دفترچهٔ پاسخ

آزمون ۱۰ شهریور ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی (نظام جدید)

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	ریاضی پایه و حسابان ۲	محمدمصطفی ابراهیمی-کاظم اجلالی-سیدرضا اسلامی-عباس اشرفی-محمدسجاد پیشوایی-رضا توکلی-سعید جعفری‌کافی‌آباد فرشاد حسن‌زاده-عادل حسینی-سهیل ساسانی-یاسین سپهر-محمدحسن سلامی‌حسینی-فرشاد صدیقی‌فر-پویان طهرانیان-سعیدعلم‌پور عزیزاله علی‌اصغری-حمید علیزاده-نیما کدیوریان-مصطفی کرمی-سعید مدیرخراسانی-رحیم مشتاق‌نظم-سروش موئینی-وهاب نادری محمدمهدی وزیری
	هندسه	محمدمهدی ابوترابی-امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-جواد حاتمی-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش-محمد خندان-حمیدرضا دهقان سوگند روشنی-رضا عباسی‌اصل-احمدرضا فلاح-سهام مجیدی‌پور-نوید مجیدی-رحیم مشتاق‌نظم-سرژ یقیازاریان‌تبریزی
	آمارو احتمال وریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-سامان اسپهرم-علی ایمانی-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش-کیوان دارابی-سوگند روشنی علیرضا شریف‌خطیبی-علی اکبر علی‌زاده-فرشاد فرامرزی-محمدعلی کاظم‌نظری-علی منصف‌شکری-نیلوفر مهدوی-غلامرضا نیازی
	فیزیک	عبدالرضا امینی‌نسب-میثم دشتیان-هاشم زمانیان-محمد ساکی-مهدی سلطانی-معصومه شریعت‌ناصری-مریم شیخ‌مو-پوریا علاقه‌مند مسعود قره‌خانی-مصطفی کیانی-غلامرضا محبی-امیراحمد میرسعید-مصطفی واثقی
	شیمی	محمدرضا پورجاوید-امیرحاتمیان-ایمان حسین‌نژاد-روزبه رضوانی-امیرحسین طیبی-امیرحسین مسلمی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	ریاضی پایه و حسابان ۲	هندسه	آمارو احتمال و ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب سوگند روشنی	مصطفی کیانی	امیر حاتمیان
گروه ویراستاری	سعید خان‌بابایی مهدی ملارمضانی	ویراستار استاد : مهرداد ملوندی	ویراستار استاد : مهرداد ملوندی	زهره آقامحمدی حمید زرین‌کفش	بهنام قازانچایی ویراستار استاد: محمدحسن محمدزاده مقدم
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	محمد ساکی	امیرحسین مسلمی
مستند سازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	احسان صادقی	سمیه اسکندری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳، ۰۲۱

ایران‌توشه
توشه‌ای برای موفقیت

حسابان ۱

۱- **گزینهٔ «۴»** *(عزیزاله علی‌اصغری)*

متمم زاویهٔ ۲۰° برابر ۷۰° است. زاویه ۷۰° را بر حسب رادیان می‌نویسیم.

$$\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰^\circ}$$

$$\frac{R}{\pi}=\frac{۷۰^\circ}{۱۸۰^\circ}\Rightarrow R=\frac{۷\pi}{۱۸}$$ رادیان

اختلاف مکمل و متمم هر زاویه برابر $\frac{\pi}{۲}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{۷\pi}{۱۸}+\frac{\pi}{۲}=\frac{۸\pi}{۹}$$ رادیان : مکمل زاویهٔ ۲۰°

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(سهیل ساسانی)*

برای طول کمان و مساحت قطاع داریم:

$$\ell=r\theta$$

$$S=\frac{۱}{۲}r^۲\theta$$

پس داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}\frac{\ell^۲}{\theta}$$

حال در این سؤال مساحت برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\frac{۱۲\pi}{\frac{۳\pi}{۴}}=۸$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۵)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(پویان طهرانیان)*

$$\alpha=\frac{\ell}{r}\Rightarrow\alpha=\frac{۱۲\pi}{۹}=\frac{۴\pi}{۳}$$

حال خواهیم داشت:

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha=-\sin\frac{۴\pi}{۳}=-\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}$$

$$\sin(۳\pi-۲\alpha)=\sin۲\alpha=\sin۲(\frac{۴\pi}{۳})=\sin(۳\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(سهیل ساسانی)*

$$\sin۵۲۰^\circ=\sin(۳۶۰^\circ+۱۶۰^\circ)=\sin(۱۸۰^\circ-۲۰^\circ)=\sin۲۰^\circ$$

$$\cos۲۰۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)=-\cos۲۰^\circ$$

$$\cos۱۱۰^\circ=\cos(۹۰^\circ+۲۰^\circ)=-\sin۲۰^\circ$$

$$\sin۴۳۰^\circ=\sin(۳۶۰^\circ+۷۰^\circ)=\sin(۹۰^\circ-۲۰^\circ)=\cos۲۰^\circ$$

$$\frac{\sin۲۰^\circ+\cos۲۰^\circ}{-\sin۲۰^\circ+\cos۲۰^\circ}\xrightarrow{+\cos۲۰^\circ}\frac{\tan۲۰^\circ+۱}{-\tan۲۰^\circ+۱}$$

$$\xrightarrow{\cot۷۰^\circ=\tan۲۰^\circ=۰/۳}\frac{۰/۳+۱}{-۰/۳+۱}=\frac{۱/۳}{۰/۷}=\frac{۱۳}{۷}$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کرمی)*

در ابتدا دقت می‌کنیم که برای x های قابل قبول:

$$\frac{\cos x}{۱+\sin x}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}$$

(چون با طرفین وسطین به عبارت $\cos^۲x=۱-\sin^۲x$ می‌رسیم.)

حالا با جایگذاری $t=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$ داریم:

$$t+\frac{۴}{t}=۴\xrightarrow{\times t}t^۲-۴t+۴=۰\Rightarrow t=۲$$

$$\Rightarrow\frac{\cos x}{۱+\sin x}=۲\Rightarrow\cos x=۲+۲\sin x$$

$$\Rightarrow\cos x-۲\sin x=۲$$

از طرفی داریم:

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}-x)+۲\cos(\frac{۹\pi}{۲}+x)=\sin(\frac{\pi}{۲}-x)+۲\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$$

$$=\cos x-۲\sin x=۲$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(پویان طهرانیان)*

$$\cot(\frac{-۱۵\pi}{۴})=\cot(-۴\pi+\frac{\pi}{۴})=\cot\frac{\pi}{۴}=۱$$

$$\tan^۲(\frac{۱۶\pi}{۳})=\tan^۲(۵\pi+\frac{\pi}{۳})=\tan^۲\frac{\pi}{۳}=(\sqrt{۳})^۲=۳$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$\cos(\frac{-۱۳\pi}{۳}) = \cos(\frac{۱۳\pi}{۳}) = \cos(۴\pi + \frac{\pi}{۳}) = \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

$$\sin^۲(\frac{۱۷\pi}{۴}) = \sin^۲(۴\pi + \frac{\pi}{۴}) = \sin^۲\frac{\pi}{۴} = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = ۱\times۳ + \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲} = ۳ + \frac{۱}{۴} = ۳/۲۵$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۷- **گزینهٔ «۱»** (رضا توکلی)

می‌دانیم $\tan x + \cot x = \frac{۲}{\sin ۲x}$:

$$f(x) = \frac{۸\cos ۲x\cos ۴x}{\frac{۲}{\sin ۲x}} = \frac{۸}{۲}\underbrace{\sin ۲x\cos ۲x}_{\frac{۱}{۲}\sin ۴x}\cos ۴x$$

$$f(x) = \frac{۸}{۴}\sin ۴x\cos ۴x = \frac{۸}{۴}\times\frac{۱}{۲}\sin ۸x = \sin ۸x$$

$$f(\frac{\pi}{۴۸}) = \sin(۸\times\frac{\pi}{۴۸}) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۸- **گزینهٔ «۳»** (سعید جعفری کافی‌آباد)

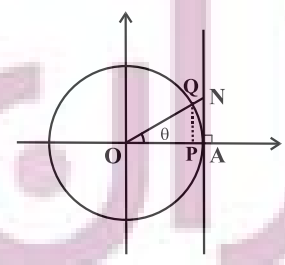
$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{۴} - x\right) + \cot\left(\frac{\pi}{۴} - x\right) = \frac{۲}{\sin ۲\left(\frac{\pi}{۴} - x\right)}$$

$$= \frac{۲}{\sin\left(\frac{\pi}{۲} - ۲x\right)} = \frac{۲}{\cos ۲x} = b \Rightarrow \cos ۲x = \frac{۲}{b}$$

(حسابان ۱ - مثلثات؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۱۲)

۹- **گزینهٔ «۲»** (عادل حسینی)



$$|AN| = \tan\theta$$

حال طول MN را می‌یابیم:

$$|MN| = \tan ۷۵^\circ - \tan ۱۵^\circ = \frac{\sin ۷۵^\circ}{\cos ۷۵^\circ} - \frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}$$

$$= \frac{\sin ۷۵^\circ\cos ۱۵^\circ - \cos ۷۵^\circ\sin ۱۵^\circ}{\cos ۷۵^\circ\cos ۱۵^\circ}$$

$$= \frac{\sin\left(۷۵^\circ - ۱۵^\circ\right)}{\cos ۷۵^\circ\cos ۱۵^\circ} = \frac{\sin ۶۰^\circ}{\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ}$$

$$= \frac{\sin ۶۰^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ} = \frac{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)}{\frac{۱}{۴}} = ۲\sqrt{۳}$$

و در نتیجه مساحت مثلث برابر است با:

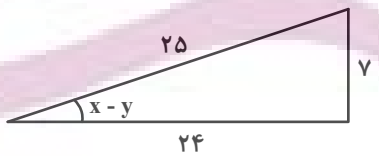
$$S_{\overset{\Delta}{MON}} = \frac{۱}{۲}|OA|.|MN| = \frac{۱}{۲}(۱)\left(۲\sqrt{۳}\right) = \sqrt{۳}$$

(حسابان ۱ - مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** (محمدمهدی وزیری)

$$\sin\left(x-y\right) = \sin x\cos y - \cos x\sin y = \frac{۲}{۵} - \frac{۳}{۲۵} = \frac{۷}{۲۵}$$

حال با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر داریم:



$$\sin(x-y) = \frac{۷}{۲۵} \Rightarrow \tan(x-y) = \frac{۷}{۲۴}$$

اما می‌دانیم که هر دو مقدار $\pm\frac{۷}{۲۴}$ قابل قبول‌اند.

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۲

۱۱- **گزینهٔ «۲»** *(رضا عباسی‌اصل)*

در یک تجانس غیر همانی $(k \neq 1)$، تنها مرکز تجانس تحت تبدیل، ثابت می‌ماند. بنابراین مرکز تجانس، تنها نقطهٔ ثابت تبدیل در یک تجانس غیرهمانی است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(نوید مهیدی)*

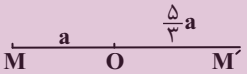
تجانس، در حالت کلی طولپا نیست، مگر اینکه $|k| = 1$ باشد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه خان)*

چون نسبت تجانس منفی است، نقطهٔ O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد. اگر فاصلهٔ O تا M را برابر a فرض کنیم، آن‌گاه طبق شکل خواهیم داشت:

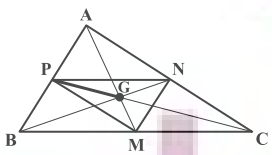
$$\frac{OM'}{MM'} = \frac{\frac{5}{3}a}{a+\frac{5}{3}a} = \frac{5}{8}$$



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحهٔ ۴۵)

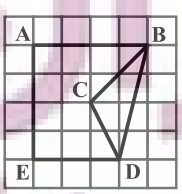
۱۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمد خندان)*

طبق تعریف تجانس، اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد، آنگاه سه نقطهٔ O، A و A' روی یک خط راست قرار دارند. بنابراین اگر نقاط M، N و P به‌ترتیب مجانس نقاط A، B و C در یک تجانس باشند، مرکز تجانس قطعاً بر روی خط‌های شامل پاره‌خط‌های AM، BN و CP قرار دارد. چون این سه پاره‌خط، میانه‌های مثلث ABC هستند، پس نقطهٔ تقاطع آنها همان نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC است.



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(محمد خندان)*



مطابق شکل اگر B به D وصل کنیم، در مثلث شبکه‌ای BCD، تعداد نقاط مرزی برابر $b = 4$ و تعداد نقاط درونی برابر $i = 2$ است. در نتیجه طبق رابطهٔ پیک داریم:

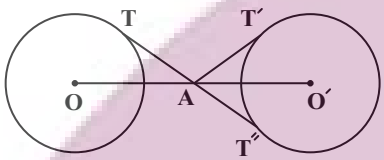
$$S_{\triangle BCD} = \frac{b}{2} + i - 1 = 3$$

مقدار افزایش مساحت، دقیقاً دو برابر مساحت مثلث BCD، یعنی برابر ۶ است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

مرکز تجانس معکوس، محل برخورد مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المرکزین دو دایره است.

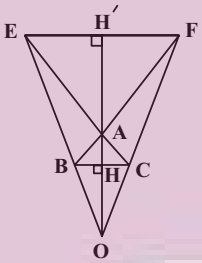


$$AT + AT' = AT + AT'' = TT'' = \sqrt{OO'^2 - (R+R')^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - (4+4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۸)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*



مرکز تجانس معکوس همان نقطهٔ A است. برای یافتن مرکز تجانس مستقیم کافی است از E به B و از F به C وصل کرده و امتداد دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. این نقطه مرکز تجانس مستقیم است.

در مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a، طول ارتفاع از رابطهٔ $h_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AH' = \frac{\sqrt{3}}{2}EF = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$HH' = AH + AH' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

طبق قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث OBC و OEF متشابه هستند، پس نسبت ارتفاع‌ها در این دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

$$\frac{OH}{OH'} = \frac{BC}{EF} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}} \frac{OH}{HH'} = \frac{1}{3}$$

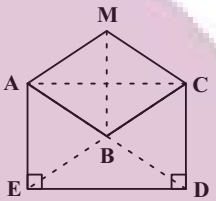
$$\Rightarrow \frac{OH}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow OH = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

فاصلهٔ مراکز تجانس : $OA = OH + AH = \frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۱۸- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*



برای افزایش مساحت چندضلعی بدون تغییر محیط و تعداد اضلاع، کافی است بازتاب نقطهٔ B را نسبت به خط گذرنده از نقاط A و C به دست آوریم.

مطابق شکل چهارضلعی $ACDE$ مستطیل است و مساحت مثلث‌های ABE ، ABC ، BCD و BDE برابر یکدیگر است.

از طرفی دو مثلث AMC و ABC هم‌نهشت هستند و مساحت آن‌ها برابر یکدیگر است. اگر مساحت هرکدام از این مثلث‌ها را با S نمایش دهیم، داریم:

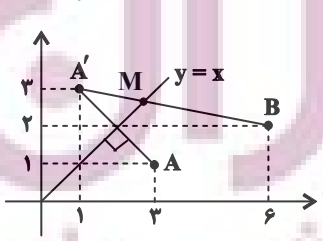
$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{AMCDE}} = \frac{3S}{5S} = 0/6$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

ابتدا قرینهٔ A را نسبت به خط $y = x$ پیدا می‌کنیم و آن را A' می‌نامیم.

طبق ویژگی بازتاب $MA = MA'$ است و داریم:

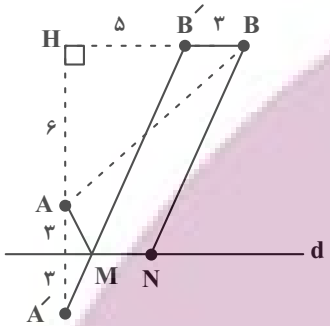


$$MA + MB \quad \underline{MA = MA'} \quad MA' + MB = A'B$$

$$A'B = \sqrt{(6-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحهٔ ۵۴)

۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*



$$\overset{\Delta}{AHB}: AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + BH^2$$

$$\Rightarrow BH^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow BH = 8$$

از نقطهٔ B، خطی به طول ۳ کیلومتر موازی با خط d (ساحل دریا) رسم می‌کنیم تا نقطهٔ B' حاصل شود. سپس از نقطهٔ A' (بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d) به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. اگر N نقطه‌ای به فاصلهٔ ۳ کیلومتر از M روی خط d باشد، آن‌گاه مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

طول مسیر $AMNB = AM + MN + NB$

$$= A'M + BB' + MB' = (A'M + MB') + BB' = A'B' + BB'$$

$$\overset{\Delta}{A'HB'}: A'B'^2 = A'H^2 + B'H^2$$
$$= 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow A'B' = 13$$

بنابراین طول جادهٔ بین A و B ، برابر $16 = 3 + 13$ است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحهٔ ۵۵)

توشه‌ای برای موفقیت

آمار و احتمال

۲۱- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$۸۰^\circ + ۶۰^\circ + ۱۰۵^\circ + ۲۵^\circ + \alpha = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۹۰^\circ$$

$$\text{تعداد دیپلم‌ها} = \frac{۹۰^\circ}{۳۶۰^\circ} \times ۱۴۴ = ۳۶$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۲۲- **گزینهٔ «۴»** *(محمدعلی کاظم‌نظری)*

نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای متغیرهای کمّی گسسته و کیفی و نمودار بافت‌نگاشت برای متغیرهای کمّی پیوسته مناسب‌اند.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۲۳- **گزینهٔ «۳»** *(فرشاد فرامرزی)*

تعداد دانش‌آموزان کلاس در ابتدا برابر است با:

$$۲ + ۴ + ۶ + ۵ + ۳ = ۲۰$$

در این حالت فراوانی نسبی دستهٔ وسط برابر $\frac{۶}{۲۰}$ است. با افزوده شدن یک دانش‌آموز جدید با قد ۱۶۴، تعداد دانش‌آموزان کلاس برابر ۲۱ می‌شود، ولی چون این دانش‌آموز به دستهٔ چهارم تعلق دارد، فراوانی دستهٔ وسط تغییر نکرده و فراوانی نسبی این دسته برابر $\frac{۶}{۲۱}$ خواهد شد.

تفاضل فراوانی نسبی در این دو حالت برابر است با:

$$\frac{۶}{۲۱} - \frac{۶}{۲۰} = \frac{۲}{۷} - \frac{۳}{۱۰} = \frac{۲۰-۲۱}{۷۰} = -\frac{۱}{۷۰}$$

بنابراین فراوانی نسبی دستهٔ وسط $\frac{۱}{۷۰}$ کم می‌شود.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۲۴- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

با توجه به داده‌های ۲۸، ۲۷، a، ۲۴، ۲۴، ۱۴، ۲۴ و ۱۵ معلوم می‌شود که نما (مُد) عدد ۲۴ است، بنابراین میانگین هم برابر ۲۴ است، از آنجایی‌که مجموع اختلاف از میانگین داده‌ها برابر صفر است، خواهیم داشت:

$$-۹ + ۰ - ۱۰ + ۰ + ۰ + a - ۲۴ + ۳ + ۴ = ۰ \Rightarrow a = ۳۶$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۸)

۲۵- **گزینهٔ «۳»** *(علی‌اکبر علی‌زاده)*

با فرض $x_۱ + x_۲ + x_۳ + \ldots + x_{۱۲} = A$ خواهیم داشت:

$$\text{میانگین داده‌های سری اول} = \frac{x_۱ + ۲ + x_۲ + ۴ + \ldots + x_{۱۲} + ۲۴}{۱۲}$$

$$= \frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_{۱۲} + ۲(۱ + ۲ + ۳ + \ldots + ۱۲)}{۱۲}$$

$$= \frac{A}{۱۲} + \frac{۲(\frac{۱۲ \times ۱۳}{۲})}{۱۲} = \frac{A}{۱۲} + ۱۳$$

$$\text{میانگین داده‌های سری دوم} = \frac{۳x_۱ + ۵ + ۳x_۲ + ۵ + \ldots + ۳x_{۱۲} + ۵}{۱۲}$$

$$= \frac{۳(x_۱ + x_۲ + \ldots + x_{۱۲}) + ۶۰}{۱۲} = \frac{A}{۴} + ۵$$

$$\Rightarrow \frac{A}{۱۲} + ۱۳ = ۲(\frac{A}{۴} + ۵) - ۱۷ \Rightarrow \frac{A}{۱۲} + ۱۳ = \frac{A}{۲} - ۷ \Rightarrow A = ۴۸$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌طیبی)*

می‌دانیم اگر تعدادی داده برابر یکدیگر باشند، واریانس آنها برابر صفر است و بالعکس، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} ۳x - ۹ = ۶ \Rightarrow x = ۵ \\ ۵y + ۱ = ۶ \Rightarrow y = ۱ \\ ۴z - ۲ = ۶ \Rightarrow z = ۲ \end{cases}$$

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پس داده های y^2، $2z-3$، $x+1$ و $x-y$ به ترتیب عبارتند از: $4,6,1,1$

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. چون تعداد داده‌ها زوج است، میانه برابر میانگین دو دادهٔ وسط است:

$$1,1,4,6 \Rightarrow \text{میانه} = \frac{1+4}{2} = 2/5$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۲۷- **گزینهٔ «۲»** (نیلوفر مهدوی)

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma_1^2 = 6 \Rightarrow \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = 6 \Rightarrow \sum(x_i - \bar{x})^2 = 6n$$

با حذف ۴ داده مساوی با میانگین، میانگین و $\sum(x_i - \bar{x})^2$ ثابت مانده اما تعداد داده‌ها برابر $n-4$ می‌شود.

$$\sigma_2^2 = 14 \Rightarrow \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-4} = 14 \Rightarrow \frac{6n}{n-4} = 14$$

$$\Rightarrow 14n - 56 = 6n \Rightarrow 8n = 56 \Rightarrow n = 7$$

تعداد داده‌های اولیه برابر ۷ است.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

۲۸- **گزینهٔ «۲»** (سوگند روشنی)

اگر داده‌های اولیه x_i و داده‌های جدید x_i' باشند. خواهیم داشت:

$$x_i' = 3x_i + 2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x'} = 3\bar{x} + 2 \\ \sigma' = 3\sigma \end{cases}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{5}, (CV)' = \frac{\sigma'}{\bar{x'}} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sigma}{\bar{x}}}{\frac{3\sigma}{3\bar{x}+2}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{10}} \Rightarrow \frac{3\bar{x}+2}{3\bar{x}} = \frac{4}{1}$$

$$\Rightarrow 3\bar{x} + 2 = 12\bar{x}$$

$$\Rightarrow 9\bar{x} = 2 \Rightarrow \bar{x} = \frac{2}{9}$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۴، ۸۵ و ۹۳ تا ۹۷)

۲۹- **گزینهٔ «۳»** (فرزانه شاکپاش)

تعداد داده‌ها برابر ۱۵ و در نتیجه عددی فرد است، پس دادهٔ هشتم میانهٔ داده‌ها است. میانهٔ هفت دادهٔ اول، یعنی دادهٔ چهارم، چارک اول و میانهٔ هفت دادهٔ آخر، یعنی دادهٔ دوازدهم، چارک سوم است، یعنی داریم:

$$Q_2 = 17, Q_1 = 9, Q_3 = 24$$

طول‌های دو بخش جعبه که توسط میانه از هم جدا می‌شوند، برابرند با:

طول بخش سمت چپ جعبه $= Q_2 - Q_1 = 17 - 9 = 8$

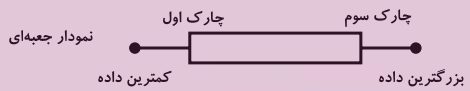
طول بخش سمت راست جعبه $= Q_3 - Q_2 = 24 - 17 = 7$

بنابراین اختلاف طول دو بخش جعبه برابر $8 - 7 = 1$ است.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۹۷ و ۹۸)

۳۰- **گزینهٔ «۲»** (غلامرضا نیازی)

در نمودار جعبه‌ای نمرات این دانش‌آموز، ۶ نمره داخل جعبه، سه نمره قبل و سه نمره بعد از جعبه قرار دارد.



$$\frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{3} = 10 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} x_i = 30$$

$$\frac{\sum_{i=10}^{12} x_i}{3} = 17 \Rightarrow \sum_{i=10}^{12} x_i = 51$$

$$\frac{\sum_{i=4}^{9} x_i}{6} = 15 \Rightarrow \sum_{i=4}^{9} x_i = 6(15) = 90$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = \frac{30+51+90}{12} = \frac{171}{12} = 14/25$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۸۵، ۹۷ و ۹۸)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۲

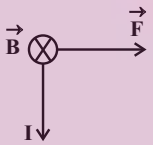
۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(مریم شیخ‌ممو)*

با شکستن یک آهنربای میله‌ای به دو بخش، هر بخش یک آهنربای کامل است که دو قطب دارد. بنابراین نمی‌توان قطب‌های N و S یک آهنربا را از هم جدا کرد.

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۴ و ۸۵)

۳۲- **گزینهٔ «۴»** *(غلامرضا محبی)*

با توجه به قانون دست راست، گزینهٔ «۴» جواب صحیح خواهد بود.



(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)

۳۳- **گزینهٔ «۱»** *(امیراحمد میرسعید)*

نیروی وارد بر بار در میدان مغناطیسی همواره عمود بر سرعت می‌باشد، پس:

$$\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{d}$$

نیرو همواره بر مسیر حرکت عمود است:

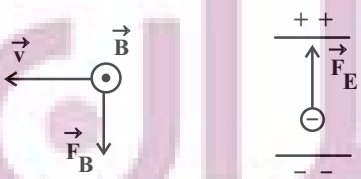
$$W = F\, d \cos\theta = F\, d \cos 90^\circ = 0$$

یعنی نیروی میدان مغناطیسی هرگز کار انجام نمی‌دهد و گزینهٔ «۱» صحیح است.

(فیزیک ۲- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۹ و ۹۰)

۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(پوریا علاقه‌مند)*

ابتدا جهت نیروی مغناطیسی و نیروی الکتریکی وارد بر بار را رسم می‌کنیم:



اکنون چون نیروها در خلاف جهت یکدیگرند، اندازهٔ هر کدام را حساب می‌کنیم:

$$F_B = |q|vB\sin\theta = |q| \times 4\times10^5 \times 6\times10^{-2} \times \sin 90^\circ$$

$$= 24\times10^3 |q|$$

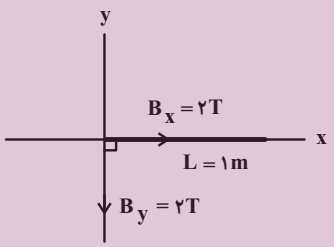
$$F_E = |q|E = 1/6\times10^3 |q|$$

چون $|\vec{F}_B| > |\vec{F}_E|$ است، بار در جهت نیروی $\vec{F}_B$ یعنی رو به پایین منحرف می‌شود.

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۹ و ۹۰)

۳۵- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

با توجه به شکل زیر، فقط مؤلفهٔ B_y میدان مغناطیسی بر سیم نیرو وارد می‌کند. زیرا مؤلفهٔ B_x در راستای سیم است و نیروی وارد بر آن برابر $F_x = ILB_x \sin(0) = 0$ می باشد. بنابراین نیروی وارد بر سیم برابر است با:



$$F_y = ILB_y \sin 90^\circ \xrightarrow[B_y=2T]{I=2A\ ,\ L=1m}$$

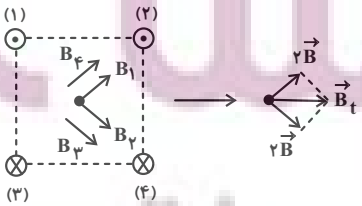
$$F_y = 2\times1\times2\times1 = 4N$$

$$F = F_x + F_y = 0 + 4 = 4N$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)

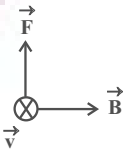
۳۶- **گزینهٔ «۱»** *(مسعود قره‌خانی)*

مطابق قاعدهٔ دست راست ابتدا جهت میدان مغناطیسی هر سیم را در مرکز مربع پیدا می‌کنیم. از آنجا که جریان گذرنده از سیم‌ها یکسان است، میدان مغناطیسی که هر سیم ایجاد می‌کند برابر مقدار $\vec{B}$ است و داریم:



بردار میدان مغناطیسی برایند:

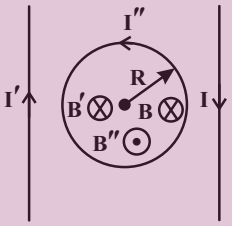
حال به کمک قاعدهٔ دست راست (البته چون الکترون بار منفی دارد از دست چپ استفاده می‌کنیم.) جهت نیروی وارد بر الکترون را پیدا می‌کنیم:



(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۸۹ و ۹۰ و ۹۴ تا ۹۶)

۳۷- **گزینهٔ «۲»** (معصومه شریعت‌ناصری)

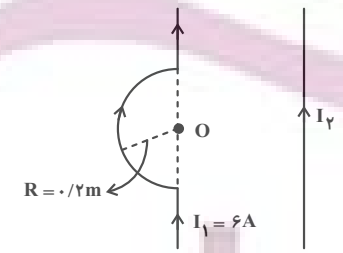
برای این‌که میدان مغناطیسی برایند در مرکز حلقه صفر شود، میدان حاصل از دو سیم باید هم‌جهت باشند و این میدان‌ها با میدان حاصل از حلقه خلاف جهت باشند تا میدان مغناطیسی کل در مرکز حلقه برابر صفر شود. پس جریان سیم سمت چپ باید به سمت بالا باشد و جریان حلقه پادساعتگرد باشد.



(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۹۴، ۹۵، ۹۷ و ۹۸)

۳۸- **گزینهٔ «۲»** (مصطفی کیانی)

ابتدا اندازه و جهت میدان مغناطیسی نیم‌حلقه را در نقطهٔ O تعیین می‌کنیم:



$$B_1 = \frac{\mu_0 NI}{2R} \xrightarrow[R=0/2m\ ,\ \mu_0=12\times10^{-7}\frac{T.m}{A}]{N=\frac{1}{2}\ ,\ I=6A}$$

$$B_1 = \frac{12\times10^{-7}\times\frac{1}{2}\times6}{2\times0/2} = 9\times10^{-6}T \xrightarrow{1T=10^4G}$$

$$B_1 = 9\times10^{-6}\times10^4 = 0/09G$$

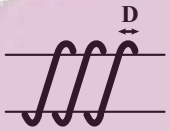
با توجه به قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی نیم‌حلقه در نقطهٔ O درون‌سو $\otimes$ و جهت میدان مغناطیسی سیم راست حامل جریان برون‌سو $\odot$ است. بنابراین، چون اندازهٔ میدان مغناطیسی سیم راست بزرگ‌تر است، جهت برایند میدان‌های مغناطیسی در جهت میدان سیم راست و برون‌سو خواهد بود.

$$B_{کل} = B_2 - B_1 = 0/1 - 0/09 = 0/01G \quad \odot$$

(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۹۴، ۹۵، ۹۷ و ۹۸)

۳۹- **گزینهٔ «۳»** (امیراحمد میرسعید)

اگر قطر مقطع سیم را با D نمایش دهیم:



$$L_{سیملوله} = ND$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I = \mu_0 \frac{N}{ND} I = \mu_0 \frac{I}{D}$$

D : قطر مقطع سیم

$$B = 4\pi\times10^{-7}\times\frac{\frac{100}{\pi}}{1\times10^{-3}} = 4\pi\times10^{-7}\times\frac{100}{\pi\times10^{-3}}$$

$$B = 4\times10^{-2}T = 400G$$

(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۹۹ و ۱۰۰)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** (مصطفی کیانی)

بررسی موارد:

الف) درست

ب) درست؛ هیچ یک از اتم‌های مواد دیامغناطیسی دارای دوقطبی مغناطیسی خالصی نیستند.

پ) نادرست؛ در آهنربای الکتریکی از مواد فرومغناطیسی نرم استفاده می‌شود.

ت) نادرست؛ حضور میدان مغناطیسی خارجی، می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف سوی میدان خارجی، در مواد دیامغناطیسی شود.

(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۲

۴۱- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

عبارت (آ) و (ت) نادرست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

آ) تمامی فلزات به یک اندازه و به یک شدت واکنش نمی‌دهند.

ت) نگه‌دارنده‌ها در مواد غذایی باعث کاهش سرعت واکنش می‌شوند و کاتالیزگرها باعث افزایش سرعت واکنش می‌شوند.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۲)

۴۲- **گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) ۱۳ پیوند دوگانه دارد.

$$C_nH_{2n+2} \rightarrow C_{40}H_{82}$$

تعداد پیوند دوگانه $\frac{26}{2}=13$ $\qquad 82-56=26$

نکته: به ازای هر پیوند دوگانه، ۲ هیدروژن از فرمول آلکان کم می‌شود.

۲) لیکوپن فعالیت رادیکال‌ها را کاهش می‌دهد.

۴) از واکنش‌های ناخواسته جلوگیری می‌کند.

(شیمی ۲- صفحهٔ ۸۹)

۴۳- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین مسلمی)*

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ $B \rightarrow A + 2C$

ب) نادرست؛ سرعت مصرف B با سرعت تولید A برابر است.

پ) به ازای تولید ۲ مول مادهٔ C، ۱ مول مادهٔ B مصرف شده است.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۸۶ تا ۹۱)

۴۴- **گزینهٔ «۲»** *(ایمان حسین‌نژاد)*

$$t_1 = 20 \Rightarrow t_2 = 30$$

$$\bar{R}_{NOBr} = \frac{-\Delta[NOBr]}{\Delta t}$$

$$= \frac{-(0/02-0/024)}{10} = \frac{+0/004}{10} = 0/0004 = 4\times10^{-4}\ \frac{mol}{L.s}$$

$$R_{Br_2} = \frac{1}{2}R_{NOBr}$$

$$R_{Br_2} = \frac{1}{2}(4\times10^{-4}) = 2\times10^{-4}$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۹۰ و ۹۱)

۴۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی)*

$$3Cl_2 + 4H_2O(l) + S(s) \rightarrow H_2SO_4(aq) + 6HCl(aq)$$

$$\underset{t=20\rightarrow t=30}{\Delta V(Cl_2) = 2L\ Cl_2} \Rightarrow \Delta n(Cl_2) = 2L\ Cl_2 \times \frac{1mol\ Cl_2}{20L\ Cl_2}$$

$$= 0/1mol\ Cl_2$$

$$\bar{R}_{Cl_2} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{0/1mol}{(30-20)s} \times \frac{60s}{1min} = 0/6\ \frac{mol}{min}$$

$$\Rightarrow \bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_{Cl_2}}{3} = \frac{0/6}{3} = 0/2\ \frac{mol}{min}$$

$$\frac{\bar{R}_{HCl}}{6} = \frac{\bar{R}_{Cl_2}}{3} \Rightarrow \bar{R}_{HCl} = 2\times\bar{R}_{Cl_2} = 2\times0/6 = 1/2\ \frac{mol}{min}$$

$$\Delta n_{(HCl)} = \bar{R}_{HCl} \times \Delta t = 1/2\ \frac{mol}{min} \times 10s \times \frac{1min}{60s}$$

$$= 0/2mol$$

$$?g\ HCl = 0/2mol\ HCl \times \frac{36/5g\ HCl}{1mol\ HCl} = 7/3g\ HCl$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۸۳ تا ۹۱)

۴۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

گزینهٔ «۱»: واکنش انجام شده طبق معادله زیر با آزاد شدن گاز همراه است.

$$CaCO_3(s) + 2HCl(aq) \rightarrow CaCl_2(aq) + H_2O(l) + CO_2(g)$$

اما از آنجا که ظرف سربسته است، خروج گاز از ظرف امکان‌پذیر نبوده و جرم مخلوط واکنش با گذشت زمان تغییری نخواهد کرد.

گزینهٔ «۲»: با گذشت زمان از سرعت انجام واکنش‌ها کاسته می‌شود. بنابراین قطعاً همواره $\bar{R}_1 > \bar{R}_2$ خواهد بود. اما سرعت کل واکنش $(\bar{R}_3)$ میانگین این دو مقدار است. بنابراین:

$$\bar{R}_1 > \bar{R}_3 > \bar{R}_2$$

ایران‌جوان
توشه‌ای برای موفقیت

گزینهٔ «۳»: فرمول مولکولی بنزوئیک اسید $C_7H_6O_2$ بوده که دارای ۱۵ اتم و ۱۹ پیوند اشتراکی است. بنابراین نسبت تعداد پیوندهای اشتراکی به تعداد اتم‌ها $(\frac{19}{15})$ بزرگ‌تر از یک خواهد بود.

گزینهٔ «۴»: درست

(شیمی ۲- صفحه‌های ۸۲ تا ۸۹)

۴۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی)*

بررسی همهٔ موارد:

الف) نادرست؛ KI کاتالیزگر این واکنش می‌باشد، در نتیجه با افزایش سرعت واکنش، مدت زمان انجام واکنش را کاهش می‌دهد.

ب) درست؛ اگر در این واکنش از آب گرم استفاده کنیم؛ انحلال‌پذیری گاز در آب کاهش می‌یابد و حجم گاز بیشتری جمع‌آوری می‌شود.

پ) نادرست؛ کاهش فشار تنها سرعت واکنش‌هایی را کاهش می‌دهد که واکنش‌دهندهٔ گازی داشته باشد؛ واکنش مطرح شده واکنش‌دهندهٔ گازی ندارد.

ت) درست؛ در همهٔ واکنش‌ها با گذر زمان سرعت انجام واکنش کاهش می‌یابد؛ در نتیجه در این واکنش که ملاک پیشرفت آن تغییر رنگ محلول است قطعاً میزان تغییر شدت رنگ محلول در دقیقهٔ اول نسبت به دقیقهٔ دوم بیشتر است.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۸۱)

۴۸- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

افزایش فشار تنها بر روی سرعت واکنش‌هایی موثر است که حداقل یکی از واکنش‌دهنده‌های آن گازی شکل باشند. با افزایش فشار، غلظت مواد گازی زیاد شده و سرعت واکنش نیز افزایش می‌یابد. چنین شرایطی فقط در واکنش آخر وجود دارد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۴۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

واکنش موازنه شده عبارت است از:

$$Cu(s)+4HNO_3(aq)\rightarrow Cu(NO_3)_2(aq)+2NO_2(g)+2H_2O(l)$$

در ابتدا با استفاده از اطلاعات داده شده، سرعت تولید محلول مس (II) نیترات را در بازهٔ زمانی مشخص شده به دست می‌آوریم:

$$\bar{R}_{Cu(NO_3)_2}=\frac{\Delta[Cu(NO_3)_2]}{\Delta t}$$

$$=\frac{(4/7\times10^{-2}-1/2\times10^{-2})\ mol.L^{-1}}{(260-10)s}$$

$$=\frac{3/5\times10^{-2}\ mol.L^{-1}}{250s}=1/4\times10^{-4}\ mol.L^{-1}.s^{-1}$$

با توجه به ضرایب مولی مواد موجود در واکنش می‌توان گفت:

$$\bar{R}_{NO_2}=2\bar{R}_{Cu(NO_3)_2}=2\times1/4\times10^{-4}$$

$$=2/8\times10^{-4}\ mol.L^{-1}.s^{-1}$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۸۲ تا ۸۸ و ۹۰)

۵۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی)*

همهٔ موارد به درستی بیان شده‌اند؛ ترکیب (الف) بنزوئیک اسید و ترکیب (ب) لیکوپن می‌باشد.

بررسی همهٔ موارد:

مورد اول: بنزوئیک اسید در تمشک و توت‌فرنگی و لیکوپن در هندوانه و گوجه‌فرنگی یافت می‌شود.

مورد دوم: بنزوئیک اسید یک نگهدارنده و لیکوپن یک بازدارنده است؛ در نتیجه هر دوی آن‌ها می‌توانند سرعت واکنش‌های خاصی را کاهش دهند و در نتیجه مدت زمان انجام همان واکنش‌ها را افزایش دهند.

مورد سوم: در ساختار لیکوپن، ۱۳ پیوند دوگانه یافت می‌شود؛ فرمول مولکولی بنزوئیک اسید $(C_7H_6O_2)$ می‌باشد.

مورد چهارم: فرمول مولکولی لیکوپن $C_{40}H_{56}$ است و ۲۶ پیوند $C-C$ در ساختار هر مولکول از خود دارد. $56-26=30$

مورد پنجم: بنزوئیک اسید به خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها تعلق دارد؛ آشناترین عضو این خانواده اتانوئیک اسید می‌باشد.

$$CH_3COOH\ (\text{اتانوئیک‌اسید})\begin{cases}\frac{(2\times4)+(4\times1)+(2\times2)}{2}=8\Rightarrow & \text{جفت } e^- \text{ پیوندی}\\ 2\times2=4\Rightarrow & \text{جفت } e^- \text{ ناپیوندی}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 8+4=12$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۸۲، ۸۸ و ۸۹)

توشه‌ای برای موفقیت

ریاضی ۱

۵۱- **گزینهٔ «۲»** (محمدسباد پیشوایی)

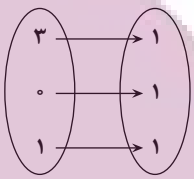
می‌دانیم تابع همانی دارای ضابطهٔ $f(x)=x$ است. پس:

@AzmonVIP

$$f(x)=ax^4+(b-2)x^2+(3+c)x=x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b-2=0\Rightarrow b=2\\ 3+c=1\Rightarrow c=-2\end{cases}$$

پس تابع موردنظر به‌صورت زیر می‌باشد:

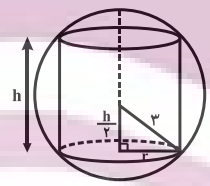


که یک تابع ثابت است.

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحهٔ ۱۱۰)

۵۲- **گزینهٔ «۳»** (سیدرضا اسلامی)

شعاع استوانه را r در نظر می‌گیریم.



ابتدا حجم استوانه را برحسب r و h می‌نویسیم: $V=\pi r^2h$

برای به‌دست آوردن رابطه‌ای بر حسب r و h، در مثلث قائم‌الزاویهٔ رسم‌شده، از قاعدهٔ فیثاغورس کمک می‌گیریم:

$$r^2+\frac{h^2}{4}=9\Rightarrow r^2=9-\frac{h^2}{4}$$

$$\Rightarrow V=\pi r^2h=\pi(9-\frac{h^2}{4})h$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۵۳- **گزینهٔ «۳»** (سعید علم‌پور)

ابتدا مقادیر a و تابع ثابت f را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{(2a+1)x+5}{3x-1}=k\qquad ;x\neq\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow(2a+1)x+5=3kx-k\Rightarrow\begin{cases}2a+1=3k\\ -k=5\end{cases}\Rightarrow k=-5,a=-8$$

حال با توجه به مقدار a داریم:

گزینهٔ «۱»: $g=\{(1,1),(10,-6)\}$ همانی نیست.

گزینهٔ «۲»: $g(x)=-8x$ همانی نیست.

گزینهٔ «۳»: $g=\{(0,0),(3,3)\}$ همانی است.

گزینهٔ «۴»: $g=\{(-8,64),(64,-8)\}$ همانی نیست.

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۵۴- **گزینهٔ «۲»** (حمید علیزاده)

تابع همانی f را به‌صورت $f(x)=x$ و تابع ثابت g را به‌صورت $g(x)=c$ تعریف می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases}\frac{f(3)}{g(3)}+\frac{1}{2}g(3)=\frac{3}{c}+\frac{1}{2}c\\ \frac{5}{f(2)}=\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{c}+\frac{1}{2}c=\frac{5}{2}$$

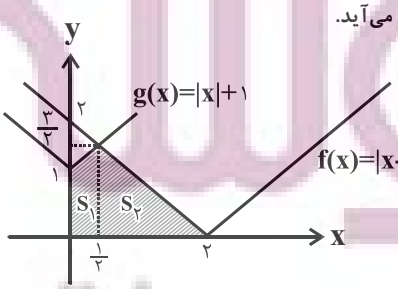
$$\Rightarrow c^2-5c+6=(c-2)(c-3)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c=2\\ \text{یا}\\ c=3\end{cases}\Rightarrow\left|c-\frac{5}{2}\right|=\left|\pm\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۵۵- **گزینهٔ «۴»** (کاظم اجلالی)

نمودار تابع f از انتقال دو واحدی نمودار تابع $y=|x|$ به سمت راست به‌دست می‌آید و نمودار تابع g از انتقال یک واحدی نمودار تابع $y=|x|$ به بالا به‌دست می‌آید.



ایران‌توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$0 \le x \le 2 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x+1 \\ f(x) = -x+2 \end{cases} \Rightarrow x+1 = -x+2$$

$$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

مقدار $S_1 + S_2$ مورد نظر سؤال است.

$$S_1 = \frac{\left(1+\frac{3}{2}\right)\times\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{8} \quad , \quad S_2 = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۵۶- **گزینهٔ «۱»** *(یاسین سپهر)*

سه حالت داریم:

الف) حرف اول با «ی» شروع شده و حرف آخر یکی از حروف (و، ا، ل) باشد:

$$3\times5!\times1$$

ب) حرف اول با یکی از حروف «ف، ت، ب» شروع شده و حرف آخر «ی» باشد:

$$1\times5!\times3$$

پ) حرف اول با یکی از حروف «ف،ت،ب» شروع شده و حرف آخر یکی از حروف «ا، ل، و» باشد:

$$3\times5!\times3$$

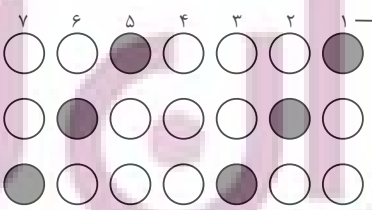
$$\text{مجموع حالات} : 3\times5!+3\times5!+9\times5! = 15\times5!$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۳۲)

۵۷- **گزینهٔ «۱»** *(رحیم مشتاق‌نظم)*

حالت‌هایی که برای سخنرانی این دو نفر در بین افراد رخ می‌دهد به صورت زیر است:

ترتیب سخنرانی‌ها و تعداد حالت‌ها:



$$= 2!\times5!$$

$$= 2!\times5!$$

$$= 2!\times5!$$

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = 3\times2!\times5! = 6\times5! = 6!$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۳۲)

۵۸- **گزینهٔ «۲»** *(وهاب نادری)*

متمم حداقل یک حرف بین دو حرف «r» فاصله وجود داشته باشد این است که حروف «r» در کنار هم باشند.

	حروف «r» کنارهم		کل
	دو حرف e تکراری		
	$\frac{6!}{2!}$		$\frac{7!}{2!\times2!}$
		دو حرف e تکراری	دو حرف r تکراری

$$= 1260 - 360 = 900$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۵۹- **گزینهٔ «۴»** *(سروش موئینی)*

یک بار رقم یکان را ۵ و بار دیگر صفر در نظر می‌گیریم،

$$\text{چهاررقمی} : 4\times4\times3\times1 \quad + \quad 5\times4\times3\times1 = 48+60 = 108$$

یکان صفر — یکان ۵

$$\text{پنج‌رقمی} : 4\times4\times3\times2\times1 \quad + \quad 5\times4\times3\times2\times1 = 96+120 = 216$$

یکان صفر — یکان ۵

$$\text{شش‌رقمی} : 4\times4\times3\times2\times1\times1 + 5\times4\times3\times2\times1\times1 = 216$$

یکان صفر — یکان ۵

$$216+216+108 = 540$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۶۰- **گزینهٔ «۳»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

سه حالت مطلوب وجود دارد:

$$\frac{1}{F}\frac{2}{F}\frac{1}{I}\frac{3}{F}\frac{2}{I}\frac{4}{F}\frac{3}{I} = 4!\,3!$$

$$\frac{1}{F}\frac{1}{I}\frac{2}{F}\frac{2}{I}\frac{3}{F}\frac{3}{I}\frac{4}{F} = 4!\,3!$$

$$\frac{1}{I}\frac{1}{F}\frac{2}{I}\frac{2}{F}\frac{3}{I}\frac{3}{F}\frac{4}{F} = 4!\,3!$$

$$4!\,3!\times3 = 432$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

توسعه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۱

۶۱- **گزینهٔ «۳»** (مریم شیخ‌ممو)

با استفاده از رابطهٔ $F=\frac{۹}{۵}\theta+۳۲$ و با توجه به این‌که $\theta=F-۸$ می‌باشد، به صورت زیر دما برحسب درجهٔ فارنهایت را پیدا می‌کنیم:

$$F=\frac{۹}{۵}\theta+۳۲\xrightarrow{\theta=F-۸}F=\frac{۹}{۵}(F-۸)+۳۲$$

$$\Rightarrow F=\frac{۹}{۵}F-\frac{۷۲}{۵}+۳۲\Rightarrow F-\frac{۹}{۵}F=-\frac{۷۲}{۵}+۳۲$$

$$\Rightarrow\frac{-۴F}{۵}=\frac{-۷۲+۱۶۰}{۵}\Rightarrow -۴F=۸۸\Rightarrow F=-۲۲^\circ F$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۴ و ۸۵)

۶۲- **گزینهٔ «۲»** (هاشم زمانیان)

افزایش طول کل میله برابر است با:

$$\Delta L_{Cu}+\Delta L_{Fe}=۶/۳\times۱۰^{-۳}m$$

$$\Rightarrow L_{Cu}\alpha_{Cu}\Delta\theta+L_{Fe}\alpha_{Fe}\Delta\theta=۶/۳\times۱۰^{-۳}$$

$$\xrightarrow[\alpha_{Cu}=۱/۸\times۱۰^{-۵}\frac{۱}{K}\ \text{و}\ \alpha_{آهن}=۱/۲\times۱۰^{-۵}\frac{۱}{K}]{\Delta\theta=۱۰۰^\circ C}$$

$$L_{Cu}\times۱/۸\times۱۰^{-۵}\times۱۰۰+L_{Fe}\times۱/۲\times۱۰^{-۵}\times۱۰۰=۶/۳\times۱۰^{-۳}$$

$$\Rightarrow ۱/۸L_{Cu}+۱/۲L_{Fe}=۶/۳\quad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم مجموع طول اولیهٔ دو میله برابر با $L_{Cu}+L_{Fe}=۴m$ (۲) است؛ حال داریم:

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\begin{cases}۱/۸L_{Cu}+۱/۲L_{Fe}=۶/۳\\ L_{Cu}+L_{Fe}=۴\xrightarrow{\times(-۱/۲)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱/۸L_{Cu}+۱/۲L_{Fe}=۶/۳\\ \underline{-۱/۲L_{Cu}-۱/۲L_{Fe}=-۴/۸}\end{cases}$$

$$۰/۶L_{Cu}=۱/۵\Rightarrow L_{Cu}=۲/۵m$$

$$\Rightarrow L_{Fe}=۱/۵m$$

درصد طول میله که از مس ساخته شده است:

$$\frac{L_{Cu}}{L}\times۱۰۰=\frac{۲/۵}{۴}\times۱۰۰=۶۲/۵٪$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۸ و ۸۹)

۶۳- **گزینهٔ «۳»** (مهدی سلطانی)

هرگاه اختلاف افزایش حجم مایع و ظرف به اندازهٔ حجم فضای خالی بالای ظرف باشد، مایع در آستانهٔ سرریز شدن قرار می‌گیرد.

$$\Delta V_{مایع}-\Delta V_{ظرف}=۱۰۰cm^۳$$

$$\Delta V_{مایع}=V_{مایع}\beta\Delta\theta$$

$$\Delta V_{ظرف}=V_{ظرف}۳\alpha\Delta\theta$$

$$۱۰۰=(۱۹۰۰\times۵\times۱۰^{-۴}-۲۰۰۰\times۷/۵\times۱۰^{-۵})\Delta\theta$$

$$\Rightarrow\Delta\theta=۱۲۵^\circ C$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۶۴- **گزینهٔ «۲»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

قسمت ابتدایی نمودار، مربوط به حالتی است که جسم گرما دریافت کرده و فقط دمای آن افزایش یافته است. بنابراین داریم:

$$Q_۱=mc\Delta\theta=P.t_۱$$

$$\Rightarrow ۰/۵\times c\times(۷۰-۲۰)=۲۰۰\times۱۰۰\Rightarrow c=۸۰۰\frac{J}{kg.^\circ C}$$

قسمت دوم نمودار که موازی محور زمان است، یعنی در بازهٔ زمانی $۱۰۰s$ تا $۳۰۰s$ گرمای دریافتی توسط جسم صرف تغییر حالت آن (ذوب شدن) می‌شود. داریم:

$$Q_۲=mL_F=Pt_۲\Rightarrow ۰/۵\times L_F=۲۰۰\times(۳۰۰-۱۰۰)$$

$$\Rightarrow L_F=۸۰۰۰۰\frac{J}{kg}$$

در نهایت داریم:

$$\frac{c}{L_F}=\frac{۸۰۰}{۸۰۰۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۱۰)

۶۵- **گزینهٔ «۱»** (غلامرضا محبی)

ابتدا تعادل گرمایی را بین m گرم آب $\theta^\circ C$ با مثلاً m' گرم آب $۸۰^\circ C$ درنظر بگیرید و سپس در حالت دوم می‌توان فرض کرد که دمای تعادل بین $۴m$ گرم آب $\theta^\circ C$ و m' گرم آب $۸۰^\circ C$ برابر $۴۰^\circ C$ شده است. ابتدا تعادل جرم m با m' گرم آب ۸۰ درجه را در نظر بگیرید.

$$\Rightarrow mc(۵۰-\theta)=m'c(۸۰-۵۰)$$

ایران‌جوان
توشه‌ای برای موفقیت

اکنون تعادل جرم $۴m$ با m' گرم آب ۸۰ درجه را در نظر بگیرید.

$$\Rightarrow ۴mc(۴۰-\theta)=m'c(۸۰-۴۰)$$

بنابراین از تقسیم دو رابطه خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}} \frac{۵۰-\theta}{۴(۴۰-\theta)}=\frac{۳۰}{۴۰}=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow ۵۰-\theta=۱۲۰-۳\theta \Rightarrow \theta=۳۵^\circ C$$

$$\Rightarrow T=۳۵+۲۷۳=۳۰۸K$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۱۰)

۶۶- **گزینهٔ «۳»** (مصطفی کیانی)

ابتدا کل گرمایی که یخ می‌گیرد تا از $۰^\circ C$ به آب $۵۰^\circ C$ تبدیل شود، می‌یابیم. به همین منظور با توجه به طرح‌وارهٔ زیر داریم:

یخ $۰^\circ C$ $\xrightarrow{Q_۱=mL_F}$ آب $۰^\circ C$ $\xrightarrow{Q_۲=mc\Delta\theta}$ آب $۵۰^\circ C$

$$Q_{کل}=Q_۱+Q_۲ \Rightarrow Q_{کل}=mL_F+mc_{آب}\Delta\theta$$

$$\xrightarrow[c_{آب}=۴/۲\frac{kJ}{kg.^\circ C}]{m=۱kg\ ,\ L_F=۳۳۶\frac{kJ}{kg}}$$

$$Q_{کل}=۱\times۳۳۶+۱\times۴/۲\times(۵۰-۰)=۵۴۶kJ$$

اکنون به صورت زیر، t را پیدا می‌کنیم:

$$P=\frac{Q}{t} \xrightarrow[Q=۵۴۶kJ]{P=۱kW} ۱=\frac{۵۴۶}{t} \Rightarrow t=۵۴۶s$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۲)

۶۷- **گزینهٔ «۳»** (مریم شیخ‌ممو)

از بین موارد داده شده، موردهای (الف)، (ب) و (پ) درست و مورد (ت) نادرست است. بنابراین، سه مورد از موارد داده شده درست می‌باشد. دقت کنید با افزایش سطح مایع، فاصلهٔ مولکول‌ها از سطح مایع کمتر می‌شود و سریع‌تر می‌توانند مایع را ترک کنند. همچنین افزایش فشار بر سطح مایع باعث می‌شود مولکول‌ها به سهولت از سطح مایع جدا نشوند، در نتیجه آهنگ تبخیر سطحی کندتر انجام گیرد. در ضمن، تبخیر سطحی در هر دمایی رخ می‌دهد و لازم نیست مایع به نقطهٔ جوش خود برسد.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

۶۸- **گزینهٔ «۱»** (مصطفی واثقی)

جرم آب بخار شده m و جرم یخ ایجاد شده m' است. در نتیجه:

$$\begin{cases} m+m'=۱۴۰ & * \\ mL_V=m'c|\Delta\theta|+m'L_F \\ \Rightarrow ۲۲۶۸۰۰۰m=(m'\times۴۲۰۰\times۱۰)+۳۳۶۰۰۰m' \\ \Rightarrow ۶m=m' & ** \end{cases}$$

با حل کردن دو معادلهٔ (*) و (**) مقادیر $m=۲۰g$ و $m'=۱۲۰g$ به‌دست می‌آید.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۱۱)

۶۹- **گزینهٔ «۴»** (غلامرضا محبی)

تنها گزارهٔ (پ) درست بیان نشده است.

انتقال گرما از طریق همرفت و رسانش به محیط مادی نیاز دارد. برخلاف این روش‌های انتقال گرما، تابش به محیط مادی نیاز ندارد و به همین دلیل انتقال گرما از طریق تابش، تنها راه انتقال گرما در خلأ است.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۸ تا ۹۴ و ۱۱۱ تا ۱۱۷)

۷۰- **گزینهٔ «۳»** (مسعود قره‌خانی)

مطابق قانون گازهای کامل می‌توان نوشت:

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱}=\frac{P_۲V_۲}{T_۲}$$

فشار ۲۰ درصد افزایش یافته، یعنی: $P_۲=۱/۲P_۱$

دما $۳۰^\circ C$ افزایش یافته و باید آن را به دمای مطلق تبدیل کنیم یعنی:

$$T_۱=۲۷۳+۲۷=۳۰۰K \quad و \quad T_۲=۳۳۰K$$

حجم سرنگ از فرمول $V=Ah$ به‌دست می‌آید و از آنجا که A ثابت است تنها تغییر h یعنی طول استوانهٔ هوا، حجم را تغییر می‌دهد و می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{P_۱\times A\times۱۸}{۳۰۰}=\frac{۱/۲P_۱\times A\times h}{۳۳۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{۱/۲h}{۳۳} \Rightarrow h=\frac{۹۹}{۶}=۱۶/۵cm$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۳)

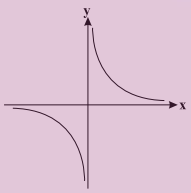
بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی
تیزهوشان
توشه‌ای برای موفقیت

حسابان ۲

۷۱- **گزینهٔ «۴»** (محمدمصطفی ابراهیمی)

اگر $f(x)$ اکیداً صعودی و همواره مثبت باشد، آنگاه $\frac{1}{f(x)}$ اکیداً نزولی است. تابع $y=\sqrt{x}$ اکیداً صعودی است، پس تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ اکیداً نزولی خواهد بود. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: نمودار $y=\frac{1}{x}$ شبیه شکل زیر است.

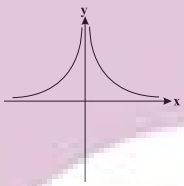


این تابع غیریکنواست.

گزینهٔ «۲»:

$$y=\frac{1}{|x|}=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ -\frac{1}{x} & x<0\end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



گزینهٔ «۳»: به ازای xهای مثبت چون با افزایش مقادیر x، مقدار x^2 زیاد می‌شود، پس مقادیر $\frac{1}{x^2}$ کم می‌شود. به علاوه به ازای xهای منفی چون با افزایش مقادیر x، مقادیر x^2 کم می‌شود، پس $\frac{1}{x^2}$ زیاد می‌شود.

تابع غیریکنواست.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

۷۲- **گزینهٔ «۱»** (محمدحسن سلامی‌حسینی)

$$R=f(-2)=-8+8+6+a=a+6$$

$$f(x)=(x+2)g(x)+(a+6)\ ,\ f(-1)=g(-1)\qquad (1)$$

پس:

$$f(-1)=(-1+2)g(-1)+a+6\Rightarrow f(-1)=g(-1)+a+6\xrightarrow{(1)}a+6=0$$

$$\Rightarrow a=-6\rightarrow f(\frac{a}{3})=f(-2)=-8+8+6-6=0$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۷۳- **گزینهٔ «۴»** (سعید مدیرشراسانی)

مراحل تبدیل نمودار به‌صورت زیر است:

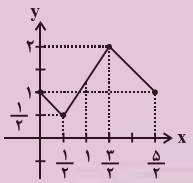
$$f(x)\xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال ۳ واحد}}f(x+3)\xrightarrow[\text{باضریب ۲}]{\text{انقباض افقی}}f(2x+3)$$

$$\xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{قرینه نسبت به}}f(-2x+3)\xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}}$$

$$-f(3-2x)\xrightarrow[\text{باضریب ۲}]{\text{انقباض عمودی}}-\frac{1}{2}f(3-2x)$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{\text{انتقال یک}}-\frac{1}{2}f(3-2x)+1$$

با انجام تبدیلات فوق، نمودار به صورت زیر در می‌آید:



(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۷۴- **گزینهٔ «۲»** (محمدحسن سلامی‌حسینی)

می‌دانیم اگر $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ نزولی اکید باشد $-f(-x)$ نیز در بازهٔ $[-b,-a]$ نزولی اکید است پس کافیست فقط محدودهٔ $[-3,0]$ را در نظر بگیریم:

$$-3\le x\le 0\rightarrow -1\le x+2\le 2$$

پس ورودی قسمت نزولی اکید در محدودهٔ $[-1,2]$ است حال در تابع جدید داریم:

$$-1\le\frac{4-x}{2}\le 2\Rightarrow -2\le 4-x\le 4\Rightarrow 6\ge x\ge 0$$

سایر انتقالات نقشی در صعودی یا نزولی بودن تابع ندارند.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

ایران‌توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۷۵- **گزینهٔ «۲»** *(حمید علیزاده)*

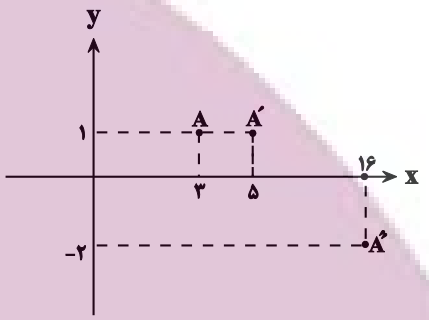
$A=(۳,۱)\in y=f(۲x-۱)\Rightarrow ۱=f(۲(۳)-۱)\Rightarrow f(۵)=۱$

پس نقطهٔ $A'(۵,۱)$ واقع بر منحنی تابع $y=f(x)$ می‌باشد.

$$A'(۵,۱)\xrightarrow{\text{xهامنهای یک}}(۴,۱)\xrightarrow{\text{xهاتقسیم بر }\frac{۱}{۴}}(۱۶,۱)$$

$$\xrightarrow{\text{yهادر۳- ضرب}}(۱۶,-۳)\xrightarrow{\text{yهابااضافه یک}}A''(۱۶,-۲)$$

$f(۵)=۱\Rightarrow \frac{۱}{۴}x+۱=۵\Rightarrow x=۱۶$

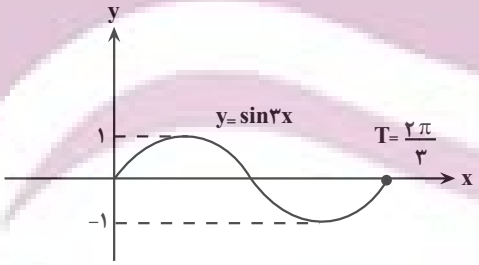


تابع یکنواست ⇒ تابع نزولی است $\Rightarrow g=\{(۳,۱),(۵,۱),(۱۶,-۲)\}$

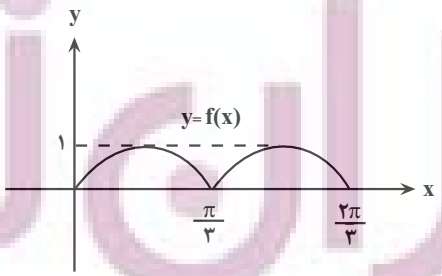
(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲ و ۱۵ تا ۱۸)

۷۶- **گزینهٔ «۳»** *(عباس اشرفی)*

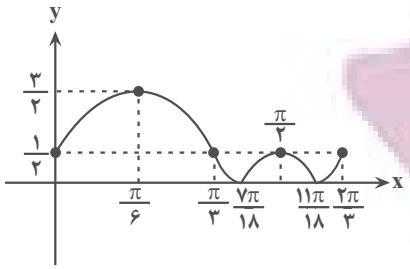
نمودار $y=\sin ۳x$ را در یک دورهٔ تناوبش رسم می‌کنیم و از روی آن نمودارهای دو تابع f و g را می‌کشیم تا دورهٔ تناوب آنها را تعیین کنیم.



نمودار صحیح تابع $f(x)=|\sin ۳x|$:



نمودار صحیح تابع $g(x)=\left|\sin ۳x+\frac{۱}{۲}\right|$:



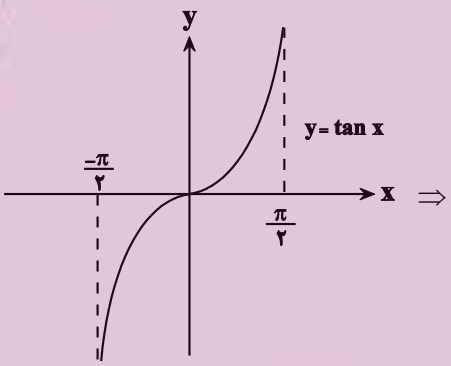
همانطور که از نمودار توابع f و g مشخص است دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۲\pi}{۳}$ و داریم:

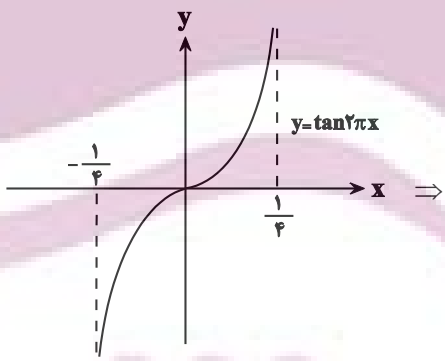
$$\frac{T_f}{T_g}=\frac{۱}{۲}$$

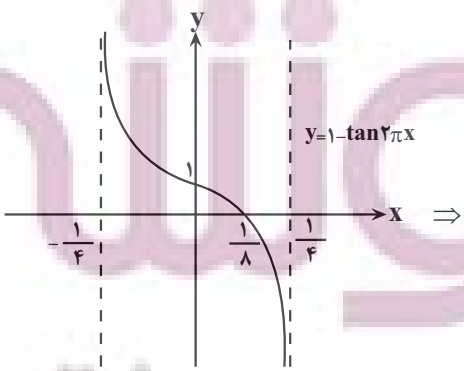
(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۷۷- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کرمی)*

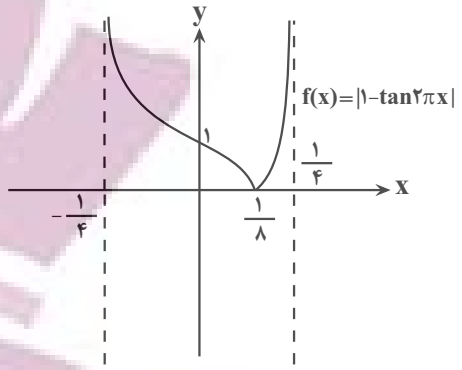
نمودار تابع f را در یک دوره تناوب رسم می‌کنیم:







ایران‌تونیک
توشه‌ای برای موفقیت



تابع در بازهٔ $(\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴})$ یکنوا است.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۷۸- **گزینهٔ «۳»** (فرشاد حسن‌زاده)

مبدأ مختصات روی نمودار تابع f قرار دارد، پس:

$$f(۰)=۰\Rightarrow a\cos(-\frac{۲\pi}{۳})+۱=a(\frac{-۱}{۲})+۱=۰\Rightarrow a=۲$$

از طرفی طبق فرض:

$$S_{\Delta ABC}=۳/۵\pi\Rightarrow\frac{۱}{۲}(۳\times AC)=۳/۵\pi\Rightarrow AC=\frac{۷\pi}{۳}$$

همچنین طبق نمودار، نقطهٔ A اولین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ قبل از $x=۰$ و نقاط D و C به ترتیب دومین و چهارمین ریشهٔ همین معادله است:

$$f(x)=۰\Rightarrow\cos(bx-\frac{۲\pi}{۳})=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow bx-\frac{۲x}{۳}=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow bx-\frac{۲\pi}{۳}=...,\underset{x_A}{\frac{-۴\pi}{۳}},\underset{x=۰}{\frac{-۲\pi}{۳}},\frac{۲\pi}{۳},\underset{x_D}{\frac{۴\pi}{۳}},\frac{۸\pi}{۳},\underset{x_C}{\frac{۱۰\pi}{۳}}$$

$$(bx_C-\frac{۲\pi}{۳})-(bx_A-\frac{۲\pi}{۳})=\frac{۱۴\pi}{۳}\Rightarrow b(\underbrace{x_C-x_A}_{\frac{۷\pi}{۳}})=\frac{۱۴\pi}{۳}\Rightarrow b=۲$$

پس ضابطهٔ تابع $f(x)=۲\cos(۲x-\frac{۲\pi}{۳})+۱$ است و داریم:

$$f(\frac{۲۳\pi}{۱۲})=۲\cos(\frac{۱۹\pi}{۶})+۱=-۲\cos\frac{\pi}{۶}+۱=-\sqrt{۳}+۱$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۷۹- **گزینهٔ «۲»** (محمدحسن سلامی‌حسینی)

$$۰<x<\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow-\frac{\pi}{۱۲}<۳x-\frac{\pi}{۱۲}<۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}\quad(۱)$$

چون a و b هر دو مثبت هستند پس مینیمم تابع زمانی است که $\sin(۳x-\frac{\pi}{۱۲})$ دارای بیشترین مقدار باشد که با توجه به (۱) داریم:

$۳x_۱-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۲}$ و در نتیجه $x_۱=\frac{۷\pi}{۳۶}$ و نیز ماکزیمم تابع زمانی است که $\sin(۳x-\frac{\pi}{۱۲})$ دارای کمترین مقدار باشد که با توجه به (۱) داریم:

$$۳x_۲-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow x_۲=\frac{۱۹\pi}{۳۶}$$

$$x_۲-x_۱=\frac{۱۹\pi}{۳۶}-\frac{۷\pi}{۳۶}=\frac{۱۲\pi}{۳۶}=\frac{\pi}{۳}$$

پس:

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۸۰- **گزینهٔ «۳»** (نیما کریوریان)

$$f(x)=a\tan((bx+۱)\frac{\pi}{۲})=a\tan(\frac{b\pi}{۲}x+\frac{\pi}{۲})$$

$$۲T=\frac{۴}{۳}\Rightarrow T=\frac{۲}{۳},T=\frac{\pi}{|\frac{b\pi}{۲}|}\Rightarrow|b|=۳\Rightarrow b=\pm۳$$

با فرض $b=۳$ و جایگذاری مختصات نقطهٔ $(\frac{۱}{۹},۱)$ در تابع f مقدار a را نیز مشخص می‌کنیم:

$$f(x)=a\tan(\frac{۳\pi}{۲}x+\frac{\pi}{۲})\Rightarrow۱=a\tan(\frac{۳\pi}{۲}\times\frac{۱}{۹}+\frac{\pi}{۲})$$

$$\Rightarrow۱=a\tan(\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۲})\Rightarrow a=\frac{-۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\sqrt{۳}a+b=-۱+۳=۲$$

توجه: به ازای $b=-۳$، مقدار $a=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ به‌دست می‌آید که در آن‌صورت، عبارت مورد نظر برابر ۲- خواهد شد.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

ایران‌آموزش
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۳

۸۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

بنابراین برای توان‌های طبیعی ماتریس A داریم:

$$A^n=\begin{cases}I: n\text{ زوج}\\ A: n\text{ فرد}\end{cases}$$

$$A^{10}-A^9=I-A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های این ماتریس، برابر ۱ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۸۲- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه خاکپاش)*

برای به دست آوردن درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول ماتریس BCA، کافی است سطر دوم ماتریس B را در ماتریس C ضرب کرده و سپس حاصل را در ستون اول ماتریس A ضرب کنیم. اگر $D=BCA$ باشد، آنگاه داریم:

$$d_{21}=\begin{bmatrix}1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ -3 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16 & 30 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 2\end{bmatrix}=134$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۸۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$\begin{bmatrix}1 & x & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -x\\ a\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2+x & 2 & 1-x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -x\\ a\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 2x+x^2-2x+a-ax=0$$

$$\Rightarrow x^2-ax+a=0$$

شرط وجود یک جواب: $\Delta=0\Rightarrow a^2-4a=0\Rightarrow a(a-4)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=0\ \text{غ ق ق}\\ a=4\end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۸۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

در یک ماتریس قطری تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی برابر صفر هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}x+2y=0\\ x-y+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}=9I$$

$$\Rightarrow A^4=(9I)^2=81I\Rightarrow A^5=A^4\times A=81A$$

$$\Rightarrow A^4+A^5=81I+81A=81(I+A)$$

$$=81\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\right)=81\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=81(-2+4)=162$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۲ تا ۲۱)

۸۵- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

دو ماتریس A و $3I-A$ وارون هم هستند، بنابراین داریم:

$$A^{-1}=3I-A\Rightarrow A+A^{-1}=3I$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$\Rightarrow (A+A^{-1})^{2} = (3I)^{2} = 9I^{2} = 9I = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 9+9 = 18$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۸۶- **گزینهٔ «۱»** (جواد حاتمی)

$$AB = B + 2I \Rightarrow AB - B = 2I \Rightarrow \frac{1}{2}(A-I)B = I$$

یعنی ماتریس B، وارون ماتریس $\frac{1}{2}(A-I)$ است. داریم:

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-I)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = (\frac{1}{2}(A-I))^{-1} = 2(A-I)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۸۷- **گزینهٔ «۲»** (جواد حاتمی)

$$A^{3} + A^{2} + A + I = \bar{O} \Rightarrow A^{3} = -A^{2} - A - I \qquad (1)$$

$$A^{3} + A^{2} + A + I = \bar{O} \Rightarrow -A^{3} - A^{2} - A = I$$

$$\Rightarrow A(-A^{2} - A - I) = I \Rightarrow A^{-1} = -A^{2} - A - I \xrightarrow{(1)} A^{-1} = A^{3}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۸۸- **گزینهٔ «۲»** (محمد خندان)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m \\ 3m \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2m}{3m} = \frac{2}{3}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

۸۹- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ در صورتی فاقد جواب است که $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{m+1}{1} = \frac{3}{m-1} \Rightarrow (m+1)(m-1) = 3$$

$$\Rightarrow m^{2} - 1 = 3 \Rightarrow m^{2} = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

حال به ازای هر یک از مقادیر به دست آمده، برقراری رابطهٔ $\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ را بررسی می‌کنیم.

$m = 2 \Rightarrow \frac{3}{2-1} \neq \frac{2}{2}$ دستگاه جواب ندارد.

$m = -2 \Rightarrow \frac{3}{-2-1} = -\frac{2}{2}$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه ۲۶)

۹۰- **گزینهٔ «۴»** (محمدمهدی ابوترابی)

اگر $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & -5 \end{bmatrix}$، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -b & a \end{bmatrix} \xrightarrow{|A|=17} A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -34 \\ -4b + 7a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{7a - 4b}{17} \end{bmatrix} \Rightarrow x = -2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۶)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ریاضیات گسسته

۹۱- **گزینهٔ «۴»** *(نیلوفر مهدوی)*

دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱) از ۳۳ روز قبل تا ۱۲ روز بعد، ۴۵= ۱۲+۳۳ روز فاصله است. $۴۵ \overset{۷}{\equiv} ۳$

۲) از ۴۸ روز قبل تا ۱۲ روز بعد، ۶۰=۱۲+۴۸ روز فاصله است. $۶۰ \overset{۷}{\equiv} ۴$

۳) از ۴۶ روز قبل تا ۱۲ روز بعد، ۵۸=۱۲+۴۶ روز فاصله است. $۵۸ \overset{۷}{\equiv} ۲$

۴) از ۳۵ روز قبل تا ۱۲ روز بعد، ۴۷=۱۲+۳۵ روز فاصله است. $۴۷ \overset{۷}{\equiv} ۵$

در گزینهٔ «۴»، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد بر ۷، دقیقاً با روز شنبه تطابق دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۲۴)

۹۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید عددی طبیعی که دارای ویژگی صورت سوال باشد را با x نمـایش دهیم. در این صورت داریم:

$$۷x+۵ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷x \overset{۹}{\equiv} -۵ \overset{۹}{\equiv} -۱۴$$

$$\xrightarrow[(۷,۹)=۱]{+۷} x \overset{۹}{\equiv} -۲ \Rightarrow x = ۹k-۲ \ (k \in Z)$$

$$۱۰ \le x \le ۹۹ \Rightarrow ۱۰ \le ۹k-۲ \le ۹۹ \Rightarrow ۱۲ \le ۹k \le ۱۰۱$$

$$\xrightarrow{k \in Z} ۲ \le k \le ۱۱$$

بنابراین به ازای ۱۰ مقدار k، x عددی طبیعی و دو رقمی است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۹۳- **گزینهٔ «۴»** *(سامان اسپهرم)*

$$۱۰۰۰ = ۷ \times ۱۴۲ + ۶ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ \overset{۷}{\equiv} -۱۲$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} -۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۹۴- **گزینهٔ «۲»** *(علی منصف‌شکری)*

$$\left.\begin{array}{l} \frac{۱۴۰۰}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a \mid ۱۴۰۰ \\ \frac{a}{۲۰} \in \mathbb{N} \Rightarrow ۲۰ \mid a \Rightarrow a = ۲۰k \end{array}\right\} \Rightarrow ۲۰k \mid ۱۴۰۰ \Rightarrow k \mid ۷۰$$

مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی $۷۰ = \{۱, ۲, ۵, ۷, ۱۰, ۱۴, ۳۵, ۷۰\}$

بنابراین ۸ عدد طبیعی برای a وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۹۵- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \Rightarrow x \overset{۶}{\equiv} ۱ \overset{۶}{\equiv} ۱۹ \\ x \in B \Rightarrow x \overset{۸}{\equiv} ۳ \overset{۸}{\equiv} ۱۹ \end{array}\right\} \Rightarrow x \overset{[۶,۸]}{\equiv} ۱۹ \Rightarrow x \overset{۲۴}{\equiv} ۱۹ \overset{۲۴}{\equiv} -۵ \Rightarrow x = ۲۴k-۵$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

$$\left.\begin{array}{l} (a, ۶) = ۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۳ \text{ یا } ۶ \\ (b, ۷) = ۱ \text{ یا } ۷ \end{array}\right\} \Rightarrow (a, ۶) = (b, ۷) = ۱$$

$$(a, ۶) = ۱ \Rightarrow (a, ۲ \times ۳) = ۱ \Rightarrow \begin{cases} (a, ۲) = ۱ \\ (a, ۳) = ۱ \end{cases} \Rightarrow (a, ۲) = (a, ۳)$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

اعداد $a=۷\times۵$ و $b=۶\times۵$، مثال نقض گزینه‌های «۱» و «۲» هستند.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۹۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن (بخش‌پذیری) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a+۴\mid a+۴\xrightarrow{\times a} a+۴\mid a^۲+۴a \\ a+۴\mid a^۲+۲ \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تفاضل}} a+۴\mid ۴a-۲$$

$$\left.\begin{array}{l} a+۴\mid a+۴\xrightarrow{\times ۴} a+۴\mid ۴a+۱۶ \\ a+۴\mid ۴a-۲ \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تفاضل}} a+۴\mid ۱۸$$

بنابراین $a+۴$ باید یکی از مقسوم‌علیه‌های ۱۸ باشد. با توجه به اینکه a عددی طبیعی است، پس $a+۴\geq ۵$ و در نتیجه داریم:

$$a+۴=۶\Rightarrow a=۲$$

$$a+۴=۹\Rightarrow a=۵$$

$$a+۴=۱۸\Rightarrow a=۱۴$$

یعنی به ازای ۳ عدد طبیعی a، عدد $a^۲+۲$ بر عدد $a+۴$ بخش‌پذیر است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۹۸- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه شاکپاش)*

طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a=۶q+۱\xrightarrow{\times ۴} ۴a=۲۴q+۴ \\ a=۸q'+۵\xrightarrow{\times ۳} ۳a=۲۴q'+۱۵ \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تفاضل}} a=۲۴(q-q')-۱۱$$

$$\Rightarrow a=۲۴(q-q')-۲۴+۲۴-۱۱=۲۴\underbrace{(q-q'-۱)}_{q''}+۱۳$$

$$\Rightarrow a=۲۴q''+۱۳$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۴، برابر ۱۳ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۹۹- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$\overline{ababf}\overset{۱۱}{\equiv}۴-b+a-b+a\overset{۱۱}{\equiv}۲a-۲b+۴\overset{۱۱}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow ۲a-۲b\overset{۱۱}{\equiv}-۴\xrightarrow[(۲,۱۱)=۱]{+۲}a-b\overset{۱۱}{\equiv}-۲$$

به ازای $a=۷$ و $b=۹$، بزرگ‌ترین مقدار $a+b$ حاصل می‌شود که برابر $a+b=۱۶$ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** *(فرزانه شاکپاش)*

دو عدد $۲a+۹$ و $۷a-۴$ در یک دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۱۱ قرار دارند، پس این دو عدد به پیمانه ۱۱ هم‌نهشت هستند.

$$۷a-۴\overset{۱۱}{\equiv}۲a+۹\Rightarrow ۵a\overset{۱۱}{\equiv}۱۳\overset{۱۱}{\equiv}۱۳+۲\times۱۱\overset{۱۱}{\equiv}۳۵$$

$$\xrightarrow[(۵,۱۱)=۱]{+۵}a\overset{۱۱}{\equiv}۷$$

$$a\overset{۱۱}{\equiv}۷\xrightarrow{\text{به توان ۳}}a^۳\overset{۱۱}{\equiv}۳۴۳\overset{۱۱}{\equiv}۳-۴+۳\overset{۱۱}{\equiv}۲$$

$$a\overset{۱۱}{\equiv}۷\xrightarrow{\text{به توان ۲}}a^۲\overset{۱۱}{\equiv}۴۹\overset{۱۱}{\equiv}۵$$

$$a\overset{۱۱}{\equiv}۷\xrightarrow{\times ۳}۳a\overset{۱۱}{\equiv}۲۱\overset{۱۱}{\equiv}۱۰$$

$$a^۳+a^۲+۳a+b\overset{۱۱}{\equiv}۷\Rightarrow ۲+۵+۱۰+b\overset{۱۱}{\equiv}۷$$

$$\Rightarrow b\overset{۱۱}{\equiv}-۱۰\overset{۱۱}{\equiv}۱\Rightarrow b=۱۱k+۱\ (k\in Z)$$

پس به ازای $b=۱$، عدد $a^۳+a^۲+۳a+b$ به $[۷]_{۱۱}$ تعلق دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۵)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۳

۱۰۱- **گزینهٔ «۲»** *(مسعود قره‌خانی)*

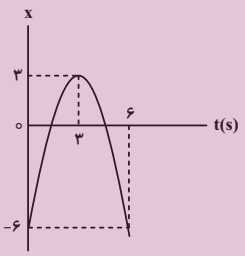
$$\begin{cases} t_1 = 3s \Rightarrow v_1 = 3\times 3^2 - 6\times 3 = 9\frac{m}{s} \\ t_2 = 6s \Rightarrow v_2 = 3\times 6^2 - 6\times 6 = 72\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{72-9}{3} = \frac{63}{3} = 21\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱۰۲- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

روش اول: با رسم نمودار مکان- زمان می‌توان مسافت را به دست آورد. در بازهٔ زمانی صفر تا $3s$ متحرک مسافت $9m$ را طی می‌کند و در بازهٔ $3s$ تا $6s$ نیز مسافت $9m$ را طی می‌کند.

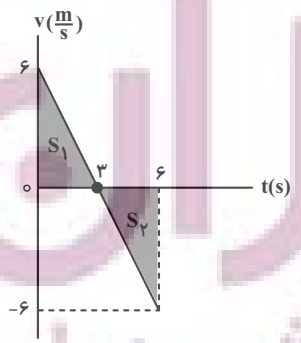


$$L = 9+9 = 18m$$

روش دوم: (رسم نمودار $v-t$)؛ با مقایسهٔ معادلهٔ مکان- زمان به صورت $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}a = -1 \Rightarrow a = -2\frac{m}{s^2} \\ v_0 = 6\frac{m}{s} \end{array}\right\} \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow v = -2t + 6$$

اکنون نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم:



$$L = |S_1| + |S_2|$$

$$L = \left|\frac{1}{2}\times 3\times 6\right| + \left|\frac{1}{2}\times 3\times 6\right| = 18m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۰)

۱۰۳- **گزینهٔ «۲»** *(میثم رشتیان)*

اگر برای هر قسمت از رابطهٔ $\Delta x = v_{av}\Delta t$ استفاده کنیم، داریم:

(۱) $\Delta x_1 = 6\times 2 = 12m$

(۲) $\Delta x_2 = -0/8\times 5 = -4m$

(۳) $\Delta x_3 = 4\times(t'-7) = 4t'-28$

$$s'_{av_{[0,t']}} = \frac{\ell_{[0,t']}}{\Delta t},\quad \ell_{[0,t']} = \underbrace{|\Delta x_1|}_{12} + \underbrace{|\Delta x_2|}_{4} + \underbrace{|\Delta x_3|}_{4t'-28}$$

$$= 4t'-12$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{4t'-12}{t'} \Rightarrow t' = 12s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۰۴- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قره‌خانی)*

از آنجایی که در بازهٔ زمانی ۳ تا ۵ ثانیه سرعت متحرک منفی است، پس هیچ تغییر جهتی رخ نداده است. بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی با مسافت یکسان است. اما از آنجا که سرعت منفی است، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند پس جابه‌جایی منفی است.

$$s = 20m \Rightarrow \Delta x = -20$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۰۵- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

با توجه به نمودار شتاب- زمان، تا لحظهٔ t_1 شتاب منفی و در لحظه‌های بعد از لحظهٔ t_1 شتاب مثبت است. با توجه به این‌که سرعت اولیهٔ متحرک منفی است، بنابراین در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 سرعت و شتاب هم‌علامت‌اند، لذا حرکت شتاب‌دار تندشونده است. برای لحظه‌های بعد از لحظهٔ t_1، شتاب مثبت و سرعت منفی است، بنابراین، حرکت شتاب‌دار کندشونده می‌شود و از یک زمانی به بعد سرعت مثبت می‌شود و شتاب هم مثبت است، بنابراین حرکت در نهایت تندشونده می‌شود.

ایران قلم
توشه‌ای برای موفقیت

دقت کنید، تغییرات اندازهٔ شتاب در نوع حرکت تاثیری ندارد، بلکه نوع حرکت را علامت شتاب و سرعت، با هم مشخص می‌کنند.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۰۶- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

چون در لحظه‌های $t_1 = 1s$ و $t_2 = 3s$ شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان برابر صفر است، لذا در این لحظه‌ها سرعت متحرک برابر صفر می‌باشد، بنابراین، بنابه رابطهٔ $a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ شتاب متحرک صفر می‌باشد.

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow[t_1=1s\ ,\ t_2=3s]{v_1=v_2=0} a_{av} = \frac{0-0}{3-1} = 0$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱۰۷- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

ابتدا با مقایسهٔ معادلهٔ مکان- زمان جسم با معادلهٔ مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت، شتاب جسم را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ x = -2t^2 + 8t - 10 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}a = -2 \Rightarrow a = -4\frac{m}{s^2}$$

اکنون با استفاده از قانون دوم نیوتون، نیروی خالص وارد بر جسم را می‌یابیم:

$$F_{net} = ma \xrightarrow[a=-4\frac{m}{s^2}]{m=0/5kg} F_{net} = 0/5 \times (-4) = -2N$$

$$\Rightarrow |F_{net}| = 2N$$

چون $F_{net} < 0$ است، جهت آن در سوی مخالف محور x می‌باشد.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

۱۰۸- **گزینهٔ «۳»** *(مریم شیخ‌ممو)*

ابتدا با استفاده از قانون دوم نیوتون برایند نیروهای وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.

$$\vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow[m=3kg]{\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}} \vec{F} = 3 \times (2\vec{i} - 3\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 6\vec{i} - 9\vec{j}$$

از طرف دیگر برایند نیروهای وارد بر جسم برابر جمع برداری نیروهای وارد بر آن است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow 6\vec{i} - 9\vec{j} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{i} - 9\vec{j} + \vec{F}_3$$

$$\Rightarrow \vec{F}_3 = -3\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۱۰۹- **گزینهٔ «۳»** *(محمد سالکی)*

زمانی که نخ را به سرعت می‌کشیم، زمان انتقال نیرو به گوی وجود ندارد و طبق قانون اول نیوتون، جسم تمایل دارد حالت اولیهٔ خود را حفظ کند. در نتیجه نخ (۲) پاره می‌شود. زمانی که نیروی وارد بر گوی به آرامی افزایش یابد، زمان کافی برای انتقال نیرو به گوی وجود دارد و چون نیروی وارد بر نخ (۱) به اندازهٔ وزن گوی بیشتر از نیروی وارد بر نخ (۲) است، نخ (۱) پاره می‌شود.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۱۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(محمد سالکی)*

نیرویی که از طرف شخص به جعبه وارد می‌شود، به سمت راست است و نیرویی که از طرف زمین به جعبه وارد می‌شود به سمت پایین است. بنابراین طبق قانون سوم نیوتون واکنش این دو نیرو از طرف جعبه به شخص به سمت غرب و از طرف جعبه به زمین به سمت بالا است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۴ و ۳۵)

ایران‌توشه
توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۳

۱۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(ایمان حسین‌نژاد)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۲) چند هزار سال پیش از میلاد، انسان‌ها برای نظافت از موادی شبیه صابون امروزی استفاده می‌کردند.

۳) وبا یک بیماری واگیردار است که به دلیل نبود بهداشت و آلوده شدن آب به سرعت شیوع می‌یابد.

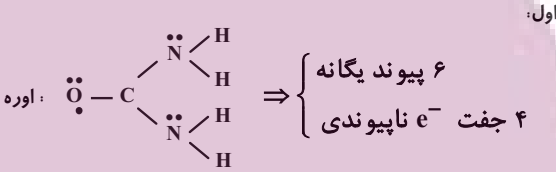
۴) با افزایش سطح تندرستی و بهداشت فردی و همگانی، شاخص امید به زندگی در جهان افزایش یافته است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲ و ۳)

۱۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

بررسی همهٔ موارد:

مورد اول:



مورد دوم: عسل مولکول‌های قطبی دارد و $NaCl$ ترکیب یونی است. در نتیجه هر دو در آب حل می‌شوند و در اوکتان (C_8H_{18}) حل نمی‌شوند؛ ولی صابون هم در آب و هم در اوکتان حل می‌شود.

مورد سوم:

۴ پیوند H_2C-CH_2 (OH OH) $\rightarrow C-H$: $(C_2H_6O_2)$ اتیلن گلیکول

۵۲ پیوند $C_{25}H_{52} \rightarrow C-H$: وازلین

مجموعاً ۵۶ پیوند $\Rightarrow C-H$

فرمول مولکولی روغن زیتون: $C_{57}H_{104}O_6$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱ تا ۶)

۱۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

بررسی گزینه‌ها:

۱ و ۲) درست؛ با افزایش دما، قدرت پاک‌کنندگی صابون افزایش می‌یابد و یا با افزایش دما مقدار درصد لکهٔ باقی‌مانده کاهش می‌یابد.

۳) درست؛ هر چه مقدار صابون در آب بیشتر باشد، کف ایجاد شده بیشتر است. ولی با رسیدن غلظت صابون حل شده در آب به یک مقدار مشخص، ارتفاع کف تغییری نمی‌کند.

۴) نادرست؛ هر چه مقدار صابون بیشتر باشد مقدار پاک‌کنندگی نیز افزایش می‌یابد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۱۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(روزبه رضوانی)*

موارد اول و دوم درست است.

بررسی موارد:

مورد اول: هر دو دارای حلقهٔ بنزنی هستند.

مورد دوم: از ترکیب‌های کلردار به منظور افزایش قدرت میکروب‌کشی صابون‌ها استفاده می‌شود.

مورد سوم: شمار عنصرهای ترکیب الف:

$C_{12}H_7Cl_3O_2 \Leftarrow$ ۴ عنصر

شمار اتم‌های ترکیب ب:

$C_{18}H_{29}SO_3Na \Leftarrow$ اتم $18+29+1+3+1=52$

بنابراین:

$$\frac{\text{شمار اتم‌های (ب)}}{\text{شمار عنصرهای (الف)}} = \frac{52}{4} = 13$$

مورد چهارم: هر چه شوینده مواد شیمیایی بیشتری داشته باشد عوارض جانبی آن نیز بیشتر خواهد بود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین مسلمی)*

با توجه به این‌که فرمول عمومی صابون جامد با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به صورت $C_{n'}H_{2n'+1}COONa$ است، پس فرمول شیمیایی صابون $C_{17}H_{35}COONa$ خواهد بود:

$$2C_{17}H_{35}COONa(aq) + MgCl_2(aq) \rightarrow (C_{17}H_{35}COO)_2Mg(s) + 2NaCl(aq)$$

$$?g \text{ رسوب} = 61/2g \text{ صابون} \times \frac{1mol \text{ صابون}}{306g \text{ صابون}} \times \frac{1mol \text{ رسوب}}{2mol \text{ صابون}}$$

$$\times \frac{590g \text{ رسوب}}{1mol \text{ رسوب}} = 59g$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶ تا ۹)

ایران‌تو
توشه‌ای برای موفقیت

۱۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

اتیلن گلیکول و اتانول (C_2H_5OH) به صورت مولکولی در آب حل می‌شوند و موادی اسیدی یا بازی به شمار نمی‌آیند. در حالی که کربن دی اکسید (CO_2) با حل شدن در آب مقدار یون H_3O^+ را افزایش می‌دهد و یک اسید آرنیوس خواهد بود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

۱۱۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی)*

معادلهٔ انحلال ترکیبات داده شده در آب:

$$N_2O_5(s)+H_2O\rightarrow 2HNO_3(aq)$$
$$\rightarrow 2H^+(aq)+2NO_3^-(aq)$$
$$Li_2O(s)+H_2O\rightarrow 2LiOH(aq)$$
$$\rightarrow 2Li^+(aq)+2OH^-(aq)$$
$$BaO(s)+H_2O\rightarrow Ba(OH)_2(aq)$$
$$\rightarrow Ba^{2+}(aq)+2OH^-(aq)$$
$$SO_3(g)+H_2O\rightarrow H_2SO_4(aq)$$
$$\rightarrow 2H^+(aq)+SO_4^{2-}(aq)$$
$$CO_2(g)+H_2O\rightleftharpoons H_2CO_3(aq)$$
$$\rightleftharpoons 2H^+(aq)+CO_3^{2-}(aq)$$
$$NaOH(s)\xrightarrow{H_2O}Na^+(aq)+OH^-(aq)$$

اکسیدهای بازی از بین ترکیبات داده شده، Li_2O و BaO هستند که از انحلال یک مول از هر یک از آن‌ها در مجموع ۴ مول یون OH^- تولید می‌شود.

تذکر: $NaOH$ اکسید بازی نیست! (هیدروکسید است.)

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ۴ ترکیب از ۶ ترکیب داده شده (۶۷٪) حالت فیزیکی جامد دارند؛ به این معنی که نقطهٔ ذوب آن‌ها از دمای اتاق $(25^\circ C)$، بیشتر می‌باشد.

۲) ۳ ترکیب از ۶ ترکیب داده شده (۵۰٪) در صورت انحلال در آب یون H^+ ایجاد می‌کنند و pH آن را کاهش می‌هند.

۳) از بین اسیدهای آرنیوس داده شده؛ N_2O_5 مول یون‌های بیشتری تولید می‌کند؛ در نتیجه رسانایی الکتریکی بیشتری دارد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۱۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

(۱) $[H^+][OH^-]=10^{-14}$ در دمای اتاق

(۲) $\frac{[OH^-]}{[H^+]}=4\times10^{-10}$

$$(1),(2)\Rightarrow \frac{[OH^-]}{[H^+]}=\frac{10^{-14}}{[H^+]^2}=4\times10^{-10}\Rightarrow [H^+]^2=25\times10^{-6}$$

$$\Rightarrow [H^+]=5\times10^{-3}\ \frac{mol}{L}\Rightarrow pH=3-\log 5=3-0/7=2/3$$

$$\%a=\frac{[H^+]}{M}\times100=\frac{5\times10^{-3}}{1/25}\times100=\%0/4$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

۱۱۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین مسلمی)*

بررسی عبارت‌ها:

۱) درست؛ از این پاک‌کننده برای باز کردن مجاری مسدود شده با چربی‌ها استفاده می‌شود.

ب) نادرست؛ این مخلوط در اثر واکنش با آب، گاز هیدروژن تولید می‌کند.

پ) درست

ت) درست؛ واکنش این مخلوط با آب گرماده است و باعث افزایش دمای محلول می‌شود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۲ و ۱۳)

۱۲۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی)*

pH به اندازهٔ ۴ واحد کاهش یابد به این معناست که pH محلول از ۷ به ۳ برسد.

$$pH=3\Rightarrow [H^+]=10^{-3}\Rightarrow K_a=\frac{[H^+]^2}{M-[H^+]}$$

$$\Rightarrow 6\times10^{-4}=\frac{10^{-6}}{M-10^{-3}}\Rightarrow 6M-6\times10^{-3}=10\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow 6M=16\times10^{-3}\Rightarrow M=\frac{16\times10^{-3}}{6}\ mol.L^{-1}$$

$$M=\frac{n}{v}\Rightarrow n=M\times v\Rightarrow n=\frac{16\times10^{-3}}{6}\frac{mol}{L}\times1/5L$$

$$=4\times10^{-3}\ mol\ HF$$

$$?mL\ HF=4\times10^{-3}\ mol\ HF\times\frac{22/4L\ HF}{1mol\ HF}$$

$$\times\frac{10^3 ml}{1L}=89/6mL\ HF$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۶)

تیزهوشان | توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۱

۱۲۱- **گزینهٔ «۱»** *(حمیدرضا رهقان)*

می‌دانیم مجموع فواصل یک نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a از سه ضلع مثلث برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$. از طرفی مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$، بنابراین داریم:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۱۲ \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳}$$

$$\text{مجموع فواصل} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲\sqrt{۳} = ۳$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه ۶۸)

۱۲۲- **گزینهٔ «۲»** *(حمیدرضا رهقان)*

می‌دانیم در هر لوزی قطرها منصف یکدیگرند. پس مطابق فرض داریم:

$$AC = ۴BD \Rightarrow ۲OA = ۴(۲OB) \Rightarrow OA = ۴OB$$

در مثلث قائم‌الزاویه AOB داریم:

$$AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ \Rightarrow (۲\sqrt{۱۷})^۲ = (۴OB)^۲ + OB^۲$$
$$\Rightarrow ۴(۱۷) = ۱۷OB^۲ \Rightarrow OB^۲ = ۴$$
$$\Rightarrow OB = ۲,\ OA = ۴ \times ۲ = ۸$$

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{AC \times BD}{۲} = \frac{۱۶ \times ۴}{۲} = ۳۲$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۷۲)

۱۲۳- **گزینهٔ «۱»** *(رحیم مشتاق‌نظم)*

فرض کنید مساحت شکل‌های بیرونی و درونی را به ترتیب با S و S' نمایش دهیم. در این صورت طبق فرمول پیک داریم:

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۷}{۲} + ۱۱ - ۱ = ۱۳/۵$$

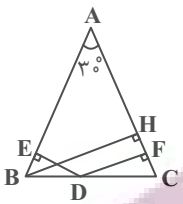
$$S' = \frac{b'}{۲} + i' - ۱ = \frac{۳}{۲} + ۲ - ۱ = ۲/۵$$

$$\text{مساحت قسمت سایه زده} = S - S' = ۱۳/۵ - ۲/۵ = ۱۱$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۱۲۴- **گزینهٔ «۳»** *(رضا عباسی اصل)*

ارتفاع BH را در این مثلث رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، BH ضلع رو به رو به زاویهٔ ۳۰° و اندازهٔ آن نصف اندازهٔ وتر است، پس داریم:



$$BH = \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ = ۶$$

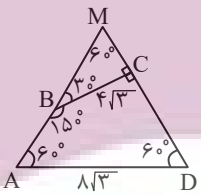
مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است، بنابراین داریم:

$$DE + DF = BH \Rightarrow ۲ + DF = ۶ \Rightarrow DF = ۴$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه ۶۸)

۱۲۵- **گزینهٔ «۴»** *(جواد حاتمی)*

دو ضلع AB و CD را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. مثلث MAD متساوی‌الاضلاع است. همچنین با توجه به اندازهٔ زوایای داده شده، BC بر CD عمود و مثلث MCB قائم‌الزاویه است.



$$\overset{\Delta}{MCB} : \tan ۶۰^\circ = \frac{BC}{MC} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۴\sqrt{۳}}{MC} \Rightarrow MC = ۴$$

$$S_{ABCD} = S_{MAD} - S_{MCB} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}AD^۲ - \frac{۱}{۲}BC \times MC$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۸\sqrt{۳})^۲ - \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۳} \times ۴ = ۴۸\sqrt{۳} - ۸\sqrt{۳} = ۴۰\sqrt{۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه ۶۵)

۱۲۶- **گزینهٔ «۴»** *(فرزانه شاکپاش)*

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MN \parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = (\frac{AM}{AB})^۲ = (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{۱}{۴}S_{ABC} \quad (۱)$$

از طرفی نقطه G، نقطه همرسی میانه‌های مثلث ABC است و در نتیجه داریم:

$$S_{BGC} = \frac{۱}{۳} S_{ABC} \qquad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{BGC}} = \frac{\frac{۱}{۴} S_{ABC}}{\frac{۱}{۳} S_{ABC}} = \frac{۳}{۴}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۱۲۷- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه خاکپاش)*

اگر تعداد نقاط مرزی و درونی یک چندضلعی شبکه‌ای به ترتیب برابر b و i باشد، آن‌گاه طبق فرمول پیک، مساحت این چندضلعی برابر $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$ است که همواره $b \geq ۳$ و $i \geq ۰$ است. بنابراین داریم:

$$۷/۵ = \frac{b}{۲} + i - ۱ \Rightarrow \frac{b}{۲} = ۸/۵ - i \Rightarrow b = ۱۷ - ۲i$$

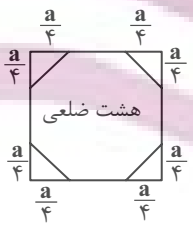
$$b \geq ۳ \Rightarrow ۱۷ - ۲i \geq ۳ \Rightarrow ۲i \leq ۱۴ \Rightarrow i \leq ۷ \xrightarrow{i \geq ۰} ۰ \leq i \leq ۷$$

بنابراین تعداد نقاط درونی این چندضلعی شبکه‌ای می‌تواند یکی از هشت مقدار متفاوت $۰, ۱, \ldots, ۷$ را دارا باشد.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۱۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(سهام مجیدی‌پور)*

با توجه به شکل داریم:



$$\text{مثلث قائم‌الزاویه } S = \frac{a}{۴} \times \frac{a}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{a^۲}{۳۲}$$

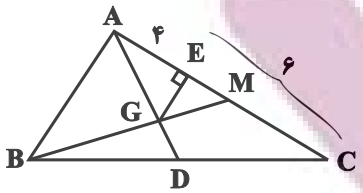
$$\text{هشت‌ضلعی } S = S_{\text{مربع}} - ۴S_{\text{مثلث قائم‌الزاویه}}$$

$$\Rightarrow \text{هشت‌ضلعی } S = a^۲ - \frac{۴a^۲}{۳۲} = a^۲ - \frac{a^۲}{۸} = \frac{۷a^۲}{۸}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{مربع}}}{S_{\text{هشت‌ضلعی}}} = \frac{a^۲}{\frac{۷}{۸}a^۲} = \frac{۸}{۷}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۵)

۱۲۹- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*



$$AE = ۴\ ,\ EC = ۶ \Rightarrow AC = ۱۰$$

اگر میانهٔ BM را رسم کنیم، آنگاه $AM = ۵$ است و داریم:

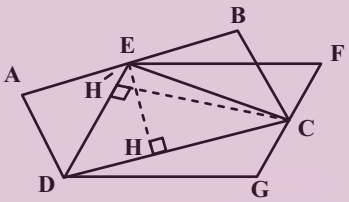
$$S_{AGM} = \frac{۱}{۶} S_{ABC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۳)(۵) = \frac{۱}{۶} S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۵}{۲} = \frac{۱}{۶} S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = ۴۵$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۷)

۱۳۰- **گزینهٔ «۱»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*

نقاط E (روی ضلع AB) و C (روی ضلع FG) را به یکدیگر وصل می‌کنیم.



می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned} S_{EDC} &= \frac{۱}{۲} EH \times DC \\ S_{ABCD} &= EH \times DC \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{ABCD} = ۲S_{EDC}$$

$$\left.\begin{aligned} S_{EDC} &= \frac{۱}{۲} CH' \times ED \\ S_{EFGD} &= CH' \times ED \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{EFGD} = ۲S_{EDC}$$

از آنجا که مساحت مثلث EDC برابر با نصف مساحت هریک از متوازی‌الاضلاع‌های $ABCD$ و $EFGD$ است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$S_{ABCD} = S_{EFGD}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۵)

ایران‌توشه
توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۱

۱۳۱- **گزینهٔ «۱»** *(امیر حاتمیان)*

عبارت‌های (الف)، (ب) و (پ) نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) توسعهٔ پایدار، شامل ملاحظات زیست محیطی، اجتماعی و اقتصادی است و ملاحظات سیاسی را شامل نمی‌شود.

ب) مولکول‌های اوزون به‌طور عمده در لایهٔ استراتوسفر قرار دارند که لایهٔ مفید اوزون را تشکیل می‌دهند ولی در لایهٔ تروپوسفر هم وجود دارد.

پ) دگرشکل‌ها یا آلوتروپ‌ها به شکل‌های مختلف مولکولی یا بلوری یک عنصر گفته می‌شود که ممکن است فرمول مولکولی متفاوتی داشته باشند. مانند اوزون O_3 و مولکول اکسیژن O_2

ت) با توجه به صفحهٔ ۷۵ کتاب درسی درست است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۵)

۱۳۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین مسلمی)*

جرم کاسته شده همان جرم CO_2 خارج شده است:

$$?g\ CaO = 13/2g\ CO_2 \times \frac{1mol\ CO_2}{44g\ CO_2} \times \frac{1mol\ CaO}{1mol\ CO_2} \times \frac{56g\ CaO}{1mol\ CaO} = 16/8g$$

$$?g\ \underset{\text{مصرف شده}}{CaCO_3} = 13/2g\ CO_2 \times \frac{1mol\ CO_2}{44g\ CO_2} \times \frac{1mol\ CaCO_3}{1mol\ CO_2} \times \frac{100g\ CaCO_3}{1mol\ CaCO_3} = 30g$$

$$\underset{\text{باقی‌مانده}}{CaCO_3} = 50 - 30 = 20g$$

$$\text{اختلاف مواد جامد} = 20 - 16/8 = 3/2g$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۱۳۳- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی)*

مورد سوم به درستی بیان شده است.

بررسی همهٔ موارد:

مورد اول: برای توصیف یک نمونهٔ گاز، باید مقدار و دما و فشار آن مشخص باشد؛ در اینجا فشار نمونهٔ گاز داده نشده است. در نتیجه نمی‌تواند توصیفی از یک نمونهٔ گاز باشد.

مورد دوم: در شرایط STP یک مول از هر گازی ۲۲/۴ لیتر حجم دارد. (نه هر ماده‌ای!)

مورد سوم: ابتدا حجم مولی گازها در آن شرایط را محاسبه می‌کنیم؛ سپس جرم Cl_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ L\ SO_2 = 32g\ SO_2 \times \frac{1mol\ SO_2}{64g\ SO_2} \times \frac{v_m\ L\ SO_2}{1mol\ SO_2} = 25L\ SO_2 \Rightarrow v_m = 50\frac{L}{mol}$$

$$?g\ Cl_2 = 10L\ Cl_2 \times \frac{1mol\ Cl_2}{50L\ Cl_2} \times \frac{71g\ Cl_2}{1mol\ Cl_2} = 14/2g\ Cl_2$$

مورد چهارم: با کاهش تعداد وزنه‌های بالای پیستون، فشار محفظهٔ گاز کاهش می‌یابد و حجم گاز افزایش می‌یابد. می‌دانیم چگالی یک گاز از رابطهٔ $d = \frac{m}{v}$ محاسبه می‌شود. جرم گاز که ثابت است، حجم آن افزایش یافته است؛ در نتیجه چگالی آن کاهش می‌یابد.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۱۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

موارد اول و چهارم درست است.

بررسی موارد:

مورد اول: آمونیاک نقطهٔ جوش بالاتری دارد.

مورد دوم: نادرست؛

$$:N \equiv N: + 3\ H-H \longrightarrow 2\ \begin{matrix} & \ddot{N} & \\ H & | & H \\ & H & \end{matrix}$$

مورد سوم: نادرست؛ روابط استوکیومتری بر پایهٔ شمار مول مواد است.

مورد چهارم: H و N جزء فراوان‌ترین عناصر مشتری هستند.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۱۳۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی)*

ابتدا هر سه واکنش را موازنه می‌کنیم، به‌طوری که ضریب مادهٔ مشترک بین هر دو واکنش برابر شود:

$$N_2 + O_2 \rightarrow 2NO$$

$$2NO + O_2 \rightarrow 2NO_2$$

$$2NO_2 + 2O_2 \rightarrow 2NO + 2O_3$$

درمی‌یابیم که به ازای هر مول N_2 مصرفی، ۲ مول O_3 تولید می‌شود و در مجموع ۳ واکنش، ۴ مول O_2 به مصرف می‌رسد؛ یا به عبارتی:

$$N_2 \sim 2O_3 \sim 4O_2$$

$$?g\ O_3 = 9/03 \times 10^{24}\ atom\ N \times \frac{1mol\ N}{6/02 \times 10^{23}\ atom\ N} \times \frac{1mol\ N_2}{2mol\ N} \times \frac{2mol\ O_3}{1mol\ N_2} \times \frac{48g\ O_3}{1mol\ O_3} = 720g\ O_3$$

$$?L\ O_2 = 9/03 \times 10^{24}\ atom\ N \times \frac{1mol\ N}{6/02 \times 10^{23}\ atom\ N} \times \frac{1mol\ N_2}{2mol\ N} \times \frac{4mol\ O_2}{1mol\ N_2} \times \frac{22/4L\ O_2}{1mol\ O_2} = 672L\ O_2$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۵ تا ۸۱)

توشه‌ای برای موفقیت

۱۳۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی)*

تنها مورد دوم به نادرستی بیان شده است.

بررسی همهٔ موارد:

مورد اول: مطابق متن کتاب درسی است.

مورد دوم: بیانگر ارتباط بین زیست کره (جانداران آبزی) و هواکره می‌باشد.

مورد سوم: فراوان‌ترین آنیون چند اتمی موجود در آب دریا، یون سولفات $(SO_4)^{2-}$ می‌باشد.

$$\frac{\text{شمار اتم}}{\text{مقدار بار}} = \frac{۵}{|-۲|} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

مورد چهارم: با توجه به متن کتاب درسی درست می‌باشد.

مورد پنجم: غلظت محلول ۲٪ جرمی اگر به ppm تبدیل شود؛ برابر ۲۰۰۰۰ppm خواهد بود؛ در نتیجه دو محلولی که غلظت یکسان دارند شدت رنگ یکسانی نیز دارند.

$$ppm = ۲\times۱۰^۴ = ۲۰۰۰۰$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۸۹ و ۹۳ تا ۹۶)

۱۳۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

ابتدا جرم حلال و حل‌شونده را مشخص می‌کنیم:

$$٪a = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}}\times۱۰۰ \Rightarrow ۷۱ = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{۱۸۰}\times۱۰۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۲۷/۸g\ Na_۲SO_۴ \\ ۵۲/۲g\ H_۲O \end{cases}$$

سپس شمار مول اتم‌های اکسیژن در $Na_۲SO_۴$ و آب را جداگانه حساب می‌کنیم و در آخر با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$?mol\ O = ۱۲۷/۸g\ Na_۲SO_۴ \times \frac{۱mol\ Na_۲SO_۴}{۱۴۲g\ Na_۲SO_۴} \times \frac{۴mol\ O}{۱mol\ Na_۲SO_۴} = ۳/۶mol\ O$$

$$?mol\ O = ۵۲/۲g\ H_۲O \times \frac{۱mol\ H_۲O}{۱۸g\ H_۲O} \times \frac{۱mol\ O}{۱mol\ H_۲O} = ۲/۹mol\ O$$

$$\text{مجموع مول اتم } O = ۳/۶ + ۲/۹ = ۶/۵mol\ O$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۶ و ۹۷)

۱۳۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی)*

در $\frac{۳}{۸}\times۱۰۰ = ٪۳۷/۵$ از ترکیبات داده شده نسبت شمار اتم‌ها به عنصرها بیشتر از ۲ می‌باشد. (رد گزینه‌های «۱» و «۲»)

	(I) فرمول ترکیب	نسبت شمار اتم‌ها به عنصرها	(II) فرمول ترکیب	نسبت شمار اتم‌ها به عنصرها
a	$BaBr_۲$	$\frac{۳}{۲}=۱/۵$	$Al(NO_۳)_۳$	$\frac{۱۳}{۳}\simeq۴/۳۳$
b	$FePO_۴$	$\frac{۶}{۳}=۲$	$LiCl$	$\frac{۲}{۲}=۱$
c	AgF	$\frac{۲}{۲}=۱$	$Ca(OH)_۲$	$\frac{۵}{۳}\simeq۱/۶۷$
d	$(NH_۴)_۲CO_۳$	$\frac{۱۴}{۴}=۳/۵$	$K_۲SO_۴$	$\frac{۷}{۳}\simeq۲/۳۳$

بررسی همهٔ گزینه‌ها:

۱) $Li^+ + CO_۳^{۲-} \rightarrow Li_۲CO_۳$ محلول در آب است و رسوب نیست. (رد گزینهٔ «۱»)

۲) $Ca^{۲+} + PO_۴^{۳-} \rightarrow Ca_۳(PO_۴)_۲$ رسوب سفید رنگ است.

۳) $Ag^+ + NO_۳^- \rightarrow AgNO_۳$ محلول در آب است و رسوب نیست. (رد گزینهٔ «۳»)

۴) $Ba^{۲+} + SO_۴^{۲-} \rightarrow BaSO_۴$ رسوب سفیدرنگ است.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۸۹ تا ۹۲)

۱۳۹- **گزینهٔ «۲»** *(روزبه رضوانی)*

	$\frac{\text{آنیون}}{\text{کاتیون}}$	
نیکل (III) سولفید	$\frac{۳}{۲}$	$Ni_۲S_۳$
باریم فسفات	$\frac{۲}{۳}$	$Ba_۳(PO_۴)_۲$
اسکاندیم سولفات	$\frac{۳}{۲}$	$Sc_۲(SO_۴)_۳$
آلومینیم کربنات	$\frac{۳}{۲}$	$Al_۲(CO_۳)_۳$
گالیم سولفات	$\frac{۳}{۲}$	$Ga_۲(SO_۴)_۳$
کروم (III) نیترات	$\frac{۳}{۱}$	$Cr(NO_۳)_۳$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحهٔ ۹۲)

۱۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

موارد (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی گزینه‌های نادرست:

الف) ترتیب مقدار آنیون‌های حل شده در آب دریا:

$$Br^- < CO_۳^{۲-} < SO_۴^{۲-} < Cl^-$$

ب) اگر کره زمین را مسطح در نظر بگیریم آب‌های موجود همهٔ سطح آن را تا ارتفاع بیش از ۲ کیلومتر می‌پوشانند.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸)

توشه‌ای برای موفقیت