نام و نام خانوادگی :

نام درس : ریاضی (۲)

پایه تحصیلی : دوازدهم تجربی

نام دبیر : سیّد علی موسوی

عنوان آزمون :فصل ۶ - هندسه

۱ در یک بیضی فاصلهٔ یک کانون از دورترین نقاط بیضی سه برابر فاصلهٔ همان کانون از نزدیکترین نقاط آن بیضی است، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲ بیضی با دو سر قطر بزرگتر $A'(-۲ , ۱)$ ، $A(۶ , ۱)$ و خروج از مرکز $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ بر کدام خط مماس است؟

۱) $y = ۲$ ۲) $y = ۳$ ۳) $y = ۲\sqrt{۳}$ ۴) $y = ۳\sqrt{۲}$

۳ مختصات کانون F یک بیضی با عرض مثبت که بر چهار خط $x = -۱ , x = ۵ , y = -۴ , y = ۶$ مماس باشد، کدام است؟

۱) $(۲ , ۵)$ ۲) $(۲ , ۳)$ ۳) $(۱ , ۵)$ ۴) $(۱ , ۳)$

۴ در یک بیضی به کانون‌های $(۱- , ۲)$ و $(۷ , ۲)$، اندازه‌ی قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

۵ در داخل یک مکعب به طول یال a مخروطی با بیشترین حجم ممکن قرار می‌دهیم. حجم مخروط چند برابر حجم مکعب است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۹}$

۶ اندازه مماسی که از نقطه $(۱- , ۳)$ بر دایره $x^۲ + y^۲ + ۷x + ۶y = ۰$ رسم شود کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷ به ازای کدام مقدار a قائم‌های بر منحنی به معادله $۲x^۲ + (a - ۱)y^۲ - ۳x + ۴y = ۰$ همواره از نقطه ثابتی می‌گذرند؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

تیزان توشه
توشه ای برای موفقیت

۸ فاصله نقطه متحرک $M(x , y)$ از نقطه $A(۱ , ۳)$ به اندازه $\sqrt{۲}$ برابر فاصله M تا نقطه $B(-۲ , ۴)$ است، شعاع دایره مسیر حرکت M، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) ۵ ۴) ۴

۹ دو دایره به معادلات $(x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۵$ و $x^۲ + y^۲ + ۲y = ۰$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) مماس داخلی ۲) مماس خارجی ۳) متخارج ۴) متقاطع

۱۰ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(-۱ , ۲)$ و به شعاع ۲ کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$ ۲) $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰$

۳) $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۲ = ۰$ ۴) $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۲ = ۰$

۱۱ شعاع انحنای منحنی حاصل از نقطه M به مختصات $M\begin{vmatrix} x = \sqrt{۲}\,Cos\,t \\ y = \sqrt{۲}\,Sin\,t \end{vmatrix}$ وقتی t تغییر می‌کند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۲ معادله خط راستی که نقاط تقاطع دو دایره $\left(x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + y^۲ = ۱$, $\left(x + \frac{۱}{۲}\right)^۲ + y^۲ = ۱$ را به هم وصل می‌کند کدام است؟

۱) $x = ۰$ ۲) $y = ۰$ ۳) $x = y$ ۴) $x = - y$

۱۳ تمام خطوطی که با دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۰$ زاویه ۹۰ درجه بسازند از نقطه ثابت A می‌گذرند مختصات A کدامست؟

۱) $(-۲ , ۱)$ ۲) $(۱ , -۲)$ ۳) $(-۱ , ۲)$ ۴) $(۲ , -۱)$

۱۴ مختصات مرکز دایره‌ای به معادله $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y = ۱۲$ کدام است؟

۱) $(۲ , -۳)$ ۲) $(-۲ , ۳)$ ۳) $(۳ , -۲)$ ۴) $(-۳ , ۲)$

۱۵ دو دایره $(x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۱۶$, $(x - ۵)^۲ + (y - ۷)^۲ = ۱$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) متخارج ۲) متداخل ۳) مماس خارج ۴) مماس داخل

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶ معادلهٔ دایره مماس داخل با دایره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\left(1+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2$ که مختصات مرکز آن $(2\alpha\ ,\ 2\beta)$ است کدام است؟

۱) $(x-2\alpha)^2+(y-2\beta)^2=\frac{1}{16}$
۲) $(x-2\alpha)^2+(y-2\beta)^2=\frac{1}{9}$
۳) $(x-2\alpha)^2+(y-2\beta)^2=\frac{1}{4}$
۴) $(x-2\alpha)^2+(y-2\beta)^2=1$

۱۷ معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش $C(0\ ,\ 1)$ و بر دایرهٔ به معادله $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ مماس باشد، کدام است؟

۱) $x^2+y^2-2y-11+8\sqrt{2}=0$
۲) $x^2+y^2-2y-23+16\sqrt{2}=0$
۳) $x^2+y^2+2y+11+8\sqrt{2}=0$
۴) $x^2+y^2+2y+23+16\sqrt{2}=0$

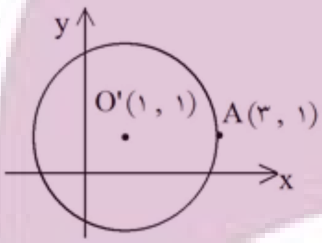
۱۸ معادلهٔ قائم بر منحنی $y^2+x^2-6y-2x+5=0$، در نقطه $A(2\ ,\ 1)$، چیست؟

۱) $y-2x=5$
۲) $2y-x=5$
۳) $y+2x=5$
۴) $2y+x=5$

۱۹ به ازای چه مقدار k، معادلهٔ $(k-2)x^2+(6-k)(y+1)^2=18$ یک دایره را مشخص می‌کند؟

۱) ۸
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۲

۲۰ در شکل زیر، O' مرکز و A یک نقطه از دایره است. معادله دایره کدام است؟



۱) $x^2+y^2-3x-y=4$
۲) $x^2+y^2-2x-2y=2$
۳) $x^2+y^2-2x-2y=4$
۴) $x^2+y^2-3x-y=2$

۲۱ معادله خط مماس مشترک دو دایره به معادلات : $x^2+y^2=8\ ,\ x^2+y^2-2x-2y=0$ کدام است؟

۱) $y-x=2$
۲) $y+x=2$
۳) $y-x=4$
۴) $y+x=4$

۲۲ معادله وتر مشترک دو دایره به معادلات $x^2+y^2-2y=0\ ,\ x^2+y^2-2x=0$ کدام است؟

۱) $y=-2x$
۲) $y=-x$
۳) $y=x$
۴) $y=2x$

۲۳ معادله دایره به شعاع $3\sqrt{2}$ و مماس بر نیمساز ناحیهٔ اول و نیمساز ناحیهٔ دوم کدام است؟

۱) $x^2+y^2-12y=18$
۲) $x^2+y^2-12x=18$
۳) $x^2+y^2-12y+18=0$
۴) $x^2+y^2-12x+18=0$

تیزهوشان تیزهوشان
توشه ای برای موفقیت

۲۴ به ازای کدام مقادیر a نمودار معادلهٔ $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$ یک دایره حقیقی است؟

۱) $a > 3$ ۲) $a < 17/5$ ۳) $a < 8/5$ ۴) $a \leq 17$

۲۵ دایره به معادله $a(x^2 + y^2) + b(x + y) = 0$ از نقطه $(1 , 1)$ می‌گذرد. شعاع دایره چقدر است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{b}{a}$ ۳) $a\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۶ معادله دایره‌ای به مرکز $C(0 , 1)$ که از خط به معادله $y = 3$ وتری به طول ۲ جدا کند، کدام است؟

۱) $x^2 + y^2 + 2y = 4$ ۲) $x^2 + y^2 - 2y = 4$

۳) $x^2 + y^2 - 2y = 3$ ۴) $x^2 + y^2 + 2y = 3$

۲۷ معادله قطری از دایره به معادله $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ که به موازات محور y ها است، کدام است؟

۱) $x = -3$ ۲) $x = -2$ ۳) $x = 2$ ۴) $x = 3$

۲۸ طول خط المرکزین دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{10}$

۲۹ معادله قطری از دایره $x^2 + y^2 - 2x = 0$ عمود بر خط $y = x$، کدام است؟

۱) $y + x = 2$ ۲) $y + 2x = 2$ ۳) $2y + x = 1$ ۴) $y + x = 1$

۳۰ شعاع دایره‌ای که از دو نقطه $(2 , 1)$, $(0 , 3)$ گذشته و مرکز تقارن آن روی خط به معادله $y = 2x - 1$ باشد، کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $\sqrt{13}$

۳۱ دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

۱) مماس خارجی ۲) مماس داخلی ۳) متقاطع در دو نقطه ۴) یکی خارج دیگری

۳۲ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-1 , 0)$ و $B(3 , 0)$ و $C(0 , -3)$ می‌گذرد کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

۳۳ دسته خطوط به معادلات $(m + 1)x + (m + 2)y + 1 = 0$ قطرهای یک دایره‌اند اگر این دایره از نقطه $(2 , 5)$ بگذرد، شعاع آن چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۳۴ دو دایره به معادلات $x^2+y^2-2x+4y=13$ و $x^2+y^2+2x=1$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس داخل ۲) مماس خارج ۳) متقاطع ۴) متداخل

۳۵ طول قطعه‌ی مماسی که از نقطه‌ی $A(4,1)$ بر دایره‌ای به معادله‌ی $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ رسم شود برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) $2\sqrt{3}$

۳۶ به ازای کدام مقدار a دایره به معادله‌ی $x^2+y^2-2x+4y+a=0$ بر خط به معادله‌ی $x+3y=0$ مماس است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۵

۳۷ به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2+y^2+2x-2y=0$ و $x^2+y^2-4y+b=0$ مماس داخل‌اند؟

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) -۲

۳۸ دایره به مرکز $(2,0)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله‌ی $y=1$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

۱) ۱ , ۳ ۲) ۰ , ۴ ۳) $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ ۴) $2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}$

۳۹ دو دایره به معادلات $x^2+y^2-2x+6y=8$ و $x^2+y^2+8x-4y+12=0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس خارج ۲) مماس داخل ۳) متقاطع ۴) متخارج

۴۰ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(2,1),(-2,4),(0,0)$ می‌گذرد کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

۴۱ شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی $(0,0)$، $(1,2)$ و $(-2,1)$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

۴۲ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، منحنی به معادله‌ی $2x^2+(a^2-7)y^2+4y+a=0$ یک دایره است؟

۱) $\{-3\}$ ۲) $\{3\}$ ۳) $\{-3,3\}$ ۴) $\varnothing$

۴۳ دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(0,0)$ و $(3,1)$ گذشته و مرکز آن برخط به معادله‌ی $y=2x$ قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

تیزهوشان تهران
توشه ای برای موفقیت

۴۴ دایره‌ای، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیم‌ساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

۴۵ دایره‌ای به مرکز $(۲ , -۱)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x - y = ۱$، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۱ و ۳ ۲) ۱ و ۴ ۳) ۲ و ۳ ۴) ۱/۵ و ۴

۴۶ دایره گذرا بر نقطه‌ی $(-۱ , ۲)$، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

۱) ۴ , ۱ ۲) ۵ , ۱ ۳) ۴ , ۲ ۴) ۵ , ۲

۴۷ نقطه‌ی $A(-۱ , ۴)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $۲x - ۳y + ۱ = ۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۷}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = ۲$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۳ , -۵ ۲) ۲ , -۴ ۳) $-۱ \pm \sqrt{۲}$ ۴) $-۱ \pm \sqrt{۳}$

۴۸ دایره‌ای به مرکز $(۳ , ۱)$ بر روی خط راست $۵x + ۱۲y = ۱۵$، وتری به طول $۲\sqrt{۲۱}$، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور xها، وتری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) ۶ ۳) $۲\sqrt{۱۵}$ ۴) ۸

۴۹ فرض کنید خطوط $x + y = ۱$ و $x - y = ۳$ قطرهای یک دایره و خط $۴x + ۳y + ۵ = ۰$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی $M(۴ , -۲)$ از دایره، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳} - ۱$ ۲) $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۵} - ۲$

۵۰ دایره‌های $x^۲ + y^۲ + ۲y = ۳$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۳$ متقاطع‌اند. معادله‌ی وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

۱) $x = y$ ۲) $x = ۱ + y$ ۳) $x = -y$ ۴) $x = ۱ - y$

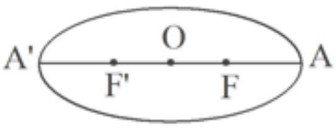
۵۱ دایره‌ی $x^۲ + y^۲ + ۲y = ۳$ مفروض است. معادله‌ی دایره‌ای که با دایره‌ی قبلی مماس داخل بوده و از نقطه‌ی $(۰ , -۳)$ گذشته و قطر آن با شعاع دایره‌ی داده شده برابر باشد، کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ - ۴x = ۳$ ۲) $x^۲ + y^۲ - ۴y + ۳ = ۰$

۳) $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۰$ ۴) $x^۲ + y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$

پیران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱



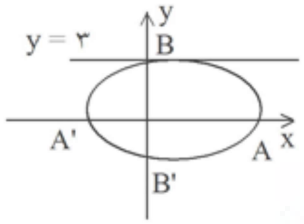
$$\left.\begin{matrix} FA' = ۳FA \Rightarrow FF' + F'A' = ۳FA \\ FA = F'A' \end{matrix}\right\} \Rightarrow FF' = ۲AF$$

$$FA = OA - OF = a - c \Rightarrow FF' = ۲c = ۲FA = ۲(a - c) \Rightarrow a = ۲c$$

$$\text{خروج از مرکز بیضی} = e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح سوال است.

۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



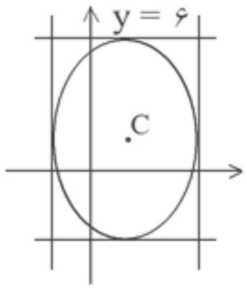
$$A(۶ , ۱) , A'(-۲ , ۱) \Rightarrow ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ = ۲\sqrt{۳}$$

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۴^۲ - \left(۲\sqrt{۳}\right)^۲ = ۴ \Rightarrow (\text{قطر کوچک}) b = ۲$$

مرکز بیضی (نقطه C) وسط دو نقطه A و A' است، پس $C\left(\frac{۶ - ۲}{۲} , \frac{۱ + ۱}{۲}\right) = C(۲ , ۱)$ بنابراین مختصات دوسر قطر کوچک $B(۲ , ۳)$ و $B'(۲ , -۱)$ می‌باشد. پس بیضی می‌توان بر خط $y = ۳$ یا $y = -۱$ مماس شود. با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بیضی مورد نظر در مستطیلی که توسط چهار خط $x = -۱$ و $x = ۵$ و $y = -۴$ و $y = ۶$ ایجاد می‌شود، محاط شده است و مرکز بیضی بر مرکز مستطیل منطبق است. مختصات مرکز بیضی بصورت زیر می‌باشد:

$$\left.\begin{array}{l} x_C = \frac{۵ - ۱}{۲} = ۲ \\ y_C = \frac{۶ - ۴}{۲} = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow C(۲ , ۱)$$

فاصله مرکز تا $y = ۶$ نصف قطر بزرگ است پس $a = ۵$ و فاصله مرکز تا $x = ۵$ نصف قطر کوچک است پس $b = ۳$ می‌باشد. از طرفی $a^۲ = b^۲ + c^۲$ بنابراین $c = \sqrt{a^۲ - b^۲} = ۴$ می‌باشد. فاصله هر کانون تا مرکز بیضی برابر c می‌باشد و کانون روی قطر بزرگ بیضی است. مختصات کانون با عرض مثبت به صورت $F(x = \alpha , y = \beta + c)$ می‌باشد. بنابراین $F(۲ , ۵)$ بوده و گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

* مختصات کانون با عرض منفی بصورت $F'(\alpha , \beta - c) = F'(۲ , -۳)$ می‌باشد.

۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

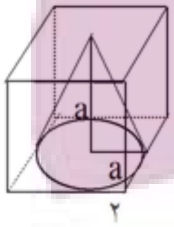
$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳ \text{ قطر کوچک}$$

$$\left.\begin{array}{l} F : (۲ , ۷) \\ F' : (۲ , -۱) \end{array}\right\} \Rightarrow ۲c = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ = ۹ + ۱۶ \Rightarrow a^۲ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

۵ اگر در داخل یک مکعب به ضلع a، مخروطی محاط کنیم، مرکز مخروط بر مرکز قاعدهٔ مکعب منطبق می‌شود و ارتفاع مخروط مقدار ثابت a است. پس هنگامی که حجم مخروط ماکزیمم است که سطح قاعدهٔ مخروط ماکزیمم شود یعنی به صورت شکل مقابل، که در این صورت شعاع مخروط برابر می‌شود با $\frac{a}{۲}$. پس:



$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ a = \frac{۱}{۱۲}\pi a^۳ \\ V_{\text{مکعب}} = a^۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{\frac{۱}{۱۲}\pi a^۳}{a^۳} = \frac{\pi}{۱۲}$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح است.

۶ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر $f(x,y) = ۰$ معادله‌ی دایره باشد آن‌گاه $\sqrt{f(A)}$ طول مماس رسم شده از A بر دایره است.

$$\text{طول مماس} = \sqrt{f(۳,-۱)} = \sqrt{۹ + ۱ + ۲۱ - ۶} = ۵$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷ چون همه قائم‌ها از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند پس مقطع مورد نظر دایره بوده و نقطه مورد نظر مرکز آن می‌باشد هرگاه ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر باشند، منحنی داده شده تبدیل به دایره خواهد شد: $۲ = a - ۱ \Rightarrow a = ۳$

پس گزینه ۱ صحیح است.

۸ با توجه به آنکه فاصلهٔ نقطهٔ $M(x , y)$ از $N(p , q)$ بصورت $\sqrt{(x - p)^۲ + (y - q)^۲}$ می‌باشد، داریم:

$$MA = \sqrt{۲}MB \Rightarrow MA^۲ = ۲MB^۲ \Rightarrow (x- ۱)^۲ + (y- ۳)^۲ = ۲\left((x+ ۲)^۲ + (y- ۴)^۲\right) \Rightarrow$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y + ۱۰ = ۲\left(x^۲ + y^۲ + ۴x - ۸y + ۲۰\right) \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۱۰x - ۱۰y + ۳۰ = ۰$$

اگر معادله فوق را بصورت استاندارد بنویسیم:

$$(x + ۵)^۲ + (y - ۵)^۲ = ۲۰ = R^۲ \Rightarrow R = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۹

$$\left.\begin{array}{l} C_۱ : x^۲ + (y + ۱)^۲ = ۱ \Rightarrow O_۱(۰ , -۱) , R_۱ = ۱ \\ C_۲ : (x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۵ \Rightarrow O_۲(۱ , -۲) , R_۲ = \sqrt{۵} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\text{خط المرکزین } d = O_۱O_۲ = \sqrt{(۱ - ۰)^۲ + (-۲ + ۱)^۲} = \sqrt{۲} \Rightarrow R_۲ - R_۱ < d < R_۱ + R_۲$$

پس دو دایره متقاطعند. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۰ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز (α , β) و شعاع R بصورت $(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = R^۲$ می‌باشد. بنابراین:

$$(x + ۱)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۴ \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ + y^۲ - ۴y + ۴ = ۴ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۱۱ در منحنی M، اگر x و y را به توان ۲ برسانیم، خواهیم داشت:

$$M\begin{vmatrix} x = \sqrt{۲}\,Cos\,t \\ y = \sqrt{۲}\,Sin\,t \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \begin{vmatrix} x^۲ = ۲\,Cos^۲\,t \\ y^۲ = ۲\,Sin^۲\,t \end{vmatrix} \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۲\left(Cos^۲\,t + Sin^۲\,t\right) = ۲$$

$$\Rightarrow R^۲ = ۲ \Rightarrow R = \sqrt{۲}$$

با توجه به معادلهٔ حاصل، منحنی M یک دایره به شعاع $\sqrt{۲}$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ در دو دایره متقاطع وتر مشترک از محل تقاطع دو دایره می‌گذرد. معادله وتر مشترک دو دایره بصورت $C(x , y) - C'(x , y) = ۰$ است پس:

$$C(x , y) - C'(x , y) = \left(x^۲ + y^۲ + x - \frac{۳}{۴}\right) - \left(x^۲ + y^۲ - x - \frac{۳}{۴}\right) = ۰ \Rightarrow ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

پس گزینه ۱ جواب صحیح است.

۱۳ وقتی خطی با دایره‌ای زاویهٔ ۹۰° می‌سازد، از مرکز دایره می‌گذرد و چون محل همرسی این خطوط نقطهٔ A است لذا A مرکز دایره است. پس:

$$x^۲ - ۲x + y^۲ + ۴y = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۵ \Rightarrow A(۱ , -۲)$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۱۴ نکته: مختصات مرکز دایره

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰ \Rightarrow \left(x + \frac{a}{۲}\right)^۲ + \left(y + \frac{b}{۲}\right)^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c^۲}{۴}$$

$O\left(\frac{-a}{۲} , \frac{-b}{۲}\right)$ و اندازه شعاع آن $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}$ می‌باشد.

با توجه به این نکته، مختصات مرکز دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y = ۱۲$ نقطه $\left(\frac{-(-۴)}{۲} , \frac{-(۶)}{۲}\right)$ یعنی $(۲ , -۳)$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۱۵ با توجه به معادله‌ی دایره‌ها که $C_۱ : (x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۱۶$, $C_۲ : (x - ۵)^۲ + (y - ۷)^۲ = ۱$ ، مرکز و شعاع دایره‌ها بصورت $O_۱(۲ , ۳) , R_۱ = ۴$, $O_۲(۵ , ۷) , R_۲ = ۱$ می‌باشند. طول خط‌المرکزین دو دایره $O_۱O_۲ = \sqrt{(۵ - ۲)^۲ + (۷ - ۳)^۲} = ۵$ می‌باشد. مشاهده می‌شود که $O_۱O_۲ = R_۱ + R_۲$ پس دو دایره مماس خارجند و گزینه ۳ صحیح است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶ می‌دانیم در دو دایرهٔ مماس داخل $|R - R'| = d$ است. لذا ابتدا d طول خط المرکزین را می‌یابیم:

$$\left.\begin{matrix} O(\alpha , \beta) \\ O'(2\alpha, 2\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow OO' = d = \sqrt{(2\alpha - \alpha)^2 + (2\beta - \beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$|R - R'| = d \Rightarrow R - R' = \pm d \Rightarrow$$

$$\begin{cases} R' = R - d \Rightarrow R' = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + 1\right) - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1 \\ R' = R + d \Rightarrow R' = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + 1\right) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

مسئله دو جواب دارد. که جواب اول با $R' = 1$ در گزینه‌ها وجود دارد.

پس معادله دایره بصورت $(x - 2\alpha)^2 + (y - 2\beta)^2 = 1$ بوده و گزینه ۴ صحیح است.

۱۷ شرط مماس بودن دو دایره به شعاعهای R , R' و خط المرکزین d بصورت $d = R + R'$ برای مماس خارج و $d = |R - R'|$ برای مماس داخل می‌باشد. در دایره مفروض $(x - 2)^2 + (y - 3)^3 = 16$ است، پس:

$$R = 4 , C'(2 , 3) \Rightarrow d = CC' = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$d = |R - R'| = 2\sqrt{2} \Rightarrow R - R' = \pm 2\sqrt{2}$$

چون طول خط المرکزین از R کمتر می‌باشد، بنابراین دو دایره تنها می‌توانند مماس داخل باشند، مسئله در این حالت ۲ جواب دارد.

$$\begin{cases} R' = R - d = 4 - 2\sqrt{2} \\ R' = R + d = 4 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

درنتیجه معادله دایره‌های مورد نظر بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = \left(4 - 2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 23 + 16\sqrt{2} = 0 \\ (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 23 - 16\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

دایرهٔ به شعاع $2\sqrt{2} - 4$ در گزینه‌ها وجود دارد. بنابراین گزینه ۲ جواب صحیح است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ در منحنی داده شده چون ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر هستند بنابراین منحنی داده شده معادله یک دایره است. می‌دانیم که قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد. پس ابتدا مرکز دایره را بدست می‌آوریم:

$$y^۲+x^۲-۶y-۲x+۵=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y-۳)^۲=۵ \Rightarrow \text{مرکز دایره} = O(۱,۳)$$

پس باید معادلهٔ خط گذرنده بر A و O را بنویسیم:

$$\frac{y-۱}{x-۲}=\frac{۳-۱}{۱-۲} \Rightarrow y+۲x=۵$$

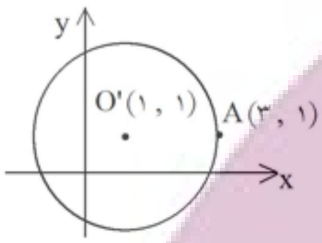
پس گزینهٔ ۳ جواب صحیح است.

۱۹ شرط دایره بودن معادله داده شده، یکسان بودن ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ می‌باشد، پس :

$$k-۲=۶-k \Rightarrow k=۴$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۲۰ شعاع دایره برابر است با فاصله O' تا A ، پس:



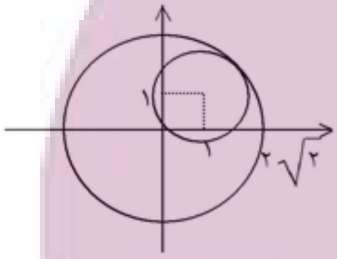
$$R=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۱-۱)^۲}=۲$$

معادلهٔ دایره از رابطه $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ بدست می‌آید که (α,β) مرکز آن است.

$$(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۴ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۲y=۲$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۲۱ معادله دو دایره را می‌توان بصورت $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۲$ و $x^۲+y^۲=۸$ نوشت. بنابراین $R=\sqrt{۲}$ و $R'=۲\sqrt{۲}$ و



$d=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۲}$ است پس $d=R'-R$. بنابراین دو دایره مماس داخل هستند، پس یک مماس مشترک دارند که همان وتر مشترک دو دایره است و از رابطهٔ $C(x,y)-C'(x,y)=۰$ بدست می‌آید، (در دو دایره مماس برهم، مماس مشترک همواره وتر مشترک دو دایره است):

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y-(x^۲+y^۲-۸)=۰ \Rightarrow ۲x+۲y=۸ \Rightarrow x+y=۴$$: معادله مماس مشترک

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۲۲ می‌دانیم وتر مشترک دو دایره متقاطع روی خطی است که از محل برخورد دو دایره می‌گذرد.

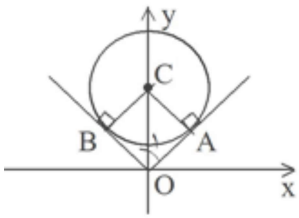
نقاط تلاقی دو دایره داده شده را حساب می‌نماییم:

$$x^۲+y^۲-۲x=x^۲+y^۲-۲y \Rightarrow x=y$$

پس خط $y=x$ معادله وتر مشترک دو دایره است، بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳ می‌دانیم هرگاه دایره‌ای بر دو خط مماس باشد مرکز دایره روی نیمساز زاویه بین دو خط قرار دارد.



چون دایره مورد نظر بر نیمسازهای ربع اول و دوم مماس است، پس همانطور که در شکل دیده می‌شود، مرکز آن روی محور y ها قرار دارد.

در مثلث OAC چون $\widehat{O_1} = ۴۵^\circ$ پس، مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، لذا $AC = AO$. پس:

$$OC^۲ = OA^۲ + AC^۲ = ۲AC^۲ = ۲\left(۳\sqrt{۲}\right)^۲ = ۳۶ \Rightarrow OC = ۶$$

پس $C(۰ , ۶)$ مرکز دایره و $R = ۳\sqrt{۲}$ است. بنابراین معادله دایره بصورت $x^۲ + (y - ۶)^۲ = ۱۸$ و یا $x^۲ + y^۲ - ۱۲y + ۱۸ = ۰$ می‌باشد. لذا گزینه ۳ صحیح است.

۲۴ معادله کلی دایره بصورت $(x - a)^۲ + (y - b)^۲ = R^۲$ می‌باشد.

هرگاه معادله را به فرم اصلی معادله دایره تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$x^۲ + y^۲ - ۳x + ۵y + a = ۰ \Rightarrow \left(x - \frac{۳}{۲}\right)^۲ + \left(y + \frac{۵}{۲}\right)^۲ = \frac{۹}{۴} + \frac{۲۵}{۴} - a = \frac{۳۴ - ۴a}{۴} = R^۲ > ۰$$

$$\Rightarrow ۳۴ - ۴a > ۰ \Rightarrow a < ۸/۵$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

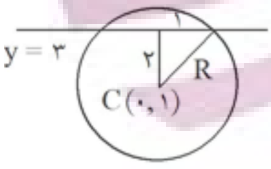
۲۵ چون دایره از نقطه $(۱ , ۱)$ می‌گذرد پس مختصات آن در معادله دایره صدق می‌کند. داریم:

$$a(۱ + ۱) + b(۱ + ۱) = ۰ \Rightarrow a = - b$$

در نتیجه معادله بصورت روبرو درمی‌آید: $x^۲ + y^۲ - x - y = ۰ \Rightarrow \left(x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + \left(y - \frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}$

از روی معادله فوق، $R^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و گزینه ۴ جواب صحیح است.

۲۶ فاصله نقطه $(۱ , ۰)$ از خط $y = ۳$ برابر با ۲ است و چون عمودی که از مرکز دایره بر وتر وارد می‌شود آن را نصف می‌کند، پس مطابق شکل برای محاسبه شعاع :



$$R^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۵ \Rightarrow x^۲ + (y - ۱)^۲ = ۵ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲y = ۴$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۲۷ معادله دایره داده شده را می‌توان به فرم استاندارد زیر نوشت :

$$x^۲ + y^۲ - ۶x + ۴y = ۰ \Rightarrow (x - ۳)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۱۳$$

چون مرکز دایره نقطه $(۳ , -۲)$ است و قطر نیز باید از مرکز گذشته و موازی محور yها نیز باشد، پس معادله قطر مورد نظر بصورت $x = ۳$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۸ اگر معادلات دو دایره را به فرم استاندارد بنویسیم:

$C_1: (x+1)^2+(y-1)^2=2$

$C_2: (x+2)^2+(y-2)^2=8$

مرکز دایره اول $O(-1, 1)$ و مرکز دایره دوم $O(-2, 2)$ است و فاصله آنها برابر است با:

$$O_1O_2=\sqrt{(-1-(-2))^2+(1-2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

پس گزینه ۱ درست است.

۲۹ می‌دانیم حاصلضرب شیب‌های دو خط عمود برهم برابر ۱- می‌باشد.

مرکز دایره نقطه $(0, 1)$ است و چون قطر دایره باید بر خط $y=x$ عمود باشد پس دارای شیب ۱ - خواهد بود پس معادله قطر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y-0=-1(x-1)\Rightarrow y+x=1$$

یعنی گزینه ۴ صحیح است.

۳۰ می‌دانیم مرکز تقارن دایره، مرکز دایره است.

چون مرکز دایره روی خط تقارن است پس مرکز بصورت $(\alpha, 2\alpha-1)$ می‌باشد. فاصله مرکز از $(2, 1)$ با فاصله مرکز از $(0, 3)$ برابر است (شعاع دایره):

$$\sqrt{(\alpha-1)^2+(2\alpha-3)^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+(2\alpha-1)^2}\Rightarrow$$

$$\alpha^2-2\alpha+1+4\alpha^2-12\alpha+9=\alpha^2-6\alpha+9+4\alpha^2-4\alpha+1\Rightarrow\alpha=0$$

پس $R=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ و گزینه ۳ صحیح است.

۳۱

$$C_1(x, y): x^2+y^2-4x+8y+19=0\Rightarrow C_1(x, y): (x-2)^2+(y+4)^2=1\Rightarrow\begin{cases}O_1=(2, -4)\\R_1=1\end{cases}$$

$$C_2(x, y): x^2+y^2-4x+4y=1\Rightarrow C_2(x, y): (x-2)^2+(y+2)^2=9\Rightarrow\begin{cases}O_2=(2, -2)\\R_2=3\end{cases}$$

$O_1O_2=\sqrt{0^2+(-2+4)^2}=2=R_2-R_1$ طول خط المرکزین

لذا ۲ دایره مماس داخل می‌باشند بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۲ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$\begin{cases} 1 - a + c = 0 \\ 9 + 3a + c = 0 \\ 9 - 3b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$

$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$

$R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4 + 12} = \sqrt{5}$

۳۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای m ، عددگذاری می‌کنیم تا دو خط به دست آید. محل برخورد آن‌ها، مرکز دایره است.

$\left.\begin{matrix} m = -2 \Rightarrow x = +1 \\ m = -1 \Rightarrow y = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{مرکز} : C\Big|_{-1}^{1} \Rightarrow CM = R = 5$

۳۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 18 \Rightarrow O\Big|_{-2}^{1} \; R = 3\sqrt{2}$

$(x + 1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow O'\Big|_{0}^{-1} \; R' = \sqrt{2}$

$OO' = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} = |R - R'|$ مماس داخل

۳۵ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$MT = \sqrt{16 + 1 - 8 + 4 + 3} = 4$

* نکته: اگر معادله‌ی دایره $C(x , y) = 0$ باشد و $A(x_0 , y_0)$ نقطه‌ای از صفحه آنگاه طول مماس رسم شده بر دایره از نقطه A برابر است با: $MT = \sqrt{C(x_0 , y_0)}$

۳۶ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$\begin{cases} x = -3y \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \end{cases} \Rightarrow 9y^2 + y^2 + 6y + 4y + a = 0$

$10y^2 + 10y + a = 0$

$\Delta = 100 - 40a = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

راه دوم: فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مساوی شعاع دایره است.

$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1,-2) \; , \; R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 16 - 4a}}{2} = \sqrt{5 - a}$

$OH = R \Rightarrow \frac{|1 - 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \sqrt{5 - a} \Rightarrow 25 = 50 - 10a \Rightarrow 10a = 25 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۷ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$C: x^2 + (y-2)^2 = -b + 4$

$C': (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \qquad o\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right. \text{ و } o'\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right. \Rightarrow oo' = \sqrt{2} = |R - R'| = \left|\sqrt{-b+4} - \sqrt{2}\right| \Rightarrow b = -4$

۳۸ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. شعاع دایره، فاصله‌ی $(2,0)$ از خط $y = x$ است.

$$R = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 2 \xrightarrow{y=1} (x-2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

۳۹ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 18$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0 \Rightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 = 8$$

$$\left.\begin{matrix} O_1\left|\begin{matrix}1\\-3\end{matrix}\right. \quad O_2\left|\begin{matrix}-4\\2\end{matrix}\right. \quad r_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad r_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ |O_1O_2| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow O_1O_2 = r_1 + r_2 \text{ مماس خارج}$$

۴۰ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. دایره را $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می‌گیریم و نقاط داده شده را در دایره صدق می‌دهیم.

$$(0,0) \in \text{دایره} \Rightarrow c = 0$$

$$(2,1) \in \text{دایره} \Rightarrow 4+1+2a+b=0 \Rightarrow 2a+b=-5$$

$$(-2,4) \in \text{دایره} \Rightarrow 4+16-2a+4b=0 \Rightarrow -2a+4b=-20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-5 \\ -2a+4b=-20 \end{cases} \xrightarrow{+} 5b=-25 \Rightarrow b=-5 \Rightarrow a=0$$

$$\text{دایره}: x^2+y^2-5y=0 \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{5}{2}$$

۴۱ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم که معادله‌ی دایره‌ی مورد نظر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد و سه نقطه‌ی $A(0,0)$، $B(2,1)$ و $C(1,-2)$ نقاط روی این دایره می‌باشند پس مختصات آن‌ها در دایره صدق می‌کند:

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{cases} 0+0+0+c=0 \\ 4+1+2a+b+c=0 \\ 1+4+a-2b+c=0 \end{cases} \xrightarrow{c=0} \begin{cases} 2a+b=-5 \\ a-2b=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+2b=-10 \\ a-2b=-5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 5a=-15 \Rightarrow a=-3,\ b=1$$

به‌این ترتیب معادله‌ی دایره به‌صورت $x^2+y^2-3x+y=0$ است و شعاع این دایره برابر است با:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{9+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۲ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. برای این‌که معادله‌ی مقطع مخروطی $۲x^۲ + (a^۲ - ۷)y^۲ + ۴y + a = ۰$ معادله‌ی دایره باشد، باید ابتدا ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ را برابر قرار دهیم:

$$a^۲ - ۷ = ۲ \Rightarrow a^۲ = ۹ \begin{cases} a = ۳ \\ a = -۳ \end{cases}$$

حال با جایگذاری $a = \pm ۳$ در معادله، آن را به شکل $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ تبدیل و شرط $a^۲ + b^۲ - ۴c > ۰$ را کنترل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a=۳ \Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۴y+۳=۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ + y^۲ + ۲y + \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow ۰+۴-۴\left(\frac{۳}{۲}\right)=۴-۶=-۲ \not> ۰ \\ a=-۳ \Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۴y-۳=۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ + y^۲ + ۲y - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow ۰+۴-۴\left(-\frac{۳}{۲}\right)=۴+۶=۱۰ > ۰ \end{cases}$$

بنابراین $a = -۳$ قابل قبول است.

۴۳ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم مرکز دایره روی خط $y = ۲x$ قرار دارد، پس مختصات مرکز به‌صورت $O(\alpha, ۲\alpha)$ می‌باشد. چون این دایره از دو نقطه‌ی $A(۰,۰)$ و $B(۳,۱)$ می‌گذرد، لذا فاصله‌ی مرکز دایره از این دو نقطه یکسان و برابر شعاع دایره است. بنابراین داریم:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha-۰)^۲ + (۲\alpha - ۰)^۲} = \sqrt{(\alpha-۳)^۲ + (۲\alpha - ۱)^۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}}$$

$$\alpha^۲ + ۴\alpha^۲ = (\alpha^۲ - ۶\alpha + ۹) + (۴\alpha^۲ - ۴\alpha + ۱) \Rightarrow ۵\alpha^۲ = ۵\alpha^۲ - ۱۰\alpha + ۱۰ \Rightarrow \alpha = ۱$$

$$\Rightarrow O(۱,۲) \Rightarrow R = OA = \sqrt{۱^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۵}$$

۴۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$(x - h)^۲ + (y - k)^۲ = R^۲$

$h = k$ مرکز روی نیمساز ربع اول است.

$(x - h)^۲ + (y - h)^۲ = R^۲$

$$\begin{matrix} (۱ , ۰) \Rightarrow (۱ - h)^۲ + h^۲ = R^۲ \\ (۳ , ۰) \Rightarrow (۳ - h)^۲ + h^۲ = R^۲ \end{matrix} \Rightarrow (۱ - h)^۲ + h^۲ = (۳ - h)^۲ + h^۲ \Rightarrow (۱ - h)^۲ = (۳ - h)^۲$$

$$\Rightarrow |۱ - h| = |۳ - h| \Rightarrow ۱ - h = \pm(۳ - h) \Rightarrow h = ۲ \Rightarrow k = ۲$$

$$(۱ - h)^۲ + h^۲ = R^۲ \xrightarrow{h = ۲} r^۲ = ۵ \Rightarrow R = \sqrt{۵}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

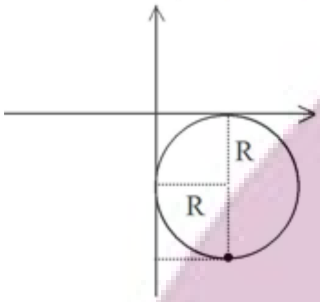
$$x - y - ۱ = ۰ \Rightarrow d = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{۲ + ۱ - ۱}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} = R$$

$$(x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۲ \xrightarrow{y = ۰} (x - ۲)^۲ = ۱$$

$$x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳$$

$$x - ۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱$$

۴۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه $(-۲ , ۱)$ در ربع چهارم قراردارد. مرکز این دایره اگر $O(R , R)$ باشد.

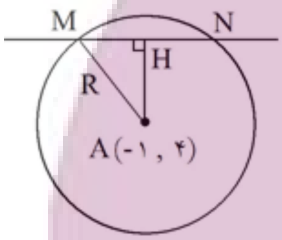


$$(x - R)^۲ + (y + R)^۲ = R^۲ \Rightarrow (۱ - R)^۲ + (-۲ + R)^۲ = R^۲$$

$$\Rightarrow ۱ + R^۲ - ۲R + ۴ + R^۲ - ۴R = R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ - ۶R + ۵ = ۰ \Rightarrow (R - ۱)(R - ۵) = ۰ \Rightarrow R = ۱ , ۵$$

۴۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و فرض $MN = ۲\sqrt{۷}$ نتیجه می‌گیریم $MH = \sqrt{۷}$.



$$AH = \frac{|-۲ - ۱۲ + ۱|}{\sqrt{۴ + ۹}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳}$$

$$\triangle AMH : AM^۲ = AH^۲ + MH^۲ \Rightarrow R^۲ = ۱۳ + ۷ = ۲۰$$

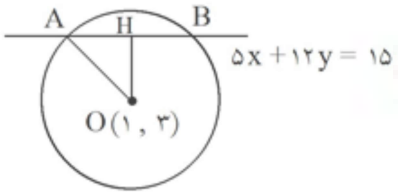
بنابراین معادله دایره به صورت $(x + ۱)^۲ + (y - ۴)^۲ = ۲۰$ است. حال دایره را با خط $y = ۲$ قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} (x + ۱)^۲ + (y - ۴)^۲ = ۲۰ \\ y = ۲ \end{cases} \Rightarrow (x + ۱)^۲ + (۲ - ۴)^۲ = ۲۰ \Rightarrow (x + ۱)^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + ۱ = ۴ \Rightarrow x = ۳ \\ x + ۱ = -۴ \Rightarrow x = -۵ \end{cases}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال وتر AB به طول $۲\sqrt{۲۱}$ است پس $AH = \sqrt{۲۱}$ با به دست آوردن OH شعاع OA را پیدا می‌کنیم.



$$OH = \frac{|۵ + ۳۶ - ۱۵|}{\sqrt{۲۵ + ۱۴۴}} = \frac{۲۶}{۱۳} = ۲$$

$$\overset{\triangle}{OAH} : OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ = ۴ + ۲۱ = ۲۵$$
$$\Rightarrow OA = ۵ \Rightarrow R = ۵$$

معادله دایره : $(x - ۱)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۲۵$

حال نقاط برخورد این دایره با محور xها را تعیین می‌کنیم.

$$y = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow (x - ۱)^۲ = ۱۶ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۴ \Rightarrow x = ۵ \\ x - ۱ = -۴ \Rightarrow x = -۳ \end{cases}$$

نقاط تلاقی دایره با محور xها نقطه‌های $M(۵ , ۰)$ و $N(-۳ , ۰)$ است و فاصله‌ی این دو نقطه مساوی $MN = ۸$ است.

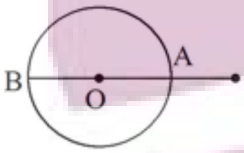
۴۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه تلاقی قطرهای $x + y = ۱$ و $x - y = ۳$ مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x + y = ۱ \\ x - y = ۳ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow y = -۱$$

پس مرکز دایره $O(۲ , -۱)$ است. در ضمن فاصله‌ی O تا خط مماس $۴x + ۳y + ۵ = ۰$ برابر شعاع دایره است.

$$R = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۸ - ۳ + ۵|}{\sqrt{۱۶ + ۹}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

نزدیک‌ترین فاصله‌ی $M(۴ , -۲)$ از دایره مساوی $|OM - R|$ است. بنابراین:



$$OM = \sqrt{(۴ - ۲)^۲ + (-۲ + ۱)^۲} = \sqrt{۵}$$

نزدیک ترین فاصله $= |OM - R| = \sqrt{۵} - ۲ = MA$

۵۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر معادلات دایره‌ها را در یک دستگاه بنویسیم، با حذف $x^۲$ و $y^۲$ از دستگاه هر آن‌چه بماند معادله وتر مشترک است.

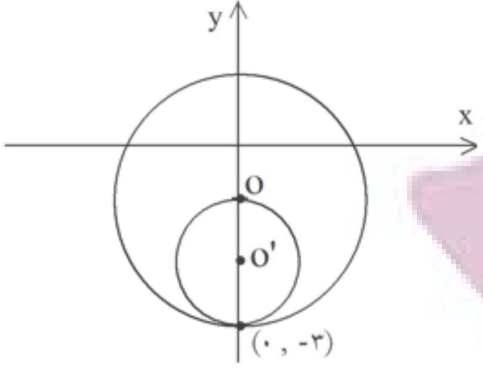
$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ + ۲y - ۳ = ۰ \\ x^۲ + y^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \end{cases}$$
$$۲y - ۲x = ۰ \Rightarrow x = y$$

تیزان تونل
توشه ای برای موفقیت

۵۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$x^2 + (y+1)^2 = 2^2 \Rightarrow R = 2 , O(0 , -1)$

مطابق شکل اگر دایره جدید بخواهد با دایره فعلی مماس داخل باشد و از نقطه $(-3 , 0)$ نیز عبور کند تنها حالت آن است که دایره مذکور تنها نقطه تماسش (نقطه مماس) همان نقطه $(-3 , 0)$ باشد. پس مرکز دایره جدید به فرم $O'(0 , y_0)$ است.



شعاع دایره جدید نصف شعاع دایره داده شده

$\rightarrow R' = 1 , O' = (0 , -2)$

$x^2 + (y+2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت