نیرو صفر باشد و یکی از آن‌ها حذف شود، اندازهٔ نیروی خالص باقی‌مانده برابر با اندازهٔ همان نیروی حذف شده است. بنابراین داریم:

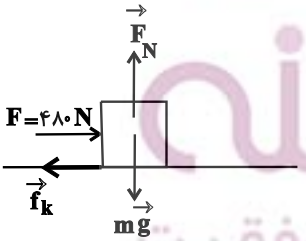
$$F_{net} = ma = m\frac{|\Delta v|}{\Delta t} \xrightarrow[m=۵kg,\Delta t=۴s]{F_{net}=۲۰N} ۵\times\frac{|\Delta v|}{۴} = ۲۰$$

$$\Rightarrow |\Delta v| = ۱۶\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

نیروهای وارد بر صندوق را رسم می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را برای $۳۰s$ اول حرکت آن می‌نویسیم:



$$(F_{net})_y = ۰ \Rightarrow F_N = mg = ۸۰\times ۱۰ = ۸۰۰N$$

$$(F_{net})_x = ma_۱ \Rightarrow F - f_k = ma_۱$$

$$\xrightarrow{f_k=\mu_k F_N} ۴۸۰ - ۰/۴\times ۸۰۰ = ۸۰a_۱ \Rightarrow a_۱ = ۲\frac{m}{s^۲}$$

پس از گذشت $۳۰s$، سرعت صندوق از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$v = a_۱t + v_۰ \Rightarrow v = ۲\times ۳۰ + ۰ = ۶۰\frac{m}{s}$$

پس از حذف نیروی $\vec{F}$ داریم:

$$(F_{net})_x = ma_۲ \Rightarrow -f_k = ma_۲ \xrightarrow{f_k=\mu_k F_N} -\mu_k F_N = ma_۲$$

$$\Rightarrow a_۲ = -\mu_k g = -۰/۴\times ۱۰ \Rightarrow a_۲ = -۴\frac{m}{s^۲}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

در نتیجه، زمان توقف صندوق بعد از قطع نیروی $\vec{F}$ برابر است با:

$$t = \left|\frac{\Delta v}{a_2}\right| = \frac{60}{4} = 15s$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴ و ۳۷ تا ۴۳)

۹۷- **گزینهٔ «۱»** *(سیدعلی میرنوری)*

در ابتدا که آسانسور ساکن است، بعد از اتصال وزنه و ایجاد تعادل داریم:

$$(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F_e = mg \Rightarrow kx_1 = mg \quad (1)$$

وقتی آسانسور با شتاب ثابت و رو به بالا شروع به حرکت می‌کند، طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$(F_{net})_y = ma \Rightarrow F_e - mg = ma \Rightarrow kx_2 = m(g+a) \quad (2)$$

با تقسیم رابطهٔ (۲) بر (۱) داریم:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{g+a}{g} \Rightarrow \frac{x_2}{13-10} = \frac{10+1}{10} \Rightarrow x_2 = 3/3\,cm$$

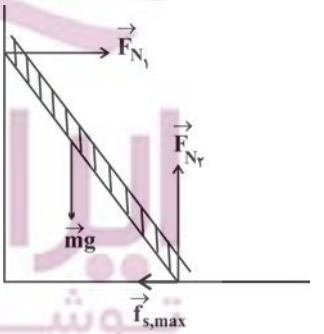
بنابراین طول فنر در حالت دوم برابر است با:

$$x_2 = 3/3\,cm \Rightarrow L_2 - 10 = 3/3 \Rightarrow L_2 = 13/3 cm$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴، ۴۳ و ۴۴)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا تمام نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم:



چون نردبان ساکن است، پس نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$(F_{net})_y = 0 \Rightarrow F_{N_2} = mg$$

$$(F_{net})_x = 0 \Rightarrow F_{N_1} = f_{s,max}$$

$$\xrightarrow{f_{s,max}=\mu_s F_{N_2}} F_{N_1} = \mu_s F_{N_2}$$

نیرویی که از دیوار قائم به نردبان وارد می‌شود برابر است با: $R_1 = F_{N_1}$

و نیرویی که از طرف سطح افقی به نردبان وارد می‌شود برابر است با:

$$R_2 = \sqrt{F_{N_2}^2 + f_{s,max}^2}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{F_{N_1}}{\sqrt{F_{N_2}^2 + f_{s,max}^2}} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{\mu_s F_{N_2}}{\sqrt{F_{N_2}^2 + (\mu_s F_{N_2})^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{\mu_s}{\sqrt{1+\mu_s^2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{5}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴، ۳۷ تا ۴۶)

۹۹- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی واثقی)*

اگر بردار شتاب حرکت جسم رو به پایین باشد، باسکول عددی کمتر از W نشان می‌دهد.

بررسی عبارت‌ها:

الف) آسانسور از حال سکون شروع به حرکت کرده است، پس حرکت آن تندشونده و جهت حرکت به سمت پایین است، بنابراین بردار شتاب به سمت پایین است. (در حرکت تندشونده بردار شتاب در جهت حرکت است.)

ب) آسانسور در حال حرکت، متوقف شده است، پس حرکت آن کندشونده است و جهت حرکت به سمت بالا است، پس بردار شتاب به سمت پایین است. (در حرکت کندشونده بردار شتاب در خلاف جهت حرکت است.)

پ) در متن این عبارت ذکر شده است که بردار شتاب رو به بالا است.

ت) کندشونده بودن حرکت ارتباطی به جهت شتاب ندارد و در این نوع حرکت جهت شتاب می‌تواند رو به بالا یا رو به پایین باشد.

پس در دو مورد (الف) و (ب) الزاماً باسکول عددی کمتر از W نشان می‌دهد.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۹)

(مشابه پرسش ۲-۶ صفحهٔ ۳۹ کتاب درسی)

۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** *(حسین مفرومی)*

با استفاده از رابطهٔ اندازهٔ نیروی کشسانی فنر $(F_e = kx)$ برای دو نقطهٔ مشخص بر روی نمودار داریم:

$$\begin{cases} F_1 = k(x_1 - x_0) \Rightarrow 12 = k\left(\frac{6}{100} - x_0\right) & (1) \\ F_2 = k(x_2 - x_0) \Rightarrow 48 = k\left(\frac{12}{100} - x_0\right) & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\text{و}(2)} 48 - 12 = \frac{12}{100}k - \frac{6}{100}k \Rightarrow 36 = \frac{6}{100}k$$

$$\Rightarrow k = 600\frac{N}{m}$$

حال در یکی از روابط (۱) یا (۲)، k را جایگذاری کرده و طول اولیهٔ فنر را به‌دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(1)} 12 = 600\left(\frac{6}{100} - x_0\right) \Rightarrow 12 = 36 - 600x_0$$

$$\Rightarrow 600x_0 = 24 \Rightarrow x_0 = \frac{24}{600}m = 4\times10^{-2}m = 4cm$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

فیزیک ۱

۱۰۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیم‌پور)*

با توجه به قانون اول ترمودینامیک، باید مجموع گرمای گرفته شده توسط دستگاه و کار انجام شده توسط محیط بر روی دستگاه برابر با تغییر انرژی درونی آن باشد؛ حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $Q+W=۱۵۰+۳۲۰=+۴۷۰J\neq\Delta U=-۴۷۰J$

گزینهٔ «۲»: $Q+W=-۳۰۰+۲۵۰=-۵۰J\neq\Delta U=-۵۵۰J$

گزینهٔ «۳»: $Q+W=۱۵۰-۴۰=۱۱۰J=\Delta U=۱۱۰J$

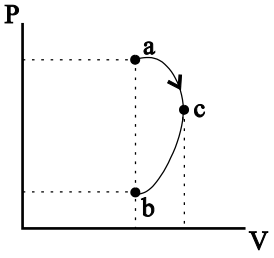
گزینهٔ «۴»: $Q+W=-۸۰۰-۲۵۰=-۱۰۵۰J\neq\Delta U=-۵۵۰J$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحهٔ ۱۳۰)

۱۰۲- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

چون $P_b<P_a$ و $V_b=V_a$ است، $P_bV_b<P_aV_a$ و با توجه به رابطهٔ $PV=nRT$، $T\alpha PV$ می‌باشد، بنابراین $T_b<T_a$ است. انرژی درونی (U) تابع دمای مطلق گاز است، پس $U_b<U_a$ و در نتیجه $\Delta U_{ab}<۰$ خواهد بود.

برای بررسی کار انجام شده بر روی گاز، ابتدا بر روی نمودار یک نقطه مانند c که بیشترین حجم را دارد، مشخص می‌کنیم. با مشخص کردن این نقطه، متوجه می‌شویم که حجم گاز ابتدا در مسیر ac، افزایش و سپس در مسیر cb کاهش می‌یابد. چون مساحت زیر نمودار $P-V$ در مسیر ac بزرگ‌تر از مسیر cb است، لذا $|W_{bc}|<|W_{ac}|$ خواهد بود. از طرف دیگر، در مسیر ac، $W_{ac}<۰$ (زیرا $V_c>V_a$) و در مسیر bc، $W_{bc}>۰$ (زیرا $V_b<V_c$) است. بنابراین W_{ab} که برابر با مجموع W_{ac} و W_{bc} می‌باشد، کمیتی منفی خواهد بود.

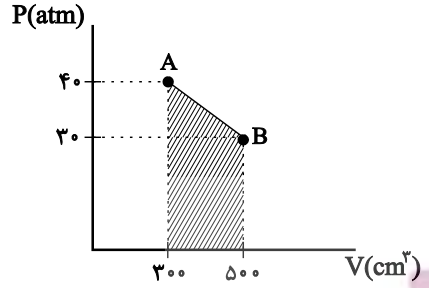


$$W_{ab}=W_{ac}+W_{cb}\xrightarrow[W_{ac}<۰]{|W_{ac}|>|W_{cb}|}W_{ab}<۰$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۹ و ۱۳۰)

۱۰۳- **گزینهٔ «۲»** *(پوریا علاقه‌مند)*

اندازهٔ کار انجام شده در نمودار $P-V$ برابر با سطح زیر نمودار $P-V$ است.



$$|W|=S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{(۴۰+۳۰)\times۱۰^{۵}}{۲}\times(۵۰۰-۳۰۰)\times۱۰^{-۶}$$

$$\Rightarrow|W|=S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{۷۰}{۲}\times۱۰^{۵}\times۲۰۰\times۱۰^{-۶}=۷۰۰J$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحهٔ ۱۳۴)

۱۰۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا شیروانی‌زاده)*

بدیهی است که فرایند BA، بی‌دررو و فرایند CA، هم‌دما است، چون شیب BA بیشتر است.

بنابراین داریم: (W': کار انجام شده توسط گاز در فرایند بی‌دررو)

$$\left.\begin{matrix}B\to A: U_B-U_A=W'\\ C\to A: U_C-U_A=۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow U_B-U_C=W'$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۹)

۱۰۵- **گزینهٔ «۳»** *(محسن قندچلر)*

انرژی درونی گاز کامل فقط تابع دمای آن است. طبق رابطهٔ $PV=nRT$ خواهیم داشت:

$$\frac{U_۲}{U_۱}=\frac{T_۲}{T_۱}=\frac{P_۲V_۲}{P_۱V_۱}\Rightarrow\frac{U_۲}{۸۰}=۳\times\frac{۴}{۳}\Rightarrow U_۲=۳۲۰J$$

به‌دلیل این‌که حجم گاز ۳ برابر شده است، علامت کار را منفی می‌گذاریم (انبساط رخ داده است):

$$\Delta U=Q+W\Rightarrow(۳۲۰-۸۰)=Q+(-۷۰)\Rightarrow Q=۳۱۰J$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۰)

۱۰۶- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی کیانی)*

می‌دانیم در یک چرخهٔ کامل و در فرایند هم‌دما $\Delta U = 0$ است، با توجه به این که $\Delta U = Q + W$ است، به صورت زیر گرمای مبادله شده در فرایند هم‌حجم را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید، فرایند AB هم‌دما، فرایند BC هم‌حجم و فرایند CA بی‌دررو است. در ضمن در فرایند هم‌حجم $W = 0$ و در فرایند بی‌دررو $Q = 0$ می‌باشد. در این چرخه چون $V_A > V_C$ است، $W_{CA} < 0$ می‌باشد.

$$\Delta U_{\text{چرخه}} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA}$$

$$\xrightarrow[\Delta U_{AB}=0]{\Delta U_{\text{چرخه}}=0} 0 = 0 + W_{BC} + Q_{BC} + W_{CA} + Q_{CA}$$

$$\xrightarrow[W_{CA}=-240J]{W_{BC}=0,\ Q_{CA}=0} 0 = 0 + Q_{BC} - 240 + 0 \Rightarrow Q_{BC} = 240J$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۴۰)

۱۰۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیر محمودی‌انزابی)*

عبارت‌های «ب» و «ت» درست و عبارت‌های «الف» و «پ» نادرست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت «الف»: از نظر تاریخی، نخستین ماشین‌های گرمایی، ماشین‌های برون‌سوز بوده‌اند.

عبارت «پ»: چرخهٔ یک ماشین بنزینی شامل شش فرایند است که چهار فرایند از آن (ضربه‌های مکش، تراکم، قدرت و خروج گاز)، با حرکت پیستون همراه‌اند.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۴)

۱۰۸- **گزینهٔ «۴»** *(پوریا علاقه‌مند)*

ابتدا بازدهٔ اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_H|} = \frac{300}{1500} = 0/2$$

بازده در حالت دوم باید برابر با $0/25 = 0/05 + 0/2$ باشد که برای تک‌تک گزینه‌ها بازده را حساب می‌کنیم:

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_H|}$$

گزینهٔ «۱»:

$$\eta_1 = \frac{600}{1500} = 0/4$$

گزینهٔ «۲»:

$$\eta_2 = \frac{300}{1200} = 0/25$$

گزینهٔ «۳»:

$$\eta_3 = \frac{375}{1500} = 0/25$$

بنابراین گزینه‌های «۲» و «۳» هر دو درست هستند و پاسخ صحیح گزینهٔ «۴» خواهد بود.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحهٔ ۱۴۵)

۱۰۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیر محمودی‌انزابی)*

اگر در چرخهٔ یک ماشین گرمایی، تمام گرمای گرفته شده از منبع دمابالا به کار تبدیل شود، قانون اول ترمودینامیک $(\Delta U = Q + W)$ نقض نمی‌شود؛ اما بر اساس قانون دوم ترمودینامیک، امکان طراحی و ساخت ماشینی که این تبدیل را انجام دهد، وجود ندارد.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحهٔ ۱۴۶)

۱۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(بابک اسلامی)*

عبارت‌های (۱)، (۲) و (۳) صحیح هستند.

صورت صحیح عبارت (۴) به شکل زیر است:

طرز کار کولر گازی شبیه یخچال خانگی است با این تفاوت که در کولر گازی منبع دماپایین، هوا و اجسام داخل اتاق و منبع دمابالا، هوای بیرون اتاق است.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحهٔ ۱۴۷)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

شیمی ۲

۱۱۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمد وزیری)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: لاکتیک اسید در شیر ترش شده وجود دارد.

گزینهٔ «۳»: پلیمرهای سبز از فراورده‌های کشاورزی مانند سیب‌زمینی و ذرت و نیشکر تهیه می‌شوند.

گزینهٔ «۴»: پلی‌اتن سبک ساختار شاخه‌دار و پلی‌اتن سنگین ساختار خطی دارد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۶، ۱۰۸، ۱۰۹ و ۱۲۱)

۱۱۲- **گزینهٔ «۲»** *(سیرمحمد معروفی)*

عبارت‌های «الف»، «ب» و «ت» درست هستند.

در این پلیمرها گروه عاملی آمیدی در زنجیر کربنی واحد تکرارشونده وجود دارد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۴، ۱۰۶، ۱۰۷ و ۱۰۹)

۱۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمدپارسا فراهانی)*

واکنش آبکافت پلی‌آمیدها به‌صورت زیر است و طبق گفتهٔ سؤال، در ساختار دی‌آمین به کار رفته در این پلی‌آمید، تنها یک اتم کربن وجود دارد.

$$\overset{*}{\underbrace{\left(\overset{O}{\overset{\|}{C}}-R-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-\overset{H}{\overset{|}{N}}-CH_2-\overset{H}{\overset{|}{N}}\right)_n}} + (2n-1)H_2O$$

$$\Rightarrow n(NH_2CH_2NH_2) + n\left(HO-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-R-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH\right)$$

جرم مولی قسمت مشخص شده با (*) را M در نظر می‌گیریم.

پلی آمید $1/6kg$ = دی‌آمین $?g$

$$\times\frac{1000g}{1kg}\times\frac{1mol\ \text{پلی‌آمید}}{(M\times n)g\ \text{پلی‌آمید}}\times\frac{n\,mol\ \text{دی‌آمین}}{1mol\ \text{پلی‌آمید}}\times\frac{46g\ \text{دی‌آمین}}{1mol\ \text{دی‌آمین}}$$

$$= 575g\ \text{دی آمین} \Rightarrow M = 128g.mol^{-1}$$

اگر فرمول گروه R را به‌صورت C_nH_{2n} در نظر بگیریم.

$$M = 128g.mol^{-1} = C_nH_{2n} + C_3H_4O_2N_2$$

$$\Rightarrow 128 = 14n + (3\times12) + (4\times1) + (2\times16) + (2\times14)$$

$$\Rightarrow n = 2$$

پس فرمول ساختاری کربوکسیلیک اسید حاصل به‌صورت زیر بوده و فرمول مولکولی آن به‌صورت $C_4H_6O_4$ می‌باشد.

$$HO-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-CH_2-CH_2-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH$$

(شیمی ۲- صفحهٔ ۱۱۵)

۱۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

موارد «ت» و «ث» نادرست‌اند.

بررسی موارد نادرست:

ت) چگالش نوعی فرایند فیزیکی است و در فرایند فیزیکی نیز نباید ماهیت شیمیایی ماده تغییر کند. پس چگالش رخ نداده است.

ث) دی‌الکل‌ها، دی‌اسیدها و دی‌آمین‌ها مونومرهایی هستند که از طریق واکنش بین گروه‌های عاملی منجر به تولید پلیمر می‌شوند و لزوماً در ساختار زنجیر کربنی خود پیوند دوگانه $\rangle C=C\langle$ ندارند.

(شیمی۲- صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۴)

۱۱۵- **گزینهٔ «۴»** *(حمید زبیی)*

عبارت اول: پلی‌اتن یک درشت مولکول است.

عبارت سوم: تاکنون هیچ قاعده‌ای برای اتصال شمار مونومرها به یکدیگر ارائه نشده است. به همین دلیل برای پلیمرها نمی‌توان فرمول مولکولی دقیقی نوشت.

عبارت چهارم: در همهٔ پلیمرها، مولکول‌های پلیمر به دلیل جرم و حجم بسیار بیشتر نسبت به مونومر خود، نیروی بین مولکولی بسیار قوی‌تری نسبت به مونومرهای سازندهٔ خود دارند.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۴)

۱۱۶- **گزینهٔ «۱»** *(روزبه رضوانی)*

معادلهٔ موازنه شده به صورت زیر است که از واکنش ۲ مول متانول، با یک مول دی اسید، یک مول دی‌استر به دست می‌آید.

$$۲CH_۳OH + HOOC-COOH$$

$$\rightleftharpoons CH_۳-O-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-CH_۳ + ۲H_۲O$$

$$?\,g\ \text{دی‌استر} = ۲mol\,CH_۳OH \times \frac{۱mol\ \text{دی‌استر}}{۲mol\,CH_۳OH}$$

$$\text{دی‌استر}\ ۱۰۰/۳g = \times \frac{۱۱۸g\ \text{دی‌استر}}{۱mol\ \text{دی‌استر}} \times \frac{۸۵}{۱۰۰}$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

۱۱۷- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین طیبی)

$$۲g\ (C_۳H_۴N_۲O_۲)_n \times \frac{۱mol\ (C_۳H_۴N_۲O_۲)_n}{۱۰۰ng\ (C_۳H_۴N_۲O_۲)_n} \times \frac{۲n\,mol\,H_۲O}{۱mol\ (C_۳H_۴N_۲O_۲)_n} \times \frac{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\,H_۲O}{۱mol\,H_۲O}$$

$$= ۲/۴۰۸\times۱۰^{۲۲}\,H_۲O$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۷)

۱۱۸- **گزینهٔ «۴»** (کامران جعفری)

$$n\ H-O-\underbrace{\underset{\underset{CH_۳}{|}}{CH}-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH}_{\text{لاکتیک‌اسید}} \rightarrow \underbrace{\left[O-\underset{\underset{CH_۳}{|}}{CH}-\overset{\overset{O}{\|}}{C}\right]_n}_{\text{پلی‌لاکتیک‌اسید}}$$

همهٔ موارد مطرح شده صحیح هستند.

(شیمی ۲- صفحهٔ ۱۱۹)

۱۱۹- **گزینهٔ «۲»** (ایمان حسین‌نژاد)

$$C_nH_{۲n}O_۲ + C_mH_{۲m+۲}O \rightleftharpoons C_{(n+m)}H_{(۲n+۲m)}O_۲ + H_۲O$$

از واکنش یک کربوکسیلیک اسید با الکل، استر و آب تولید می‌شود، پس می‌توان نوشت:

$$\text{اسید}\ ۳۳/۳g \times \frac{۱mol\ \text{اسید}}{M\ g\ \text{اسید}} \times \frac{۱mol\ \text{آب}}{۱mol\ \text{اسید}} \times \frac{۱۸g\ \text{آب}}{۱mol\ \text{آب}} \times \frac{۴۲/۵}{۱۰۰}$$

$$\simeq ۳/۴۴g\ \text{آب} \Rightarrow M = ۷۴g.mol^{-۱}$$

با توجه به این که فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدهای راست زنجیر که زنجیر هیدروکربنی آن‌ها سیر شده است به صورت « $C_nH_{۲n}O_۲$ » است، می‌توان نوشت:

$$\text{جرم مولی اسید} = ۱۴n+۳۲ \Rightarrow ۷۴ = ۱۴n+۳۲ \Rightarrow n = ۳$$

$$\Rightarrow \text{فرمول شیمیایی اسید} = C_۳H_۶O_۲$$

حال نسبت درصد جرمی کربن به اکسیژن را در این ترکیب محاسبه می‌کنیم:

$$\text{نسبت خواسته شده} = \frac{\frac{۳\times۱۲}{۷۴}}{\frac{۲\times۱۶}{۷۴}} = ۱/۱۲۵$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

۱۲۰- **گزینهٔ «۲»** (محمدحسن محمدزاده‌مقدم)

واکنش به‌صورت زیر است:

$$R-COOH + CH_۳-NH_۲ \rightleftharpoons R-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-NH-CH_۳ + H_۲O$$

جرم مولی آمید حاصل $(M_\circ)$ برابر است با:

$$?\,g\ \text{آمید} = ۱/۲mol\,CH_۳NH_۲ \times \frac{۱mol\ \text{آمید}}{۱mol\,CH_۳NH_۲} \times \frac{M_\circ g\ \text{آمید}}{۱mol\ \text{آمید}}$$

$$= ۸۷/۶g\ \text{آمید}$$

$$\Rightarrow M_\circ = ۷۳g.mol^{-۱}$$

جرم مولی گروه R برابر است با:

$$R + ۵۸ = ۷۳ \Rightarrow R = ۱۵g.mol^{-۱}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت: $R = CH_۳$

$$\Rightarrow CH_۳-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-NH-CH_۳ \Rightarrow \text{تعداد اتم‌های کربن} = ۳$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۴ و ۱۱۵)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۳

۱۲۱- **گزینهٔ «۳»** (محمد وزیری)

گزینهٔ «۱»: ضدیخ دارای گروه عاملی هیدروکسیل $(-OH)$ می‌باشد.

گزینهٔ «۲»: صابون‌ها دارای دو بخش قطبی (آب دوست) و ناقطبی (چربی‌دوست) هستند که بخش قطبی دارای بخش باردار است.

گزینهٔ «۳»: وازلین $(C_{25}H_{52})$، یک هیدروکربن سیرشده است و در ساختار خود ۷۶ پیوند یگانه دارد.

گزینهٔ «۴»: اکثر ترکیب‌های یونی به خوبی در آب حل می‌شوند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴ تا ۸)

(مطابق خود را بیازمایید صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

۱۲۲- **گزینهٔ «۱»** (روزبه رضوانی)

عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند. بررسی عبارت‌ها:

عبارت «الف»: کار روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی، پیش زمینه ارائه نظریه اسید و باز آرنیوس بود.

عبارت «ب»: اسید یا باز، بسته به میزان یون‌های موجود در محلول آن‌ها در آب رسانایی بالا می‌توانند داشته باشند.

عبارت «پ»: درصد یونش استیک اسید برابر با ۱/۳۵ است.

عبارت «ت»: نمک پتاسیم اسید چرب (صابون مایع) همانند نمک سدیم آن (صابون جامد) خاصیت بازی دارد.

عبارت «ث»: HF اسید ضعیف بوده و کمتر به صورت یونی در آب حل شده و یون کمتری تولید می‌کند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۴ تا ۱۹)

۱۲۳- **گزینهٔ «۲»** (مرتضی نصیرزاده)

میزان کاتیون‌ها در ده لیتر آب (۱۰۰۰۰ گرم):

$$\text{مخلوط کاتیون‌ها } g \frac{X}{10000}\times 10^6 = 1152 \Rightarrow X = 11/52g$$

$$3Ca^{2+} + 2Na_3PO_4 \rightarrow Ca_3(PO_4)_2 + 6Na^+$$

$$3Mg^{2+} + 2Na_3PO_4 \rightarrow Mg_3(PO_4)_2 + 6Na^+$$

میزان نمک مصرف شده به ازای هر یک از کاتیون‌ها:

$$?\, g\, Na_3PO_4 = 11/52g \text{ مخلوط کاتیون} \times \frac{3g\, Ca^{2+}}{\text{مخلوط کاتیون } 8g}$$

$$\times \frac{1mol\, Ca^{2+}}{40g\, Ca^{2+}} \times \frac{2mol\, Na_3PO_4}{3mol\, Ca^{2+}} \times \frac{164g\, Na_3PO_4}{1mol\, Na_3PO_4} \simeq 12g\, Na_3PO_4$$

$$?\, g\, Na_3PO_4 = 11/52g \text{ مخلوط کاتیون} \times \frac{5g\, Mg^{2+}}{\text{مخلوط کاتیون } 8g}$$

$$\times \frac{1mol\, Mg^{2+}}{24g\, Mg^{2+}} \times \frac{2mol\, Na_3PO_4}{3mol\, Mg^{2+}} \times \frac{164g\, Na_3PO_4}{1mol\, Na_3PO_4} \simeq 33g\, Na_3PO_4$$

در مجموع به تقریب ۴۵ گرم نمک سدیم فسفات نیاز است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۹ و ۱۲)

۱۲۴- **گزینهٔ «۳»** (روزبه رضوانی)

در شرایط یکسان (دما و غلظت) هر چه K_a اسید بزرگ‌تر باشد، آن اسید قوی‌تر و هر چه اسید قوی‌تر باشد، غلظت یون‌ها و رسانایی الکتریکی محلول آبی آن بیشتر است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۶)

۱۲۵- **گزینهٔ «۱»** (موسی خیاط‌علیممدی)

$$N_2O_5 + H_2O \rightarrow 2HNO_3$$

$$3/36\times10^{-3}\,L\, N_2O_5 \times \frac{1mol\, N_2O_5}{22/4\,L\, N_2O_5} \times \frac{2mol\, HNO_3}{1mol\, N_2O_5}$$

$$= 3\times10^{-4} mol\, HNO_3$$

$$\Rightarrow M = \frac{n}{V} = \frac{3\times10^{-4}}{0/5} = 6\times10^{-4} \text{ مولار}$$

$$[H^+] = 6\times10^{-4} \Rightarrow pH = -\log^{6\times10^{-4}} = -0/3 - 0/5 + 4 = 3/2$$

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = \frac{10^{-14}}{6\times10^{-4}} = \frac{1}{6}\times10^{-10}\, mol\cdot L^{-1}$$

$$\frac{[H^+]}{[OH^-]} = \frac{6\times10^{-4}}{\frac{1}{6}\times10^{-10}} = 3/6\times10^7$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۶ و ۲۷)

(مطابق پیوند با ریاضی صفحه‌های ۲۴ و ۲۵ کتاب درسی و با هم بیندیشیم صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی)

۱۲۶- **گزینهٔ «۲»** (رسول عابدینی‌زواره)

با توجه به نمودار داده شده، pH محلول در دقیقهٔ ۶ برابر با ۲ است، پس می‌توان نوشت:

$$pH = 2 \Rightarrow [H^+] = 10^{-2}\, mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow [HCl] = 10^{-2}\, mol.L^{-1}$$

$$NaOH + HCl \rightarrow NaCl + H_2O$$

$$?\, mL\, NaOH = 3\,L \text{ محلول} \times \frac{10^{-2}\, mol\, HCl}{1\,L \text{ محلول}} \times \frac{1mol\, NaOH}{1mol\, HCl}$$

$$\times \frac{1L\, NaOH}{1mol\, NaOH} \times \frac{1000mL}{1L} = 30$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۳۱)

۱۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(حسن رحمتی‌کوکنده)*

$$pH=۳/۱\Rightarrow [H^+]=۱۰^{-۳/۱}=۱۰^{-۴}\times ۱۰^{۰/۹}=۸\times ۱۰^{-۴}=M\alpha$$

$$K_a=\frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha}\Rightarrow ۲\times ۱۰^{-۵}=\frac{M.\alpha.\alpha}{۱-\alpha}=\frac{۸\times ۱۰^{-۴}\alpha}{۱-\alpha}$$

$$\frac{۱}{۴۰}=\frac{\alpha}{۱-\alpha}\Rightarrow \alpha\simeq ۰/۰۲۴\Rightarrow [H^+]=M\alpha\Rightarrow ۸\times ۱۰^{-۴}=M\times ۲۴\times ۱۰^{-۳}$$

$$\Rightarrow M\simeq ۳/۳\times ۱۰^{-۲}\Rightarrow n=M.V=۳/۳\times ۱۰^{-۲}\times ۱$$

$$=۳/۳\times ۱۰^{-۲}mol$$

جرم مولی $CH_۳COOH=۲۴+۳۲+۴=۶۰\ g.mol^{-۱}$

$$?gCH_۳COOH=۳/۳\times ۱۰^{-۲}molCH_۳COOH$$

$$\times\frac{۶۰gCH_۳COOH}{۱molCH_۳COOH}\times\frac{۱۰^۳mg}{۱g}=۱۹۸۰mg\ CH_۳COOH$$

$$pH=۱۱\Rightarrow [H^+]=۱۰^{-۱۱}\Rightarrow [OH^-]=۱۰^{-۳}=M\alpha$$

$$\xrightarrow{\alpha=۱} M=۱۰^{-۳}mol.L^{-۱}$$

$$n=M.V=۱۰^{-۳}\times ۱=۱۰^{-۳}mol$$

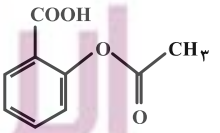
$$\Rightarrow ?mgNaOH=۱۰^{-۳}mol\ NaOH\times\frac{۴۰g}{۱mol}\times\frac{۱۰^۳mg}{۱g}=۴۰mg\ NaOH$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۰، ۳۱ و ۳۵)

(مطابق پیوند با زندگی صفحه‌های ۳۱ و ۳۲ کتاب درسی)

۱۲۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمد کوهستانیان)*

ساختار آسپرین به‌صورت زیر است:



آسپرین در ساختار خود دارای گروه عاملی استری، حلقهٔ آروماتیک و گروه کربوکسیل است. از آنجایی که این دارو در ساختار خود دارای گروه کربوکسیل است که سبب کاهش pH معده و افزایش سوزش معده می‌شود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

(مطابق پیوند با زندگی صفحه‌های ۳۱ و ۳۲ کتاب درسی)

۱۲۹- **گزینهٔ «۳»** *(رضا سلیمانی)*

فقط عبارت‌های دوم و چهارم درست است. بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول:

$$[H^+]=\frac{۱۰^{-۱۴}}{۵\times ۱۰^{-۵}}=۲\times ۱۰^{-۱۰}\Rightarrow pH=-\log[H^+]=۹/۷$$

عبارت دوم: دی‌نیتروژن پنتااکسید (اکسید نافلزی) دارای خاصیت اسیدی است و با $NaOH$ واکنش می‌دهد.

عبارت سوم:

$$۵\times ۱۰^{-۵}mol.L^{-۱}\times\frac{۴۰gNaOH}{۱molNaOH}=\frac{۲\times ۱۰^{-۳}gNaOH}{۱L}$$

عبارت پنجم: با توجه به ۲ برابر شدن حجم محلول یک باز قوی، pH محلول، ۰/۳ واحد کاهش می‌یابد.

$$\overset{\text{غلیظ}}{M_۱V_۱}=\overset{\text{رقیق}}{M_۲V_۲}\quad V_۲=V_۱+\text{آب}\rightarrow V_۲=۲V_۱$$

$$۵\times ۱۰^{-۵}\times V_۱=M_۲\times ۲V_۱$$

$$M_۲=۲۵\times ۱۰^{-۶}mol.L^{-۱}$$

$$\Rightarrow [H^+]=\frac{۱۰^{-۱۴}}{۲۵\times ۱۰^{-۶}}=۴\times ۱۰^{-۱۰}$$

$$\Rightarrow pH=-\log[H^+]=۹/۴$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۶، ۲۸، ۳۰ و ۳۴)

۱۳۰- **گزینهٔ «۴»** *(یاسر راش)*

pH اولیهٔ محلول $HCl(aq)$ برابر است با:

$$pH_۱=-\log[H^+]\xrightarrow{[H^+]=۱۰^{-۲}M} pH_۱=۲$$

pH	۲	۲/۳	۲/۷
$[H^+]mol.L^{-۱}$	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۵	۰/۰۰۲

از آن‌جایی که HCl با سرعت ثابتی در حال خنثی شدن است، پس تغییرات غلظت آن با زمان رابطهٔ مستقیم دارد و در بازه‌های زمانی یکسان تغییرات غلظت HCl یکسان است. در نتیجه نسبت زمان خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\Delta[H^+]_{pH=۲/۳}}{\Delta[H^+]_{pH=۲/۷}}=\frac{۰/۰۱۰۰-۰/۰۰۵}{۰/۰۱۰۰-۰/۰۰۲}=\frac{۵}{۸}$$

همان‌طور که مشاهده شد، با افزایش pH ، اختلاف غلظت HCl کمتر می‌شود و pH با آهنگ تندتری از تغییرات غلظت، تغییر می‌کند. در نتیجه گزینهٔ «۴» صحیح است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۳۱)

شیمی ۱

۱۳۱- **گزینهٔ «۱»** *(مریم اکبری)*

در ۱۰۰ گرم آب $S = ۰/۸ \times (۲۸۳ - ۲۷۳) + ۷۲ = ۸۰g$

حل‌شونده (g)	محلول سیرشده (g)
۸۰	۱۸۰
X	۱۶۰

$X = ۳۶۰g$ محلول

$?mL \text{ محلول} = ۳۶۰g \times \frac{۱mL}{۱/۱g} \simeq ۳۲۷mL$ محلول

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳)

۱۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(آروین شجاعی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ سدیم کلرید، محلول و نقره کلرید، نامحلول است.

۲) نادرست؛ پتاسیم نیترات، محلول و کلسیم سولفات، کم محلول است.

۳) درست؛ پتاسیم کلرید و سدیم نیترات هر دو محلول هستند.

۴) نادرست؛ لیتیم سولفات، محلول و باریم سولفات، نامحلول است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲ و ۱۲۲)

۱۳۳- **گزینهٔ «۳»** *(مینا شرافتی‌پور)*

با توجه به نمودار در دمای $۲۰^\circ C$ ، ۳۳ گرم و در دمای $۴۰^\circ C$ ، ۳۹ گرم KCl در ۱۰۰ گرم آب حل می‌شود. با توجه به خطی بودن نمودار داریم:

$S = a\theta + b \Rightarrow ۳۳ = a \times ۲۰ + b$

$۳۹ = a \times ۴۰ + b \Rightarrow a = \frac{۳}{۱۰}, b = ۲۷$

$S = \frac{۳}{۱۰}\theta + ۲۷ \xrightarrow{\theta = ۲۵^\circ C} S = (\frac{۳}{۱۰} \times ۲۵) + ۲۷ = ۳۴/۵$

۳۴/۵ گرم KCl در ۱۰۰ گرم آب حل شده و محلول سیرشده بدست می‌آید.

$?gKCl = ۴۰۰g\,H_۲O \times \frac{۳۴/۵g\,KCl}{۱۰۰g\,H_۲O} = ۱۳۸g\,KCl$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳)

۱۳۴- **گزینهٔ «۲»** *(فرزاد رضایی)*

عددی که گلوکومتر نشان می‌دهد، مقدار میلی گرم حل‌شونده (گلوکز) در ۱ دسی‌لیتر (۱۰۰ میلی‌لیتر) حلال (خون) است، یعنی:

جرم حل‌شونده $= ۹۶mg$

حجم محلول $= ۱۰۰mL$

$?g \text{ محلول} = ۱۰۰mL \text{ محلول} \times \frac{۱g \text{ محلول}}{۱mL \text{ محلول}} = ۱۰۰g \text{ محلول}$

$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ = \frac{۹۶ \times ۱۰^{-۳} g}{۱۰۰g} \times ۱۰^۶ = ۹۶۰$

$\text{غلظت مولار} = \frac{\text{مول حل‌شونده}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{\frac{۹۶ \times ۱۰^{-۳} g}{۱۸۰ g.mol^{-۱}}}{\frac{۱۰۰}{۱۰۰۰} L} \simeq ۵/۳ \times ۱۰^{-۳} mol.L^{-۱}$

$= ۵/۳ m\,mol.L^{-۱}$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۸۹، ۹۰، ۱۰۱، ۱۰۲ و ۱۰۹)

۱۳۵- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

عبارت‌های اول و دوم درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت اول:

$M = \frac{\text{مول یا تعداد ذره}}{V} = \frac{(۸ \times ۰/۰۲)}{۵۰ \times ۱۰^{-۳}}$

$= \frac{(۴ \times ۰/۰۲)}{۲۵ \times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow$ مولاریتهٔ دو محلول یکسان است.

عبارت دوم:

$\text{غلظت مولی مخلوط} = \frac{n_۱ + n_۲}{V_۱ + V_۲} = \frac{۸(۰/۰۲) + ۴(۰/۰۲)}{(۵۰+۵۰) \times ۱۰^{-۳}} = ۲/۴ mol.L^{-۱}$

عبارت سوم: روش ۱: اگر جرم مولی حل شونده‌های **(d)** و **(e)** را به‌ترتیب m و n در نظر بگیریم؛ داریم:

غلظت ppm محلول **(e)** = غلظت ppm محلول **(d)**

$\Rightarrow \frac{۴ \times ۰/۰۲ \times m \times ۱۰^۶}{۵۰ \times ۱۰^{-۳}} = \frac{۴ \times ۰/۰۲ \times n \times ۱۰^۶}{۲۵ \times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow ۲n = m \Rightarrow \frac{m}{n} = ۲$

روش ۲: از آن جایی که محلول **(e)** حجم کمتری از محلول **(d)** دارد، اما تعداد حل شوندهٔ برابری با آن دارد و مقدار ppm این دو محلول با هم برابر است. در نتیجه جرم مولی حل شوندهٔ **(e)** قطعاً کمتر از جرم مولی حل شوندهٔ **(d)** است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰ و ۱۲۰)

۱۳۶- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

آ) باریم کلرید در آب محلول است. (نادرست)

ب) درست. زیرا انحلال آن در آب گرماده است. (درست)

پ) استون به هر نسبتی در آب حل می‌شود و نمی‌توان از آن محلول سیرشده در آب تهیه کرد. (نادرست)

ت) درست

(شیمی ۱- صفحه‌های ۸۹، ۹۰، ۱۰۱، ۱۰۲ و ۱۰۹)

۱۳۷- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

ابتدا معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش را می‌نویسیم:

$$2AgNO_3(aq) + MgCl_2(aq) \rightarrow 2AgCl(s) + Mg(NO_3)_2(aq)$$

حال خواهیم داشت:

$$?\,g\,MgCl_2 = 75mL\,\text{محلول} \times \frac{1/6g\,\text{محلول}}{1mL\,\text{محلول}} \times \frac{51g\,AgNO_3}{100g\,\text{محلول}}$$

$$\times \frac{1mol\,AgNO_3}{170g\,AgNO_3} \times \frac{1mol\,MgCl_2}{2mol\,AgNO_3}$$

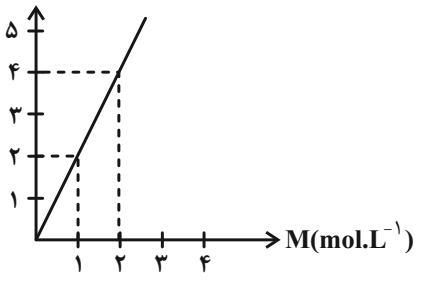
$$\times \frac{95g\,MgCl_2}{1mol\,MgCl_2} = 17/1g\,MgCl_2$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)

۱۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

به ازای هر مول $MgSO_4$ حل شده در آب، ۲ مول یون تولید می‌شود؛ در نتیجه نمودار باید به شکل زیر باشد:

مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول M مولار منیزیم سولفات



بررسی دیگر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: CO_2 و I_2 مواد ناقطبی هستند و گشتاور دوقطبی H_2O و H_2S به‌ترتیب ۱/۸۵D و ۰/۹۷D می‌باشد.

گزینهٔ «۲»: در فشار ثابت انحلال‌پذیری NO از N_2 بیشتر است.

گزینهٔ «۴»: مطابق متن کتاب درسی درست است.

نقطهٔ جوش : $HF > HBr > HCl$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۹۸، ۹۹، ۱۰۳ تا ۱۰۹، ۱۱۲ و ۱۱۳)

۱۳۹- **گزینهٔ «۴»** *(حسن لشکری)*

بررسی موارد نادرست:

پ) این دستگاه بر اساس فرایند اسمز معکوس عمل می‌کند.

(شیمی ۱- صفحهٔ ۱۱۸)

۱۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(محمدحسن محمدزاده‌مقدم)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) مولکول CH_4 ناقطبی و مولکول H_2S قطبی است. بنابراین CH_4 در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند. در حالی‌که H_2S در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

۲) نقطهٔ جوش H_2O بالاتر از HF است.

۳) دو مولکول CO و HCl قطبی بوده و گشتاور دو قطبی در آن‌ها مخالف صفر است.

۴) نیروی وان‌درووالسی به جرم مولی و حجم مولکول وابسته است. جرم مولی I_2 بیشتر از Br_2 و جرم مولی Br_2 نیز بیشتر از Cl_2 است. بنابراین مقایسهٔ انجام شده درست است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۸)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی

دفترچه پاسخ

آزمون هوش و استعداد

(دورهٔ دوم)

۲۸ شهریور

تعداد کل سؤالات آزمون: ۲۰
زمان پاسخ‌گویی: ۳۰ دقیقه

گروه فنی تولید

مسئول آزمون	حمید لنجان‌زاده اصفهانی
ویراستار	فاطمه راسخ
مدیر گروه مستندسازی	محیا اصغری
مسئول درس مستندسازی	علیرضا همایون‌خواه
طراحان	حمید اصفهانی، فاطمه راسخ، سجاد محمدنژاد، حمید گنجی، حامد کریمی،فرزاد شیرمحمدلی
حروف‌چینی و صفحه‌آرایی	معصومه روحانیان
ناظر چاپ	حمید عباسی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

استعدادتحلیلی

۲۵۱- گزینهٔ «۳» *(حامد کریمی)*

می‌دانیم «را» بعد از فعل نمی‌آید. در هم پیچیدن جمله‌های غیرساده نیز مخلّ فصاحت است. شکل درست عبارت گزینه‌ی «۳»: ناصرخسرو در این مورد خشک و متعصّب است و هر دیدگاهی را که با آنچه در ذهن اوست مغایر است، رد می‌کند.

(تصحیح جملات، هوش کلامی)

۲۵۲- گزینهٔ «۴» *(کتاب استعدادتحلیلی، هوش کلامی)*

ترتیب پیشنهادی: «شکی نیست که ادبیّات فارسی با عرفان اسلامی و ایرانی گره خورده‌است.»

(ترتیب کلمات، هوش کلامی)

۲۵۳- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

کشور «روسیه» و پایتخت آن «مسکو» مدنظر است.

(کلمه‌سازی، هوش کلامی)

۲۵۴- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

حروف به‌ترتیب الفبا بدون تکراری‌ها: ا ب پ ت خ د ر س ش ط ف ک ن و هـ ی

دومین حرف از سمت راست: ب

اوّلین حرف از سمتِ راستِ «ب»: ا

چهارمین حرفِ سمتِ چپِ «ا»: خ

(الفبا، بازی‌های کلامی، هوش کلامی)

۲۵۵- گزینهٔ «۴» *(حامد کریمی)*

چهار جفت حرف مدّنظر:

ا ب / ا پ / ت ب / ب پ

(الفبا، بازی‌های کلامی، هوش کلامی)

۲۵۶- گزینهٔ «۳» *(حامد کریمی)*

به شمارهٔ الفبایی حروف دقّت کنید که به‌ترتیب «یک، دو، سه، چهار، پنج، شش و هفت» واحد بیشتر می‌شوند:

الف	ب	ت	چ	ذ	ش	غ	ن
۱	۲	۴	۷	۱۱	۱۶	۲۲	۲۹

(الفبا، بازی‌های کلامی، هوش کلامی)

۲۵۷- گزینهٔ «۱» *(کتاب استعدادتحلیلی، هوش کلامی)*

بیت صورت سؤال می‌گوید پیش از آن که وارد جایی یا کاری بشوی به فکر این باش که چگونه و در چه حالتی از آن بیرون می‌آیی، یعنی عاقبت‌اندیش باش. مصراع گزینهٔ «۱» هم با نوعی طنز همین مسأله را بیان می‌کند. مناره (گلدسته) به آن بزرگی را اگر بدزدی، آن را کجا پنهان خواهی کرد؟ ابتدا چاهی بکن و بعد مناره را که دزدیدی در آن بگذار (!) که کسی نفهمد.

عبارت گزینهٔ «۲» مخاطب را به راستی و درستی پند می‌دهد، مخاطبی که به فکر رسیدن به مقصد، باید راستی را در پیش گیرد. عبارت گزینهٔ «۳» با مصراع «وای به روزی که بگندد نمک» هم‌معناست و عبارت گزینهٔ «۴» از شخصی می‌گوید که در کار ساده مانده‌است، حال کار دشوارتر را هم می‌پذیرد.

(ضرب‌المثل، هوش کلامی)

۲۵۸- گزینهٔ «۱» *(سیّار ممدنژاد)*

ابتدا عددهای ۱ و ۴ را در ستون دوم قرار می‌دهیم، اما به‌جز آن هیچ خانهٔ دیگری نیست که تکلیف آن قطعی مشخص باشد.

	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۴		
۲		۳		
۳		۱		۴
۴		۲		

حال برای مثال با قرار دادن عدد ۲ در خانهٔ «ستون سوم، ردیف سوم» جدول سودوکو به یک حالت و با قرار دادن عدد ۳ در این خانه، جدول سودوکو به یک حالت دیگر کامل می‌شود.

پس با معلوم شدن یک خانه می‌توان جدول را کامل کرد:

۱	۴	۲	۳
۴	۳	۱	۲
۲	۱	۳	۴
۳	۲	۴	۱

۱	۴	۳	۲
۲	۳	۴	۱
۳	۱	۲	۴
۴	۲	۱	۳

(سودوکو، هوش منطقی ریاضی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵۹- گزینهٔ «۳» *(سبّار محمدنژاد)*

ستون اول به عدد ۲ احتیاج دارد و فقط یک خانه برای این عدد هست. حال جایگاه عدد ۴ نیز در این ستون معلوم است. عدد ۳ در ردیف دوم نیز، اکنون معلوم شده است.

	۱	۲	۳	۴
۱	۱			
۲	۴	۱	۳	۲
۳	۲		۱	
۴	۳			۱

حال در یکی از ردیف‌ها و ستون‌ها که دو خانهٔ خالی دارد، یکی از عددهای ممکن را فرض می‌کنیم. مثلاً در ردیف سوم، عددهای ۳ و ۴ را درنظر می‌گیریم. اکنون در ستون چهارم، جایگاه عدد ۳ معلوم است.

	۱	۲	۳	۴
۱	۱			۳
۲	۴	۱	۳	۲
۳	۲	۳	۱	۴
۴	۳			۱

در چهار خانهٔ باقی‌مانده، عددهای ۲ و ۴ هر کدام دو بار قرار می‌گیرند که حالت‌های زیر را می‌سازند:

۱	۲	۴	۳
۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۴	۲	۱

۱	۴	۲	۳
۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱

اما اگر عددهای ۳ و ۴ را در ردیف سوم، برعکس درنظر بگیریم، به جدول زیر می‌رسیم که تنها یک حالت برای کامل شدن دارد:

۱			۴
۴	۱	۳	۲
۲	۴	۱	۳
۳			۱

$\rightarrow$

۱	۳	۲	۴
۴	۱	۳	۲
۲	۴	۱	۳
۳	۲	۴	۱

پس در کل ۳ حالت داریم.

(سودوکو، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۰- گزینهٔ «۳» *(فرزاد شیرممدلی)*

ابتدا تعداد بردها را معلوم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{۵۰}{۱۰۰}=\frac{؟}{۱۵۰}\Rightarrow ؟=۷۵$$

حال درصد پیروزی‌ها پس از حداقل x بازی دیگر:

$$\frac{۷۵+x}{۱۵۰+x}=\frac{۶۰}{۱۰۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow ۵x+۳۷۵=۳x+۴۵۰$$

$$\Rightarrow ۲x=۷۵\Rightarrow x=۳۷/۵$$

پس اگر این سرمربی ۳۸ بازی بعدی را پشت سر هم ببرد، آمار خواسته شده به‌دست می‌آید.

(کسر و تناسب، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۱- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

برای سادگی کار و در حالی‌که تأثیری در پاسخ ندارد، فرض می‌کنیم قیمت اولیه ۱۰۰ تومان بوده باشد. با هشتاد درصد تخفیف، قیمت ۸۰ تومان و با پنج درصد افزایش، قیمت ۱۰۵ تومان خواهد بود. صد کالا را با قیمت ۸۰ تومان فروخته‌ایم و باید x کالای دیگر را با قیمت ۱۰۵ تومان بفروشیم و زیان اولیه را جبران کنیم. پس داریم:

$$(۱۰۰\times ۸۰)+(x\times ۱۰۵)=(x+۱۰۰)\times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۱۰۵x+۸۰۰۰=۱۰۰x+۱۰۰۰۰$$

$$\Rightarrow ۵x=۲۰۰۰\Rightarrow x=۴۰۰$$

(کسر و تناسب، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۲- گزینهٔ «۲» *(ممیر کنعی)*

اگر ده کارگر، کار باقی‌مانده را در x روز تمام می‌کردند، پنج کارگر آن را در $x+۶$ روز تمام می‌کنند. حال معلوم است که تعداد کارگرها نصف شده است پس زمان انجام کار دو برابر شده است. یعنی $x+۶=۲x\Rightarrow x=۶$ است. پس کل کار با ده کارگر، $۱۲=۶+۶$ روزه تمام می‌شد.

(کسر و تناسب، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۳- گزینهٔ «۱» *(ممیر کنعی)*

شعاع دایره را r و ضلع مربع را a می‌گیریم. داریم:

$$\text{محیط دایره}=\text{محیط مربع}\Rightarrow ۴a=۲\pi r\Rightarrow a=\frac{\pi r}{۲}$$

حال اختلاف مساحت‌ها معلوم است:

$$\text{مساحت مربع}-\text{مساحت دایره}=\pi r^۲-a^۲=\pi r^۲-\frac{\pi^۲ r^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow \pi r^۲(۱-\frac{\pi}{۴})=۹\pi-\frac{۹\pi^۲}{۴}=۹\pi(۱-\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow r^۲=۹\Rightarrow r=۳$$

دقت کنید طول شعاع عدد منفی نیست. حال محیط دایره، همان طول طناب است:

$$۲\pi r=۲\pi\times ۳=۶\pi$$

(هندسه، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۴- گزینهٔ «۴» *(حمید کنعی)*

ابتدا «الف ب» و «ب الف» را دو حالت یک کتاب می‌گیریم و چهار جایگاه برای ما می‌ماند. پس در کل چهار کتاب به ۱×۲×۳×۴ حالت کنار هم قرار می‌گیرند.

$$\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} = ۲۴,۲۴ \times ۲ = ۴۸$$

حال حالتی را که «ت ث» کنار یکدیگرند محاسبه و از تعداد کل حالت ها کم می‌کنیم، یعنی ۳ کتاب داریم که دو تا، دو حالت دارند. پس کل حالت‌های ممکن، ۱×۲×۳ است، هر چند دوتا از آن‌ها دو حالت دارند:

$$\underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} = ۶,۶ \times ۲ \times ۲ = ۲۴$$

پس تعداد کل حالات مطلوب، $۴۸ - ۲۴ = ۲۴$ حالت است.

(اصل ضرب، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۵- گزینهٔ «۱» *(فرزاد شیرممدلی)*

در الگوی صورت سؤال داریم:

$$\frac{۹}{۲۱} + \frac{۸}{۱۴} = \frac{۳}{۷} + \frac{۴}{۷} = \frac{۷}{۷} = ۱$$

$$\frac{۵}{۳} + \frac{۲}{۶} = \frac{۱۰+۲}{۶} = \frac{۱۲}{۶} = ۲$$

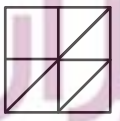
$$\frac{۱۹}{۱۳} + \frac{۶۰}{۳۹} = \frac{۵۷+۶۰}{۳۹} = \frac{۱۱۷}{۳۹} = ۳$$

$$\frac{۷۰}{۱۸} + \frac{?}{۹} = ۴ \Rightarrow \frac{۷۰+۲\times?}{۱۸} = ۴$$

$$\Rightarrow ۷۰ + ۲? = ۷۲ \Rightarrow ? = \frac{۷۲-۷۰}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

(الگوهای عددی، هوش منطقی ریاضی)

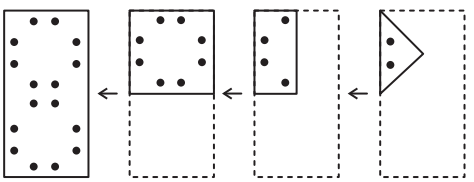
۲۶۶- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

روی هم افتادنِ برگه‌های دیگر گزینه‌ها، شکلِ  را می‌سازد و نود درجه چرخش پادساعتگرد آن، شکل را حاصل می‌کند.

(کاغذ شفاف، هوش غیرکلامی)

۲۶۷- گزینهٔ «۱» *(فاطمه راسخ)*

مراحلِ باز شدنِ کاغذ گزینهٔ «۱» و تبدیل به شکل صورت سؤال:



(تای کاغذ، هوش غیرکلامی)

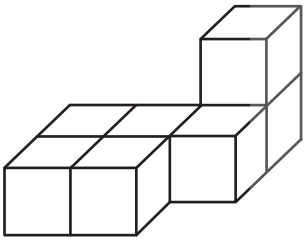
۲۶۸- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

دو وجه و در مکعب مستطیل حاصل از شکل گستردهٔ صورت سؤال روبه‌روی هم‌اند نه کنار هم.

(مبهم‌های غیرمنتظم، هوش غیرکلامی)

۲۶۹- گزینهٔ «۴» *(حمید کنعی)*

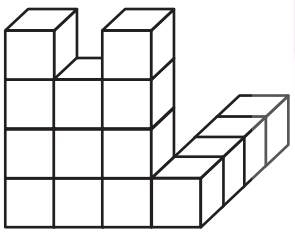
شکل درست گزینهٔ «۴»:



(تبدیل‌های فضایی، هوش غیرکلامی)

۲۷۰- گزینهٔ «۳» *(فرزاد شیرممدلی)*

حجم موردنظر از ۱۵ مکعب واحد تشکیل شده است:



(نقشه‌کشی، هوش غیرکلامی)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت