دفترچه پاسخ

آزمون ۱۴ شهریور ۱۴۰۴

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲ و ریاضی پایه	کاظم اجلالی-علی آزاد-شاهین پروازی-حسین پوراسماعیل-مهدی تک-محمد توزنده‌جانی-عادل حسینی-بهرام حلاج افشین خاصه‌خان-امیرهوشنگ خمسه-جواد زنگنه‌قاسم‌آبادی-حسین شفیع‌زاده-علی شهرابی-حمید علیزاده-مرتضی فهیم‌علوی حمید مام‌قادری-سیدسپهر متولیان-امیر مرادیان-مهدی ملارمضانی-احمد مهرابی-مجتبی نادری
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-معصومه اکبری‌صحت-علی ایمانی-علی بهرمندپور-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش-محمد خندان کیوان دارابی سوگند روشنی-یاسین سپهر-محمدطاهر شعاعی-سیما شواکندی-محمد قیدی-امیرمحمد کریمی-سهام مجیدی‌پور نصیر محبی‌نژاد-سینا محمدپور-مهرداد ملوندی-سرژ یقیازاریان‌تبریزی
	آمارواحتمال وریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-رضا بخشنده-جواد حاتمی-افشین خاصه‌خان-منوچهر خاصی-فرزانه خاکپاش-حسین خزایی هنریک سرکیسیان-سیدمصطفی سیدحسینی-محمد صحت‌کار-مرتضی فهیم‌علوی-امیرمحمد کریمی-نیلوفر مهدوی هومن نورائی
	فیزیک	سعید اردم-مهدی اسدی-عبدالرضا امینی‌نسب-زهره آقامحمدی-محمدحسین جوان-مصطفی خدارحمی محمدعلی راست‌پیمان - بهنام رستمی-رامین شادلویی-مهدی شریفی-محمدرضا شیروانی‌زاده-سعید طاهری‌بروجنی امیرمحمد عبدوی- عرفان عسگریان‌چایجان-پوریا علاقه‌مند-عبداله فقه‌زاده-مسعود قره‌خانی-مصطفی کیانی-علیرضا گونه غلامرضا محبی-احسان محمدی
	شیمی	محمدرضا پورجاوید-حامد پویان‌نظر-امیر حاتمیان-حمید ذبحی-یاسر راش-حسن رحمتی‌کوکنده-مبینا شرافتی‌پور-امیرحسین طیبی محمد عظیمیان‌زواره-محمدپارسا فراهانی-حسن لشکری-محمدحسن محمدزاده‌مقدم-سیدمحمد معروفی-سالار ملکی-امین نوروزی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی‌پایه	هندسه	آمارواحتمال وریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	سیدسپهر متولیان	مهرداد ملوندی	مهرداد ملوندی	حسام نادری	آرش ظریف
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب یاسین کشاورزی مهرداد ملوندی	امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	سینا صالحی حسین بصیرترکمبور زهره آقامحمدی	یاسر راش مجتبی محجوب فرزاد حلاج‌مقدم
مسئول درس	سیدسپهر متولیان	امیرمحمد کریمی	امیرمحمد کریمی	حسام نادری	آرش ظریف
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران (مستندسازی)	معصومه صنعت‌کار-مهسا محمدنیا- احسان میرزینلی-سجاد سلیمی-فرشته کمبرانی			مهدی صالحی سجاد بهارلویی	محسن دستجردی عرفان قره‌مشک آتیلا ذاکری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۱

۱- **گزینهٔ «۳»** *(امیرهوشنگ ضمسه)*

با توجه به این‌که $1\,Rad \simeq 57/3^\circ$ می‌باشد، پس می‌توان نتیجه گرفت $1\,Rad$ در ناحیهٔ اول، $2\,Rad$ و $3\,Rad$ در ناحیهٔ دوم و $4\,Rad$ در ناحیهٔ سوم مختصاتی است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $\left.\begin{matrix}\cos 3<0\\ \sin 3>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \cos 3-\sin 3<0$

۲) $0<\sin 1<1\Rightarrow (\sin 1)^{\cos 4}>0$

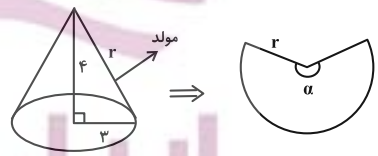
۳) $1\,Rad>45^\circ\Rightarrow \tan 1>\tan 45^\circ\Rightarrow \dfrac{\sin 1}{\cos 1}-1>0$

۴) $\left.\begin{matrix}\cos 3<0\\ \sin 4<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \cos 3\sin 4>0$

(حسابان ۱- صفحهٔ ۹۳)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(مجتبی نادری)*

اگر مخروط مورد نظر را باز کنیم به قسمتی از یک دایره می‌رسیم که شعاع آن برابر طول مولد مخروط (پاره‌خط واصل بین رأس مخروط و هر نقطهٔ دلخواه از محیط قاعده) است. همچنین محیط قاعدهٔ مخروط برابر با $r\alpha$ می‌باشد.



$$r=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$2\pi\times 3=r\alpha\Rightarrow \alpha=\frac{6\pi}{5}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

$$\frac{\cos 660^\circ-\sin 210^\circ}{\sin(-690^\circ)+\cos 300^\circ}=\frac{\cos(7\times 90^\circ+30^\circ)-\sin(180^\circ+30^\circ)}{-\sin(8\times 90^\circ-30^\circ)+\cos(360^\circ-60^\circ)}$$

$$=\frac{\sin 30^\circ-(-\sin 30^\circ)}{\sin 30^\circ+\cos 60^\circ}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(جواد زنگنه‌قاسم‌آبادی)*

$$\cos 106^\circ=\cos(180^\circ-74^\circ)=-\cos 74^\circ$$

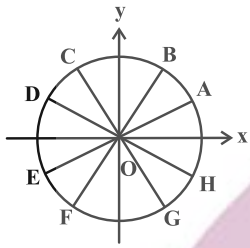
$$\Rightarrow A=\cos 106^\circ\cos 74^\circ=-\cos^2 74^\circ=-(1-2\sin^2 37^\circ)^2$$

$$=-(1-2(0/6)^2)^2=-(0/28)^2=-0/0784$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۲)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(حمید مام‌قادری)*

با مشخص کردن کمان‌های گفته شده روی دایره مثلثاتی داریم:



شکل مورد نظر یک هشت ضلعی محدب است که از ۸ مثلث هم‌نهشت با $\overset{\Delta}{AOB}$ تشکیل شده است.

$$S=8S_{AOB}=8\times\frac{1}{2}\times AO\times BO\times\sin\frac{\pi}{4}$$

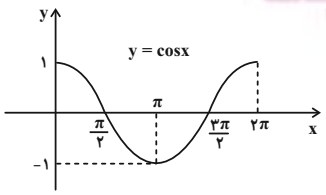
$$=4\times 1\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

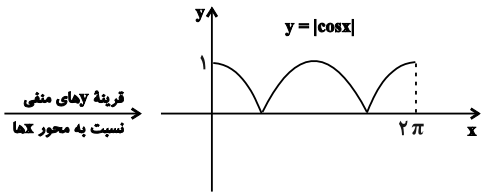
(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

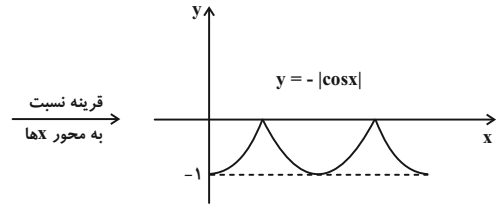
۶- **گزینهٔ «۳»** *(امیر مرادیان)*

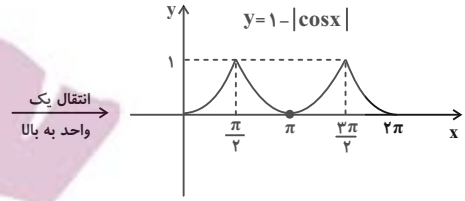
$$\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

$$y=1-|\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)|=1-|\cos x|$$









(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۹)

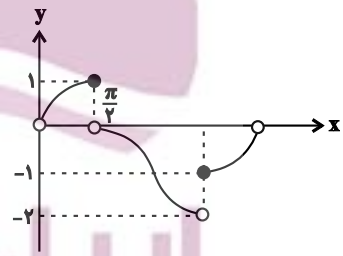
۷- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

$$0 < x \le \frac{\pi}{2} : 0 \le \cos x < 1 \Rightarrow [\cos x] = 0 \Rightarrow f(x) = \sin x$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} : -1 \le \cos x < 0 \Rightarrow [\cos x] = -1 \Rightarrow f(x) = \sin x - 1$$

$$\frac{3\pi}{2} \le x < 2\pi : 0 \le \cos x < 1 \Rightarrow [\cos x] = 0 \Rightarrow f(x) = \sin x$$

در نتیجه با توجه به ضابطه‌های بالا و نمودار داریم:



$$a = 1 , b = -2 , c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{bc}{a} = \pi$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

۸- **گزینهٔ «۴»** (مرتضی فهیم‌علوی)

با ساده کردن کسر داده شده داریم:

$$T = \frac{\cos 3x}{\sin 5x} - \frac{\sin 3x}{\cos 5x} = \frac{\cos 3x \cos 5x - \sin 3x \sin 5x}{\sin 5x \cos 5x}$$

$$= \frac{\cos(3x + 5x)}{\frac{1}{2}\sin 10x} = \frac{2\cos 8x}{\sin 10x}$$

$$\xrightarrow{x=10^\circ} T = \frac{2\cos 80^\circ}{\sin 100^\circ} = \frac{2\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} = 2\cot 80^\circ$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۹- **گزینهٔ «۲»** (سیدسپهر متولیان)

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{-\sin 2x - \cos 4x}{-\cos 2x - \cos 4x} = \frac{\sin 2x + \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x}$$

حال طبق فرض داریم:

$$\tan x + \cot x = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = \frac{10}{3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{0<2x<\frac{\pi}{2}} \cos 2x = +\sqrt{1 - \sin^2 2x} = \frac{4}{5}$$

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = \frac{7}{25}$$

پس مقدار عبارت A برابر می‌شود با:

$$A = \frac{\frac{3}{5} + \frac{7}{25}}{\frac{4}{5} + \frac{7}{25}} = \frac{\frac{22}{25}}{\frac{27}{25}} = \frac{22}{27}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۳ و ۱۱۲)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** (حمید علیزاده)

$$\sin^4 \frac{\alpha}{2} - \cos^4 \frac{\alpha}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2})}_{1} \underbrace{(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2})}_{-\cos\alpha} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیهٔ اول}} \sin\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1 - 2(\frac{1}{9})}{2(\frac{1}{3})(\frac{2\sqrt{2}}{3})} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$$

$$= \frac{7}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

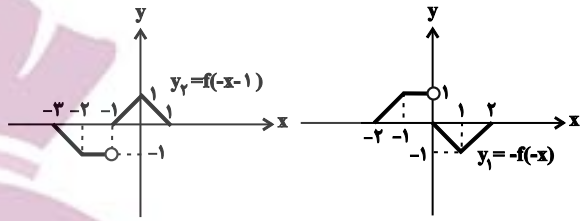
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

حسابان ۲

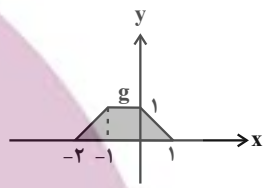
۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

ابتدا نمودار توابع $y_1=-f(-x)$ و $y_2=f(-x-1)$ را رسم می‌کنیم. سپس از y_1 قسمت سمت چپ محور y و از y_2 قسمت راست محور y را نگه می‌داریم تا نمودار g حاصل شود.

دقت کنید که y_1 قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به مبدأ مختصات است. برای y_2 نیز، ابتدا f را یک واحد به راست می‌بریم، پس آن را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم. داریم:



پس نمودار تابع g مطابق شکل زیر است:



مساحت ذوزنقهٔ هاشورخورده برابر $S=(\frac{3+1}{2})\times 1=2$ است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(حسین شفیع‌زاده)*

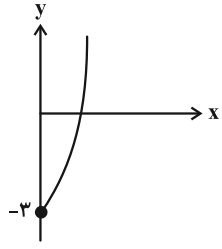
تابع f روی هر کدام از بازه‌های $(-\infty,-1]$ و $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[-1,0]$ اکیداً نزولی است. بنابراین برای آن‌که تابع $f+g$ صعودی باشد، لازم است $g(x)=ax$ نیز اکیداً صعودی باشد، تا قسمت اکیداً نزولی نمودار f را خنثی کند.

ضابطهٔ تابع f در بازهٔ $[-1,0]$ به صورت $f(x)=-2x$ است، پس اگر $g(x)=2x$ باشد، تابع $f+g$ در این بازه تابع ثابت صفر است و شرط صعودی بودن $f+g$ برقرار می‌شود. واضح است که برای $a\geq 2$ نیز این شرط برقرار است. در نتیجه کم‌ترین مقدار a برابر ۲ است.

(حسابان ۲- تابع؛ مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۸)

۱۳- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

نمودار سهمی $y_1=x^2+3x-3;\ x\geq 0$ به صورت زیر است:



حال فرض می‌کنیم که تابع f یکنوا باشد، بنابراین لازم است شیب خط $y_2=mx-(2m-3);\ x<0$ مثبت باشد و عرض از مبدأ آن بزرگ‌تر از ۳- نباشد:

$$\begin{cases} m>0 \\ -2m+3\leq -3\Rightarrow m\geq 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m\in[3,+\infty)$$

بنابراین برای اینکه تابع f غیریکنوا باشد، باید m در بازهٔ $[3,+\infty)$ نباشد، یعنی $m\in(-\infty,3)$ باشد.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(حمید علیزاده)*

رابطهٔ تقسیم را برای تقسیم $(x+4)p(x)$ بر x^3-x می‌نویسیم:

$$(x+4)p(x)=x(x-1)(x+1)q_1(x)+2x+3$$

مقادیر $x=0$ ، $x=1$ و $x=-1$ را در رابطه بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$4p(0)=3\Rightarrow p(0)=\frac{3}{4}$$

$$5p(1)=5\Rightarrow p(1)=1$$

$$3p(-1)=1\Rightarrow p(-1)=\frac{1}{3}$$

حال رابطهٔ تقسیم دوم را می‌نویسیم:

$$p(x)-xp(1-x)=x(x-1)q_2(x)+\alpha x+\beta$$

در اینجا باقی‌مانده را درجه یک و به صورت $\alpha x+\beta$ در نظر گرفته‌ایم.

حال مقادیر $x=0$ و $x=1$ را در رابطه بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=0: p(0)=\beta\Rightarrow\beta=\frac{3}{4}$$

$$x=1: p(1)-p(0)=\alpha+\beta\Rightarrow 1-\frac{3}{4}=\alpha+\frac{3}{4}\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$$

پس باقی ماندهٔ تقسیم $-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(حسین شفیع‌زاده)*

شرط آن‌که x^n+1 بر x^3+1 بخش‌پذیر باشد، آن است که n فرد و مضرب ۳ باشد. پس $n=3k$ که در آن k عدد طبیعی فرد است. حال اگر فرض کنیم $x^3=t$ باشد، داریم:

$$x^n+1=x^{3k}+1=t^k+1=(t+1)(t^{k-1}-t^{k-2}+\ldots+1)$$

$$\Rightarrow p(x)=x^{3(k-1)}-x^{3(k-2)}+\ldots+1$$

چون k فرد است، داریم:

$$p(-1)=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{k\text{ بار}}=k=13\Rightarrow n=3\times 13=39$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

طبق روابط گفته شده در صفحهٔ ۲۷کتاب درسی داریم:

$$\begin{cases} y_{max} = |a| + c = 4 \\ y_{min} = -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{3}{2}, |a| = \frac{5}{2}$$

اما مقدار $a = -\frac{5}{2}$ قابل قبول است، زیرا نمودار داده شده قرینهٔ یک نمودار کسینوسی نسبت به محور x هاست.

طبق شکل، دورهٔ تناوب نمودار هم، برابر با ۳ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \pm\frac{2}{3}$$

هر دو مقدار b قابل قبول است؛ زیرا نمودار $y = \cos x$ نسبت به محور y ها متقارن است.

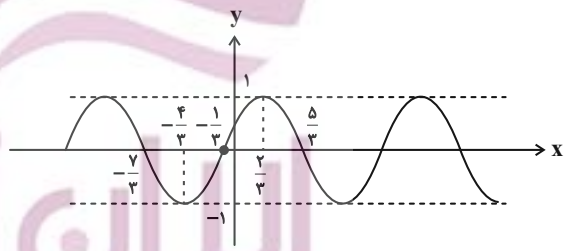
$$\begin{cases} b = -\frac{2}{3} : a + b + c = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{2}{3} : a + b + c = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ مشابه مثال صفحهٔ ۲۸)

۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(مهری ملارمضانی)*

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$$

برای رسم این نمودار، کافی است نمودار $y = \sin x$ را $\frac{\pi}{6}$ واحد به چپ ببریم و در نهایت طول نقاط را بر $\frac{\pi}{2}$ تقسیم کنیم؛ داریم:

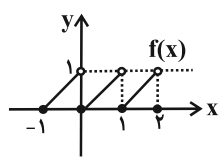


با توجه به نمودار بالا، تابع روی بازهٔ $\left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]$ اکیداً صعودی است، پس حداکثر مقدار k برابر $\frac{2}{3}$ است.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۸- **گزینهٔ «۲»** *(کاظم اجلالی)*

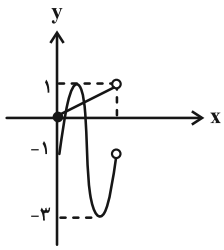
نمودار تابع f به شکل زیر است و دورهٔ تناوب آن برابر یک است.



دورهٔ تناوب تابع g برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است،

بنابراین نمودار توابع f و g در یک دوره تناوب به شکل مقابل است و نمودارها در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

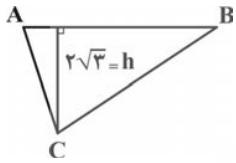
دقت کنید که اگر b را منفی هم در نظر بگیریم، تعداد نقاط برخورد برابر ۲ خواهد بود.



(حسابان۲- مثلثات؛ صفحه‌های صفحه‌های ۲۴ و ۲۷)

۱۹- **گزینهٔ «۲»** *(علی شهرابی)*

ارتفاع مثلث ABC، $2\sqrt{3}$ است.



از طرفی A و B به اندازهٔ ۲ برابر دورهٔ تناوب با هم فاصله دارند:

$$AB = 2 \times \frac{\pi}{|a|}$$

با توجه به شکل $a > 0$ است، پس داریم:

$$AB = \frac{2\pi}{a}$$

مساحت را حساب می‌کنیم و مساوی $8\sqrt{3}\pi$ قرار می‌دهیم:

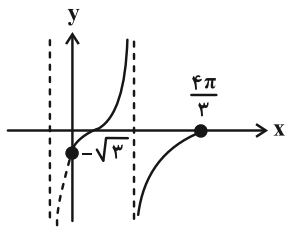
$$S = \frac{AB \times h}{2} \Rightarrow 8\sqrt{3}\pi = \frac{\frac{2\pi}{a} \times 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{3}\pi = \frac{2\sqrt{3}\pi}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(کاظم اجلالی)*

اگر نمودار تابع $y = \tan x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y = \tan(x - \frac{\pi}{3})$ به دست می‌آید که به صورت زیر است. با توجه به نمودار معلوم است که اگر دامنهٔ تابع $[0, \frac{4\pi}{3}] - \{\frac{5\pi}{6}\}$ باشد، برد آن $\mathbb{R}$ است.



(حسابان ۲- مثلثات؛ مشابه فعالیت صفحهٔ ۳۲)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی ۱

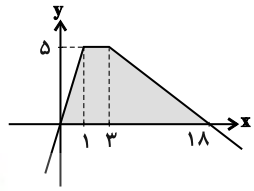
۲۱- **گزینهٔ «۴»** *(مهدی تک)*

تابع داده شده را رسم می‌کنیم:

$y=5x:\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 5 \end{array}$

$y=5:\ \begin{array}{c|cc} x & 1 & 3 \\ \hline y & 5 & 5 \end{array}$

$y=-\frac{1}{3}x+6:\ \begin{array}{c|cc} x & 3 & 18 \\ \hline y & 5 & 0 \end{array}$



سطح محصور، یک ذوزنقه به ارتفاع ۵ و طول قاعده‌های ۲ و ۱۸ است که مساحت آن برابر می‌شود با:

$$S=\frac{1}{2}\times 5\times(2+18)=50$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۲۲- **گزینهٔ «۳»** *(علی آزاد)*

ضابطهٔ تابع همانی به صورت $f(x)=x$ می‌باشد، بنابراین:

$$(a-b+4)x^2+(b-4)x+3c-6=x$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a-b+4=0 \\ b-4=1\Rightarrow b=5 \end{cases}\Rightarrow a=1$$
$$3c-6=0\Rightarrow c=2$$

با بررسی گزینه‌ها خواهیم داشت:

گزینهٔ «۱»:

$$(a+3)f(x)+cx=(1+3)(x)+(2)(x)=4x+2x=6x$$

گزینهٔ «۲»:

$$(b-1)f(x)-ax=(5-1)(x)-(x)=4x-x=3x$$

گزینهٔ «۳»: تابع ثابت

$$(c+3)f(x)-bx=(2+3)(x)-(5)(x)=5x-5x=0$$

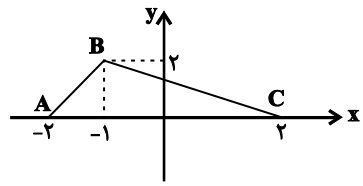
گزینهٔ «۴»:

$$(a+b)f(x)+cx=(1+5)(x)+2(x)=6x+2x=8x$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۳)

۲۳- **گزینهٔ «۳»** *(شاهین پروازی)*

ابتدا نمودار $y=f(x+1)$ را رسم می‌کنیم.



برای اینکه معادلهٔ $f(x+1)=6+b$، دو ریشهٔ نامثبت داشته باشد، باید «$6+b<2$ ≤ عرض از مبدأ خط BC» باشد.

معادلهٔ خط BC را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} B(-1,2) \\ C(2,0) \end{cases}\Rightarrow y=\frac{-2}{3}(x-2)=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$$

پس طبق نامعادلهٔ گفته شده داریم:

$$\frac{4}{3}\le 6+b<2\Rightarrow\frac{-14}{3}\le b<-4$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

۲۴- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نادری)*

f تابعی همانی است، بنابراین داریم: $f(x)=x$

g تابعی ثابت است بنابراین به ازای هر x حقیقی داریم: $g(x)=c$ (c عدد ثابت)

h تابعی خطی است و معادلهٔ آن عبارت است از:

$$\begin{cases} h(2)=0\Rightarrow(2,0)\in h \\ h(4)=6\Rightarrow(4,6)\in h \end{cases}\xrightarrow{\text{شیب خط}} m=\frac{0-6}{2-4}=\frac{-6}{-2}=3$$

معادلهٔ خط: $y-y_0=m(x-x_0)\xrightarrow{(2,0)}y-0=3(x-2)$

$$\Rightarrow y=3x-6\Rightarrow h(x)=3x-6$$

همچنین داریم:

$$\frac{f(2)+g(-2)}{2g(0)}=-2\xrightarrow[g(x)=c]{f(x)=x}\frac{2+c}{2\times c}=-2\Rightarrow -4c=2+c$$

$$\Rightarrow -4c-c=2\Rightarrow c=\frac{-2}{5}$$

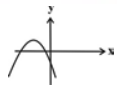
$$\frac{f(\frac{1}{5})+g(-1)}{h(\frac{7}{3})}=\frac{\frac{1}{5}+(-\frac{2}{5})}{3(\frac{7}{3})-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{7-6}=-\frac{1}{5}$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحهٔ ۱۱۰)

۲۵- **گزینهٔ «۴»** *(حسین پوراسماعیل)*

باید موقعیت رأس و عرض از مبدأ طوری قرار گیرد که نمودار از هر ۴ ناحیهٔ مختصات عبور کند.

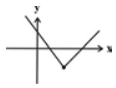
نمودار گزینهٔ «۱»:



رأس: $(-1,\sqrt{2}-1)$

عرض از مبدأ $=\sqrt{2}-2$

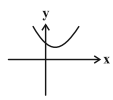
نمودار گزینهٔ «۲»:



رأس: $(2,-\sqrt{3})$

عرض از مبدأ $=-\sqrt{3}-2$

نمودار گزینهٔ «۳»:



رأس: $(1,1)$

عرض از مبدأ $=2$

نمودار گزینهٔ «۴»:

رأس: $(-2,\sqrt{5})$

عرض از مبدأ $=\sqrt{5}-2$

فقط نمودار گزینهٔ «۴» از چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد.

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۷)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۶- **گزینهٔ «۱»** *(بهرام ملاج)*

از آنجاییکه حروف باید متمایز باشند، از حروف تکراری صرف‌نظر می‌کنیم،

یعنی داریم: p,r,o,g,a,m,i,n

که حروف صدادار شامل o,a,i می‌باشد، پس داریم:

$$\underset{\text{صدادار}}{\frac{۳}{}}\times\frac{۶}{}\times\frac{۵}{}\times\underset{\text{صدادار}}{\frac{۲}{}}=۱۸۰$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(احمد مهرابی)*

جایگشت ارقام داده شده برابر $!۶$ است. اگر جابه‌جایی سه رقم $\{۳,۲,۸\}$ را در نظر بگیریم، در کل ۶ حالت دارد که فقط در یک حالت از ۶ حالت، خواستهٔ سوال اتفاق می‌افتد. پس $\frac{۱}{۶}$ کل حالات، جواب مسئله است:

$$\frac{۱}{۶}\times ۶! = ۵!$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۶ تا ۱۳۲)

۲۸- **گزینهٔ «۴»** *(احمد مهرابی)*

$$\frac{k!-(k+۱)(k-۱)!}{(k+۲)k!-(k+۱)!}=\frac{k(k-۱)!-(k+۱)(k-۱)!}{(k+۲)k!-(k+۱)k!}$$
$$=\frac{-(k-۱)!}{k!}=\frac{-۱}{k}$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۲۹- **گزینهٔ «۱»** *(محمد توزنده‌جانی)*

بایستی با ارقام $۱,۱,۲,۳,۴$ عدد ۵ رقمی بزرگتر از ۲۰۰۰۰ بسازیم، بنابراین رقم سمت چپ فقط ارقام $۴,۳,۲$ می‌تواند باشد. با توجه به مکان ۱ ها حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: $\underset{\text{۲رقم دیگر و ۱}}{\underbrace{\frac{۳}{\{۲,۳,۴\}}\frac{۱}{\{۱\}}---}}=۳\times ۳!=۱۸$

حالت دوم: $\underset{\text{۱رقم دیگر و ۱}}{\underbrace{\frac{۳}{\{۲,۳,۴\}}\frac{۲}{\text{یکی از ۲ رقم دیگر}}\frac{۱}{\{۱\}}--}}=۶\times ۲!=۱۲$

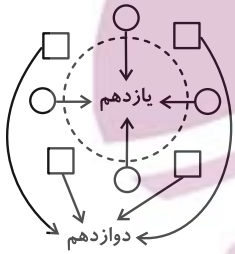
حالت سوم: $\underset{\text{۲رقم دیگر}}{\underbrace{\frac{۳}{\{۲,۳,۴\}}\frac{۲}{}\frac{۱}{}}}\frac{۱}{\{۱\}}\frac{۱}{\{۱\}}=۶$

بنابراین در کل ۳۶ حالت می‌توانیم داشته باشیم.

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۳۲)

۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(سراسری تجربی- ۱۴۰۰)*

دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم را با $a_۱$ تا $a_۴$ و دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم را با $b_۱$ تا $b_۴$ نمایش می‌دهیم. وضعیت زیر،جایگاه دانش‌آموزان هر یک از پایه‌ها را نمایش می‌دهد که در آن، دانش‌آموزان پایه‌ها، یک در میان روی صندلی‌ها نشسته‌اند:



توجه کنید که در نشستن دور میزگرد، نفر اول (از سمت چپ یا راست) مانند جایگشت خطی وجود ندارد و باید جایگاه افراد را نسبت به یک فرد به خصوص (که به صورت دلخواه انتخاب می‌شود) بیان کرد. بدین منظور یکی از ۸ دانش‌آموز فوق، مثلاً دانش‌آموز $a_۱$ در یکی از هشت صندلی می‌نشیند و بقیهٔ ۷ دانش‌آموز دیگر، براساس وضعیت بالا در صندلی‌های دیگر خواهند نشست. تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر می‌شود با:

$$\underset{\text{دانش‌آموزان یازدهم}}{\underbrace{(۴-۱)!}}\times\underset{\text{دانش‌آموزان دوازدهم}}{\underbrace{۴!}}=۳!\times ۴!=۶\times ۲۴=۱۴۴$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۲

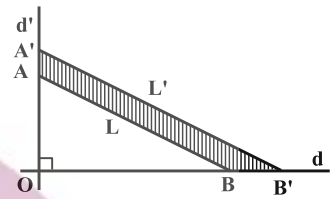
۳۱- **گزینهٔ «۳»** *(یاسین سپهر)*

تجانس شیب خط و اندازهٔ زاویه و جهت شکل را حفظ می‌کند ولی دو شکل متشابه الزاماً متجانس نیستند.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۳ تا ۴۸)

۳۲- **گزینهٔ «۲»** *(سینا محمدپور)*

اگر مساحت مثلث OAB برابر S باشد، مساحت مثلث $OA'B'$ برابر k^2S است. (دو شکل متجانس، همواره متشابه‌اند.)



$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA\times OB=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$S_{AA'B'B}=S_{OA'B'}-S_{OAB}=k^2S-S=\left(k^2-1\right)S$$

$$\xrightarrow[S=\frac{\sqrt{2}}{8}]{k=\sqrt{\sqrt{2}+1}} S_{AA'B'B}=\left(\sqrt{2}+1-1\right)\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{1}{4}$$

(هندسه ۲- مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۴۹)

۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(سهام مهیری‌پور)*

اگر O' مرکز دایرهٔ C' باشد، آن‌گاه نقاط O و O' دو طرف نقطهٔ A هستند و داریم:

$OO'=OA+O'A=OA+2OA=3OA$ ؛ طول خط‌المرکزین

$$\Rightarrow OO'=3\times4=12$$

$$R'=2R=2\times3=6$$

$$\sqrt{12^2-(3+6)^2}=\sqrt{144-81}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$$ = طول مماس مشترک داخلی

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۳۴- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمحمد کریمی)*

با فرض $OA'=x$ خواهیم داشت $AA'=2x$ و $OB=3x$، که در آن صورت $OA=OB=3x$ و لذا O وسط AB است.

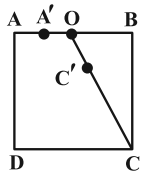
از طرفی در این تجانس، نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ است:

$$k=\frac{OA'}{OA}=\frac{1}{3}$$

بنابراین برای نقطهٔ C'، تصویر نقطهٔ C داریم:

$$OC'=\frac{OC}{3}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC داریم:



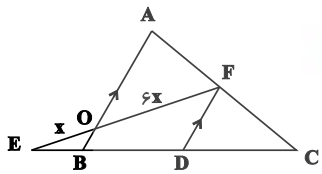
$$\hat{B}=90^\circ\ ,\ BC=\sqrt{5}\ ,\ OB=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow OC^2=OB^2+BC^2=\frac{5}{4}+5=\frac{25}{4}\Rightarrow OC=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow CC'=OC-OC'=\frac{5}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*



مطابق شکل از نقطهٔ F خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا BC را در نقطهٔ D قطع کند. اگر $OE=x$ باشد، آنگاه $OF=6x$ است و داریم:

$$\overset{\Delta}{EFD}:OB\parallel FD\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{EO}{EF}=\frac{OB}{FD}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{7x}=\frac{OB}{FD}\Rightarrow FD=7OB\qquad(1)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:FD\parallel AB\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{CF}{CA}=\frac{FD}{AB}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{FD}{AB}\Rightarrow AB=2FD\xrightarrow{(1)}AB=14OB$$

$$\Rightarrow OA+OB=14OB\Rightarrow OA=13OB$$

$$k=-\frac{OB}{OA}=-\frac{1}{13}\ \text{(نسبت تجانس)}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۳۶- **گزینهٔ «۲»** *(سرژ یقیازاریان‌تبریزی)*

موارد را بررسی می‌کنیم:

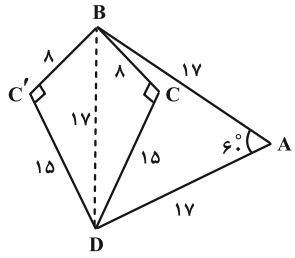
الف) نادرست؛ انتقال با بردار به طول ناصفر هیچ نقطهٔ ثابتی ندارد.

ب) درست؛ فرض کنید ۳ نقطهٔ غیرهم‌خط داریم که نقاط ثابت هستند، آن‌ها را A، B و C بنامید و نقطهٔ دلخواه دیگری را مثل P در نظر بگیرید که تصویر آن P' باشد، $\overset{\Delta}{PAB}\cong\overset{\Delta}{P'AB}$ است (چرا؟) پس یا $P\equiv P'$ یا این نقاط قرینه هم نسبت به AB هستند؛ حال چون $CP=CP'$ و C روی خط AB نیست، پس P و P' نمی‌توانند قرینهٔ هم نسبت به AB باشند و لذا $P\equiv P'$ است و باید تصویر هر نقطهٔ دلخواه بر خود آن نقطه منطبق شود یعنی تبدیل همانی است که قابل قبول نیست و لذا باید سه نقطهٔ ثابت A، B و C هم‌خط باشند.

پ) نادرست؛ تجانس با $k=1$ همانی است.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۳ تا ۴۸)

۳۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*



رأس C را نسبت به BD بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ C' حاصل شود. دقت کنید که مثلث ABD متساوی‌الاضلاع و مثلث $BC'D$ قائم‌الزاویه است، زیرا:

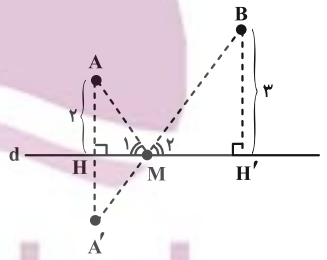
$$\begin{cases} AB = AD\ ,\ \hat{A} = ۶۰^\circ \Rightarrow AB = AD = BD = ۱۷ \\ BC'^۲ + C'D^۲ = ۸^۲ + ۱۵^۲ = ۱۷^۲ = BD^۲ \Rightarrow \hat{C}' = ۹۰^\circ \end{cases}$$

مساحت چهارضلعی $ABC'D$ از مساحت چهارضلعی $ABCD$ به اندازهٔ مساحت چهارضلعی $BCDC'$ بیشتر است و مساحت چهارضلعی $BCDC'$ دو برابر مساحت مثلث BCD است، پس:

$$S_{BCDC'} = ۲S_{BCD} = ۲\times\frac{۱}{۲}\times BC\times CD = ۸\times۱۵ = ۱۲۰$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

۳۸- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*



با توجه به مسئلهٔ هرون، ابتدا نقطهٔ A را نسبت به خط d بازتاب داده و نقطهٔ حاصل را A' می‌نامیم. محل تلاقی $A'B$ با خط d نقطهٔ M است؛ چراکه $MA+MB$ کم‌ترین مقدار ممکن را دارد. نقطهٔ M روی خط d به گونه‌ای قرار دارد که AM و BM با خط d زوایای مساوی می‌سازند $(\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲)$، بنابراین نقطهٔ M همان نقطهٔ N است و $AM = AN = ۴$ می‌باشد. حال ابتدا تشابه دو مثلث AMH و BMH' را اثبات نموده و سپس مطلوب مسئله را می‌یابیم:

$$\begin{cases} \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMH} \sim \overset{\Delta}{BMH'}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{AH}{BH'} \Rightarrow \frac{۴}{MB} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow MB = ۶$$

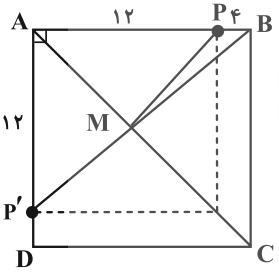
$$\Rightarrow MA + MB = ۴ + ۶ = ۱۰$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۵۲)

۳۹- **گزینهٔ «۳»** *(محمد خندان)*

$$S_{ABCD} = ۲۵۶ \Rightarrow AB^۲ = ۲۵۶ \Rightarrow AB = ۱۶$$
$$BP = ۴\ ,\ AB = ۱۶ \Rightarrow AP = ۱۲$$

اگر رأس دیگر مثلث را M فرض کنیم، برای یافتن نقطهٔ M به‌طوری که محیط مثلث PBM حداقل باشد، باید کم‌ترین مقدار $PM+BM$ را پیدا کنیم. (مقدار $PB=۴$ مشخص است.) برای این‌کار از روش هرون کمک می‌گیریم. نقطهٔ P را نسبت به AC بازتاب داده و P' می‌نامیم. نقطهٔ M محل برخورد $P'B$ با AC است.



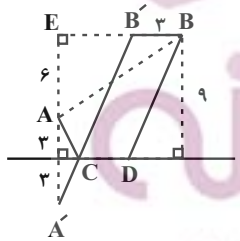
با توجه به شکل داریم:

$$PM + BM = P'M + BM = P'B$$
$$\overset{\Delta}{BAP'}: P'B^۲ = \underbrace{AP'^۲}_{۱۲} + \underbrace{AB^۲}_{۱۶} \Rightarrow P'B = ۲۰$$
$$\text{محیط مثلث } PBM = \underbrace{PM + BM}_{۲۰} + \underbrace{PB}_{۴} = ۲۴$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۵۲)

۴۰- **گزینهٔ «۳»** *(معصومه اکبری‌صمت)*

ابتدا نقطهٔ A را نسبت به رودخانه بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ A' به‌دست آید، سپس نقطهٔ B را به اندازهٔ ۳ کیلومتر (برابر طول CD) موازی با CD به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ B' حاصل شود.



چهارضلعی $B'BDC$ متوازی‌الاضلاع است، پس $B'C = BD$ است. طبق مسئلهٔ هرون برای پیداکردن کوتاه‌ترین مسیر بین A و B' داریم:

$$\overset{\Delta}{AEB}: BE^۲ = AB^۲ - AE^۲ = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow BE = ۸$$
$$B'E = BE - BB' = ۸ - ۳ = ۵$$
$$\overset{\Delta}{A'EB'}: A'B'^۲ = A'E^۲ + B'E^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲ = ۱۶۹$$
$$\Rightarrow A'B' = ۱۳$$
$$\Rightarrow A'C + CB' = ۱۳ \Rightarrow AC + BD = ۱۳$$
$$\text{طول کوتاه‌ترین جاده} = AC + CD + BD = ۱۳ + ۳ = ۱۶$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۵۳)

هندسه ۳

۴۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمحمد کریمی)*

طبق تعریف داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ ۶ & ۸\end{bmatrix}$$

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix}x+y & z\\ z-t & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ ۶ & ۸\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=۳\\ y=۸\end{cases}\Rightarrow x=-۵$$
$$\begin{cases}z-t=۶\\ z=۴\end{cases}\Rightarrow t=-۲$$
$$\Rightarrow x-y+t=-۵-۸-۲=-۱۵$$

(هندسه ۳- مشابه مثال صفحهٔ ۱۳)

۴۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمد قیدی)*

$$\begin{bmatrix}-۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۲\\ ۱ & -x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۶\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}-۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۲\\ ۱ & -x\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\ ۶\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-x+۲ & -۲-۲x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۶\end{bmatrix}=-x^۲+۲x-۱۲-۱۲x$$

$$=-x^۲-۱۰x-۱۲=۰\Rightarrow x^۲+۱۰x+۱۲=۰$$

اولاً توجه کنید که چون $\Delta=۱۰^۲-۴\times۱\times۱۲>۰$، پس معادلهٔ دو ریشهٔ حقیقی دارد.

ثانیاً می‌دانیم: $\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲=\alpha\beta(\alpha+\beta)$ و لذا داریم:

$$\alpha+\beta=S=-۱۰\quad\text{و}\quad\alpha\beta=P=۱۲$$

$$\Rightarrow\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲=۱۲\times(-۱۰)=-۱۲۰$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمحمد کریمی)*

داریم:

$$۲B=۲\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ ۴ & ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰ & -۴\\ ۸ & ۱۲\end{bmatrix}$$

$$A+۲B=\begin{bmatrix}۱۱ & -۴\\ ۸ & ۱۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۱۱ & -۴\\ ۸ & ۱۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱۰ & -۴\\ ۸ & ۱۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$A^۴=A^۲\times A^۲=I\times I=I$$

(هندسه ۳- مشابه تمرین ۵ صفحه ۲۰)

۴۴- **گزینهٔ «۱»** *(علی بهرمنش‌پور)*

$$A=\begin{bmatrix}۲x & x\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۶x-۵x}\begin{bmatrix}۳ & -x\\ -۵ & ۲x\end{bmatrix}$$

$$=\frac{۱}{x}\begin{bmatrix}۳ & -x\\ -۵ & ۲x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{x} & -۱\\ -\frac{۵}{x} & ۲\end{bmatrix}$$

$$۴A^{-۱}=B\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{۱۲}{x} & -۴\\ -\frac{۲۰}{x} & ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲y\\ -۵ & z\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱۲}{x}=۳\Rightarrow x=۴\\ ۲y=-۴\Rightarrow y=-۲\\ z=۸\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$x+y-z=۴-۲-۸=-۶$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴۵- **گزینهٔ «۳»** *(محمد خندان)*

با توجه به رابطهٔ $A^۲B=I$، ماتریس B وارون ماتریس $A^۲$ است، بنابراین داریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴ & ۲\\ -۸ & ۰\end{bmatrix}$$

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

$$\Rightarrow \left(A^{۲}\right)^{-۱}=\frac{۱}{-۴\times ۰-۲\times(-۸)}\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۸ & -۴\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۶}\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۸ & -۴\end{bmatrix}=B$$

مجموع درایه‌های ماتریس B $=\frac{۱}{۱۶}(۰-۲+۸-۴)=\frac{۲}{۱۶}=\frac{۱}{۸}$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴۶- **گزینهٔ «۴»** (علی ایمانی)

دستگاه $\begin{cases}ax+۳y=۲\\ ۳x+y=۵\end{cases}$ جواب ندارد، بنابراین $\frac{a}{۳}=\frac{۳}{۱}\neq\frac{۲}{۵}$، در نتیجه $a=۹$ است.

با جایگذاری در دستگاه معادلات خطی دوم خواهیم داشت:

$$\begin{cases}۳x-ay=-۲a-۳\\ -x+۳y=۷\end{cases}\xrightarrow{a=۹}\begin{cases}۳x-۹y=-۲۱\\ -x+۳y=۷\end{cases}\Rightarrow\frac{۳}{-۱}=\frac{-۹}{۳}=-\frac{۲۱}{۷}$$

پس این دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴۷- **گزینهٔ «۲»** (سهام میری‌پور)

$$\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳c+۲\\ -c+۴\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x+y=۳c+۲-c+۴=۲c+۶=۱۲\Rightarrow ۲c=۶\Rightarrow c=۳$$

بنابراین داریم: $x=۳c+۲=۹+۲=۱۱$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۴۸- **گزینهٔ «۱»** (امیرمحمد کریمی)

کافی است دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد، یعنی:

$$\begin{vmatrix}a+۳ & ۲\\ a+۱ & a\end{vmatrix}=a^{۲}+۳a-۲a-۲=a^{۲}+a-۲=۰$$

$$\Rightarrow(a+۲)(a-۱)=۰\Rightarrow a=-۲\ \text{یا}\ a=۱$$

(هندسه ۳- مرتبط با کاردرکلاس صفحه ۲۶)

۴۹- **گزینهٔ «۳»** (کیوان دارابی)

$$\begin{bmatrix}a & ۲\\ ۳ & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۱\\ ۱۳\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & ۲\\ ۳ & b\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۲۱\\ ۱۳\end{bmatrix}$$

$$=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}b & -۲\\ -۳ & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲۱\\ ۱۳\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲۱b+۲۶\\ ۶۳-۱۳a\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$x=-۲۱b+۲۶\Rightarrow x+۲۱b=۲۶$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۵۰- **گزینهٔ «۴»** (سراسری ریاضی - ۹۲)

با فرض $B=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$، معادلهٔ مفروض سؤال به‌صورت $BAC=D$ خواهد بود. برای یافتن ماتریس A، طرفین این معادله را از راست در $C^{-۱}$ و از چپ در $B^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow(B^{-۱}B)A(CC^{-۱})=B^{-۱}DC^{-۱}\Rightarrow IAI=B^{-۱}DC^{-۱}$$

$$\xrightarrow{IA=AI=A}A=B^{-۱}DC^{-۱}$$

$$C=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow C^{-۱}=\frac{۱}{۵-۶}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & -۵\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۴-۶}\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & -۵\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-۳ & ۳\\ \dots & \dots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & -۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲ & -۲۱\\ \dots & \dots\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

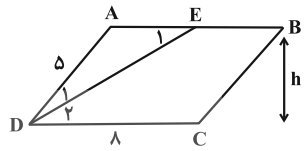
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۱

۵۱- **گزینهٔ «۳»** *(امیرمحمد کریمی)*

DE نیمساز زاویهٔ ADC است، پس $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$؛ از طرفی:

$$AB \parallel CD, DE \text{ مورب} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{D}_2 = \hat{D}_1$$



$$\xrightarrow{\Delta ADE \text{ متساوی‌الساقین}} AE = AD = ۵ \Rightarrow BE = ۳$$

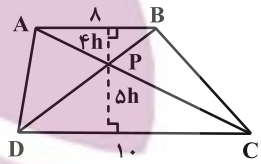
بنابراین داریم:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{BCDE}} = \frac{۸h}{\frac{۱}{۲}\underbrace{(BE+CD)}_{۱۱}h} = \frac{۱۶}{۱۱}$$

(هندسه ۱- صفحهٔ ۶۵)

۵۲- **گزینهٔ «۴»** *(اغشین خاصه‌خان)*

با توجه به فرض، مساحت دو مثلث ADP و BCP برابر یکدیگر و مساوی ۴۰ است.



همچنین دو مثلث ABP و PDC به نسبت $\frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$ با هم متشابه‌اند، بنابراین ارتفاع‌های آن‌ها نیز به همان نسبت، متناسب خواهند بود. حال مساحت ذوزنقه را به دو صورت می‌توان نوشت که از برابری آن‌ها داریم:

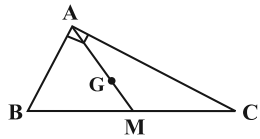
$$\frac{(۱۰+۸)\times ۹h}{۲} = ۲\times ۴۰ + \frac{۸\times ۴h}{۲} + \frac{۱۰\times ۵h}{۲} \Rightarrow ۸۱h = ۸۰ + ۴۱h$$

$$\Rightarrow h = ۲ \Rightarrow \text{ارتفاع ذوزنقه} = ۹h = ۱۸$$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۵۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

در هر مثلث میانه‌ها یکدیگر را با نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند؛ با توجه به شکل داریم:



$$\Delta ABC : AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \xrightarrow[AC=۱۲]{AB=۵} BC = ۱۳$$

در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است: $AM = \frac{BC}{۲} = \frac{۱۳}{۲}$

با توجه به این‌که میانه‌ها در هر مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، داریم:

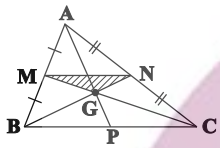
$$AG = ۲GM \Rightarrow \frac{GM}{AG} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{GM}{AM} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow GM = \frac{۱}{۳}AM = \frac{۱}{۳}\times\frac{۱۳}{۲} = \frac{۱۳}{۶}$$

(هندسه ۱- صفحهٔ ۶۷)

۵۴- **گزینهٔ «۴»** *(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۹)*

اگر نقطهٔ تلاقی میانه‌های AP، BN و CM از مثلث ABC را G (مرکز ثقل) در نظر بگیریم و از G به سه رأس مثلث وصل کنیم، آن‌گاه سه مثلث پدیدآمده مساحت یکسانی خواهند داشت، یعنی:



$$S\left(\overset{\Delta}{AGB}\right) = S\left(\overset{\Delta}{BGC}\right) = S\left(\overset{\Delta}{AGC}\right) = \frac{۱}{۳}S\left(\overset{\Delta}{ABC}\right) \qquad (*)$$

M و N به ترتیب وسط‌های AB و AC هستند. می‌دانیم که اگر وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل، موازی ضلع سوم و طول آن نیز نصف طول ضلع سوم مثلث خواهد بود، لذا $MN \parallel BC$ و $MN = \frac{۱}{۲}BC$، پس دو مثلث MGN و BGC با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $k = \frac{MN}{BC} = \frac{۱}{۲}$، در نتیجه:

$$\frac{S_{MGN}}{S_{BGC}} = k^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{MGN} = \frac{۱}{۴}S_{BGC} \overset{(*)}{=} \frac{۱}{۱۲}S_{ABC}$$

پس مساحت مثلث ABC (بزرگ‌ترین مثلث در شکل)، ۱۲ برابر مساحت مثلث MGN است.

(هندسه ۱- صفحهٔ ۶۷)

۵۵- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با توجه به اینکه نقطهٔ G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC است، پس AA' میانهٔ وارد بر ضلع BC است و داریم:

$$\frac{S_{ABA'}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

میانه‌ها در یک مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، یعنی $AG = \frac{۲}{۳}AA'$ است و در نتیجه داریم:

ایران‌زنده توسعه‌ای برای موفقیت

$$\overset{\Delta}{ABA'}: MG \parallel BA' \xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{AMG} \sim \overset{\Delta}{ABA'}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMG}}{S_{ABA'}} = \left(\frac{AG}{AA'}\right)^{۲} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} = \frac{۴}{۹} \quad (۲)$$

دو مثلث APG و AMG در ارتفاع رسم شده از رأس A مشترک‌اند، پس داریم:

$$\frac{S_{APG}}{S_{AMG}} = \frac{GP}{MG} = \frac{۳}{۴} \quad (۳)$$

$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow \frac{S_{ABA'}}{S_{ABC}} \times \frac{S_{AMG}}{S_{ABA'}} \times \frac{S_{APG}}{S_{AMG}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۹} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۶}$$

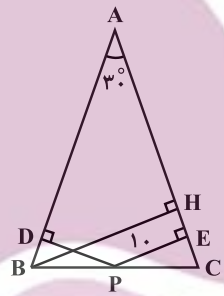
$$\Rightarrow \frac{S_{APG}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۶}$$

(هندسه ۱- مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۷۳)

۵۶- **گزینهٔ «۱»** *(سیما شوکندی)*

از رأس B بر AC عمود می‌کنیم. مثلث ABH یک مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویهٔ حادهٔ ۳۰° است، پس:

$$BH = \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲} \times ۳۰ = ۱۵$$



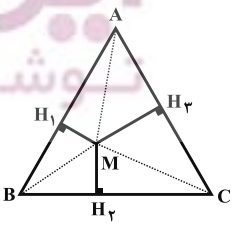
می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه‌ای واقع بر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است، پس داریم:

$$PD + ۱۰ = ۱۵ \Rightarrow PD = ۵$$

(هندسه ۱- صفحهٔ ۶۸)

۵۷- **گزینهٔ «۳»** *(نصیر مصبی‌نژاد)*

$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} = ۲۷\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = ۹$$



مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، برابر طول ارتفاع مثلث است، پس در صورتی که $MH_۱ + MH_۲ = ۲$ باشد، آنگاه داریم:

$$\underbrace{MH_۱ + MH_۲}_{۲} + MH_۳ = ۹ \Rightarrow MH_۳ = ۹ - ۲ = ۷$$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه خاکپاش)*

طبق فرمول پیک برای مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای داریم:

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = ۷ \Rightarrow \frac{b}{۲} + i = ۸$$

مجموع تعداد نقاط مرزی و درونی در صورتی حداکثر خواهد بود که b بیش‌ترین و i کم‌ترین مقدار ممکن را دارا باشند. با توجه به اینکه کم‌ترین مقدار i برابر صفر است، داریم:

$$i = ۰ \Rightarrow \frac{b}{۲} = ۸ \Rightarrow b = ۱۶ \Rightarrow \max(b+i) = ۱۶$$

از طرفی در صورتی مجموع تعداد نقاط مرزی و درونی حداقل خواهد بود که b کم‌ترین و i بیش‌ترین مقدار ممکن را دارا باشند. کم‌ترین مقدار b برابر ۳ است، ولی چون i همواره عددی حسابی است، پس b باید زوج باشد و در نتیجه داریم:

$$b = ۴ \Rightarrow \frac{۴}{۲} + i = ۸ \Rightarrow i = ۶ \Rightarrow \min(b+i) = ۱۰$$

$$\max(b+i) + \min(b+i) = ۱۶ + ۱۰ = ۲۶$$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۵۹- **گزینهٔ «۲»** *(محمدطاهر شعاعی)*

اگر مساحت چندضلعی بزرگ‌تر را با S و مساحت چندضلعی کوچک‌تر را با S' نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۱۴}{۲} + ۱۲ - ۱ = ۱۸$$

$$S' = \frac{b'}{۲} + i' - ۱ = \frac{۸}{۲} + ۱ - ۱ = ۴$$

$$S - S' = ۱۸ - ۴ = ۱۴ \Rightarrow \frac{S - S'}{S} = \frac{۱۴}{۱۸} = \frac{۷}{۹}$$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۶۰- **گزینهٔ «۱»** *(محمد خندان)*

در هر کایت قطرها بر هم عمود هستند و در هر چهارضلعی که قطرها بر هم عمود باشند، اندازهٔ مساحت برابر نصف حاصل‌ضرب طول دو قطر است. پس مساحت کایت $ABCD$ برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}AC \times BD = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۷ = ۲۱$$

حال طبق رابطهٔ پیک اگر تعداد نقاط شبکه‌ای واقع در درون یک چندضلعی شبکه‌ای (نقاط درونی) برابر i و تعداد نقاط شبکه‌ای واقع بر روی محیط چندضلعی (نقاط مرزی) برابر b باشد، اندازهٔ مساحت برابر است با:

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ \Rightarrow ۲۱ = \frac{b}{۲} + i - ۱ \xrightarrow{i=۱۸} \frac{b}{۲} = ۴ \Rightarrow b = ۸$$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۶۵، ۶۶ و ۶۹ تا ۷۲)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

آمار و احتمال

۶۱- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

چون داده‌های جدید به دستهٔ آخر ربطی ندارند (دستهٔ آخر بعد از میانه است)، پس فراوانی دستهٔ آخر تغییر نمی‌کند.

$$\text{فراوانی نسبی دستهٔ پنجم} = \frac{f_5}{n_1} = ۰/۲ \Rightarrow \frac{f_5}{۵۰} = ۰/۲ \Rightarrow f_5 = ۱۰$$

حال فراوانی نسبی دستهٔ آخر در داده‌های جدید برابر است با:

$$\frac{f_5}{n_1 + ۳۰} = \frac{۱۰}{۵۰+۳۰} = \frac{۱۰}{۸۰} = ۰/۱۲۵$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۸، ۸۲ و ۸۳)

۶۲- **گزینهٔ «۲»** *(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)*

می‌دانیم که همیشه مجموع درصد داده‌ها برابر ۱۰۰ است. پس:

$$۱۷ + ۲۰/۵ + ۲۲ + x + ۱۸ = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱۰۰ - ۷۷/۵ = ۲۲/۵$$

$$\theta_۴ = \text{فراوانی دستهٔ چهارم} \times ۳۶۰^\circ = \frac{۲۲/۵}{۱۰۰} \times ۳۶۰^\circ = ۸۱^\circ$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۸)

۶۳- **گزینهٔ «۲»** *(حسین قزایی)*

$$\frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n} = \bar{x} \Rightarrow \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۴۰n$$

$$\frac{\sum_{i=۱}^{n} x'_i}{n} = \frac{(x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n) + (۱ + ۲ + \ldots + n)}{n}$$

$$= \frac{۴۰n + \frac{n(n+۱)}{۲}}{n} \Rightarrow ۴۰ + \frac{n+۱}{۲} = ۹۰ \Rightarrow \frac{n+۱}{۲} = ۵۰ \Rightarrow n = ۹۹$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۶۴- **گزینهٔ «۱»** *(بهزاد هاتمی)*

واریانس تعدادی داده، زمانی برابر صفر است که داده‌ها برابر هم باشند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x + ۱ = ۵ \Rightarrow x = ۴ \\ y + ۳ = ۵ \Rightarrow y = ۲ \end{cases}$$

اضافه کردن یک مقدار ثابت به تمام داده‌ها و یا کم کردن یک مقدار ثابت از تمام داده‌ها، واریانس آن‌ها را تغییر نمی‌دهد، بنابراین برای محاسبهٔ واریانس داده‌های ۵،۵،۴،۲، می‌توانیم ابتدا ۵ واحد از همهٔ آن‌ها کم کنیم. در این صورت داریم:

داده‌ها: ۰،۰،-۱،-۳ $\Rightarrow \bar{x} = -۱$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} = \frac{(۱)^۲ + (۱)^۲ + (۰)^۲ + (-۲)^۲}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۷ و ۸۸)

۶۵- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$\text{واریانس اولیه} = \frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + (x_۲ - \bar{x})^۲ + \ldots + (x_{۱۶} - \bar{x})^۲}{۱۶} = ۳$$

$$\Rightarrow (x_۱ - \bar{x})^۲ + (x_۲ - \bar{x})^۲ + \ldots + (x_{۱۶} - \bar{x})^۲ = ۴۸$$

با کم کردن داده‌ای برابر با میانگین از ۱۶ دادهٔ اولیه، میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند.

$$\text{واریانس جدید} = \frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + (x_۲ - \bar{x})^۲ + \ldots + (x_{۱۶} - \bar{x})^۲ - (\bar{x} - \bar{x})^۲}{۱۵}$$

$$= \frac{۴۸ - ۰}{۱۵} = \frac{۱۶}{۵} \Rightarrow \frac{\frac{۱۶}{۵}}{۳} = \frac{۱۶}{۱۵}$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۷ و ۸۸)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۶۶- **گزینهٔ «۴»** *(مرتضی فهیم‌علوی)*

میانگین داده‌های ۴، ۵ و ۱۲، برابر ۷ است، پس با حذف این ۳ داده، میانگین ۱۰ دادهٔ باقی‌مانده تغییر نکرده و برابر ۷ خواهد بود. واریانس ۱۳ دادهٔ اولیه برابر ۹ است، پس داریم:

$$۹=\frac{\sum_{i=۱}^{۱۳}(x_i-۷)^۲}{۱۳}\Rightarrow\sum_{i=۱}^{۱۳}(x_i-۷)^۲=۱۱۷$$

$$\Rightarrow\sum_{i=۱}^{۱۰}(x_i-۷)^۲+(۴-۷)^۲+(۱۲-۷)^۲+(۵-۷)^۲=۱۱۷$$

$$\Rightarrow\sum_{i=۱}^{۱۰}(x_i-۷)^۲=۷۹$$

در نتیجه واریانس داده‌های باقی‌مانده برابر است با:

$$\sigma^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{۱۰}(x_i-۷)^۲}{۱۰}=\frac{۷۹}{۱۰}=۷/۹$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۷ و ۸۸)

۶۷- **گزینهٔ «۴»** *(نیلوفر مهروی)*

با توجه به داده‌های سؤال داریم:

$$\bar{x}=\frac{۲۲۱}{۱۳}=۱۷$$

$$\sigma^۲=۶۴\Rightarrow\sigma=۸$$

$$\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۸}{۱۷}$$ ضریب تغییرات

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۹۰ و ۹۱)

۶۸- **گزینهٔ «۳»** *(رضا بهشنده)*

میانگین گروه جدید نیز مانند گروه اول برابر ۵ است و از طرفی مجموع مجذورهای «انحراف از میانگین‌ها» در هر دو گروه برابرند که اگر آن را با S نشان دهیم، آنگاه واریانس‌ها برابر می‌شوند با:

$$\begin{cases}\sigma_۱^۲=\frac{S}{۸}\\ \sigma_۲^۲=\frac{S}{۱۰}\end{cases}\Rightarrow\frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱^۲}=\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\frac{\sigma_۲}{\sigma_۱}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

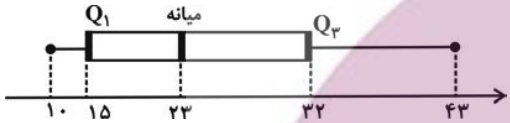
$$\frac{CV_۲}{CV_۱}=\frac{\frac{\sigma_۲}{\bar{x}}}{\frac{\sigma_۱}{\bar{x}}}=\frac{\sigma_۲}{\sigma_۱}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

۶۹- **گزینهٔ «۳»** *(هنریک سرکیسیان)*

ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم تا میانه و چارک‌ها مشخص شوند.

$$\underset{Q_۱}{۱۰,۱۲,۱۴,\underline{۱۵}},۱۶,۱۸,۱۹,\underset{Q_۲}{\underline{۲۳}},۲۵,۲۷,۳۱,\underset{Q_۳}{\underline{۳۲}},۳۴,۴۱,۴۳$$



بنابراین در نمودار جعبه‌ای نسبت طول دو بخش موردنظر برابر است با:

$$\frac{۳۲-۲۳}{۲۳-۱۵}=\frac{۹}{۸}$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۹۱ و ۹۲)

۷۰- **گزینهٔ «۱»** *(فرزانه خاکپاش)*

در میان ۹ دادهٔ آماری، دادهٔ پنجم، میانهٔ داده‌ها است و داریم:

$$\text{چارک اول}=Q_۱=\frac{x_۲+x_۳}{۲}\qquad \text{چارک سوم}=Q_۳=\frac{x_۷+x_۸}{۲}$$

$$x_۱,x_۲,\boxed{x_۳,x_۴,x_۵,x_۶,x_۷},x_۸,x_۹$$

بنابراین مطابق شکل، دو داده در سمت چپ جعبه، پنج داده در درون جعبه و دو داده در سمت راست جعبه قرار می‌گیرند. اگر میانگین داده‌های داخل جعبه را با $\bar{x}$ نمایش دهیم، آن‌گاه طبق رابطهٔ میانگین موزون داده‌ها داریم:

$$۱۰=\frac{۲\times۶+۵\bar{x}+۲\times۱۶}{۲+۵+۲}\Rightarrow۱۲+۵\bar{x}+۳۲=۹۰$$

$$\Rightarrow۵\bar{x}=۴۶\Rightarrow\bar{x}=۹/۲$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۱، ۹۱ و ۹۲)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضیات گسسته

۷۱- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

گزینهٔ «۱»: اگر n مضرب ۴ باشد، آنگاه n^2 حتماً مضرب ۸ است. حال اگر n^2 مضرب ۸ باشد دراین‌صورت n نمی‌تواند مضرب ۴ نباشد، زیرا در غیر این صورت n^2 حداکثر مضرب ۴ خواهد شد که بر ۸ بخش‌پذیر نیست! لذا p و q هم‌ارزند.

گزینهٔ «۲»: اگر $n+3$ فرد باشد، آنگاه n زوج است و $6n^2$ نیز زوج می‌باشد ولی عکس آن برقرار نیست، زیرا $6n^2$ همواره زوج است و نمی‌توان زوج یا فرد بودن n ودر نتیجه $n+3$ را تعیین کرد.

گزینهٔ «۳»: $2n+3$ همیشه عددی فرد است و نمی‌توان تعیین کرد که n و در نتیجه n^2 از نظر زوج و فرد بودن چگونه است.

گزینهٔ «۴»: اگر n^2+2 زوج باشد n^2 زوج است که در نتیجه n زوج است پس $3n+1$ فرد است. در حقیقت p و $q\sim$ هم‌ارزند.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۶ تا ۸)

۷۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمد صحت‌کار)*

فرض کنید $d=(6m-3,4m+6)$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$(18m-9\ ,\ 12m+18)=3(6m-3,4m+6)=3d$$

$$\left.\begin{array}{l} d\mid 6m-3 \xrightarrow{\times 2} d\mid 12m-6 \\ d\mid 4m+6 \xrightarrow{\times 3} d\mid 12m+18 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid 24$$

ازطرفی $6m-3$ عددی فرد است، پس d نمی‌تواند زوج باشد، یعنی $d=1$ یا $d=3$ است (می‌توان نشان داد به ازای برخی مقادیر m، $d=1$ و برای سایر مقادیر $d=3$ است). در نتیجه داریم:

$$(12m-6,8m+12)=3 \quad \text{یا} \quad 9$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمحمد کریمی)*

راه‌حل اول:

می‌دانیم: $2(ab+a+b)=(a+b+1)^2-a^2-b^2-1$

و چون a و b فردند پس $a+b+1$ نیز فرد است و از آنجا که باقی‌ماندهٔ تقسیم مجذور هر عدد فرد بر ۸ برابر یک است، داریم:

$$(a+b+1)^2-a^2-b^2-1\overset{8}{\equiv}1-1-1-1\overset{8}{\equiv}-2\overset{8}{\equiv}6$$

راه‌حل دوم:

داریم: $A=2(ab+a+b)=2(\underbrace{ab+a+b+1}_{(a+1)(b+1)})-2$

چون a و b اعدادی فرد هستند، پس $a=2a'+1$ و $b=2b'+1$ و داریم:

$$A=2(2a'+2)(2b'+2)-2=8(a'+1)(b'+1)-2$$

پس $A=8k-2$ بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۸ برابر ۶ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- مشابه تمرین ۱۰ صفحه ۱۶)

۷۴- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمحمد کریمی)*

$$1000\overset{7}{\equiv}-1\Rightarrow 1000^{13}\overset{7}{\equiv}(-1)^{13}\overset{7}{\equiv}-1$$

$$6\overset{7}{\equiv}-1\Rightarrow 6^8\overset{7}{\equiv}(-1)^8\overset{7}{\equiv}1$$

$$\Rightarrow 1000^{13}+11\times 6^8+2\overset{7}{\equiv}-1+11\times 1+2\overset{7}{\equiv}12\overset{7}{\equiv}5$$

(ریاضیات گسسته- مشابه مثال صفحهٔ ۲۱)

۷۵- **گزینهٔ «۴»** *(منوچهر خاصی)*

طبق ویژگی «۶» هم‌نهشتی، اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$ و $(m,c)=1$، آنگاه $a\overset{m}{\equiv}b$ است.

بنابراین داریم:

$$a^3+1\overset{m}{\equiv}a^2-a+1\Rightarrow (a+1)(a^2-a+1)\overset{m}{\equiv}a^2-a+1$$

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

$$\xrightarrow[(a^2-a+1,m)=1]{+(a^2-a+1)} a+1\overset{m}{\equiv}1 \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}0$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۷۶- **گزینهٔ «۱»** *(هومن نورائی)*

معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)\mid b$، داریم:

گزینهٔ «۱»: $۱۰ \nmid ۶ \Rightarrow (۴۸,۶)=۶$

گزینهٔ «۲»: $۱۲\mid ۲ \Rightarrow (۴,۶)=۲$

گزینهٔ «۳»: $۷۵\mid ۳ \Rightarrow (۳,۹)=۳$

گزینهٔ «۴»: $۷۲\mid ۶ \Rightarrow (۱۲,۱۸)=۶$

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۲۵)

۷۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا محاسبه می‌کنیم که روز اول مهر در این سال چه روزی از هفته است. برای این کار، فاصلهٔ اول فروردین تا اول مهر را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$۱۸۶=\underbrace{۱}_{\text{مهر}}+\underbrace{۵\times ۳۱}_{\text{اردیبهشت تا شهریور}}+\underbrace{۳۰}_{\text{فروردین}}$$

$$۱۸۶=۷\times ۲۶+۴\overset{۷}{\equiv}۴$$

بنابراین اگر روز یکشنبه معادل صفر فرض شود، روز اول مهر، ۴ روز بعد از آن در هفته، یعنی روز پنجشنبه است. در این صورت دوم مهر، اولین جمعه و در نتیجه ۱۶ مهر سومین جمعهٔ این ماه است.

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۲۴)

۷۸- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمصطفی سیدحسینی)*

عدد پنج رقمی داده شده هم مضرب ۹ است و هم مضرب ۱۱، پس:

$$\overline{۴yx۰۲}\overset{۹}{\equiv}۰ \Rightarrow ۴+y+x+۰+۲\overset{۹}{\equiv}۰ \Rightarrow ۶+x+y\overset{۹}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow x+y\overset{۹}{\equiv}۳ \Rightarrow y+x=۳ \text{ یا } ۱۲$$

$$\overline{۴yx۰۲}\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow (۲+x+۴)-(۰+y)\overset{۱۱}{\equiv}۰$$

$$۶+x-y\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow x-y\overset{۱۱}{\equiv}۵ \Rightarrow x-y=-۶ \text{ یا } ۵$$

$$\left.\begin{matrix}x+y=۱۲\\ x-y=-۶\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=۳, y=۹ \Rightarrow ۲x+y=۱۵$$

از سه دستگاه معادلات ممکن دیگر برای این سؤال، مقادیر x و y، اعدادی منفی و یا کسری به دست می‌آید که امکان پذیر نیست.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

۷۹- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمحمد کریمی)*

$$۴n-۳\overset{۱۳}{\equiv}۱۱ \Rightarrow ۴n\overset{۱۳}{\equiv}۱۴ \Rightarrow ۲n\overset{۱۳}{\equiv}۷ \Rightarrow ۲n\overset{۱۳}{\equiv}-۶$$

$$\Rightarrow n\overset{۱۳}{\equiv}-۳ \Rightarrow n\overset{۱۳}{\equiv}۱۰$$

پس $n=۱۳k+۱۰$ است و به ازای $k=۶$ بزرگ‌ترین عدد دو رقمی برای n به دست می‌آید:

$$\Rightarrow \max(n)=۸۸ \Rightarrow \text{جمع ارقام}=۸+۸=۱۶$$

(ریاضیات گسسته- مشابه مثال صفحهٔ ۲۵)

۸۰- **گزینهٔ «۳»** *(هومن نورائی)*

$$x^2-۴x+۳\overset{۴}{\equiv}۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۳)\overset{۴}{\equiv}۰$$

اعداد $(x-۱)$ و $(x-۳)$ با هم ۲ واحد اختلاف دارند، یعنی هر دو زوج یا هر دو فرد هستند. از آنجا که حاصل‌ضربشان مضرب ۴ است، پس باید هر دو زوج باشند، یعنی x عددی فرد است. در گزینه‌های ۱، ۲ و ۴، جواب‌ها اعدادی فرد و قابل قبول هستند ولی در گزینهٔ ۳، عبارت $۴k+۲$ عددی زوج است که قطعاً در معادلهٔ فوق صدق نمی‌کند.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۲

۸۱- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

چون خط‌های میدان مغناطیسی به قطب‌های A و B وارد شده‌اند، هر دو قطب A و B، قطب S آهنربا می‌باشند. از طرف دیگر، چون تراکم خطوط میدان اطراف آهنربای (۲) بیشتر است لذا میدان اطراف این آهنربا قوی‌تر است و در نتیجه آهنربای (۱) ضعیف‌تر است.

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۸)

۸۲- **گزینهٔ «۱»** *(سعید طاهری‌بروجنی)*

با استفاده از معادلهٔ اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر بار متحرک داریم:

$$F = |q| vB\sin\theta$$

پس این نیرو باید توسط نیروی الکتریکی خنثی شود. در نتیجه باید با توجه به این‌که بار روی خط مستقیم حرکتش را ادامه می‌دهد، اندازه‌اش با اندازهٔ نیروی الکتریکی برابر بوده ولی در جهت مخالف آن باشد. پس داریم:

$$F = |q| vB\sin\theta = |q| E \xrightarrow{\sin\theta=1} B = \frac{E}{v} = \frac{۱۸۰}{۳۰۰} = ۰/۶T$$

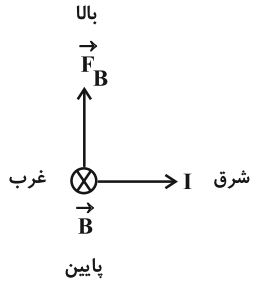
جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره درون‌سو است، پس جهت نیروی مغناطیسی باید برون‌سو باشد و با استفاده از قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی باید در جهت پایین باشد.

دقت کنید چون حداقل بزرگی میدان مغناطیسی سؤال شده بنابراین: $\sin\theta = ۱$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۹ و ۹۰)

۸۳- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی خدارحمی)*

با توجه به جهت میدان مغناطیسی زمین که در جهت شمال جغرافیایی (درون‌سو) است و با استفاده از قاعدهٔ دست راست داریم:

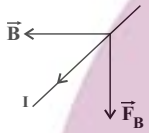


جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم به سمت بالا است.

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۴)

۸۴- **گزینهٔ «۴»** *(مهدی اسدی)*

با بستن کلید، طبق قاعدهٔ دست راست، آهنربا نیروی $\vec{F}_B$ را به سمت پایین به سیم حامل جریان وارد می‌کند.



بنابراین طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی به اندازهٔ $\vec{F}_B$ و رو به بالا، از طرف سیم حامل جریان بر آهنربا وارد می‌شود. در نتیجه قطعاً ترازو عدد کمتری را نشان می‌دهد و داریم:

$$F_B = I\ell B\sin\theta = ۲۰\times۱۰\times۱۰^{-۲}\times۰/۵\times\sin۹۰^\circ \Rightarrow F_B = ۱N$$

بنابراین عددی که ترازو نشان می‌دهد، برابر است با:

عددی که ترازو نشان می‌دهد $= ۱۲-۱ = ۱۱N$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۴)

۸۵- **گزینهٔ «۲»** *(رامین شادلویی)*

ابتدا تعداد دورهای پیچهٔ جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$N = \frac{L}{۲\pi R} \xrightarrow{L_۱=L_۲} \frac{N_۲}{N_۱} = \frac{R_۱}{R_۲} \Rightarrow \frac{N_۲}{۵۰۰} = \frac{R_۱}{\frac{R_۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow N_۲ = ۱۰۰۰ \text{ دور}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

با استفاده از رابطهٔ میدان مغناطیسی پیچه داریم:

$$B=\frac{\mu_{\circ}NI}{2R}\Rightarrow\frac{B_2}{B_1}=\frac{N_2}{N_1}\times(\frac{R_1}{R_2})=\frac{1000}{500}\times(\frac{R_1}{\frac{R_1}{2}})=4$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹)

۸۶- **گزینهٔ «۴»** (سعید اردم)

با توجه به متن کتاب درسی، هر سه مورد صحیح است.

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۱)

۸۷- **گزینهٔ «۲»** (پوریا علاقه‌منر)

طبق رابطهٔ اندازهٔ میدان مغناطیسی در سیملوله داریم:

$$B=\frac{\mu_{\circ}NI}{\ell}\Rightarrow\frac{B}{I}=\frac{\mu_{\circ}N}{\ell}$$

$$\frac{B}{I}=\frac{\Delta B}{\Delta I}=\frac{1\times10^{-4}}{2}=\frac{1}{2}\times10^{-4}\ (\text{SI واحد})$$

$$\Rightarrow\frac{\mu_{\circ}N}{\ell}=\frac{1}{2}\times10^{-4}\Rightarrow\frac{4\pi\times10^{-7}\times N}{2}=\frac{1}{2}\times10^{-4}\Rightarrow N=\frac{250}{\pi}$$

$$\Rightarrow L=N(2\pi R)=\frac{250}{\pi}\times2\pi\times\frac{5}{100}=25\,m$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۹ و ۱۰۰)

۸۸- **گزینهٔ «۴»** (پوریا علاقه‌منر)

مواد فرومغناطیسی سخت مناسب استفاده در آهنرباهای الکتریکی نیستند.

آلیاژهای نیکل از جملهٔ این مواد هستند.

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۱۰۲ و ۱۰۳)

۸۹- **گزینهٔ «۳»** (محمدحسین جوان)

در اتصال به B، فقط سیم‌های سمت چپ لغزنده در مدار قرار دارند (3N) و در اتصال به C، کل سیم در مدار قرار دارد (4N). بنابراین طول مقاومت رئوستا افزایش یافته و در نتیجه جریان عبوری از سیملوله کاهش می‌یابد.

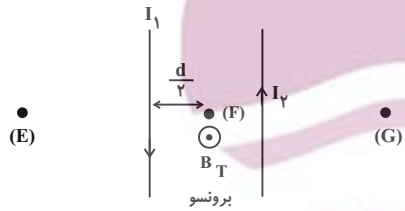
$$B=\mu_{\circ}\frac{N}{\ell}I\xrightarrow{\text{ثابت }\ell\,,\,N}$$

$$\frac{B_2}{B_1}=\frac{I_2}{I_1}\xrightarrow[\text{ثابت }V]{I=\frac{V}{R}}\frac{B_2}{B_1}=\frac{R_1}{R_2}\xrightarrow[\text{ثابت}\rho\,,A]{R=\frac{\rho\ell}{A}}$$

$$\frac{B_2}{B_1}=\frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{3N}{4N}=\frac{3}{4}$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۱)

۹۰- **گزینهٔ «۱»** (محمدعلی راست‌پیمان)



در نقطهٔ (F)، $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ هر دو برون‌سو بوده، بنابراین میدان مغناطیسی برایند برون‌سو است.

در نقطهٔ (G)، $\vec{B}_2$ درون‌سو و $\vec{B}_1$ برون‌سو است. از آنجایی که $|\vec{B}_2|>|\vec{B}_1|$، بنابراین $\vec{B}_G$ درون‌سو است.

در نقطهٔ (E)، $\vec{B}_1$ درون‌سو و $\vec{B}_2$ برون‌سو است. از آنجایی که $|\vec{B}_1|>|\vec{B}_2|$ است، بنابراین $\vec{B}_E$ نیز درون‌سو است.

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۳

۹۱- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

موارد الف، ب و ت نادرست‌اند.

بررسی موارد:

الف) نادرست: فقط در لحظهٔ t_1 جهت بردار مکان عوض می‌شود.

ب) نادرست: در لحظه‌های t_2 و t_3 جهت حرکت عوض می‌شود.

پ) درست: شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر با سرعت متحرک است. در لحظهٔ t_3 شیب مماس برابر صفر است، پس $v_3 = 0$ و در لحظهٔ t_1 شیب مثبت است، پس $v_1 > 0$. برای محاسبهٔ شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{v_3 - v_1}{\Delta t} = \frac{0 - v_1}{\Delta t} < 0$$

ت) نادرست: در لحظهٔ صفر، $x_0 < 0$ و در لحظهٔ t_2، $x_2 > 0$ است.

بنابراین برای محاسبهٔ سرعت متوسط داریم: $v_{av} = \frac{x_2 - x_0}{\Delta t} \neq 0$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۳)

۹۲- **گزینهٔ «۲»** *(بهنام رستمی)*

در حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2}\Delta t \Rightarrow 50 = \frac{0 + v_0}{2} \times 10$$

$$\Rightarrow v_0 = 10\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

(مکمل مثال ۱-۱۱ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۹۳- **گزینهٔ «۲»** *(پوریا علاقه‌مند)*

برای محاسبهٔ جابه‌جایی متحرک در ۴s اول حرکت، داریم:

$$x = 2t^2 - 8t + 10 \xrightarrow{\Delta x = x - x_0} \Delta x = 2t^2 - 8t$$

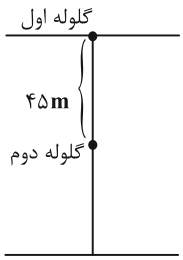
$$\xrightarrow{t=4s} \Delta x = 2\times 4^2 - 8\times 4 = 0$$

چون شتاب و سرعت اولیه ناهم‌نام هستند و سرعت در لحظهٔ $t = 2s$ برابر با صفر است، بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۹۴- **گزینهٔ «۱»** *(رامین شادلویی)*

گلولهٔ اول ۲ ثانیه زودتر حرکت کرده، یعنی ۲ ثانیه بیشتر در راه بوده است.



$$t_1 = (t_2 + 2)s \quad (I)$$

در ضمن، مکان گلوله اول ۴۵ متر بیشتر بوده $(y_1 = y_2 + 45m)$ و جهت مثبت را رو به پایین فرض می‌کنیم.

$$y_1 = y_2 + 45 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}gt_2^2 + 45$$

$$\overset{(I)}{\Rightarrow} 5(t_2 + 2)^2 = 5t_2^2 + 45 \Rightarrow t_2^2 + 4t_2 + 4 = t_2^2 + 9$$

و زمان گلوله اول

$$\Rightarrow t_2 = 1/25s \Rightarrow t_1 = t_2 + 2 \Rightarrow t_1 = 1/25 + 2 = 3/25s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۹۵- **گزینهٔ «۱»** *(مسعود قهرمانی)*

برای به‌دست آوردن h از دو معادلهٔ زیر کمک می‌گیریم:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \begin{cases} h = 5t^2 & \text{کل حرکت} \\ h - 80 = 5(t-2)^2 & \text{از شروع تا ۲ ثانیهٔ آخر} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 80 = 5(t-2)^2$$

$$\Rightarrow t^2 - 16 = t^2 - 4t + 4 = \Rightarrow 4t = 20 \Rightarrow t = 5s$$

ایران توشه
تجربه‌ای برای موفقیت

بنابراین ارتفاع h برابر است با: $h = ۵ \times ۵^۲ = ۱۲۵m$

اندازهٔ سرعت برخورد به زمین در لحظهٔ $t = ۵s$ برابر است با:

$$v = gt = ۱۰ \times ۵ = ۵۰ \frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قره‌خانی)*

علت پدیده‌های گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ قانون اول نیوتون (لَختی) است، در حالی که علت پدیدهٔ گزینه ۳ قانون سوم نیوتون (عمل و عکس‌العمل) می‌باشد.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۹۷- **گزینهٔ «۴»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

هنگامی‌که کامیون به سمت چپ شروع به حرکت می‌کند، وزنهٔ آونگ به سبب لختی، تمایل به حفظ حالت اولیهٔ خود (سکون) دارد و بنابراین به سمت راست منحرف می‌شود. این پدیده با قانون اول نیوتون قابل توجیه است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۹۸- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا گونه)*

چون کشتی با سرعت ثابت و در راستای افقی در حال حرکت است، لذا شتاب آن صفر است. همچنین کشتی در راستای قائم حرکت نمی‌کند، بنابراین شتاب آن در راستای قائم نیز صفر است، بنابراین با توجه به قانون اول نیوتون کشتی در حال تعادل است و در نتیجه: $F_۱ = F_۲, F_۳ = F_۴$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

(مشابه پرسش ۲-۱ صفحهٔ ۳۱ کتاب درسی)

۹۹- **گزینهٔ «۲»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

نیروی خالصی که به جسم وارد می‌شود، برابر است با:

$$\vec{F}_{net} = \vec{F_۱} + \vec{F_۲} + \vec{F_۳} = ۷\vec{j} + ۳۸\vec{i} - ۱۴\vec{i}$$
$$\Rightarrow \vec{F}_{net} = ۲۴\vec{i} + ۷\vec{j} \Rightarrow F_{net} = \sqrt{۲۴^۲ + ۷^۲}$$
$$\Rightarrow F_{net} = ۲۵N$$

طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow ۲۵ = ۱۲/۵a \Rightarrow a = ۲ \frac{m}{s^۲}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

(مشابه مثال ۲-۲ صفحهٔ ۳۴ کتاب درسی)

۱۰۰- **گزینهٔ «۲»** *(احسان محمدی)*

عامل حرکت شخص به سمت راست، نیرویی است که واگن به شخص برای حرکت به سمت راست وارد می‌کند. شخص واگن را با پای خود به سمت چپ هل می‌دهد و بنابراین طبق قانون سوم نیوتون، واگن نیز شخص را به سمت راست هل می‌دهد و باعث حرکت شخص می‌شود. اندازهٔ این نیرو برابر است با: $F = ma = (۶۰ \times ۰/۸)N$

طبق قانون سوم نیوتون، همین مقدار نیرو به سمت چپ به واگن اعمال می‌شود و اندازهٔ شتاب واگن که به سمت چپ است، برابر است با:

$$F = F' \Rightarrow F' = m'a' \Rightarrow ۶۰ \times ۰/۸ = ۲۴۰a' \Rightarrow a' = ۰/۲ \frac{m}{s^۲}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۵)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۱

۱۰۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمحمد عبدوی)*

گزینهٔ «۲» صحیح است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: کاربرد دماسنج بیشینه-کمینه در مراکز پرورش گل و گیاه، هواشناسی و باغداری است و در صنعت از این نوع دماسنج استفاده نمی‌شود.

گزینهٔ «۳»: دلیل انتخاب دماسنج‌های معیار بالا بودن دقت اندازه‌گیری آن‌ها می‌باشد، نه دسترسی آسان و همگانی.

گزینهٔ «۴»: به‌عنوان مثال آب در دمای صفر تا $4^\circ C$ با افزایش دما، منبسط نمی‌شود؛ برخی از مواد دیگر مثل پلاستیک‌ها نیز چنین خاصیتی را نشان می‌دهند.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷)

۱۰۲- **گزینهٔ «۱»** *(عرفان عسکریان‌پایبان)*

طبق رابطهٔ $\Delta L = \alpha L_1 \Delta\theta$، با کاهش دما، فاصلهٔ هر دو نقطهٔ دلخواه روی این صفحه کاهش خواهد یافت.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۸ و ۸۹)

۱۰۳- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی شریفی)*

$$\text{برای جسم A}: \begin{cases} \Delta T = -72K \\ \Delta T = \Delta\theta \end{cases} \Rightarrow \Delta\theta_A = -72^\circ C \quad (1)$$

$$\text{برای جسم B}: \begin{cases} \Delta F = +72^\circ F \\ \Delta F = 1/8\Delta\theta \end{cases} \Rightarrow 1/8\Delta\theta_B = 72$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_B = 40^\circ C \quad (2)$$

$$(1),(2): \begin{cases} \theta_{2A} - \theta_{1A} = -72 \\ \theta_{2B} - \theta_{1B} = 40 \\ \theta_{1A} = \theta_{1B} \end{cases} \Rightarrow \theta_{2B} - \theta_{2A} = 112^\circ C$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۴ و ۸۵)

۱۰۴- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کیانی)*

ابتدا دما برحسب درجهٔ فارنهایت را به درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌کنیم:

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 \xrightarrow{F=50^\circ F} 50 = \frac{9}{5}\theta + 32$$
$$\Rightarrow \theta = 10^\circ C \Rightarrow T = 10^\circ C$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ $\Delta L = \alpha L_1 \Delta T$، تغییر طول میله در حالت دوم را به‌دست می‌آوریم. با توجه به شکل، در بازهٔ دمایی $T_1 = 0^\circ C$ تا $T_2 = 100^\circ C$، تغییر طول میله برابر با $\Delta L = 100/2 - 100 = 0/2cm$ است. برای بازهٔ دمایی $T_1 = 0^\circ C$ تا $T_2' = 50^\circ F = 10^\circ C$، چون ضریب انبساط طولی ثابت است، می‌توان نوشت:

$$\Delta L = \alpha L_1 \Delta T \xrightarrow{L_1, \alpha \text{ ثابت‌اند}} \frac{\Delta L'}{\Delta L} = \frac{\Delta T'}{\Delta T}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta L'}{0/2} = \frac{10}{100} \Rightarrow \Delta L' = 0/02cm$$

بنابراین طول میله در دمای $50^\circ F = 10^\circ C$ برابر است با:

$$L_2' = L_1 + \Delta L' = 100 + 0/02 \Rightarrow L_2' = 100/02cm$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۹۰)

۱۰۵- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا شیروانی‌زاده)*

طبق رابطهٔ تغییر سطح در اثر تغییر دما داریم: $\Delta A = A_1(2\alpha)\Delta\theta$

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{A_1} = 2\alpha\Delta\theta \Rightarrow \frac{0/2}{100} = 2\times(4\times10^{-5})\times\Delta\theta$$
$$\Rightarrow \Delta\theta = 25^\circ C$$

در انبساط، دما باید افزایش یابد.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحهٔ ۹۲)

ایران توشه — مسیر تو برای موفقیت

۱۰۶- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

چون تمام گرمای تولید شده توسط گرم‌کن را مجموعهٔ گرماسنج و آب جذب می‌کند، ابتدا با استفاده از رابطه‌های زیر گرمای کل را می‌یابیم. دقت کنید بخشی از گرمای گرم‌کن توسط آب و بخشی دیگر توسط گرماسنج جذب می‌شود.

$$Q_{\text{کل}} = Q_{\text{آب}} + Q_{\text{گرماسنج}} \Rightarrow Q_{\text{کل}} = mc\Delta T + C\Delta T$$

$$\xrightarrow[\Delta T=۶۰-۱۰=۵۰^\circ C,\ C=۱۸۰\frac{J}{^\circ C}]{m=۲۰۰g=۰/۲kg,\ c=۴۲۰۰\frac{J}{kg.K}} Q_{\text{کل}} = ۰/۲\times۴۲۰۰\times۵۰ + ۱۸۰\times۵۰$$

$$Q_{\text{کل}} = ۴۲۰۰۰ + ۹۰۰۰ \Rightarrow Q_{\text{کل}} = ۵۱۰۰۰J$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ $P = \frac{Q}{\Delta t}$ ، زمان را می‌یابیم. داریم:

$$\Delta t = \frac{Q_{\text{کل}}}{P} \xrightarrow[Q_{\text{کل}}=۵۱۰۰۰J]{P=۱۷۰W} \Delta t = \frac{۵۱۰۰۰}{۱۷۰}$$

$$\Rightarrow \Delta t = ۳۰۰s = ۵\,min$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹)

۱۰۷- **گزینهٔ «۳»** *(مهدی شریفی)*

گرمایی که m_1 گرم آب می‌گیرد تا تبخیر سطحی رخ دهد، باعث انجماد m_2 گرم آب به یخ می‌شود:

$$m = m_1 + m_2$$

$$Q_{\text{تبخیر سطحی}} = |Q_{\text{انجماد}}| \Rightarrow m_1 L_V = m_2 L_F \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{L_V}{L_F}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۱۱)

۱۰۸- **گزینهٔ «۲»** *(غلامرضا محبی)*

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow ۴۲۰۰۰ = m\times۲۱۰۰\times(۲۷۳-۲۶۳) \Rightarrow m = ۲kg$$

$$Q' = mL_F \Rightarrow (۷۱۴-۴۲)\times۱۰^۳ = ۲\times L_F \Rightarrow L_F = ۳۳۶۰۰۰\frac{J}{kg}$$

$$Q'' = m'L_F \Rightarrow ۱۶۸\times۱۰^۳ = m'L_F$$

$$\Rightarrow m' = \frac{۱۶۸۰۰۰}{۳۳۶۰۰۰} = ۰/۵kg$$

جرم ذوب نشده $= m - m' = ۲ - ۰/۵ = ۱/۵kg$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹ و ۱۰۴ تا ۱۰۶)

۱۰۹- **گزینهٔ «۴»** *(عبداله فقه‌زاده)*

هر جسم در هر دمایی تابش الکترومغناطیسی گسیل می‌کند و به همین دلیل به این نوع تابش‌ها، تابش گرمایی می‌گویند. تابش گرمایی در دماهای زیر حدود $۵۰۰^\circ C$ عمدتاً به صورت تابش فروسرخ است که نامرئی است.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

۱۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(پوریا علاقه‌مند)*

چون گاز کامل است، از معادلهٔ حالت گازهای آرمانی استفاده می‌کنیم.

$$\begin{matrix}\text{حالت (۱) : } P_۱V_۱ = n_۱RT_۱ \\ \text{حالت (۲) : } P_۲V_۲ = n_۲RT_۲\end{matrix} \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{P_۲}{P_۱}\times\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{n_۲}{n_۱}\times\frac{T_۲}{T_۱}$$

$$\xrightarrow[\frac{P_۲}{P_۱}=۱]{\frac{V_۲}{V_۱}=۹,\ \frac{T_۲}{T_۱}=۶} ۱\times۹ = \frac{n_۲}{n_۱}\times۶ \Rightarrow \frac{n_۲}{n_۱} = \frac{۳}{۲}$$

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow m = nM$$

$$\Rightarrow \frac{m_۲}{m_۱} = \frac{n_۲}{n_۱}\times\frac{M_۲}{M_۱} \xrightarrow{M_۲=M_۱} \frac{m_۲}{m_۱} = \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{m_۱=x} m_۲ = \frac{۳}{۲}x$$

جرم حالت دوم گاز، $\frac{۳}{۲}x$ گرم است، یعنی $\frac{x}{۲}$ گرم به جرم گاز حالت اولیه اضافه شده است.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۲۲ و ۱۲۳)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۲

۱۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(سیدممد معروفی)*

$$\frac{\overline{R}_A}{\text{ضریب A}} = \frac{\overline{R}_C}{\text{ضریب C}} \Rightarrow \frac{۰/۸}{۱} = \frac{\overline{R}_C}{۳}$$

$$\Rightarrow \overline{R}_C = ۲/۴ \, mol.min^{-۱}$$

$$\overline{R}_C = \frac{\Delta n_C}{\Delta t} \Rightarrow ۲/۴ = \frac{\frac{۵۲/۴۸ - ۰}{۴۱}}{t - ۰} \Rightarrow t \simeq ۰/۵۳ min = ۳۲s$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۹۲ و ۹۳)

۱۱۲- **گزینهٔ «۱»** *(سالار ملکی)*

با توجه به واکنش موازنه شده، کاهش جرم مخلوط واکنش مربوط به ماده گازی خارج شده از ظرف است.

$$C_۶H_{۱۲}O_۶(aq) \rightarrow ۲C_۲H_۵OH(aq) + ۲CO_۲(g)$$

جرم $CO_۲$ تولید شده در بازهٔ زمانی داده شده برابر است با:

$$\text{جرم } CO_۲ = ۳/۳g$$

مقدار گلوکز مصرف شده:

$$?g\, C_۶H_{۱۲}O_۶ = ۳/۳g\, CO_۲ \times \frac{۱mol\, CO_۲}{۴۴g\, CO_۲}$$

$$\times \frac{۱mol\, C_۶H_{۱۲}O_۶}{۲mol\, CO_۲} \times \frac{۱۸۰g\, C_۶H_{۱۲}O_۶}{۱mol\, C_۶H_{۱۲}O_۶} = ۶/۷۵g\, C_۶H_{۱۲}O_۶$$

(شیمی ۲- درپی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰)

۱۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(حامد پویان‌نظر)*

افزودن دو قطره از محلول پتاسیم یدید به محلول $H_۲O_۲$ در دمای اتاق سبب افزایش سرعت تولید گاز اکسیژن می‌شود.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۳)

۱۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(حسن لشکری)*

۱) $\overline{R}_{HI} = \frac{۴ \times ۰/۱}{۲ \times ۲۰} = \frac{۰/۲}{۲۰}$ (واکنش) $\overline{R}_{۰-۲۰} = \frac{\overline{R}_{HI}}{۲}$

$$\overline{R}_{۲۰-۴۰} = \frac{(۶-۴) \times ۰/۱}{۲ \times ۲۰} = \frac{۰/۱}{۲۰} \text{ (واکنش)}$$

$$\overline{R}_{۰-۲۰} = ۲\overline{R}_{۲۰-۴۰} \text{ (واکنش)}$$

۲) مجموع شمار مولکول‌های دو اتمی، یعنی $H_۲$ ، $I_۲$ و HI در طول واکنش تغییر نمی‌یابد.

۳) $\overline{R}_{H_۲} = \frac{-\Delta n(H_۲)}{\Delta t} = \frac{۰/۳mol}{۴۰min} = ۰/۰۰۷۵ mol.min^{-۱}$

$$= ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۴} mol.s^{-۱}$$

۴) $\overline{R}_{\text{واکنش}} = +\frac{\Delta n(HI)}{۲\Delta t} = -\frac{\Delta n(H_۲)}{\Delta t}$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۹۳)

۱۱۵- **گزینهٔ «۱»** *(حسن لشکری)*

$$\overline{R}_{HCl} = ۰/۳۶ mol.min^{-۱} \rightarrow \overline{R}_{CaCO_۳} = ۰/۱۸ mol.min^{-۱}$$

$$\Delta n CaCO_۳ = ۶۰g CaCO_۳ \times \frac{۵۰}{۱۰۰} \times \frac{۱mol\, CaCO_۳}{۱۰۰g\, CaCO_۳}$$

$$= ۰/۳mol\, CaCO_۳$$

$$\overline{R} = \frac{\Delta n}{\Delta t} \rightarrow ۰/۱۸ mol.min^{-۱} = \frac{۰/۳mol}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \Delta t \simeq ۱/۶۷ min = ۱۰۰s$$

$$?L\, CO_۲ = ۶۰g\, CaCO_۳ \times \frac{۵۰}{۱۰۰} \times \frac{۱mol\, CaCO_۳}{۱۰۰g\, CaCO_۳}$$

$$\times \frac{۱mol\, CO_۲}{۱mol\, CaCO_۳} \times \frac{۲۲/۴L\, CO_۲}{۱mol\, CO_۲} = ۶/۷۲L\, CO_۲$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)

۱۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(امین نوروزی)*

ابتدا مقدار $Al_2(SO_4)_3$ مصرف شده را تعیین می‌کنیم:

$$?mol\ Al_2(SO_4)_3 = 160LSO_2 \times \frac{1/8gSO_2}{1LSO_2} \times \frac{1molSO_2}{80gSO_2}$$

$$\times \frac{1mol\ Al_2(SO_4)_3}{3mol\ SO_2} = 1/2mol\ Al_2(SO_4)_3$$

مقدار باقی‌مانده $Al_2(SO_4)_3$ برابر است با:

$$\text{مقدار باقی‌مانده} = 1/4 - 1/2 = 0/2mol$$

با توجه به نمودار زمان لازم برای رسیدن به ۰/۲ مول آلومینیم سولفات برابر با ۱۰ دقیقه است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)

۱۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

تنها عبارت دوم نادرست است.

فلز مس با یون‌های روی واکنش نمی‌دهد.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۸۹ و ۹۱)

۱۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(سالار ملکی)*

ساختار داده شده مربوط به کلسترول است.

کلسترول دارای گروه OH می‌باشد و نوعی الکل است و با توجه به داشتن پیوند دوگانه کربن- کربن سیرنشده نیز می‌باشد.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحهٔ ۹۶)

۱۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(حسن لشکری)*

با توجه به نمودار در ثانیه ۲۰اُم شمار مول‌های A و B با هم برابر است. اگر مقدار مول مصرف شده A تا این لحظه را برابر با $3x$ در نظر بگیریم، مقدار مول B تولید شده برابر با $2x$ خواهد بود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{ثانیه ۲۰ اُم} \Rightarrow 6 - 3x = 2x \Rightarrow 6 = 5x \Rightarrow x = 1/2mol$$

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_B}{2} = \frac{\Delta n}{2\Delta t} = \frac{2 \times 1/2mol}{2 \times \frac{20}{60}min} = 3/6mol.min^{-1}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۹۳)

۱۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(حسن لشکری)*

ابتدا مقدار گاز CO_2 تولید شده را با توجه به گلوکز مصرف شده تعیین می‌کنیم:

$$2tonپسماند \times \frac{10^6g}{1ton} \times \frac{45g\ گلوکز}{100gپسماند} \times \frac{36}{100} \times \frac{1mol\ گلوکز}{180g\ گلوکز}$$

$$\times \frac{2molCO_2}{1mol\ گلوکز} \times \frac{22/4LCO_2}{1molCO_2} = 8064LCO_2$$

$$\bar{R}(CO_2) = \frac{\text{حجم گاز}}{\text{زمان}} = \frac{8064L}{56 \times 60s} = 24L.s^{-1}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۳

۱۲۱- **گزینهٔ «۲»** (ممید زهی)

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: صابون‌های مایع نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب هستند.

گزینهٔ «۲»: مطابق متن صفحهٔ ۷ کتاب درسی

گزینهٔ «۳»: جزء کاتیونی در پاک‌کنندگی تأثیری ندارد.

گزینهٔ «۴»:

$$R = C_nH_{2n+1} \Rightarrow C_nH_{2n+1}COONH_4 \Rightarrow C_{n+1}H_{2n+5}O_2N$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ تا ۸)

(مطابق خود را بیازمایید صفحهٔ ۷ کتاب درسی)

۱۲۲- **گزینهٔ «۲»** (محمدحسن محمدزاده‌مقدم)

با توجه به آنکه اسید ضعیف است می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M}$$

ابتدا غلظت H^+ را تعیین می‌کنیم:

$$pH = 4 \Rightarrow [H^+] = 10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

حال داریم:

$$2\times10^{-7} = \frac{10^{-8}}{M} \Rightarrow M = 0/05\,mol.L^{-1}$$

مقدار اسید مورد نیاز برابر است با:

$$?\,gHA = 1L\ \text{محلول} \times \frac{0/05\,mol\,HA}{1L\ \text{محلول}} \times \frac{60\,gHA}{1\,molHA} = 3\,gHA$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۶)

۱۲۳- **گزینهٔ «۳»** (حسن رحمتی‌کوکنده)

$$pH = 2 \Rightarrow [H^+] = 10^{-2}\,mol.L^{-1}$$

$$?\,g\,HI = 1L\ \text{محلول} \times \frac{10^{-2}\,mol\,H^+}{1L\ \text{محلول}} \times \frac{1\,mol\,HI}{1\,mol\,H^+}$$

$$\times \frac{128\,g\,HI}{1\,mol\,HI} = 1/28\,g\,HI$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

۱۲۴- **گزینهٔ «۴»** (ممید زهی)

ابتدا غلظت مولی باز را محاسبه می‌کنیم:

$$[M_{BOH}] = \frac{n}{V} = \frac{0/5g \times \frac{1mol}{50g}}{2} = 0/005\,mol.L^{-1}$$

در ادامه با استفاده از رابطهٔ ثابت یونش باز (K_b)، غلظت مولی یون هیدروکسید تولید شده را محاسبه می‌کنیم. با توجه به آنکه ثابت یونش عدد کوچکی است می‌توان از غلظت $[OH^-]$ در مخرج صرف‌نظر کرد.

$$BOH(aq) \rightleftharpoons B^+(aq) + OH^-(aq)$$

$$K_b = \frac{[B^+][OH^-]}{[BOH]} \Rightarrow 5\times10^{-5} = \frac{[OH^-]^2}{0/005}$$

$$\Rightarrow [OH^-]^2 = 25\times10^{-8} \Rightarrow [OH^-] = 5\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

حال غلظت یون H^+ را از روی OH^- محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+]\times[OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [H^+]\times5\times10^{-4} = 10^{-14}$$

$$\Rightarrow [H^+] = 2\times10^{-11}\,mol.L^{-1}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۸)

(مطابق با هم بیندیشیم صفحات ۲۶ تا ۲۸ کتاب درسی)

۱۲۵- **گزینهٔ «۱»** (محمدحسن محمدزاده‌مقدم)

ابتدا غلظت H^+ را محاسبه می‌کنیم:

$$pH = 2/3 \Rightarrow [H^+] = 5\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

با توجه به رابطهٔ K_a داریم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \Rightarrow 0/05 = \frac{(5\times10^{-3})^2}{M - 5\times10^{-3}}$$

$$\Rightarrow M = 55\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

$$?\,gHA = 1L\ \text{محلول} \times \frac{55\times10^{-4}\,molHA}{1L\ \text{محلول}} \times \frac{114\,gHA}{1\,molHA}$$

$$= 0/627\,gHA = 627\,mg\,HA$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۸)

۱۲۶- **گزینهٔ «۳»** (محمد پارسا فراهانی)

طبق گفتهٔ سوال:

$$\frac{[OH^-]}{[H^+]} = 16\times10^4 \Rightarrow [OH^-] = 16\times10^4[H^+]$$

$$\xrightarrow[\text{در } [H^+]]{\text{طرفین ضرب}} \underbrace{[H^+][OH^-]}_{10^{-14}} = 16\times10^4[H^+]^2$$

$$10^{-14} = 16\times10^4[H^+]^2 \Rightarrow [H^+]^2 = \frac{10^{-18}}{16} \xrightarrow{\sqrt{\ }} [H^+] = \frac{10^{-9}}{4}$$

$$= 25\times10^{-11}\,mol.L^{-1}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

(مطابق با هم بیندیشیم صفحه‌های ۲۶ و ۲۷ کتاب درسی)

۱۲۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

موارد «الف» و «پ» جملهٔ داده شده را به نادرستی تکمیل می‌کنند.

بررسی همهٔ موارد:

الف) هرچه دمای آب بیشتر باشد، پاک‌کنندگی نیز بیشتر خواهد بود؛ در نتیجه درصد لکهٔ باقیمانده کاهش می‌یابد. بنابراین رابطهٔ معکوس بین درصد لکهٔ باقیمانده پس از شستشو و دمای آب وجود دارد.

ب) می‌دانیم که پاک‌کننده‌های صابونی با یون‌های موجود در آب سخت واکنش می‌دهند و بنابراین بین میزان کف کردن پاک‌کنندهٔ صابونی و میزان یون‌های Ca^{2+} موجود در آب سخت، رابطه معکوس وجود دارد.

پ) هرچه درجهٔ یونش یک اسید بیشتر باشد در آب بیشتر یونش پیدا کرده و یون‌های بیشتری تولید می‌کند و در نتیجه رسانایی الکتریکی بیشتری خواهد داشت؛ بنابراین بین این دو مورد رابطهٔ مستقیم برقرار است.

ت) هرچه pH محلول یک اسید کمتر باشد، به این معناست که $[H^+]$ در محلول اسید بیشتر است. بنابراین بین pH و شدت واکنش محلول اسید با فلز Mg رابطهٔ معکوس وجود دارد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۸ تا ۲۴)

۱۲۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

گزینهٔ «۴» نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: درست، طبق واکنش سوختن کامل داریم:

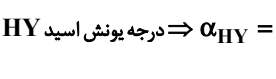
$$۱C_{۲۵}H_{۵۲} + ۳۸O_۲ \rightarrow ۲۵CO_۲ + ۲۶H_۲O$$

$$۱C_۸H_{۱۸} + \frac{۲۵}{۲}O_۲ \rightarrow ۸CO_۲ + ۹H_۲O$$

با توجه به تعداد اتم‌های کربن در فرمول مولکولی هم می‌توان نتیجه گرفت مقدار $CO_۲$ تولیدی از سوختن یک مول بنزین کمتر از مقدار $CO_۲$ تولیدی از سوختن یک مول وازلین است.

گزینهٔ «۲»: درست، از صابون گوگردار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.

گزینهٔ «۳»: درست، مطابق شکل زیر در اسید چرب یک اتم کربن به ۲ اتم اکسیژن متصل است.



گزینهٔ «۴»: نادرست، با توجه به فرمول عمومی پاک‌کننده غیرصابونی داریم:

$$n = ۱۴$$

$$C_nH_{۲n+۱}C_۶H_۴SO_۳^-Na^+$$

$$C_{۱۴}H_{۲۹}C_۶H_۴SO_۳^-Na^+ \Rightarrow C_{۲۰}H_{۳۳}SO_۳^-Na^+$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۴، ۵ و ۱۰ تا ۱۲)

۱۲۹- **گزینهٔ «۱»** *(کتاب آبی)*

$$\text{درجهٔ یونش} = \frac{\text{شمار مولکول‌های اسید یونیده شده}}{\text{شمار مولکول‌های اسید یونیده شده + شمار مولکول‌های اسید یونیده نشده}}$$

$$= \frac{[H^+]}{M_{\text{یونیده‌نشده}} + [H^+]} = \begin{cases} HX: \frac{۱}{۹+۱} = ۰/۱ \\ HY = \frac{۸}{۰+۸} = ۱ \\ HZ = \frac{۲}{۸+۲} = ۰/۲ \end{cases}$$

بررسی موارد:

عبارت اول: HY بیشترین درجهٔ یونش را دارد و قوی‌تر از بقیه است. (درست)

عبارت دوم: درجهٔ یونش اسید HY یک بوده و به‌طور کامل یونش پیدا کرده است. (نادرست)

عبارت سوم: با توجه به این‌که غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید HY تقریباً زیاد است و می‌توان گفت قدرت اسیدی قوی دارد، حتماً از اتانوئیک‌اسید که یک اسید آلی ضعیف است، قدرت اسیدی بیشتری خواهد داشت. (درست)

عبارت چهارم: با توجه به برابر بودن غلظت اولیهٔ اسیدها و محاسبهٔ درجهٔ یونش آن‌ها رابطهٔ $K_a(HX) < K_a(HZ) < K_a(HY)$ برقرار است. (درست)

عبارت پنجم: HZ از HX قوی‌تر است. HF از HCN قوی‌تر است. (نادرست)

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۱)

۱۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

$$\left.\begin{array}{l} HX \text{ درجه یونش اسید} \Rightarrow \alpha_{HX} = \frac{[H^+]}{[HX]_۰} = \frac{۰/۱}{۰/۱+۰/۷} = \frac{۱}{۸} \\ HY \text{ درجه یونش اسید} \Rightarrow \alpha_{HY} = \frac{[H^+]}{[HY]_۰} = \frac{۰/۰۵}{۰/۵+۰/۰۵} = \frac{۱}{۱۱} \end{array}\right\}$$

$$\frac{\alpha_{HX}}{\alpha_{HY}} = \frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۱۱}} = \frac{۱۱}{۸}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

شیمی ۱

۱۳۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

مقدار مول CO_2 تولید شده در واکنش اول برابر است با:

$$C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$$

$$?\,mol\,CO_2 = 28/8\,g\,H_2O \times \frac{1\,mol\,H_2O}{18\,g\,H_2O} \times \frac{3\,mol\,CO_2}{4\,mol\,H_2O}$$

$$= 1/2\,mol\,CO_2$$

حال جرم منیزیم اکسید مورد نیاز در واکنش دوم برابر است با:

$$CO_2 + MgO \rightarrow MgCO_3$$

$$?\,g\,MgO = 1/2\,mol\,CO_2 \times \frac{1\,mol\,MgO}{1\,mol\,CO_2}$$

$$\times \frac{40\,g\,MgO}{1\,mol\,MgO} = 48\,g\,MgO$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۰ و ۷۱)

۱۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمدحسن محمدزاده‌مقدم)*

سوخت سبز به سوختی گفته می‌شود که در ساختار خود افزون بر کربن و هیدروژن، اکسیژن نیز دارد و از پسماندهای گیاهی مانند شاخ و برگ گیاه سویا، نیشکر و دانه‌های روغنی به دست می‌آید.

(شیمی ۱- ردپای گازهای در زندگی؛ صفحه‌های ۷۰ و ۷۱)

۱۳۳- **گزینهٔ «۴»** *(مینا شرافتی‌پور)*

معادله موازنه شده به‌صورت زیر است:

$$N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$$

با توجه به معادله واکنش می‌توان نوشت:

$$?\,gNH_3 = 17/92\,L(\text{مخلوط گازی}) \times \frac{1\,mol\,\text{مخلوط گازی}}{22/4\,L\,\text{مخلوط گازی}}$$

$$\times \frac{2\,mol\,NH_3}{4\,mol\,\text{گاز}} \times \frac{17\,g\,NH_3}{1\,mol\,NH_3} = 6/8\,g\,NH_3$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۶ تا ۸۲)

۱۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(یاسر راش)*

نقطهٔ جوش آلوتروپ‌های اکسیژن یعنی O_2 و O_3 به‌ترتیب برابر -183 و -112 درجهٔ سلسیوس است. پس در دمای $-200^\circ C$، هر دوی آن‌ها به حالت مایع هستند و با بالا بردن دما تا $-136/5^\circ C$، اکسیژن از مخلوط مایع جدا شده و به حالت گاز درآمده است که جرم آن برابر ۱۲۰ گرم معادل با $\frac{120}{32}$ یا ۳/۷۵ مول است.

باقی‌ماندهٔ مخلوط در واقع همان اوزون (O_3) است. برای بدست آوردن تعداد مولکول‌های باقی مانده در آن داریم:

$$80\,g\,O_3 \times \frac{1\,mol\,O_3}{48\,g\,O_3} \times \frac{6/02\times10^{23}\,molecule\,O_3}{1\,mol\,O_3}$$

$$\times \frac{3\,atom\,O}{1\,molecule\,O_3} \simeq 30/1\times10^{23}\,atom\,O$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴)

۱۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(حمید زیبی)*

$$NaCl(aq) + AgNO_3(aq) \rightarrow AgCl(s) + NaNO_3(aq)$$

جرم حل شوندهٔ $NaCl$ را می‌توان از روی غلظت $NaNO_3(aq)$ تولید شده محاسبه کرد:

$$?\,AgCl = 2L\ \text{محلول} \times \frac{1/5\,mol\,AgNO_3}{1\,L\ \text{محلول}}$$

$$\times \frac{1\,mol\,AgCl}{1\,mol\,AgNO_3} \times \frac{143/5\,g\,AgCl}{1\,mol\,AgCl} = 430/5\,g\,AgCl$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۸۹ و ۹۰)

۱۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(یاسر راش)*

واکنش موازنه شدهٔ فلز M با برم به صورت زیر است:

$$M(s) + \frac{x}{2}Br_2(l) \rightarrow MBr_x(s)$$

$$\frac{0/4}{1} = \frac{64}{\frac{x}{2}\times160} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow MBr_2$$

ظرفیت فلز M برابر با ۲ است.

از آن جایی که ۶۴ گرم از جرم برمید فلز دو ظرفیتی M در (MBr_2) را برم تشکیل می‌دهد، طبق قانون پایستگی جرم، ۱۶ گرم از فلز M در واکنش مصرف شده است. پس جرم مولی فلز M برابر است با:

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

$$\text{جرم مولی فلز } M = ۴۰ g.mol^{-۱} \Rightarrow \text{جرم مولی فلز } M \times ۰/۴ = ۱۶$$

واکنش تجزیهٔ کربنات فلز M به صورت زیر است:

$$MCO_۳(s) \rightarrow MO(s) + CO_۲(g)$$

$$\text{درصد کاهش جرم کربنات فلز } M = \frac{۴۴}{۱۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۴۴$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۰ و ۷۱)

۱۳۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی)*

طبق معادله زیر:

$$۳A(s) + ۴xHNO_۳(aq) \rightarrow ۳A(NO_۳)_x(aq) + xNO(g) + ۲xH_۲O(l)$$

یک رابطه استوکیومتری بین نیتریک اسید و فلز واکنش‌دهنده می‌نویسیم تا به ظرفیت فلز پی ببریم:

$$۳۲۰۰ g\,HNO_۳ \times \frac{۱ mL\,HNO_۳}{۲/۴ g\,HNO_۳} \times \frac{۱۰^{-۳} L}{۱ mL} \times \frac{۴ mol\,HNO_۳}{۱ L\,HNO_۳} \times \frac{۳ mol\,A}{۴x mol\,HNO_۳} = ۲ mol A \Rightarrow x = ۲$$

واکنش را بازنویسی می‌کنیم:

$$۳A(s) + ۸HNO_۳(aq) \rightarrow ۳A(NO_۳)_۲(aq) + ۲NO(g) + ۴H_۲O(l)$$

اکنون رابطه استوکیومتری بین فلز و نمک حاصل را می‌نویسیم تا به جرم مولی فلز پی ببریم:

$$۲ mol A \times \frac{۳ mol A(NO_۳)_۲}{۳ mol A} \times \frac{(M_A + ۲(۶۲)) g\,A(NO_۳)_۲}{۱ mol\,A(NO_۳)_۲} = ۳۷۶ g\,A(NO_۳)_۲$$

$$\Rightarrow M_A = ۶۴ g.mol^{-۱}$$

بنابراین فلز مورد استفاده در واکنش، فلز مس با جرم مولی ۶۴ گرم بر مول و ظرفیت ۲ است.

(شیمی ۱- ترکیبی؛ صفحه‌های ۸۳، ۸۴ و ۸۸ تا ۹۰)

۱۳۸- **گزینهٔ «۴»** *(حمید زبحی)*

اکسیژن دارای دو دگرشکل $O_۲$ و $O_۳$ است.

گزینهٔ «۱»: دگرشکل سبک‌تر ($O_۲$)، نقطهٔ جوش پایین‌تری نسبت به $O_۳$ دارد و دیرتر مایع می‌شود.

گزینهٔ «۲»: در دمای صفر درجهٔ سلسیوس و فشار یک اتمسفر (شرایط STP)، حجم مولی گازها برابر ۲۲/۴ لیتر بر مول است نه هر دما و فشاری!

گزینهٔ «۳»: چون جرم مولی $O_۲$ از $O_۳$ کمتر است، پس در جرم‌های برابر، مول $O_۲$ بیشتر خواهد بود و حجم بیشتری اشغال خواهد کرد.

گزینهٔ «۴»: چون جرم مولی $O_۳$ (دگرشکل واکنش پذیرتر) بیشتر است و حجم مولی آن دو یکی است، پس چگالی آن بیشتر خواهد بود.

$$d_{\text{گاز}} = \frac{M_{\text{مولی}}}{V_{\text{مولی}}} \Rightarrow d_{O_۳} = \frac{۴۸}{V_{\text{مولی}}},\ d_{O_۲} = \frac{۳۲}{V_{\text{مولی}}}$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴، ۷۸ و ۷۹)

۱۳۹- **گزینهٔ «۱»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

$$I)\ ۴KNO_۳(s) \rightarrow ۲K_۲O(s) + ۲N_۲(g) + ۵O_۲(g)$$

$$II)\ ۲KClO_۳(s) \rightarrow ۲KCl(s) + ۳O_۲(g)$$

کاهش جرم ایجاد شده در واکنش (I) با مجموع جرم $N_۲$ و $O_۲$ تولید شده یکسان است. به ازای ۲۱۶ گرم کاهش جرم، ۵ مول $O_۲$ و ۲ مول $N_۲$ تولید می‌شود.

$$?LO_۲ = ۴۹/۶۸ g\ \text{کاهش جرم} \times \frac{۵ mol\,O_۲}{۲۱۶ g\ \text{کاهش جرم}} \times \frac{۲۲/۴ LO_۲}{۱ mol\ O_۲} = ۲۵/۷۶ LO_۲$$

$$?mol\,KClO_۳ = ۲۵/۷۶ LO_۲ \times \frac{۱ mol\,O_۲}{۲۲/۴ L\,O_۲} \times \frac{۲ mol\,KClO_۳}{۳ mol\,O_۲} \simeq ۰/۷۷ mol\ KClO_۳$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۴)

۱۴۰- **گزینهٔ «۴»** *(امین نوروزی)*

تنها مورد (ب) نادرست است:

اوزون تروپوسفری یک آلاینده به شمار می‌رود.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۴۸، ۵۲ و ۷۲ تا ۷۵)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی

دفترچه پاسخ

آزمون هوش و استعداد

(دورهٔ دوم)

۱۴ شهریور

تعداد کل سؤالات آزمون: ۲۰
زمان پاسخ‌گویی: ۳۰ دقیقه

گروه فنی تولید

مسئول آزمون	حمید لنجان‌زاده اصفهانی
ویراستار	فاطمه راسخ
مدیر گروه مستندسازی	محیا اصغری
مسئول درس مستندسازی	علیرضا همایون‌خواه
طراحان	حمید اصفهانی، فاطمه راسخ، حمید گنجی، حامد کریمی، فرزاد شیرمحمدلی
حروف‌چینی و صفحه‌آرایی	معصومه روحانیان
ناظر چاپ	حمید عباسی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

استعدادتحلیلی

۲۵۱- گزینهٔ «۱» *(حامد کریمی)*

شهر برلین در کشور آلمان است.

(کلمه‌سازی، هوش کلامی)

۲۵۲- گزینهٔ «۳» *(حامد کریمی)*

کشور مراکش در افریقاست.

(کلمه‌سازی، هوش کلامی)

۲۵۳- گزینهٔ «۴» *(حمید اصفهانی)*

در شکل درست، دو واژهٔ «آیا چگونه» بدین شکل در کنار هم قرار نمی‌گیرند.

(تصحیح جملات، هوش کلامی)

۲۵۴- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

شکل درست جمله ۲۶ نقطه دارد: بندگی، بیداد و دروغ، مصیبت هستند و ارتباطات را پایان می‌دهند

(ترتیب کلمات، هوش کلامی)

۲۵۵- گزینهٔ «۱» *(حامد کریمی)*

ترتیب پیشنهادی:

ج) ناگهان در کوچه دیدم بی‌وفای خویش را / باز گم کردم ز شادی دست و پای خویش را

الف) با شتاب ابرهای نیمه شب می‌رفت و بود / پاک چون مه شسته روی دلربای خویش را

د) تا به من نزدیک شد، گفتم: «سلام ای آشنا» / گفتم امّا هیچ نشنیدم صدای خویش را

ب) کاش بشناسد مرا آن بی‌وفا دختر «امید» / آه اگر بیگانه باشد آشنای خویش را

(ترتیب جملات، هوش کلامی)

۲۵۶- گزینهٔ «۲» *(کتاب استعدادتحلیلی، هوش کلامی، مشابه کنکور دکتری سال ۹۳)*

نبود نام پدر امیر و مریم در مستندات سال ۱۳۲۰ بیمارستان، به این معنا نیست که او در سال ۱۳۱۸ متولّد شده است. به شرطی می‌توان از نبودن نام پدر امیر و مریم در مستندات سال ۱۳۲۰ بیمارستان به متولّد سال ۱۳۱۸ بودن او رسید که او حتماً در یکی از این دو سال متولّد شده باشد.

(استدلال، هوش کلامی)

۲۵۷- گزینهٔ «۲» *(کتاب استعدادتحلیلی، هوش کلامی)*

عبارت «شرفُ المکان بالمکین» یعنی «ارزش جایگاه به خودِ جایگاه نیست، بلکه به صاحب جایگاه برمی‌گردد.» در واقع همان طور که عبارت گزینهٔ «۲» می‌گوید، «جایگاهی بالاست که شخصی والامقام آن‌جا نشسته باشد.» عبارت گزینهٔ «۱» می‌گوید وقتی اصل چیزی هست، نباید به سراغ جانشین‌هایش رفت. عبارت گزینهٔ «۳» به شکست اشاره می‌کند و عبارت گزینهٔ «۴» در نکوهش کسی است که کارش را رها کرده به سراغ کاری رفته که به ظاهر پست‌تر است.

(قرابت معنایی، هوش کلامی)

۲۵۸- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

ردیف پنجم به ۲ نیاز دارد. فقط یک جایگاه برای این عدد هست. بعد از قرار دادن عدد ۲، به همین قیاس جایگاه عدد ۳ هم معلوم می‌شود. یک خانه برای عدد ۴ در این ردیف باقی است.

حال در ستون پنجم، به همین قیاس جایگاه عددهای ۱ و ۵ معلوم می‌شود.

حال در ردیف دوم به عدد ۲ نیاز داریم و فقط یک جایگاه برای آن هست. به همین ترتیب جایگاه عددهای ۵ و ۱ هم معلوم است.

حال در ستون اول، عدد ۴ معلوم می‌شود و در ردیف چهارم، عدد ۵. در ردیف سوم نیز عدد ۲ معلوم است. پس حاصل خواسته‌شده، $۴\times۲=۸$ است.

	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۲				۵
۲	۱	۲	۴	۵	۳
۳	۵		۲		۱
۴	۴	۵			۲
۵	۳	۱	۵	۲	۴

(سودوکو، هوش منطقی ریاضی)

ایران توانا
تشریحی برای موفقیت

۲۵۹- گزینهٔ «۴» *(فرزاد شیرممدلی)*

قیمت مجسمه را x و قیمت تابلو را y می‌گیریم. داریم:

$$\frac{۳}{۴}\times x+۱۰۰۰۰۰=\frac{۴}{۳}y-۱۰۰۰۰۰$$
$$\Rightarrow ۹x+۱۲۰۰۰۰۰=۱۶y-۱۲۰۰۰۰۰$$
$$\Rightarrow ۱۶y=۹x+۲۴۰۰۰۰۰$$
$$\Rightarrow y=\frac{۹}{۱۶}x+۱۵۰۰۰۰$$

یک معادله و دو مجهول،جواب یکتایی ندارد: مثلاً اگر $x=۱۶$ باشد، $y=۱۵۰۰۰۹$ خواهد بود و اگر $x=۱۶۰۰۰۰۰$ باشد، $y=۲۵۰۰۰۰$ خواهد بود.

(کفایت داده، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۰- گزینهٔ «۱» *(فرزاد شیرممدلی)*

داریم:

$$(\text{الف}\times ۳)+(\text{الف}\times \text{ب})=(\text{ب}\times ۵)+(\text{الف}\times \text{ب})\Rightarrow \frac{\text{الف}}{\text{ب}}=\frac{۵+\text{الف}}{۳+\text{ب}}$$

داریم:
$$\frac{\text{ب}}{\text{کل}}=\frac{۳}{۸},\ \frac{\text{الف}}{\text{کل}}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow \frac{\text{الف}}{\text{ب}}=\frac{۵}{۳}$$

(کفایت داده، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۱- گزینهٔ «۴» *(حمید اصفهانی)*

سنّ علی، مجید و حسن را به‌ترتیب A، M و H می‌گیریم.

$$A-۸=۲(M-۸)\Rightarrow A=۲M-۸$$
$$A=۲h$$

فاصلهٔ سنّی مجید و حسن معلوم می‌شود:

$$\Rightarrow ۲M-۸=۲h\Rightarrow m-۴=h$$

ولی فاصلهٔ سنّیِ علی و مجید معلوم نیست.

(کفایت داده، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۲- گزینهٔ «۲» *(حمید کنبی)*

عدد باید فرد باشد، پس یکان یا یک است یا سه.

اگر یکان سه باشد، جمع ارقام دهگان و صدگان هم باید «مضرب سه» باشد، یعنی $(۳,۳)$، $(۱,۲)$ ، $(۲,۱)$ و $(۳,۰)$ پذیرفته است.

اگر یکان یک باشد، جمع ارقام دهگان و صدگان هم باید «مضرب سه منهای یک» باشد، یعنی: $(۲,۰)$، $(۲,۳)$ و $(۳,۲)$

پس مجموعاً $۳+۴=۷$ عدد با شرط‌های صورت سؤال ساخته می‌شود.

(بفش‌پذیری و اصل ضرب، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۳- گزینهٔ «۳» *(حمید کنبی)*

دو الگو در سؤال هست:

$$\underset{+۲}{۸}\ ,\ \underset{\div ۲}{۱۲}\ ,\ \underset{-۲}{۱۰}\ ,\ \underset{\times ۲}{۸}\ ,\ \underset{+۲}{۵}\ ,\ \underset{-۴}{۲}\ ,\ \underset{\div ۴}{۳}\ ,\ \underset{+۴}{۶}\ ,\ \underset{\times ۴}{۶}\ ,\ \underset{-۴}{۲۴}\ ,\ \underset{\div ۲}{۸}\ ,\ ۲۰$$

(الگوی عددی، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۴- گزینهٔ «۳» *(حمید کنبی)*

$$(۹-۷)\times ۹=۱۸,(۴-۳)\times ۱۳=۱۳,(۶-۰)\times ۷=۴۲$$

پس:
$$(۹-۲)\times ?=۴۹\Rightarrow ?=۴۹\div ۷=۷$$

(الگوی عددی، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۵- گزینهٔ «۳» *(فرزاد شیرممدلی)*

$$۹\times ۷-۳\times ۸=۶۳-۲۴=۳۹$$
$$۸\times ۷-۵\times ۳=۵۶-۱۵=۴۱$$
$$۱۶\times ۲-۱\times ۸=۳۲-۸=۲۴$$
$$۵\times ۱۵-۳\times ?=۶$$

پس:
$$\Rightarrow ?=\frac{۷۵-۶}{۳}=۲۳$$

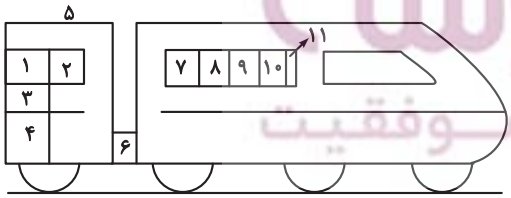
(الگوی عددی، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۶- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

علاوه بر ۱۱ مستطیل آشکار، ۱۴ مستطیل دیگر هم در شکل هست:

$$(۱,۲),(۱,۳),(۳,۴),(۱,۳,۴),(۷,۸),(۸,۹),(۹,۱۰),(۱۰,۱۱)$$
$$,(۷,۸,۹),(۸,۹,۱۰),(۹,۱۰,۱۱),(۷,۸,۹,۱۰),(۸,۹,۱۰,۱۱)$$
$$(۷,۸,۹,۱۰,۱۱)$$

پس تعداد کل مستطیل‌ها $۱۱+۱۴=۲۵$ است.



(شمارش، هوش غیرکلامی)

۲۶۷- گزینهٔ «۱» *(فاطمه راسخ)*

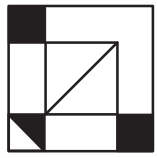
از تکرارها متوجه می‌شویم حروفی که در الفبای فارسی هست، کُد A و آن‌هایی که نیست، کُد D گرفته‌اند. همچنین دونقطه‌ای‌ها کد B دارند و سه‌نقطه‌ای‌ها کُد C. پس حرفی سه‌نقطه‌ای از الفبای فارسی می‌خواهیم.

(کدگذاری، هوش غیرکلامی)

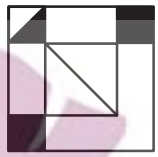
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۶۸- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

اگر سه برگه را روی هم بیندازیم شکل زیر حاصل می‌شود:



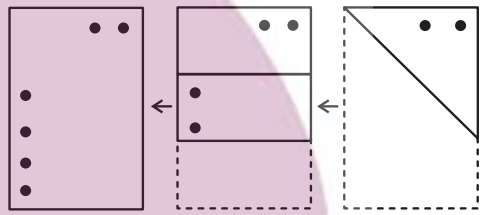
با چرخاندانِ ۹۰ درجهٔ ساعتگردِ آن، شکل زیر را خواهیم داشت:



(کاغذ شفاف، هوش غیرکلامی)

۲۶۹- گزینهٔ «۴» *(حمید کنبی)*

مراحلِ تا را پس از سوراخ، برعکس طی می‌کنیم:



(تای کاغذ، هوش غیرکلامی)

۲۷۰- گزینهٔ «۱» *(فرزاد شیرممّدلی)*

مراحل تا را پس از برش، برعکس طی می‌کنیم:

(برش کاغذ، هوش غیرکلامی)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت