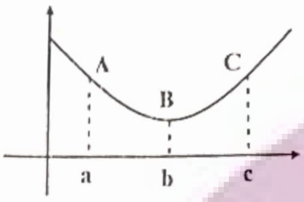
اگر نقطه $(x_0, f(x_0))$ در تابع نقطه ابتدایی یا انتهایی باشد، این نقطه در تابع صدق می‌کند و تابع برای آن تعریف شده است.
اگر در سؤال به نوع اکسترمم اشاره نشود، منظور مطلق است.
اگر $f'(x)$ ... آن‌گاه آهنگ تغییر تابع در حال افزایش و اگر $f'(x)$ ... آهنگ تغییر تابع در حال کاهش است. در چه بازه‌ای آهنگ تغییر تابع $y = x^4 - 6x^2$ در حال کاهش است؟
$y' = 12x^2 - 12 \ldots$

کاربرد مشتق در بررسی یکنوایی و یافتن نقاط اکسترمم، بحرانی

توابع صعودی و نزولی:



تابع‌های صعودی اکید و نزولی اکید: با مشاهده‌ی نمودار تابع f در شکل وقتی نقطه‌ای در امتداد منحنی از A به C برود مقادیر تابع با افزایش طول کاهش می‌یابند، و وقتی نقطه در امتداد منحنی از C به B برود، مقادیر تابع با افزایش طول افزایش می‌یابند در این صورت گوییم f بر بازه‌ی [a,c] نزولی اکید و بر بازه‌ی [c,b] صعودی اکید است.

ذیلاً تعاریف تابع‌های صعودی اکید و نزولی اکید و تابع ثابت بر یک بازه را بیان می‌کنیم.

الف) تابع f روی بازه‌ی $I = [a,b]$ صعودی اکید است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I،

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع f روی بازه‌ی $I = [a,b]$ صعودی است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I،

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

ب) تابع f روی بازه‌ی $I = [a,b]$ نزولی اکید است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I،

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع f روی بازه‌ی $I = [a,b]$ نزولی است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I،

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

پ) تابع f روی بازه‌ی $I = [a,b]$ ثابت است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I،

$$f(x_1) = f(x_2)$$

با توجه به تعریف بالا، تابع f روی بازه‌ی I اکیداً یکنواست، اگر روی بازه‌ی I یا صعودی اکید و یا نزولی اکید باشد.

نکته: در توابع چند ضابطه‌ای برای بررسی یکنوایی اکید تابع لازم است تابع در هر ضابطه‌اش یکنوا باشد واشتراک برد ضابطه‌ها تهی باشد.

برای اینکه تابعی صعودی (اکیداً صعودی) باشد، باید مشتق آن همواره نامنفی باشد و در هیچ بازه‌ای صفر نشود.

توابع مشتق‌ناپذیر

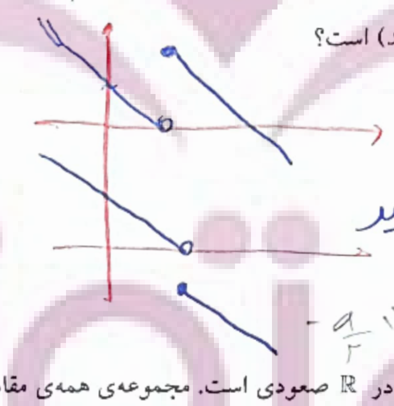
مثال: کدام یک از توابع زیر نزولی (اکید) است؟

$$1) f(x) = \begin{cases} -x+1 & x<1 \\ -x+3 & x \ge 1 \end{cases}$$

X

$$2) f(x) = \begin{cases} -x+1 & x<1 \\ -x & x \ge 1 \end{cases}$$

نزولی اکید



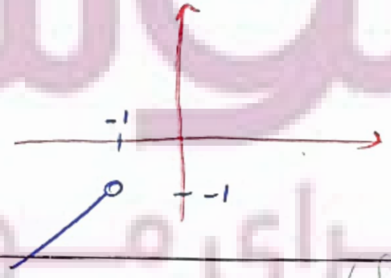
مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \ge -1 \\ x & x < -1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ صعودی است. مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر a کدام است؟

$-\frac{a}{2} \le -1$ $\quad 1+a \ge -1$

حل: $x_{min} = -\frac{a}{2} \le -1 \Rightarrow a \ge 2$ (1)

$f(-1) = 1 - a \ge -1 \Rightarrow a \le 2$ (2)

$(1) \cap (2) : a = 2$



... $f(x)$ ... $f'(x)$ ...

برای اکسترمم نسبی ... $f'(x)$ ... اگر x_0 ... دامنه باشد و ... f در $x = x_0$ اکسترمم نسبی نداشته باشد، مانند تابع $f(x) = x|x|(x-1)$

ارتباط یکنوایی با مشتق :

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 = f'(x) \geq 0$; صعودی

قضیه: فرض کنیم تابع f بر بازه‌ی بسته $[a,b]$ پیوسته و بر بازه‌ی باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت :

الف) اگر به‌ازای هر x در (a,b)، $f'(x)>0$، آن‌گاه تابع f بر $[a,b]$ صعودی اکید است.

اگر به‌ازای هر x در (a,b)، $f'(x)\geq 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a,b]$ صعودی است.

ب) اگر به‌ازای هر x در بازه‌ی (a,b)، $f'(x)<0$، آن‌گاه تابع f، بر بازه‌ی $[a,b]$ نزولی اکید است.

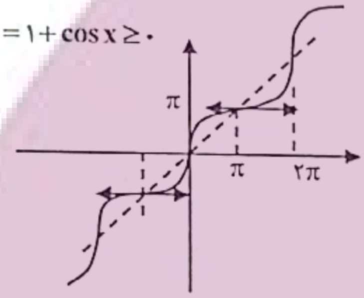
اگر به‌ازای هر x در (a,b)، $f'(x)\leq 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a,b]$ نزولی است.

پ) اگر به‌ازای هر x در بازه‌ی (a,b)، $f'(x)=0$، آن‌گاه تابع f، بر بازه‌ی $[a,b]$ ثابت است و بالعکس.

این قضیه به ما اجازه می‌دهد که بررسی کنیم، یک تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌ای ثابت است.

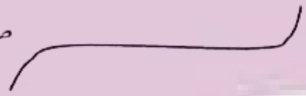
تذکر: اگر تابع در نقاط محدودی (نقاط منفصل نه در طول یک بازه) دارای مشتق برابر صفر باشد، در قضیه فوق تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی می باشد. مثلاً در تابع $f(x)=x+\sin x$ تابع اکیداً صعودی است.

$f'(x)=1+\cos x\geq 0$



مشتق در نقاط محدودی برابر صفر است اما تابع صعودی (اکید) می‌باشد پس اگر برابر صفر شد، باید بررسی کنیم که آیا تابع در یک بازه برابر عدد ثابت بوده است یا در یک نقطه محدود مشتق آن صفر شده است.


صعودی(اکید)


صعودی

اگر تابع در قسمتی از دامنه‌اش صعودی و در قسمت دیگرش نزولی باشد، آن را صعودی یا نزولی نمی‌گویند. (نه صعودی نه نزولی)

تذکر : اگر تابع در تمام دامنه‌اش مشتق‌پذیر نباشد (حتی اگر در بعضی از نقاط مشتق وجود نداشته باشد) نمی‌توان از تعیین علامت مشتق پی به صعودی یا نزولی بودن آن برد.

مثال : حدود a کدام باشد تا مشتق تابع $f(x)=x^4+2ax^3+x^2-x$ همواره صعودی اکید باشد؟

حل :

$f'(x)=4x^3+6ax^2+2x-1$

$f''(x)=12x^2+12ax+2$

با توجه به این که مشتق دوم تنها دو ریشه دارد، صعودی اکید بودن مشتق در واقع همواره نامنفی بودن مشتق دوم تابع است، لذا برای آن که تابع f' همواره صعودی اکید باشد، باید $f''\geq 0$ باشد، لذا $\Delta_{f''}\leq 0$ است، پس:

$\Delta=36a^2-24\leq 0 \Rightarrow a^2\leq \frac{2}{3} \Rightarrow |a|\leq \sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

ایران توشه — توشه ای برای موفقیت

مثال : تابع $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ در چه فاصله‌ای صعودی است؟ $x\neq 0$ مشتق ناپذیر

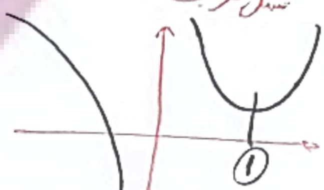
حل : اکیداً صعودی

$f'=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x^3-1)}{x^2}$

	0	1	
-	-	+	

$(1,\infty)$

اکیداً صعودی



مثال : تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax^2+x$ همواره صعودی است. محدوده‌ی تغییرات a کدام است؟

حل : $3x^2+2ax+1$

$4a^2-12\leq 0$

$-\sqrt3\leq a\leq\sqrt3$

$f'=3x^2+2ax+1\geq 0$

$\Delta\leq 0: (2a)^2-4(1)(3)\leq 0$

$-\sqrt3\leq a\leq\sqrt3$

مثال : تابع $f(x)=(x-1)^3(x+1)$ در کدام بازه نزولی است؟

حل : $3(x-1)^2(x+1)+(x-1)^3$

$(x-1)^2(4x+2)$

$x<-\frac{1}{2}$

$f'=3(x-1)^2(x+1)+(x-1)^3\times 1$

$=(x-1)^2(3x+3+x-1)=(x-1)^2(4x+2)$

x		$-\frac{1}{2}$		1	
y	-		+		+

مثال : تابع $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ در کدام بازه ها صعودی است؟ $x\neq 1,-1$

حل :

$f'=\frac{(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}>0$

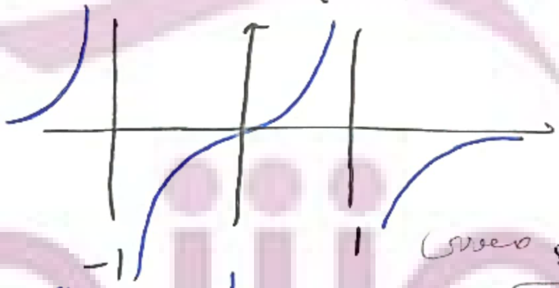
$\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$

$(-\infty,-1)$

$(-1,1)$ صعودی

$(1,\infty)$ صعودی

$R-\{1,-1\}$



مثال : تابع $y=x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ در دامنه تعریفش چگونه است؟ صعودی $0\leq x<1$

حل :

$\sqrt{\frac{x}{1-x}}+x\times\frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$

$\frac{x}{1-x}\geq 0\to 0\leq x<1$

$y'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$

$y'=\sqrt{\frac{x}{1-x}}+x\times\frac{\frac{1}{(1-x)^2}>0}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}>0}$

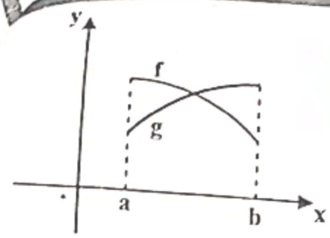
اکیداً صعودی

ایران توشه - توشه‌ای برای موفقیت

اگر f اکیداً صعودی باشد f^{-1} هم اکیداً صعودی

تیپ دوم :

مثال : نمودارهای دو تابع مشتق‌پذیر f و g به‌صورت روبه‌رو در بازه $[a,b]$ می‌باشند.



