ریاضیات گسسته

بهمن موذنی‌پور

فصل صفر آنالیز ترکیبی (شمارش بدون شمردن)

آنالیز ترکیبی در یک نگاه

- اصل ضرب
  - اصل جمع
  - اصل متمم
- شمارش
  - فاکتوریل
  - جایگشت
  - جایگشت کنار هم
  - جایگشت r شیء از n شیء
  - جایگشت یک در میان
  - جایگشت دوری
  - جایگشت با تکرار
- انتخاب (ترکیب)
  - جایگشت فاصله‌دار
  - انتخاب شامل و فاقد
  - مسائل هندسی

اصول شمارش

الف اصل اساسی اول (اصل ضرب):

اگر انجام عملی دومرحله‌ای (چندمرحله‌ای) باشد، به‌طوری‌که در مرحله اول m روش و برای هرکدام از این m روش، n روش در مرحله دوم وجود داشته باشد، کل آن عمل با $m \times n$ روش قابل انجام است.

ب اصل اساسی دوم (اصل جمع):

اگر عملی را بتوان به دو روش (چند روش) انجام داد به‌طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، کل آن عمل به $m+n$ روش قابل انجام است.

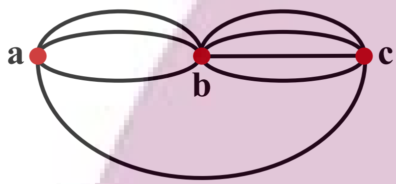
تذکر به تمایز انجام یک عمل با دو روش، و انجام یک عمل با دو مرحله دقت کنید!

نتیجه به‌طورکلی در علم اعداد «و» به معنای ضرب، «یا» به معنای جمع می‌باشد.

مثال ۱ دو نفر برای یک انتخابات کاندیدا شده‌اند، برای این انتخابات ۱۵ رأی‌دهنده وجود دارد که این ۱۵ نفر حداکثر می‌توانند به یک نفر رأی دهد. این انتخابات به چند طریق انجام می‌شود؟

مثال ۲ با ارقام $\{0,1,2,3,4\}$ چند عدد پنج رقمی مضرب ۴ می‌توان ساخت؟

تست ۳ در شکل زیر به چند طریق می‌توان از a به c رفت و سپس به a برگشت به طوری که مسیر رفت و برگشت دقیقا یکسان نباشد؟



۱) ۱۴۴
۲) ۱۵۶
۳) ۱۶۸
۴) ۱۸۲

توجه در حل مسائل اصول شمارش همیشه ابتدا تکلیف جایگاهی را مشخص می‌کنیم که دارای شرط است.

تست ۴ چند عدد طبیعی پنج رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت که ارقام آن یک در میان زوج و فرد باشند؟ (کنکور سراسری ۱۴۰۱)

۱) ۱۸۴۰
۲) ۱۹۲۰
۳) ۲۱۶۰
۴) ۲۴۰۰

مثال ۵ با ارقام ۰،۱،۲،۳،۴ و ۷ چند عدد چهاررقمی زوج می‌توان نوشت که هیچ‌کدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشد؟

تست ۶ چند عدد فرد با ارقام غیرتکراری بین ۳۰۰۰ و ۹۰۰۰ وجود دارد؟

(۱) ۱۰۲۴ (۲) ۱۶۹۶ (۳) ۱۵۱۲ (۴) ۲۰۰۴

تست ۷ با ارقام (۰,۲,۴,۵,۷,۸) چند عدد ۴ رقمی فرد بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(۱) ۴۸ (۲) ۶۸ (۳) ۷۲ (۴) ۹۶

تست ۸ با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد چهار رقمی زوج کوچک‌تر از ۴۲۰۰ می‌توان نوشت؟

(۱) ۶۸۹ (۲) ۳۶۰ (۳) ۳۶۵ (۴) ۶۶۰

مثال ۹ مجموعه $A=\{1,2,3,4,5\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

مثال ۱۰ مجموعه $\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرمجموعه دارد که در همه آن‌ها حرف a باشد ولی حرف d نباشد؟

اصل متمم

◆ در برخی سؤالات ممکن است شمارش مستقیم سخت باشد. در این مسائل ابتدا حالت‌های نامطلوب را شمرده از کل حالات کم می‌کنیم.

تست ۱۱ با ارقام صفر تا ۶ چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت به طوری که شامل رقم ۲ باشد؟ (تکرار ارقام مجاز نیست)

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۴۲۰ ۴) ۴۴۰

تست ۱۲ با ارقام ۴،۳،۲،۱،۰ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت به شرط آن‌که در هرکدام از آن‌ها دست‌کم یک رقم فرد وجود داشته باشد؟

۱) ۷۴ ۲) ۸۲ ۳) ۷۶ ۴) ۱۰۰

فاکتوریل

◆ حاصل‌ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را $n!$ می‌نامند.

◆ **قرار داد:**

نکته برای ساده کردن عبارات شامل فاکتوریل به رابطه‌ی زیر دقت کنید:

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \dots$$

تست ۱۳ اگر $(n-1)((n-1)!+(n-2)!) = 720$، در این صورت حاصل n کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

تست ۱۴ معادله $(5x^2-4x)! = 1$ دارای چند جواب است؟

۱) ۰
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

جایگشت

- اگر بخواهیم n شیء **متمایز** را کنار هم قرار دهیم، همیشه جایگاه اول n حالت، جایگاه دوم $(n-1)$ حالت و ... برای جایگاه آخر ۱ حالت وجود دارد، بنابراین طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$n(n-1)(n-2)\times \ldots \times 2 \times 1 = n!$$

- پس به طور کلی n شیء متمایز به $n!$ حالت کنار یکدیگر جا بجا می‌شوند.

تست ۱۵ چند جایگشت از حروف کلمه «تاملند» با تام شروع می‌شود؟

۱) $4!$
۲) $2\times 4!$
۳) $6!-2$
۴) $3!$

مثال ۱۶ ۷ خودکار متمایز و ۴ مداد متمایز به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر قرار بگیرند هرگاه:

الف محدودیتی در کار نباشد.

ب همهٔ خودکارها کنار هم باشند.

ج همهٔ مدادها کنار هم باشند.

د همهٔ خودکارها کنار هم و همهٔ مدادها نیز کنار هم باشند.

تست ۱۷ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «تاملند» که در آن‌ها حروف کلمه «لند» کنار هم باشند را A و تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها کلمه «لند» دیده شود را B درنظر می‌گیریم. تعداد عضوهای A منهای تعداد عضوهای B کدام است؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۸ ۴) ۹۶

مثال ۱۸ افراد A، B، C، D، E و F به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند که A و B کنار هم باشند و E و F کنار هم نباشند؟

مثال ۱۹ ۵ نفر A، B، C و D و E به چند طریق می‌توانند وارد یک اتوبوس شوند هرگاه:

الف) محدودیتی در کار نباشد.

ب) نفر A دقیقاً قبل از B وارد شود.

ج) نفر A قبل از نفر B وارد شود.

د) نفر A دقیقاً قبل از نفر B و نفر C قبل از نفر D وارد شود.

تست ۲۰ با حروف کلمه equation چند کلمه هشت حرفی بدون توجه به معنی می‌توان ساخت بـه طـوری کـه حرف t بعد از q و حرف q بعد از حرف n باشد؟

۱) ۶۷۲۰ ۲) ۱۳۴۴ ۳) ۹۶۰ ۴) ۵۰۴۰

تست ۲۱ در یک ساختمان ۶ طبقه، افراد a,b,c,d,e,f هر کدام در یک طبقه زندگی می‌کنند. اگر بدانیم واحد a بالاتر از b است. در چند حالت فرد b ساکن طبقه سوم است؟

۱) ۲۴ ۲) ۷۲ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

تست ۲۲ با جایگشت ارقام ۱،۳،۵،۷ تمام عددهای چهاررقمی ممکن را نوشته‌ایم، مجموع دهگان همه این اعداد کدام است؟

۱) ۹۴
۲) ۹۵
۳) ۹۶
۴) ۹۷

تست ۲۳ قرار است افراد e،d،c،b،a و f وارد یک آسانسور شوند. تعداد حالت‌هایی که بین افراد a و b دقیقاً یک فرد دیگر وارد شود، کدام است؟

۱) ۱۴۴
۲) ۱۹۲
۳) ۹۶
۴) ۲۸۸

تست ۲۴ در یک مطب ۵ صندلی در یک ردیف قرار دارد. ۷ بیمار همزمان وارد مطب می شوند. به چند طریق بیماران می‌توانند روی ۵ صندلی بنشینند، به طوری که دونفر از آنها نخواهند کنار هم بنشینند؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) ۱۵۶۰
۲) ۱۸۰۰
۳) ۲۰۴۰
۴) ۲۲۸۰

تست ۲۵ با ارقام ۱،۲،۳،۳،۳،۶،۷ چند عدد هفت رقمی می‌توان ساخت به طوری که بین ارقام زوج دقیقا دو رقم فاصله وجود داشته باشد؟

۱) ۸۰
۲) ۱۶۰
۳) ۳۶۰
۴) ۴۰۰

جایگشت r شیء از n شیء

◆ اگر از بین n شیء بخواهیم فقط r تا از آن‌ها را کنار هم قرار دهیم $\underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots}_{r}$ حالت خواهیم داشت.

این حاصل‌ضرب را یک جایگشت r تایی از n شیء می نامند و آن را با $P(n,r)$ نشان می‌دهند. به راحتی می‌توان ثابت کرد $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$، معمولاً از این فرمول استفاده نمی‌کنیم و همان اصل ضرب را ترجیح می‌دهیم.

تست ۲۶ می‌خواهیم با ۶ رنگ مختلف سه قفسه یک کتابخانه را رنگ‌آمیزی کنیم، به‌طوری‌که رنگ هیچ دو طبقه‌ای، یکسان نباشد، تعداد کل حالات رنگ‌آمیزی کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۵۰

جایگشت‌های یک‌درمیان

مثال ۲۷ ۴ خودکار متمایز و ۳ مداد متمایز را به چند طریق می‌توان یک در میان کنار هم قرار داد؟

مثال ۲۸ ۴ خودکار متمایز و ۴ مداد متمایز به چند حالت می‌توانند یک در میان کنار هم قرار بگیرند؟

مثال ۲۹ ۴ خودکار متمایز و ۳ مداد متمایز به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر قرار گیرند هرگاه مدادها یک در میان باشند؟

جایگشت دوری

◆ اگر اشیای متمایز به جای قرار گرفتن در صف، دور یک میز قرار بگیرند، تعداد حالت‌ها $(n-1)!$ خواهد بود، اگر دوران هم مجاز باشد (مثلاً در جاکلیدی یا تسبیح) تعداد حالت‌ها $\frac{(n-1)!}{2}$ خواهد بود.

تست ۳۰ در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش‌آموزان روی صندلی‌ها قرار می‌گیرند به طوری که در کنار هر دانش‌آموزی، دانش‌آموز هم پایه قرار نگیرد؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۷۶ ۴) ۱۱۵۲

مثال ۳۱ ده زوج زن و شوهر به چند طریق دور یک میز دایره‌ای قرار می‌گیرند، هرگاه هر زنی کنار شوهر خود قرار بگیرد؟

مثال ۳۲ با ۵ مهره‌ی متمایز به چند طریق می‌توان یک گردنبند درست نمود؟

مثال ۳۳ در یک جلسه ۶ نفر قرار است دور یک میز بنشینند. در چند حالت رئیس روبروی منشی قرار می گیرد؟

جایگشت اشیاء با تکرار

◆ اگر از بین n شیء که کنار هم قرار می‌گیرند، k تا یکسان باشند، تعداد حالت‌ها برابر است با $\frac{n!}{k!}$، پس مثلاً با ارقام متمایز ۱،۲،۳،۴،۵ به تعداد !۵ عدد ۵ رقمی داریم اما با ارقام ۱،۱،۳،۴،۵ به تعداد $\frac{5!}{2!}$ عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت.

مثال ۳۴ ۷ خودکار متمایز و ۴ مداد یکسان به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر جابه‌جا شوند به‌طوری‌که:

الف) محدودیتی در کار نباشد.

ب) همهٔ خودکارها کنار هم باشند.

ج) همهٔ مدادها کنار هم باشند.

مثال ۳۵ دو توپ آبی یکسان و ۷ توپ قرمز یکسان به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر قرار گیرند هرگاه:

الف) محدودیتی در کار نباشد.

ب) ابتدای صف توپ آبی قرار گیرد.

ج) یک طرف توپ آبی و طرف دیگر توپ قرمز باشد.

د) دو طرف صف توپ آبی قرار گیرد.

تست ۳۶ در چند جایگشت از حروف AABBCCDD عبارت ABCD ظاهر می‌شود؟

(۱) ۱۱۹ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۱۸ (۴) ۱۱۵

تست ۳۷ با ارقام ۵ و ۶ و ۶ و ۷ و ۷ چند کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که رقم وسط، ۵ باشد؟

(۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰

تست ۳۸ در چند جایگشت شش‌تایی با حروف E,E,E,E,N,N دو حرف اول و آخر یکسان‌اند؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۳

تست ۳۹ با حروف a,a,a,b,c,d چند ترکیب می‌توان نوشت، به شرط آن‌که حروف a یک‌درمیان قرار گرفته باشند؟

(۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۳۶ (۴) ۲۴

تست ۴۰ با ۴ مهره به رنگ‌های زرد و قرمز و آبی و مشکی و ۲ مهره سفید یکسان به چند حالت می‌توان یک گردنبند ساخت؟

(۱) $5!$ (۲) $2\times 5!$ (۳) $\frac{5!}{4}$ (۴) $\frac{5!}{2}$

بررسی سه مثال جایگشت با تکرار و وابسته به هم

مثال ۴۱ با حروف کلمه‌ی APADANA چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۲ با حروف کلمه‌ی APADANA چند کلمه‌ی ۶حرفی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۳ با حروف کلمه‌ی APADANA چند کلمه‌ی ۴حرفی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۴ با ارقام ۶، ۶، ۴، ۴، ۲، ۲ چند عدد شش‌رقمی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۵ با ارقام ۶، ۶، ۴، ۴، ۲، ۲ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۶ با ارقام ۶، ۶، ۴، ۴، ۲، ۲ چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۷ با ارقام ۰ ، ۱، ۴، ۴، ۴ چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۸ با ارقام ۰،۰،۰،۰،۳،۳،۳،۳ چند عدد ۸ رقمی زوج می‌توان ساخت؟

تست ۴۹ چند عدد چهاررقمی با ارقام ۲،۲،۲،۵،۵،۵ می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۴

ترکیب

◆ هرگاه بخواهیم از بین n شیء، k شیء را صرفاً انتخاب کنیم از رابطه ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

توجه به‌طورکلی ترکیب کردن به معنای انتخاب کردن است، بنابراین از این پس فقط و فقط از رابطهٔ ترکیب استفاده کرده و درصورت نیاز به جابه‌جایی آن را در جابه‌جایی اشیاء ضرب می‌کنیم، در نتیجه به‌طورکلی:

ترکیب کردن = انتخاب کردن

تست ۵۰ از بین ۵ دانش‌آموز سال دوازدهم و ۴ دانش‌آموز سال یازدهم به چند طریق می‌توان ۲ سال دوازدهمی و ۲ سال یازدهمی را انتخاب کرد و در یک صف ایستاند؟

(۱) ۶۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۱۴۴۰ (۴) ۳۰۲۴

مثال ۵۱ مجموعه $\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

تست ۵۲ حاصل $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ کدام است؟ (خارج از کشور ۱۴۰۰)

(۱) $n2^{n-1}$ (۲) $n2^{n}$ (۳) $(n-1)2^{n-1}$ (۴) $(n-1)2^{n}$

مثال ۵۳ از بین ۶ مرد و ۵ زن به چند طریق می‌توان گروهی ۴ نفره انتخاب کرد که حداقل ۳ زن در گروه باشد؟

بررسی یک مسئله خاص در مورد جایگشت‌های فاصله‌دار

مثال ۵۴ ۵ مرد و ۳ زن به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند که هیچ دو زنی کنار هم نباشند؟

تست ۵۵ می‌خواهیم تعدادی جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف c,cb,b,b,a,a,a,a کدگذاری کنیم، به شرط آن‌که هیچ‌کدام از حروف a، کنار هم نباشند. تعداد کل جعبه‌هایی که می‌توان با این روش کدگذاری کرد، چندتا است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۳۰ (۳) ۵۰ (۴) ۱۵۰

انتخاب با شرط شامل و فاقد

مثال ۵۶ به چند طریق می‌توان از بین یک گروه ۱۰ نفری گروه‌های ۵ نفری انتخاب کرد هرگاه:

(الف) محدودیتی در کار نباشد.

(ب) نفر اول حتماً انتخاب شود.

(ج) نفر آخر انتخاب نشود.

(د) دو نفر اول انتخاب شوند ولی نفر آخر انتخاب نشود.

تست ۵۷ می‌خواهیم از بین ۷ نفر، سه نفر را به تصادف انتخاب کنیم به‌طوری‌که نفرات A و B با هم انتخاب نشوند. این کار به چند حالت قابل انجام است؟

(۱) ۲۹ (۲) ۳۰ (۳) ۳۴ (۴) ۳۱

تست ۵۸ به چند طریق می‌توان از میان ۵ زوج ۴ نفر را انتخاب کرد به‌طوری‌که هیچ زوجی در بین این ۴ نفر نباشد؟

(۱) ۸۰ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۰

تست ۵۹ در یک آزمون، از ۱۰ پرسش موجود به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را انتخاب کرد، به شرط آن‌که حداقل ۴ پرسش از ۵تای اول انتخاب شده باشد؟

(۱) ۲۵ (۲) ۳۲ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

مثال ۶۰ با ارقام ۱ تا ۹ چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت به‌طوری‌که در همه‌ی آن‌ها یکان بزرگ‌تر از دهگان، دهگان بزرگ‌تر از صدگان و صدگان بزرگ‌تر از هزارگان باشد؟

مثال ۶۱ از هریک از ۶ منطقه کشوری، ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند، به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دوبه‌دو غیرهم‌منطقه‌ای هستند، انتخاب کرد؟

مثال ۶۲ مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی مفروض است. این مجموعه چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی دارد هرگاه:

الف محدودیتی در کار نباشد.

ب همهٔ این زیرمجموعه‌ها شامل رقم ۲ باشند.

ج) همهٔ این زیرمجموعه‌ها شامل ضرایب ۳ باشند.

د) همهٔ این زیرمجموعه‌ها فاقد ضرایب ۴ باشند.

ه) در همهٔ این زیرمجموعه‌ها عدد ۲ عضو min و عدد ۸ عضو max باشد.

تست ۶۳ مجموعه $A=\{۱,۲,...,۷\}$ مفروض است. تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی A که فاقد عدد ۱ باشند، چندتا بیش‌تر از تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی A شامل عدد ۱ می‌باشد؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

تست ۶۴ با حروف کلمه ARRANGE چند کلمه هفت‌حرفی می‌توان ساخت به‌طوری‌که در هریک از آن کلمات، یکی از دو حرف G و E در سمت راست و دیگری در سمت چپ N باشد؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۴۲۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۳۶۰

اتحادهای مربوط به رابطه ترکیب

۱) $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$

۲) $\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n$

۳) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

۴) $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-۱}=\binom{n+۱}{r}$

مثال ۶۵ حاصل $\binom{۱۷}{۱۲}+\binom{۱۷}{۴}$ کدام است؟

تست ۶۶ حاصل رابطه $\binom{۱۰}{۲}+...+\binom{۴}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}$ کدام است؟

۱) $\binom{۱۱}{۲}$ ۲) $\binom{۱۱}{۳}$ ۳) $\binom{۱۲}{۲}$ ۴) $\binom{۱۲}{۳}$

اتحادهای مربوط به رابطه ترکیب

۵) $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+...+\binom{n}{n}=۲^n$

مثال ۶۷ حاصل $\binom{۹}{۸}+...+\binom{۹}{۲}+\binom{۹}{۱}$ کدام است؟

اتحادهای مربوط به رابطه ترکیب

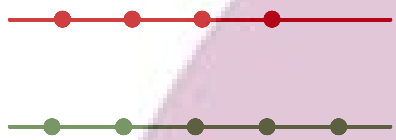
۶) $\underbrace{\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+...}=\underbrace{\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\binom{n}{۵}+...}=۲^{n-۱}$

تست ۶۸ حاصل $\binom{۲۰}{۱۷}+\dots+\binom{۲۰}{۵}+\binom{۲۰}{۳}+\binom{۲۰}{۱}$ کدام است؟

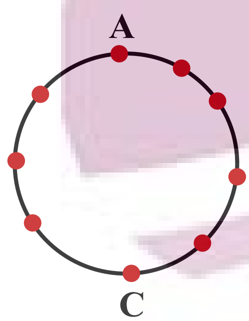
۱) $۲^{۲۰}-۱$ ۲) $۲^{۲۰}-۲۰$ ۳) $۲^{۱۹}-۱$ ۴) $۲^{۱۹}-۲۰$

مسائل هندسی شمارش

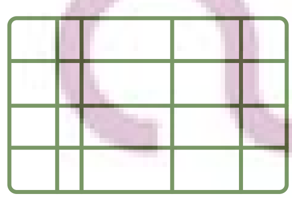
مثال ۶۹ با نقاط شکل زیر چند مثلث می‌توان تشکیل داد؟



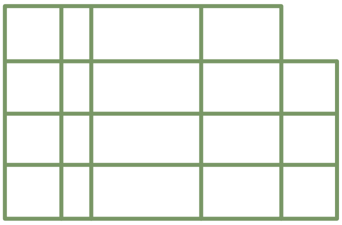
مثال ۷۰ در شکل مقابل چند چهارضلعی با نقاط داده شده می‌توان رسم کرد که AC قطر چهارضلعی باشد؟



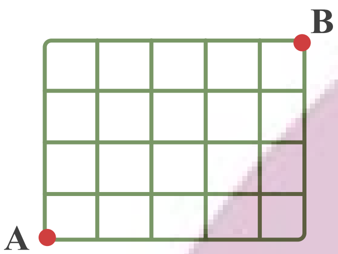
مثال ۷۱ در شکل زیر چند چهارضلعی وجود دارد؟



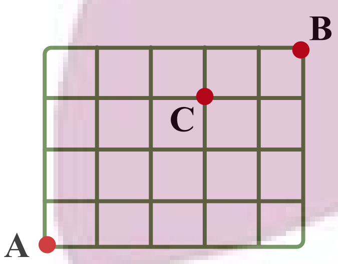
مثال ۷۲ تعداد چهار ضلعی‌های شکل زیر چندتاست؟



مثال ۷۳ در شبکه‌ی مقابل به چند طریق می‌توان از A به B حرکت کرد به‌طوری‌که کوتاه‌ترین مسیر طی شده باشد؟



مثال ۷۴ در شبکه‌ی مقابل به چند طریق می‌توان از A به B با کوتاه‌ترین مسیر رفته به شرطی که از نقطه‌ی C عبور کرده باشیم؟



استدلال ریاضی در یک نگاه

- بررسی گزاره
  - اثبات مستقیم
    - نمایش اعداد
    - نکات اعداد گویا
    - تحلیل تمارین کتاب
  - روش اشباع
    - ساختار گزاره‌ای
    - روش اثبات
  - برهان خلف
    - نکات گنگ و گویا
    - اعداد گنگ خالص
    - تحلیل تمارین کتاب
  - اثبات بازگشتی
    - گزاره دو شرطی
    - گزاره‌های هم‌ارز
  - مثال نقض
    - مثال نقض گزاره شرطی

استدلال استنتاجی

نوعی استدلال است که در آن بر اساس اصول و حقایقی که درستی آنها را از قبل پذیرفته‌ایم، به یک نتیجه‌گیری درست می‌رسیم.

- **الف** اثبات مستقیم
- **ب** اثبات با در نظر گرفتن همه حالات
- **ج** مثال نقض
- **د** برهان خلف
- **و** اثبات بازگشتی

الف اثبات مستقیم:

این نوع اثبات با فرض‌های مسأله آغاز می‌شود. با استنتاج، قدم به قدم نتایج میانی حاصل می‌شوند، تا اینکه به حکم مطلوب برسیم.

اثبات مستقیم شایع‌ترین نوع استدلال استنتاجی است که ما در اثبات بسیاری از قضایا و مسائل از آن استفاده کرده‌ایم.

در ادامه به بررسی چند مسأله در بخش‌پذیری اعداد صحیح، با استفاده از اثبات مستقیم خواهیم پرداخت.

چند نکته ساده اما کاربردی در نمایش اعداد صحیح

۱) فرم کلی اعداد زوج بصورت $2k$ یا دو برابر یک عبارت صحیح میباشد: $2\times$ (عبارت صحیح)

۲) فرم کلی اعداد فرد بصورت $2k+1$ یا دو برابر یک عبارت صحیح به علاوه یک می‌باشد: $1+$ (عبارت صحیح) $\times 2$

۳) نمایش سه عدد زوج دلخواه: $2k$ و $2m$ و $2t$

۴) نمایش سه عدد فرد دلخواه: $2k+1$ و $2m+1$ و $2t+1$

۵) نمایش سه عدد زوج متوالی: $2k$ و $2k+2$ و $2k+4$

۶) نمایش دو عدد فرد متوالی: $2k+1$ و $2k+3$

۷) سه عدد صحیح متوالی: k و $k+1$ و $k+2$

۸) فرم کلی نمایش اعداد گویا: $\frac{a}{b}$ $(a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0)$

تذکر برای نمایش دو عدد فرد نمی‌توانید از فرمت $2k+1$ و $2k+3$ استفاده کنید! زیرا با این کار ناخواسته (و به اشتباه) فرض متوالی بودن دو عدد فرد را نیز به مسأله وارد کرده‌اید!

نکته حاصل جمع هر دو عدد گویا، یک عدد گویاست.

اثبات فرض کنیم $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو عدد گویا باشند $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ در این صورت:

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\in\mathbb{Q}}$$

می‌دانیم جمع و ضرب هر دو عدد صحیح، یک عدد صحیح است. بنابراین صورت و مخرج کسر فوق عدد صحیح است.

مثال ۷۵ ثابت کنید حاصل تفریق هر دو عدد گویا، یک عدد گویاست. (تمرین کتاب)

مثال ۷۶ ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد گویا، یک عدد گویاست. (تمرین کتاب)

نکته حاصل تقسیم هر دو عدد گویای غیرصفر، یک عدد گویاست.

اثبات فرض کنیم $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو عدد گویای غیرصفر باشند ($a,b,c,d \in \mathbb{Z}$) در این صورت:

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \in \mathbb{Q}}$$

می‌دانیم ضرب هر دو عدد صحیح، یک عدد صحیح است. بنابراین صورت و مخرج کسر فوق عدد صحیح است.

نکته اگر r یک عدد گویای غیرصفر باشد، معکوس آن (یعنی $\frac{1}{r}$) نیز یک عدد گویاست.

اثبات فرض کنیم $r = \frac{a}{b}$ یک عدد گویای غیرصفر باشد ($a,b \in \mathbb{Z}$) در این صورت:

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{b}{a} \xrightarrow{a \neq 0} \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}}$$

نکته حاصل جمع دو عدد فرد یک عدد زوج است.

اثبات فرض کنیم m و n دو عدد فرد باشند، در این صورت:

$$\begin{cases} m = 2k+1 \\ n = 2k'+1 \end{cases} \to m+n = 2k+2k'+2 \to m+n = 2(k+k'+1) = \text{عدد زوج}$$

مثال ۷۷ ثابت کنید مجموع یک عدد فرد و یک عدد زوج، یک عدد فرد است. (تمرین کتاب)

نکته مجموع هر سه عدد صحیح متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

مثال ۷۸ ثابت کنید مجموع هر ۵ عدد صحیح متوالی بر ۵ بخش‌پذیر است. (تمرین کتاب)

مثال ۷۹ آیا مجموع هر k عدد صحیح متوالی بر k بخش‌پذیر است؟

نکته مجموع k عدد صحیح متوالی (به شرط فرد بودن k) بر k بخش‌پذیر است.

تست ۸۰ کدام گزینه را نمی‌توان بصورت مستقیم اثبات کرد؟

۱) مجموع دو عدد متوالی فرد است.

۲) مجموع سه عدد متوالی مضرب ۳ است.

۳) مجموع ۴ عدد متوالی مضرب ۴ است.

۴) مجموع ۵ عدد متوالی مضرب ۵ است.

مثال ۸۱ ثابت کنید اگر حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی را چهار برابر کرده و یک واحد به آن اضافه کنیم، عدد حاصل مربع کامل است. (تمرین کتاب)

مثال ۸۲ ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد فرد متوالی بعلاوه یک، مربع کامل است؟

مثال ۸۳ ثابت کنید هر عدد فرد می‌توان بصورت تفاضل مربع‌های دو عدد صحیح نوشت.

تست ۸۴ اگر a و b دو عدد مثبت باشند، بیشترین مقدار عبارت $\frac{۳ab}{a^۲+b^۲}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) ۳

تست ۸۵ به ازای چند زوج مرتب مانند (a,b) مقادیر حقیقی و غیرصفر a و b چنان وجود دارند که $\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$ ؟

۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) بیش از سه

تست ۸۶ به ازای چند عدد طبیعی $۱\le n\le ۲۰$ عدد $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ زوج است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

تست ۸۷ به ازای چند عدد اول p حاصل $۴۸p+۱$ مجذور یک عدد طبیعی است؟ (سراسری ۹۶)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

تست ۸۸ اعداد a و b هر دو عدد اول هستند. اگر ab مربع کامل باشد، کدام مورد همواره صحیح است؟ (کتاب درسی)

۱) a و b هر دو مربع کامل هستند.
۲) a و b هر دو مساوی یک هستند.
۳) a و b مساوی هم هستند.
۴) $a^{۲}b$ مربع کامل است.

ب) اثبات با در نظر گرفتن همه حالات:

گاهی برای اثبات یک گزاره شرطی نمی‌توان یک اثبات واحد ارائه داد. بلکه لازم است بسته به حالتهای مختلفی که آن گزاره می‌تواند داشته باشد، برای هر حالت اثبات‌های جداگانه ارائه داد.

حکم چنین مسأله‌هایی به صورت $(p_۱ \vee p_۲ \vee ... \vee p_n) \Rightarrow q$ است که با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها، می‌توان نوشت:

$$(p_۱ \vee p_۲ \vee ... \vee p_n) \Rightarrow q \equiv (p_۱ \Rightarrow q) \wedge (p_۲ \Rightarrow q) \wedge ... \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

نتیجه در مسائل چند حالته، برای اثبات گزاره $p \Rightarrow q$ (که در آن فرض p دارای n حالت $p_۱$ تا p_n است) باید n مسأله جداگانه ثابت شود که فرض آنها $p_۱$ تا p_n و حکم گزاره q می‌باشد.

مثال ۸۹ ثابت کنید به ازای هر n طبیعی عبارت $n^{۲} - ۵n + ۷$ یک عدد فرد است. (تمرین کتاب)

مثال ۹۰ فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند. ثابت کنید اگر $ab=0$ آنگاه $a=0$ یا $b=0$.   (تمرین کتاب)

ج) مثال نقض:

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری یا حدس کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود.

در واقع هرگاه نتوان درستی یک نتیجه‌گیری کلی را با استدلال استنتاجی اثبات کرد، نادرستی آن را با یک مثال نقض نشان می‌دهیم.

بعنوان مثال عبارت زیر صحیح نمی‌باشد و برای آن مثال نقض وجود دارد:

" حاصل جمع هر دو عدد گنگ، یک عدد گنگ است "

مثال نقض

نکته جمع و تفریق و ضرب و تقسیم هیچ دو عدد گنگی، لزوماً یک عدد گنگ نیست!

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{16}=4\notin\mathbb{Q}' \quad , \quad (1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}+3)=4\notin\mathbb{Q}'$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{4}=2\notin\mathbb{Q}' \quad , \quad (3+\sqrt{2})-(\sqrt{2}+1)=2\notin\mathbb{Q}'$$

مثال ۹۱ هر یک از گزینه‌های زیر را با ارائه یک مثال نقض رد کنید: (تمرین کتاب)

الف برای هر دو حقیقی x و y داریم: $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

ب برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱ عدد $۲^n-۱$ اول است.

ج برای هر سه مجموعه A و B و C اگر داشته باشیم $A\cup B=A\cup C$ آنگاه: $B=C$.

د برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^۲\le x^۳$.

و اگر $a^۲=b^۲$ آنگاه $a=b$.

ی حاصل‌ضرب یک عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

نکته اگر با یک گزاره شرطی روبرو بودیم ($p\Rightarrow q$)، در این صورت یک مثال نقض مناسب باید طوری باشد که قسمت فرض درست و قسمت حکم را تبدیل به یک گزاره نادرست کند. جدول ارزش گزاره‌ها در مورد گزاره شرطی را از سال یازدهم به یاد آورید.

تست ۹۲ کدام مقدار k یک مثال نقض مناسب برای نادرستی گزاره "اگر k حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، $۳k+۱$ عددی اول است" می‌باشد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰

تست ۹۳ کدام گزینه مثال نقض برای گزاره "اگر x گنگ باشد آنگاه $x^۲+۴x+۵$ نیز گنگ است" می‌باشد؟

(۱) $\sqrt{۴}-۱$ (۲) $\sqrt{۲}+۱$ (۳) $\sqrt{۲}-۲$ (۴) $\sqrt{۲}-۱$

تست ۹۴ با فرض اینکه a و b دو عدد صحیح باشند، کدام یک از موارد زیر مثال نقض ندارد؟

(۱) اگر ab زوج باشد، $a^۲+b^۲$ فرد است.
(۲) اگر ab زوج باشد، $a^۲+b^۲$ زوج است.
(۳) اگر ab فرد باشد، $a^۲+b^۲$ زوج است.
(۴) اگر ab فرد باشد، $a^۲+b^۲$ فرد است.

تست ۹۵ اعداد کدام گزینه مثال نقض مناسبی برای گزاره "حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است" می‌باشد؟

(۱) $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲۴}$ (۲) $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۱۲}$ (۳) $\sqrt{۱۸}$ و $\sqrt{۲۴}$ (۴) $\sqrt{۱۸}$ و $\sqrt{۱۲}$

د) برهان خلف یا اثبات غیر مستقیم:

شکل کلی یک مسأله بصورت مقابل است.

اگر حکم صحیح باشد که دیگر چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند.

پس برای اثبات یک مسأله به روش غیرمستقیم، فرض می‌کنیم که حکم نادرست است و نقیض آن را به عنوان یک فرض جدید به مفروضات اولیه مسأله اضافه می‌شود.

مفروضات اولیه $\Longrightarrow$ حکم

در ادامه نشان می‌دهیم نقیض حکم با مفروضات اولیه مسأله به تناقض می‌رسد. و نتیجه می‌گیریم این تناقض از آنجایی به وجود آمده است که نقیض حکم را به رسمیت شناختیم!

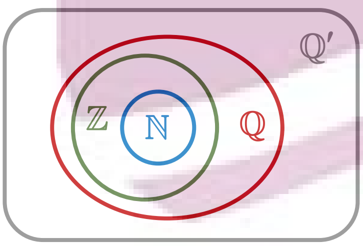
مفروضات اولیه + نقیض حکم $\Longrightarrow$?

بنابراین واضح است که نقیض حکم صحیح نمی‌باشد و این خود حکم است که صحیح است.

یادآوری (دستگاه اعداد حقیقی و زیرمجموعه‌های آن)

همان طور که مشاهده می‌کنید دستگاه اعداد حقیقی از دو بخش جدا از هم اعداد گویا و اعداد گنگ تشکیل شده است. یعنی:

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}' \ , \ \mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$$



لذا در تعریف اعداد گنگ می‌گوئیم، هر عددی که گویا نباشد، گنگ است.

نکته

۱) حاصل‌جمع هر عدد گویا و هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲) حاصل‌ضرب هر عدد گویای غیرصفر در هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

مثال ۹۶ اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است. (تمرین کتاب)

نتیجه حاصل تقسیم عدد گویای غیرصفر r بر عدد گنگ q، عددی گنگ است. یعنی: $\frac{r}{q} \notin \mathbb{Q}$.

بدانیم: اگر p و q دو عدد گویا با شرط $p<q$ باشند، آنگاه $\frac{p+q}{2}$ یک عدد گویا بین آنها است.

اثبات کافی است نصف فاصله بین p و q را به عدد p اضافه کنیم، تا عدد حاصل بین p و q باشد. یعنی:

$$p<p+\frac{q-p}{2}<q \rightarrow p<\frac{2p+q-p}{2}<q \rightarrow p<\frac{p+q}{2}<q$$

نتیجه اگر p و q دو عدد گویا با شرط $p<q$ باشند، آنگاه $p+\frac{q-p}{t}$ که در آن t یک عدد صحیح بزرگتر از ۱ است، یک عدد گویا بین p و q است.

مثال ۹۷ ثابت کنید بین هر دو عدد گویای متمایز p و q (با فرض $p<q$) یک عدد گنگ وجود دارد. (تمرین کتاب)

جواب فاصله بین p و q را بر $\sqrt{3}$ تقسیم کرده و آن را به p اضافه می‌کنیم. عدد حقیقی حاصل بین p و q است.

$$p<p+\frac{q-p}{\sqrt{3}}<q$$

چون p و q گویا هستند، پس تفاضل آنها نیز گویا است. یعنی: $(p-q)\in\mathbb{Q}$.

حاصل‌ضرب هر عدد گویای غیرصفر در یک عدد گنگ، گنگ است. پس: $\frac{1}{\sqrt{3}}\times(p-q)\notin\mathbb{Q}$

مجموع هر عدد گویا و یک عدد گنگ، گنگ است. پس: $p+\frac{1}{\sqrt{3}}\times(p-q)\notin\mathbb{Q}$

مثال ۹۸ اگر r و s دو عدد گنگ ولی $r+s$ گویا باشد، ثابت کنید $r-s$ گنگ هستند. (تمرین کتاب)

مثال ۹۹ اگر r و s دو عدد گنگ ولی $r+s$ گویا باشد، ثابت کنید $r+2s$ گنگ هستند. (تمرین کتاب)

تست ۱۰۰ اگر α و β دو عدد گنگ ولی $\alpha-\beta$ گویا باشد، آنگاه $\alpha+\beta$ .... و $2\alpha-5\beta$ ....

۱) گنگ است / گنگ است
۲) گنگ است / گویا است
۳) گنگ است / ممکن است گویا یا گنگ باشد
۴) ممکن است گویا یا گنگ باشد / گنگ است

مثال ۱۰۱ اگر a_1,a_2,a_3 عددهایی صحیح باشند و b_1,b_2,b_3 همان سه عدد با ترتیبی متفاوت باشند، آنگاه ثابت کنید حاصل عبارت $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ همواره زوج است. (تمرین کتاب)

تست ۱۰۲ اگر a_1,a_2,a_3 عددهایی صحیح و b_1,b_2,b_3 همان سه عدد با ترتیبی دیگر باشند، آنگاه $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ همواره . . . . است و این گزاره . . . .

۱) زوج / درست است که با برهان خلف ثابت می‌شود.
۲) زوج / نادرست است که با مثال نقض رد می‌شود.
۳) فرد / درست است که با برهان خلف ثابت می‌شود.
۴) فرد / درست است و با روش همه حالات ثابت می‌شود.

مثال ۱۰۳ اگر توابع f و g در $x=a$ به ترتیب پیوسته و ناپیوسته باشند، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است. (تمرین کتاب)

مثال ۱۰۴ ثابت کنید اگر n یک عدد طبیعی باشد و $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۳ است.

نکته اگر n یک عدد طبیعی باشد و $n^۲$ مضرب k باشد، آنگاه n نیز مضرب k است به شرط آن که k در تجزیه به عوامل اول توان بیشتر از ۱ نداشته باشد.

بعنوان مثال اگر $n^۲$ مضرب ۱۲ باشد، لزوماً n مضرب ۱۲ نیست! (زیرا ۱۲ در تجزیه به عوامل اول توان ۲ دارد:

$۱۲=۲^۲\times ۳$

مثال ۱۰۵ ثابت کنید $\sqrt{۳}$ گنگ است. (تمرین کتاب)

مثال ۱۰۶ اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ به ازای هر n طبیعی که $۱\le n\le ۶$، یک عدد زوج باشد، ثابت کنید: $n=۳,۴$. (تمرین کتاب)

تست ۱۰۷ کدام یک از گزاره‌های زیر را نمی‌توان با برهان خلف اثبات کرد؟

۱) حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲) حاصل ضرب یک عدد گویا غیر صفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳) معکوس هر عدد گنگ نیز عددی گنگ است.

۴) اگر x و y دو عدد گنگ باشند، $x+y$ نیز گنگ است.

و) اثبات بازگشتی:

گزاره‌های هم‌ارز: اگر دو گزاره دارای ارزش یکسان باشند، به آنها گزاره‌های **هم‌ارز** یا **هم‌ارزش** می‌گوئیم.

نتیجه با تعریف فوق اگر p و q دو گزاره هم‌ارز باشند، در این صورت گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو درست هستند و در نتیجه گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ نیز همواره درست است.

برعکس این مطلب نیز صحیح است. یعنی اگر ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ صحیح باشد، آنگاه p و q دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و با دانستن ارزش یکی، ارزش دیگری نیز در دسترس است.

بعنوان مثال دو گزاره $a<b$ و $a^3<b^3$ هم‌ارزند و می‌توان نوشت: $a<b \Leftrightarrow a^3<b^3$.

ولی گزاره‌های $a<b$ و $a^2<b^2$ هم‌ارزند نیستند. چرا؟!

حال که با مفهوم گزاره‌های هم‌ارز آشنا شدیم، به روش اثبات بازگشتی می‌پردازیم.

در این روش با ارائه دنباله‌ای از گزاره‌های هم‌ارز صحیح و مناسب برای حکم، به یک گزاره صحیح بدیهی می‌رسیم که در مورد صحت آن اتفاق نظر وجود دارد. بدیهی است با درست بودن آخرین گزاره هم‌ارز، سایر گزاره‌ها نیز صحیح هستند.

یادآوری هر عدد یا عبارت دارای توان زوج، همواره مقداری نامنفی است که حداقل آن می‌تواند صفر باشد. همچنین مجموع چند عبارت نامنفی همواره مقداری نامنفی است.

مثال ۱۰۸ هرگاه a عدد حقیقی مثبت باشد، ثابت کنید: $a+\frac{1}{a}\geq 2$. (تمرین کتاب)

مثال ۱۰۹ هرگاه a عدد حقیقی منفی باشد، ثابت کنید: $a+\frac{1}{a}\leq -2$. (تمرین کتاب)

مثال ۱۱۰ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $a^2+ab+b^2\geq 0$. (تمرین کتاب)

مثال ۱۱۱ برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید: $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$. (تمرین کتاب)

مثال ۱۱۲ برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ثابت کنید: $x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$. (تمرین کتاب)

تست ۱۱۳ کدام دو گزاره زیر هم‌ارز نیستند؟

۱) " $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ " و " $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲} \geq ۰$ " که a و b دو عدد نامنفی هستند.

۲) " $n^{۲}$ مضرب ۴ باشد" و " n مضرب ۴ باشد" که n عددی طبیعی است.

۳) " نقطه C روی عمودمنصف پاره‌خط AB است" و " فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است."

۴) $a^{۲}+b^{۲}+ab \geq ۰$ و $(a+b)^{۲}+a^{۲}+b^{۲} \geq ۰$

تمرینات تشریحی درس اول از فصل اول (استدلال ریاضی)

تمرین ۱۱۴ اگر a و b دو عدد صحیح و ab فرد باشد، ثابت کنید a^2+b^2 زوج است. (تمرین کتاب)

تمرین ۱۱۵ ثابت کنید مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است. (تمرین کتاب)

تمرین ۱۱۶ ثابت کنید میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است. (تمرین کتاب)

تمرین ۱۱۷ درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید: (تمرین کتاب)

الف اگر $A \subseteq B$ و $x \notin B$ آنگاه $x \notin A$

ب اگر $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq C$ آنگاه $A \not\subseteq C$

ج اگر $x \in A$ و $A \in B$ آنگاه $x \in B$

تمرین ۱۱۸ کدام دسته از گزاره‌های زیر هم‌ارزند؟ (تمرین کتاب)

الف) "n زوج است." و "$n^{۲}$ زوج است."

ب) " نقطه C روی عمودمنصف پاره‌خط AB است" و " نقطه C از دو سر AB به یک فاصله است".

تمرین ۱۱۹ ثابت کنید مربع هر عدد صحیح بصورت ۴k یا ۴k+۱ است که در آن $k \in \mathbb{Z}$.

تمرین ۱۲۰ ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کمتر نیست. (تمرین کتاب)

تمرین ۱۲۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: (تمرین کتاب)

الف) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$; x و y هم‌علامت

ب) $a^{۳}+b^{۳}\geq a^{۲}b+ab^{۲}$; $a+b>۰$

ج) $\frac{a^{۲}}{۱+a^{۴}}\leq \frac{۱}{۲}$

د) $ab \leq \frac{۱}{۴}$; $a+b=۱ , a>۰ , b>۰$

تمرین ۱۲۲ به سئوالات زیر با دلیل پاسخ دهید. (تمرین کتاب)

الف) آیا اعداد صحیح a و b وجود دارند بطوری که: $a^۲+b^۲=(a+b)^۲$؟

ب) آیا اعداد حقیقی غیرصفر x و y وجود دارند بطوری که: $\frac{۱}{x+y}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$؟

تمرین ۱۲۳ اگر m یک عدد مثبت باشد ثابت کنید: $m+\frac{۴}{m^۲}\geq ۳$. (تمرین کتاب)

جواب

$$m+\frac{۴}{m^۲}\geq ۳ \Leftrightarrow \frac{m^۳+۴}{m^۲}\geq ۳ \Leftrightarrow m^۳+۴\geq ۳m^۲ \Leftrightarrow m^۳-۳m^۲+۴\geq ۰$$

$m=-۱$ یکی از ریشه‌های معادله درجه سوم فوق است، پس $m^۳-۳m^۲+۴$ بر $m+۱$ بخش‌پذیر است. یعنی:

$$m^۳-۳m^۲+۴=(m+۱)(m^۲-۴m+۴)=(m+۱)(m-۲)^۲\geq ۰$$

چون m یک عدد حقیقی مثبت است، پس عبارت فوق همواره نامنفی است.

تمرین ۱۲۴ ثابت کنید برای هر عدد اول مانند p، عدد صحیح v وجود دارد که $vp+1$ مکعب کامل باشد. (تمرین کتاب)

جواب

$$vp+1=k^3 \rightarrow vp=k^3-1 \rightarrow vp=(k-1)(k^2+k+1)$$

اگر فرض کنیم $k-1$ همان عدد اول p باشد، بنابراین k^2+k+1 در نقش v است. پس:

$$\begin{cases} p=k-1 \\ v=k^2+k+1 \end{cases} \xrightarrow{k=p+1} v=(p+1)^2+p+1+1 \rightarrow v=p^2+3p+3$$

یعنی برای هر عد اول p عدد صحیح p^2+3p+3 وجود دارد که $p(p^2+3p+3)$ مکعب کامل است.

توجه نمونه‌های تمرین بالا را ببینید:

اگر $p=2$ باشد، آنگاه عدد صحیح $v=2^2+3\times2+3=13$ وجود دارد که: $pv+1=2\times13+1=27=3^3$.

اگر $p=3$ باشد، آنگاه عدد صحیح $v=3^2+3\times3+3=21$ وجود دارد که: $pv+1=3\times21+1=64=4^3$.

اگر $p=5$ باشد، آنگاه عدد صحیح $v=5^2+3\times5+3=43$ وجود دارد که: $pv+1=5\times43+1=216=6^3$.

تمرین ۱۲۵ ثابت کنید تابعی چون f وجود دارد که $f=f^{-1}$ باشد. (تمرین کتاب)

جواب هر تابعی که نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد، می‌تواند جواب باشد. مانند تابع $y=\frac{1}{x}$ یا تابع $y=-x$.

درس ۲ بخش‌پذیری در اعداد صحیح

بخش‌پذیری در یک نگاه (قسمت اول)

- **عاد کردن**
  - مفهوم بخش‌پذیری
  - خواص عاد کردن
  - مختصات صحیح توابع
  - معادلات عاد کردن
  - دو جمله‌ای بر دو جمله‌ای
- **ب . م . م**
  - مفهوم ب . م . م
  - محاسبه به روش تجزیه
  - خواص ب . م . م
  - مسائل ترکیبی
  - مسائل پارامتری
- **ک . م . م**
  - مفهوم ک . م . م
  - محاسبه به روش تجزیه
  - خواص ک . م . م
  - متباین‌سازی
- **اعداد اول**
  - تعریف عدد اول
  - قضیه بنیادی حساب
  - عوامل اول در $n!$

عاد کردن (شمارش با شمارنده)

دسته‌بندی تعدادی شیء در دسته‌های مساوی، بدون بر جا گذاشتن باقیمانده را عاد کردن آن اشیاء توسط شمارنده‌ها می‌گوئیم.

بعنوان مثال ۸ شیء را می‌توان با شمارنده‌های مثبت عدد ۸ یعنی ۱، ۲، ۴ و ۸ دسته‌بندی یا شمارش کرد.

عاد کردن را با نماد "|" نمایش می‌دهیم. مثلاً می‌نویسیم ۱۲|۲ و می‌خوانیم "عدد ۲ عدد ۱۲ را می‌شمارد یا عاد می‌کند".

تذکر رابطه ۱۲|۲ را می‌توان این گونه نیز بیان کرد که ۱۲ بر ۲ بخش‌پذیر است.

تعریف عدد صحیح و غیرصفر a، شمارنده عدد صحیح b است (یا b بر a بخش‌پذیر است) اگر و تنها اگر عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد، به طوری که: $b = qa$. به زبان ریاضی می‌توان نوشت:

$$a|b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \,;\, b = aq$$

بدیهی است اگر b بر a بخش‌پذیر نباشد یا a عدد b را عاد نکند، می‌نویسیم: $a \nmid b$.

بعنوان مثال:

$8|0$ ، $4 \nmid -6$ ، $2|-6$ ، $-2|4$

تذکر دسته‌بندی در دسته‌های صفرتایی، کاری بی‌معنی است و لذا صفر هیچ عدد صحیحی را عاد نمی‌کند. به بیانی دیگر: $0 \nmid a$

ترفند: برای تشخیص معنادار بودن رابطه $a|b$، کافی است کسر $\frac{b}{a}$ تعریف شده باشد و مقدار آن یک عدد صحیح باشد.

قرارداد: بعنوان یک قرارداد می‌پذیریم که صفر تنها خودش را عاد می‌کند. یعنی: $0|0$

تست ۱۲۶ به ازای چند عدد صحیح مانند x، رابطه $x^4 - 4x^2 + 3 \,|\, 0$ برقرار است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

نکته ۱ بدیهی است که هر عدد صحیح غیرصفر مانند a بر ± 1 و بر خودش بخش‌پذیر است. یعنی: $\pm 1 | a \,,\, \pm a | a$

۲ هرگاه $a|b$ در این صورت: $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

بعنوان مثال $5|10$ پس می‌توان نتیجه گرفت که: $-5|-10 \,,\, 5|-10 \,,\, -5|10$.

مثال ۱۲۷ هرگاه $a|b$ در این صورت ثابت کنید:

الف) $a|-b$

ب) $-a|b$

ج) $-a|-b$

مثال ۱۲۸ اگر $2|a$ و $ab=60$ باشد، ثابت کنید $b|30$.

تست ۱۲۹ کوچکترین مقدار n برای آنکه رابطه $455|n!$ برقرار باشد، چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۷ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

ویژگی‌های رابطه عاد کردن

۱) اگر m و n دو عدد طبیعی باشند بطوری که $m \le n$ آنگاه: $a^m | a^n$.

بعنوان مثال: $2^3|2^5$ یا $3^5|3^8$

و همچنین هر عدد صحیح همواره خودش را می‌شمارد: $a|a \ (a \in \mathbb{Z})$

۲) در رابطه بخش‌پذیری می‌توان چاق‌تر را چاق‌تر کرد:

بیان دیگر: اگر a عدد b را بشمارد آنگاه a هر مضرب صحیح b را نیز می‌شمارد. یعنی: $a|b \rightarrow a|mb$.

به بیانی دیگر سمت راست رابطه عاد کردن را در هر عدد صحیح می‌توان ضرب کرد.

بعنوان مثال: $-2|6 \rightarrow -2|6\times5$

نتیجه اگر $a|b$ و n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه: $a|b^n$.

بعنوان مثال: $2|4 \rightarrow 2|4^3$

تذکر عکس ویژگی ۲ برقرار نیست. یعنی اگر $a|bc$ لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a|b$ یا $a|c$.

برای درک بهتر به مثالهای زیر توجه کنید:

$۳|۶\times۹ \quad ; \quad ۳|۶ \;,\; ۳|۹$

$۴|۲\times۱۶ \quad ; \quad ۴\nmid۲ \;,\; ۴|۱۶$

$۴|۶\times۲ \quad ; \quad ۴\nmid۶ \;,\; ۴\nmid۲$

ویژگی‌های رابطه عاد کردن

۳ در رابطه بخش‌پذیری می توان طرف لاغر را لاغرتر کرد:

$$\begin{cases} ab|c \Rightarrow a|c, b|c \\ a^n|b \Rightarrow a|b \end{cases}$$

۴ طرفین یک رابطه عاد کردن را می‌توان در یک عدد صحیح ضرب و یا بر یک عدد صحیح غیرصفر تقسیم کرد.

یعنی:

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} ka|kb \\ ka|kb \xrightarrow{k\neq ۰} a|b \end{cases}$$

بعنوان مثال:

$$\begin{cases} ۲|۸ \xrightarrow{\times۳} ۶|۲۴ \\ ۱۲|۶۰ \xrightarrow{\div۶} ۲|۱۰ \end{cases}$$

۵ طرفین یک رابطه عاد کردن را می‌توان به توان یک عدد طبیعی رساند. یعنی:

$$a|b \rightarrow a^n|b^n \;,\; n\in\mathbb{N}$$

بعنوان مثال: $۲|-۴ \rightarrow ۲^۳|(-۴)^۳$

نتیجه اگر $a|b$ و اعداد طبیعی m و n به گونه‌ای باشند که $m\leq n$ آنگاه: $a^m|b^n$

بعنوان مثال: $۲|۴ \rightarrow ۲^۲|۴^۳$

◆ بدانیم:

$\uparrow a|b \uparrow \qquad \downarrow a|b \downarrow \qquad a|b \uparrow \qquad \downarrow a|b$

◆ ویژگی‌های رابطه عاد کردن

⑥ رابطه عاد کردن دارای خاصیت تعدی است. یعنی: $\begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \rightarrow a|c$

بعنوان مثال: $۲|۶ \wedge ۶|۱۸ \rightarrow ۲|۱۸$

⑦ اگر عددی دو عدد دیگر را عاد کند، آنگاه مجموع و تفاضل آنها را نیز عاد می‌کند. یعنی:

$$\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \rightarrow a|b\pm c$$

بعنوان مثال: $\begin{cases} ۲|۶ \\ ۲|۱۴ \end{cases} \rightarrow ۲|۶+۱۴ \;,\; ۲|۶-۱۴$

یادآوری ترکیب خطی دو عدد x و y عبارتست از: $mx\pm ny$ که در آن m و n اعداد صحیح هستند.

نتیجه اگر عددی دو عدد دیگر را عاد کند، آنگاه **هر** ترکیب خطی از آنها را نیز عاد می‌کند. یعنی:

$$a|b \wedge a|c \rightarrow a|mb \pm nc$$

بعنوان مثال:

$$\begin{cases} ۲|۶ \\ ۲|۱۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲|۴\times۶+۳\times۱۰ \\ ۲|۹\times۶-۵\times۱۰ \end{cases}$$

بدانیم:

تذکر عکس ویژگی ۵ برقرار نیست. یعنی اگر عددی، مجموع یا تفاضل دو عدد دیگر را عاد کند، لزوماً نمی‌توان گفت که تک تک آن اعداد را عاد می‌کند.

برای درک بهتر به مثالهای زیر توجه کنید:

$$۵|۲+۸ \quad ; \quad ۵\nmid۲ \; , \; ۵\nmid۸$$

$$۴|۲-۱۰ \quad ; \quad ۴\nmid۲ \; , \; ۴\nmid۱۰$$

ویژگی‌های رابطه عاد کردن

۸ طرفین دو رابطه عاد کردن را می‌توان در هم ضرب کرد. یعنی:

$$a|b \wedge c|d \rightarrow ac|bd$$

بعنوان مثال: $۲|۴ \wedge ۳|۹ \rightarrow ۲\times۳|۴\times۹$

بدیهی است که: طرفین دو رابطه عاد کردن را نمی‌توان با هم جمع و یا تفریق کرد.

بعنوان مثال: $\begin{cases}5|30\\5|15\end{cases}$; $\begin{cases}\cancel{5+5|30+15}\\\cancel{5-5|30-15}\end{cases}$ یا $\begin{cases}2|4\\5|15\end{cases}$; $\begin{cases}\cancel{2+5|4+15}\\\cancel{2-5|4-15}\end{cases}$

ویژگی‌های رابطه عاد کردن

۹ اگر $a|b$ و $b\neq 0$ باشد، آنگاه $|a|\leq|b|$

غیررسمی: یعنی در یک رابطه عاد کردن صرفنظر از علامت دو عدد، اندازه عدد سمت چپ نمی‌تواند بیشتر از اندازه عدد سمت راست باشد!)

بعنوان مثال: $2|-10 \rightarrow |2|\leq|-10|$

نتیجه اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه: $a=\pm b$

ویژگی‌های رابطه عاد کردن

۱۰ در مورد توانهای متفاوت از طرفین یک رابطه‌ی بخش‌پذیری داریم: $a^x|b^y \xrightarrow{\begin{vmatrix}x & y\\ z & t\end{vmatrix}\geq 0} a^z|b^t$

مثال ۱۳۰ هرگاه $7m+6$ و $6m+5$ بر عدد صحیح و غیرصفر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید: $a=\pm 1$. (تمرین کتاب)

مثال ۱۳۱ اگر $a+b \mid a+c$ و $a+b \mid 2c$، آنگاه ثابت کنید:

الف) $a+b \mid a-c$

ب) $a+b \mid 2a$

مثال ۱۳۲ هرگاه $5 \mid 4k+1$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$ آنگاه ثابت کنید: $25 \mid 16k^2+28k+6$. (تمرین کتاب)

مثال ۱۳۳ اگر $11 \mid a+b$، ثابت کنید: $11 \mid 6a-5b$. (تمرین کتاب)

نکته اگر p یک عدد اول و a یک عدد صحیح باشد که $a|p$ آنگاه $a=\pm1$ یا $a=\pm p$.

نتیجه تنها مقسوم‌علیه‌های یک عدد اول، خود آن عدد و ۱ می‌باشند.

تست ۱۳۴ اگر $a-b|a$ آن‌گاه کدام گزینه درست می‌باشد؟

۱) $a|a-b$ ۲) $b|a-b$ ۳) $a|b$ ۴) $a-b|b$

پاسخ

$$\begin{cases} a-b|a \\ a-b|a-b \end{cases} \Rightarrow a-b|a-(a-b) \Rightarrow a-b|b$$

مثال ۱۳۵ اگر $a|5m+4$ و $a|4m+6$ آن‌گاه برای a چند جواب صحیح وجود دارد؟

پاسخ

$$\left.\begin{cases} a|5m+4 \overset{\times -4}{\Rightarrow} a|-20m-16 \\ a|4m+6 \overset{\times 5}{\Rightarrow} a|20m+30 \end{cases}\right\} a|14 \Rightarrow a=\pm1, \pm2, \pm7, \pm14$$

تست ۱۳۶ اگر $+$ $x|z$ و $x^2-z^2|y+z$ آن‌گاه:

۱) $z|x+y$ ۲) $y|z$ ۳) $x|y$ ۴) $x-z|x-y$

مثال ۱۳۷ چند نقطه با مختصات صحیح بر روی تابع $y=\dfrac{x^2-3x+8}{x-1}$ وجود دارد؟

نکته اگر دو طرف بخش‌پذیری عبارت‌هایی بر حسب یک پارامتر بود و مقادیر ممکن برای آن پارامتر خواسته‌شده بود، در سمت راست بخش‌پذیری، پارامتر را به نحوی از بین میبریم تا یک عدد معلوم حاصل شود سپس سمت چپ بخش‌پذیری را برابر مقسوم‌علیه‌های آن عدد معلوم قرار می‌دهیم، به عبارت دیگر:

از آنجایی که باقیمانده عبارت $F(x)$ بر $x-a$ برابر است با $F(a)$، بنابراین:

$$\boxed{x-a \mid F(x) \Rightarrow x-a \mid F(a)}$$

راه حل دوم سوال قبل: از همان ابتدا برای اینکه y صحیح شود کافی است صورت کسر تابع بر مخرج آن بخش پذیر باشد، و برای این کار باید مخرج جزو مقسوم علیه های صورت باشد، یعنی مخرج باید صورت را بشمارد:

$$x-1 \mid x^2-3x+8 \Rightarrow x-1 \mid 1^2-3\times 1+8 \Rightarrow x-1 \mid 6 \Rightarrow \begin{cases} x-1=\pm 1 \\ x-1=\pm 2 \\ x-1=\pm 3 \\ x-1=\pm 6 \end{cases}$$

یادآوری در درس حسابان ۲ دیدیم برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $A(x)$ بر چندجمله‌ای درجه اول $B(x)$ کافیست ریشه $B(x)$ را در $A(x)$ قرار دهیم.

یعنی اگر x_0 ریشه $B(x)$ باشد، باقیمانده تقسیم $A(x)$ بر $B(x)$ برابر است با: $R=A(x_0)$.

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \cdots & \overline{Q(x)} \\ \hline R & \end{array} \xrightarrow[R=A(x_0)]{\text{اگر } x_0 \text{ ریشه } B(x)} A(x)=B(x)Q(x)+A(x_0)$$

بعنوان مثال باقیمانده تقسیم $A(x)=x^۳-۳x+۴$ بر $B(x)=۲x-۴$ برابر است با:

$$\begin{cases} ۲x-۴=۰ \rightarrow x=۲ \\ R=۲^۳-۳\times۲+۴=۶ \end{cases}$$

مثال ۱۳۸ به ازای چند مقدار طبیعی a، عبارت $a^۲+۳$ بر $a-۳$ بخش‌پذیر است؟

تست ۱۳۹ بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که در رابطه‌ی $n+۴ \mid n^۳+n+۱$ صدق کند، برابر است با:

(۱) ۶۷ (۲) ۵۹ (۳) ۶۳ (۴) ۱۴۱

پاسخ

$$n+۴ \mid n^۳+n+۱ \Rightarrow n+۴ \mid (-۴)^۳+(-۴)+۱ \Rightarrow n+۴ \mid -۶۷ \Rightarrow \begin{cases} n+۴=۶۷ \Rightarrow n=۶۳ \\ n+۴=-۶۷ \Rightarrow n=-۷۱ \\ n+۴=۱ \Rightarrow n=-۳ \\ n+۴=-۱ \Rightarrow n=-۵ \end{cases}$$

تست ۱۴۰ نقاط (a,b) روی منحنی $y=\frac{۳x-۱}{x+۲}$ قرار دارند. اگر $a,b\in\mathbb{Z}$، چند نقطه با این ویژگی روی این منحنی قرار دارد؟ (سراسری ۱۴۰۱)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

مثال ۱۴۱ منحنی $۴x^۲-۳xy-۲y+۱=۰$ از چند نقطه با مختصات صحیح می‌گذرد؟

نکته اگر $ax+b|f(x)$ می‌توان گفت که $\frac{-b}{a}$ (ریشه‌ی سمت چپ) را به جای x در طرف راست قرار داده و پس‌از ساده کردن کسر و تبدیل آن به یک کسر تحویل‌ناپذیر، در آخرین مرحله مخرج کسر را حذف میکنیم.

تست ۱۴۲ کوچکترین مقدار صحیح x که در رابطه $۳x+۲|۵x+۷$ صدق می‌کند کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۱- (۳) ۳ (۴) ۳-

تست ۱۴۳ از رابطه $a^۵|b^۹$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟

(۱) $a^{۱۰}|b^{۱۷}$ (۲) $a^۷|b^{۱۲}$ (۳) $a^۸|b^{۱۵}$ (۴) $a^۹|b^۶$

تست ۱۴۴ اگر $a^۳|b^۲$ کدام یک از رابطه‌های زیر درست نیست؟

(۱) $a|b$ (۲) $a^۵|b^۴$ (۳) $a^۶|b^۵$ (۴) $a^۲|b$

تست ۱۴۵ به ازای بعضی از مقادیر طبیعی n، و $a \neq 1$ اگر $a \mid 11n+3$ و $a \mid 5n+4$، آنگاه تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟ (سراسری خارج ۹۸)

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

تست ۱۴۶ اگر $(n+1)^2 \mid 2n-3$ باشد، مجموع مقادیر طبیعی n کدام است؟ (سنجش ۱۴۰۰)

(۱) ۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۱ (۴) ۳۰

بخش‌پذیری دو جمله‌ای بر دوجمله‌ای

(الف) اگر $\frac{n}{p}$ طبیعی باشد، آن‌گاه: $a^p-b^p \mid a^n-b^n$

(ب) اگر $\frac{n}{p}$ زوج باشد، آن‌گاه: $a^p+b^p \mid a^n-b^n$

(ج) اگر $\frac{n}{p}$ فرد باشد، آن‌گاه: $a^p+b^p \mid a^n+b^n$.

تست ۱۴۷ از رابطه‌ی $a^2 \mid b+c$ کدام نتیجه گیری همواره صحیح است؟ $(n \in \mathbb{N})$

(۱) $a \mid b^n-c^n$ (۲) $a \mid b^n+c^n$ (۳) $a \mid b^{2n}-c^{2n}$ (۴) $a \mid b-c$

مثال ۱۴۸ تعداد اعضای مجموعه‌ی $A=\{n:۶۵|۲^n+۱\}$ از مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ کدام است؟

پاسخ

$$۶۵|۲^n+۱ \Rightarrow ۲^۶+۱^۶|۲^n+۱^n \Rightarrow \frac{n}{۶}=۲k+۱ \Rightarrow n=۶(۲k+۱)$$

$$۱\le n<۱۰۰ \Rightarrow ۱\le ۶(۲k+۱)<۱۰۰ \Rightarrow \frac{۱}{۶}\le ۲k+۱<\frac{۱۰۰}{۶} \Rightarrow ۰/۱۶\le ۲k+۱<۱۶/۶$$

$$\Rightarrow ۱\le ۲k+۱\le ۱۶ \Rightarrow ۰\le ۲k\le ۱۵ \Rightarrow ۰\le k\le ۷/۵ \Rightarrow ۰\le k\le ۷ \Rightarrow n(k)=۷-۰+۱=۸$$

تست ۱۴۹ عدد $۲^{۱۰}+۱۱^{۱۰}$ بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۹ ۳) ۱۲۵ ۴) ۱۱۷

مثال ۱۵۰ اگر $A=\left\{n\in\mathbb{N}:۶۳\middle|۲^n-۱\right\}$ آن‌گاه تعداد اعضای دو رقمی A کدام است؟

پاسخ

$$۶۳|۲^n-۱\Rightarrow ۲^۶-۱|۲^n-۱\Rightarrow \frac{n}{۶}=k\Rightarrow n=۶k\Rightarrow ۱۰\le n<۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۱۰\le ۶k<۱۰۰\Rightarrow \frac{۱۰}{۶}\le k<\frac{۱۰۰}{۶}\Rightarrow ۲\le k\le ۱۶\Rightarrow n(k)=۱۶-۲+۱=۱۵$$

تست ۱۵۱ عدد $۵^{۳۰}-۲^{۶۰}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۱ ۳) ۶۱ ۴) ۶۳

پاسخ

$$۵^{۳۰}-۲^{۶۰}=(۵^۳)^{۱۰}-(۲^۶)^{۱۰}=۱۲۵^{۱۰}-۶۴^{۱۰}$$

n هم طبیعی است و هم زوج بنابراین عبارت a^n-b^n هم بر $a-b$ بخش‌پذیر است و هم بر $a+b$ بنابراین:

$$۱۲۵-۶۴=۶۱$$
$$۱۲۵+۶۴=۱۸۹$$

از طرف دیگر:

$$۱۸۹=۳^۳\times۷$$

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک

یادآوری (تعیین ب.م.م و ک.م.م دو عدد صحیح)

اعداد صحیح ۷۲ و ۸۴ مفروضند. برای تعیین ب.م.م آنها داریم:

۷۲	۳۶	۲۴	۱۸	۱۲	۹	۸	۶	۴	۳	۲	۱	۷۲
۸۴	۴۲	۲۸	۲۱	۱۴	۱۲	۷	۶	۴	۳	۲	۱	۸۴

همان طور که مشاهده می‌کنید، اعداد ۷۲ و ۸۴ دارای ۶ مقسوم‌علیه مشترک هستند که بزرگترین آنها ۱۲ است.

اعداد صحیح ۶ و ۸ مفروض‌اند. برای تعیین ک.م.م آنها داریم:

...	۷۲	۶۶	۶۰	۵۴	۴۸	۴۲	۳۶	۳۰	۲۴	۱۸	۱۲	۶	۶
...	۹۶	۸۸	۸۰	۷۲	۶۴	۵۶	۴۸	۴۰	۳۲	۲۴	۱۶	۸	۸

همان طور که مشاهده می‌کنید، اعداد ۶ و ۸ دارای مضارب مشترک بسیاری هستند که کوچکترین آنها ۲۴ است.

نکته برای تعیین ب.م.م و ک.م.م اعداد بزرگ ترجیحاً از روش تجزیه به عوامل اول استفاده می‌کنیم. بدین صورت که ابتدا دو عدد را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم.

حاصلضرب عوامل مشترک با توان کوچکتر = ب.م.م

حاصلضرب عوامل مشترک با توان بزرگتر و عوامل غیرمشترک = ک.م.م

بعنوان مثال برای دو عدد ۷۲ و ۸۴ داریم:

$$\begin{cases} ۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ \\ ۸۴ = ۲^۲ \times ۳ \times ۷ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B.M.M = ۲^۲ \times ۳ = ۱۲ \\ K.M.M = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۷ = ۵۰۴ \end{cases}$$

تعریف عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (یا به اختصار ب.م.م) دو عدد صحیح a و b (که هر دو با هم صفر نیستند) گوئیم و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط زیر همزمان برقرار باشند:

$$(a,b)=d \Leftrightarrow \begin{cases} d|a , d|b \\ \forall m \in \mathbb{N} : m|a , m|b \Rightarrow m|a \end{cases}$$

توجه شرط دوم بیان می‌دارد که d از هر مقسوم علیه مشترک دیگری، بزرگتر است.

توجه

بعنوان مثال: $(-۴,-۶)=۲$, $(۴,۹)=۱$, $(۰,۴)=۴$, $(۱۰,-۵)=۵$

تعریف دو عدد صحیح a و b را نسبت به هم اول یا متباین گوئیم، هرگاه ب.م.م آنها ۱ باشد. یعنی: $(a,b)=۱$.

بعنوان مثال: $(۱,۵)=۱$, $(۲,۷)=۱$, $(۴,۹)=۱$, $(۱۵,۴)=۱$

تعریف عدد طبیعی c را کوچکترین مضرب مشترک (یا به اختصار ک.م.م) دو عدد صحیح و غیرصفر a و b می‌گوئیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$، هرگاه دو شرط زیر همزمان برقرار باشند:

$$[a,b]=c \Leftrightarrow \begin{cases} a|c , b|c \\ \forall m \in \mathbb{N} : a|m , b|m \Rightarrow c|m \end{cases}$$

توجه شرط دوم بیان می‌دارد که c از هر مضرب مشترک دیگری، کوچکتر است.

بعنوان مثال: $[-16,4]=16$, $[4,9]=36$, $[4,6]=12$, $[-10,15]=30$

توجه

نتیجه اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آنگاه:

$$\begin{cases} (a,b)\,|\,a \\ (a,b)\,|\,b \end{cases} , \quad \begin{cases} a\,|\,[a,b] \\ b\,|\,[a,b] \end{cases}$$

مثال ۱۵۲ حاصل عبارت $[(627,429),154]$ را تعیین کنید. (کنکور خارج ۹۸)

مثال ۱۵۳ ب.م.م دو عدد $3n+2$ و $7n+9$ را بیابید. (کتاب درسی)

مثال ۱۵۴ ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n دو عدد $11n+9$ و $5n+4$ نسبت به هم اول هستند.

ویژگی‌های رابطه ب.م.م و ک.م.م

۱ هرگاه a و b دو عدد صحیح باشند که $a|b$، آنگاه: $\begin{cases}(a,b)=|a|\\ [a,b]=|b|\end{cases}$

۲ هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول‌اند. یعنی اگر $k\in\mathbb{Z}$ آنگاه: $(k,k+1)=1$.

اثبات

ویژگی‌های رابطه ب.م.م و ک.م.م

۳ هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند. یعنی اگر $k \in \mathbb{Z}$ آنگاه: $(۲k+۱,۲k+۳)=۱$.

اثبات

۴ هر دو عدد اول متمایز، نسبت بهم اول‌اند. یعنی اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند، آنگاه: $(p,q)=۱$.

بعنوان مثال: $(۳,۵)=۱$, $(۷,۲۹)=۱$.

۵ اگر p عددی اول باشد که مقسوم‌علیه a نمی‌باشد، آنگاه a و p نسبت به هم اول‌اند. به بیانی دیگر:

$$p \nmid a \rightarrow (p,a)=۱$$

بعنوان مثال: ۷ عدد اول است و $۷ \nmid ۱۰$ پس نتیجه می‌شود که $(۷,۱۰)=۱$.

تذکر در استفاده از ویژگی فوق، شرط اول بودن p الزامی است. به بیانی دیگر از فرض $p \nmid a$ لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که a و p نسبت بهم اول‌اند. بعنوان یک مثال نقض: $(۴,۶)\neq ۱$, $۴ \nmid ۶$

۶ ب.م.م دو عدد، ک.م.م آنها را می‌شمارد. یعنی اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آنگاه: $(a,b)\mid[a,b]$

نتیجه ب.م.م دو عدد همواره کوچکتر و مساوی ک.م.م آنها است.

ویژگی‌های رابطه ب.م.م و ک.م.م

۷ حاصل‌ضرب ب.م.م و ک.م.م دو عدد صحیح a و b همواره با حاصل‌ضرب آن دو عدد برابر است. یعنی:

$$(a,b)[a,b]=ab$$

نتیجه برای تعیین ک.م.م دو عدد، کافی است حاصل‌ضرب آنها را بر ب.م.م آنها تقسیم کرد.

بعنوان مثال: $[۱۸,۲۴]=\frac{۱۸\times۲۴}{(۱۸,۲۴)}=\frac{۱۸\times۲۴}{۶}=۱۸\times۴=۷۲$

۸ اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند آنگاه ک.م.م آنها برابر است با حاصلضرب آن دو عدد و برعکس.

یعنی اگر a و b دو عدد صحیح باشند: $(a,b)=۱ \Leftrightarrow [a,b]=ab$.

۹ ب.م.م و ک.م.م دو عدد با هم برابرند اگر و تنها اگر قدرمطلق آن دو عدد با هم برابر باشد.

یعنی اگر a و b دو عدد صحیح باشند: $(a,b)=[a,b] \Leftrightarrow |a|=|b|$.

۱۰ اگر عدد صحیح a ضرب دو عدد را عاد کند و نسبت به یکی از آنها اول باشد، دیگری را عاد می‌کند. (لم اقلیدس)

یعنی: $a|bc \wedge (a,b)=۱ \rightarrow a|c$

بعنوان مثال: $۵|۸m \xrightarrow{(۵,۸)=۱} ۵|m$

مثال ۱۵۵ حاصل هر یک از عبارات زیر را بدست آورید. (تمرین کتاب)

الف) $([m^۲,m],m^۵)$

ب) $(۲m,۶m^۳)$

ج) $(3m+1, 3m+2)$

د) $[m^7, (m^2, m^3)]$

و) $([m, (m, n)], (m, [m, n]))$

توجه عدد ۲ و توان‌های عدد۲ یعنی 2^n نسبت به اعداد فرد اولند به عبارت دیگر: $(2^n, 2k+1) = 1$

چند خاصیت دیگر در مورد ب.م.م

$$(a,b)=d \Rightarrow \begin{cases} (na,nb)=|n|(a,b) \\ (a^n,b^n)=d^n \\ (-a,b)=(a,-b)=(-a,-b)=d \\ (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1 \end{cases}$$

تست ۱۵۶ اگر $(a,4)=2$ و $(b,4)=2$ باشد، حاصل $(a+b,4)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲ یا ۴ ۳) ۴ ۴) ۱ یا ۲

مثال ۱۵۷ اگر b فرد باشد و $a|b$ آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $۱۸ab$ و $۱۲a^۲$ کدام است؟

تست ۱۵۸ اگر برای هر عدد طبیعی n، a^n بر b^n بخش‌پذیر باشد، کدام گزاره نادرست است؟ (کتاب درسی)

۱) $(a,b^۲)=b^۲$ ۲) $[a^۲,b]=a^۲$ ۳) $(a,b)=|b|$ ۴) $[a,b]=|a|$

تست ۱۵۹ به ازای چند عدد دو رقمی n، رابطه $[۲۳,n-۳]=۲۳n-۶۹$ برقرار می‌باشد؟

۱) ۸۵ ۲) ۸۸ ۳) ۸۶ ۴) ۸۷

تست ۱۶۰ دو عدد $a^۲+a+۳$ و $a-۱$ نسبت به هم اولند. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $a=۵k+۱$ ۲) $a=۵k$ ۳) $a\neq ۵k$ ۴) $a\neq ۵k+۱$

تست ۱۶۱ برای $(۳a-۲,۶a+۲)$ چند جواب وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۱۶۲ اگر $(ax,by)=۱$ باشد، کدام نتیجه گیری نادرست است؟

۱) $(a,b)=۱$ ۲) $(x,y)=۱$ ۳) $(a,by)=۱$ ۴) $(b,y)=۱$

نکته اگر عددی نسبت به چند عدد اول باشد، نسبت به تک تک آن‌ها نیز اول است. در ضمن عکس آن نیز برقرار است:

$$(a,bc)=۱ \Rightarrow (a,b)=۱,(a,c)=۱$$

$$(a_۱a_۲...,b_۱b_۲....)=۱ \Rightarrow (a_n,b_m)=۱$$

$$(a,b)=۱,(a,c)=۱ \Rightarrow (a,bc)=۱$$

نکاتی در مورد اعداد اول

عدد P را اول می‌گویند هرگاه بر هیچ عدد دیگری به جز خودش و ۱ بخش‌پذیر نباشد.

نکته اگر عدد طبیعی N در تجزیه به عوامل اول بصورت $N=p_۱^{\alpha}\times p_۲^{\beta}\times p_۳^{\gamma}\times ...$ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی (یا مثبت) عدد N برابر خواهد بود با: $(\alpha+۱)(\beta+۱)(\gamma+۱)...$.

بدیهی است تعداد کل مقسوم‌علیه‌های N (مثبت و منفی) ۲ برابر عدد فوق می‌شود.

بعنوان مثال تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد ۷۲۰ برابر است با:

$۷۲۰=۵\times ۳^۲\times ۲^۴ \rightarrow$ تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی $=(۱+۱)(۲+۱)(۴+۱)=۳۰$

تست ۱۶۳ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $x = ۲^m \times ۵^n$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $\frac{x}{۴۰}$، ۱۲ واحد بیشتر است. حداقل مقدار x کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۰)

۱) ۵۰۰ ۲) ۶۴۰ ۳) ۸۰۰ ۴) ۱۲۸۰

نکته برای محاسبه توانهای عامل اول p در !n از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{توان عدد اول } p = \left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^۲}\right]+\dots+\left[\frac{n}{p^k}\right] \quad ; \quad p^k \le n$$

بعنوان مثال توان عامل اول ۲ در !۱۰ برابر است با:

$$\left[\frac{۱۰}{۲}\right]+\left[\frac{۱۰}{۴}\right]+\left[\frac{۱۰}{۸}\right]=۵+۲+۱=۸$$

تست ۱۶۴ بـرای هـر عـدد طبیعـی n داریـم: $n! = ۲^{a_۱} \times ۳^{a_۲} \times ۵^{a_۳} \times \dots$. حاصـل $\sum_{i=۱}^{\infty} a_i$ بـه ازای $n = ۲۰$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۰)

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

تست ۱۶۵ اگر n یک عدد طبیعی باشد، چند عدد صحیح مانند a وجود دارد که $a|(5n-3, 4n+1)$؟ (سنجش ۹۹)

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۱۲

تست ۱۶۶ به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n دو عدد $4n+1$ و $5n-3$ نسبت به هم اول نیستند؟ (سراسری خارج ۹۵)

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

تست ۱۶۷ به ازای چند عدد طبیعی و سه رقمی n دو عدد $3n+1$ و $14n-9$ نسبت به هم اول هستند؟ (مشابه سنجش ۱۴۰۰)

۱) ۲۲
۲) ۸۷۸
۳) ۸۷۵
۴) ۸۴۳

متباین‌سازی

در بعضی تستها رابطه‌هایی بین ب.م.م و ک.م.م دو عدد a و b و حتی مجموع یا ضرب آنها داده می‌شود، که با استفاده از عمل متباین‌سازی می‌توان دامنه اعداد را کوچکتر کرد تا دسته‌بندی جوابهای احتمالی کمتر شود. چرا که کار کردن با اعدادی که نسبت به هم اول هستند ساده‌تر است.

اگر a و b دو عدد صحیح باشند بطوری که $(a,b)=d$، در این صورت: $(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$

بعنوان مثال: $(30,54)=6 \rightarrow (\frac{30}{6},\frac{54}{6})=(5,9)=1$

اگر فرض کنیم $\frac{a}{d}=a'\ ,\ \frac{b}{d}=b'$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a=a'd \\ b=b'd \end{cases} \rightarrow (a',b')=1\ ,\ [a,b]=a'b'd$$

تست ۱۶۸ اگر a و b دو عدد طبیعی باشند که $(a,b)=7$ و $[a,b]=315$ بیشترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۹۸ ۲) ۱۰۴ ۳) ۳۰۶ ۴) ۳۲۲

تست ۱۶۹ اگر a و b دو عدد صحیح باشند که $[a,b]=60(a,b)$ و $a+b=136$، تفاضل آنها کدام است؟ (سراسری ۹۹ و سنجش ۱۴۰۱)

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۶

تمرینات تشریحی درس دوم (عاد کردن و ب.م.م، ک.م.م)

تمرین ۱۷۰ اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$ آنگاه نشان دهید a یک عدد اول است. (تمرین کتاب)

تمرین ۱۷۱ اگر $a\in\mathbb{N}$ و $a|9k+7$ و $a|7k+6$، آنگاه ثابت کنید $a=1$ یا $a=5$. (تمرین کتاب)

تمرین ۱۷۲ ثابت کنید اگر $a-b|a$ آنگاه $a-b|b$. (تمرین کتاب)

تمرین ۱۷۳ اگر $5|2k+1$، ثابت کنید: $25|14k^2+19k+6$. (تمرین کتاب و کنکور ۹۶)

تمرین ۱۷۴ اگر $b|n+1$ و $b|n^2+9n+1$ ثابت کنید: $b|7$. (تمرین کتاب)

تمرین ۱۷۵ اگر $b>1$ و اعداد طبیعی m و n به گونه‌ای باشند که $m|n$، ثابت کنید: $b^m-1|b^n-1$. (تمرین کتاب)

جواب

یادآوری $a^k-1=(a-1)(a^{k-1}+a^{k-2}+...+1)$

$m|n \rightarrow n=mk\ , k\in\mathbb{Z}$

$b^n-1=b^{mk}-1 \rightarrow b^n-1=(b^m)^k-1 \rightarrow$

$b^n-1=(b^m-1)[\underbrace{(b^m)^{k-1}+(b^m)^{k-2}+...}_{q\in\mathbb{Z}}] \rightarrow b^n-1=(b^m-1)q \rightarrow b^m-1|b^n-1$

تمرین ۱۷۶ اگر $a|c$، حاصل $([c,1],(a,[a,b]))$ را بدست آورید. (تمرین کتاب)

تمرین ۱۷۷ اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n دو عدد $12n+7$ و $5n-2$، نسبت به هم اول نباشند، آنگاه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد را بدست آورید. (تمرین کتاب)

تمرین ۱۷۸ دو عدد a و b نسبت بهم اول‌اند و $54|(a+b)^2$، کوچکترین مضرب مشترک a و ۳۶ را بیابید. (تمرین کتاب)

جواب می‌دانیم $36=2^2\times3^2$، پس لازم است بدانیم a در تجزیه به عوامل اول شامل چه اعدادی است!

$$54|(a+b)^2 \xrightarrow{2|54\,,\,3|54} \begin{cases} 2|(a+b)^2 \rightarrow (a+b)^2=2q_1 \rightarrow a+b=2k_1 \\ 3|(a+b)^2 \rightarrow (a+b)^2=3q_2 \rightarrow a+b=3k_2 \end{cases}$$

نتیجه اینکه $a+b$ مضرب ۲ و مضرب ۳ است.

اما اعداد a و b نمی‌توانند مضرب ۲ یا مضرب ۳ باشند! زیرا اگر مثلاً a شامل مضرب ۲ باشد، بواسطه مجموع $a+b$، لازم است b نیز مضرب ۲ باشد و دیگر نسبت بهم اول نیستند. (خلاف فرض سئوال!)

پس می‌توان ادعا کرد a (همچنین b) در تجزیه به عوامل اول بصورت زیر هستند:

$$a=5^k\times7^s\times11^t\times\ldots$$

پر واضح است که a و ۳۶ عامل اول مشترک ندارند و لذا نسبت بهم اول‌اند. پس داریم: $[36,a]=36a$

بخش‌پذیری در یک نگاه (قسمت دوم)

- قضیه تقسیم
  - شرط باقیمانده
  - مسائل پارامتری
  - حداکثر مقسوم
  - مسائل باقیمانده
- ساختار اعداد صحیح
  - در مقایسه با ۲
  - در مقایسه با ۳
  - در مقایسه با ۴
  - در مقایسه با m
- افراز مجموعه Z
  - تعریف افراز
  - کلاس هم‌ارزی
  - افراز اعداد صحیح
  - مربع اعداد فرد
- مسائل ترکیبی
  - مسائل ترکیبی

قضیه تقسیم و کاربردها

قضیه اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشند، اعداد صحیح و یکتای r و q یافت می‌شوند، به‌طوری‌که:

$$a=bq+r \quad , \quad 0\leq r<b$$

اثبات قضیه تقسیم خارج از عهده کتاب درسی است و آن را بدون اثبات می‌پذیریم.

همانطور که از دوره ابتدایی به یاد دارید، a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌گوئیم.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} \vdots & q \\ \hline r & \end{array}$$

تذکر باقی‌مانده یک تقسیم نه می‌تواند عددی منفی باشد و همچنین همواره باید از مقسوم علیه کوچکتر باشد.

نکته

۱ اگر باقی‌مانده تقسیمی منفی شد آنقدر آن را با مقسوم علیه جمع می‌کنیم تا به اولین عدد مثبت برسیم.

۲ اگر باقی‌مانده تقسیمی بزرگتر یا مساوی مقسوم علیه شد آنقدر مقسوم علیه را از آن کم می‌کنیم تا در محدوده مجاز قرار گیرد.

تذکر توجه داشته باشید که در قضیه تقسیم، باقی‌مانده همواره یک عدد نامنفی است. پس می‌توان نتیجه گرفت که در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده یکی از اعداد نامنفی صفر یا ۱ یا ۲ یا ... $b-1$ است.

به‌عنوان مثال:

در تقسیم ۲۵ بر ۷ داریم: $۲۵=۷\times۳+۴ \;\; ; \;\; q=۳\,,r=۴$

در تقسیم ۲۵- بر ۷ داریم: $-۲۵=-۲۸+۳=۷\times(-۴)+۳ \;\; ; \;\; q=-۴\,,r=۳$

تذکر همانطور که مشاهده می‌کنید در تقسیم ۲۵- بر ۷، با پیدا کردن اولین عدد کوچکتر از ۲۵- که بر ۷ بخش‌پذیر باشد، (یعنی ۲۸-) خارج قسمت را طوری لحاظ کردیم که باقی‌مانده یک عدد مثبت شود!

مثال باقی‌مانده تقسیم ۳۷- بر ۷ کدام است؟

مثال در یک تقسیم ۲۷ واحد به مقسوم و ۳ واحد به مقسوم علیه اضافه می‌کنیم. خارج قسمت ثابت مانده در حالی که ۶ واحد از باقی‌مانده کم می‌شود. خارج قسمت این تقسیم کدام است؟

تست ۱۷۹ اگر باقی‌مانده تقسیم x به ۲۰ برابر ۷ باشد، باقی‌مانده $7x+1$ بر ۱۴ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

تست ۱۸۰ در تقسیم چند عدد سه رقمی بر ۲۱، باقی‌مانده برابر ۱۵ می‌شود؟

۱) ۳۹ ۲) ۴۰ ۳) ۴۱ ۴) ۴۲

تست ۱۸۱ در یک تقسیم باقی‌مانده ۲۳ و خارج قسمت ۷ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کنیم تا خارج قسمت تغییری نکند؟ (تمرین کتاب)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

مثال در یک تقسیم مقسوم علیه ۶۸ و باقی‌مانده نصف خارج قسمت می‌باشد. حداکثر مقدار مقسوم در این تقسیم کدام است؟

$$a=bq+r \quad ۰\leq r<b$$

$$b=۶۸\ ,r=\frac{q}{۲}\Rightarrow a=۶۸q+\frac{q}{۲}$$

$$۰\leq r<b\Rightarrow ۰\leq \frac{q}{۲}<۶۸\Rightarrow ۰\leq q<۱۳۶\Rightarrow \mathbf{Max(q)=۱۳۵}\Rightarrow \mathbf{Max(a)}=۶۸\times ۱۳۵+\frac{۱۳۵}{۲}\times$$

$$\mathbf{Max(q)}=۱۳۴\Rightarrow \mathbf{Max(a)}=۶۸\times ۱۳۴+\frac{۱۳۴}{۲}=۹۱۷۹$$

تست ۱۸۲ چند عدد طبیعی مضرب ۹ وجود دارد که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۴۳۰ با مجذور خارج قسمت برابر باشد؟ (سراسری ۹۹)

۱) ۷ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۵

تست ۱۸۳ اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a>۹$ بر ۱۱، ۳ واحد بیشتر از باقی‌مانده باشد، چقدر احتمال دارد که عدد $a-۹$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد؟ (سراسری ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۱۳}{۲۲}$ ۲) $\frac{۶}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۱}$

تست ۱۸۴ در تقسیم ۹۱ بر b باقی‌مانده مربع خارج قسمت است. مقسوم‌علیه چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار

مثال اگر باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۲۳۱ برابر ۱۲۸ باشد، باقی‌مانده این عدد بر ۲۱ کدام است؟

مثال چند عدد طبیعی وجود دارد که خارج قسمت ۷۲۵ در تقسیم بر هر کدام از آن‌ها، برابر ۱۰ باشد؟

$$a=bq+r \quad ۰\le r<b$$

$$۷۲۵=b\times ۱۰+r\Rightarrow r=۷۲۵-۱۰b$$

$$۰\le r<b\Rightarrow\begin{cases} r\ge ۰\Rightarrow ۷۲۵-۱۰b\ge ۰\Rightarrow ۷۲۵\ge ۱۰b\Rightarrow b\le \frac{۷۲۵}{۱۰}=۷۲/۵\Rightarrow b\le ۷۲ \\ r<b\Rightarrow ۷۲۵-۱۰b<b\Rightarrow ۷۲۵<۱۱b\Rightarrow b>\frac{۷۲۵}{۱۱}\Rightarrow b>۶۵/۹\Rightarrow b\ge ۶۶ \end{cases}$$

$$۶۶\le b\le ۷۲\Rightarrow n(b)=۷۲-۶۶+۱=۷$$

مثال باقی‌مانده تقسیم عدد a و b بر عدد ۳۷ به‌ترتیب برابر ۱۵ و ۲۹ می‌باشد. باقی‌مانده $a-b$ بر ۳۷ کدام است؟

$$a=bq+r\Rightarrow\begin{cases} a=۳۷q+۱۵ \\ b=۳۷q'+۲۹ \end{cases}\Rightarrow a-b=۳۷(q-q')+۱۵-۲۹\Rightarrow$$

$$a-b=۳۷q''\boxed{-۱۴}$$
$$+۳۷=۲۳$$

مثال در یک تقسیم، مقسوم ۵۴۲ و خارج قسمت برابر ۱۲ می‌باشد. حداکثر مقدار باقی‌مانده کدام است؟

مثال اگر باقی‌مانده تقسیم عدد زوج a بر ۲۳ برابر ۱۷ باشد، در این صورت باقی‌مانده عدد $\frac{a}{۲}$ بر ۲۳ کدام است؟

$$a=bq+r \quad ۰\le r<b\Rightarrow \qquad a = ۲۳q + ۱۷ \Rightarrow q=۲k+۱\Rightarrow a=۲۳(۲k+۱)+۱۷$$

$$a=۴۶k+۴۰\Rightarrow \frac{a}{۲}=۲۳k+\boxed{۲۰}$$

تست ۱۸۵ اگر a در تقسیم به ۶ و ۷ به‌ترتیب باقی‌مانده ۴ و ۶ داشته باشد، باقی‌مانده a بر ۴۲ کدام است؟

۱) ۳۰
۲) ۸-
۳) ۳۴
۴) ۳۲-

تست ۱۸۶ اگر باقی‌مانده a در تقسیم به ۸ و ۹ به‌ترتیب برابر ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر ۷۲ کدام است؟

۱) ۵۹
۲) ۶۱
۳) ۶۹
۴) ۷۱

تست ۱۸۷ اگر باقی‌مانده a بر دو عدد ۹ و ۷ به‌ترتیب برابر ۵ و ۲ باشد، ب.م.م ۶۳ و باقی‌مانده تقسیم a بر ۶۳ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲۳
۳) ۷
۴) ۹

تست ۱۸۸ باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی a بر اعداد ۵ و ۷ و ۱۱ به‌ترتیب ۲ و ۴ و ۸ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم بزرگترین عدد سه رقمی a بر ۲۳ کدام است؟ (سراسری خارج ۹۷)

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۱
۴) ۱۴

تست ۱۸۹ باقی‌مانده تقسیم a بر ۶ برابر ۲ و بر ۸ برابر ۴ است. باقی‌مانده تقسیم $5a+3$ بر ۱۲ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۱

نکته اگر در یک تقسیم، دو مورد از سه عامل مقسوم یا مقسوم‌علیه یا باقی‌مانده، بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، آنگاه سومی نیز بر n بخش‌پذیر می‌باشد.

مثلاً اگر در تقسیمی مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو مضربی از ۱۰ باشند، باقی‌مانده نیز مضربی از ۱۰ است. مانند:

$$200=30\times6+20 \xrightarrow{a=20\times10,\, b=3\times10} r=2\times10$$

تست ۱۹۰ اگر باقی‌مانده تقسیم $3a+1$ بر ۲۵ برابر ۱۰ باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۵ چقدر است؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۱۵ (۴) بستگی به k دارد

تست ۱۹۱ اگر $21|a+5$، باقی‌مانده تقسیم $a-2$ بر ۱۴، چند جواب مختلف دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

تست ۱۹۲ باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۹ و ۱۳ به‌ترتیب برابر ۵ و ۷ است. باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۳۹ کدام است؟ (سراسری خارج ۹۴)

۱) ۱۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

نکته

در تقسیم $a=bq+r$، داریم: $(a,b)=(b,r)$.

خارج قسمت تقسیم a بر b برابر است با جزء صحیح $\frac{a}{b}$. یعنی اگر $a=bq+r$ باشد، آنگاه: $q=\left[\frac{a}{b}\right]$.

تست ۱۹۳ اگر $a=12k+7$ باشد، خارج قسمت $5a+13$ بر ۱۵ بر حسب k کدام است؟

۱) $4k+1$ ۲) $4k+3$ ۳) $3k+2$ ۴) $5k+3$

مروری بر ساختارهای اعداد صحیح به وسیله قضیه تقسیم

۱ اگر اعداد صحیح را بر عدد ۲ تقسیم کنیم در این صورت خواهیم داشت:

$$a = bq + r \quad 0 \le r < b$$

$$a = 2k + r \quad 0 \le r < 2 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \Rightarrow a = 2k \\ r = 1 \Rightarrow a = 2k + 1 \end{cases}$$

۲ اگر اعداد صحیح را بر عدد ۳ تقسیم کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$a = 3k + r \quad 0 \le r < 3$$

$$\begin{cases} r = 0 \Rightarrow a = 3k \\ r = 1 \Rightarrow a = 3k + 1 \\ r = 2 \Rightarrow a = 3k + 2 = 3k + 3 - 1 = 3(k+1) - 1 = 3k' - 1 \end{cases}$$

بنابراین در مقایسه با عدد ۳ اعداد به صورت‌های $3k$، $3k+1$ و $3k-1$ نوشته می‌شوند.

۳ اگر اعداد صحیح را بر عدد ۴ تقسیم کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$a = 4k + r \quad 0 \le r < 4$$

$$\begin{cases} r = 0 \Rightarrow a = 4k \\ r = 1 \Rightarrow a = 4k + 1 \\ r = 2 \Rightarrow a = 4k + 2 \\ r = 3 \Rightarrow a = 4k + 3 \end{cases}$$

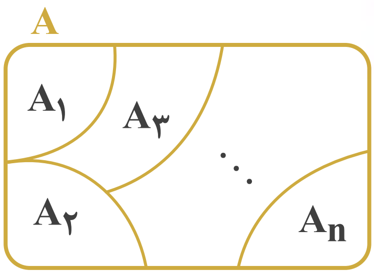
که حالت $4k+3$ به‌صورت $4k-1$ نیز نوشته خواهد شد.

بنابراین می‌توان گفت اعداد صحیح به یکی از صورت‌های $4k$، $4k \pm 1$ و $4k+2$ نوشته می‌شوند.

به همین ترتیب می‌توان گفت در مقایسه اعداد صحیح با عدد ۵ اعداد به یکی از صورت‌های $5k$، $5k \pm 1$ و $5k \pm 2$ و همچنین در مقایسه اعداد صحیح با عدد ۶، اعداد به یکی از صورت‌های $6k$، $6k \pm 1$، $6k \pm 2$ و $6k+3$ نوشته خواهند شد. با توجه به این مطالب و تعریف افراز به معرفی افرازهای مجموعه اعداد صحیح خواهیم پرداخت.

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به‌وسیله قضیه تقسیم

یادآوری مجموعه ناتهی A مفروض است. گوئیم زیرمجموعه‌های $A_1, A_2, ..., A_n$ یک افراز برای A هستند، هرگاه:



۱) هیچ یک از A_i ها تهی نباشند.

۲) اشتراک دو به دوی A_i ها تهی باشد.

۳) اجتماع همه A_i ها مجموعه A را بسازد.

به‌عنوان مثال استان‌های ایران، یک افراز برای کشورمان می‌باشند. زیرا همانطور که می‌دانید خاک هیچ استانی خالی از سکنه نیست! هیچ دو استانی خاک مشترک ندارند. و اجتماع همه استان‌ها سطح ایران را به‌وجود می‌آورند.

به‌عنوان مثال دیگر می‌توان گفت کلاس‌های دبیرستان خودمان یک افراز برای آن می‌باشند. (چرا؟)

بنا بر الگوریتم تقسیم وقتی عدد صحیح a بر عدد طبیعی b با توجه به اینکه باقی‌مانده تقسیم می‌تواند صفر یا ۱ یا ۲ ... یا $b-1$ باشد، بنابراین a به یکی از فرم‌های زیر قابل نمایش است:

$$a = bq \quad \text{یا} \quad bq+1 \quad \text{یا} \quad bq+2 \ ... \quad \text{یا} \quad bq+(b-1)$$

مثلاً در تقسیم عدد صحیح a بر ۴، بسته به باقی‌مانده این تقسیم، چهار حالت مختلف پیش می‌آید:

$$a = 4k \quad \text{یا} \quad 4k+1 \quad \text{یا} \quad 4k+2 \quad \text{یا} \quad 4k+3$$

با مقدار دادن به عدد صحیح k (یعنی: $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$) تمام اعداد صحیحی که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده یکسان دارند در مجموعه‌های جدا از هم تفکیک می‌شوند:

$$Z_0 = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, ...\}$$
$$Z_1 = \{4k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, ...\}$$
$$Z_2 = \{4k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, ...\}$$
$$Z_3 = \{4k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, ...\}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید مجموعه‌های جدا از هم Z_0، Z_1، Z_2 و Z_3 یک افراز ۴ تایی برای $\mathbb{Z}$ می‌باشند، که از تقسیم هر عدد صحیح بر عدد ۴ به‌وجود آمدند. به همین ترتیب و با تقسیم هر عدد صحیح بر اعداد ۲ یا ۳ یا ... می‌توان به‌ترتیب افرازهایی شامل ۲ یا ۳ یا ... بخش، برای $\mathbb{Z}$ به‌وجود آورد.

تعریف مجموعه اعداد صحیحی را که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر m برابر r باشد را با نماد نمایش می‌دهیم. یعنی:

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = km + r\}$$

با این تعریف، افراز ۴ بخشی $\mathbb{Z}$ به‌صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$[۰]_۴ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۴k\} = \{\dots, -۱۲, -۸, -۴, ۰, ۴, ۸, ۱۲, \dots\}$$

$$[۱]_۴ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۴k + ۱\} = \{\dots, -۱۱, -۷, -۳, ۱, ۵, ۹, ۱۳, \dots\}$$

$$[۲]_۴ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۴k + ۲\} = \{\dots, -۱۰, -۶, -۲, ۲, ۶, ۱۰, ۱۴, \dots\}$$

$$[۳]_۴ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۴k + ۳\} = \{\dots, -۹, -۵, -۱, ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, \dots\}$$

تست ۱۹۴ a زوج ولی بر ۳ بخش‌پذیر نیست. باقی‌مانده a بر ۶ کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر یا ۲ ۳) ۲ یا ۴ ۴) صفر یا ۳

تست ۱۹۵ اگر سه مجموعه $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = ۲k\}$ و $B = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = ۴k + ۱\}$ و C مجموعه $\mathbb{Z}$ را افراز کنند، فرم کلی اعضای C کدام است؟

۱) $۴k + ۳$ ۲) $۴k + ۲$ ۳) $۴k$ ۴) $۶k + ۱$

تست ۱۹۶ به ازای کدام مقدار m همواره یکی از عددهای a یا $a + ۴$ یا $a + m$ بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

تست ۱۹۷ اگر a یک عدد صحیح باشد، $a^۲$ به کدام صورت نمی‌تواند باشد؟

(۱) $۵k$ (۲) $۵k+۱$ (۳) $۵k+۲$ (۴) $۵k-۱$

$$\begin{cases} a=۵k \Rightarrow a^۲=۲۵k^۲=۵(۵k^۲)=۵k' \\ a=۵k+۱ \Rightarrow a^۲=(۵k+۱)^۲=۲۵k^۲+۱۰k+۱=۵k'+۱ \\ a=۵k+۲ \Rightarrow a^۲=(۵k+۲)^۲=۲۵k^۲+۲۰k+۴=۵k'+۴=۵k'+۵-۱=۵k''-۱ \\ a=۵k+۳ \Rightarrow a^۲=(۵k+۳)^۲=۲۵k^۲+۳۰k+۹=۲۵k^۲+۳۰k+۵+۴=۵k'+۴ \\ a=۵k+۴ \Rightarrow a^۲=(۵k+۴)^۲=۲۵k^۲+۴۰k+۱۶=۲۵k^۲+۴۰k+۱۵+۱=۵k'+۱ \end{cases}$$

تست ۱۹۸ باقی‌مانده مجموع مربعات دو عدد صحیح در تقسیم بر ۴ برابر کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

(۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) صفر

نتایج پرکاربرد قضیه تقسیم

(۱) حاصلضرب هر دو عدد صحیح متوالی، زوج است. (زیرا از هر دو عدد صحیح متوالی یکی زوج و دیگری فرد است).

نتیجه مربع هر عدد صحیح فرد به‌صورت $۸t+۱$ است. یعنی: $(۲k+۱)^۲=۸t+۱$

نتیجه تفاضل مکعب هر دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است. یعنی: $(k+۱)^۳-k^۳=۲t+۱$

(۲) حاصلضرب هر سه عدد صحیح متوالی، بر $۳!$ بخش‌پذیر است.

در حالت کلی حاصلضرب k عدد صحیح متوالی بر $k!$ بخش‌پذیر است.

(۳) هر عدد اول بزرگتر از ۲ را می‌توان به صورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ نمایش داد.

(۴) هر عدد اول بزرگتر از ۳ را می‌توان به‌صورت $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ نمایش داد.

تذکر عکس مطلب فوق در حالت کلی درست نیست. یعنی اعداد $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ به ازای هر k صحیح مثبت لزوماً یک عدد اول نیست. به‌عنوان مثال نقض:

$$k=۴ \rightarrow ۶k+۱=۶(۴)+۱=۲۵$$
$$k=۵ \rightarrow ۶k+۵=۶(۵)+۵=۳۵$$

تست ۱۹۹ اگر رابطه $n^۳-n|a$ برقرار باشد، a برابر کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

(۱) ۴۸ (۲) ۴۹ (۳) ۵۰ (۴) ۵۱

تست ۲۰۰ دو عدد متوالی را به توان ۳ رسانده و از هم کم می‌کنیم، سپس حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم. باقی‌مانده عدد حاصل در تقسیم به ۸ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) هر سه گزینه

تست ۲۰۱ اگر a عددی زوج باشد، باقی‌مانده تقسیم $a^۲$ بر ۸ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۲۰۲ اگر p عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد $p^۲$ را به کدام صورت ممکن است نوشته نشود؟

۱) $۸k+۱$ ۲) $۱۲k+۱$ ۳) $۱۶k+۱$ ۴) $۲۴k+۱$

تست ۲۰۳ اگر باقی‌مانده تقسیم a بر ۴ برابر ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم آن بر ۸ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳ یا ۵ ۳) ۳ یا ۷ ۴) ۵ یا ۷

تست ۲۰۴ اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به طوری که $a|۴k+۳$ و $b|۶k+۵$، باقی‌مانده $a^۲+b^۲+۵$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۷

تست ۲۰۵ اگر a و b و c سه عدد طبیعی باشند، به طوری که $abc=۳^{۹۷}$ باشد، باقی‌مانده $a^۲+۲b^۲+۳c^۲$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۶

تست ۲۰۶ اگر $4b+4 \mid 3a+3$ و b عددی صحیح و فرد باشد، باقی‌مانده a^2+2a+b^2+3 بر ۸ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تمرینات تشریحی درس دوم فصل اول (بخش دوم)

تمرین ۲۰۷ اگر a در تقسیم به ۶ و ۷ به‌ترتیب باقی‌مانده ۴ و ۶ داشته باشد، باقی‌مانده a بر ۴۲ چقدر است؟

تمرین ۲۰۸ اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم $2a+3$ بر ۸ چقدر است؟ (نهایی خرداد ۹۹)

تمرین ۲۰۹ اگر باقی‌مانده تقسیم a و b بر ۲۷ به‌ترتیب ۱۲ و ۱۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم $2a-3b$ بر ۲۷ چقدر است؟ (تمرین کتاب)

تمرین ۲۱۰ اگر a عدد صحیح زوج و باقی‌مانده تقسیم آن بر ۲۱ برابر ۱۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم $\frac{a}{2}$ بر ۲۱ چقدر است؟ (تمرین کتاب)

تمرین ۲۱۱ در تقسیم اعداد ۱۰۷ و ۸۳ بر عدد طبیعی b باقی‌مانده‌ها به‌ترتیب ۳ و ۵ است. مقدار b را تعیین کنید.

تمرین ۲۱۲ اگر باقی‌مانده تقسیم a و b بر ۱۷ به‌ترتیب ۱۵ و ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم $3b-2a$ بر ۱۷ چقدر است؟ (تمرین کتاب)

تمرین ۲۱۳ ثابت کنید هر عدد صحیح فرد به صورت $4k+1$ یا $4k+3$ می‌باشد. (تمرین کتاب)

تمرین ۲۱۴ اگر a یک عدد صحیح دلخواه باشد، ثابت کنید یکی از اعداد a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است. (تمرین کتاب)

تمرین ۲۱۵ اگر a و b اعدادی فرد باشند، ثابت کنید: $16|a^4-b^4$. (تمرین کتاب)

تمرین ۲۱۶ ثابت کنید حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $3!$ بخش‌پذیر است. (تمرین کتاب)

تمرین ۲۱۷ ثابت کنید اگر $p\geq 5$ یک عدد اول باشد، آنگاه p به‌صورت $4k+1$ یا $4k+3$ قابل نمایش است. (نهایی خرداد ۱۴۰۰)

همنهشتی در یک نگاه

- **مقدمات**
  - تعریف همنهشتی
  - تبدیل به عاد کردن
  - کلاس همنهشتی
  - قضیه افزایش سنج
- **خواص همنهشتی**
  - ویژگی‌های مهم
  - قضیه تقسیم در همنشهتی
  - باقیمانده اعداد تواندار
  - باقیمانده اعداد پارامتری
  - محاسبه رقم یکان
  - باقیمانده بر اعدادخاص
- **معادله همنهشتی**
  - شرط جواب
  - روشهای حل
- **معادله سیاله خطی**
  - شرط جواب
  - روش حل با جواب کلی
  - حل با معادله همنشهتی

تعریف دو عدد صحیح a و b را همنهشت به پیمانه عدد طبیعی m گوئیم، هرگاه $m|a-b$ و می‌نویسیم:

$$a \overset{m}{\equiv} b$$

◆ **به بیانی دیگر** دو عدد صحیح همنهشت به پیمانه m هستند هرگاه تفاضل آن‌ها مضربی از m باشند.

به زبان ریاضی همنهشتی اعداد عبارت است از:

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}:\ a \overset{m}{\equiv} b \iff m|a-b$$

به‌عنوان مثال: $۱۱ \overset{۳}{\equiv} -۴$, $۱۲ \overset{۵}{\equiv} ۲$

مثال ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم دو عدد a و b بر m یکسان است، اگر و تنها اگر $a \overset{m}{\equiv} b$. (تمرین کتاب)

طرف اول:

$$\begin{cases} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{cases} \to a - b = m(q - q') \to m \mid a - b \to a \overset{m}{\equiv} b$$

طرف دوم: فرض کنیم $a \overset{m}{\equiv} b$ و باقی‌مانده تقسیم a و b بر m برابر r و r’ باشد، ثابت می‌کنیم: $r = r'$.

$$\begin{cases} a = mq + r \\ b = mq' + r' \end{cases} \to a - b = m(q - q') + r - r' \xrightarrow{a \overset{m}{\equiv} b \ \to \ a-b=mk} mk = m(q - q') + r - r'$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود که $r - r'$ مضرب m است.

$$r - r' = tm \xrightarrow{۰ \le r, r' < m} r - r' = ۰ \to r = r'$$

قرارداد: مجموعه همه اعداد صحیح که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر m برابر r باشد را کلاس یا دسته همنهشتی r به پیمانه m نامیده و آن را با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

در درس قبلی دیدیم در تقسیم هر عدد صحیح بر ۴، مجموعه $\mathbb{Z}$ به یک افراز ۴ بخشی به‌صورت زیر قسمت می‌شود:

$$[۰]_۴ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۴k\} = \{\ldots, -۱۲, -۸, -۴, ۰, ۴, ۸, ۱۲, \ldots\}$$

$$[۱]_۴ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۴k + ۱\} = \{\ldots, -۱۱, -۷, -۳, ۱, ۵, ۹, ۱۳, \ldots\}$$

$$[۲]_۴ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۴k + ۲\} = \{\ldots, -۱۰, -۶, -۲, ۲, ۶, ۱۰, ۱۴, \ldots\}$$

$$[۳]_۴ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۴k + ۳\} = \{\ldots, -۹, -۵, -۱, ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, \ldots\}$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که بین اعداد هر یک از چهار مجموعه فوق ارتباط معناداری وجود دارد. بدین صورت که فاصله هر دو عدد دلخواه در هر یک از چهار مجموعه فوق همواره مضرب ۴ است. بنابراین می‌توان ادعا کرد هر دو عدد دلخواه در هر یک از مجموعه‌های فوق به پیمانه ۴ با یکدیگر همنهشت هستند.

به‌عنوان مثال اعداد صحیح ۱۴- و ۶ به دسته همنهشتی $[۲]_۴$ تعلق دارند، بنابراین می‌توان نوشت: $-۱۴ \overset{۴}{\equiv} ۶$.

نتیجه اگر a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m هم باقی‌مانده باشند آنگاه a و b به پیمانه m همنهشت می‌باشند و برعکس.

به زبان ریاضی می‌توان نوشت:

$$\forall a,b \in [r]_m \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

مثال آیا می‌توانید دسته همنهشتی اعداد ۴۷ , ۶۵– , ۶۸ , ۳۳ را مشخص کنید؟

مثال اگر سه عدد ۱۱ و ۱۹ و ۳۱ عضو یک کلاس همنهشتی به پیمانه m باشند، بزرگترین مقدار m چقدر است؟

مثال اگر $a \in [۷]_{۱۲}$ و $b \in [۱۳]_{۱۸}$ باشد، در این صورت نشان دهید $a+b$ عضوی از کلاس $[۲]_۶$ است.

تست ۲۱۸ در همنهشتی به پیمانه $m > ۱$ سه عدد a و ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس همنهشتی هستند. کوچکترین عدد ۳ رقمی a به طوری که مجموعه $\mathbb{Z}$ به تعداد کمتری کلاس همنهشتی افراز شود، کدام است؟ (سراسری ۸۱)

(۱) ۱۰۲ (۲) ۱۰۳ (۳) ۱۰۴ (۴) ۱۰۶

تست ۲۱۹ در یک رابطه همنهشتی، مجموعه $\mathbb{Z}$ به ۷ کلاس هم‌ارزی افراز می‌شود. عـدد $۲\times(۳^{۲۳}-۱)$ در کـدام کلاس قرار می‌گیرد؟

۱) $[۰]_۷$ ۲) $[۱]_۷$ ۳) $[۲]_۷$ ۴) $[۳]_۷$

جواب عبارت "مجموعه $\mathbb{Z}$ به ۷ کلاس هم‌ارزی افراز می‌شود" در فرض سئوال، اشاره بـه ایـن موضـوع دارد کـه مجموعه اعداد صحیح بر ۷ تقسیم شده و ۷ کلاس همنهشتی بوجود آورده است.

پس باقی‌مانده عدد صحیح $۲\times(۳^{۲۳}-۱)$ بر ۷ مشخص می‌کند که این عدد به کدام کلاس تعلق دارد.

$$۳^۳\overset{۷}{\equiv}-۱ \rightarrow ۲\times۳^{۲۳}-۲\overset{۷}{\equiv}۲\times(۳^۳)^۷\times۳^۲-۲\overset{۷}{\equiv}۲\times(-۱)^۷\times۲-۲\overset{۷}{\equiv}-۴-۲\overset{۷}{\equiv}۱ \rightarrow ۲\times(۳^{۲۳}-۱)\in[۱]_۷$$

نکته اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m برابر r باشد، آنگاه:

$$a\overset{m}{\equiv}r$$

به‌عنوان مثال ۲۵۷ در تقسیم بر ۱۱ باقی‌مانده ۳ دارد. یعنی:

$$۲۵۷=۱۱\times۲۳+۴$$

پس می‌توان گفت ۲۵۷ و ۴ به پیمانه ۱۱ همنهشت هستند. یعنی:

$$۲۵۷\overset{۱۱}{\equiv}۴$$

اثبات

$$a=mq+r \rightarrow a-r=mq \rightarrow m|a-r \rightarrow a\overset{m}{\equiv}r$$

تکنیک:

نتیجه اگر بخواهیم کوچکترین عدد نامنفی و همنهشت با a به پیمانه m را بیابیم، کافی است a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را به‌دست آورد.

به‌عنوان مثال می‌خواهیم بدانیم عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته همنهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

بدین منظور کوچکترین عدد نامنفی و همنهشت با ۱۳۹۸ به پیمانه ۹ را پیدا می‌کنیم.

$$۱۳۹۸=۱۳۹۵+۳ \rightarrow ۱۳۹۸\overset{۹}{\equiv}۳ \rightarrow ۱۳۹۸\in[۳]_۹$$

توجه اگر دقت کرده باشید، پیمانه در همنهشتی همان نقش مقسوم‌علیه در قضیه تقسیم را دارد. اما تکلیف خارج‌قسمت چه می‌شود؟! در ادامه این درس خواهید دید که همنهشتی ابزاری قدرتمندی برای پیدا کردن باقی‌مانده، بدون دخالت خارج قسمت است.

ویژگی‌های رابطه همنهشتی

همنهشتی در بسیاری از موارد دقیقاً مانند تساوی عمل می‌کند. به عنوان مثال خواص زیر در مورد همنهشتی برقرار است:

۱ یک عدد را می‌توان به سمت مخالف همنهشتی برد و علامت آن را قرینه کرد دقیقا مانند تساوی:

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a-b\overset{m}{\equiv}0$$

۲ به طرفین یک رابطه همنهشتی می‌توان یک مقدار صحیح را اضافه یا کم کرد. یعنی:

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$$

به‌عنوان مثال: $-۳ \overset{۳}{\equiv} ۱۵ \wedge ۱۱ \overset{۳}{\equiv} ۲۹ \xrightarrow{\pm ۷} ۴ \overset{۳}{\equiv} ۲۲$

اثبات

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m|a-b \rightarrow m|a-b+c-c \rightarrow \begin{cases} m|(a+c)-(b+c) \rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ m|(a-c)-(b-c) \rightarrow a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$$

ویژگی‌های رابطه همنهشتی

۳ طرفین یک رابطه همنهشتی را می‌توان در یک عدد صحیح ضرب کرد. یعنی: $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$.

به‌عنوان مثال: $۵ \overset{۴}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\times ۶} ۵\times۶ \overset{۴}{\equiv} ۹\times۶$

اثبات

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m|a-b \rightarrow m|(a-b)c \rightarrow m|ac-bc \rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

تذکر عکس ویژگی ۲ در حالت کلی برقرار نیست! یعنی از طرفین یک رابطه همنهشتی نمی‌توان یک مقسوم‌علیه مشترک را حذف کرد.

به‌عنوان مثال از رابطه $۱۰ \overset{۴}{\equiv} ۶$ نمی‌توان نتیجه گرفت که: $۵ \overset{۴}{\equiv} ۳$

◆ توجه داشته باشید که حذف کردن یک مقدار مشترک از طرفین یک رابطه همنهشتی، باعث تغییر در پیمانه آن رابطه می‌شود که کمی جلوتر در ویژگی شماره ۷ خواهیم آموخت.

ویژگی‌های رابطه همنهشتی

۴ دو طرف یک رابطه همنهشتی را می‌توان به توان یک عدد طبیعی رساند. یعنی: $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.

به‌عنوان مثال: $۷ \overset{۴}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\text{توان ۳}} ۳۴۳ \overset{۴}{\equiv} ۲۷$

تذکر عکس ویژگی ۳ در حالت کلی برقرار نیست! یعنی از طرفین یک رابطه همنهشتی نمی‌توان ریشه nاُم گرفت.

به‌عنوان مثال: $۵ \overset{۴}{\not\equiv} ۳ \ ,\ ۵^۲ \overset{۴}{\equiv} ۳^۲$.

۵ دو طرف دو رابطه همنهشتی با پیمانه‌های یکسان را می‌توان با هم جمع، تفریق و یا در هم ضرب کرد. یعنی:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+d \ ,\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d \ ,\ ac \overset{m}{\equiv} bd$$

به‌عنوان مثال:

$$\begin{cases} ۱۲ \overset{۵}{\equiv} ۲ \\ ۸ \overset{۵}{\equiv} ۳ \end{cases} \rightarrow ۱۲+۸ \overset{۵}{\equiv} ۲+۳ \ ,\ ۱۲-۸ \overset{۵}{\equiv} ۲-۳ \ ,\ ۱۲\times۸ \overset{۵}{\equiv} ۲\times۳$$

۶ به طرفین یک رابطه همنهشتی می‌توان مضربی از پیمانه آن را اضافه یا کم کرد. یعنی:

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a \pm tm \overset{m}{\equiv} b \pm sm$$

$$۲۹ \overset{۷}{\equiv} ۱۵$$

مفهوم:

اثبات دو عدد tm و sm مضاربی از m هستند، لذا باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر m برابر صفر است. پس: $tm \overset{m}{\equiv} sm$.

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ tm \overset{m}{\equiv} sm \end{cases} \xrightarrow{\pm} a \pm tm \overset{m}{\equiv} b \pm sm$$

ویژگی‌های رابطه همنهشتی

۷ (قضیه تقسیم در همنشتی): اگر طرفین یک رابطه همنهشتی بر عددی تقسیم شود، پیمانه جدید، بر ب.م.م آن عدد و پیمانه قدیم تقسیم می‌شود. یعنی:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc\,,\ (c,m)=d \ \rightarrow\ a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

به‌عنوان مثال در تقسیم طرفین همنهشتی مقابل بر ۴ داریم:

$$۲۰ \overset{۶}{\equiv} ۸ \xrightarrow{(۴,۶)=۲} ۵ \overset{\frac{۶}{۲}}{\equiv} ۲ \ \text{یا}\ ۵ \overset{۳}{\equiv} ۲$$

نتیجه مهم: قاعده حذف در همنهشتی، برای هر عدد که نسبت به پیمانه آن اول باشد، برقرار است. یعنی:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc\,,\ (c,m)=۱ \ \rightarrow\ a \overset{m}{\equiv} b$$

طرفین هر یک از روابط زیر ساده کنید:

$27 \overset{12}{\equiv} 39 \longrightarrow$

$24 \overset{5}{\equiv} 44 \longrightarrow$

ویژگی‌های رابطه همنهشتی

⑧ قضیه کاهش سنج:

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ آنگاه: $a \overset{n}{\equiv} b$.

به بیانی دیگر اگر a و b به پیمانه m همنهشت باشند، آنگاه a و b به پیمانه هر مقسوم‌علیه m نیز همنهشت می‌باشند.

به‌عنوان مثال: $32 \overset{9}{\equiv} 50 \wedge 3|9 \rightarrow 32 \overset{3}{\equiv} 50$

اثبات $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m|a-b \xrightarrow{n|m} n|a-b \rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

⑨ ترکیب دو همنشتی با پیمانه‌های متفاوت به وسیله خاصیت تعدی:

فرض کنیم $b \overset{n}{\equiv} c$ و $a \overset{m}{\equiv} b$ و $(m,n)=d$ آنگاه: $a \overset{d}{\equiv} c$.

به بیانی دیگر رابطه تعدی برای دو رابطه همنهشتی برقرار است و پیمانه رابطه همنهشتی جدید، ب.م.م پیمانه‌ها است.

به‌عنوان مثال: $23 \overset{8}{\equiv} 39 \wedge 39 \overset{12}{\equiv} 63 \xrightarrow{(8,12)=4} 23 \overset{4}{\equiv} 63$

اثبات

$(m,n)=d \rightarrow d|m\,,\, d|n$

$$\begin{cases} a\overset{m}{\equiv}b \rightarrow m|a-b \xrightarrow{d|m} d|a-b \\ b\overset{n}{\equiv}c \rightarrow n|b-c \xrightarrow{d|n} d|b-c \end{cases} \rightarrow d|a-c \rightarrow a\overset{d}{\equiv}c$$

نتیجه اگر $b\overset{m}{\equiv}c$ و $a\overset{m}{\equiv}b$ آنگاه: $a\overset{m}{\equiv}c$.

مثال اگر باقی‌مانده‌ی اعداد A و B و C بر ۷ به ترتیب ۱ و ۲ و ۳ باشد، باقی‌مانده $(A+B+C)^{2}-ABC$ بر ۷ کدام است؟

مثال اگر $a=17k+33$ باشد، باقی‌مانده a^{2005} بر ۱۷ کدام است؟

تست ۲۲۰ باقی‌مانده دو عدد a و $b+1$ در تقسیم به ۹ برابر است. در این صورت $a+54$ با کدام گزینه، عضو یک کلاس همنهشتی در تقسیم به ۹ هستند؟

(۱) $b-16$ (۲) $b-17$ (۳) $b+16$ (۴) $b+17$

جواب $a\overset{9}{\equiv}b+1 \rightarrow a+54\overset{9}{\equiv}b+55\overset{9}{\equiv}b+1 \rightarrow a+54\overset{9}{\equiv}b+1-2\times 9 \rightarrow a+54\overset{9}{\equiv}b-17$

تست ۲۲۱ در همنهشتی $9a \overset{20}{\equiv} 36 - 3a$، عدد a به کدام صورت است؟

۱) $5k+3$ ۲) $5k+1$ ۳) $4k+3$ ۴) $4k+1$

تست ۲۲۲ از رابطه $9a \overset{18}{\equiv} 6b$، کدام نتیجه‌گیری صحیح <u>نیست</u>؟ (سراسری ۸۷)

۱) $a \overset{2}{\equiv} 0$ ۲) $b \overset{3}{\equiv} 0$ ۳) $a \overset{6}{\equiv} 2$ ۴) $3a \overset{6}{\equiv} 2b$

تست ۲۲۳ هرگاه $a^3 - a^2 - a + 1 \overset{m}{\equiv} a^2 - 1$ و $(a^2-1, m) = 1$ باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (سراسری ۸۲)

۱) $m \mid a-2$ ۲) $m \mid a-1$ ۳) $m \mid a+1$ ۴) $m \mid a+2$

تست ۲۲۴ عدد $6^n - 3^n$ مضرب ۲۵ است. کوچکترین مقدار طبیعی n کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰

تست ۲۲۵ کوچکترین عدد طبیعی a به گونه‌ای که $7^{13} + a$ بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

تست ۲۲۶ اگر $x \overset{18}{\equiv} 7$ و $y \overset{12}{\equiv} 4$ باقی‌مانده x^3y+y^3x بر ۶ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۴ (۴) ۳

جواب

$$\begin{cases} x \overset{18}{\equiv} 7 \xrightarrow{6|18} x \overset{6}{\equiv} 7 \overset{6}{\equiv} 1 \rightarrow x^3 \overset{6}{\equiv} 1 \\ y \overset{12}{\equiv} 9 \xrightarrow{6|12} y \overset{6}{\equiv} 9 \overset{6}{\equiv} 3 \end{cases} \rightarrow x^3y \overset{6}{\equiv} 1\times 3$$

تست ۲۲۷ اگر $2+xy \overset{5}{\equiv} 2x+y$ باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) $x \overset{5}{\equiv} 1$ یا $y \overset{5}{\equiv} 1$ (۲) $x \overset{5}{\equiv} 1$ یا $y \overset{5}{\equiv} 2$

(۳) $x \overset{5}{\equiv} 2$ یا $y \overset{5}{\equiv} 1$ (۴) $x \overset{5}{\equiv} 2$ یا $y \overset{5}{\equiv} 2$

جواب

$$2+xy \overset{5}{\equiv} 2x+y \rightarrow 2+xy-y-2x \overset{5}{\equiv} 0 \rightarrow y(x-1)-2(x-1) \overset{5}{\equiv} 0 \rightarrow (x-1)(y-2) \overset{5}{\equiv} 0$$

چون ۵ عدد اول است، حداقل یک از دو عامل $x-1$ یا $y-2$ باید مضرب ۵ باشد. یعنی:

$$x-1 \overset{5}{\equiv} 0 \rightarrow x \overset{5}{\equiv} 1 \quad \text{یا} \quad y-2 \overset{5}{\equiv} 0 \rightarrow y \overset{5}{\equiv} 2$$

قضیه افزایش پیمانه(افزایش سنج):

فرض کنیم $a \overset{n}{\equiv} b$ و $a \overset{m}{\equiv} b$ و $[m,n]=c$ آنگاه: $a \overset{c}{\equiv} b$.

مثال اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۹ برابر ۱۲ باشد و $a+17$ مضرب ۲۱ باشد، رقم وسط کوچک‌ترین عدد a کدام است؟

تست ۲۲۸ باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۹ و ۱۳ به‌ترتیب برابر ۵ و ۷ است. باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۳۹ کدام است؟ (سراسری خارج ۹۴)

(۱) ۱۲ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۴

تست ۲۲۹ فرض کنیم خارج‌قسمت و باقی‌مانده عدد طبیعی و سه رقمی m بر n به‌ترتیب ۲۹ و ۱۷ باشد. تعداد اعداد m که بر ۵ بخش‌پذیر باشند، کدام است؟ (سراسری خارج ۹۹)

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

تست ۲۳۰ باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی a بر اعداد ۵ و ۷ و ۱۱ به‌ترتیب ۲ و ۴ و ۸ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم بزرگترین عدد سه رقمی a بر عدد ۲۳ کدام است؟ (سراسری خارج ۹۷)

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۴

جواب

$$\begin{cases} a\overset{۵}{\equiv}۲\overset{۵}{\equiv}-۳ \\ a\overset{۷}{\equiv}۴\overset{۷}{\equiv}-۳ \\ a\overset{۱۱}{\equiv}۸\overset{۱۱}{\equiv}-۳ \end{cases} \xrightarrow{[۵,۷,۱۱]=۳۸۵} a\overset{۳۸۵}{\equiv}-۳ \rightarrow a=۳۸۵k-۳ \xrightarrow{k=۲} Max(a)=۷۶۷$$

$$۷۶۷\overset{۲۳}{\equiv}۶۹۰+۷۷\overset{۲۳}{\equiv}۰+۸$$

پیدا کردن باقیمانده a^n بر عدد m

در این نوع مساله‌ها ابتدا توانی از a را پیدا می‌کنیم که باقی‌مانده‌ی آن بر پیمانه برابر ۱ یا ۱− شود. چون اگر $a^x \overset{m}{\equiv} \pm 1$ باشد، آن‌گاه می‌توانیم طرفین همنهشتی را به توان رسانده و طرف دوم همان‌طور ۱ یا ۱− می‌ماند و در نتیجه می‌توان طرف اول را به a^n تبدیل کرد بدون آن‌که طرف دوم رشد کند و ...

مثال باقی‌مانده عدد $۵\times ۲۷^{۳۴}+۱۲$ بر عدد ۷ کدام است؟

مثال باقی‌مانده $۴\times ۲۳^{۱۵۱}+۵$ بر عدد ۹ کدام است؟

مثال باقی‌مانده تقسیم $۱۰۰۰^{۱۳}\times ۱۲+۱۰$ را بر ۷ تعیین کنید. (تمرین کتاب)

مثال باقی‌مانده تقسیم عدد $۳^{۱۰۰}$ بر ۵۶ کدام است؟

تمرین باقی‌مانده عدد 51^{131} بر عدد ۷ کدام است؟

نکته در محاسبه‌ی باقی‌مانده a^n بر m هرگاه پایه (یعنی a) بزرگ‌تر از پیمانه (یعنی m) باشد، ابتدا قبل از هر کاری پایه را در پیمانه m، تبدیل به کوچک‌ترین عدد مثبت و یا حتی منفی (صرف نظر از علامت، مقدار عدد هرچه کوچک‌تر باشد بهتر است) می‌کنیم، و سپس به ادامه‌ی حل مسئله می‌پردازیم.

تست ۲۳۱ اگر اعداد $a+2$ و $b+7$ و 1391^{1391} در یک دسته همنهشتی به پیمانه ۱۱ قرار داشته باشند، باقی‌مانده تقسیم $a+b$ بر ۱۱ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

جواب چون هر سه عدد به یک دسته همنهشتی تعلق دارند، پس باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۱۱ یکسان است.

پس ابتدا باقی‌مانده تقسیم 1391^{1391} را بر ۱۱ پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} 1391^{1391} \overset{11}{\equiv} 5^{1391} \\ 5^2 \overset{11}{\equiv} 3 \ \rightarrow\ 5^4 \overset{11}{\equiv} 3^2 \overset{11}{\equiv} -2 \ \rightarrow\ 5^5 \overset{11}{\equiv} -2\times 5 \overset{11}{\equiv} 1 \end{cases} \rightarrow\ 5^{1391} \overset{11}{\equiv} (5^5)^{278} \times 5 \overset{11}{\equiv} 1^{278}\times 5 \overset{11}{\equiv} 5$$

باقی‌مانده تقسیم $a+2$ و $b+7$ نیز بر ۱۱ همان ۵ است. یعنی:

$$\begin{cases} a+2 \overset{11}{\equiv} 5 \ \rightarrow\ a \overset{11}{\equiv} 3 \\ b+7 \overset{11}{\equiv} 5 \ \rightarrow\ b \overset{11}{\equiv} -2 \end{cases} \rightarrow\ a+b \overset{11}{\equiv} 3-2$$

قضیه‌ی فرما

اگر پیمانه‌ی همنهشتی یک عدد اول باشد، گاهی اوقات برای حل مسئله می‌توان از قضیه‌ی زیر استفاده کرد:

$$(a,p)=۱ \Rightarrow a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$$

مثال عدد $a+۷^{۱۵}$ مضرب ۱۷ است. کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

اعداد پارامتری (در محاسبه باقی‌مانده اعداد توان‌دار)

تست ۲۳۲ باقی‌مانده تقسیم $۳^{۴n+۴}-۴^{۳n+۳}$ بر عدد ۱۷ کدام است؟ $(n \in \mathbb{N})$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۱۶

تست ۲۳۳ اگر $a=۴k+۱$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $(a+۲)^{۱۳۸۱}+(a+۳)^{۱۳۸۲}+(a+۴)^{۱۳۸۳}$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

تست ۲۳۴ به ازای کدام مقادیر n از اعداد طبیعی، عبارت $5^{6n+4}+5^{3n+2}+1$ بر ۳۱ بخش‌پذیر است؟ (سراسری ۹۶)

۱) اعداد فرد ۲) اعداد زوج ۳) $n\in\mathbb{N}$ ۴) مضارب ۵

جواب

$$\begin{cases} 5^3 \overset{31}{\equiv} 1 \rightarrow 5^{3n} \overset{31}{\equiv} 1 \rightarrow 5^{3n+2} \overset{31}{\equiv} 1\times 5^2 \overset{31}{\equiv} 25 \\ 5^{3n+2} \overset{31}{\equiv} 25 \rightarrow (5^{3n+2})^2 \overset{31}{\equiv} 25^2 \overset{31}{\equiv} 5 \rightarrow 5^{6n+4} \overset{31}{\equiv} 5 \end{cases}$$

از جمع طرفین دو رابطه همنهشتی فوق داریم:

$$5^{6n+4}+5^{3n+2}+1 \overset{31}{\equiv} 25+5+1 \overset{31}{\equiv} 0$$

عبارت $5^{6n+4}+5^{3n+2}+1$ مستقل از مقدار n همواره بر ۳۱ بخش‌پذیر است، پس n می‌تواند هر مقدار طبیعی باشد.

تست ۲۳۵ تعداد اعداد دو رقمی a بطوری که $11^a \overset{19}{\equiv} 1$ باشد، کدام است؟ (سراسری خارج ۹۴)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۲۸ ۴) ۳۳

$$11^2 \overset{19}{\equiv} 7 \rightarrow 11^3 \overset{19}{\equiv} 7\times 11 \overset{19}{\equiv} 1 \rightarrow 11^{3k} \overset{19}{\equiv} 1$$

$$10 \le 3k \le 99 \rightarrow \frac{10}{3} \le k \le 33 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} 4 \le k \le 33 \qquad \text{تعداد } k = 33-4+1=30$$

مثال باقی‌مانده تقسیم $A=1!+2!+3!+4!+\dots+500!$ را بر ۱۰ تعیین کنید. (تمرین کتاب)

محاسبه رقم یکان

برای محاسبه رقم یکان یک عدد کافی است پیمانه همنهشتی را برابر ۱۰ در نظر بگیریم، برای محاسبه دو رقم سمت راست، پیمانه همنهشتی را برابر ۱۰۰ در نظر گرفته، و به همین ترتیب ادامه خواهیم داد.

توجه رقم یکان یعنی باقی‌مانده بر ۱۰ یعنی پیمانه ۱۰ می‌باشد. پس وقتی دو عدد رقم یکان برابر دارند، در پیمانه ۱۰ همنهشت (هم پیمانه) هستند.

تست ۲۳۶ اگر رقم یکان دو عدد $2a+7$ و $5a+2$ برابر باشند، رقم یکان a^3+2a+7 کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۵

قضیه **نیوتن**: برای محاسبه یکان یک عدد توان‌دار ابتدا توان را بر ۴ تقسیم کرده و یک باقی‌مانده تقسیم حاصل می‌شود. سپس رقم یکان عدد پایه (یا خود عدد پایه) را به توان این باقی‌مانده رسانده و در همنهشتی به پیمانه ۱۰ در نظر می‌گیریم.

◆ **حالت استثنا:** اگر باقی‌مانده تقسیم توان بر ۴ برابر صفر شد، رقم یکان عدد پایه را به توان ۴ می‌رسانیم نه صفر.

قضیه **نیوتن**: اگر a یک عدد صحیح و r و k اعداد طبیعی باشند، آنگاه: $a^{4k+r}\overset{10}{\equiv}a^r$

نتیجه اگر $m \overset{4}{\equiv} n$ باشد، آنگاه $a^m \overset{10}{\equiv} a^n$ (اما عکس این رابطه برقرار نیست).

تست ۲۳۷ رقم یکان عدد 273^{974} کدام است؟

(۱)
(۲) ۷
(۳)
(۴) ۹

تست ۲۳۸ اگر $a^p = 10k + 7$ باشد، رقم یکان عدد a^{p+4} کدام است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۶
(۴) ۷

نکته ارقام $\{0,1,5,6\}$ هر چقدر هم به توان برسند رقم یکان آن‌ها تغییر نمی‌کند، مثلاً

مثال آخرین رقم سمت راست عدد $1385^{385^{85}} + 1386^{386^{86}}$ برابر است با:

(۱) ۱
(۲) ۳
(۳) ۵
(۴) ۷

نکته رقم یکان توان‌های «فرد» اعدادی که به ۴ یا ۹ ختم می‌شوند، با توان «یک» آن‌ها برابر است و رقم یکان توان‌های «زوج» آن‌ها نیز با رقم یکان توان «دوم» آن‌ها برابر است. یعنی:

$\boxed{۹}\left\{\right.$ $\boxed{۴}\left\{\right.$

تست ۲۳۹ رقم یکان $۴^{۹^{۴^{۹}}}+۹^{۴^{۹^{۴}}}+۴^{۴^{۴^{۴}}}+۹^{۹^{۹^{۹}}}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

تست ۲۴۰ اگر $A=۱!+۲!+۳!+...+۱۳۸۲!$ و $B=\sum_{n=۱}^{۱۳۸۰}(۲n)!$ باشد، رقم یکان A^B کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

تست ۲۴۱ رقم سمت راست عدد $(۱^۱+۲^۲+۳^۳+...+۱۳۸۵^{۱۳۸۵})!$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

بررسی یک رابطه در کتاب درسی

بسط دو جمله‌ای خیام

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\dots+\binom{n}{n}b^n$$

اگر در رابطه فوق a و b را اعداد ۱ در نظر بگیریم، به نتیجه جالبی می‌رسیم:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

نکته برای هر دو عدد صحیح a و b داریم:

$$\boxed{(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n}$$

$$\begin{cases}\binom{n}{0}a^n\overset{ab}{\equiv}\binom{n}{0}a^n\\ \binom{n}{1}a^{n-1}b\overset{ab}{\equiv}0\\ \binom{n}{2}a^{n-2}b^2\overset{ab}{\equiv}0\\ \vdots\\ \binom{n}{n}b^n\overset{ab}{\equiv}\binom{n}{n}a^n\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع طرفین}}(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{n}b^n\to(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$$

مثال ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، $17^n-9^n-8^n$ بر ۷۲ بخش‌پذیر است. (تمرین کتاب)

مثال ثابت کنید $12^{51}-11^{51}-23^{51}$ بر ۱۳۲ بخش‌پذیر است. (تمرین کتاب)

کاربرد همنهشتی در بخش‌پذیری اعداد

الف قوانین توان‌های عدد ۱۰

۱ قانون بخش‌پذیری بر ۱۰ (و ۲ و ۵): باقی‌مانده تقسیم هر عدد صحیح بر ۱۰ و مقسوم‌علیه‌های آن برابر است با باقی‌مانده رقم سمت راست آن بر هر کدام از این اعداد.

$$\overline{a_n a_{n-1}\dots a_2 a_1 a_0} \overset{10}{\equiv} a_0 + \underbrace{10a_1 + 10^2 a_2 + 10^3 a_3 + \dots 10^n a_n} \overset{10}{\equiv} a_0$$

۲ قانون بخش‌پذیری بر ۱۰۰ (و ۴ و ۲۵): باقی‌مانده تقسیم هر عدد صحیح بر ۱۰۰ و مقسوم‌علیه‌های آن برابر است با باقی‌مانده دو رقم سمت راست آن بر هر کدام از این اعداد.

$$\overline{a_n a_{n-1}\dots a_2 a_1 a_0} \overset{100}{\equiv} a_0 + 10a_1 + \underbrace{10^2 a_2 + 10^3 a_3 + \dots + 10^n a_n} \overset{100}{\equiv} a_0 + 10a_1 \overset{100}{\equiv} (\overline{a_1 a_0})$$

۳ قانون بخش‌پذیری بر ۱۰۰۰ (و ۸ و ۱۲۵): باقی‌مانده تقسیم هر عدد صحیح بر ۱۰۰۰ و مقسوم‌علیه‌های آن عبارت است از باقی‌مانده سه رقم سمت راست آن بر هر کدام از این اعداد.

$$\overline{a_n a_{n-1}\dots a_2 a_1 a_0} \overset{1000}{\equiv} a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \underbrace{10^3 a_3 + \dots + 10^n a_n} \overset{1000}{\equiv} (\overline{a_2 a_1 a_0})$$

ب قوانین همسایه‌های پایینی توان‌های عدد ۱۰

۱ قانون بخش‌پذیری بر ۹ (و ۳): باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹ یا ۳ برابر است با باقی‌مانده مجموع ارقام آن بر این اعداد.

$$\overline{a_3 a_2 a_1 a_0} \overset{9}{\equiv} a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 \overset{9}{\equiv} a_0 + (\cancel{9a_1} + a_1) + (\cancel{99a_2} + a_2) + (\cancel{999a_3} + a_3) \overset{9}{\equiv} a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

کاربرد همنهشتی در بخش‌پذیری اعداد

ب) قوانین همسایه‌های پایینی توان‌های عدد ۱۰

۲) قانون بخش‌پذیری بر ۹۹: برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹۹، ارقام عدد را از سمت راست دو رقم دو رقم جدا کرده و با هم جمع می‌کنیم.

$$\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0} \overset{99}{\equiv} \overline{a_1a_0}+10^2\,\overline{a_3a_2}+10^4\,\overline{a_5a_4} \overset{99}{\equiv} \overline{a_1a_0}+(\cancel{99\overline{a_3a_2}}+\overline{a_3a_2})+(\cancel{9999\overline{a_5a_4}}+\overline{a_5a_4}) \overset{99}{\equiv} \overline{a_1a_0}+\overline{a_3a_2}+\overline{a_5a_4}$$

۳) قانون بخش‌پذیری بر ۹۹۹ (و ۲۷ و ۳۷ و ۱۱۱ و ...): برای پیدا کردن باقی‌مانده ی تقسیم هر عدد بر ۹۹۹، ارقام عدد را از سمت راست سه رقم سه رقم جدا کرده و با هم جمع می‌کنیم.

$$\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0} \overset{999}{\equiv} \overline{a_2a_1a_0}+10^3\,\overline{a_5a_4a_3} \overset{999}{\equiv} \overline{a_2a_1a_0}+(\cancel{999\overline{a_5a_4a_3}}+\overline{a_5a_4a_3}) \overset{999}{\equiv} \overline{a_2a_1a_0}+\overline{a_5a_4a_3}$$

ج) قوانین همسایه‌های بالایی توان‌های عدد ۱۰

۱) قانون بخش‌پذیری بر ۱۱: برای پیدا کردن باقی‌مانده هر عدد بر ۱۱، ارقام عدد را از سمت راست یکی در میان مثبت و منفی می‌نویسیم.

$$\overline{a_4a_3a_2a_1a_0} \overset{11}{\equiv} a_0+10a_1+100a_2+1000a_3+10000a_4 \overset{11}{\equiv} a_0+(\cancel{11a_1}-a_1)+(\cancel{99a_2}+a_2)+(\cancel{1001a_3}-a_3)+(\cancel{9999a_4}+a_4) \overset{11}{\equiv} a_0-a_1+a_2-a_3+a_4$$

۲) قانون بخش‌پذیری بر ۱۰۱: برای پیدا کردن باقی‌مانده هر عدد بر ۱۰۱، ارقام عدد را از سمت راست دو رقم دو رقم جدا کرده و یکی در میان مثبت و منفی می نویسیم.

$$\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0} \overset{101}{\equiv} \overline{a_1a_0}+10^2\,\overline{a_3a_2}+10^4\,\overline{a_5a_4} \overset{101}{\equiv} \overline{a_1a_0}+(\cancel{101\overline{a_3a_2}}-\overline{a_3a_2})+(\cancel{9999\overline{a_5a_4}}+\overline{a_5a_4}) \overset{101}{\equiv} \overline{a_1a_0}-\overline{a_3a_2}+\overline{a_5a_4}$$

۳) قانون بخش‌پذیری بر ۱۰۰۱ (و ۷ و ۱۳): برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۱۰۰۱ و مقسوم‌علیه‌های معروف آن، مخصوصاً ۷ و ۱۳ ارقام عدد را از سمت راست سه رقم جدا کرده و یکی در میان مثبت و منفی می‌نویسیم.

تست ۲۴۲ عدد شش رقمی $\overline{a۶۲b۲۹}$ بر عدد ۹۹ بخش پذیر است. رقم a کدام است؟

(۱) (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

مثال چند عدد ۵ رقمی به صورت $\overline{۸۲y۶x}$ وجود دارد که بر ۹۹ بخش پذیر باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴) ۸

تست ۲۴۳ مجموع دو عدد $\overline{۴b۵۶}$ و $\overline{۲۳۳a}$ بر ۴۴ بخش پذیر است. مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱

تست ۲۴۴ به ازای کدام مقدار b، باقی‌مانده $\overline{ab۳a}$ در تقسیم به ۷ برابر ۵ است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) نمی‌توان تعیین کرد

تست ۲۴۵ عدد ۶ رقمی $\overline{ababab}$، ممکن است مضرب کدام مورد نباشد؟ (سراسری ۸۹)

(۱) ۷ (۲) ۱۳ (۳) ۳۱ (۴) ۳۷

تست ۲۴۶ پنج برابر عدد دو رقمی $\overline{aa}$ را سمت چپ آن قرار می‌دهیم و آن را m می‌نامیم. m با کدام یک از اعداد زیر به پیمانه ۱۸۳۷ همنهشت است؟ (سراسری خارج ۹۹)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

تست ۲۴۷ اگر عدد پنج رقمی $\overline{a111a}$ مضرب ۱۱ باشد، چند عدد چهار رقمی به‌صورت $\overline{babb}$ بخش‌پذیر بر ۹ وجود دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

جواب

$$\overline{a111a} \overset{11}{\equiv} a-1+1-1+a \overset{11}{\equiv} 2a-1 \overset{11}{\equiv} 0 \rightarrow 2a \overset{11}{\equiv} 1 \rightarrow 2a \overset{11}{\equiv} 1+11 \xrightarrow{(2,11)=1} a \overset{11}{\equiv} 6 \rightarrow a=6$$

$$\overline{babb} \overset{9}{\equiv} \overline{b6bb} \overset{9}{\equiv} b+b+b+6 \overset{9}{\equiv} 3b+6 \overset{9}{\equiv} 0 \xrightarrow{(3,9)=3} b+2 \overset{3}{\equiv} 0 \rightarrow b=1,4,7$$

بنابراین سه عدد ۱۶۱۱ و ۴۶۴۴ و ۷۶۷۷ وجود دارند.

تست ۲۴۸ باقی‌مانده تقسیم $A=\overline{18baab7}$ بر ۵۵ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) a ۳) a+b ۴) ۲۲

جواب باقی‌مانده تقسیم A را بر ۵ و ۱۱ به‌دست آورده، سپس با استفاده از قضیه افزایش پیمانه، باقی‌مانده بر ۵۵ را تعیین می‌کنیم.

$$\overline{18baab7} \overset{5}{\equiv} 7 \overset{5}{\equiv} 2 \quad ; \quad \overline{18baab7} \overset{11}{\equiv} 7-b+a-a+b-8+1 \overset{11}{\equiv} 0$$

$$\begin{cases} A \overset{5}{\equiv} 2 \rightarrow A \overset{5}{\equiv} 2+4\times5 \overset{5}{\equiv} 22 \\ A \overset{11}{\equiv} 0 \rightarrow A \overset{11}{\equiv} 0+2\times11 \overset{11}{\equiv} 22 \end{cases} \xrightarrow{[5,11]=55} A \overset{55}{\equiv} 22$$

تست ۲۴۹ چند عدد ۵ رقمی به صورت $A=\overline{a۳۵b۲}$ وجود دارد که بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد؟ (سراسری ۹۵)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

جواب چون A بر ۳۶ بخش‌پذیر است، پس بر ۴ و ۹ نیز بخش‌پذیر است. پس:

$$\overline{a۳۵b۲}\overset{۴}{\equiv}۰ \to \overline{b۲}\overset{۴}{\equiv}۰ \to b=۱,۳,۵,۷,۹$$

$$\overline{a۳۵b۲}\overset{۹}{\equiv}۰ \to a+b+۳+۵+۲\overset{۹}{\equiv}a+b+۱\overset{۹}{\equiv}۰ \to \begin{cases} b=۱ \to a+۱+۱\overset{۹}{\equiv}۰ \to a=۷ \\ b=۳ \to a+۳+۱\overset{۹}{\equiv}۰ \to a=۵ \\ b=۵ \to a+۵+۱\overset{۹}{\equiv}۰ \to a=۳ \\ b=۷ \to a+۷+۱\overset{۹}{\equiv}۰ \to a=۱ \\ b=۹ \to a+۹+۱\overset{۹}{\equiv}۰ \to a=۸ \end{cases}$$

کاربرد همنهشتی در تقویم‌نگاری و تعیین روزهای هفته

می‌دانیم هر یک از روزهای هفته پس از ۷ روز دوباره تکرار می‌شوند. با این احتساب اگر مثلاً ۲۰ فروردین سه‌شنبه باشد، ۲۱ روز بعد یعنی ۱۰ اردیبهشت نیز سه‌شنبه می‌باشد.

حال می‌خواهیم بدانیم با فرض اینکه در یک سال ۲۰ فروردین سه‌شنبه باشد، در همان سال ۲۸ مهر چند شنبه است؟

حتماً می‌دانید که در تقویم شمسی، شش ماه اول سال ۳۱ روزه و ۶ ماه دوم سال (به استثنای اسفند) ۳۰ روزه می‌باشند. برای پاسخ به سئوال فوق کافی است فاصله بین ۲۰ فروردین و ۲۸ مهر را محاسبه کنیم.

(فاصله بین ۲۰ فروردین تا ۲۸ مهر) $d=(۳۱-۲۰)+۵\times۳۱+۲۸=۱۹۴$ روز

توجه برای محاسبه فاصله بین روزها، روزی که در آن هستیم را (در اینجا ۲۰ فروردین) شمارش نمی‌کنیم. برای اطمینان خاطر از این موضوع، فقط کافی است روز آخر ماه را منهای روز مبدأ کنید.

حال باقی‌مانده تقسیم $d=۱۹۴$ را بر عدد ۷ (تعداد روزهای هفته) محاسبه می‌کنیم: $۱۹۴\overset{۷}{\equiv}۵$

باقی‌مانده ۵ نشان می‌دهد که باید از روز سه‌شنبه (بدون احتساب خود سه‌شنبه) ۵ روز جلوتر برویم تا به جواب یکشنبه برسیم.

آنچه اتفاق افتاده است این است که با توجه به رابطه $۱۹۴=۲۷\times۷+۵$ بعد از گذشت ۲۷ هفته از سه‌شنبه ۲۰ فروردین به روز سه‌شنبه ۲۳ مهر و پس از گذشت ۵ روز دیگر به یکشنبه ۲۸ مهر رسیده‌ایم.

نتیجه با داشتن شماره روز هفته از یکی از ایام سال (روز مبدأ)، برای تعیین شماره روز یکی دیگر از ایام سال (روز مقصد) کافی است فاصله روزهای بین مبدأ و مقصد را تعیین کرده (d) و از رابطه همنهشتی زیر مقدار r را به‌دست می‌آوریم:

$$d\overset{۷}{\equiv}r\ ,\ ۰\leq r<۷$$

در آخر از شماره روز مبدأ (بدون احتساب خود روز مبدأ) به اندازه r روز جلو می‌رویم.

تست ۲۵۰ اگر سوم شهریور ماه سالی، دوشنبه باشد، بیست و ششم بهمن ماه آن سال چه روزی است؟

(۱) چهارشنبه (۲) سه شنبه (۳) یکشنبه (۴) جمعه

تذکر اگر تاریخ روز مبدأ بعد از تاریخ روز مقصد بود، برای تعیین شماره روز مقصد، به عقب برنگردید. بلکه فاصله بین روزها را از تاریخ قدیمی‌تر (مقصد) به تاریخ جدیدتر (مبدأ) محاسبه کنید و باقی‌مانده تقسیم آن را بر ۷ بیابید. در آخر از روز مبدأ (بدون احتساب خود روز مبدأ) به اندازه باقی‌مانده تقسیم بر ۷ به عقب برگردید.

تست ۲۵۱ اگر ۱۸ تیرماه سالی یکشنبه باشد، دوازدهم فروردین در همان سال چه روزی بوده است؟

۱) شنبه ۲) یکشنبه ۳) دوشنبه ۴) سه شنبه

تست ۲۵۲ اگر ۲۰ روز قبل، شنبه باشد، ۴۰ روز بعد چند شنبه است؟

۱) دوشنبه ۲) سه‌شنبه ۳) چهارشنبه ۴) پنج‌شنبه

جواب فاصله بین روزهای مبدأ و مقصد برابر است با ۶۰ روز.

از طرفی $60 \overset{7}{\equiv} 4$، پس از روز شنبه ۴ روز جلو می‌رویم تا به چهارشنبه برسیم.

تست ۲۵۳ اگر اکنون ساعت ۳ بامداد باشد، ۷۱۳ ساعت بعد، ساعت چند است؟

۱) ۷ شب ۲) ۸ شب ۳) ۵ بعدازظهر ۴) ۹ صبح

جواب هر شبانه روز ۲۴ ساعت است، پس باقی‌مانده تقسیم ۷۱۳ را بر ۲۴ پیدا می‌کنیم:

$$713 \overset{24}{\equiv} 720-7 \overset{24}{\equiv} -7 \overset{24}{\equiv} -7 \overset{24}{\equiv} 17$$

پس از ساعت ۳ بامداد ۱۷ ساعت جلو می‌رویم تا به ساعت ۲۰ برسیم.

معادله همنهشتی

رابطه همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ که در آن عدد صحیح x یک مجهول می‌باشد را معادله همنهشتی می‌گوئیم.

منظور از حل معادله همنهشتی پیدا کردن همه $x_0 \in \mathbb{Z}$ های است که در رابطه فوق صدق کند.

به‌عنوان مثال معادله همنهشتی $x \overset{۳}{\equiv} ۲$ را در نظر بگیرید. با کمی دقت می‌توان حدس زد که ۲ و ۵ جواب‌های این معادله هستند. برای پیدا کردن همه جواب‌های این معادله داریم:

$$x \overset{۳}{\equiv} ۲ \to ۳|x-۲ \to x-۲=۳k \to x=۳k+۲ \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

با مقداردهی به k می‌توان همه جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورد.

تذکر اگر در یک معادله همنهشتی مجهول دارای ضریب غیر از عدد ۱ بود، ابتدا می‌بایست با استفاده از ویژگی‌های همنهشتی (اضافه کردن ضریبی از پیمانه به طرفین و تقسیم طرفین بر یک مقسوم‌علیه مشترک) ضریب مجهول را حذف کرده و همانند مثال فوق جواب‌های معادله را پیدا کرد.

به‌عنوان مثال برای تعیین جواب‌های معادله همنهشتی زیر داریم:

$$۷x \overset{۴}{\equiv} ۲۲ \to ۷x \overset{۴}{\equiv} ۲۲-۲(۴) \to ۷x \overset{۴}{\equiv} ۱۴ \xrightarrow{(۴,۷)=۱} x \overset{۴}{\equiv} ۲ \to ۴|x-۲ \to$$

$$x-۲=۴k \to x=۴k+۲ \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

مثال همه اعداد صحیحی را بیابید که ۳ برابر آن‌ها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشد. (تمرین کتاب)

مثال معادله همنهشتی زیر را حل کرده و جواب عمومی آن را به‌دست آورید. (تمرین کتاب)

$$۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$$

قضیه معادله همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,m)|b$.

به‌عنوان مثال معادله $۶x \overset{۹}{\equiv} ۱۱$ دارای جواب نیست زیرا: $(۶,۹)\nmid ۱۱$.

به بیانی دیگر چون $۳\nmid ۱۱$، بنابراین هیچ مضرب مناسبی از پیمانه ۹ پیدا نمی‌شود که با ۱۱ جمع شود، تا طرفین بر ۳ بخش‌پذیر باشد!

نتیجه اگر در یک معادله همنهشتی ضریب مجهول و پیمانه نسبت به هم اول باشند آنگاه معادله حتماً دارای جـواب است. زیرا:

$(a,m)=۱ \rightarrow ۱|b \rightarrow$ معادله دارای جواب است

تست ۲۵۴ معادله $ax \overset{۱۸}{\equiv} ۴$ به ازای چند عضو a از مجموعه $\{۱,۲,۳,...,۳۰\}$ دارای جواب است؟

(۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

تست ۲۵۵ اگر $x+x^۲ \overset{۴}{\equiv} ۲$، کدام گزینه یکی از جواب‌های معادله است؟

(۱) $۴k-۱$ (۲) $۴k+۳$ (۳) $۴k-۲$ (۴) $۴k$

تست ۲۵۶ اگر $(221,357)=221x+357y$ باشد، تعداد اعداد دو رقمی x کدام است؟ (سراسری ۹۵)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

تست ۲۵۷ در تقسیم a بر عدد طبیعی b باقی‌مانده ۱۷ و خارج‌قسمت ۲۵ است. اگر a مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟ (سراسری ۸۸)

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

معادله سیاله خطی و کاربردهای آن

معادله سیاله، معادله‌ای است که بیش از یک متغیر دارد و منظور از جواب‌های معادله سیاله، همه‌ی اعداد صحیحی است که در معادله صدق می‌کند. یک معادله سیاله به‌صورت $ax+by=c$ است که معادله‌ی یک خط راست بوده و می‌خواهیم ببینیم این خط راست از چه نقاطی با طول و عرض صحیح می‌گذرد.

قضیه شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله $ax+by=c$ دارای جواب باشد، آن است که:

$(a,b)|c$

تست ۲۵۸ به ازای کدام مقدار n معادله سیاله‌ی $۶۰x+۸۴y=۵n-۱$ در مجموعه $\mathbb{Z}$ دارای جواب است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۲۹ (۳) ۳۳ (۴) ۳۵

تست ۲۵۹ معادله $۳x+۶y=a^{۲}+۲$ به ازای چند مقدار $a\in\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$ جواب دارد؟

(۱) ۱۳ (۲) ۷ (۳) ۱۴ (۴) ۶

تست ۲۶۰ اگر $\overline{abc}\overset{۲۰}{\equiv}۳$ باشد، معادله $ax+cy=۷$ به ازای کدام مقدار a جواب <u>ندارد</u>؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

حل معادله‌ی سیاله

برای حل یک معادله سیاله ابتدا آن را آنقدر ساده کرده تا ضرایب x و y نسبت به هم اول شوند. یعنی معادله به‌صورت $[\,ax+by=c\quad (a,b)=۱\,]$ درآید. سپس یک جواب خاص معادله مانند $\begin{cases}x_۰\\y_۰\end{cases}$ را به‌صورت ذهنی به‌دست می‌آوریم. پس از آن جواب‌های کلی معادله سیاله از روابط زیر محاسبه خواهند شد:

$$\begin{cases}x=x_۰+bk\\ y=y_۰-ak\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

توجه اگر در معادله اصلی ضرایب x و y هم علامت باشند، علامت‌های k در جواب‌های کلی متفاوت خواهد بود (به دلخواه، یکی مثبت و دیگری منفی). اگر در جواب‌های کلی علامت‌های x و y مختلف باشد، در جواب‌های کلی علامت‌های k یکسان خواهد بود (به دلخواه مثبت یا منفی).

تست ۲۶۱ اگر x و y جواب‌های معادله $۱۱x+۹y=۱۸$ باشد، $x+y$ کدام است؟

۱) $۲-۲k$ ۲) $۳-۲k$ ۳) $۲-۳k$ ۴) $۳-۳k$

تست ۲۶۲ معادله سیاله $۷x+۲۱y=۲۸$ چند جواب صحیح در بازه‌ی $-۲۰<x,y<۲۰$ دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

حل معادله سیاله با تبدیل آن به معادله همنشتی

معادله سیاله $ax+by=c$ با مجهولات x و y به‌صورت زیر به یک معادله همنهشتی قابل تبدیل است:

$$ax+by=c \rightarrow \begin{cases} ax \overset{b}{\equiv} c \quad ; \quad bx \overset{b}{\equiv} 0 \ \text{زیرا} \\ by \overset{a}{\equiv} c \quad ; \quad ay \overset{a}{\equiv} 0 \ \text{زیرا} \end{cases}$$

با جایگزین کردن مقدار x (یا y) در معادله اصلی، متغییر دیگر نیز به‌دست می‌آید.

مثال به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان رو به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟ (تمرین کتاب)

مثال در معادله $mx+(m-1)y=12$ مقدار m را به گونه‌ای تعیین کنید تا این معادله در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب باشد. (تمرین کتاب)

درس اول: معرفی گراف

گراف ساده

تعریف اولیه: یک یا چند نقطه که توسط تعدادی خط به‌هم وصل شده یا نشده باشند، گراف ساده نام دارد.

نکته در یک گراف ساده حداکثر تعداد خطوط برابر است با:

تعریف ریاضی گراف ساده: زوج مرتب $G(V,E)$ که در آن V (مجموعه نقاط) مجموعه‌ای متناهی و نـاتهی و E (مجموعه خطوط) زیرمجموعه‌ای از کلیه‌ی زیرمجموعه‌های دو عضوی V می‌باشد، گراف ساده نام دارد.

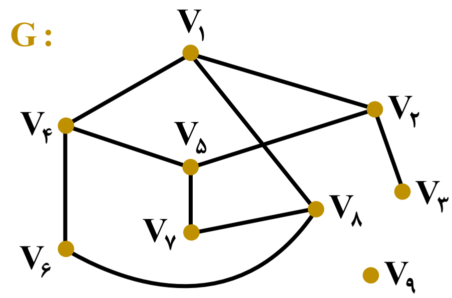
مثال گرافی ساده با مجموعه‌ی نقاط $V=\{a,b,c,d,e\}$ و مجموعه‌ی خطوط $E=\{ab,ac,ad,ae,bd\}$ رسم کرده و تعریف گراف ساده را به‌وسیله‌ی آن بررسی کنید.

تذکر اعضای V را رئوس گراف و اعضای E را یال‌های گراف می‌نامند.

معرفی گراف

گراف مجموعه‌ای است از نقطه و خط. به هـر یــک از نقاط رأس و به هر یک از خطوط یال می‌گوئیم.

مجموعه رئوس و یال‌های گراف G را به‌ترتیب با نماد $V(G)$ و $E(G)$ نمایش می‌دهیم.



به‌عنوان مثال در گراف شکل مقابل داریم:

$$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_9\}$$

$$E(G)=\{v_1v_2,v_1v_4,v_1v_8,v_2v_3,\dots,v_7v_8\}$$

در هر گراف تعداد رئوس را مرتبه و تعداد یال‌ها را اندازه آن گراف می‌گوئیم.

مرتبه و اندازه یک گراف را به‌ترتیب با حروف p و q نمایش می‌دهیم.

$$p(G)=|V(G)| \quad , \quad q(G)=|E(G)|$$

به‌عنوان مثال در گراف در شکل فوق داریم: $p=9\,,q=10$.

درجه رأس v برابر است با تعداد یال‌هایی که به آن متصل می‌باشد.

درجه رأس v را با نماد $\deg_G(v)$ یا به اختصار $\deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم.

به‌عنوان مثال در گراف شکل فوق داریم: $\deg(v_5)=3\ ,\ \deg(v_9)=0$.

قضیه در هر گراف ساده مجموع درجات رئوس گراف برابر است با ۲ برابر اندازه‌ی گراف (تعداد یال‌ها).

$$\sum_{i=1}^{p}\deg V_i=2q$$

اثبات

رأسی که درجه آن یک عدد فرد باشد را رأس فرد و رأسی که درجه آن یک عدد زوج باشد را رأس زوج می‌گوئیم.

به‌عنوان مثال در گراف شکل فوق v_4 یک رأس فرد و v_7 یک رأس زوج است.

قضیه در هر گراف ساده همواره تعداد رئوس فرد، زوج می‌باشد (لم دست دادن)

اثبات

بزرگترین عدد در بین درجات رئوس یک گراف را با نماد $\Delta(G)$ و کوچکترین آن‌ها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به‌ترتیب آن‌ها را ماکزیمم و مینیمم درجه گراف می‌نامیم.

به‌عنوان مثال در گراف شکل فوق داریم: $\delta(G)=0\ ,\ \Delta(G)=3$.

نکته

رأس تنها: رأسی که درجه آن صفر باشد (به هیچ یالی متصل نباشد) را رأس تنها می‌گوئیم.

به‌عنوان مثال در گراف شکل فوق v_9 یک رأس تنهاست.

گرافی که تمام رئوس آن تنها باشند را گراف تهی می‌گوئیم. بنابراین گراف تهی n رأسی، گرافی است شامل n رأس و بدون یال.

در یک گراف از مرتبه p، هر رأس حداکثر می‌تواند به $p-1$ رأس دیگر متصل باشد. رأسی که درجه آن $p-1$ باشد را رأس پُر یا فول می‌گوئیم.

نتیجه بیشترین مقدار Δ در یک گراف از مرتبه p، برابر است با: $\Delta_{max}=p-1$.

دو رأس v و u را مجاور گوئیم هرگاه توسط یک یال بهم متصل باشند. به‌عبارتی: $uv\in E(G)$.

به‌عنوان مثال در گراف فوق v_1 و v_8 مجاورند. ولی v_1 با v_5 مجاور نیست.

فرض کنیم v یکی از رئوس گراف G باشد. به مجموعه همه رأس‌هایی که با v مجاور می‌باشند، همسایگی باز رأس v می‌گوئیم و آن را با نماد $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. بدیهی است که $|N_G(v)|=deg(v)$.

اگر خود رأس v را هم به مجموعه $N_G(v)$ اضافه کنیم، مجموعه حاصل را همسایگی بسته رأس v می‌گوئیم و آن را با نماد $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. به‌عنوان مثال در گراف شکل فوق داریم:

$N_G(v_5)=\{v_2,v_4,v_7\}\quad,\quad N_G[v_5]=\{v_2,v_4,v_7,v_5\}$

$N_G(v_9)=\{\}\quad,\quad N_G[v_9]=\{v_9\}$

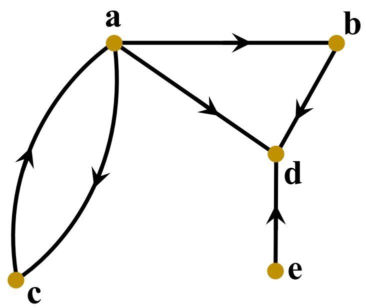
نتیجه

دو یال را <u>مجاور</u> گوئیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها به آن رأس متصل باشند.

به‌عنوان مثال در گراف فوق v_8v_6 و v_8v_1 دو یال مجاورند.

به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، گراف <u>جهت‌دار</u> می‌گوئیم. در این حالت برای نمایش جهت یال بین دو رأس، از زوج مرتب استفاده می‌کنیم.

به‌عنوان مثال :



$$V(G)=\{a,b,c,d,e\}$$

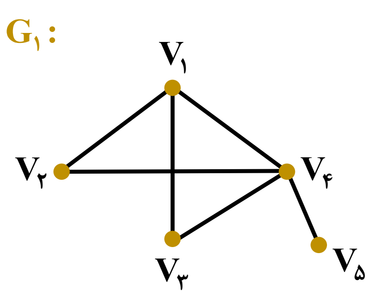
$$E(G)=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,d),(c,a),(e,d)\}$$

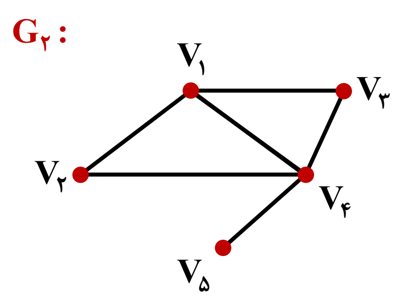
تذکر توجه داشته باشید که در گراف‌های جهت‌دار یال (u,v) با یال (v,u) کاملاً متفاوت است.

تذکر برای رسم نمودار یک گراف روش یکتایی مد نظر نیست. آنچه در یک گراف اهمیت دارد تعداد رئوس و تعداد یال‌ها و این که کدام رأس با کدام رأس دیگر ارتباط دارد.

به بیانی دیگر آنچه برابری (یا هم‌ریختی) دو گراف را نشان می‌دهد برابری مجموعه رئوس و مجموعه یال‌های آن‌ها و نحوه اتصال یال‌ها به یکدیگر می‌باشد.

به‌عنوان مثال دو گراف زیر با هم یکسان می‌باشند:



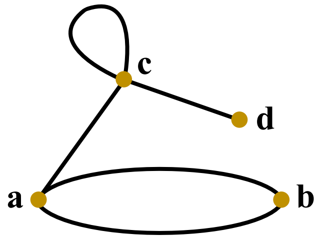


$$V(G_1)=V(G_2)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$$

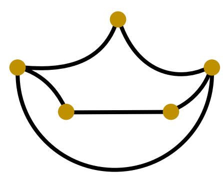
$$E(G_1)=E(G_2)=\{v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_2v_4,v_3v_4,v_4v_5\}$$

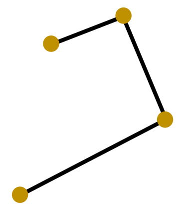
تذکر بین دو رأس ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد. همچنین یک یال ممکن است یک رأس را به خود آن رأس متصل کند که به آن طوقه می‌گوئیم.

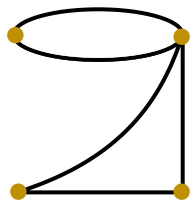
گرافی که شامل طوقه نباشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال وجود نداشته باشد را گراف ساده می‌گوئیم.

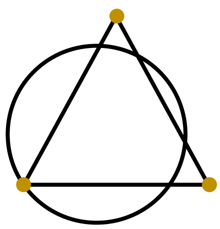


تست ۲۶۳ کدام‌یک از گراف‌های زیر مربوط به یک گراف ساده است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تست ۲۶۴ گراف‌های بدون طوقه G_1 و G_2 هر دو از مرتبه ۳ و به‌ترتیب ۲ و ۴ یال دارند. در این صورت:

۱) G_1 قطعاً ساده است و G_2 قطعاً ساده نیست.

۲) G_1 قطعاً ساده است، ولی G_2 ممکن است ساده باشد یا نباشد.

۳) G_1 ممکن است ساده باشد یا نباشد، اما G_2 قطعاً ساده نیست.

۴) هر دو گراف G_1 و G_2 ممکن است ساده باشند یا نباشند.

تست ۲۶۵ در گراف G از مرتبه ۴، هرگاه $N_G[a] \cap N_G[b] = \{c,d\}$ و درجه همه رئوس یکسان نباشد، آنگاه $\deg(c)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲ یا ۳

تست ۲۶۶ در گرافی از مرتبه ۶، می‌دانیم $N_G(a)=\{b,c,d,e\}$ و $N_G(b)=\{a,c,d,e\}$. کدام گزینه درست است؟

(۱) $۸\le q\le ۱۳$ (۲) $۷\le q\le ۱۳$ (۳) $۷\le q\le ۱۵$ (۴) $۸\le q\le ۱۵$

تست ۲۶۷ در گرافی از مرتبه ۵ می‌دانیم $\Delta=۴$ و $\delta=۲$ و گراف ۲ رأس از درجه ۴ دارد. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

(۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۶

قوانین درجه رئوس در گراف ساده (نکات مهم در دنباله گرافی)

(۱) هیچ یک از اعداد دنباله نباید از $(p-۱)$ بزرگ‌تر باشد (p مرتبه‌ی گراف یا همان تعداد اعداد دنباله می‌باشد).

(۲) تعداد رأس‌های فرد هر گراف، یک عدد زوج است.

مثلاً گرافی با درجه رئوس ۴,۳,۳,۲,۲,۱ نداریم! زیرا تعداد رئوس فرد آن، فرد است.

(۳) در دنباله باید حداقل دو عدد تکراری وجود داشته باشد.

(۴) اگر گرافی دارای ۱ رأس پر باشد، آنگاه $\delta\ge ۱$.

اگر گرافی دارای ۲ رأس پر باشد، آنگاه $\delta\ge ۲$.

به‌همین ترتیب اگر گرافی دارای k رأس پر باشد، آنگاه $\delta\ge k$.

مثلاً گرافی با درجه رئوس ۵,۵,۵,۳,۲,۲ نداریم! زیرا $p=۶$ است و بخاطر وجود سه رأس پر باید $\delta\ge ۳$ باشد!

تذکر بسیار مهم: تمامی نکات فوق فقط شرط لازم هستند نه کافی! یعنی برای وجود یک گراف علاوه بر شرایط فوق، باید آن گراف قابل رسم نیز باشد. (مثلاً گرافی با درجه رئوس ۴,۳,۱,۱,۱ که همه شرایط فوق را دارد، قابل رسم نیست!)

تست ۲۶۸ کدام‌یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ی درجه‌ی راس‌های یک گراف ساده است؟

(۱) ۴,۴,۴,۳,۲,۱,۱ (۲) ۶,۵,۳,۳,۲,۱,۰,۰,۰ (۳) ۵,۵,۳,۳,۱,۱ (۴) ۳,۳,۳,۱,۱,۱,۰,۰

تست ۲۶۹ در یک گراف ساده از مرتبه‌ی ۶، دنباله‌ی درجه‌ی راس‌های آن، به کدام صورت می‌تواند باشد؟

(۱) ۵,۴,۳,۲,۲,۰ (۲) ۵,۴,۳,۲,۲,۱ (۳) ۵,۴,۳,۲,۱,۱ (۴) ۵,۴,۳,۳,۲,۱

تست ۲۷۰ در گرافی که ۱۶ رأس دارد، تعداد رأس‌های زوج، عـددی .... و تعـداد رأس‌هـای فـرد، عـددی .... است. (سراسری ۸۶)

(۱) فرد / فرد (۲) فرد / زوج (۳) زوج / فرد (۴) زوج / زوج

تست ۲۷۱ در گراف ساده G با مجموعه رئوس $V=\{v_1, v_2, ..., v_{10}\}$ دو رأس v_i و v_j زمانی مجاورنـد کـه $i \times j$ عددی زوج باشد. این گراف چند یال دارد؟

(۱) ۳۲ (۲) ۲۸ (۳) ۳۵ (۴) ۴۲

تست ۲۷۲ در گرافی از مرتبه ۴، می‌دانیم $\Delta - \delta = ۱$ است. تعداد یال‌های گراف، کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

تست ۲۷۳ گرافی از مرتبه ۸ و اندازه ۱۴، دارای دو رأس از درجه $\Delta = ۵$، یک رأس از درجه ۳ و یک رأس از درجه $\delta = ۱$ میباشد. تعداد رأس‌های درجه ۲ گراف کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۲۷۴ درجه رأس‌های یک گراف ساده به‌صورت ۵,۴,a,۲,۱,۲ می‌باشد. حاصل $p+q+\Delta+\delta$ کدام است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

تست ۲۷۵ حاصل ضرب درجه‌های یک گراف ساده از مرتبه ۴، کدام عدد نمی‌تواند باشد؟ (م سراسری ۸۰)

(۱) ۳ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۳۶

تست ۲۷۶ در گراف ساده‌ی G، مجموعه‌ی E دارای ۲۳ عضو است، حداقل تعداد اعضای مجموعه‌ی V کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

تست ۲۷۷ در گراف ساده ی G، $P = ۱۳$، $\Delta = ۷$ و $\delta = ۳$. حداکثر و حداقل اندازه گراف به‌ترتیب کدام است؟

(۱) ۴۳ و ۲۴ (۲) ۴۵ و ۲۴ (۳) ۴۳ و ۲۲ (۴) ۴۵ و ۲۲

تست ۲۷۸ میانگین درجه‌های گرافی با رأس‌های $v_۱$ و $v_۲$ و ... و $v_۸$، برابر ۲ است. حاصل $\sum_{i=۱}^{۸} |N_G(v_i)|$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

تست ۲۷۹ در گرافی از مرتبه ۵ می‌دانیم $\Delta = ۴$ و $\delta = ۲$ و گراف ۲ رأس از درجه ۴ دارد. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

(۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۶

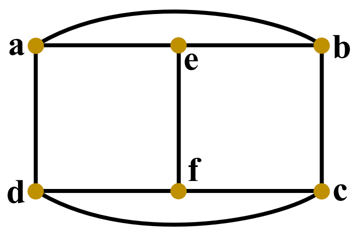
تست ۲۸۰ درجه راس‌های یک گراف ساده به صورت ۵,۵,a,۴,۳,۲ است. a چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

گراف‌های منتظم و کامل

گرافی که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر k باشد، را گراف k- منتظم می‌گوئیم.

مانند گراف ۶ رأسی و ۳- منتظم شکل مقابل.



ویژگی‌های گراف k - منتظم

۱) مجموع درجات رئوس یک گراف k- منتظم از مرتبه‌ی p برابر است با:

$$\sum \deg v_i = ۲q \Rightarrow \underbrace{k+k+...+k}_{p} = ۲q \Rightarrow \boxed{k.p = ۲q}$$

نکته از آنجایی که ۲q عددی زوج است مقادیر p و k هر دو نمی‌توانند فرد باشند.

۲) در یک گراف r- منتظم از مرتبه‌ی p همواره داریم: $۰ \le r \le p-۱$

۳) تعداد یال‌های یک گراف k- منتظم از مرتبه p برابر است با: $q = \frac{۱}{۲}kp$

۴) در هر گراف k- منتظم رابطه $\delta = \Delta = k$ برقرار است.

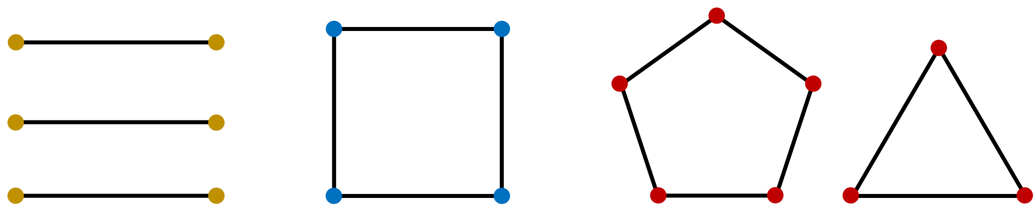
۵) در گراف‌های منتظم، دنباله ی درجه راس‌ها، هم حسابی $(d = ۰)$ و هم هندسی $(q = ۱)$ است.

k - منتظم‌های خاص

(۱) هر گراف تهی یک گراف ۰ - منتظم است!

(۲) گراف‌های ۱- منتظم از مرتبه p (p حتماً زوج است) به‌صورت تعدادی یال (پاره‌خط) جدا ازهم هستند.

(۳) گراف‌های ۲- منتظم از اجتماع تعدادی چندضلعی تشکیل شده‌اند.



گراف ۲- منتظم مرتبه ۸   گراف ۲- منتظم مرتبه ۴   گراف ۱- منتظم مرتبه ۶

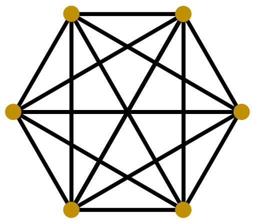
مثلا گراف‌های ۲- منتظم از مرتبه ۸ عبارت‌اند از:

تست ۲۸۱ چند گراف k- منتظم از مرتبه‌ی p وجود دارد که اندازه‌ی آن‌ها برابر ۱۰ باشد؟

(۱) ۳   (۲) ۴   (۳) ۷   (۴) نمی‌توان تعیین کرد.

◆ گرافی که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد، را گراف کامل می‌گوئیم.

گراف کامل p رأسی را با K_p نمایش می‌دهیم.



گراف $K_۶$

ویژگی‌های گراف کامل

۱ گراف K_p یک گراف p رأسی $(p-۱)$ - منتظم است.

۲ در هر گراف کامل از مرتبه p رابطه $\delta = \Delta = p-۱$ برقرار است.

۳ تعداد یال‌های هر گراف کامل با اندازه p برابر است با: $q = \binom{p}{۲}$.

نتیجه در هر گراف از مرتبه p و اندازه q همواره رابطه $۰ \le q \le \binom{p}{۲}$ برقرار می‌باشد.

تذکر در ادامه با مثال‌هایی مواجه می‌شویم که برای پیدا کردن اندازه گراف مورد نظر سوال، می‌بایست آن گراف را با نزدیکترین گراف کامل به گراف مورد نظر، مقایسه کرد. لذا توصیه می‌شود برای سرعت عمل بیشتر در حل این دست سوال‌ها، جدول تعداد یال‌های گراف کامل تا مرتبه ۱۰ را بخاطر بسپارید.

گراف کامل	$K_۲$	$K_۳$	$K_۴$	$K_۵$	$K_۶$	$K_۷$	$K_۸$	$K_۹$	$K_{۱۰}$
اندازه	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵

تست ۲۸۲ در گرافی از مرتبه‌ی ۷ با اندازه‌ی ۲۰ چند رأس با درجه‌ی ماکزیمم وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

تست ۲۸۳ درگرافی از مرتبه‌ی ۷ با اندازه‌ی ۱۹ حداکثر تعداد رئوس ماکزیمم کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

تست ۲۸۴ با حذف ۱۶ یال از یک گراف $(k+۳)$ - منتظم، این گراف به گراف $(k-۱)$ - منتظم تبدیل می‌شود. مرتبه گراف کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

تست ۲۸۵ درجه رأس‌های گرافی ۳,۲,۲,۲,۱ است. با تبدیل این گراف به یک گراف منتظم، مجموع درجات چقدر زیاد می‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۰

تست ۲۸۶ در یک گراف کامل ناتهی، رابطه $q=3\Delta+\delta$ برقرار است. مجموع مرتبه و اندازه کدام است؟

(۱) ۲۸ (۲) ۴۵ (۳) ۳۶ (۴) ۵۵

تست ۲۸۷ با حذف ۱۵ یال از یک گراف کامل، گراف ۶- منتظم به‌دست می‌آید. گراف کامل چند منتظم است؟

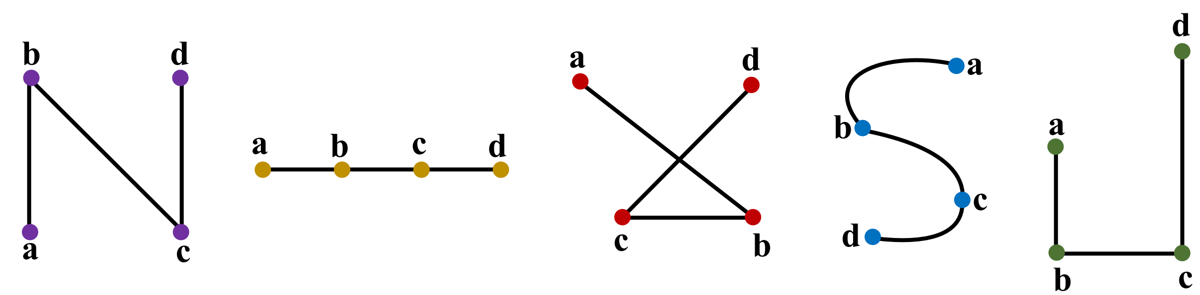
(۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷

تست ۲۸۸ در گرافی از مرتبه ۵ و اندازه ۸ اگر $\Delta-\delta=2$ باشد، چند رأس گراف از درجه ۳ است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

گراف‌های یکریخت و شمارش گراف‌ها با رأس‌های بدون نام

در بحث نظریه گراف، نحوه اتصال یال‌ها به یکدیگر، راس‌ها، و تعداد آن‌ها مهم است ولی نحوه قرارگیری آن‌ها به یکدیگر اهمیتی ندارد. به شکل‌های زیر دقت کنید:



تست ۲۸۹ چند نوع گراف از مرتبه ی ۵ و اندازه ۳ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

شمارش گراف‌ها با راس‌های دارای نام

قبلا گفته شد که گراف ساده از مرتبه p، حداکثر یال‌هایش برابر $\binom{p}{2}$ می‌باشد. اما یادتون نره که همه گراف‌ها که کامل نیستند! مجموعه یال‌های هر گراف در واقع زیرمجموعه‌ای از مجموعه کل یال‌هاست. مثلا با راس‌های a, b, c, d کلا می‌توان $\binom{4}{2}=6$ یال رسم کرد. این ۶ یال مجموعه $Max(E)=\{ab,ac,ad,bc,bd,cd\}$ هستند. حالا هر گراف دیگه‌ای با این ۴ راس بخواهیم رسم کنیم مجموعه یال‌هایش ، یک زیر مجموعه از $Max(E)$ می‌باشد. این جمله رو به خاطر بسپار:

> هر گراف ساده با راس‌های دارای اسم یک زیرمجموعه از مجموعه حداکثر یال‌هاست.

مثال مجموعه‌ی رئوس $V=\{a,b,c,d\}$ را در نظر بگیرید. با مجموعه‌ی رئوس ذکر شده:

الف) حداکثر چند یال ساده می‌توان رسم کرد؟

ب) حداکثر چند گراف ساده می‌توان رسم کرد؟

ج) چند گراف ساده می‌توان رسم کرد که یال ab را داشته باشد ولی یال cd را نداشته باشد؟

د) چند گراف ساده با چهار یال می‌توان رسم کرد؟

ه) چند گراف ساده با چهار یال می‌توان رسم کرد به طوری‌که در همه‌ی آن‌ها یال ab وجود داشته باشد؟

تست ۲۹۰ چند گراف ساده از اندازه ۵ با مجموعه راس‌های $V=\{a,b,c,d,e\}$ وجود دارد به طوری‌که $\deg(a)=۳$؟

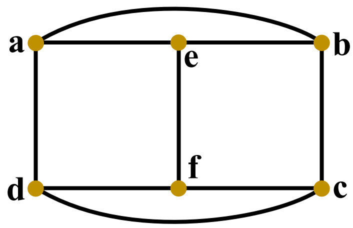
(۱) ۱۵ (۲) ۳۰ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰

تست ۲۹۱ پنج دوست A و B و C و D و E در یک شبکه اجتماعی عضو هستند. اگر بودن در لیست افراد طرف مقابل یک رابطه دو طرفه باشد (یعنی اگر فردی در لیست دوست خود باشد، دوست او نیز در لیست این فرد می‌باشد) و بدانیم A در لیست B هست و C در لیست B نیست، چند حالت مختلف برای لیست دوستان ممکن است وجود داشته باشد؟

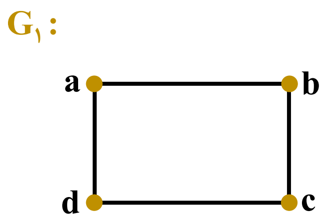
(۱) ۱۲۸ (۲) ۲۵۶ (۳) ۱۰۲۲ (۴) ۱۰۲۳

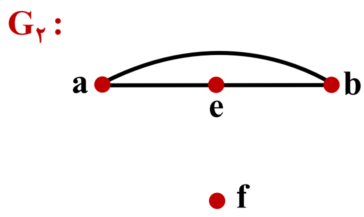
زیرگراف و مکمل گراف

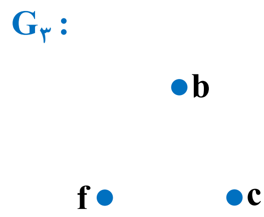
یک زیرگراف از گراف G، خود یک گراف است که مجموعه رئوس و یال‌های آن زیرمجموعه رئوس و یال‌هـای G می‌باشند.



به‌عنوان مثال G_1 و G_2 و G_3 سه زیرگراف از گراف شکل فوق می‌باشند.





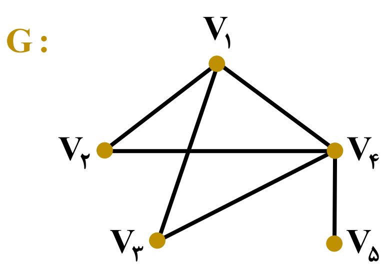


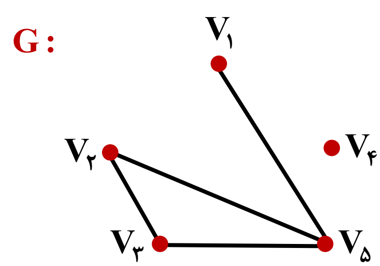
تذکر بدیهی است که هر گراف می‌تواند زیرگراف خودش باشد.

مکمل گراف: مکمل گراف G که آن را با نماد G^c یا $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم گرافی است که:

الف مجموعه رئوس آن همان V(G) است.

ب بین دو رأس $\overline{G}$ یک یال است اگر و تنها گر بین همان دو رأس در G آن یال وجود نداشته باشد.





نکته اگر G یک گراف از مرتبه p باشد، آنگاه:

الف درجه هر رأس از گراف G و رأس متناظر آن در گراف $\overline{G}$ برابر است با $p-1$. یعنی:

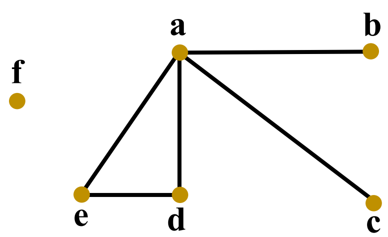
$$\forall u \in V(G):\ d_G(u)+d_{\overline{G}}(u)=p-1$$

ب مجموع تعداد یال‌های گراف G و گراف $\overline{G}$ برابر است با تعداد یال‌های گراف کامل K_p. یعنی:

$$q(G)+q(\overline{G})=q(K_p)$$

نکته مکمل گراف کامل، گراف تهی است و برعکس.

تست ۲۹۲ گراف روبه‌رو چند زیرگراف دارد که در همه آن‌ها $\Delta=4$ باشد؟



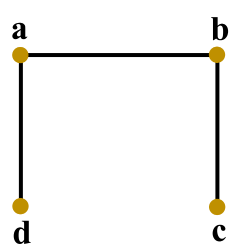
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) ۸

تست ۲۹۳ گراف شکل مقابل چند زیرگراف با اندازه یک دارد؟



(۱) ۱۲

(۲) ۹

(۳) ۶

(۴) ۳

تست ۲۹۴ درجه رأس a در هر دو گراف G و $\overline{G}$ برابر ۳ است. اگر گراف G دارای ۱۰ یال باشد، تعداد یال‌های گراف $\overline{G}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

تست ۲۹۵ اگر گراف G یک گراف ۲- منتظم و گراف $\overline{G}$ یک گراف ۳- منتظم باشد، گراف G چند یال دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

تست ۲۹۶ در گراف ساده G هرگاه $V(G)=\{v_1,v_2,\dots,v_8\}$ و $q=12$ باشد، حاصل $\sum_{i=1}^{8}|N_{\overline{G}}(v_i)|$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

تست ۲۹۷ چند گراف ۶- منتظم از مرتبه‌ی ۹ وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۷

مسیر و دور در گراف

یک مسیر از رأس u به رأس v در گراف G (که به آن یک $u-v$ مسیر می‌گوئیم) دنباله‌ای از رئوس دو به دو متمایز است که از u شروع و به v ختم می‌شود، به‌طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله مجاور باشند.

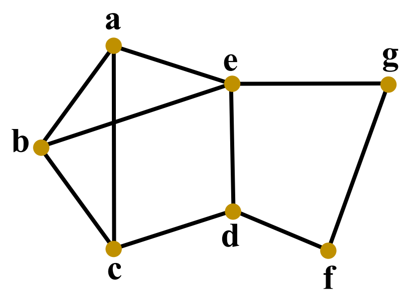
طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن (یکی کمتر از تعداد رئوس آن).

به‌عنوان مثال :

aed یک $a-d$ مسیر به‌طول ۲ می‌باشد.

abcd یک $a-d$ مسیر به‌طول ۳ می‌باشد.

aegfd یک $a-d$ مسیر به‌طول ۴ می‌باشد.



قرارداد: دنباله حاصل از یک رأس تنهای v یک مسیر به طول صفر از رأس v به خودش می‌باشد. همچنین مسیر به‌طول ۱ همان یال است.

یک دور به طول m دنباله‌ای است از $(m+1)$ رأس یک گراف (دقت کنید که mتای آن‌ها متمایز هستند) که از یک رأس مانند a شروع شده و به همان رأس ختم می‌شود، به عبارت دیگر دور، مسیری است که ابتدا و انتهای آن یکسان باشد.

به‌عنوان مثال aeba یک دور به‌طول ۳ و aedcba یک دور به‌طول ۵ در گراف شکل فوق می‌باشند.

توجه اگر در گرافی $q \geq p$ باشد، آن گراف حتما دارای دور است. (گراف دوردار)

نکته فرض کنیم G یک گراف باشد از مرتبه p باشد به‌طوری که $\delta(G) \geq m$، در این صورت G دارای یک مسیر با طول m می‌باشد. همچنین ماکزیمم طول یک مسیر این گراف (در صورت وجود) $p-1$ است.

توجه برای شمارش تعداد مسیرها، در گرافی‌هایی که بجای شکل دنباله درجه رئوس آن‌ها داده شده است، حتی‌الامکان گراف را به گونه‌ای رسم کنید که یال‌های آن برخورد کمتری (نقاط هیچی کمتری) داشته باشند! (ترسیم را با رأس‌های با درجه بالاتر شروع کنید و آن‌ها را در مرکز شکل قرار دهید.)

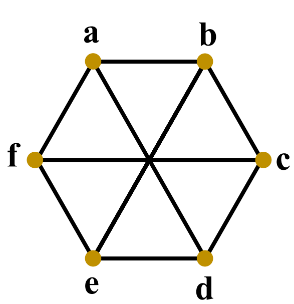
تست ۲۹۸ درجه رأس‌های گرافی به‌صورت ۴,۳,۲,۲,۳,۲ است. چند مسیر بین دو رأس با درجه δ وجود دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

تست ۲۹۹ در گرافی با درجه رأس‌های ۴,۴,۳,۳,۲,۲ دو رأس با درجه δ مجاورند. تعداد دورهای به‌طول ۶ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

تست ۳۰۰ در گراف ۳- منتظم شکل مقابل، چند دور به‌طول ۴ وجود دارد؟ (سراسری ۹۶)



(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

مسیر و دور در گراف‌های کامل

به جای مطرح کردن فرمول که با ایجاد شرط در مسئله غیرقابل استفاده هستند با طرح چند مثال نحوه محاسبه تعداد مسیر و دور را در گراف‌های کامل می‌بینیم.

مثال در گراف کامل k_6 با مجموعه رئوس $\{a,b,c,d,e,f\}$:

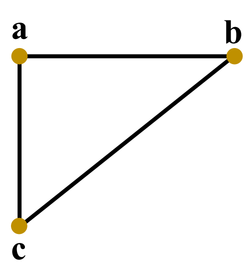
الف چند مسیر به طول ۴ از رأس a به رأس b وجود دارد؟

ب چند مسیر به طول ۴ از رأس a به رأس b وجود دارد مشروط بر آن که در تمام این مسیرها از رأس c گذر کنیم؟

ج چند مسیر به طول ۴ از رأس a به رأس b وجود دارد به شرط آن‌که در هیچ‌کدام از این مسیرها از d گذر نکنیم ولی از راس c حتماً بگذریم؟

د چند مسیر به طول ۴ وجود دارد؟

نکته یک دور به طول ۳ را به ۶ حالت، یک دور به طول ۴ را به ۸ حالت و ... و به همین ترتیب یک دور به طول m را به ۲m حالت می‌توان نمایش داد:



abca , bcab , cabc

acba , cbac , bacb

تست ۳۰۱ گراف کامل با رئوس a,b,c,d,e,f چند دور به طول ۵ دارد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۳۶ (۳) ۷۲ (۴) ۱۲۰

تست ۳۰۲ طول بزرگترین مسیر یک گراف کامل برابر ۸ است. این گراف چند مسیر به‌طول ۲ دارد؟

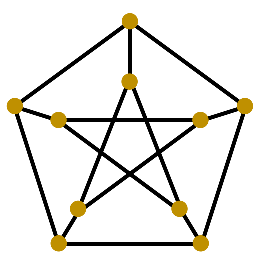
(۱) ۹۴ (۲) ۲۵۲ (۳) ۸۴ (۴) ۴۵

تست ۳۰۳ گرافی با درجه رئوس ۴,۴,۴,۳,۳ چند دور به‌طول ۳ دارد؟

(۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

گراف پترسُن

گرافی است ۳- منتظم از مرتبه ۱۰. (شکل مقابل)

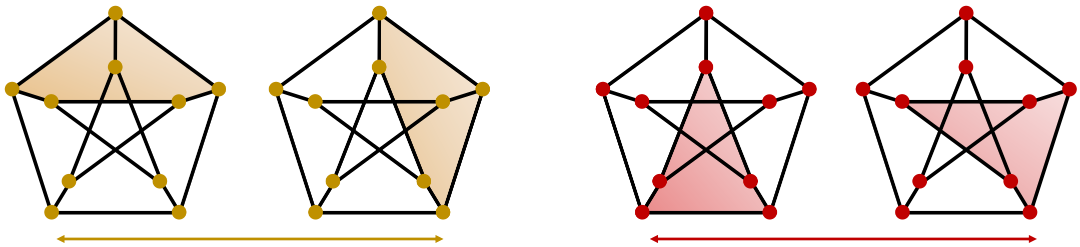


این گراف فقط دورهایی به‌طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ دارد. تعداد دورهای این گراف، مطابق جدول زیر است:

طول دور	۵	۶	۸	۹
تعداد	۱۲	۱۰	۱۵	۲۰

به دلیل تقارن‌های موجود در این گراف، می‌توان روش‌هایی برای دسته‌بندی دورهای آن ارائه کرد.

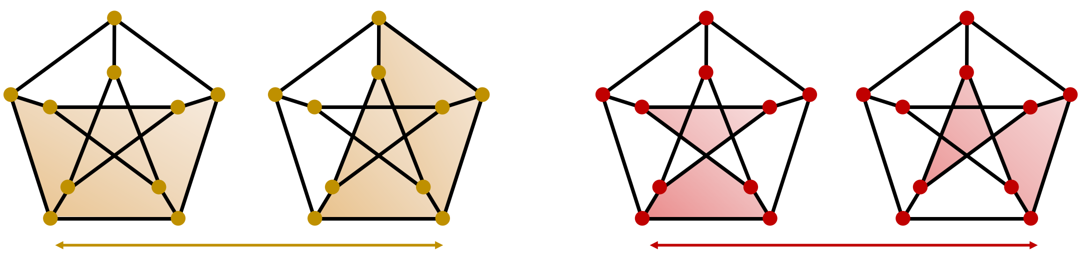
به‌عنوان مثال دورهای به‌طول ۵ این گراف عبارت‌اند از:



شامل ۵ دور	شامل ۵ دور

به این مجموعه دور اضافه کنید دور شامل ستاره دورنی و دور شامل پنج ضلعی بیرونی را که جمعاً میشود ۱۲ تا.

همچنین دورهای به‌طول ۶ این گراف عبارت‌اند از:

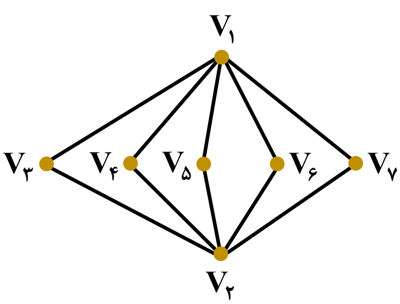


شامل ۵ دور	شامل ۵ دور

در مجموع ۱۰ دور به‌طول ۶ خواهیم داشت.

گراف الماسی

گرافی است که دو رأس غیر مجاور آن از درجه $n-۲$ و $n-۲$ رأس دیگر آن از درجه ۲ می‌باشد.



مانند گراف شکل مقابل با مجموعه رئوس:

۵,۵,۲,۲,۲,۲,۲.

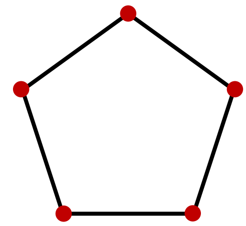
همانطور که مشاهده می‌کنید تمامی دورهای این گراف با طول ۴ می‌باشند.

به ازای هر ۲ رأس دلخواه از رئوس میانی این گراف یک دور به‌طول ۴ وجود دارد.

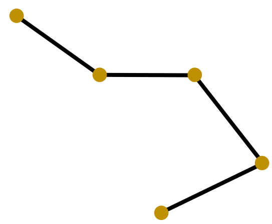
بنابراین تعداد دورهای این گراف برابر است با: $\binom{n-۲}{۲}$.

گراف تک مسیر P_n و گراف تک دور C_n

گرافی را که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد، با P_n و گرافی را که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد، با C_n نمایش می‌دهیم.



گراف C_5



گراف P_5

نکات مهم گراف خطی P_n

۱ هر مسیر P_n از دو راس درجه ۱ و بقیه رئوس از درجه ۲ می‌باشند.

۲ طول بزرگترین مسیر P_n برابر است با : $n-1$

۳ بین هر دو راس متمایز از گراف P_n دقیقا یک مسیر وجود دارد.

۴ تعداد کل مسیرهای گراف P_n برابر است با: $\binom{n}{2}+n$

نکات مهم گراف C_n

۱ یک گراف ۲- منتظم از مرتبه n است.

۲ بین هر دو راس از گراف C_n دقیقا دو مسیر وجود دارد.

۳ گراف C_n دارای n مسیر به طول صفر (تعداد راس‌ها)، n مسیر به طول یک (تعداد یال‌ها)، n مسیر به طول ۲، n مسیر به طول ۳، و ..... و n مسیر به طول $n-1$ است پس تعداد کل مسیرها برابر است با : n^2.

تست ۳۰۴ اگر مکمل یک گراف C_n، خود یک گراف C_n باشد، آنگاه مکمل گراف P_n چند یال دارد؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

تست ۳۰۵ اگر G یک گراف ۴- منتظم از مرتبه ۷ باشد، گراف $\bar{G}$ حداکثر چند دور دارد؟

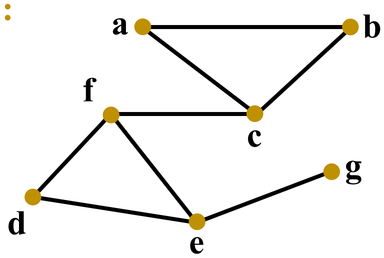
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

هم‌بندی و ناهم‌بندی گراف‌ها

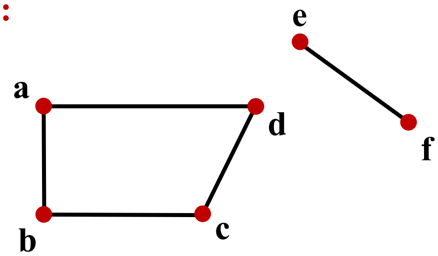
اگر هر کدام از راس‌های گراف را گرفته از روی صفحه کاغذ بلند کنیم، چنانچه تمام گراف به دنبال آن بلند شود، گراف را هم‌بند می‌نامند. گراف G را هم‌بند گوئیم هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت آن را ناهم‌بند گوئیم.

به‌عنوان مثال در شکل‌های زیر گراف H ناهم‌بند است زیرا بین دو رأس b و f هیچ مسیری وجود ندارد.

G :



H :

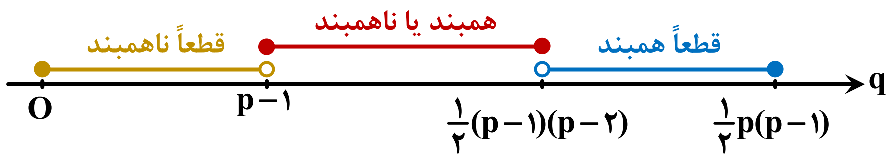


نکات هم‌بندی گراف‌ها:

(۱) اگر گرافی حداقل یک رأس پر داشته باشد، هم‌بند است.

(۲) در هر گراف از مرتبه p اگر $q<p-1$ باشد، قطعاً گراف ناهم‌بند است و اگر $q>\binom{p-1}{2}$ قطعاً گراف هم‌بند است. بدیهی است اگر $p-1\le q\le\binom{p-1}{2}$ باشد، در مورد هم‌بندی آن نمی‌توان نظر قطعی داد.

نمودار هم‌بندی یک گراف از مرتبه p برحسب تعداد یال‌ها:



(۳) حداکثر تعداد یال‌های یک گراف ناهم‌بند از مرتبه P برابر است با: $\binom{p-1}{2}$.

(۴) گراف هم‌بند یک بخشی است و گراف‌های ناهم‌بند حداقل دو بخشی هستند.

تست ۳۰۶ در گرافی از مرتبه p و اندازه q هرگاه $p^2=7+q^2$ باشد، آنگاه این گراف چگونه است؟

(۱) قطعاً هم‌بند (۲) قطعاً ناهم‌بند (۳) هم‌بند یا ناهم‌بند (۴) حتماً دور دارد

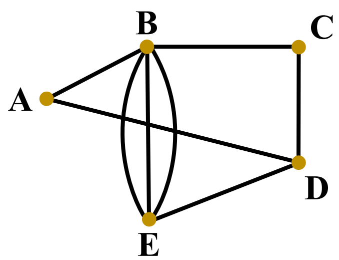
تست ۳۰۷ در گراف ناهم‌بند ساده G هرگاه $p=13$ و $q=65$ باشد، چند رأس با درجه ۱۱ وجود دارد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۹ (۴) ۱۰

تست ۳۰۸ در یک گراف هم‌بند که مجموع مرتبه و اندازه آن ۸ باشد، با افزودن چند یال، گراف کامل می‌شود؟ (سراسری ۹۱)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۳۰۹ شکل زیر ۵ منطقه A و B و C و D و E را با ۸ پل بهم ربط داده است. اگر مجاز باشیم از هر پل دقیقاً یک بار عبور کنیم، با شروع از منطقه B، منطقه پایان کدام است؟ (سراسری ۸۲)



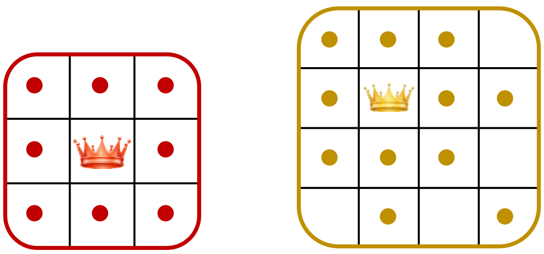
(۱) نشدنی
(۲) B
(۳) D
(۴) E

نکته به گراف هم‌بندی که درجه تمام رئوس آن زوج باشد گراف اویلری گفته می‌شود. در این نوع گراف‌ها اگر از هر راس شروع به حرکت کنیم و از هر یال دقیقا یک بار عبور کنیم در نهایت به همان راس ابتدایی می‌رسیم.

نکته به گراف هم‌بندی که فقط دو راس فرد دارد و بقیه رئوس آن زوج هستند، گراف نیمه اویلری می‌گویند. در این نوع گراف اگر از هر کدام از رئوس فرد شروع به حرکت کنیم و از هر یال دقیقا یک بار عبور کنیم به راس فرد دیگر می‌رسیم.

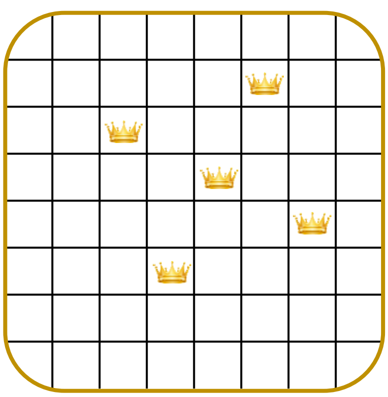
احاطه‌گری

مطابق شکل یک صفحه شطرنج ۳×۳ را در نظر بگیرید. اگر یک وزیر در وسط آن قرار دهیم، هر مهره دیگری در صفحه، در تیررس وزیر خواهد بود. اما اگر صفحه شطرنج ۴×۴ باشد، دیگر یک وزیر کافی نیست. و برای پوشش تمام خانه‌ها، حداقل دو وزیر نیاز است.



در قرن نوزدهم ثابت شد برای پوشش تمام نقاط یک صفحه ۸×۸، حداقل ۵ وزیر با چینش شکل مقابل نیاز است.

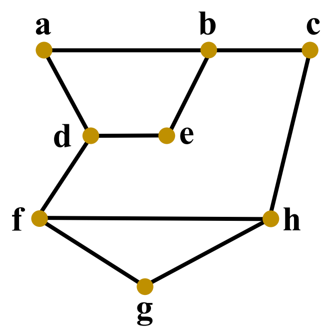
برای بخاطر سپردن چینش شکل مقابل به روش زیر عمل کنید:



ابتدا یکی از ۴ خانه میانی را به دلخواه انتخاب کرده و یک وزیر در آن قرار می‌دهیم.

موقعیت چهار وزیر دیگر، حاصل چهار حرکت L مانند (حرکت اسب) وزیر اول است که در هر چهار جهت اصلی انجام گرفته است.

طرح چنین مسأله‌هایی، بعدها منجر به پدید آمدن مفهوم جدیدی در گراف‌ها شد بنام احاطه‌گری.



گراف شکل مقابل نقشه بخشی از یک شهر است که تقاطع‌ها و خیابان‌های آن با تعدادی رأس و یال نمایش داده شده است.

برای راحتی شهروندان، قصد داریم در بعضی از تقاطع‌ها، عابربانک‌هایی مستقر کنیم تا هرشخص بتواند، حداکثر با پیمودن یک خیابان به عابربانک دسترسی داشته باشد.

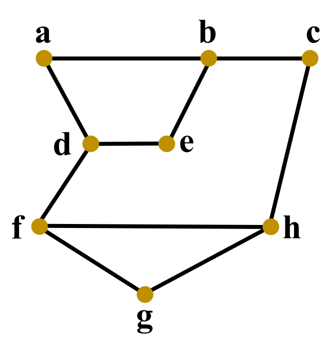
حال سئوالی که مطرح می‌شود این است که عابربانک‌ها در کدام تقاطع‌ها نصب شوند، تا بتوان با تعداد کمتری دستگاه، همه تقاطع‌های دیگر را نیز پوشش داد؟

تعریف زیرمجموعه D از $V(G)$ را یک مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم، هرگاه هر رأس G یا درون D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

جواب مسأله فوق یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف ایجاد شده می‌باشد. مثلاً مجموعه رئوس $\{b,d,h\}$ یک جواب است.

توجه به این نکته ضروری است که مجموعه احاطه‌گر یک گراف، یکتا نیست. مثلاً در گراف شکل فوق $\{d,c,g\}$ نیز یک مجموعه احاطه‌گر است.

تعریف در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌هایی که کمترین تعداد عضو را داشته باشند، مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌گوئیم.



تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌گوئیم و آن را با نماد $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

به‌عنوان مثال در گراف شکل فوق $\{b,f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است. و عدد احاطه‌گری آن برابر است با $\gamma = ۲$.

تذکر گاهی اوقات برای سهولت، به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از گراف G، یک γ - مجموعه می‌گوئیم.

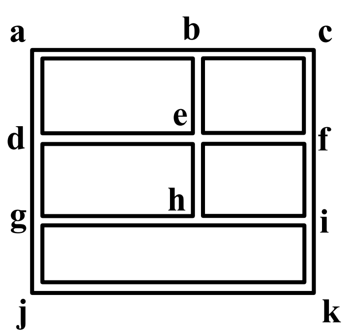
تعریف یک مجموعه احاطه‌گر که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نباشد را احاطه‌گر مینیمال می‌گوئیم.

به‌عنوان مثال در گراف شکل فوق، هر یک از دو مجموعه $\{b,d,g\}$ یا $\{a,e,h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.

نکته هر مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال را می‌توان با حذف برخی رئوس آن به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد.

تذکر هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم، مینیمال است ولی عکس آن صحیح نیست. یعنی هر احاطه‌گر مینیمالی لزوماً مینیمم نیست.

تست ۳۱۰ فرض کنید که شکل روبه‌رو نقشه قسمتی از یک شهر باشد. می‌خواهیم تعدادی خودپردازدر برخی از تقاطع‌های این خیابان‌ها نصب کنیم که هر فرد در هر تقاطعی که باشد یا به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به تقاطع مجاور به خودپرداز دسترسی پیداکند. اگر یکی از خودپردازها را در تقاطع e نصب کنیم، حداقل چند خودپرداز دیگر نیاز داریم؟



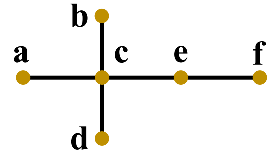
۱) ۲

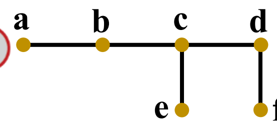
۲) ۳

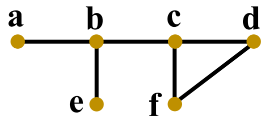
۳) ۴

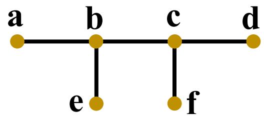
۴) ۵

تست ۳۱۱ در کدام‌یک از گراف‌های زیر فقط یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم با عدد احاطه‌گری ۲ وجود دارد؟

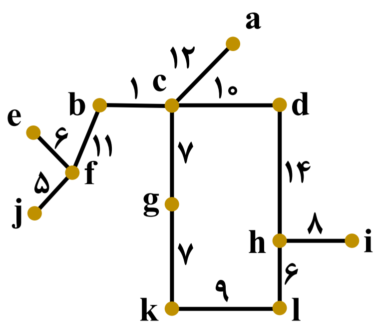
۱) 

۲) 

۳) 

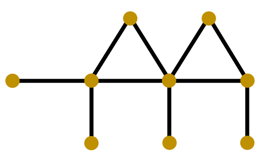
۴) 

تست ۳۱۲ در شکل مقابل، نقشه یک منطقه شامل چند روستا است و مسافت جاده‌های بین آن‌ها، مشخص شده است. می‌خواهیم چند درمانگاه در برخی از این روستاها احداث کنیم، به گونه‌ای که فاصله هر روستا تا نزدیک‌ترین درمانگاه، بیشتر از ۲۰ کیلومتر نباشد و تعداد درمانگاه‌ها حداقل ممکن باشد. حداقل چند درمانگاه نیاز داریم؟



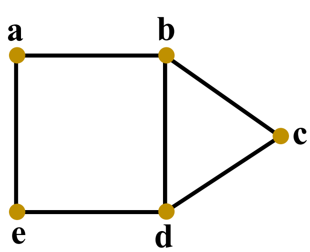
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

تست ۳۱۳ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال، برای گراف شکل مقابل، حداکثر چند عضو دارد؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

تست ۳۱۴ گراف شکل مقابل چند γ - مجموعه متمایز دارد؟



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

کران بالا و پایین در احاطه‌گری

آشنایی با نماد سقف و کف در اعداد حقیقی:

جزء صحیح (یا کفِ) عدد حقیقی x برابر است با:

$$[x]=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Z} \\ \text{بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از } x & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

همچنین سقف عدد حقیقی x برابر است با:

$$\lceil x\rceil=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Z} \\ \text{کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از } x & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

به‌عنوان مثال : $[۳/۵]=۳\ ,\ \lceil ۳/۵\rceil=۴\ ;\ [۳]=\lceil ۳\rceil=۳$

نکته سقف و کف هر عدد صحیح، با خود آن عدد برابر است. یعنی: $\lfloor x\rfloor=\lceil x\rceil=x\ ;\ x\in\mathbb{Z}$

تست ۳۱۵ اگر $\lfloor ۲a\rfloor=۳$ و $\lceil ۳a\rceil=۵$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $\frac{۴}{۳}<a\leq ۲$ ۲) $\frac{۳}{۲}<a\leq\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}\leq a\leq ۲$ ۴) $\frac{۳}{۲}\leq a\leq\frac{۵}{۳}$

نکته در هر گراف، هر رأس خودش و سایر رئوس مجاورش را احاطه می‌کند. پس اگر G یک گراف با ماکزیمم درجه Δ باشد، آنگاه هر رأس می‌تواند حداکثر $\Delta+۱$ رأس دیگر را احاطه کند.

نکته اگر G یک گراف از مرتبه p و ماکزیمم درجه Δ و D یک مجموعه احاطه‌گر برای آن باشد، آنگاه $|D| \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil$.

نتیجه با توجه به اینکه γ - مجموعه، خود یک مجموعه احاطه‌گر است، پس می‌توان گفت: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil$.

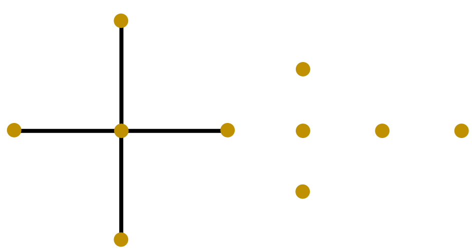
یعنی در گراف G عدد $\left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پایین برای $\gamma(G)$ است.

در واقع کران پایین احاطه‌گری در خوشبینانه‌ترین حالت ممکن ایجاد می‌شود:

تذکر اگر G یک گراف از مرتبه p و ماکزیمم درجه رأس Δ باشد، در این صورت برای پیدا کردن کران بالای γ، کافی است فرض کنیم $\deg(v) = \Delta$ و سایر رئوس رأس تنها باشند! (بدبینانه‌ترین شکل ممکن برای G)

به‌عنوان مثال کران بالا و پایین γ، در یک گراف از مرتبه ۱۰ و $\Delta = ۴$ برابر است با:

شکل بدبینانه G



$$\left\lceil \frac{۱۰}{۴+۱} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq ۱۰-۴ \rightarrow ۲ \leq \gamma(G) \leq ۶$$

تست ۳۱۶ در گراف G از مرتبه ۱۰ داریم $\delta = ۶$. کدام گزینه در مورد عدد احاطه‌گری گراف مکمل G، دقیق‌تر است؟

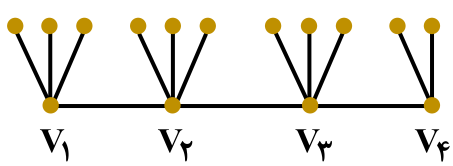
(۱) $\gamma(\bar{G}) \geq ۱$ (۲) $\gamma(\bar{G}) \geq ۲$ (۳) $\gamma(\bar{G}) \geq ۳$ (۴) $\gamma(\bar{G}) \geq ۴$

تست ۳۱۷ عدد احاطه‌گری گراف k- منتظم از مرتبه ۸ و اندازه ۲۴ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۱ یا ۲ (۴) نامشخص

نکته فرض کنیم k و p دو عدد طبیعی باشند به‌طوری که $k \leq \frac{p}{۲}$. در این صورت یک گراف هم‌بند از مرتبه p که عدد احاطه‌گری آن k باشد وجود دارد. برای رسم چنین گرافی کافی است مسیر شامل رئوس $v_۱, v_۲, \ldots, v_k$ را تشکیل داده و سایر رئوس را همانند دندانه‌های یک شانه به آن‌ها متصل کنید. (به هر یک از رئوس $v_۱, v_۲, \ldots, v_k$ حداقل باید یک رأس دیگر متصل باشد.)

به‌عنوان مثال برای رسم یک گراف هم‌بند از مرتبه ۱۵ و عدد احاطه‌گری ۴ داریم:



$$D = \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴\}$$

احاطه‌گری در گراف‌های خاص

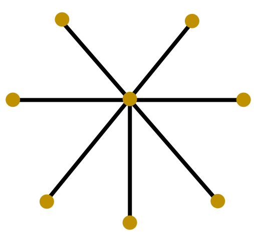
۱ اگر در گراف G با مرتبه p داشته باشیم $\gamma(G)=۱$ آنگاه G دارای حداقل یک رأس از درجه ماکزیمم $p-۱$ است و برعکس اگر گراف G از مرتبه p دارای حداقل یک رأس از مرتبه ماکزیمم $p-۱$ باشد آنگاه $\gamma(G)=۱$.

نتیجه **۱** عدد احاطه‌گری گراف کامل از مرتبه p برابر است با:

$$\gamma(K_p)=۱$$

۲ گراف کامل K_p، p تا γ - مجموعه دارد. (به تعداد رأس‌ها)

نکته در یک گراف از مرتبه p با عدد احاطه‌گری ۱، بیشترین تعداد یال مربوط به گراف K_p است و کمتـرین تعداد یال مربوط به گراف ستاره‌ای است. $(q=p-۱)$

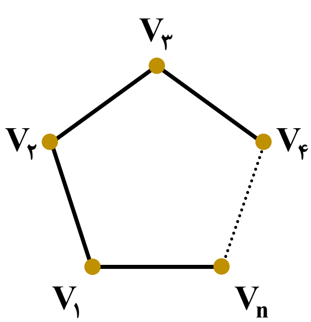


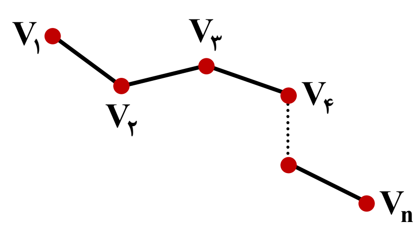
۲ عدد احاطه‌گری گراف C_n برابر است با

$$\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$$

۳ عدد احاطه‌گری گراف P_n برابر است با

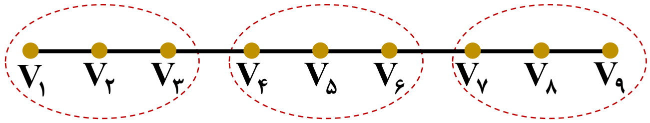
$$\gamma(P_n)=\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$$





نکته گراف‌های P_{3k} فقط یک γ – مجموعه دارند.

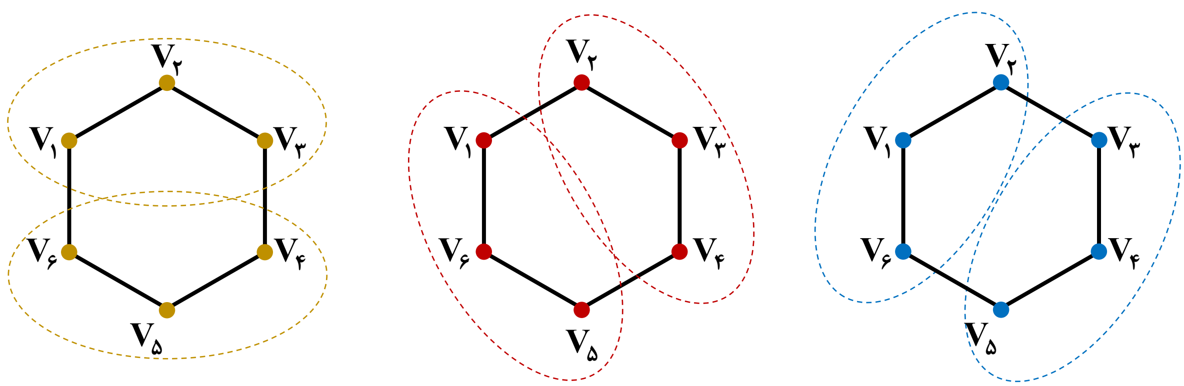
زیرا رئوس آن در k مجموعه ۳ عضوی دسته‌بندی می‌شوند، به‌طوری که رأس میانی هر دسته احاطه‌کننده دو رأس دیگر است.



نکته گراف‌های C_{3k} دقیقاً سه γ – مجموعه دارند.

$D=\{v_2,v_5,v_8\}$

زیرا به ۳ طریق متفاوت، رئوس آن در k مجموعه ۳ عضوی دسته‌بندی می‌شوند، به‌طوری که رأس میانی هر دسته احاطه کننده دو رأس دیگر است.



$D_1=\{v_2,v_5\}$, $D_2=\{v_3,v_6\}$, $D_3=\{v_1,v_4\}$

تذکر در مورد γ – مجموعه سایر P_n ها و C_n ها الگوی خاصی وجود ندارد.

تست ۳۱۸ در گراف C_n عدد احاطه‌گری برابر ۱۱ و در گراف P_{n+2} نیز عدد احاطه‌گری برابر ۱۱ است. n کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۰ یا ۳۱ ۴) ۳۱ یا ۳۲

تست ۳۱۹ در گراف ۲- منتظم و اندازه ۸، چند مقدار مختلف برای عدد احاطه‌گری ممکن است وجود داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۳۲۰ گراف G از مرتبه ۹ و $\gamma(G)=2$ مفروض است. حداکثر اندازه گراف کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

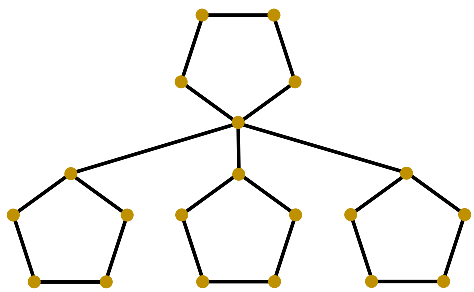
تست ۳۲۱ در گراف P_6 چند مجموعه احاطه‌گری ۴ عضوی وجود دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

تست ۳۲۲ تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر $C_۵$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۵

تست ۳۲۳ عدد احاطه‌گری گراف روبه‌رو کدام است؟



۱) ۶

۲) ۷

۳) ۸

۴) ۹

درس اول: مباحثی در ترکیبیات

در فصل سوم ریاضیات گسسته به بررسی مباحثی از ترکیبیات خواهیم پرداخت. قسمت‌هایی از این فصل به طور کامل در ابتدای سال در فصل آنالیز ترکیبی (جزوه شماره ۱) تدریس شده است. در این جا به ادامه مباحث خواهیم پرداخت و در ابتدا برای یادآوری چند مثال از جایگشت‌های با تکرار خواهیم دید.

تست ۳۲۴ سه کارت آبی مشابه و دو کارت قرمز مشابه را به چند طریق می‌توان در یک ردیف چید؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰

تست ۳۲۵ با ارقام ۰،۰،۰،۱،۱،۱،۱،۱ چند عدد ۸ رقمی می‌توان نوشت؟

(۱) ۳۵ (۲) ۴۵ (۳) ۵۶ (۴) ۷۰

حل مسائلی از افراز و انتخاب

تست ۳۲۶ مجموعه $A=\{a,b,c,d,e\}$ را به چند طریق می‌توان به دو کلاس دو عضوی و یک کلاس یک عضوی افراز کرد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰

تست ۳۲۷ به چند طریق می‌توانیم ۶ گردشگر را در سه اتاق دو نفره ۱۰۱،۱۰۲ و ۱۰۳ یک هتل جای داد؟

(۱) ۳۰ (۲) ۴۵ (۳) ۹۰ (۴) ۱۲۰

تست ۳۲۸ با ارقام ۱،۱،۱،۲،۲،۳ چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت؟

(۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۸

توزیع اشیای یکسان در جعبه‌های متمایز

تست ۳۲۹ به چند طریق می توان ۵ مهره کاملاً مشابه را در سه ظرف متمایز A، B و C قرار داد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۲۱ (۳) ۳۵ (۴) ۱۲۵

◆ **به یاد داشته باش:** از تعداد جعبه‌ها یکی کم کرده به توپ‌ها اضافه کرده همان تعداد را از توپ‌های حاصل شده انتخاب می‌کنیم.

مثال ۳۳۰ به چند طریق می توان ۱۰ مهره یکسان را در سه جعبه متمایز توزیع کرد هرگاه:

الف محدودیتی در کار نباشد.

ب در هر جعبه حداقل یک مهره قرار بگیرد؟

ج در جعبه اول حداقل یک مهره، در جعبه دوم حداقل دو مهره و در جعبه سوم حداقل سه مهره قرار بگیرد؟

مثال ۳۳۱ معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۱۰$:

الف چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

جواب این معادله دقیقا مانند توزیع اشیای یکسان در جعبه های یکسان می باشد پس:

الف $x_۱+x_۲+x_۳=۱۰ \Rightarrow \binom{۱۲}{۲}=۶۶$

ب چند جواب طبیعی دارد؟

ب $\dot{x}_۱+\dot{x}_۲+\dot{x}_۳=\overset{۷}{\cancel{۱۰}} \Rightarrow \binom{۹}{۲}=۳۶$

ج چند جواب با شرط $x_i \geq i$ دارد؟

ج $x_۱\geq۱, x_۲\geq۲, x_۳\geq۳ \Rightarrow \dot{x}_۱+\ddot{x}_۲+\dddot{x}_۳=\overset{۴}{\cancel{۱۰}} \Rightarrow \binom{۶}{۲}=۱۵$

تست ۳۳۲ چهار تاس مختلف را با هم پرتاب می‌کنیم. در چند حالت مجموع چهار عدد رو شده برابر ۱۰ است؟

(۱) ۸۰ (۲) ۸۴ (۳) ۲۸۲ (۴) ۲۸۶

تست ۳۳۳ معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ چند جواب صحیح نامنفی با توجه به شرایط $x_1=1$، $x_2 \geq 1$، $x_3>1$ دارد؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

تست ۳۳۴ به چند طریق می‌توان از میان ۵ نوع گل، دسته گلی با ۸ شاخه انتخاب کرد، به شرط آن که از هر گل دست‌کم یک شاخه انتخاب کرد؟

۱) ۳۵ ۲) ۷۰ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۴۰

تست ۳۳۵ روی صفحه $x+y+z=17$ چند نقطه وجود دارد که مؤلفه‌های مختصات نقاط، اعداد طبیعی فرد باشد؟

۱) ۵۵ ۲) ۲۸ ۳) ۴۵ ۴) ۳۶

جواب

$$x=2k+1\ ,\ y=2k'+1\ ,\ z=2k''+1$$

$$x+y+z=17 \Rightarrow (2k+1)+(2k'+1)+(2k''+1)=17$$

$$2k+2k'+2k''=14 \Rightarrow k+k'+k''=7 \Rightarrow \binom{9}{2}=36$$

تست ۳۳۶ معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=40$ در اعداد طبیعی و فرد بزرگتر از ۴، دارای چند جواب است؟

۱) $\binom{11}{3}$ ۲) $\binom{13}{3}$ ۳) $\binom{15}{3}$ ۴) $\binom{19}{3}$

تست ۳۳۷ به چند طریق می‌توان از بین ۵ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۵ مهره آبی یکسان، ۵ مهره انتخاب کرد؟

۱) $\binom{۱۵}{۵}$ ۲) ۲۱ ۳) ۱۲۵ ۴) ۸۱

تست ۳۳۸ در بسط $(a+b+c+d)^{۶}$ چند جمله وجود دارد؟

۱) ۸۴ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۶۵

- تمام جملات بسط فوق به صورت $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\omega}$ می باشد به طوریکه:

$$\alpha+\beta+\gamma+\omega=۶\Rightarrow\binom{۸}{۲}=۲۸$$

تست ۳۳۹ در پرتاب ۳ تاس با هم، در چند حالت ممکن است مجموع اعداد رو شده برابر ۱۴ باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۱ ۳) ۱۸ ۴) ۱۵

تست ۳۴۰ معادله $x_۱^{۴}+x_۲+x_۳+x_۴=۶$ وقتی $x_i\in\mathbb{Z}$ و $x_i\geq ۰$ باشد، چند جواب دارد؟ $(i\in\{۱,۲,۳,۴\})$

۱) $\binom{۹}{۶}$ ۲) $\binom{۷}{۵}+\binom{۸}{۶}$ ۳) $\binom{۸}{۵}+\binom{۹}{۶}$ ۴) $\binom{۹}{۵}+\binom{۱۰}{۶}$

جواب

$$\begin{cases} x_۱=۰\Rightarrow x_۲+x_۳+x_۴=۶\Rightarrow\binom{۸}{۲} \\ x_۱=۱\Rightarrow x_۲+x_۳+x_۴=۵\Rightarrow\binom{۷}{۲}\end{cases}\Rightarrow\binom{۸}{۲}+\binom{۷}{۲}=\binom{۸}{۶}+\binom{۷}{۵}$$

نکته

حل نامعادله و دستگاه معادلات چند متغیره

تست ۳۴۱ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله $x_۱+x_۲+x_۳\le ۱۱$ کدام است؟

۱) $\binom{۱۳}{۲}$ ۲) $\binom{۱۳}{۳}$ ۳) $\binom{۱۴}{۳}$ ۴) $\binom{۱۲}{۳}$

تست ۳۴۲ در چند عدد سه رقمی مجموع ارقام، حداکثر ۹ است؟

۱) ۱۸۵ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۶۵ ۴) ۱۸۰

تست ۳۴۳ معادله $x+y+z=۱۰$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرط $x+y\ge ۷$ دارد؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۳۸

تست ۳۴۴ تعداد جواب های صحیح و نامنفی دستگاه زیر چند تاست؟

۱) ۷۵
۲) ۴۹۵۰
۳) ۱۳۲۰
۴) ۶۰

جواب

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$$

معادلات سیاله چند متغیره با شرایط خاص

تست ۳۴۵ معادله $x_1 + x_2 = \frac{15}{x_3 + x_4 + x_5}$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱) ۴۰
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۳۲

تست ۳۴۶ معادله $x_1 + x_2 + \sqrt{x_3} + x_4 = 4$ چند جواب صحیح نامنفی با شرط $x_1 \geq 1$ دارد؟

معادلات سیاله چندمتغیره با شرط حداکثر

تست ۳۴۷ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ با شرایط $1 \leq x_1 \leq 5$ و $3 \leq x_2 \leq 6$ چندتاست؟

۱) ۲۰
۲) ۱۹
۳) ۲۱
۴) ۲۳

تست ۳۴۸ تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1+x_2+x_3=17$ تحت شرایط $0<x_1\le 4$، $2\le x_2<8$ و $3<x_3<9$ کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۴

مربع‌های لاتین

چهار مدرس قصد دارند در یکی از روزهای هفته و در چهار زنگ ۹–۷:۳۰، ۱۱–۹:۳۰، ۱۳–۱۱:۳۰ و ۱۵–۱۳:۳۰ در یکی از کلاس‌های A و B و C و D تدریس کنند، به‌طوری که هر مدرس دقیقاً در هر کلاس فقط یک‌بار تدریس کند.

شماره مدرسین را در جدول زیر به‌گونه‌ای وارد کنید تا شرایط خواسته شده محقق گردد.

	۹–۷:۳۰	۱۱–۹:۳۰	۱۳–۱۱:۳۰	۱۵–۱۳:۳۰
کلاس A				
کلاس B				
کلاس C				
کلاس D				

با کمی دقت در نحوه استقرار اعداد در جدول فوق، متوجه معانی خاصی برای آن‌ها خواهیم شد:

(۱) عدم وجود عدد تکراری در هر سطر به این معنی است که یک مدرس در هر کلاس فقط یک‌بار تدریس کرده است.

(۲) عدم وجود عدد تکراری در هر ستون به این معنی است که یک مدرس در هر زنگ فقط در یک کلاس حضور داشته است.

(۳) وجود هر ۴ عدد در هر سطر به این معنی است که هر مدرس در تمامی کلاس‌ها تدریس داشته‌اند.

(۴) وجود هر ۴ عدد در هر ستون به این معنی است که هر مدرس در تمامی زنگ‌ها تدریس داشته‌اند.

تعریف یک جدول مربعی $n \times n$ که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n پر شده باشد را مربع لاتین می‌گوئیم به‌طوری‌که در هیچ سطر یا ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد.

به‌عنوان مثال:

۵	۴	۳	۲	۱
۴	۳	۲	۱	۵
۳	۲	۱	۵	۴
۲	۱	۵	۴	۳
۱	۵	۴	۳	۲

۲	۳	۴	۱
۴	۲	۱	۳
۳	۱	۲	۴
۱	۴	۳	۲

نکته با توجه به این که در هر سطر هر عدد فقط یک‌بار تکرار شده است، بنابراین با جابه‌جا کردن دو ستون از یک مربع لاتین، مربع حاصل نیز لاتین خواهد بود. هم‌چنین با توجه به این که در هر ستون هر عدد فقط یک‌بار تکرار شده است، بنابراین با جابه‌جا کردن دو سطر از یک مربع لاتین، مربع حاصل نیز لاتین خواهد بود.

به‌عنوان مثال در مربع لاتین 4×4 شکل فوق با جابه‌جا کردن سطرهای ۱ و ۴ و هم‌چنین ستون‌های ۲ و ۳ خواهیم داشت:

۱	۴	۳	۲
۴	۲	۱	۳
۳	۱	۲	۴
۲	۳	۴	۱

۲	۴	۳	۱
۴	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۴
۱	۳	۴	۲

تست ۳۴۹ چند مربع لاتین 3×3 می توان نوشت که سط اول آن به ترتیب ۱و۲و۳ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

تست ۳۵۰ چند مربع لاتین ۳×۳ وجود دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۳۵۱ مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید. زوج مرتب (a,b) کدام است؟ (سراسری داخل ۱۴۰۰)

	a	۳		
	۳	۱	۴	
	۲	۵	۱	۳
	۱	۴	۲	
b				

(۱) (۵,۳)

(۲) (۱,۴)

(۳) (۲,۱)

(۴) (۴,۱)

مربع لاتین چرخشی

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

به مربع لاتین ۵×۵ شکل فوق دقت کنید. از چپ به راست در سطر اول بترتیب اعداد ۱ تا ۵ درج شده‌اند. عدد انتهایی سطر اول، اولین عدد تکرار شده در سطر دوم است. و سپس سایر اعداد بصورت دوری تکرار شده‌اند. با ادامه این روند برای سایر سطرها یک مربع لاتین ایجاد می‌شود که به آن مربع لاتین چرخشی می‌گوئیم.

تذکر دلیل این‌که مربع ایجاد شده در روش فوق یک مربع لاتین است، عبارتست از:

۱) با توجه به این که سطرهای ۲ تا ۵ همگی از روی سطر اول ساخته شده‌اند، پس در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.

۲) گردش یک خانه‌ای اعداد در سطرهای ۲ تا ۵ باعث می‌شود که در هیچ ستونی عدد تکراری به‌وجود نیاید.

نتیجه برای هر n طبیعی مربع لاتین $n\times n$ وجود دارد.

جایگشت در مربع لاتین

مربع لاتین ۴×۴ شکل زیر را درنظر بگیرید. مطابق شکل با اعمال یک جایگشت روی اعداد ۱ تا ۴، مربع جدیدی به‌دست می‌آید که خود یک مربع لاتین است.

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

۱ → ۳

۲ → ۲

۳ → ۴

۴ → ۱

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

سؤال چرا مربع بوجود آمده با جایگشت، یک مربع لاتین است؟

پاسخ فرض کنیم مربع جدید لاتین نباشد (فرض خلف) در این صورت سطر یا ستونی از مربع جدید وجود دارد که حاوی عضو تکراری است. این موضوع با توجه به جایگشت‌ها ایجاب میکند که سطر یا ستون متناظر مربع اول نیز دارای عضو تکراری باشد که با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

تست ۳۵۲ با اعمال جایگشت روی یک مربع لاتین مرتبه ۴، چند مربع لاتین دیگر به دست می آید؟

(۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

مربع‌های لاتین متعامد

تعریف دو مربع لاتین هم‌مرتبه A و B مفروضند. از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر این دو مربع، به‌طوری‌که رقم‌های سمت چپ متعلق به A و رقم‌های سمت راست متعلق به B باشند (و یا برعکس) مربع جدیدی بوجود می‌آید. گوئیم A و B متعامد هستند هرگاه هیچ‌یک از اعداد دو رقمی در خانه‌های مربع جدید تکراری نباشند.

به‌عنوان مثال:

A =

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

B =

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

⇒

۲۲	۳۳	۴۴	۱۱
۳۴	۲۱	۱۲	۴۳
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۱۳	۴۲	۳۱	۲۴

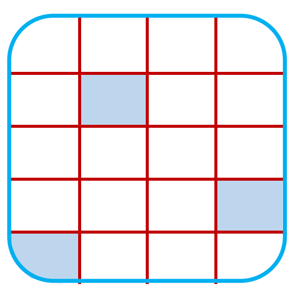
تذکر یک محک برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین بدین صورت است:

در یکی از دو مربع لاتین، دو یا چند درایه یکسان را نشان کنید. درایه‌های متناظر در مربع دیگر باید اعداد متفاوت داشته باشند، چرا که در غیر اینصورت اعداد دو رقمی ترکیبی در مربع جدید تکراری خواهند شد.

A =

	a		
			a
a			

B =



از این محک برای متعامد نبودن دو مربع لاتین نیز استفاده می‌شود. بدین صورت که کافی است دو درایه یکسان در یکی از دو مربع پیدا کنیم و نشان دهیم درایه‌های متناظر در مربع دیگر نیز با هم برابرند.

مثال ۳۵۳ متعامد بودن هر یک از موارد زیر را بررسی کنید. (تمرین کتاب)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

چند نکته مهم در خصوص مربع‌های لاتین متعامد

۱ برای اعداد $n = ۲,۶$ دو مربع لاتین متعامد $n \times n$ وجود ندارد.

به‌عنوان مثال مربع‌های لاتین مرتبه ۲ را در نظر بگیرید:

۲	۱
۱	۲

۱	۲
۲	۱

به وضوح مشاهده می‌شود که مربع‌های لاتین فوق متعامد نیستند.

برای سایر nهای طبیعی مربع‌های لاتین متعامد وجود دارد که نمونه ۳×۳ و ۴×۴ آن را کمی قبل‌تر دیدیم.

تذکر فقط یک مربع لاتین ۱×۱ وجود دارد. بنابراین هر دو مربع لاتین مرتبه ۱ متعامد می‌باشند!

زیرا به دلیل این‌که نمی‌توان دو درایه یکسان در یک مربع لاتین ۱×۱ پیدا کرد، بنابراین با انتفای مقدم نتیجه می‌شود که هردو مربع لاتین از مرتبه ۱ متعامد هستند.

چند نکته مهم در خصوص مربع‌های لاتین متعامد

۲ اگر A یک مربع لاتین باشد و A’ مربع لاتینی باشد که با یک جایگشت دلخواه روی درایه‌های A ساخته شده است، آن‌گاه A و A’ همواره غیرمتعامد هستند.

اثبات فرض کنیم در جایگشتی که روی مربع A انجام می‌شود، صرفنظر از سایر تغییرات، تمام درایه‌های ۱ به درایه a تبدیل شده باشند. در این صورت در مقابل تمام درایه‌های ۱ از مربع A، در درایه‌های متناظر از مربع A’ عدد a ظاهر می‌گردد.

بدیهی است که در مربع تلفیقی زوجه‌ای ۱a تکراری خواهند بود.

$$A=\begin{bmatrix} & \text{۱} & & \\ & & & \text{۱} \\ & & \text{۱} & \\ \text{۱} & & & \end{bmatrix}\quad A'=\begin{bmatrix} & a & & \\ & & & a \\ & & a & \\ a & & & \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} & \text{۱}a & & \\ & & & \text{۱}a \\ & & \text{۱}a & \\ \text{۱}a & & & \end{bmatrix}$$

۳ اگر A یک مربع لاتین باشد، و مربع لاتین A’ از جابه‌جایی سطرها یا ستون‌های A بدست آمده باشد، در این صورت دو مربع لاتین A و A’ لزوماً متعامد نیستند. (به بیانی دیگر A و A’ می‌توانند متعامد باشند یا نباشند.)

به‌عنوان مثال در مربع لاتین شکل زیر فرض کنیم مربع A_1 از جابه‌جایی سطرهای دوم و سوم A بوجود آمـده باشـد. هم‌چنین A_2 از جابه‌جایی سطرهای دوم و سوم و سپس جابه‌جایی ستون‌های اول و دوم به‌وجود آمده باشد.

A =

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

A_1 =

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

A_2 =

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

همان‌طورکه مشاهده میکنید A و A_1 متعامدند ولی A و A_2 متعامد نیستند.

۴ اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B' مربع لاتینی باشد که از اعمال یک جایگشت دلخواه روی B بوجـود آمده باشد، آن‌گاه A و B' نیز متعامدند.

اثبات برهان خلف. فرض کنیم A و B' متعامد نباشند. پس حداقل دو درایه یکسان مانند a در مربع A وجود دارد که درایه‌های متناظر آن‌ها در B' نیز با هم برابرند. (منظور درایه‌های b')

از طرفی چون مربع B' با اعمال یک جایگشت از روی مربع B بوجود آمده است، پس درایه‌های متناظر با درایه‌های b'، در مربع B نیز با هم برابرند. (منظور درایه‌های b) که این با متعامد بودن A و B در تناقض است.

A =

	a		
		a	

B =

	b		
		b	

B' =

	b'		
		b'	

۵ اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B' مربع لاتینی باشد که از جابجایی سطرها (یا سـتون‌های) B بوجـود آمده باشد، آن‌گاه A و B' لزوماً متعامد نیستند. (به بیانی دیگر A و B' می‌توانند متعامد باشند یا نباشند.)

به‌عنوان مثال دو مربع لاتین متعامد A و B را در نظر بگیرید. مربع لاتین 'B از تعویض سطرهای دوم و سوم B به‌وجود آمده است. همان‌طورکه مشاهده می‌کنید A و 'B متعامد نیستند.

A =

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

B =

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

B' =

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

تست ۳۵۴ کدام یک از مربع‌های زیر با مربع

۱	۲	a
۳	b	c
d	e	f

متعامد نیست؟

۱)

		۳
	۳	۱

۲)

		۳
	۲	۱

۳)

		۱
	۱	۲

۴)

		۲
	۲	۱

تست ۳۵۵ اگر A یک مربع لاتین ۶×۶ باشد، چند مربع لاتین مانند B می‌توان پیدا کرد که با A متعامد باشد؟

۱) صفر ۲) ۳۶۰ ۳) ۷۲۰ ۴) $(۶!)^۲$

تست ۳۵۶ تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

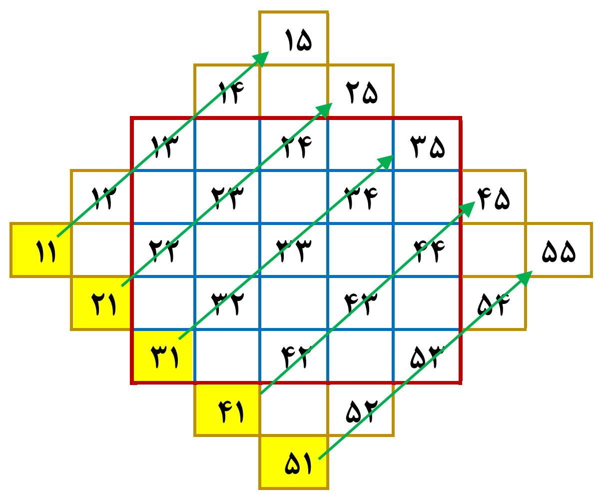
روش ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد:

برای ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۵ مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

(۱) یک مربع ۵×۵ رسم می‌کنیم و روی چهار طرف آن، به‌ترتیب ستون‌هایی از ۳ و ۱ (اعداد فرد کم‌تر از ۵) مربع واحد قرار می‌دهیم تا شکل حاصل به‌صورت یک لوزی درآید.

(۲) خانه‌های سایه خورده را به‌ترتیب با ۵ عدد ۱۱ و ۲۱ و ۳۱ و ۴۱ و ۵۱ پر می‌کنیم.

(۳) برای هریک از اعداد مرحله قبل (۱−۵) عدد متوالی بعد از آن‌ها را مطابق شکل در جهت فلش‌ها درج می‌کنیم.



(۴) هریک از درایه‌های بیرون مربع اصلی، برای آن‌که بتوانند وارد مربع اصلی شوند، فقط یک مسیر حرکت مستقیم به چپ، راست، بالا و یا پایین وجود دارند. هریک از آن‌ها را در تنها مسیر حرکت‌شان به داخل مربع اصلی، ۵ خانه انتقال می‌دهیم.

۳۵	۵۲	۲۴	۴۱	۱۳
۱۲	۳۴	۵۱	۲۳	۴۵
۴۴	۱۱	۳۳	۵۵	۲۲
۲۱	۴۳	۱۵	۳۲	۵۴
۵۳	۲۵	۴۲	۱۴	۳۱

♦ روش ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد:

برای ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۵ مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

۵ مربع اصلی را که تمام درایه‌های آن یک عدد دو رقمی است به دو مربع تفکیک کنید که درایه‌های یکی شامل ارقام دهگان و درایه‌های دیگری شامل ارقام یکان باشد.

۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

تذکر ساخت مربع‌های لاتین متعامد از مرتبه یک عدد زوج، خارج از برنامه کتاب درسی است.

♦ کاربرد مربع‌های لاتین

اگر در سؤال سه پارامتر یا مشخصه داده شود یک مربع لاتین برای برنامه‌ریزی کافی ست، اما اگر چهار پارامتر یا مشخصه داده شود نیاز به دو مربع لاتین متعامد داریم.

مثال قرار است ۳ کارگر با ۳ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۳ نوع الیاف و در ۳ روز هفته کار کنند به‌گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به‌کار گرفته شده باشد. برای این مسأله برنامه‌ریزی کنید.

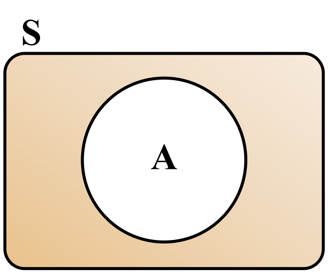
اصل شمول و عدم شمول

اصل شمول و عدم شمول یکی دیگر از ابزارهای شمارش است. در بخش آنالیز ترکیبی با استفاده از اصول ضرب و جمع به حل مسائل می پرداختیم، اما در این بخش با استفاده از اصل تفریق یا عدم شمول به حل مسائل خواهیم پرداخت.

فرض کنیم S شیء داریم که بعضی از این اشیاء ویژگی A را دارند و بعضی فاقد این ویژگی هستند، تعداد اشیایی که دارای ویژگی A هستند را با $|A|$ و تعداد اشیایی که فاقد آن هستند را با $|\overline{A}|$ نشان می دهیم. حال ممکن است این اشیاء ویژگی های دیگری نظیر B را نیز داشته باشند و بعضی فاقد این ویژگی باشند، که تعداد این اشیاء را با $|B|$ و $|\overline{B}|$ و ... نشان می دهیم. در این صورت هر یک از سوالات زیر در این زمینه ممکن است مطرح گردد:

الف) اصل شمول و عدم شمول برای یک مجموعه:

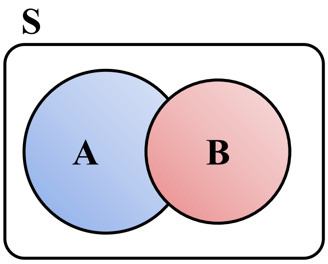
سؤال ۳۵۷ چه تعداد از این S شیء، ویژگی A را ندارند؟



$$|\overline{A}| = |S| - |A|$$

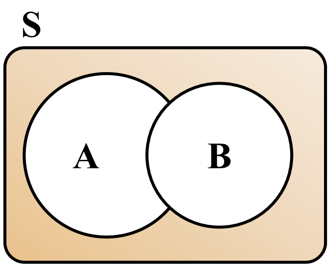
ب) اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه:

سؤال ۳۵۸ چه تعداد از این S شیء، حداقل یکی از این دو ویژگی را دارند؟



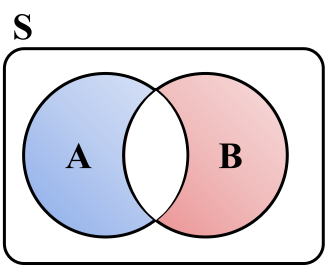
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

سؤال ۳۵۹ چه تعداد از این S شیء، هیچ یک از دو ویژگی را ندارند؟



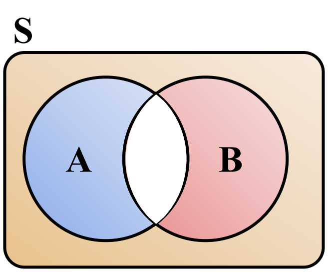
$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

سؤال ۳۶۰ چه تعداد از این S شیء، دقیقاً یکی از این دو ویژگی را دارند؟



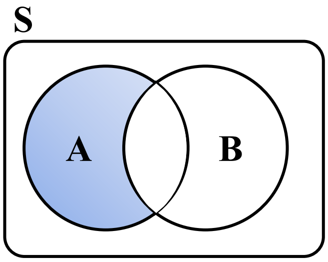
$$|A \Delta B| = |A| + |B| - ۲|A \cap B|$$

سؤال ۳۶۱ چندتا از این S شیء، حداکثر یکی از این دو ویژگی را دارند؟



$$|\bar{A} \cup \bar{B}| = |\overline{A \cap B}| = |S| - |A \cap B|$$

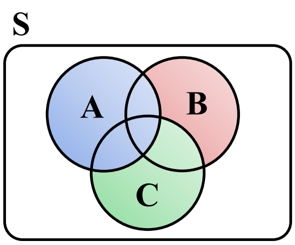
سؤال ۳۶۲ چند تا از این S شیء، ویژگی A را دارند و ویژگی B را ندارند؟



$$|A-B|=|A|-|A\cap B|$$

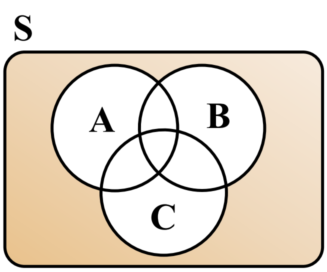
ج) اصل شمول و عدم شمول برای ۳ مجموعه:

سؤال ۳۶۳ چند تا از این S شیء، حداقل یکی از این سه ویژگی را دارند؟



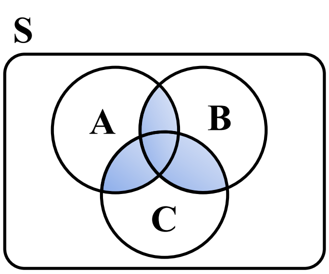
$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

سؤال ۳۶۴ چه تعداد از این S شیء، هیچ یک از این سه ویژگی را ندارند؟



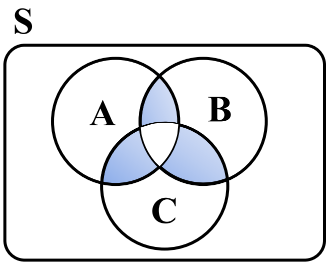
$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C$$

سؤال ۳۶۵ چه تعداد از این S شیء، حداقل ۲ ویژگی از این ۳ ویژگی را دارند؟



$$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-۲|A\cap B\cap C|$$

سؤال ۳۶۶ چه تعداد از این S شیء، دقیقاً دو ویژگی از ۳ ویژگی را دارند؟



$$|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|-۳|A\cap B\cap C|$$

یادآوری چند نکته ساده و کاربردی

۱ از هر ۳ عدد متوالی یکی بر ۳ بخش‌پذیر است. بنابراین تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا m که بر ۳ بخش‌پذیرند برابر است با $\left[\frac{m}{۳}\right]$. در حالت کلی از هر k عدد متوالی یکی بر k بخش‌پذیر است بنابراین تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا m که بر k بخش‌پذیر می‌باشند برابر است با $\left[\frac{m}{k}\right]$.

۲ اگر عددی بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر باشد، آنگاه آن عدد بر $۱۲=[۴,۶]$ بخش‌پذیر است. بنابراین می‌توان گفت تعداد اعدادی طبیعی کوچکتر و مساوی ۱۵۰ که بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر باشند، برابر است با: $۱۲=\left[\frac{۱۵۰}{۱۲}\right]$.

در حالت کلی اگر عددی بر اعداد صحیح a و b بخش‌پذیر باشد، بر ک.م.م آنها یعنی بر $[a,b]$ بخش‌پذیر است.

۳ تعداد اعداد صحیح بین دو عدد صحیح m و n (شامل هر دو عدد) برابر است با: $n-m+۱$.

تست ۳۶۷ چند عدد از مجموعه $\{۶۱,۶۲,...,۱۸۰\}$ وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشد، ولی بر ۱۰ بخش‌پذیر نباشد؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴) ۳۶

تست ۳۶۸ با ارقام ۳،۳،۲،۲،۲،۱،۱ چند عد ۶ رقمی می‌توان نوشت که با ۱ شروع شود یا به ۲ ختم شود؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

تست ۳۶۹ در چند جایگشت از حروف کلمه gosaste یا فقط دو حرف s کنار هم هستند یا فقط دو حرف e و t کنار هم هستند؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۸۴۰ ۳) ۱۲۰۰ ۴) ۹۶۰

تست ۳۷۰ چند عضو از مجموعه $A=\{n\in\mathbb{N}:n\leq ۷۷۰\}$ نه بر ۵ بخش پذیرند و نه بر ۷؟

۱) ۲۲۸ ۲) ۳۸۸ ۳) ۲۴۲ ۴) ۵۲۸

تست ۳۷۱ چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۱و۲و۳و۴ وجود دارد که در آنها هر یک از ارقام ۲ و ۴ حداقل یکبار ظاهر شده باشند؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۰۴ ۳) ۱۱۶ ۴) ۱۲۰

تست ۳۷۲ با حروف کلمه (بادبان) چند کلمه شش حرفی می‌توان ساخت که در آن هیچ دو حرف یکسانی کنار هم قرار نگرفته باشند؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۶۰ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۰

تست ۳۷۳ چند عدد طبیعی کوچکتر از ۳۰۰ وجود دارد که دست کم به یکی از عددهای ۲ یا ۳ یا ۵ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۲۲۵ ۴) ۲۳۰

تست ۳۷۴ چند عدد طبیعی $1 \le n \le 500$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشد؟

۱) ۷۸ ۲) ۱۳۴ ۳) ۲۴۳ ۴) ۳۶۶

تست ۳۷۵ چند گراف با مجموعه رئوس $V(G)=\{a,b,c,d\}$ می‌توان رسم کرد، به شرط آنکه هیچ کدام از راس‌های a، b و c تنها نباشند؟ (مشابه تمرین کتاب)

۱) ۳۵ ۲) ۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۵۰

تست ۳۷۶ در یک مدرسه با ۱۵۰ دانش آموز، ۲۵ نفر مجله های A و B و ۳۵ نفر مجله های B و C و ۶۵ نفر مجله های A و C و ۱۵ نفر هر سه مجله را می خوانند. چند نفر دقیقاً دو مجله می خوانند؟

۱) ۸۵ ۲) ۹۰ ۳) ۷۰ ۴) ۸۰

پاسخ

$|s|=۱۵۰ \quad |A\cap B|=۲۵ \quad |B\cap C|=۳۵ \quad |A\cap C|=۶۵ \quad |A\cap B\cap C|=۱۵$

$|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|-۳|A\cap B\cap C|=۲۵+۳۵+۶۵-۳\times۱۵=۸۰$

تعداد توابع

مبحث تابع را در سال‌های قبل آموختیم و می‌دانید که f زمانی یک تابع است که هیچ دو زوج مرتبی با مولفه اول یکسان عضو آن نباشند. (برای مثال یک تابع نمی‌تواند دو زوج مرتب (۳,۵) و (۳,۷) را هم‌زمان داشته باشد). در این بحث به روش شمارش تعداد توابع می‌پردازیم.

تعداد کل توابع

تست ۳۷۷ از مجموعه $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ به مجموعه $B=\{b_۱,b_۲,b_۳\}$ کلاً چند تابع یا نگاشت می توان تعریف کرد؟

۱) ۲۷ ۲) ۸۱ ۳) ۶۴ ۴) ۲۴

پاسخ اگر تعداد کل توابع از مجموعه A به مجموعه B را با S نمایش دهیم:

$$f=\{(a_۱,\ ),(a_۲,\ ),(a_۳,\ ),(a_۴,\ )\}$$

$$f(a_۱)=b_۱ \text{ or } b_۲ \text{ or } b_۳$$
$$f(a_۲)=b_۱ \text{ or } b_۲ \text{ or } b_۳$$
$$f(a_۳)=b_۱ \text{ or } b_۲ \text{ or } b_۳$$
$$f(a_۴)=b_۱ \text{ or } b_۲ \text{ or } b_۳$$

$$|S|=۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$$

تست ۳۷۸ تعداد کل توابعی که از $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ در مجموعه $B=\{a,b,c\}$ می توان تعریف کرد که شامل زوج مرتب $(۲,b)$ باشند چندتاست؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۶

$f(۱)=a,b,c\Rightarrow ۳$

$f(۲)=b\Rightarrow ۱$

$f(۳)=a,b,c\Rightarrow ۳$

$f(۴)=a,b,c\Rightarrow ۳$

$\boxed{۳\times۱\times۳\times۳=۲۷}$

تست ۳۷۹ از مجموعه $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ به مجموعه $B=\{b_۱,b_۲,b_۳,b_۴,b_۵\}$ چند تابع می‌توان نوشت که $(a_۱,b_۱)$ را <u>داشته</u> باشد، اما $(a_۲,b_۲)$ را <u>نداشته</u> باشد؟

۱) ۲۵ ۲) ۷۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۸۰

تعداد توابع یک به یک

تابع f را یک‌به‌یک می‌گویند، هرگاه هیچ کدام از مولفه‌های دوم آن نیز یکسان نباشند.

تست ۳۸۰ از یک مجموعه ۳ عضوی در یک مجموعه ۵ عضوی چند تابع یک به یک وجود دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۶۰ ۳) ۶ ۴) ۲۴۳

$f(a)\to ۵$

$f(b)\to ۴$

$f(c)\to ۳$

$\boxed{۵\times۴\times۳=۶۰}$

تست ۳۸۱ از مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ به مجموعه $B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند تابع یک به یک می توان نوشت که شامل زوج مرتب $(a,۱)$ باشد؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

$f(a)=۱\to \boxed{۱}$

$f(b)\to\to \boxed{۵}$

$f(c)\to\to \boxed{۴}$

$f(d)\to\to \boxed{۳}$

$\boxed{۱\times۵\times۴\times۳=۶۰}$

تعداد توابع پوشا

یک تابع را پوشا می‌نامیم هرگاه هم دامنه آن با برد آن برابر باشد. محاسبه تعداد توابع پوشا جزو مواردی است که مستقیما آن را محاسبه نمی‌کنیم، بلکه تعداد توابع غیر پوشا را به دست آورده سپس از کل توابع کم می‌کنیم.

تست ۳۸۲ چند تابع پوشا از مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به مجموعه $B=\{۱,۲\}$ وجود دارد؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۳ ۳) ۳۱ ۴) ۳۰

تست ۳۸۳ از مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به مجموعه $B=\{a,b,c\}$ چند تابع پوشا وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

نکته

۱) اگر تعداد اعضای مجموعه A کمتر از تعداد اعضای مجموعه B باشد از A به B هیچ تابع پوشایی وجود ندارد.

۲) اگر تعداد اعضای مجموعه A بیشتر از B باشد از A به B هیچ تابع یک‌به‌یک ای وجود ندارد.

۳) با توجه به موارد بالا تابع f از A به B زمانی می‌تواند هم پوشا باشد و هم یک‌به‌یک که $|A|=|B|$ باشد. یعنی هر دو مجموعه A و B دارای تعداد اعضای برابر باشند و در این حالت تعداد توابع پوشا با تعداد توابع یک‌به‌یک برابر است.

تست ۳۸۴ از مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به مجموعه $B=\{۳,۴,۵,۶\}$ چند تابع می‌توان نوشت که نه پوشا باشد و نه یک‌به یک؟

۱) ۲۴　　۲) ۴۰　　۳) ۱۰۴　　۴) ۲۳۲

توزیع اشیای متمایز در جعبه‌های متمایز

۱) تعداد توابع از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه k عضوی، دقیقاً برابر است با:

تعداد راه های توزیع n مهره متمایز در k جعبه متمایز

۲) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه k عضوی $(k \geq n)$، دقیقاً برابر است با:

تعداد راه های توزیع n مهره متمایز در k جعبه متمایز که در هر جعبه حداکثر یک مهره قرار بگیرد.

۳) تعداد توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه k عضوی $(k \leq n)$، دقیقاً برابر است با:

تعداد راه های توزیع n مهره متمایز در k جعبه متمایز که در هر جعبه حداقل یک مهره قرار بگیرد.

۴) تعداد توابع غیر پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه k عضوی، دقیقاً برابر است با:

تعداد راه های توزیع n مهره متمایز در k جعبه متمایز که حداقل یکی از جعبه ها خالی بماند.

تست ۳۸۵ به چند طریق می توان ۳ مهره متمایز را در ۵ ظرف متمایز قرار داد به شرط آنکه در هر ظرف حداکثر یک مهره قرار بگیرد؟

(۱) ۱۵ (۲) ۶۰ (۳) ۶ (۴) ۲۴۳

پاسخ کافی است تعداد تعداد یک‌به‌یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۵ عضوی را به دست آوریم:

$f(a) \to ۵$

$f(b) \to ۴$ $\boxed{۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰}$

$f(c) \to ۳$

تست ۳۸۶ به چند صورت می‌توان ۶ کتاب مختلف را به ۳ نفر برای بررسی بدهیم، به طوری که هر کدام، حداقل یک کتاب برای بررسی داشته باشند؟

(۱) ۱۰ (۲) ۲۸ (۳) ۵۴۰ (۴) ۵۳۴

اصل لانه کبوتری

اگر m کبوتر بخواهند درون n لانه قرار بگیرند و $m > n$ (یعنی تعداد لانه‌ها کم‌تر از تعداد کبوترها باشد)، لانه‌ای هست (تاکید می‌شود لانه‌ای هست، یعنی دست کم (حداقل) یک لانه هست ولی معلوم نیست کدام لانه!!!) که دست کم دو کبوتر (یعنی بیش‌تر از یک کبوتر) در آن قرار می‌گیرد.

مثلا فرض کنید می‌خواهیم ۵ کبوتر را در ۴ لانه کبوتر قرار دهیم. طبق اصل لانه کبوتری اگر ۵ کبوتر بخواهند در ۴ لانه کبوتر قرار بگیرند در این صورت لانه‌ای وجود خواهد داشت که در آن حداقل ۲ کبوتر قرار می‌گیرد. حال می‌خواهیم چند حالت مختلف از چیدمان این ۵ کبوتر در این ۴ لانه راببینیم. (به یاد داشته باشید اهمیت اصل لانه کبوتری در آن است که در تمام حالات چیدمان صدق می‌کند).

	لانه ۱	لانه ۲	لانه ۳	لانه ۴
چیدمان۱				
چیدمان ۲				
چیدمان۳				
چیدمان ۴				
چیدمان۵				

برای فهم کامل مسئله لانه کبوتری به کلمه حداقل دقت کنید. حداقل به معنای کمترین است، پس وقتی می‌گوییم حداقل ۲ کبوتر یعنی ۲ تا یا بیشتر. در حالی که وقتی به کبوترهای برخی از حالات چیدمان دقت می‌کنیم حتی لانه بدون کبوتر هم در یک حالت چیدمان وجود دارد، مگر معنی کلمه حداقل کمترین نیست؟ پس چرا به جای اینکه مثلا در ردیف دوم بگوییم حداقل صفر می‌گوییم حداقل ۲ ؟!!! برای فهم مطلب در اصل لانه کبوتری شما باید جواب این سوال را بدانید.

سؤال آیا کلمه حداقل دو، تعداد کبوترها را در لانه‌های کنار هم در یک وضعیت چیدمان مقایسه می‌کند؟ خیر

حداقل ۲ مقایسه تعداد کبوترها در لانه‌ای خاص در وضعیت‌های مختلف چیدمان است. این جمله تمام مفهوم اصل لانه کبوتری است. به عبارت دیگر اگر ۵ کبوتر در ۴ لانه کبوتر به هر روش چیدمانی قرار بگیرند، در تمام حالت‌ها یک لانه می‌درخشد! و در این لانه‌های مشخص شده حداقل ۲ کبوتر قرار می‌گیرد (بعضی اوقات ۲ کبوتر و گاهی اوقات بیش از ۲ کبوتر)

در ادامه تعداد کبوترها را زیاد می‌کنیم و بررسی می‌کنیم آیا کلمه حداقل ۲ تغییر خواهد کرد؟

تست ۳۸۷ در یک کلاس ۱۳ دانش‌آموز حضور دارند، کدام گزینه در مورد آن‌ها همواره صحیح است؟

(۱) دقیقاً دو نفر در یک ماه از سال متولد شده‌اند.

(۲) حداقل دو نفر متولد ماه مهر هستند.

(۳) دست کم دو نفر در یکی از ماه‌های سال به دنیا آمده‌اند.

(۴) حداکثر سه نفر در یک ماه از سال متولد شده‌اند.

یادآوری سقف یک عدد

سقف عدد x را با نماد $\lceil x \rceil$ نشان داده و عبارت است از اولین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی عدد x،

به عنوان مثال داریم:

$$\lceil ۱/۵ \rceil = ۲ \quad \lceil ۲/۱ \rceil = ۳ \quad \lceil ۳ \rceil = ۳$$

در حالت کلی:

اگر m کبوتر بخواهند در n لانه کبوتر قرار بگیرند $(m > n)$ در این صورت لانه‌ای وجود دارد (یعنی حداقل یک لانه وجود دارد ولی نمی‌دانیم کدام لانه) که در آن حداقل $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ کبوتر قرار می‌گیرد.

توجه در مسائل کلی اصل لانه کبوتری سه پارامتر m (کبوتر)، n (لانه) و $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ وجود دارد که معمولا دوتای آنها داده شده (یا اطلاعاتی داده می‌شود که دوتای آنها قابل محاسبه باشد) و سومی از ما خواسته می‌شود. این کار سه فرم سوال ایجاد می‌کند که به آنها می‌پردازیم:

	$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$	n (لانه)	m (کبوتر)	
در این حالت حداقل کبوتر همان لانه خاص را می‌پرسند!	?	✓	✓	فرم اول
در این حالت معمولا حداقل کبوترها خواسته می‌شود!	✓	✓	?	فرم دوم
در این حالت معمولا حداکثر لانه‌ها خواسته می‌شود!	✓	?	✓	فرم سوم

سوالات فرم اول

تست ۳۸۸ در یک مدرسه ۲۵۰ نفری، حداقل چند نفر در روز چهارشنبه متولد شده‌اند؟

(۱) صفر (۲) ۳۶ (۳) ۳۵ (۴) ۷

نکته

تست ۳۸۹ از بین ۱۴۳ عدد حداقل چند عدد دارای رقم سمت راست یکسان هستند؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

تست ۳۹۰ اگر ۲۰ عدد طبیعی مختلف را بر عدد ۷ تقسیم کنیم، حداقل چند عدد دارای باقیمانده یکسان هستند؟

(۱) ۸ (۲) ۳ (۳) ۳ (۴) ۲

تست ۳۹۱ از میان ۳۷ عدد طبیعی دلخواه، دست کم چند تای آنها در تقسیم بر ۷، باقیمانده فرد دارند؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۱۵ (۴) صفر

تست ۳۹۲ یال‌های گرافی از مرتبه ۱۰ و اندازه ۱۳ را با سه رنگ آبی، قرمز و سیاه، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. دست کم چند یال رنگ یکسانی دارند؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

سوالات فرم دوم

تست ۳۹۳ حداقل نفرات یک کلاس چند نفر باشد، به طوریکه حداقل ۳ نفر در یکی از ماه های سال متولد شده باشند؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۵ ۳) ۲۸ ۴) ۱۳

تست ۳۹۴ کم‌ترین تعداد افرادی که حداقل سه نفر از آن‌ها در یک ماه از سال و در یک روز از هفته متولد شده‌اند، کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۳ ۳) ۸۴ ۴) ۸۵

تست ۳۹۵ حداقل چند عدد طبیعی انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم ۲ عدد از آن‌ها هم در تقسیم بر ۷ و هم در تقسیم بر ۵ باقیمانده یکسان داشته باشند؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

۱) ۱۳ ۲) ۳۵ ۳) ۳۶ ۴) ۷۰

تست ۳۹۶ در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی قرمز، ۸ مهره ی آبی و ۱۰ مهره‌ی سفید موجود است، دست کم چند مهره از این کیسه باید انتخاب شود تا مطمئن شویم که حداقل ۵ مهره همرنگ است؟

۱) ۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۱

توجه

تست ۳۹۷ کیسه‌ای ۵ مهره‌ی قرمز، ۸ مهره ی آبی،۱۱ مهره زرد و ۱۰ مهره‌ی سفید موجود است، حداقل چند مهـره از ظرف خارج کنیم تا مطمئن شویم ۳ رنگ مختلف خارج شده است؟

۱) ۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۲۲

سوالات فرم سوم

تست ۳۹۸ ۶۵ کبوتر حداکثر در چند لانه می‌توانند قرار بگیرند، تا به یقین حداقل در یک لانه بـیش از دو کبـوتر موجود باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۱

تست ۳۹۹ ۷۵ گلدان را حداکثر در چند ردیف بچینیم تا مطمئن شویم، ردیفی هست که در آن حـداقل ۴ گلـدان قرار گرفته است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

لانه کبوتری و سوالات مربوط به مجموعه‌ها

تست ۴۰۰ هر زیر مجموعه n عضوی از مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴,...,۲۳\}$، به طور یقین حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو، برابر ۲۴ است. حداقل n کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

تست ۴۰۱ یک زیر مجموعه‌ی x عضوی از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,...,۳۶\}$ انتخاب می‌کنیم. برای این که مطمئن شویم در بین آن‌ها حداقل دو عدد وجود دارد که نسبت به هم اولند، حداقل x کدام عدد باید باشد؟

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

تست ۴۰۲ حداقل چند عضو از مجموعه $\{۱,۲,۳,۴,...,۳۰\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد آن‌ها، مقسوم علیه مشترک غیر از یک دارند؟ (سراسری ۹۳)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

لانه کبوتری و مسائل مربوط به شکل‌ها

در این قسمت قبل از هر چیز باید چند مطلب را بدانیم:

۱ دراین قسمت منظور از تعداد نقاط (همان تعداد کبوترها) و منظور از تعداد بخش‌های شکل (همان تعداد لانه‌ها می‌باشد).

۲ تعداد نقاط دست کم یکی بیشتر از تعداد بخش‌های شکل است (در اکثر سوالات دقیقا یکی بیشتر)

۳ اگر دو نقطه بخواهند بیشترین فاصله ممکن را از یکدیگر داشته باشند:

الف درون یک مربع باید دو سر قطر قرار بگیرند:

ب درون یک مستطیل باید دو سر قطر قرار بگیرند:

ج درون مثلث متساوی‌الاضلاع باید دو سر یک ضلع قرار بگیرند:

د درون ربع دایره باید دو سر دو شعاع عمود بر هم قرار بگیرند:

لانه کبوتری و مسائل مربوط به شکل‌ها

۴ شکل‌هایی که دارای ضلع هستند معمولا با نسبت ضلع به مساحت تقسیم می شوند، مثلا اگر مربعی بخواهد به ۹ قسمت تقسیم شود ضلع آن سه قسمت می‌شود و ....

تست ۴۰۳ حداقل چند نقطه در داخل یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد قرار دهیم، تا مطمئن شویم که حداقل ۲ نقطه وجود دارند که فاصله‌ی بین آن‌ها از $\frac{۱}{۳}$ کم‌تر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۴ ۴) ۷

تست ۴۰۴ درون یک مستطیل ۱۸×۹، حداقل چند نقطه اختیار شود تا مطمئن باشیم لااقل فاصله ۲ نقطه از این نقاط انتخابی، کمتر از $۳\sqrt{۲}$ باشد؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

تست ۴۰۵ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۱۶×۱۲، وجود دارند. می توان ثابت کرد حداقل دو نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کم تر از .... است.

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$