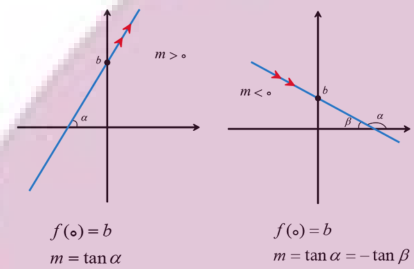
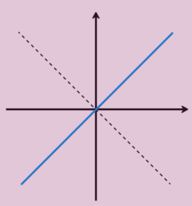
رسم نمودار تابع خطی (چند جمله‌ای درجه اول)

درسنامه

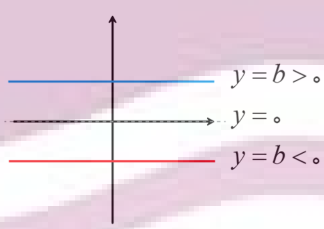
✓ در هر تابع خطی به فرم $f(x) = mx + b$، عدد m شیب خط و عدد b عرض از مبداء خط را نشون میده. منظور از شیب خط تانژانت زاویه‌ای هست که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازه و منظور از b همان $f(\text{۰})$ است:

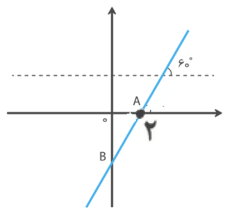


نکته اگر $b = \text{۰}$ خط گذرنده از مبداء است:



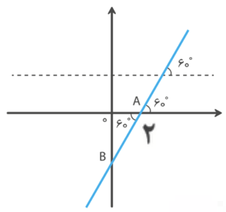
✓ اگر $m = \text{۰}$، تابع ثابت $f(x) = b$ ایجاد می‌شود:





مثال معادله خط روبرو را بنویسید.

پاسخ زاویه‌ای را که خط با جهت مثبت محور افقی ساخته $۶۰°$ است، پس $m = \tan ۶۰° = \sqrt{۳}$

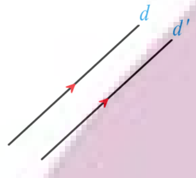


مثال یعنی:

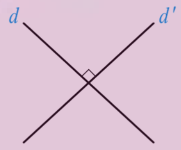
$$\sqrt{۳} = \frac{OB}{OA} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{OB}{۲} \rightarrow OB = ۲\sqrt{۳}$$

پس عرض از مبداء برابر $B = -۲\sqrt{۳}$ است: $f(x) = mx + b \Rightarrow f(x) = \sqrt{۳}x - ۲\sqrt{۳}$

یادآوری خطوط موازی و عمود بر هم:



$d \parallel d' \rightarrow m = m'$



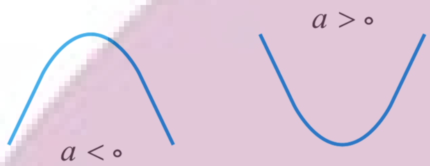
$d \perp d' \rightarrow m = -\frac{۱}{m'}$

رسم نمودار سهمی (تابع درجه دوم)

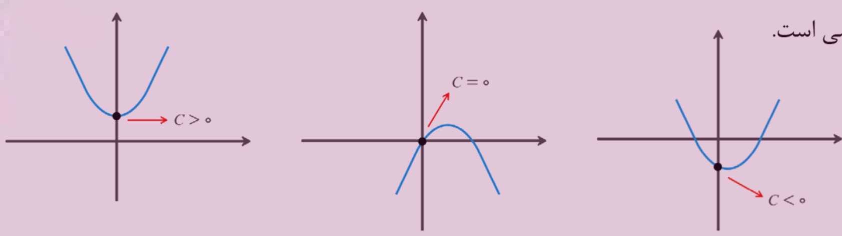
درسنـــــــــامه

✓ در هر سهمی (تابع درجه دوم) به معادله $f(x)=ax^2+bx+c$ که $a\neq 0$ است:

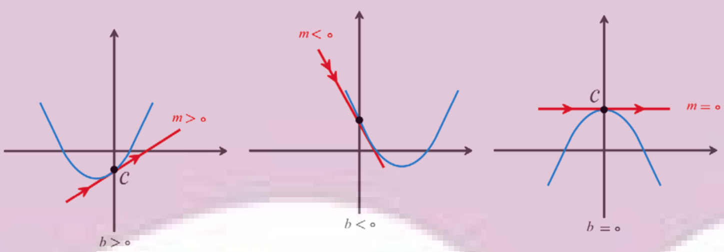
۱ علامت a نشان دهنده جهت باز شدن دهانه سهمی است.



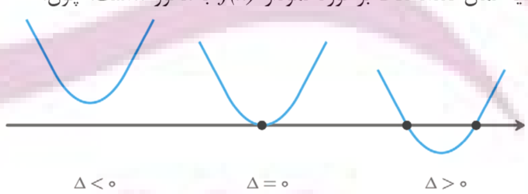
۲ عدد c نشان دهنده عرض از مبداء سهمی است.



۳ علامت b نشان دهنده شیب نمودار در c است.

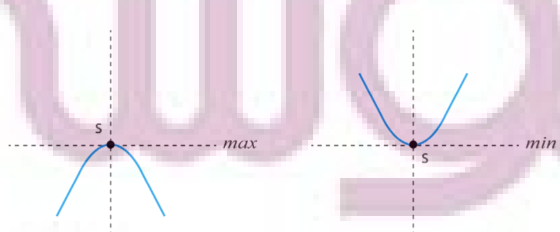


۴ عدد Δ مبین معادله $ax^2+bx+c=0$ است و بیان کننده تعداد جواب‌های معادله یا همان تعداد نقاط برخورد نمودار $f(x)$ با محور x است، چون:



$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\rightarrow\begin{cases}\Delta>0\rightarrow \text{۲جواب}\\ \Delta=0: x=\frac{-b}{2a}\rightarrow \text{یک جواب}\\ \Delta<0\rightarrow \text{جواب حقیقی ندارد}\rightarrow \text{جواب حقیقی ندارد}\end{cases}$$

۵ قلّه (max) یا درّه (min) هر سهمی را نقطه رأس (S) می‌گوییم:

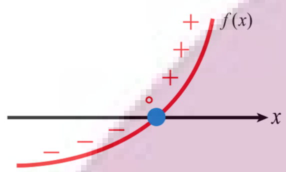


$$S\begin{vmatrix}x_0=-\dfrac{b}{2a}\\ y_0=f(x_0)\end{vmatrix}$$

نحوه تعیین علامت عبارات چند جمله‌ای

درسنامه

اگر نمودار تابع $f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، در این صورت:

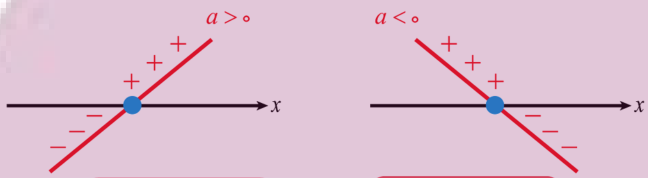


نمودار تابع f بالای محور x است $\Rightarrow f(x) > 0$

نمودار تابع f با محور x برخورد می‌کند $\Rightarrow f(x) = 0$

نمودار تابع f پایین محور x است $\Rightarrow f(x) < 0$

نکته علامت چندجمله‌ای درجه اول به صورت $p(x) = ax + b$ در اطراف ریشه‌اش عوض می‌شود که علامت خانه اول از سمت راست، همان علامت a (ضریب x) است:



x	ریشه		
$p(x)$	+	۰	−

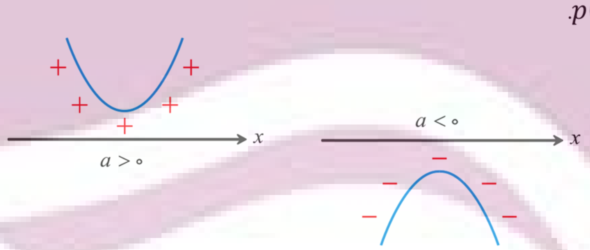
x	ریشه		
$p(x)$	−	۰	+

نکته

علامت چندجمله‌ای درجه دوم به صورت $p(x) = ax^۲ + bx + c$.

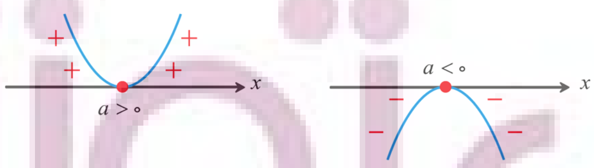
حالت اول

اگر فاقد ریشه باشد ($\Delta < ۰$)، همواره همان علامت a است:



حالت دوم

اگر ریشه مضاعف (دو ریشه مساوی) داشته باشد($\Delta = ۰$)، علامت در اطراف ریشه عوض نمی‌شود و همواره همان علامت a است:



x	ریشه		
$p(x)$	−	۰	−

x	ریشه		
$p(x)$	+	۰	+

تذکر

در حالت فوق، ریشه مضاعف، همان طول رأس سهمی یعنی $x = -\frac{b}{۲a}$ است.

مثال

جدول تعیین علامت عبارت $p(x) = (m+۱)x^۲ + ۶x + m - ۷$ به شکل زیر است. مقدار m و n را بیابید.

x		ریشه	
$p(x)$	$-$	۰	$-$

پاسخ

۱ چندجمله‌ای ریشه مضاعف دارد، پس $(\Delta = ۰)$ است:

$$۶^۲ - ۴(m+۱)(m-۷) = ۰ \rightarrow (m+۱)(m-۷) = ۹$$

$$\rightarrow m^۲ - ۶m - ۱۶ = ۰ \rightarrow (m-۸)(m+۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} m = ۸ \\ m = -۲ \end{cases}$$

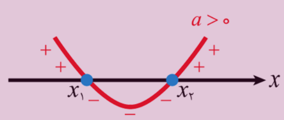
۲ چون علامت جدول در اطراف ریشه، همواره منفی است، پس ضریب $x^۲$ منفی بوده، بنابراین $m + ۱ < ۰$ ، یعنی از بین جواب‌های به دست آمده $m = -۲$ قبول است.

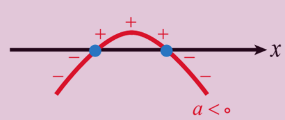
۳ عدد n همان ریشه مضاعف چندجمله‌ای، یعنی $-\frac{b}{۲a}$ است:

$$m = -۲ \rightarrow p(x) = -x^۲ + ۶x - ۹ \rightarrow n = -\frac{۶}{۲(-۱)} = ۳$$

حالت سوم

اگر چندجمله‌ای درجه دوم ، دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد ، علامت چندجمله‌ای در اطراف ریشه‌ها عوض می‌شود که باز هم علامت اولین خانه از سمت راست همان علامت ضریب $x^۲$ یعنی a است.





x		$x_۱$		$x_۲$	
$p(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

x		$x_۱$		$x_۲$	
$p(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

نکته

اگر چندجمله‌ای با درجه بالاتر از ۲ داشته باشیم، برای تعیین علامت آن باید بدانیم:

۱ علامت ضریب جمله‌ای که بیشترین درجه را دارد، همان علامت خانه اول از سمت راست است.

۲ از همان سمت راست، یکی در میان علامت‌ها را عوض می‌کنیم، مگر آنکه به ریشه مضاعف برسیم.

مثال

چندجمله‌ای $p(x) = x(x^۲ - ۳x)(۴ - x^۲)(x+۲)^۳$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ

$$p(x) = x(x(x-۳))(۲-x)(۲+x)(x+۲)^۳ = \underset{\substack{x=۰ \\ \text{ریشه مضاعف}}}{x^۲}\ \underset{x=۳}{(x-۳)}\underset{x=۲}{(۲-x)}\underset{\substack{x=-۲ \\ \text{ریشه مضاعف}}}{(x+۲)^۴}$$

این چندجمله‌ای از درجه ۸ است و جمله با بزرگترین درجه آن $-x^۸$ است، پس خانه اول از سمت راست«منفی» است یعنی در اطراف همه ریشه‌ها علامت تغییر می‌کند به جز ریشه‌های مضاعف.

x		-۲		۰		۲		۳	
$p(x)$	$-$	۰	$-$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$

تعیین علامت عبارات گویا

درسنـــــــامه

برای تعیین علامت یک عبارات گویا، باید توجه کنیم که:

۱. ریشه‌های مخرج کسر، عبارت را تعریف نشده می‌کنند.
۲. ریشه‌های صورت کسر، عبارت را صفر می‌کنند.
۳. در اینجا هم، علامت خانه اول از سمت راست، از ضرب علامت ضریب بزرگترین درجه هر عبارت، به دست می‌آید.
۴. علامت‌ها از سمت راست یکی در میان عوض می‌شوند، به جز در ریشه‌های مضاعف(تکراری)

مثال

عبارت گویای $p(x)=\frac{۴-x^{۲}}{x^{۳}-۲x^{۲}+x}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ

ابتدا صورت و مخرج را تجزیه و ریشه‌یابی می‌کنیم.

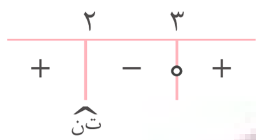
$$p(x)=\frac{\overset{\overset{x=۲}{\uparrow}}{(۲-x)}\overset{\overset{x=-۲}{\uparrow}}{(۲+x)}}{\underset{\underset{x=۰}{\downarrow}}{x}\underset{\underset{x=۱}{\downarrow}}{(x-۱)^{۲}}}$$

فقط $x=۱$ ریشه مضاعف است. ضمناً علامت ضریب بزرگترین درجه‌ها رو که ضرب کنیم، حاصل منفی میشه:

x		-۲		۰		۱		۲	
$p(x)$	+	۰	−	ت ن	+	ت ن	+	۰	−

حل نامعادلات به صورت $f(x) \le g(x)$ یا $f(x) \ge g(x)$

نکته فرض کنید جدول تعیین علامت $f(x)$ به شکل زیر است:



$f(x) > ۰ \rightarrow x < ۲$ یا $x > ۳$

$f(x) \ge ۰ \rightarrow x < ۲$ یا $x \ge ۳$

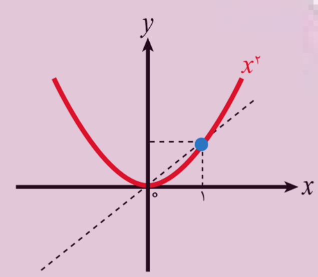
$f(x) < ۰ \rightarrow ۲ < x < ۳$

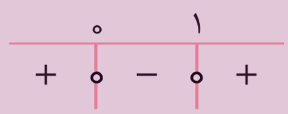
$f(x) \le ۰ \rightarrow ۲ < x \le ۳$

پس برای حل نامعادلات به شکل $f(x) \ge ۰$ یا $f(x) \le ۰$ باید $f(x)$ را تعیین علامت کنیم.

نکته فرض کنید $f(x) = x^۲$ و $g(x) = x$ در این صورت:

$$f(x) > g(x) \xrightarrow{\text{یعنی}} x^۲ > x \xrightarrow{\text{یعنی}} x^۲ - x > ۰ \rightarrow x(x-۱) > ۰$$



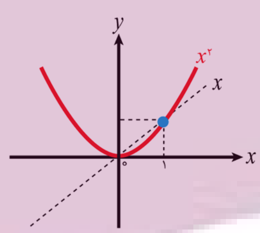


$x < ۰$ یا $x > ۱$

طبق شکل دقیقاً در فواصل $x > ۱$ یا $x < ۰$ نمودار $y = x^۲$ بالای نمودار $y = x$ است.

بدیهی است که در فاصله $۰ < x < ۱$ نمودار $y = x^۲$ پایین نمودار $y = x$ است.

یعنی جواب نامعادله $x^۲ < x$ جواب نامعادله $x^۲ - x < ۰$ یعنی بازه $۰ < x < ۱$ است.

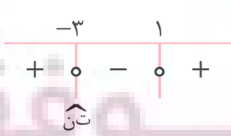


تذکر

درحل نامعادلات به صورت $f(x) > g(x)$ اگر f یا g کسری باشند ، حق طرفین وسطین کردن نداریم ، بلکه باید همه عبارت را به یک طرف بُرده و ساده کنیم و تعیین علامت کنیم ، مگر دریک حالت: «عبارت مخرج همواره مثبت یا همواره منفی باشد»

مثال نامعادلات زیر را حل کنید:

۱) $$\frac{۴x}{x+۳} \le ۱ \Rightarrow \frac{۴x}{x+۳} - ۱ \le ۰ \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{۳x-۳}{x+۳} \le ۰ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$


$\Rightarrow -۳ < x \le ۱$

۲ $\frac{۴x}{x^۲+۳} \le ۱ \xrightarrow{\text{مخرج همواره مثبته}} ۴x \le x^۲+۳ \to x^۲-۴x+۳ \ge ۰ \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-۱)(x-۳) \ge ۰ \Rightarrow$

	۱		۳	
+	۰	−	۰	+

$x \le ۱$ یا $x \ge ۳$

تذکر

هنگام حل نامعادلات، اگر جواب نامعادله در گزینه‌ها به صورت «بازه» بیان شده باشد، می‌تونیم با امتحان گزینه‌ها، سؤال رو حل کنیم یعنی:

«عددی که باعث تفاوت بین گزینه‌ها میشه رو انتخاب و در نامعادله چک کنیم»

مثال جواب نامعادله $\frac{۳x+۱}{۲x-۶} < ۱$ کدام است؟

۱) $(-\infty, -۷)$ ۲) $(۳, \infty)$

۳) $(-۷, ۳)$ ۴) $(-\infty, -۷) \cup (۳, \infty)$

پاسخ عددی انتخاب می‌کنیم که بین گزینه‌ها تفاوت ایجاد کنه، مثلاً $x = ۴$ که در بعضی گزینه‌ها هست در بعضی گزینه‌ها نیست:

$x = ۴ \to \frac{۱۲+۱}{۸-۶} < ۱ \to \frac{۱۳}{۲} < ۱$ نادرست $\to$ *گزینهٔ ۲ و ۴ حذف*

حالا برای گزینه ۱ و ۳ عدد $x = ۰$ رو امتحان می‌کنیم:

$x = ۰ \to \frac{۰+۱}{۰-۶} < ۱ \to -\frac{۱}{۶} < ۱$ درست

گزینهٔ ۳ عدد $x = ۰$ را دارد. پس پاسخ گزینه ۳ هستش.

قوانین توان و ریشه و ساده‌سازی رادیکال‌ها

درسنـــــــــامه

قوانین توان و ریشه و ساده سازی رادیکال‌ها

$x^{۳} = ۶۴ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{۶۴} = \sqrt[۳]{۴^{۳}} = ۴$

عدد ۴ را ریشه سوم عدد ۶۴ می‌گوییم.

$x^{۲} = ۲۵ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲۵} = \pm ۵$

اعداد ±۵ را ریشه های دوم عدد ۲۵ می‌گوییم

عدد +۵ را جذر عدد ۲۵ می‌گوییم

پس جذرهای «ریشه دوم مثبت» است، یعنی هیچ گاه منفی نمی‌شود.

$\sqrt[m]{a^{m}} = a$ $\xrightarrow[\text{جواب مثبت بشه}]{\text{فقط در فرجه زوج باید}}$
$$\begin{cases} \sqrt[۳]{۵^{۳}} = ۵ , \sqrt[۱۱]{a^{۱۱}} = a \\ \sqrt[۲]{۸^{۲}} = ۸ , \sqrt[۲]{(-۵)^{۲}} \neq -۵ \rightarrow \sqrt[۲]{(-۵)^{۲}} = |-\cdots| = ۵ \Rightarrow \sqrt[۲]{\bigcirc^{۲}} = |\bigcirc| \end{cases}$$

حالت اول

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}}$ **مثال** $۴^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt[۲]{۴^{۳}} = \sqrt{۶۴} = ۸$

حالت دوم

$۴^{\frac{۳}{۲}} = (۲^{۲})^{\frac{۳}{۲}} = ۲^{\frac{۲\times۳}{۲}} = ۲^{۳} = ۸$

$\underbrace{\sqrt[n]{a^{m}} = (\sqrt[n]{a})^{m}}_{\text{به شرطی درسته که زیر رادیکال منفی نشه}}$ **مثال**
$$\begin{cases} \sqrt[۴]{۵^{۳}} = (\sqrt[۴]{۵})^{۳} \\ \sqrt{(-۵)^{۲}} \neq (\sqrt{-۵})^{۲} \end{cases}$$

به شرطی درسته که
زیر رادیکال منفی نشه

$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \times b}$ **مثال** $\sqrt[۵]{۲} = \sqrt[۵]{۳۲} = \sqrt[۵]{۲ \times ۳۲} = \sqrt[۳]{۶۴} = \sqrt[۳]{۴^{۳}} = ۴$

$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ **مثال** $\frac{\sqrt{۴۰}}{\sqrt{۱۰}} = \sqrt{\frac{۴۰}{۱۰}} = \sqrt{۴} = ۲$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}$ **مثال** $\sqrt[۳]{\sqrt{۳۲}} \times \sqrt[۴]{۸} = \sqrt[۳\times۲]{۳۲} \times \sqrt[۴]{۸} = \sqrt[۶]{۲^{۵}} \times \sqrt[۴]{۲^{۳}}$

$۲^{\frac{۵}{۶}} \times ۲^{\frac{۳}{۴}} \xrightarrow{\text{توان ها جمع می‌شوند}} ۲^{\frac{۵}{۶}+\frac{۳}{۴}} \rightarrow ۲^{\frac{۳۸}{۲۴}} \rightarrow ۲^{\frac{۱۹}{۱۲}} \rightarrow \sqrt[۱۲]{۲^{۱۹}}$

مثال

$$\begin{cases} 3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \times 2} = \sqrt[4]{81 \times 2} = \sqrt[4]{162} \\ \sqrt[3]{240} = \sqrt[3]{8 \times 30} = \sqrt[3]{2^3 \times 30} = 2\sqrt[3]{30} \end{cases}$$

عدد می‌تونه بره زیر رادیکال، توانش اندازه فرجه میشه

$$\overbrace{a \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \times b}}$$

ساده کردن رادیکال

✓ رادیکال‌ها در صورتی با هم جمع یا از هم کم می‌شوند که **شبیه به هم** باشند، در این صورت ضریب هایشان جمع یا کم می‌شوند:

$$\underbrace{3\sqrt{5} + 8\sqrt{5}}_{11\sqrt{5}} - \sqrt{80} \Rightarrow \underbrace{11\sqrt{5} - \sqrt{80}}_{\text{شبیه نیستند}} \Rightarrow 11\sqrt{5} - \underbrace{\sqrt{16 \times 5}}_{\sqrt{4^2 \times 5}} = 11\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$$

✓**برای ضرب و تقسیم رادیکال‌ها** ⇐ به عنوان راه دوم، تبدیل کن به عدد توان دار

$$\sqrt{12} \times \sqrt[4]{6 \times 24} \Rightarrow (3 \times 4)^{\frac{1}{2}} \times (2 \times 3 \times 3 \times 8)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \underbrace{(3^1 \times 2^2)^{\frac{1}{2}} \times (3^2 \times 2^4)^{\frac{1}{4}}}_{\text{توان‌های داخل پرانتز در توان بیرون پرانتز ضرب می‌شوند}} =$$

$$= 3^{\frac{1}{2}} \times 2^1 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^1 \Rightarrow 3^1 \times 2^2 = 12$$

✓**برای ضرب و تقسیم رادیکال‌ها** ⇐ اگر با قوانین رادیکال ساده نشد، تبدیل کن به عدد توان دار

$$\frac{\sqrt[3]{5\sqrt{5}}}{\sqrt[2]{5\sqrt[3]{5}}} \xrightarrow[\text{رو بردیم زیر رادیکال}]{\text{۵ های بیرون}} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{5^2 \times 5}}}{\sqrt[2]{\sqrt[3]{5^3 \times 5}}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt[2]{5^3}}}{\sqrt[2]{\sqrt[3]{5^4}}} = \frac{\sqrt[6]{5^3}}{\sqrt[6]{5^4}} = \frac{5^{\frac{3}{6}}}{5^{\frac{4}{6}}} = \frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{2}{3}}}$$

در تقسیم، توان ها از هم کم میشن

$$5^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} \longrightarrow 5^{-\frac{1}{6}} \longrightarrow \frac{1}{5^{\frac{1}{6}}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt[6]{5}}$$

نکته حواستون به تفاوت این دو رابطه باشه:

۱ $(\sqrt{x})^2 \xrightarrow{\text{یعنی}} x$

۲ $\sqrt{x^2} \xrightarrow{\text{یعنی}} |x|$

✓ در رابطه اول حتما x مثبته که زیر رادیکال بوده، پس خودش میاد بیرون.

✓ ولی در رابطه دوم x میتونه منفی باشه، پس باید + بیاریمش بیرون. $\xrightarrow{\text{مثل این}} \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

رادیکال مرکب $\longleftarrow a + b\sqrt{c} = (\dots\dots\dots)^2$

زیر a: (دومی به توان ۲) + (اولی به توان ۲)

زیر $b\sqrt{c}$: دو برابر اولی در دومی

✓ اگر عددی غیر رادیکالی با عددی رادیکالی جمع یا منها شد اغلب می‌تونیم اون عبارت رو به اتحاد مربع تبدیل کنیم.

رادیکال مرکب

۱ $3 + 2\sqrt{2} \xrightarrow[\text{پشت رادیکال رو بزار}]{\text{رادیکال و علامت}} (? + \sqrt{2})^2 \xrightarrow[?^2 + (\sqrt{2})^2]{\text{دومی به توان ۲ + اولی به توان ۲}} ? = 1 \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^2$

۲ $۲۱-\overbrace{۸}^{\text{دو برابر اولی در دومی}}\sqrt{۵} \longrightarrow (?-\sqrt{۵})^{۲} \xrightarrow[?=۴]{?^{۲}+(-\sqrt{۵})^{۲}} (۴-\sqrt{۵})^{۲}$

نکته اگر عدد زیر رادیکال قابل تجزیه بود
- یک بار خودش رو امتحان کن مثل بالایی‌ها
- یک بار تجزیه هاش رو بزار

---

۳ $۸+۲\sqrt{۱۵}$

حالت اول $(?+\sqrt{۱۵})^{۲}$ $\quad \underline{?^{۲}+(\sqrt{۱۵})^{۲}=۸}$

اصلا نمیشه

حالت دوم $\sqrt{۱۵}=\sqrt{۵}\times\sqrt{۳} \Longrightarrow (\sqrt{۵}+\sqrt{۳})$ $\quad \underline{(\sqrt{۵})^{۲}+(\sqrt{۳})^{۲}=۸}$

دو برابر اولی در دومی هم $۲\sqrt{۱۵}$ میشه

مثال حاصل عبارت $\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}}+\sqrt{۱۴+۶\sqrt{۵}}$ را به‌دست آورید؟

$$\sqrt{(۳+\sqrt{۵})^{۲}}+\sqrt{(۳-\sqrt{۵})^{۲}}=\underbrace{|۳+\sqrt{۵}|}_{+}+\underbrace{|۳-\sqrt{۵}|}_{+}=۳+\cancel{\sqrt{۵}}+۳-\cancel{\sqrt{۵}}=۶$$

درسنامه

اتحادها و گویا کردن

✓ مربع دو جمله‌ای

$$\underbrace{(a\pm b)^2}_{} = \overset{\text{اولی به توان ۲}}{a^2} \pm \overset{\text{۲ برابر اولی در دومی}}{2ab} + \overset{\text{دومی به توان ۲}}{b^2}$$

مثال $(x\pm 1)^2 = x^2 \pm 2x + 1$

مثال $(x^2+\sqrt{x})^2 = x^4 + 2x^2\sqrt{x} + x$

✓ مزدوج

$$■^2 - ●^2 = (■ + ●)(■ - ●)$$

مثال $x^2 - 16 \rightarrow x^2 - 4^2 \Rightarrow (x+4)(x-4)$

مثال $a^4 - 1 \rightarrow \boxed{a^2}^2 - 1^2 \Rightarrow (a^2+1)\underbrace{(a^2-1)}_{(a-1)(a+1)}$

✓ مکعب دو جمله‌ای

$$(a+b)^3 = \overset{\text{اولی به توان ۳}}{a^3} + \underbrace{3a^2b}_{\text{۳ برابر مربع اولی در خود دومی}} + \overset{\text{۳ برابر مربع دومی در خود اولی}}{3ab^2} + \overset{\text{دومی به توان ۳}}{b^3}$$

مثال $(x+5)^3 = x^3 + 3(x^2\times 5) + 3(x\times 5^2) + 5^3 \Rightarrow x^3 + 15x^2 + 75x + x^3$

✓ چاق و لاغر

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

مثال

$$x^3 + 8 \Rightarrow x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$27t^3 - 1 \Rightarrow (3t)^3 - 1^3 = (3t-1)(9t^2 + 3t + 1)$$

✓ مربع سه جمله‌ای

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

نکته

روش‌های تجزیه چند جمله‌ای‌ها

✓ تجزیه با فاکتورگیری:

$$x^3 = x \xrightarrow[\text{Xها رو بزنی}]{\text{حق نداری از طرفین معادله}} x^3 - x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از x}} x(x^2-1) = 0 \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = \pm 1} \end{cases}$$

$$\underbrace{x^4 - x^2}_{\text{فاکتور از }x^2} + \underbrace{2x^2 - 2}_{\text{فاکتور از ۲}} = 0 \Longrightarrow x^2(x^2-1) + 2(x^2-1) = 0 \Longrightarrow (x^2-1)(x^2+2) = 0$$

فاکتور از x^2-1

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = \pm 1} \\ x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = -2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

✓ تجزیه با اتحاد مشترک:

$$x^2+\square x+\triangle=0 \Rightarrow (x+a)(x+b)$$

جمع a و b — ضرب a و b — جمله مشترک

$$x^2+4x+3=0 \to (x+1)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \to x=-1 \\ x+3=0 \to x=-3 \end{cases}$$

جمع — ضرب

✓ تجزیه با اتحاد مشترک:

$$x^2-6x-7 \to (x-7)(x+1)$$

جمع — ضرب

✓ تجزیه ضریب‌دار: وقتی پُشت x^2 ضریب داریم:

$$5x^2-8x-4 \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{ضریب را در عدد ثابت}} x^2-8x-20 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x-10)(x+2)$$

✓ ضریب x^2 را در یکی از پرانتزها پشت x و در دیگری زیر عدد ثابت می‌گذاریم (به دلخواه):

$$(x-\frac{10}{5})(5x+2)$$

روش‌های گویا کردن

حالت اول مخرج $\sqrt[n]{\bigcirc}$ باشد ← در $\sqrt[n]{\bigcirc^{n-1}}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{3}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

نکته

$$\frac{x+2}{\sqrt[3]{x-1}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-1}}\times\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow \frac{(x+2)\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1}$$

حالت دوم

مخرج $\sqrt{\bigcirc}\pm\square$ باشد ← در $\sqrt{\bigcirc}\mp\square$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{6}{3+\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{6}{3+\sqrt{5}}\times\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{6(3-\sqrt{5})}{9-5} \Rightarrow \frac{6(3-\sqrt{5})}{4}$$

مزدوج

$$3^2-(\sqrt{5})^2$$

حالت دوم

$$\frac{۲}{x-\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{۲}{x-\sqrt{x}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{۲(x+\sqrt{x})}{x^{۲}-x}$$

مزدوج

$$x^{۲}-(\sqrt{x})^{۲}$$

حالت سوم مخرج $\sqrt[۳]{\bigcirc} \pm \square$ باشد ← در چاق آن ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲-\sqrt[۳]{۵}} \longrightarrow \underbrace{\frac{۱}{۲-\sqrt[۳]{۵}}}_{\text{لاغر}} \times \underbrace{\frac{۲^{۲}+۲\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۵^{۲}}}{\cancel{۲^{۲}}+۲\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۵^{۲}}}}_{\text{چاق}} = \frac{۴+۲\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲۵}}{۸-۵}$$