تابع $\frac{f}{g}$ از نظر یکنوایی در این بازه چه وضعی دارد؟ نزولی

حل :

$$\frac{f\downarrow}{g\uparrow}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} < 0$$

مثال : اگر f , g دو تابع مشتق پذیر باشند بطوریکه $f'(x)=g(x)$ و $g'(x)=-f(x)$ تابع $h(x)=f^2(x)+g^2(x)$ چه نوع تابعی است؟ صعودی: نزولی: تابع ثابت

حل : ثابت

$$h' = 2f\underbrace{f'}_{g(x)} + 2g\underbrace{g'}_{-f(x)} = 0$$

تابع ثابت

تیپ سوم : یکنوایی تابع مرکب:

اگر توابع f ، هر دو صعودی یا هر دو نزولی باشند fog صعودی و اگر یکی از آنها صعودی و دیگری نزولی باشد fog نزولی است.

۱- f^{-1} نیز از f تبعیت می‌کند. (از لحاظ صعودی و نزولی بودن)

مثال : اگر f اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی و مثبت باشد و $k(x)=g^2o(-f^3), h(x)=f^{-1}o\frac{1}{g}$ ، h و k چگونه اند؟

نزولی نزولی صعودی نزولی

حل :

$$\frac{1}{g\downarrow}\uparrow$$

$$h = \underbrace{f^{-1}}_{\text{صعودی}} o \underbrace{\left(\frac{1}{g}\right)}_{\text{صعودی}} \rightarrow \text{صعودی}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-\overset{\text{نزولی}}{g'}}{g^2} \quad \boxed{\text{صعودی}}$$

$$(g^2)' = \underbrace{2g}_{+}\underbrace{g'}_{-} < 0 \quad \text{نزولی}$$

$$(f^3)' = \underbrace{3f^2 f'}_{+} = \text{صعودی} \Rightarrow -f^3 \text{ نزولی}$$

$$\underbrace{g^2}_{\text{نزولی}} o \underbrace{(-f^3)}_{\text{نزولی}} \Rightarrow \text{صعودی}$$

$$(fog)' = \underbrace{g'}_{+} \times \underbrace{f'og}_{+} \Rightarrow \text{صعودی}$$

همواره + همواره +

$$f(a)=b \rightarrow f^{-1}(b)=a$$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

تیپ صعودی و نزولی معکوس هم هستند.

$$y=f(x) \rightarrow x=f^{-1}(y)$$

$$1 \quad y' \times f^{-1\,\prime}(y) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{y'}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فرض کنید $x=a$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد. در این صورت،
۱) f می‌تواند در این نقطه مشتق‌ناپذیر باشد.
۲) اگر f در این نقطه مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه $f'(a)=0$ (مماس افقی) یعنی علامت مشتق آن در تابع مشتق تغییر می‌کند.
۳) نقطه $(a, f(a))$ روی نمودار تابع قرار دارد.

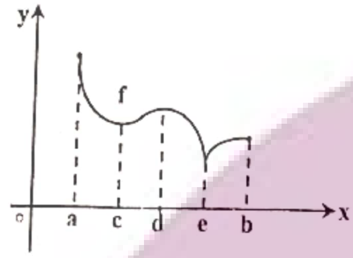
نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی (اکسترمم‌های نسبی) :

فرض کنید D دامنه‌ی تابع f و شامل نقطه‌ی c است و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شامل نقطهٔ c) باشد که :

الف) به‌ازای هر x متعلق به I داشته باشیم : $f(x) \le f(c)$ در اینصورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می نامیم .

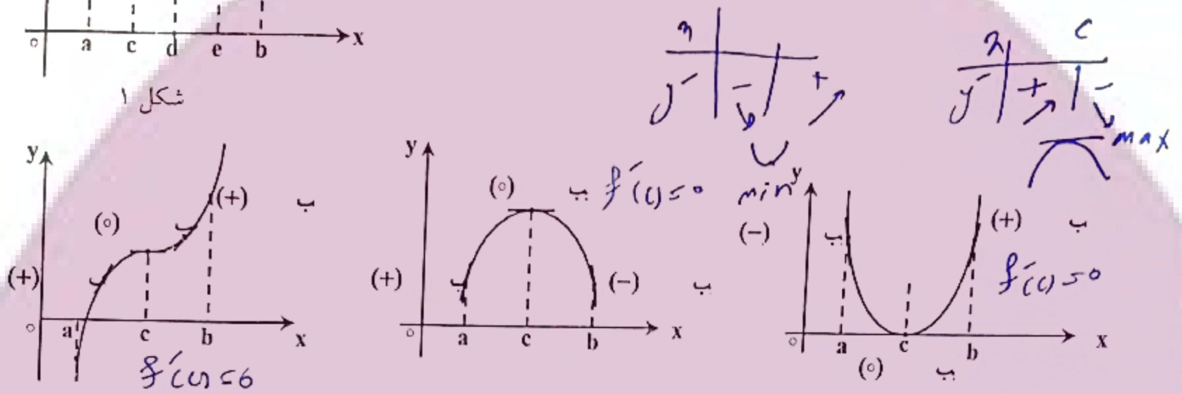
ب) به‌ازای هر x متعلق به I داشته باشیم : $f(x) \ge f(c)$ در اینصورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می نامیم .

پ) $f(c)$ یک مقدار اکسترمم نسبی تابع f است که یا مقدار ماکزیمم نسبی و یا مقدار مینیمم نسبی تابع f باشد.



شکل ۱

در شکل ۱ مشاهده می‌شود که تابع f در نقـاط a و d و b دارای مـاکزیمم نسبی و در نقاط c و e دارای مینیمم نسبی است .



(الف) مینیمم نسبی　　ب) ماکزیمم نسبی　　پ) مقدار اکسترمم نسبی وجود ندارد.

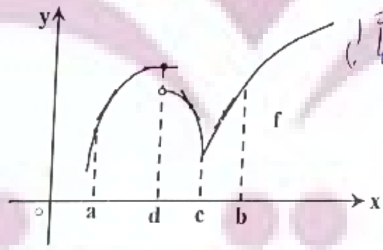
شکل ۲

اکسترمم نسبی { مشتق صفر شود / مشتق تغییر علامت دهد

$f(c) \ge f(x)$; $x \in (a,b)$ و به ازای هر $c \in (a,b)$

از شکل ۲ معلوم است که در قسمت (الف) روی بازه‌ی (a,c) مشتق منفی است و روی بازه (c,b) مشتق مثبت است و در نقطه‌ی c مینیمم نسبی داریم و در قسمت (ب) که روی بازه‌ی (a,c) مشتق مثبت و روی بازه‌ی (c,b) مشتق منفی است در نقطه‌ی c ماکزیمم نسبی داریم و البته در نقاط اکسترمم نسبی شکل ۲، $f'(c)=0$ است و امّا قابل ذکر است که لزومی ندارد در نقاط اکسترمم نسبی تابع مشتق داشته باشد (شکل ۳ را ببینید).

اکسترمم مطلق همان نسبی نیز هست الزاماً!



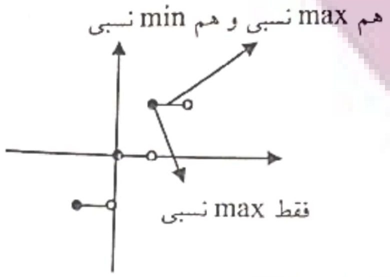
شکل ۳ – تابع در $x=c$ مشتق ندارد و در این نقطه مینیمم نسبی دارد

در این شکل، روی بازه‌ی (c,b) مشتق مثبت و روی بازه‌ی (d,c) مشتق منفی است و $f'(c)$ موجود نیست (تابع در نقطه‌ی c بازگشتی است) و $f(c)$ مقدار مینیمم نسبی است. روی بازه‌ی (d,c) مشتق تابع منفی و روی بازه‌ی (a,d) مشتق مثبت است و $f(d)$ مقدار ماکزیمم نسبی است ضمن این‌که تابع در نقطه‌ی d ناپیوسته و در نتیجه مشتق ندارد.

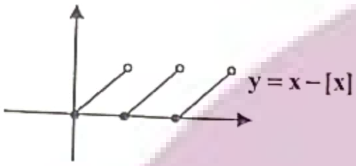
ایران توشه – توشه‌ای برای موفقیت

نکته : در تابع $f(x)=k$ (تابع ثابت) هر نقطه اکسترمم نسبی است (هم ماکسیمم هم مینیمم)

مثلاً برای تابع $f(x)=[x]$ هر نقطه اکسترمم نسبی است. نقاط $x\in Z$ فقط ماکسیمم نسبی و نقاط $x\notin Z$ هم مینیمم و هم ماکسیمم نسبی است.



در تابع $f(x)=x-[x]$ نقاط $x\in Z$ فقط مینیمم نسبی هستند.
در نقاط $x\notin Z$ نه ماکسیمم و نه مینیمم نسبی است.

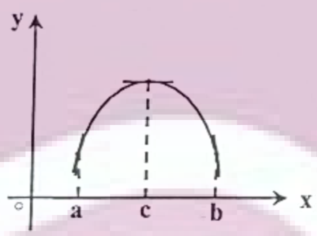


پرسش: می‌خواهیم بدانیم در چه نقاطی مقادیر اکسترمم نسبی رخ می‌دهند؟

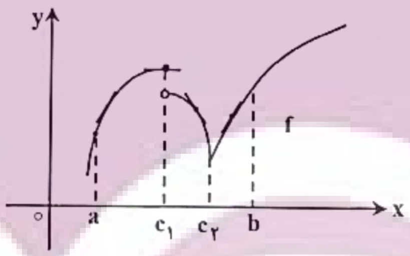
معمولاً مقادیر اکسترمم یک تابع را در بازه‌ای مانند I از دامنه‌ی آن جست‌وجو می‌کنیم البته ممکن است بازه‌ی I شامل نقاط انتهایی خود باشد یا نباشد. برای نمونه بازه‌ی $I=[a,b]$ شامل هر دو نقطه‌ی انتهایی خود است و بازه‌ی $I=[a,b)$ فقط شامل نقطه‌ی انتهایی چپ خود می‌باشد و بازه‌ی $I=(a,b)$ شامل نقطه‌ی انتهای خود نیست. در سه حالت زیر مقادیر اکسترمم تابع را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط درون بازه داشته باشیم و در آن نقاط مقدار مشتق صفر است. (شکل ۵– الف)

حالت دوم: وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط درون بازه داشته باشیم و در آن نقاط تابع مشتق‌پذیر نباشد. (شکل ۵– ب) که تابع در نقطه‌ی c_2 بازگشتی است و در نقطه‌ی c_1 پرشی و ناپیوسته است.



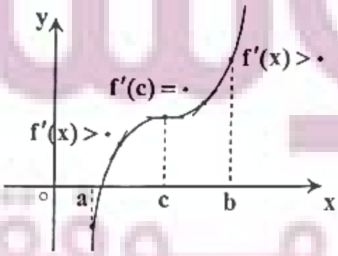
شکل ۵– الف

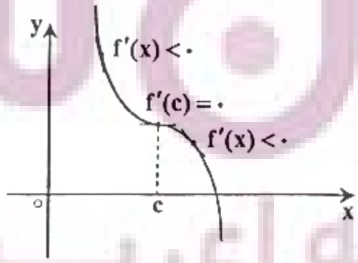


شکل ۵– ب

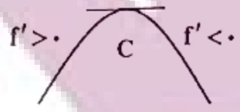
روش پیدا کردن اکسترمم نسبی در توابع مشتق پذیر:

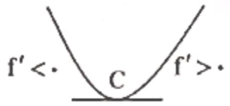
قضیه فرما: اگر نقطهٔ $x=c$ نقطه ای درون بازهٔ I بوده و تابع $f(x)$ در بازهٔ I مشتق‌پذیر باشد و در نقطه $x=c$ اکسترمم نسبی داشته باشد ، آنگاه $f'(c)=0$.این شرط، شرط لازم وجود اکسترمم در نقطه c است ولی کافی نیست ، زیرا ممکن است $f'(c)=0$ باشد اما تابع در نقطه c اکسترمم نسبی نداشته باشد.





شرط کافی برای آن که نقطه $x=c$ نقطه اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر f باشد آن است که $f'(c)$ در اطراف نقطه c تغییر علامت دهد.لذا برای به دست آوردن اکسترمم نسبی در توابع مشتق‌پذیر کافی است ریشه‌های مشتق تابع را به دست آوریم.





اگر تابع حول مشتق تغییر علامت داد نقطه ، نقطهٔ اکسترمم است

(به غیر از تابع ثابت که تمام نقاطش اکسترمم است و همواره هم $f'(c)=0$ است).

به علاوه نقاط ابتدا و انتهای بازه ممکن است اکسترمم نسبی باشند ، در حالی که مشتق صفر نیست ، لذا باید مواظب نقاط ابتدا و انتهای بازه هم باشیم . مثلاً در توابعی به فرم $f(x)=(x-a)^{2n}$ نقطه $x=a$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع می‌باشد.

☜ مثال : مجموع مقادیر اکسترمم نسبی تابع $y=2\cos x+\sin 2x$ در بازه‌ی $(0,2\pi)$ چقدر است؟

✍ حل :

$$y'=-2\sin x+2\cos 2x=-2\sin x+2(1-2\sin^2 x)=-2(2\sin^2 x+\sin x-1)\Rightarrow y'=-2(\sin x+1)(2\sin x-1)$$

$$y'=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\Rightarrow y=\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{-3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow y_1+y_2=0$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $\sin x+1=0$ اکسترمم نیستند، چون معادله‌ی $\sin x=\pm 1$ دارای ریشه‌ی مضاعف است. در واقع عبارت $\sin x+1$ در اطراف ریشه‌هایش ($x=(2k-\frac{1}{2})\pi$ ها) تغییر علامت نمی‌دهد. دقت کنید منظور از نقطه‌ی اکسترمم، طول (x) اکسترمم و منظور از اکسترمم یا مقدار اکسترمم عرض (y) اکسترمم است.

☜ مثال : مقادیر min و max نسبی تابع $f(x)=x+\frac{4}{x+1}+k$ قرینه یکدیگرند. مقدار k کدام است؟

✍ حل : ریشه‌های ساده‌ی $y'=0$ طول نقاط اکسترمم نسبی f هستند.

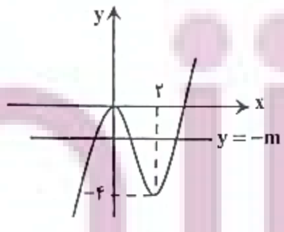
$$f'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=0\Rightarrow (x+1)^2=4\Rightarrow \begin{cases}x=1\\x=-3\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f(1)=1+2+k=k+3\\f(-3)=-3-2+k=k-5\end{array}\right\}\Rightarrow k+3+k-5=0\Rightarrow 2k=2\Rightarrow k=1$$

دقت کنید اصطلاح اکسترمم یا مقدار اکسترمم در واقع عرض (y) نقطه‌ی اکسترمم۲ پاسخ است.

☜ مثال : به‌ازای چند عدد صحیح m، معادله‌ی $x^3+m=3x^2$ دارای سه ریشه است؟

✍ حل :



$$x^3-3x^2=-m\Rightarrow \begin{cases}y=x^3-3x^2\\y=-m\end{cases}$$

ابتدا ماکزیمم و مینیمم تابع را به دست می‌آوریم:

$$y'=3x^2-6x=0\Rightarrow 3x(x-2)=0\Rightarrow \begin{cases}x=0\Rightarrow y(0)=0\\x=2\Rightarrow y(2)=-4\end{cases}$$

برای این که خط $y=-m$ نمودار تابع $y=x^3-3x^2$ را در سه نقطه قطع کند، باید داشته باشیم:

$$-4<-m<0\Rightarrow 0<m<4\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=1,2,3$$

در واقع باید m بین ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع y قرار داشته باشد.

Max مطلق
اما Max نسبی نیست
Min مطلق
استثنا : بانک تغییر علامت ندارد

مثال : نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y=(x^2-1)\sqrt{4-x^2}$ در بازه‌ی $(-2,2)$ کدام است؟

حل : مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

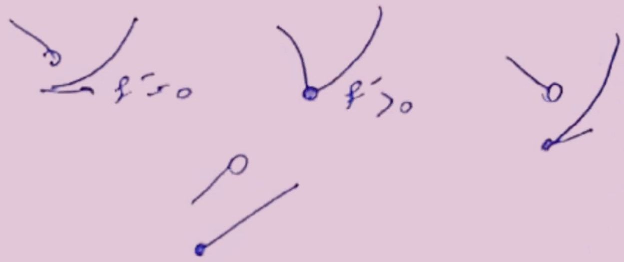
$$y' = 2x\sqrt{4-x^2} - \frac{x(x^2-1)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2x(4-x^2)-x(x^2-1)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{x(9-3x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = 0$$

x	-2		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		2
y'		+	0	−	0	+	0	−	
			max		min		max		

مثال : تابع f در نقطه‌ی c دارای مینیمم است و مشتق راست دارد. الزاماً این مشتق چگونه است؟

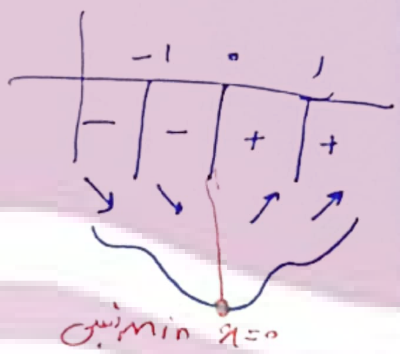
۱) مثبت ۲) منفی ۳) نامنفی ۴) نامثبت

حل :



مثال : در توابع زیر نقاط اکسترمم نسبی را بیابید.

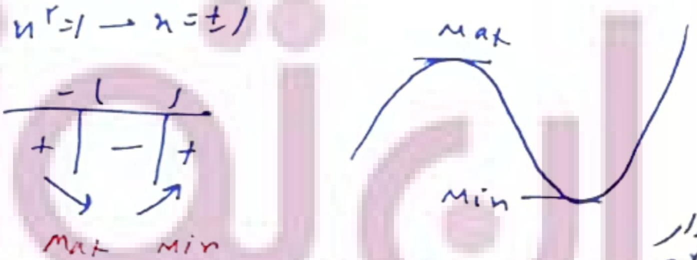
$y=(x^2-1)^3$ $\quad 3(x^2-1)^2(2x) = 6x(x-1)^2(x+1)^2 = 0$, $x=0$, $x=1$, $x=-1$



$y=x^3-3x$ $\quad 3x^2-3$ $\quad (-1,1)$

$3x^2-3=0 \to x^2=1 \to x=\pm 1$

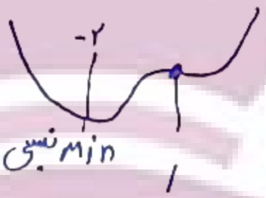
$3(x^2-1)$

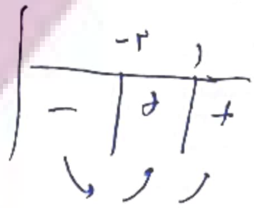


طول نقطه اکسترمم : x مقدار
اکسترمم : y مقدار

تابع ثابت، هر نقطه هم اکسترمم نسبی هم در صورتی که تنها تابع باشد اکسترمم مطلق

$y = x^4 - 6x^2 + 8x$ $\quad y' = 4x^3 - 12x + 8 = (x-1)(4x^2+4x-8) = (x-1)^2(4x+8) \Rightarrow 4(x-1)^2(x+2)$



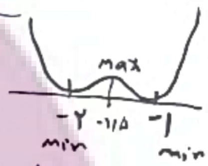


$y = (x+1)^4 (x+2)^4 \Rightarrow 4(x+1)^3(x+2)^4 + 4(x+2)^3(x+1)^4 = (x+1)^3(x+2)^3(\ldots)$

$4(x+1)^3(x+2)^4 + 4(x+2)^3(x+1)^4 = 4(x+1)^3(x+2)^3(\underbrace{x+2+x+1}_{2x+3})$

−۲   −۱/۵   −۱

− | + | − | +



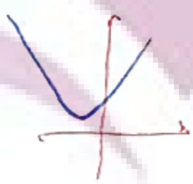
min نسبی −۲ و −۱

max نسبی −۱/۵

$y = x + \sqrt{4x^2+9} \Rightarrow 1 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+9}}$

$1 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+9}} = \frac{\sqrt{4x^2+9}+4x}{\sqrt{4x^2+9}} \xrightarrow[-4x=\sqrt{4x^2+9}]{y'=0} 16x^2 = 4x^2+9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{12}$

$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \xrightarrow{x<0} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

− | +

min نسبی

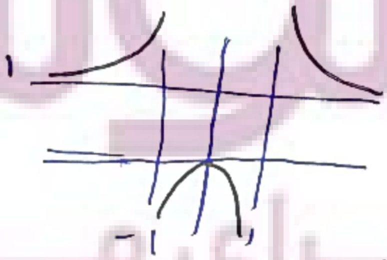
$y = \frac{x^2}{x^2-1} \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$y' = \frac{2x(x^2-1) - x^2(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0$

−۱   ۰   ۱

+ | + | − | −

max نسبی

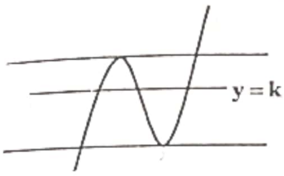


✗ در قسمت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی اکسترمم نداریم!

ایران توشه — توشه ای برای موفقیت

$f(x)=x^2$ $\quad g(x)=\sqrt{x}$ $\quad f'(g(1))=f'(1)=2$ $\quad f\circ g=(\sqrt{x})^2=x$ $\quad (f\circ g)'(1)=1$ $\quad f'(g)\neq (f(g))'$

پیدا کردن عرض نقاط اکسترمم نسبی تابع بدون یافتن طول آنها در توابع مشتق پذیر:



در توابعی که خط مماس بر تابع در نقطه اکسترمم موازی محور x هاست (در نقاط اکسترمم مشتق پذیر) می‌توان عرض نقطه اکسترمم نسبی را به صورت مستقیم به دست آورد.برای این منظور خط y = k را با تابع قطع می‌دهیم و شرط ریشه مضاعف داشتن آن را تحقیق می‌کنیم (البته در اینجا لازم است تحقیق شود که تابع در y به دست آمده اکسترمم نسبی دارد یا نه)

مثال : یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=\frac{x^2+9x+a}{x-1}$ روی خط $y=5$ قرار دارد. مقدار a کدام است؟

حل : برای به دست آوردن y اکسترمم نسبی بدون به دست آوردن x آن، کافی است خط $y=k$ را با منحنی قطع داده و شرط ریشه‌ی مضاعف داشتن آن را کنترل کنیم.

در اینجا چون منحنی بر خط $y=5$ مماس است، لذا معادله‌ی حاصل از تقاطع باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$5=\frac{x^2+9x+a}{x-1} \Rightarrow x^2+4x+a+5=0$$

شرط داشتن ریشه‌ی مضاعف $\Delta=0 \Rightarrow 16-4a-20=0 \Rightarrow a=-1$

مثال : مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع $y=\frac{2x^2+1}{x+1}$ را به دست آورید.

حل :

$\frac{2x^2+1}{x+1}=k \Rightarrow 2x^2-kx-k+1=0$

$\Delta=k^2-4(2)(1-k)=k^2+8k-8$

$k=\frac{-8\pm\sqrt{64+32}}{2}=\frac{-8\pm4\sqrt{6}}{2}=-4\pm2\sqrt{6}$

با این راه نمی‌توان فهمید کدام max یا کدام min است! ← مشتق بگیری

مثال : اگر مینیمم تابع $y=(m-1)x^2+x$ برابر ۲- باشد، m چقدر است؟

حل :

$(m-1)x^2+x=-2 \to (m-1)x^2+x+2=0$

$\Delta=0=1^2-4(2)(m-1)=0 \to 8(m-1)=1$

$m-1=\frac{1}{8} \to m=\frac{9}{8}$

مثال : اگر ماکسیمم نسبی تابع $y=\frac{x^2+ax+2}{x-1}$ برابر ۲- باشد، a کدامست؟

حل :

$y=\frac{x^2+ax+2}{x-1}=-2 \to x^2+(a+2)x=0$

$\Delta=(a+2)^2=0 \to a=-2$

$f(g(x)) \quad a>b \Rightarrow f(g(a)) > f(g(b))$

$g(a)<g(b)$ نزولی

خاصیت مهم اکسترمم در توابع کسری مشتق پذیر:

در توابع کسری در صورت مشتق‌پذیر بودن صورت و مخرج کسر اگر تابع دارای نقطه اکسترمم نسبی باشد، مختصات این نقطه در هوپیتال تابع نیز صدق می‌کند.

$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

اگر $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ اکسترمم نسبی تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، داریم: $y_0 = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, $y_0 = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$

$f'g = g'f$

تذکر: در اینجا باید دقت کنیم هوپیتال تابع به عدد ثابت تبدیل نشود .(صورت و مخرج را با هم ساده نکنیم)

$\frac{f'}{g'} = \frac{f}{g}$ فقط در آن نقطه

مثال : تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+a}$ در نقطه‌ی $M(1,2)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد b و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟

حل : راه حل اول:

$$f(1)=2 \Rightarrow \frac{a+b}{1+a}=2 \Rightarrow b=a+2$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=0 \\ f'(x)=\frac{a(x^2+a)-2x(ax+b)}{(x^2+a^2)} \end{array}\right\} \Rightarrow a(1+a)-2(a+b)=0 \Rightarrow a(1+a)-2(a+(a+2))=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=4 \end{cases}$$

به ازای $a=-1$ تابع در $M(1,2)$ تعریف نشده است، پس $a=4$ است، لذا: $b=6$

$$f(x)=\frac{4x+6}{x^2+4} \Rightarrow f'(x)=\frac{-4(x^2+3x-4)}{(x^2+4)^2}$$

x		1	
f'	+	0	−
f	↗	max	↘

راه حل دوم: در توابع کسری که صورت و مخرج‌شان مشتق‌پذیر است،مختصات اکسترمم تابع در هوپیتال تابع صدق می‌کند.

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+a} \overset{H}{=} \frac{a}{2x}\Bigg|_{1}^{2} \Rightarrow \frac{a}{2}=2 \Rightarrow a=4 \Rightarrow b=6$$

$\frac{8+a}{4}=3$

مثال : اگر نقطه $(2,3)$ نقطه مینیمم نسبی تابع $y=\frac{x^2+a}{bx^2}$ باشد، a و b کدامست؟

حل :

$y(2)=\frac{8+a}{4b}=3$

$\frac{3x^2}{2bx}=\frac{3x}{2b}$

$\frac{6}{2b}=$

$y(2) \overset{H}{=} 3 = \frac{3x^2}{2bx} = \frac{3x}{2b}\Big|_2 = \frac{3}{b} = 3 \to \boxed{b=1}$

$\frac{3}{2b}=3$

$\boxed{b=1}$

$b=1$

$a=4$

$8+a=12b=12 \to \boxed{a=4}$

مثال : اکسترمم های نسبی تابع $y=\frac{2x-1}{x^2}$ را به دست آورید.

$2x^2-4x^2x$

حل :

$\frac{2x-1}{x^2}=\frac{2}{2x}$

$\frac{f}{g}=\frac{f'}{g'} \to \frac{2x-1}{x^2}=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x} \to 2x^2-x=x^2$

$x=1$

$x=0$ غیر قابل قبول

$2x^2-2x=2x^2$

$x^2-x=x(x-1)=0$

$x=1$

ایران توشه — توشه ای برای موفقیت

مسائل بحرانی مانند اکسترمم معمولاً جزء دامنه است.

روش پیدا کردن اکسترمم نسبی در توابع مشتق ناپذیر:

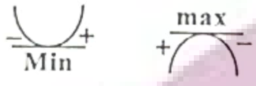
در توابع مشتق ناپذیر باید تحقیق کنیم که آیا نقطه در تعریف اکسترمم صدق می کند یا نه ؟(مثلاً با رسم نمودار تابع یا مقایسه مقادیر تابع با مقادیر تابع در اطراف آن نقطه). باز هم مواظب نقاط ابتدا و انتها باشید.

اگر تابع در نقطهٔ مشتق ناپذیری پیوسته باشد، شرط لازم و کافی وجود اکسترمم ، تغییر علامت مشتق است.

جمع بندی سه حالت ممکن به صورت زیر است :

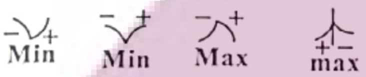
اگر C اکسترمم نسبی باشد.

- ۱) گر در C مشتق‌پذیر باشد:
  - ۱) $f'(C)=0$
  - ۲) f' در اطراف f تغییر علامت می‌دهد.



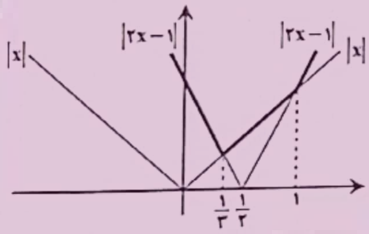
اختیاری

- ۲) اگر در C مشتق‌پذیر نباشد:
  - ۱) اگر در C پیوسته باشد ← f' تغییر علامت دهد.



  - ۲) اگر در C ناپیوسته باشد، حتماً باید رسم شود و مقایسه شود با اطراف

مثال : می‌نیمم تابع $f(x)=\max\{|x|,|2x-1|\}$ کدام است؟



حل : با رسم نمودار $|x|$ و $|2x-1|$ و پیدا کردن نقاط تقاطع آن‌ها ($x=1$, $x=\frac{1}{3}$)، نمودار f به‌دست می‌آید.

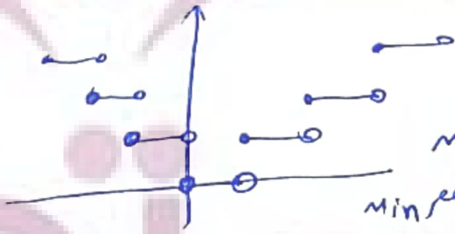
می‌نیمم f در نقطه‌ی $x=\frac{1}{3}$ اتفاق می‌افتد. لذا: $x=\frac{1}{3} \Rightarrow f(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$

روش به‌دست آوردن نقاط تقاطع:

$$|x|=|2x-1| \Rightarrow x^2=4x^2-4x+1 \Rightarrow 3x^2-4x+1=0 \Rightarrow (3x-1)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

البته چون در اثر به توان دو رساندن ممکن است ریشه‌ی اضافه وارد معادله شود، در پایان ریشه‌ها را کنترل می‌کنیم.

$y=[[x]]$ ؟



در Z^+ فقط max

در ۰ و Z^- فقط min

در R-Z هم max هم min

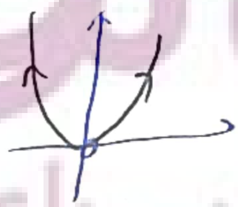
$y=x^2+|x|$

$x\geq 0$

$x\leq 0$

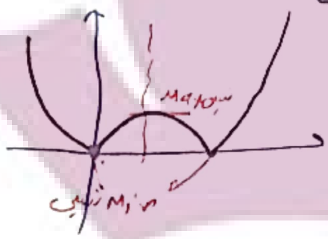
$2x+1 \geq 0$ +1

$2x-1 \leq 0$ -1

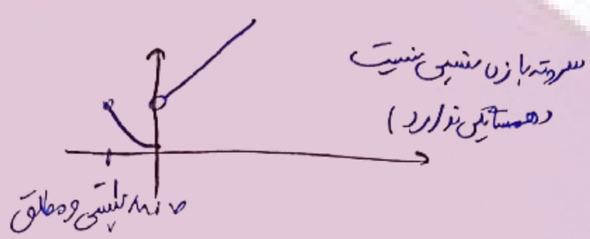


ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

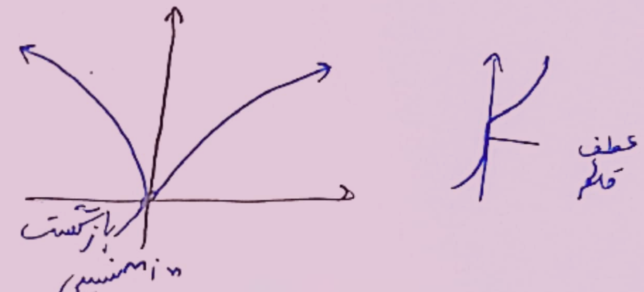
$y=|x^{2}-x|$



$$y=\begin{cases} x^{2} & -1\le x\le 0 \\ x+1 & 0<x<2 \end{cases}$$



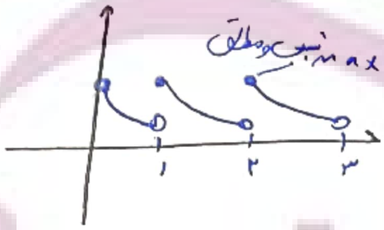
$y=\sqrt{|x|}$



☜ مثال : اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=2^{x}$، آنگاه تابع gof از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟

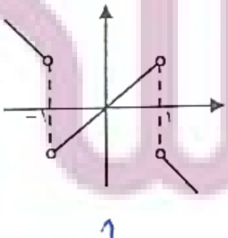
✍حل : $[x]-x$

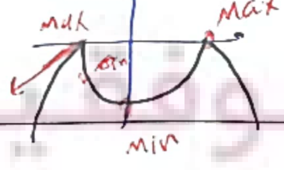
$-1<[x]-x\le 0 \to 2^{-1}<2\le 1$



☜ مثال : اگر f تابعی پیوسته باشد و نمودار مشتق آن به صورت مقابل باشد تابع f دارای چند اکسترمم نسبی است؟ نوع آنها را تعیین کنید.

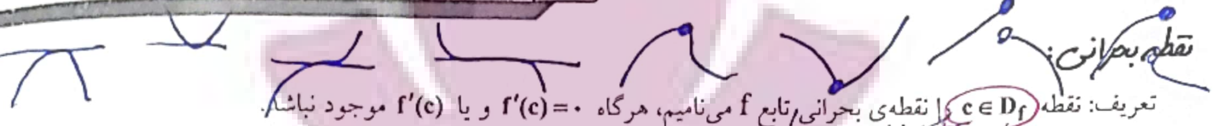
✍حل :





ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

نقطه بحرانی:



تعریف: نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)=0$ و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مماس افقی یا مماس قائم بحرانی نیست

قضیه نقطه‌ی بحرانی: اگر $f(c)$ مقدار اکسترمم تابع باشد، آن‌گاه باید c نقطه‌ی بحرانی باشد، یعنی c یکی از موارد زیر باشد:

الف) c یک نقطه‌ای درون بازه‌ی I، به‌طوری که $f'(c)=0$ (مانند اکسترممها و نقاط عطف افقی)

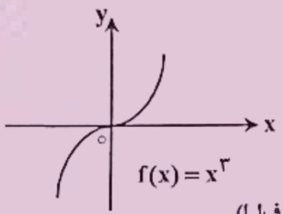
اکسترمم نسبی / بحرانی

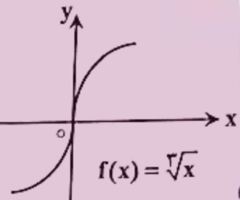
ب) c یک نقطه‌ای درون بازه‌ی I، و $f'(c)$ موجود نباشد. (مانند نقاط ناپیوستگی، گوشه، بازگشتی، سر و ته بازه)

از بین نقاط بحرانی درون بازه، نقاط اکسترمم نسبی به‌دست می‌آیند ولی ادعا نمی‌کنیم که هر نقطه‌ی بحرانی، یک اکسترمم نسبی است. شکل ۶ قسمت (الف) این را روشن می‌کند.

به‌عنوان نمونه برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^3$ داریم $f'(0)=0$ پس $x=0$ نقطه‌ی بحرانی تابع f است و این تابع نه مقدار ماکزیمم و نه مقدار مینیمم دارد (شکل ۶- قسمت الف)

همچنین نقطه‌ی $x=0$ نقطه‌ی بحرانی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt[3]{x}$ است، زیرا $f'(0)$ موجود نیست. (شکل ۶- قسمت ب)





(الف) (ب)

شکل ۶

بازه‌ای

هر سر و قسمت بحرانی هست ولی هیچ سر و ته بازه‌ای نسبی نیست / مطلق هم سر و ته بازه ممکنه باشد

آمده است و ... نقاط انتهایی بازه را بحرانی نگیرید.

پس باید توجه داشت که هر نقطه‌ی بحرانی لزوماً نقطه‌ی اکسترمم نیست. اما هر نقطه اکسترمم نسبی لزوماً نقطه‌ی بحرانی است.

هر اکسترمم نسبی بحرانی هست - هر اکسترمم مطلق، نسبی نیست / هر سر و ته بازه‌ای بحرانی هست، هر سر و ته بازه‌ای نسبی نیست.

مثال : تابع $y=x^2|x-3|$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

حل : ابتدا تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

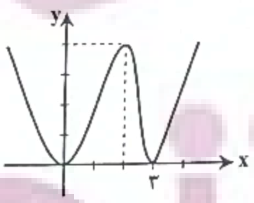
$$y=\begin{cases}x^3-3x^2 & x\ge 3\\ -x^3+3x^2 & x<3\end{cases}$$

$$y'=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=2$$

$$y'=\begin{cases}3x^2-6x & x>3\\ -3x^2+6x & x<3\end{cases}$$

$$\begin{cases}y'_+(3)=9\\ y'_-(3)=-9\end{cases}$$

پس نقاط $x=0,2,3$ بحرانی‌اند.



نمودار این تابع هم نشان می‌دهد سه نقطه‌ی بحرانی دارد:

دقت کنید نقاط ابتدا و انتهای بازه، بحرانی محسوب نمی‌شود.

مثال : نقاط بحرانی توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x)=(x+4)\sqrt[3]{x}$ $\Rightarrow f = x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0$

$x=-1$ بحرانی

$x=0$ بحرانی

۲) $f(x)=1-x-\sqrt{4-x^2}$

$f' = -1-\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 1 \Rightarrow x=\sqrt{4-x^2} \xrightarrow{\text{علامت } (x>0)} x^2=4-x^2$

$x^2=2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm 2$

نقاط بحرانی

۳) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ $\quad x\neq 0$

$f' = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}x-\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{\frac{x^2-(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2} = \frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

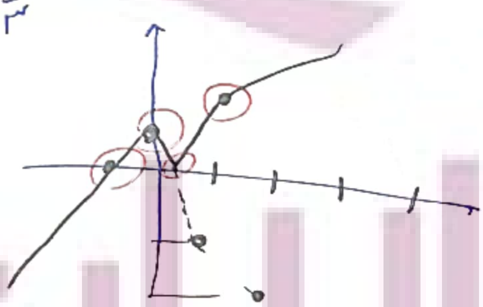
نقطه بحرانی ندارد (صفر در دامنه نیست)

۴) $f(x)=\left||x-1|-|2x|\right|$

$x=1$ $\quad x=0$

$|x-1|=|2x|$: $x-1=2x \rightarrow x=-1$; $x-1=-2x \rightarrow x=\frac{1}{3}$

رسم $|x-1|-|2x|$

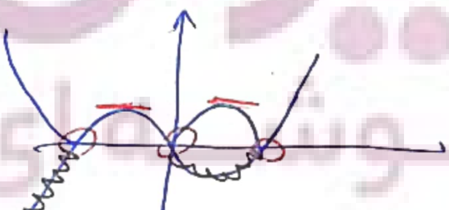


۵) $f(x)=\left|x^3-x\right|$

$|x(x-1)(x+1)|$: $x=0$, $x=-1$, $x=1$

گوشه

$f' = 3x^2-1=0 \rightarrow x^2=\frac{1}{3} \rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$



ایران توشه — توشه ای برای موفقیت

اگر ریشه‌ی قدر مطلق ساده باشد یا درون قدر مطلق با توان فرد باشد ریشه مشتق ندارد و یک نقطه بحرانی

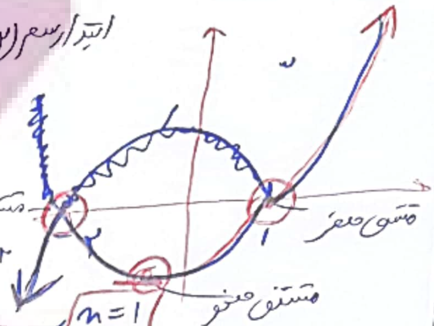
۶) $f(x)=(x-1)\left|x^2+x-2\right|$

$f=(x-1)\left|(x+2)(x-1)\right|$

$x=1$ ریشه‌ی مضاعف ~~بحرانی~~

$x=-2$ بحرانی

$(x-1)^2(x+2)$ ابتدا ریشه



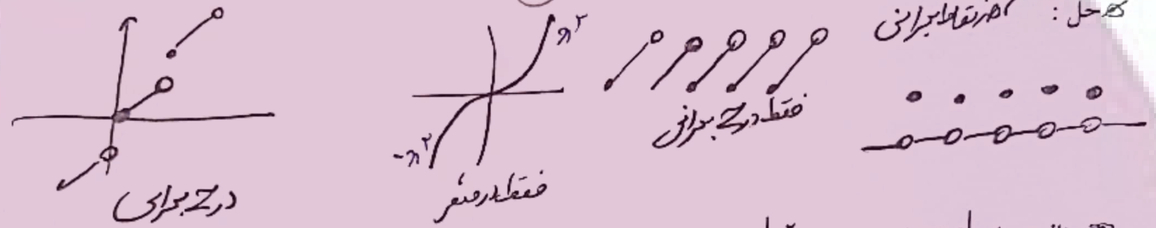
بی‌تغییر قدر $(x-1)^2(x+2) \rightarrow f'=2(x-1)(x+2)+(x-1)^2$

$=(x-1)(2x+4+x-1)=0$ $\boxed{x=1}$ $\boxed{x=-1}$ بحرانی

☜ مثال : کدام تابع در مجموعه $\mathbb{R}$ نقطه بحرانی کمتری دارد؟

۱) $y=[x]+[-x]$ ۲) $y=x-[x]$ ۳) $y=x|x|$ ۴) $y=x+[x]$

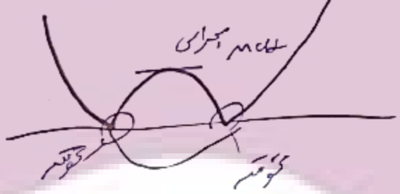
✍حل : ۱) همه نقاط بحرانی



☜ مثال : برای $f(x)=\left|x^2-(2m+2)x+9\right|$ محدودهٔ تغییرات m چقدر باشد تابع f سه نقطه بحرانی داشته باشد؟

$\Delta>0$

✍حل :



$\Delta>0$

$(2m+2)^2-4\times 9>0$

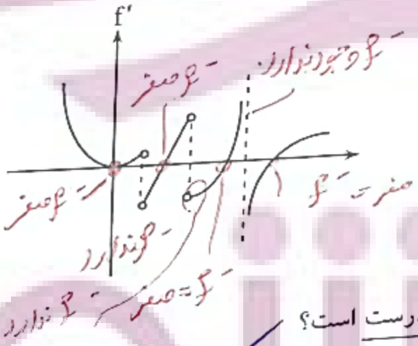
$(m+1)^2>9$

$m+1>3 \Rightarrow m>2$

$m+1<-3 \Rightarrow m<-4$

☜ مثال : اگر تابع f' به صورت مقابل باشد، تابع پیوسته f چند نقطه بحرانی دارد؟

✍حل : ۷ تا



☜ مثال : تابع f روی $[a,b]$ تعریف شده و $a<c<b$ است. چند تا از جملات زیر نادرست است؟

۱) اگر c نقطه‌ی اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه خط مماس بر منحنی در c افقی است.

۲) اگر c نقطه‌ی بحرانی باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی اکسترمم نسبی است.

$f'=0$

۳) اگر c نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی بحرانی است.

۴) اگر c نقطه‌ی اکسترمم مطلق باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی بحرانی است.

✍حل :

توشه‌ای برای موفقیت

ماکسیمم و مینیمم مطلق: شرط همسایگی ندارد / اکسترمم نسبی و مطلق باید در دامنه باشد.

به بزرگ‌ترین مقدار تابع f در مجموعه‌ی I «ماکزیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. همچنین به کوچک‌ترین مقدار تابع f در مجموعه‌ی I «مینیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. بنابراین نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در مجموعه‌ی I به‌ترتیب «بالاترین» و «پایین‌ترین» نقطه‌ی نمودار تابع در آن مجموعه هستند و زمانی که می‌گوییم ماکزیمم مطلق تابع f در نقطه‌ی $x=a$ (منظور نقطه‌ای از تابع به طول $x=a$ است) اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق و $(a, f(a))$ نقطه‌ی ماکزیمم مطلق تابع بر مجموعه‌ی موردنظر است. به‌عبارتی برای هر $x \in I$ داریم $f(x) \le f(a)$. همچنین وقتی می‌گوییم مینیمم مطلق تابع f در نقطه‌ی $x=a$ اتفاق افتاده یعنی $f(a)$ مقدار مینیمم مطلق و $(a, f(a))$ نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع بر مجموعه‌ی موردنظر است.

خلاصتاً فرض کنیم D دامنه تابع f و نقطه‌ی c عضو دامنه باشد، می‌گوییم:

الف) $f(c)$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع f روی D است، به‌شرطی که به‌ازای هر x عضو D داشته باشیم: $f(x) \le f(c)$

ب) $f(c)$ مقدار مینیمم مطلق تابع f روی D است، به‌شرطی که به‌ازای هر x عضو D داشته باشیم: $f(c) \le f(x)$

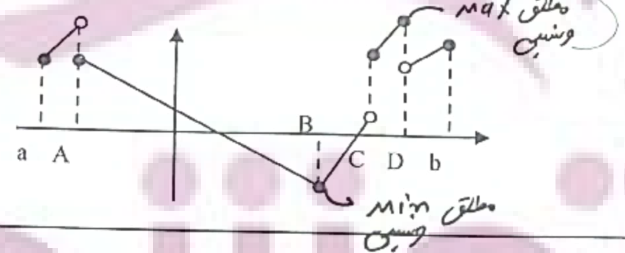
پ) $f(c)$ مقدار اکسترمم مطلق تابع f روی D است که یا مقدار ماکزیمم مطلق و یا مقدار مینیمم مطلق تابع f روی D باشد.

در این درس، مقدار ماکزیمم مطلق، مقدار مینیمم مطلق، مقدار اکسترمم مطلق تابع را به اختصار مقدار ماکزیمم تابع، مقدار مینیمم تابع و مقدار اکسترمم تابع بیان می‌کنیم.

در شکل ۱، $f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق f روی بازه‌ی $[a,b]$ است. به طریق مشابه $f(e)$ مقدار مینیمم سراسری مجموعه‌ی D است و آن را مقدار مینیمم مطلق f روی مجموعه‌ی D نیز می‌گویند.
اگر $f(a)$ را به‌عنوان قهرمان دوی ۱۰۰ متر در سراسر کشور ایران تصور کنیم، $f(d)$ را می‌توان قهرمان دو ۱۰۰ متر در یک منطقه از کشور تصور کرد و به زبان ریاضی $f(d)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f در یک همسایگی به مرکز d نامیده می‌شود.
$f(c)$ مقدار مینیمم نسبی تابع f در یک همسایگی به مرکز c است بدیهی است که $f(e)$ نیز مقدار مینیمم نسبی تابع f در یک همسایگی به مرکز e می‌باشد.

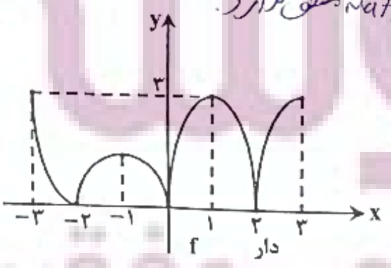
مثال: شکل مقابل نمودار تابع f در بازه $[a, b]$ است. نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع f کدامست؟

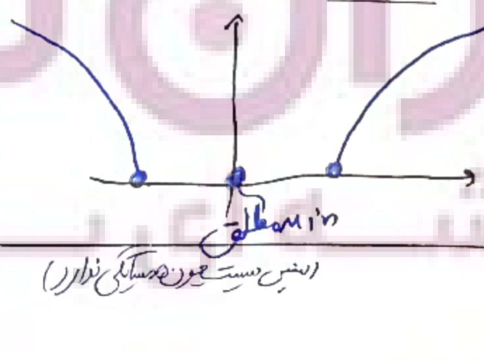
حل: D: max مطلق



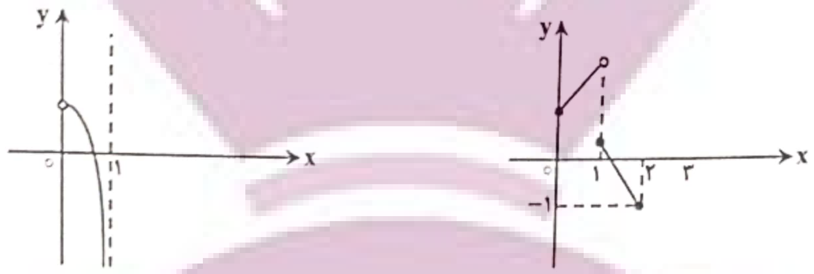
قضیه مقدار اکسترمم مطلق: اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن وقت در این بازه هم مقدار ماکزیمم مطلق و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

tanx max و min مطلق ندارد.





پرسش: آیا شرایط قضیه مقدار اکسترمم در نمودارهای شکل ۷ برقرار است ؟

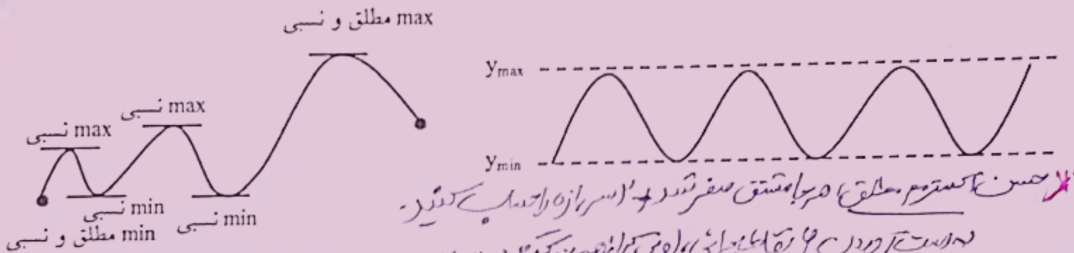


الف) این تابع در دامنه‌اش که بازه‌ی بسته $[0,2]$ است پیوسته نیست و مقدار اکسترمم ندارد ولی مقدار مینیمم دارد که برابر $f(2)=-1$

ب) این تابع در دامنه‌اش که بازه‌ی باز $(0,1)$ است، پیوسته است و نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم

شکل ۷

تذکر : تعداد اکسترممهای نسبی محدودیتی ندارد اما مقدار اکسترمم مطلق در صورت وجود یکتاست (عرض اکسترمم‌های مطلق منحصر به فرد است).



در حین اکسترمم مطلق، هر جا مشتق صفر شد + ۲ سر بازه را حساب کنید.
بعد از به دست آوردن y نقاط بحرانی، اونی که از همه بزرگتره max ، ... min

پرسش: می‌خواهیم بدانیم در چه نقاطی مقادیر اکسترمم رخ می‌دهند؟

معمولاً مقادیر اکسترمم یک تابع را در بازه‌ای مانند I از دامنه‌ی آن جست وجو می‌کنیم البته ممکن است بازه‌ی I شامل نقاط انتهایی خود باشد و نباشد.

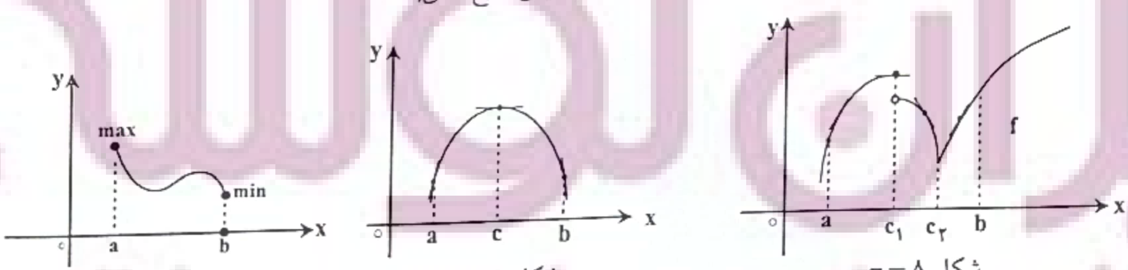
برای نمونه بازه‌ی $I=[a,b]$ شامل هر دو نقطه‌ی انتهایی خود است و بازه‌ی $I=[a,b)$ فقط شامل نقطه‌ی انتهایی چپ خود می‌باشد و بازه‌ی $I=(a,b)$ شامل نقطه‌ی انتهای خود نیست. در سه حالت زیر مقادیر اکسترمم تابع را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط انتهایی بازه داشته باشیم. (شکل ۸- الف)

حالت دوم: وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط درون بازه داشته باشیم و در آن نقاط مقدار مشتق صفر است. (شکل ۸ - ب)

حالت سوم: وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط درون بازه داشته باشیم و در آن نقاط تابع مشتق‌پذیر نباشد. (شکل ۸ - ج) که تابع در نقطه‌ی c_1 بازگشتی است و در نقطه‌ی c_2 پرشی و ناپیوسته است.

در سه حالت بالا نقاطی را مطرح کردیم که نقاط کلیدی قضیه مقدار اکسترمم هستند. نقطه‌ای از دامنه‌ی f در هر یک از حالت‌های دوم و سوم بالا که تابع مقدار اکسترمم داشت همان «نقطه های بحرانی» تابع f می‌باشد.



شکل ۸ - الف
شکل ۸ - ب
شکل ۸ - ج

چگونه می‌توانیم مقادیر اکسترمم تابع را پیدا کنیم؟

گام اول: پیدا کردن نقاط بحرانی f روی بازه‌ی بسته‌ی I

گام دوم: محاسبه‌ی مقدار f در هر یک از نقاط بحرانی و نقاط انتهایی در بازه‌ی بسته‌ی I و از بین مقادیر به‌دست آمده، بزرگ‌ترین آن‌ها مقدار ماکزیمم و کوچک‌ترین آن‌ها مقدار مینیمم تابع f روی بازه‌ی بسته‌ی I می‌باشد.

نکته : در توابع اکیداً یکنوا Max و Min مطلق و نسبی در یک بازهٔ بسته، در ابتدا و انتهای بازه به دست می‌آید.

تیپ اول :

مثال : اگر c نقطه اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطه c، کدام وضعیت را دارد؟

۱) پیوسته　　۲) خط مماس افقی　　۳) مشتق‌پذیر　　۴) اکسترمم نسبی

حل :

اگر تابع در همسایگی نقطهٔ اکسترمم مطلق تعریف شده باشد در $x=c$ مطلق نسبی نیز هست.

مثال : کدام بیان در باره پیوستگی تابع درست است؟

۱) اگر تابعی در بازه (a, b) یکنوا و کراندار باشد، در این بازه پیوسته است.

۲) اگر تابعی در بازه $[a, b]$ کراندار و دارای ماکسیمم و می‌نیمم باشد، در این بازه پیوسته است. $x-[x]$

۳) اگر تابعی در بازه (a, b) پیوسته باشد در این بازه کراندار و ماکسیمم و می‌نیمم مطلق دارد. $\tan x$

۴) اگر تابعی در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد در این بازه کراندار و ماکسیمم و می‌نیمم مطلق دارد.

حل :

تیپ دوم :

مثال : مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)=x-\sqrt{1-x^2}$ را به دست آورید.

حل : دامنه‌ی تعریف تابع $[-1,1]$ است. تابع در این بازه پیوسته است.

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2}=-x \xrightarrow{x<0} 1-x^2=x^2 \Rightarrow 2x^2=1 \xrightarrow{x<0} x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
f(x)	-1	$-\sqrt{2}$	1

$\Rightarrow \max(f)=1 \ , \ \min(f)=-\sqrt{2}$

مثال : اگر $f(x)=[x]-[-x]$ و $g(x)=\cos \pi x$، آن‌گاه نقطه‌ای به طول $x=3$ برای تابع $gof(x)$ چگونه نقطه‌ای است؟

حل :

$x=3 \Rightarrow gof(3)=\cos 6\pi=1$

$\lim_{x\to 3} f(x)=5 \quad 7 \Rightarrow \lim_{x\to 3} gof(x)=-1$

پس نقطه‌ی $x=3$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است. همچنین چون $gof(x)$ تنها برابر دو مقدار ۱ و ۱- می‌شود، پس نقطه‌ی $(3,1)$ ماکزیمم مطلق هم هست.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

☜ مثال : مبدأ مختصات برای تابع $f(x)=\begin{cases}(۲-\mathrm{Sin}\frac{۱}{x})|x| & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ چگونه نقطه‌ای است؟

✍حل : به ازای $x\neq ۰$ مقدار $f(x)$ مثبت است $(\mathrm{Sin}\frac{۱}{x}<۲)$ و $f(۰)=۰$ است، پس این نقطه مینیمم نسبی و سراسری است.

☜ مثال : تابع $f(x)=-۲\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{۳}x-\frac{\pi}{۴})$ در نقطه‌ای با کدام طول دارای بیشترین مقدار است؟

✍حل : برای آن‌که تابع دارای max مطلق باشد، باید $\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{۳}x-\frac{\pi}{۴})=-۱$ باشد. برای این منظور لازم است داشته باشیم:

$$\frac{\pi}{۳}x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi \Rightarrow \frac{\pi}{۳}x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴}$$

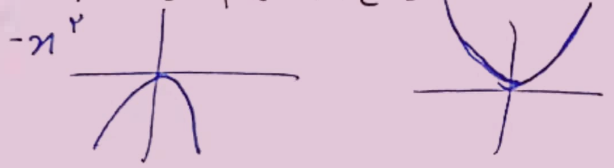
$x=۶k+\frac{۱۵}{۴}$ $\quad k\in\mathbb{Z}$ (طول نقاط max مطلق)

مثلاً :

k	۰	۱	−۱
x	$\frac{۱۵}{۴}$	$\frac{۳۹}{۴}$	$-\frac{۹}{۴}$

☜ مثال : نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع |f| ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

✍حل :

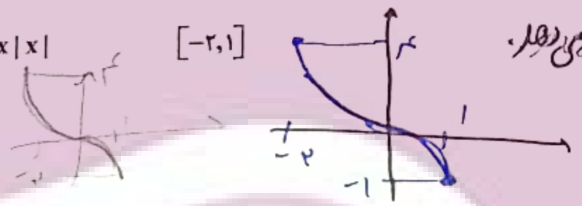


☜ مثال : مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده یا در دامنه بیابید.

نوع اول:

۱) $y=-x|x|$ $\quad [-۲,۱]$

چون اکیداً نزولی است max و min مطلق در ابتدا و انتهای دامنه رخ می‌دهد.



نوع دوم :

۲) $y=x^۳-۳x^۲-۹x$ $\quad [۱,۴]$

$۳x^۲-۶x-۹=$

$x^۲-۲x-۳$

$(x-۳)(x+۱)$

min: ۲۰

max

$y'=۳x^۲-۶x-۹=۳(x^۲-۲x-۳)=۳(x-۳)(x+۱)=۰$

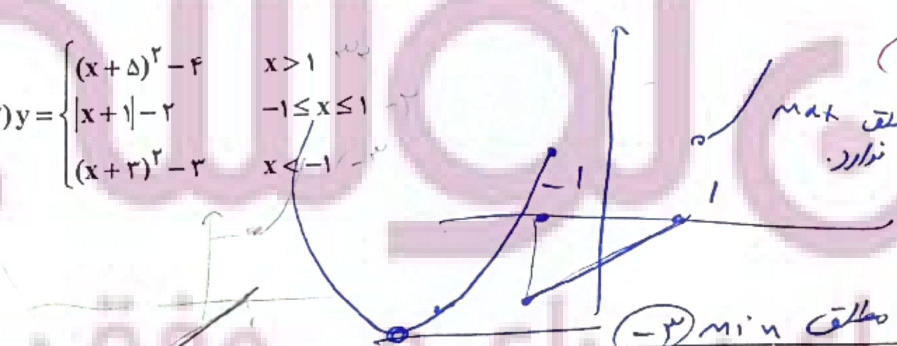
$x=-۱$ ✗

$x=۳$ — $y(۳)=-۲۷$ min

$y(۴)=-۲۰$

$y(۱)=-۱۱$ max

۳) $y=\begin{cases}(x+۵)^۲-۴ & x>۱\\ |x+۱|-۲ & -۱\leq x\leq ۱\\ (x+۳)^۲-۳ & x<-۱\end{cases}$

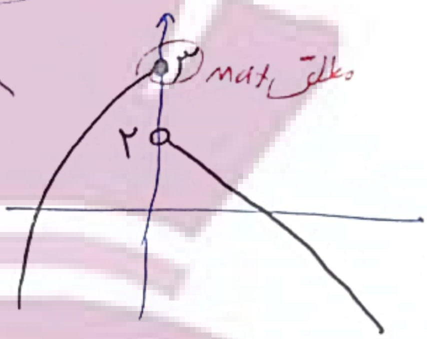


-۳ min مطلق

f': + | ۰ ، x

سر هر نقطه x فقط max نسبی و بعد از x هم Max و هم Min نسبی است

۴) $f(x)=\begin{cases} ۲-x & , \ x>۰ \\ -x^۲+۲x+۳ & , \ x\le ۰ \end{cases}$



۵) $y=\dfrac{۱}{x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵}$

$f=x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵$

$f'=۴x^۳-۱۲x^۲+۸x=۴x(x^۲-۳x+۲)=۴x(x-۲)(x-۱)$

$x=۱:۶$
$x=۲:۵$
$x=۰:۵$

$max=\frac{۱}{۵}$

$۵\le f\le ...$

$\frac{۱}{۵}\ge\frac{۱}{f}>۰$

۶) $y=x\sqrt{۱-x^۲}$

$\sqrt{۱-x^۲}+\dfrac{-۲x\times x}{۲\sqrt{۱-x^۲}}=\dfrac{۱-x^۲-x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}=۰\to x^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$y(-۱)=۰$

$y(۱)=۰$

$y(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{۱}{۲}$

$y(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{۱}{۲}$

$y=x\sqrt{۱-x^۲}$ $\quad -۱\le x\le ۱$

$\sin\theta\sqrt{۱-\sin^۲\theta}$ $\quad -۱\le \sin\theta\le ۱$

$\sin\theta|\cos\theta|=\sin\theta\cos\theta$ $\quad -\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$

$\frac{\pi}{۲}\ge x\ge-\frac{\pi}{۲}$ معادل ... کنند

$\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta$

$-\pi\le ۲\theta\le\pi$

$-\frac{۱}{۲}\le\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta\le\frac{۱}{۲}$

۷) $y=x+\sqrt{۱-x^۲}$

$f\circ g=f(g)$

f نقش تعیین برد، g ... دامنه

اثبات $R_{f\circ g}\subseteq R(g)$

$y'=۱+\dfrac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^۲}}=\dfrac{\sqrt{۱-x^۲}-x}{۲\sqrt{۱-x^۲}}=۰\to x=\sqrt{۱-x^۲}$

$\xrightarrow{x\ge ۰} x^۲=۱-x^۲\to x^۲=\frac{۱}{۲}\to x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

$y(۱)=۱$ $\quad y(-۱)=-۱$ min مطلق

$y(\frac{۱}{\sqrt{۲}})=\sqrt{۲}$ max مطلق

۸) $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$

$\{0,4\}$ $\qquad \dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$ $\qquad (x=2)$

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}=0 \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{4-x}\longrightarrow x=2$

$0:2$ min

$2:2\sqrt{2}$ max

$4:2$ min

$y(2)=2\sqrt{2}=\max$

$y(0)=2=y(4)=\min$

۹) $y=\dfrac{3a+x}{\sqrt[4]{a^3x}}$,$a>0$

$(x=a)$ min

$y=3\sqrt[4]{a}\,x^{-\frac{1}{4}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\,x^{\frac{3}{4}}$

$y'=3\sqrt[4]{a}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{5}{4}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=0$

$\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{a}{x^5}}=\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{a^3x}}\rightarrow \frac{a}{x^5}=\frac{1}{a^3x}$

$x^4=a^4\rightarrow x=a$

$\min y=\frac{4a}{a}=4$

نوع ششم :

۱۶) $f(x)=[\text{Sinx}]+[\text{Cosx}]$

max: 1

min: −2

$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$

Max: 1

Min: −2

min: −2

$\sqrt[n]{1+v}\simeq 1+\frac{v}{n}$ برنولی

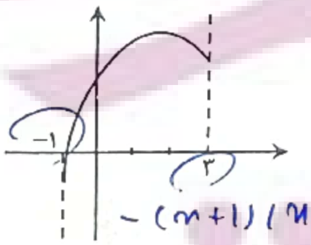
$\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

$\sqrt[3]{x^3+ax^2}\simeq x+\frac{a}{3}$

نوع هفتم :

مثال : شکل زیر، نمودار تابع $y=x+\sqrt{-x^2+ax+b}$ است، مقدار ماکزیمم مطلق تابع کدام است؟

حل :



$-(x+1)(x-3)$

$-x^2+2x+3$

$-9+3a+b=0$

$a=2$

$b=3$

$y=x+\sqrt{-x^2+2x+3}\Rightarrow y'=1+\dfrac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}}=0$

$\sqrt{-x^2+2x+3}=x-1 \xrightarrow{x\geq 1}$

$-x^2+2x+3=x^2-2x+1$

$\begin{cases}2x^2-4x-2=0\\ x^2-2x-1=0\end{cases}$ $\quad (x-1)^2=2\rightarrow x=1+\sqrt{2}$

$y=x+\sqrt{-x^2+2x+3}=\boxed{1+2\sqrt{2}}$

نوع هشتم :

مثال : مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^3-x^2}$ کدام است؟

حل :

$f(0)=0$

$\sqrt{ax^n+bx^{n-1}}$

تابع توان دو ممکن کامل کنید

$\lim_{x\to\infty} x+\sqrt[3]{\left(x-\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}}=$

قضایای ماکسیمم و مینیمم مطلق :

مهم

۱) وقتی جمع دو متغیر (مثبت) مقدار ثابتی است (ثابت $x+y=L$)، حاصلضرب آنها وقتی ماکسیمم مطلق است که با هم برابر باشند.

یا تفاضل آن‌ها min باشد.

تذکر : در صورتی که تساوی $x=y=\frac{L}{2}$ مقدور نباشد، $x-y$ را مینیمم می‌کنیم.

۲) اگر حاصلضرب دو متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد، آنگاه $x+y$ وقتی مینیمم است که $x=y=\sqrt{L}$ (مساوی)

$x.y=L \to x+y=x+\frac{L}{x}=f \to f'=1-\frac{L}{x^2}=0 \to x^2=L \Rightarrow x=\sqrt{L}$

$1)\ xy=x(L-x)=Lx-x^2=f$

$f'=L-2x=0 \to x=\frac{L}{2}=y$

مثال : اگر $\underset{u}{2x}+\underset{v}{3y}=12$ باشد، ماکسیمم xy کدامست؟

حل :

$\max(u.v): u=v=6$

$x=3 \quad y=2$

$xy=6$

مثال : مینیمم تابع $y=\frac{x+9}{\sqrt{x}}$ کدامست؟ $x=9$

حل :

$y=\sqrt{x}+\frac{9}{\sqrt{x}}=u+v$

$u.v=9 \to \min(u+v): u=v=3$

$3+3=6$

$\frac{\sqrt{x}-\frac{x+9}{2\sqrt{x}}}{x}$

$\frac{x-9}{2x\sqrt{x}}$

مثال : مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^2+\frac{8}{x^2+1}$ را به دست آورید.

حل :

$f=\underset{u}{x^2+1}+\underset{v}{\frac{8}{x^2+1}}-1$

$u.v=8 \quad \min(u+v)=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

با $u=v=2\sqrt{2}$

$\boxed{f_{min}=4\sqrt{2}-1}$

$\frac{x^4+x^2+8}{x^2+1}$

$\frac{(4x^3+2x)(x^2+1)-2x(x^4+x^2+8)}{(x^2+1)^2}$

$4x^5+4x^3+2x^3+2x-2x^5-2x^3-16x$

$2x^5+4x^3-14x \qquad x=0$

$x(2x^4+4x^2-14)$

$2x+\frac{-16x}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow 2=\frac{16}{(x^2+1)^2}$

$8=(x^2+1)^2$

x^4+2x^2+1

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت