

ایران توشه

- رانلور نمونه سوالات امتحانی

- رانلور گام به گام

- رانلور آزمون گاج و قلم چی و سنجش

- رانلور فیلم و مقاله انگلیزی

- رانلور و مشاوره



IranTooshe.Ir



@irantooshe



IranTooshe

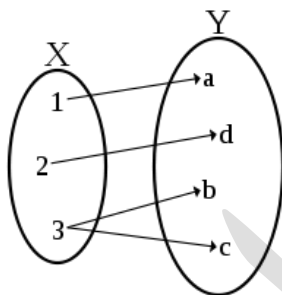


فصل اول تابع

سلم بچه ها . هرچند که تعریف تابع رو توی سال های قبل خونديم اما محض یادآوری مفاهيمی رو بازتعريف می کنیم.

تابع را می توان به عنوان قاعده ای خاص برای تناظر بين اعضای دو مجموعه دامنه و برد تعريف کرد. به بیان دقیق تر، اگر A و B دو مجموعه باشند، یک تابع از مجموعه A به مجموعه B را می توان قاعده ای تعريف کرد که به هر عضو مجموعه A مانند a ، دقیقاً یک عضو مجموعه B را مانند $f(a)$ نسبت دهد. تابع f از مجموعه A به مجموعه B را با $f: A \rightarrow B$ نشان می دهيم.

تمرین (آموزش و پرورش تهران)



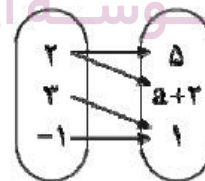
درمورد تابع بودن یا نبودن تناظر مقابل بحث کنید.

حل: طبق تعريف بالا به هر عضو a دامنه X یک عضو a در Y نسبت داده می شود.

نظير می شود. مثل در معادله ی درجه دوم که تابع می باشد به ازای هر x یک مقدار y تحويل می گیريم. اما برعکس این گونه نیست. مثل یک معادله برای یک جواب دو تا مجهول ميتونه داشته باشه. پس این یه تابع نیست چون در ازای یک دامنه x تا برد به ما داده که خلف تعريف تابع می باشد. (آه نگرفتی پی شد به تعريف تابع در سنوات قبل مراجعه کن)

این نکته ی بالا درمورد زو مرتبه ها همی الماعدس

تمرین



هرگاه نمودار f تابع به صورت $g = \{(3, -1), (a, b+1), (a+1, 2)\}$ باشند، مقدار $a+b$ و تابع g به صورت

چه قدر است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

حل:

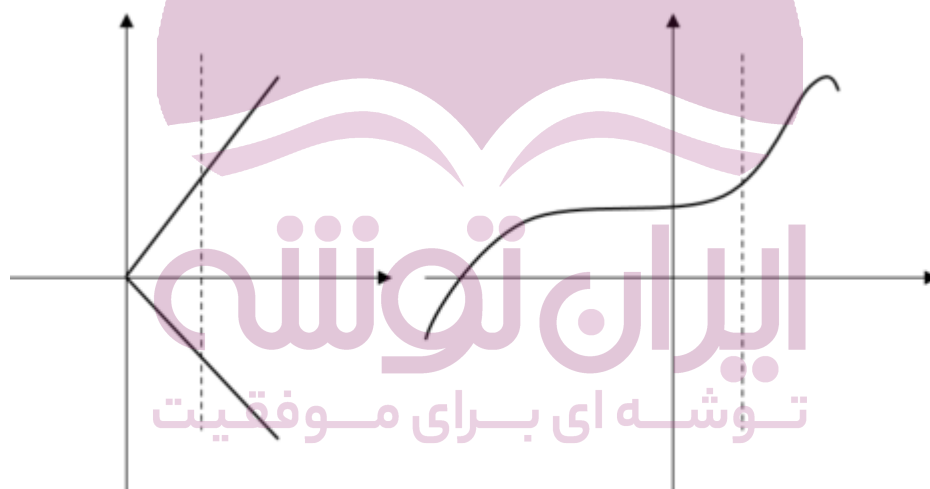
تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول برابر ندارند. در نمودارِ وِن تابع نباید از یک عضو دو پیکان خارج شود و در صورتی که از یک عضو مجموعه‌ی آغاز دو پیکان خارج شود باید مقدار آن‌ها برابر باشند، لذا $a+2=5$ و در نتیجه $a=3$. به‌ازای $a=3$ تابع g به‌صورت $g=\{(3, -1), (3, b+1), (4, 2)\}$ درمی‌آید. برای آن‌که g تابع باشد، باید $b+1=-1$ و در نتیجه $b=-2$. لذا: $a+b=3-2=1$

تابع داستان‌های دیگه‌ای هم داره که باید به سنوات قبل برای جزئیات بیشتر مراجعه کنید (در صورت فراموشی

توی فصل اول ریاضی دوازدهم تمرکز ما رو رسم نمودار توابع می‌باشد.

نمودار تابع

از قبلنا میدونیم که هر نمودار دکارتی که به ما بدن و بگن آیا این نمودار یک تابع هست یا نه یک خط موازی محور عرض‌ها رسم می‌کردیم. اگر نمودار توسط این خط فقط در یک نقطه قطع می‌شد نمودار تابع بود و اگر در بیش از یک نقطه قطع می‌شد نمودار تابع نبود.



تابع نیست

تابع هست

اگه تا اینجا رو گرفتید بریم سر اصل مطلب

اعمال روی نمودار های توابع

توابع چند ضابطه ای (چند جمله ای

قبل ما اع $x = f(x)$ با روم ندم ش بهش تاب یگی م یی. ا به بارت دیه ی یع تابع یک هستش. به توان مجهول ما در هر تابع درجه ی اون تابه میگن. مثل در تابع خطی توان x ما یک هستش. اما داستان ما از زمانی شروع میشه که توان مجهول ما از یک بیشتر بشه $a = x^2$ شب $f(x) = c$ ی هم و معادل درج دسی... معادل... درج... س...

س زمانه تاب ما درج ی بیشتر

شد اصطلاحا بهش میگیم که تابع ما چند جمله ای میشه.

نکته: اگر یک تابع داشته باشیم که شامل چندین مجهول باشد توان بزرگترین مجهول ما همیشه درجه ی تابع ما .

$$y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{5}x^2$$

$$k(f(\cdot))\varepsilon$$

برای رسم نمودار kf باید عرض h نقطه از تابع f رو در k ضرب کنیم. خیلی کنش نکن. یه تابع داریم که هر x بهش بری $f(x)$ بهت میده. حالا هر $f(x)$ که به دست اومده رو در k ضرب کن. به همین راحتی.

* دامنه ی تابع $kf(x)$ دقیقاً همان دامنه ی تابع $f(x)$ هستش. برر تابع $kf(x)$ برابر برر $f(x)$ ضررر k هستش.

شب بعضی وقتا عدد بھموم نہیڈن ولی نمودار رو بہ صورت تقریبی بہت میدن بینیں پقدر با این جملہ ہا حل کردی۔

چند تا شرایط داریم

الف) اگر نمودار ما همون نمودار تابع $f(x)$ باشه ولی در طول محور y ها کشیده شده باشه (به هر میزانی) نشون میده که k عددی بزرگتر یک هستش. میگی نه فب کاری نداره. یه تابع دلفواه انتساب کن بعد اون تابع رو ضربدر یه عدد دلفواه بزرگتر از یک کن بعد برو نمودار رو دوباره رسم کن تا دوهزار بیت بیفته.

ب) اگر نمودار در راستای محور عرض ها فشرده شده باشد نشون میده که $0 < k < 1$ بود است

ج) اگر تابع همون تابه $f(x)$ باشد اما نسبت به محور x ها آینه وار معکوس شده باشد نشون میده که $k=-1$ هستش.

د) همون اعمال الف و ب هم در مورد اعداد منفی صدق میکنه. مثلا اگر $k=2$ ر ب با k بزاریم. اول نسبت به محور x ها وارونه میشه و بعدش با اندازه ی ۲ (قدر مطلق عدد) کشیده میشه طبق چیزی که قبلا گفتیم

همان طور که گفتیم تابع به صورت نموداری یا ضابطه یا زوج مرتب و .. نشونش میدن. این مفاهیم بالا ر برا ه در ا ا اینو بای یادگیرین. مثلا برا ضابطه اگر بر تابع $f(x)$ برابر $[m,n]$ باشد k ضربی مثبت باشد برد تابع $kf(x)$ برابر $[km,kn]$ خواهد شد و اگر k منفی باش برد برابر $[kn,km]$ خواهد شد.

بررسی نمودار $y=f(kx)$

خب این نمودار برعکس نمودار قبله. در این نمودار برد هیچ تغییری نمی کند بلکه این دامنه است که تغییر می کند.

اگر k عددی بین یک و منفی یک باش $-1 < k < 0$ نمودار دالما ششیدگی میشه اگر $|k|$ بزرگ تر ز باشد دچار فشردگی خواهد شد.

★ برای رسم $f(ax+b)$ ابتدا انتقال عدد ثابت b را انجام می دهیم. سپس تغییرات مربوط به ضریب x را روی شکل اعمال می کنیم.

برای رسم نمودار $f(ax)$ اگر $(0 < a < 1)$ باشد نمودار تابع $f(x)$ را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می کنیم. طول ها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند.

اگر $(a > 1)$ نمودار تابع $f(x)$ در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض می شود. طول ها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند.

اگر نقطه A روی نمودار تابع $f(x)$ باشد نقطه نظیر آن روی تابع $g(x) = f(ax+b)$ برابر است با :

if $A(x_0, y_0) \in f(x)$	$A' \left \begin{array}{c} x_0 - b \\ a \\ y_0 \end{array} \right.$	$\in g(x) = f(ax+b)$
if $A(x_0, y_0) \in f(x)$	$A' \left \begin{array}{c} x_0 - b \\ a \\ ky_0 \pm k' \end{array} \right.$	$\in g(x) = kf(ax+b) \pm k'$

بررسی تابع $y = f(x-a)$ ($a > 0$)

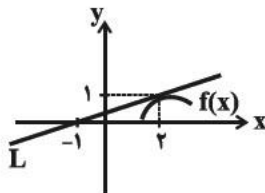
برای رسم منحنی آن کافی است نمودار تابع f را a واحد در امتداد مثبت محور x ها انتقال دهیم.

بررسی تابع $y = f(x+a)$ ($a > 0$)

برای رسم منحنی آن کافی است نمودار تابع f را a واحد در امتداد منفی محور x ها انتقال دهیم.

تمرین

در شکل مقابل خط L بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول $x=2$ مماس است. شیب خط مماس بر نمودار تابع



$g(x) = \sqrt{f(\sqrt{x})}$ در $x=4$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{12}$

(۱) $\frac{1}{6}$

(۴) $\frac{1}{48}$

(۳) $\frac{1}{24}$

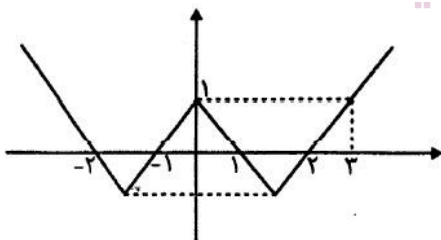
حل:

شیب خط L ، برابر است با مشتق تابع f در $x=2$.

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{1}{3} \text{ و } f(2) = 1 \quad \Rightarrow g'(x) = \frac{(f(\sqrt{x}))'}{2\sqrt{f(\sqrt{x})}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{f(\sqrt{x})}} \quad \Rightarrow g'(4) = \frac{\frac{1}{4} f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} = \frac{1}{8} f'(2) = \frac{1}{24}$$

تمرین

نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. مجموعه جواب نامعادله $(f(x)-1)(x-2) > 0$ کدام است؟



(۱) $\emptyset$

(۲) $(2, +\infty)$

(۳) $(-\infty, 2)$

(۴) $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$

حل:

g تابعی ثابت است پس باید $g(12) = g(-1)$ باشد یعنی:

$$a^2 + b = 4$$

از طرفی f تابع همانی است پس $f(x) = x$ می شود.

$$f(b) = -3a \rightarrow b = -3a$$

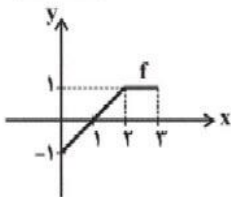
در رابطه اول به جای b عبارت $-3a$ قرار می دهیم:

$$a^2 + b = 4 \xrightarrow{b=-3a} a^2 - 3a - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \rightarrow b = 3 \\ a = 4 \rightarrow b = -12 \end{cases}$$

مقدار مثبت a برابر 4 است.

تمرین

اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = -f(x+2) - 1$ از کدام ناحیه(های) دستگاه مختصات عبور نمی کند؟



(2) اول و دوم

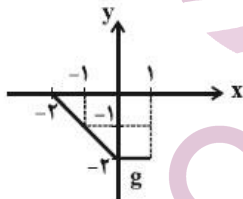
(1) فقط دوم

(4) فقط اول

(3) دوم و سوم

حل:

با انتقال نمودار تابع f به اندازه 2 واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا و سپس قرینه کردن آن نسبت به محور x ها، نمودار تابع g به دست می آید. با توجه به شکل، واضح است که نمودار تابع g از نواحی اول و دوم نمی گذرد.

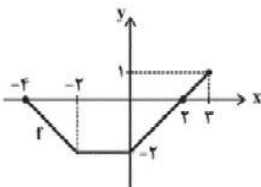


ایران تونش

تونشه ای برای موفقیت

تمرین

نمودار تابع f به صورت زیر است. دامنه تابع $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x) - f(-2x)}}$ کدام است؟



$$\left[-\frac{3}{2}, 2\right) - \{0\} \quad (2)$$

$$\left[-\frac{3}{2}, 0\right) \quad (1)$$

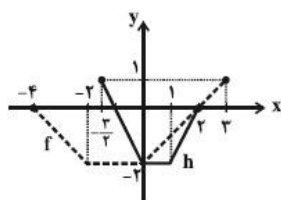
$$\left[-\frac{3}{2}, 2\right) \quad (4)$$

$$(0, 2) \quad (3)$$

حل:

نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $h(x) = f(-2x)$ را در یک دستگاه

مختصات رسم می کنیم.



$$D_g = \{x \in D_f \cap D_h \mid f(x) > h(x)\}$$

$$= \left\{x \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right] \mid x \in (0, 2)\right\} = \left[-\frac{3}{2}, 2\right] \cap (0, 2) = (0, 2)$$

در این بازه نمودار تابع f بالاتر از نمودار تابع h است و حاصل زیر رادیکال مثبت است.

تمرین

نقطه A روی نمودار تابع f به نقطه A' روی نمودار تابع $y = 2 + f\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ تبدیل می شود. کم ترین فاصله دو نقطه A و

A' از یکدیگر کدام است؟ ($D_f = \mathbb{R}$)

$$2 \quad (1) \quad \sqrt{2} \quad (2) \quad \sqrt{5} \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

حل:

نقطه $A'(\alpha', \beta')$ را تبدیل یافته $A(\alpha, \beta)$ در نظر می گیریم.

$$A' : \begin{cases} \frac{\alpha'}{2} - 1 = \alpha \Rightarrow \alpha' = 2\alpha + 2 \\ \beta' = 2 + \beta \end{cases} \Rightarrow A' = (2(\alpha + 1), \beta + 2) \Rightarrow |AA'| = \sqrt{(2\alpha + 2 - \alpha)^2 + (\beta + 2 - \beta)^2} = \sqrt{(\alpha + 2)^2 + 4}$$

کم ترین مقدار $|AA'|$ زمانی رخ می دهد که $(\alpha + 2)^2$ کم ترین مقدار یعنی صفر باشد. این حالت با توجه به اینکه دامنه تابع f کل اعداد حقیقی

$$\Rightarrow |AA'|_{\min} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{است، امکان پذیر است.}$$

توشه ای برای موفقیت

ملا وو او جزو فقتی ای جزو متلا ب تیزهوشا رتبه ها نزنشید ای عرو میزنم الا تی دس ریای دس تاه بی

کسک. آکه میوایین توی درس ریاضی موفق بشین توی کنکور فقط باید مهم و کیفیت تست حل

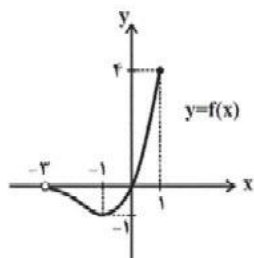
کردتون رو بیرین بالا ققه همی هی بیشت تسه ند دست ب اطلاعات بری

ریاضی کرمه. پس اینو یادتون باشه.



تمرین

شکل زیر مربوط به نمودار تابع f است. اگر دامنه تابع $h(x) = -3f(1-2x) + 4$ بازه $[a, \infty)$ و برد آن بازه $[b, 7]$ باشد،



حاصل $a + b$ کدام است؟

(۲) -۸

(۱) -۶

(۴) ۴

(۳) -۴

حل:

$$D_f = (-3, 1]$$

$$D_h : -3 < 1 - 2x \leq 1 \Rightarrow -4 < -2x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x < 2$$

$$\Rightarrow D_h = [0, 2) = [a, \infty) \Rightarrow a = 2$$

$$R_f = [-1, 2]$$

$$R_h : -1 \leq f(1-2x) \leq 2 \Rightarrow -12 \leq -3f(1-2x) \leq 3$$

$$\Rightarrow -8 \leq -3f(1-2x) + 4 \leq 7 \Rightarrow R_h = [-8, 7] = [b, 7] \Rightarrow b = -8$$

$$\Rightarrow a + b = 2 + (-8) = -6$$

تمرین

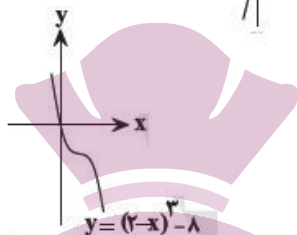
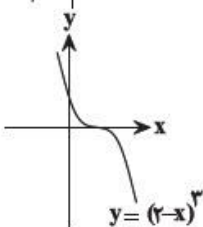
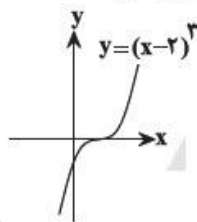
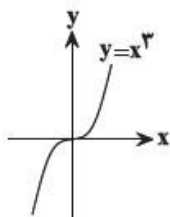
نمودار تابع $f(x) = 6x^2 - x^3 - 12x$ شبیه کدام گزینه است؟



حل:

$$f(x) = \frac{6x^2 - x^3 - 12x + 8 - 8}{(2-x)^3} = (2-x)^3 - 8$$

حالا مرحله به مرحله نمودار تابع را رسم می کنیم:



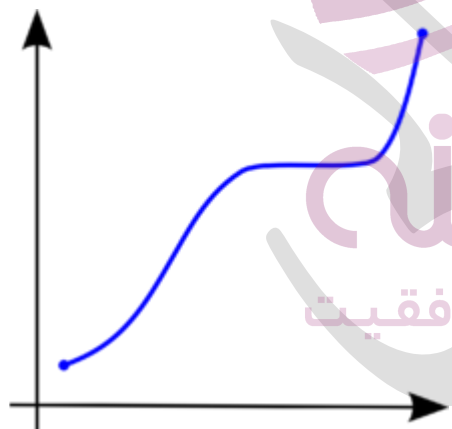
توابع صعودی و نزولی

تابع صعودی: تابعی که با افزایش مقدار x (دامنه)، مقدار تابع یا برد تابع نیز افزایش یابد یا ثابت بماند.

تابع مقابل تابع صعودی است.

*تابع صعودی اکید تابعی است که با افزایش x فقط مقدار y افزایش یابد

و هیچ جا تابع ثابت نباشد



تابع نزولی: تابعی که با افزایش مقدار x مقدار y کاهش یا ثابت بماند.

تابع نزولی اکید تابعی که صرفا کاهش پیدا کند و ثابت نداشته باشد.

در هر بازه که تابع ثابت باشد، هم می توان گفت صعودیه و هم نزولی چون در تعریف هر دو صدق می کنه.
 هر تابعی که در دامنه اش صعودی اکید (یا نزولی اکید) باشد، یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است. ولی ممکن تابعی یک به یک باشد ولی یکنوا نباشه مثل تابع: $y = \frac{1}{x}$

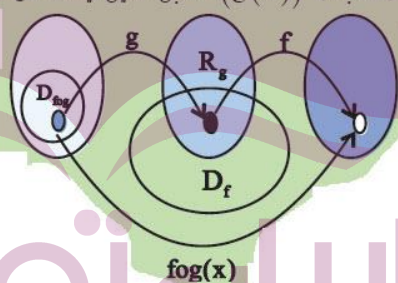
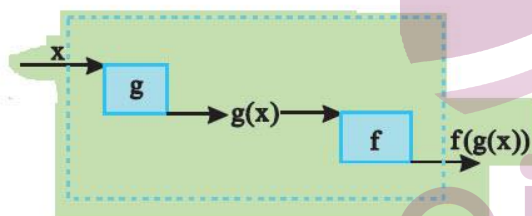
- در نمودار های چند ضابطه ای برای تعیین نزولی یا صعودی بودن لازم به برا ه ضابطه نمودار س کنید و در همان بازه و برای هر کدام از بازه ها نزولی یا صعودی بودن تابع رو بررسی کنید.
- یک تابع در حالت کلی میتونه نه صعودی باشه نه نزولی اما اگر دامنه ی آن را محدود کنیم می توان آن را صعودی یا نزولی در آن بازه نامید.

ترکیب تابع

اگر $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} D$, $C \xrightarrow{fog} B$ به شکل زیر تعریف می شود.

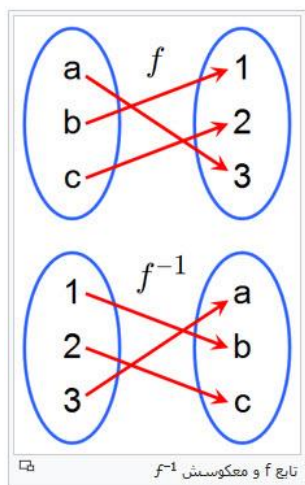
$$\begin{cases} y = fog(x) = f(g(x)) \\ D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \end{cases}$$

اگر برد $g(x)$ اشتراکی با دامنه ی تابع $f(x)$ نداشته باشد، $f(g(x))$ قابل تشکیل نیست. حال اگر $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ آن گاه با جایگزینی $g(x)$ به جای x در ضابطه ی $f(x)$ تابع fog تشکیل می شود.



ایران تونش
 توشه ای برای موفقیت

تابع وارون



تابع معکوس (به انگلیسی: Inverse Function): در ریاضیات اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، آن گاه تابع وارون (معکوس) f^{-1} یا f^{-1} تابعی از B به A است، با این ویژگی که برای هر x در دامنه f ، نتیجه‌ی اعمال پی‌درپی تابع و وارون آن روی x ، خود x خواهد بود. به دیگر سخن:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

نمودار توابع f^{-1} ، f نسبت به خط $y = x$ متقارن‌اند.

نمودار f^{-1} ، f در صورت تقاطع عموماً یکدیگر را روی خط $y = x$ قطع می‌کنند. (نه همیشه)

ممکن است نمودار f^{-1} ، f بر هم منطبق باشند، مانند: $y = \frac{1}{x}$ و یا یکدیگر را قطع نکنند، مانند:

$$f^{-1}(x) = \log_2^x, \quad f(x) = 2^x$$

تمرین

اگر ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5, & x > 3 \\ \frac{4}{5}x + \frac{8}{5}, & -2 \leq x \leq 3 \\ x^2 + 6x + 8, & x < -2 \end{cases}$ باشد، آن گاه طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن $f(x)$

اکیداً صعودی است، کدام است؟

۳ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

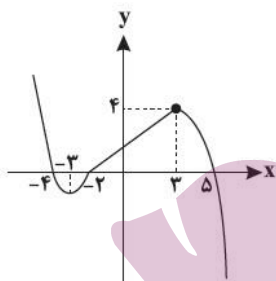
۲ (۱)

حل:

با ساده‌سازی تابع $f(x)$ داریم:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)(x-5) & , \quad x > 3 \\ \frac{4}{5}x + \frac{8}{5} & , \quad -2 \leq x \leq 3 \\ (x+4)(x+2) & , \quad x < -2 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین تابع صعودی است. و طول بازه ۶ است.

تمرین

اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog، کدام است؟

۴) $4x^2 - 4x + 11$

۳) $4x^2 - 2x + 13$

۲) $2x^2 - 3x + 7$

۱) $2x^2 - 7x + 3$

حل:

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 3 \\ g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20 \quad (*)$$

با شرط $2x + 3 = t$ داریم:

$$2x = t - 3 \Rightarrow x = \frac{t-3}{2}$$

با قرار دادن معادل x بر حسب t در رابطه‌ی (*) داریم:

$$g(t) = 8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 20 \Rightarrow g(t) = 8\left(\frac{t^2 - 6t + 9}{4}\right) + 11(t-3) + 20 \Rightarrow g(t) = 2t^2 - 12t + 18 + 11t - 33 + 20$$

$$\Rightarrow g(t) = 2t^2 - t + 5 \quad \Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5 \quad f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

تمرین

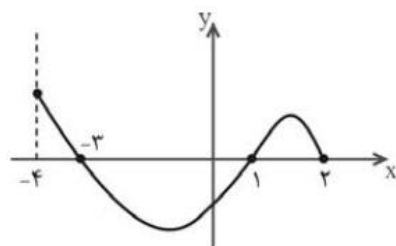
شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟

۱) $[0, 2]$

۲) $[-3, 2]$

۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$

۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$



حل:

$$xf(x) \geq 0 \quad (*)$$

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی عبارت رادیکالی با فرجه‌ی زوج باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد. بنابراین:

از آنجا که نمودار تابع f در $x = -3$ ، $x = 1$ و $x = 2$ صفر شده، جدول تعیین علامت عبارت فوق به صورت زیر خواهد بود:

	-4	-3	0	1	2
x	-	-	+	+	+
$f(x)$	+	0	-	0	+
$xf(x)$	-	0	+	0	+

$$x \in [-3, 0] \cup [1, 2]$$

پس مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(*)$ و در نتیجه دامنه‌ی عبارت داده شده برابر است با:

تمرین

نمودارهای تابع خطی f و تابع درجه دوم g ، محور y ها را به ترتیب با عرض‌های ۲ و ۳ قطع می‌کنند. اگر $(fog)(x) = 2x^2 + x - 1$ ، آنگاه $(f - g)(x)$ کدام است؟

$$2x^2 - 1 \quad (4)$$

$$x^2 + x - 1 \quad (3)$$

$$x^2 - 2 \quad (2)$$

$$-2x^2 - 2x + 1 \quad (1)$$

حل:

f یک تابع خطی است که محور y ها را با عرض ۲ قطع می‌کند. پس $f(x) = mx + 2$. یک تابع درجه دوم است که محور y ها را با عرض ۳ قطع می‌کند. پس $g(x) = ax^2 + bx + 3$.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = m(ax^2 + bx + 3) + 2 \Rightarrow (fog)(x) = max^2 + mbx + (3m + 2)$$

اما طبق فرض سؤال $(fog)(x) = 2x^2 + x - 1$ ، پس، داریم:

$$\begin{cases} (fog)(x) = max^2 + mbx + (3m + 2) \\ (fog)(x) = 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m + 2 = -1 \Rightarrow m = -1 \quad (*) \\ mb = 1 \xrightarrow{(*)} b = 1 \Rightarrow b = -1 \\ ma = 2 \xrightarrow{(*)} a = 2 \Rightarrow a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -x + 2 \\ g(x) = -2x^2 - x + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = (-x + 2) - (-2x^2 - x + 3) = 2x^2 - 1$$

تمرین

تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 + x + 3}$ در بازه $(a, +\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

$$3 \quad (4)$$

$$-3 \quad (3)$$

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{5} \quad (1)$$

حل: بعدا این سوال رو حل کنید. نکته‌ی مشتقی داره

تمرین

ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x < 0 \\ \frac{x}{2} + 4 & ; x \geq 0 \end{cases}$ می‌باشد، مقدار $f(2f(1-\sqrt{2}))$ چه قدر است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

حل:

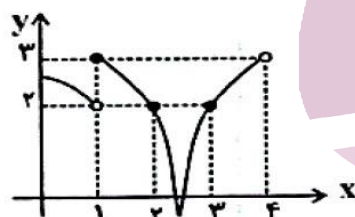
ابتدا مقدار $f(1-\sqrt{2})$ را به دست می‌آوریم. $x = 1-\sqrt{2} < 0, f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^2 - 2(1-\sqrt{2}) = 1$

بنابراین مقدار $f(2f(1-\sqrt{2}))$ با مقدار $f(2)$ برابر است. $x = 2 > 0, f(x) = \frac{x}{2} + 4 \Rightarrow f(2) = 5$

تمرین

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع $y = \frac{1}{\sqrt{2-f(x)}}$ کدام

مجموعه است؟



(۱) $[0, 4)$

(۲) $[0, 4) - [2, 3]$

(۳) $\mathbb{R} - [2, 3]$

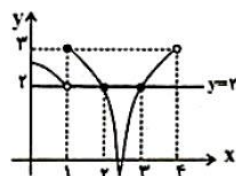
(۴) $(2, 3)$

ایران تونش

توشه ای برای موفقیت

حل:

عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج باید نامنفی باشد و چون در مخرج کسر قرار دارد، صفر نیز نمی‌تواند باشد.



$$y = \frac{1}{\sqrt{2-f(x)}} \Rightarrow 2-f(x) > 0 \Rightarrow f(x) < 2$$

با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، فقط در فاصله‌ی $2 < x < 3$ ، مقادیر $f(x)$ کم‌تر از ۲ است.

تمرین

اگر $f(x) + xf(-x) = x^2 + 1$ ، آنگاه مقدار $f(2)$ کدام است؟

(۲) -۲

(۱) -۱

(۴) ۴

(۳) ۳

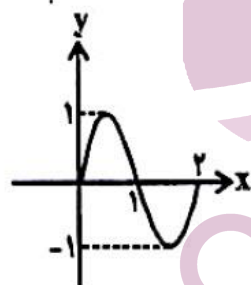
حل:

$$f(x) + xf(-x) = x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow f(2) + 2f(-2) = 4 + 1 \\ x=-2 \Rightarrow f(-2) - 2f(2) = 4 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 5 \\ -2f(-2) + 4f(2) = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو ضابطه}} \begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 5 \\ 5f(2) = -5 \end{cases} \Rightarrow f(2) = -1$$

تمرین

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، برد تابع $g(x) = 1 + 3f(\frac{x}{4})$ کدام است؟



(۲) $[2, 4]$

(۱) $[-2, 4]$

(۴) $[-2, 2]$

(۳) $[-2, 0]$

ایران توشه

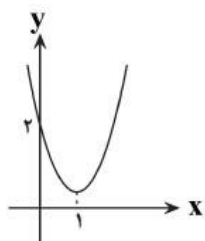
توشه ای برای موفقیت

حل:

$$-1 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq f\left(\frac{x}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3f\left(\frac{x}{4}\right) \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 1 + 3f\left(\frac{x}{4}\right) \leq 4 \Rightarrow -2 \leq g(x) \leq 4$$

داریم:

تمرین



- شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = x^2 + ax + b$ است. اگر $g(x)$ از انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه ۳

واحد به پایین حاصل شود، مجموع جواب‌های طبیعی نامعادله $g(x) < 0$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

حل: خودتون حل کنید جواب گزینه ی ۱

تمرین

اگر $g(x) = f(3x - 4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸

حل:

$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x} \quad \text{و} \quad g(x) = f(3x - 4)$$

نقطه $A(16, \beta)$ روی تابع g^{-1} است، پس نقطه $A'(\beta, 16)$ روی تابع g است، یعنی:

$$g(\beta) = 16$$

اما $g(x) = f(3x - 4)$ است، پس:

$$\Rightarrow f(3\beta - 4) = 16 \Rightarrow f^{-1}(16) = 3\beta - 4$$

با قرار دادن نقطه در تابع $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ خواهیم داشت:

$$\Rightarrow 16 + \sqrt{16} = 3\beta - 4 \Rightarrow 3\beta = 16 + 4 + 4 \Rightarrow \beta = 8 \Rightarrow g(8) = 16 \Rightarrow g^{-1}(16) = 8$$

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضی ۳	رشته : علوم تجربی	ساعت شروع : ۸ صبح	تعداد صفحه : ۳
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :	تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	مدت امتحان : ۱۲۰
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	(استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد)	
	نمره		

الف) بخش الزامی

دانش آموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۳ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.

۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. ج) تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در بازه $(-1, 1)$ اکیداً صعودی است.	۰/۷۵
---	---	------

حل:

الف) درست	ج) نادرست هر مورد	۰/۲۵	۰/۷۵
-----------	-------------------	------	------

صفحات: ۷ و ۷۸ و ۱۰۴

تمرین

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضی ۳	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع: ۸ صبح	تعداد صفحه: ۳
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی:	تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	مدت امتحان: ۱۲۰
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در فوئت خرده ماه سال ۱۳۹۹	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	(استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد)	
	نمره		

الف) بخش الزامی

دانش آموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۳ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.

۰/۷۵	۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. ج) تابع $f(x) = x^2 - 3x$ در بازه $(-1, 1)$ اکیدا صعودی است.
۰/۷۵	۲	درجاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) برد تابع $y = \tan x$ برابر است.
۰/۷۵	۳	نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. الف) نمودار تابع $y = 3f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید. ب) دامنه تابع $y = 3f(\frac{1}{3}x)$ را تعیین کنید.
۱	۴	اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید



حل:

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: علوم تجربی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضی ۳
تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) درست (ب) نادرست صفحات: ۷ و ۷۸ و ۱۰۴ ج) نادرست هر مورد	۰/۷۵
۲	الف) R (ب) صفر صفحات: ۳۹ و ۶۳ و ۸۰ ج) مماس قائم هر مورد	۰/۷۵
۳	الف) رسم شکل (۰/۵) ب) $D = [-۴, ۶]$ (۰/۲۵) صفحه: ۲۰	۰/۷۵
۴	صفحه: ۲۲ $f(g(x)) = ۳g(x) - ۴ = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴ (۰/۵) \Rightarrow g(x) = x^۲ - ۲x + ۶ (۰/۵)$	۱

ایران تونش

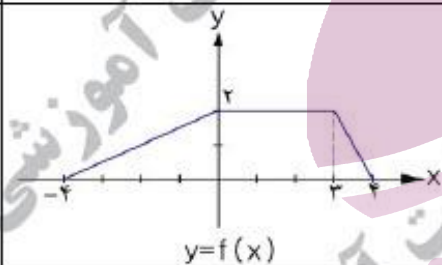
توشه ای برای موفقیت

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضی ۳	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع: ۸ صبح	تعداد صفحه: ۲
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۲	نام و نام خانوادگی:	مدت امتحان: ۱۲۰
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد) (استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد)	نمره
------	---	------

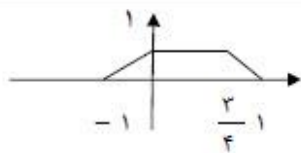
۱	در جاهای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید. الف) تابع $y = (x+1)^3$ در دامنه‌ی تعریف خود..... (صعودی، نزولی) است.	۰/۷۵
۲	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. الف) دو تابع $f(x) = \frac{2x+6}{y}$ و $g(x) = \frac{-7}{y}x - 3$ وارون یکدیگرند. (درست، نادرست)	۰/۷۵
۳	دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱
۴	با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار $y = \frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید.	۰/۵



باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضی ۳	رشته: علوم تجربی	تعداد صفحه: ۴	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	ساعت شروع: ۸ صبح	تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۲	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۸			

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) صعودی ۰/۲۵ ب) کوچکتر ۰/۲۵ پ) ناسازگار ۰/۲۵ صفحات: ۱۴۴ و ۱۳۱ و ۷	۰/۷۵
۲	الف) درست ۰/۲۵ ب) نادرست ۰/۲۵ پ) درست ۰/۲۵ صفحات: ۱۲۳ و ۳۹ و ۲۹	۰/۷۵
۳	صفحه: ۱۴ $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 4 \mid \sqrt{x-4} \neq \pm 1\} = [4, 5) \cup (5, +\infty)$	۱
۴	صفحات: ۲۱ و ۸ Graph of the transformed function	۰/۵



تمرین

اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

(۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

(۳) $(-1, 1)$

(۲) $\{0\}$

(۱) $[0, 1)$

حل:

روش ۱ (عددگذاری):

برای حل نامساوی $0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$ ، با توجه به گزینه‌ها اگر $x = \frac{1}{2}$ قرار دهیم نامساوی صدق نمی‌کند. پس فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

روش ۲

ضابطه $g(f(x))$ را تشکیل داده و دامنه آن را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \sqrt{x(1-x)} \Rightarrow g(f(x)) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2} \left(1 - \frac{1+x^2}{1-x^2}\right)} = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2} \left(\frac{-2x^2}{1-x^2}\right)} = \sqrt{\frac{(1+x^2)(-2x^2)}{(1-x^2)^2}} \Rightarrow \frac{\overbrace{(1+x^2)}^{\text{همواره مثبت}} \underbrace{(-2x^2)}_{\text{همواره مثبت}}}{(1-x^2)^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0$$

تمرین

اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشد، حاصل $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

(۴) $4\sqrt{2}$

(۳) ۴

(۲) $4(\sqrt{2} - 1)$

(۱) $4(1 - \sqrt{2})$

حل:

توشه ای برای مشتق

$$\begin{cases} f(x) = |x|, g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \\ f(g(x)) = |g(x)| = \left| \underbrace{(x+1)^2}_{\text{همواره نامنفی}} \right| = (x+1)^2 \Rightarrow (f \circ g)(1 - \sqrt{2}) = \underbrace{(1 - \sqrt{2} + 1)^2}_{2 - \sqrt{2}} = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2} \\ g(f(x)) = (f(x) + 1)^2 = (|x| + 1)^2 \Rightarrow (g \circ f)(1 - \sqrt{2}) = \left| \underbrace{1 - \sqrt{2}}_{\text{منفی}} \right| + 1)^2 = (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \\ \Rightarrow (f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2}) = (6 - 4\sqrt{2}) - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2}) \end{cases}$$

تمرین

اگر $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ ، مجموعه طول نقاط از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x قرار گیرد برابر کدام بازه است؟

- (۱) $(-4, 1)$ (۲) $(-3, 2)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(4, -1)$

حل:

ابتدا ضابطه ی $g \circ f$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x) = x^2 + 3x \\ g(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} &\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = -\frac{1}{2}f(x) + 2 \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 3x) + 2 \end{aligned}$$

برای به دست آوردن مجموعه ی نقاطی که نمودار تابع $g \circ f$ بالای محور x قرار می گیرد، باید نامعادله ی $(g \circ f)(x) > 0$ را حل کنیم:

$$(g \circ f)(x) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-2)} x^2 + 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x-1)(x+4) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1 \Rightarrow x \in (-4, 1)$$

تمرین

اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ نمودارهای دو تابع f و $f \circ g$ ، با کدام طول متقاطع اند؟

- (۱) -1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 1 (۴) $\frac{3}{2}$

حل:

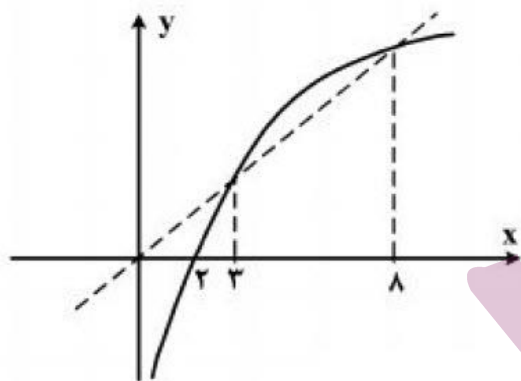
$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x) = (2x - 3)^2 \\ g(x) = x + 2 \end{cases} &\Rightarrow f(g(x)) = (2g(x) - 3)^2 = (2(x + 2) - 3)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \\ y_1 = f(x) &= (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9 \\ y_2 = f(g(x)) &= 4x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

قطع می دهیم $y_1 = y_2$

$$4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 16x = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

تمرین

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



کدام است؟

(۱) $(0, 2]$

(۲) $[2, 3]$

(۳) $[2, 8]$

(۴) $[3, 8]$

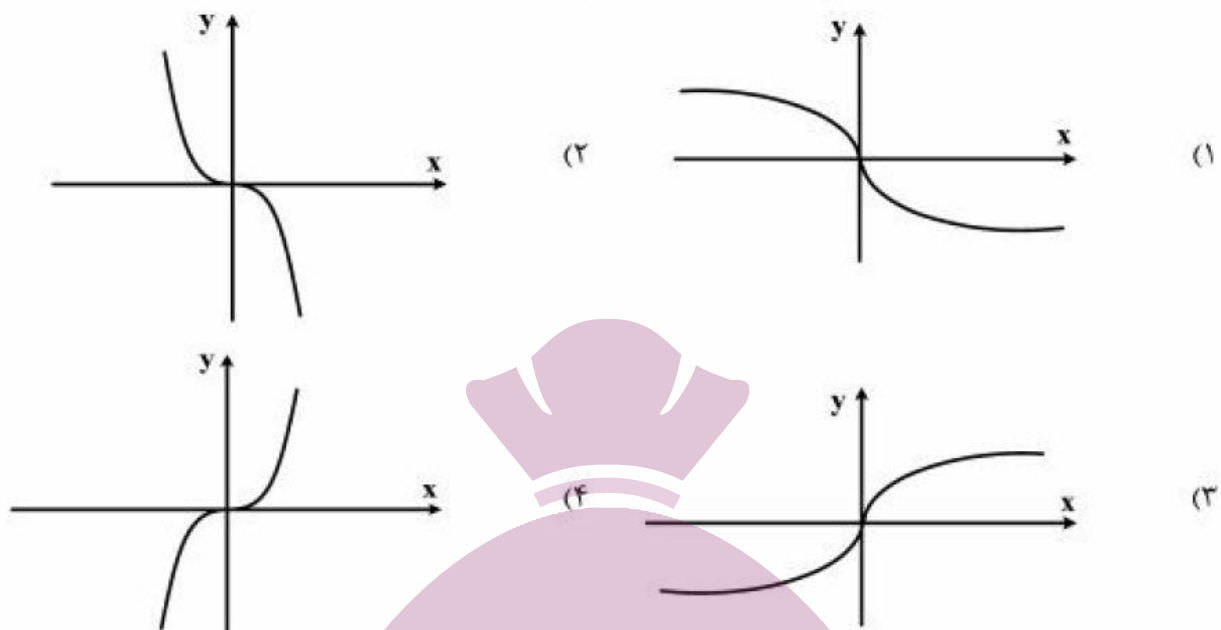
حل:

$f^{-1}(x)$ قرینه‌ی $f(x)$ نسبت به خط $y = x$ است. $x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$ با توجه به نمودار در بازه‌ی $[3, 8]$ ، $x \geq f^{-1}(x)$ است.



تمرین

اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟



حل: دیگه آسونه . سراسری تجربی ۹۵ .. خودتون جواب رو پیدا

کنید .

ایران توننده
توشه ای برای موفقیت