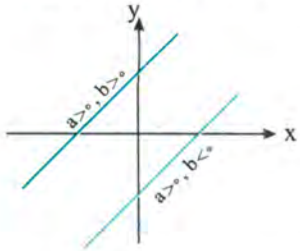
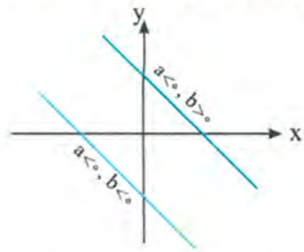
درس اول: توابع چندجمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

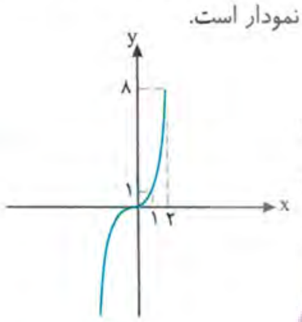
۱- **توابع خطی:** هر تابع را که به‌صورت $f(x)=ax+b$ باشد، یک تابع خطی می‌گویند که نمودارهای آن به‌صورت زیر می‌تواند باشد:



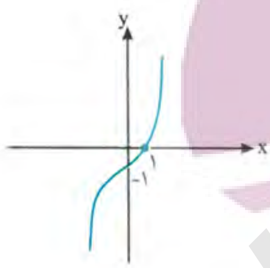


۲- **توابع چندجمله‌ای:** هرگاه تابع با ضابطه‌ای به شکل کلی $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ دیدیم به آن تابع چندجمله‌ای می‌گوییم که در آن $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ اعداد حقیقی هستند و n عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ است. دقت کنید که دامنهٔ اینگونه توابع $\mathbb{R}$ است.

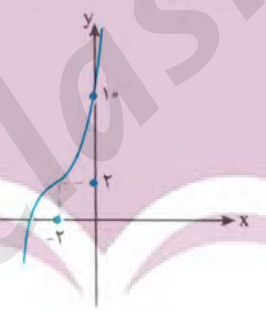
تابع درجه ۳: صورت کلی تابع درجه ۳ به‌صورت $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$ است که در مشهورترین تابع درجه سوم، تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3$ است که بر تابع «لُر» شهرت دارد. دقت کنید که باتوجه به شکل، مبدأ مرکز تقارن نمودار است.



- با استفاده از این نمودار، می‌توان نمودار توابعی مثل $y=x^3-1$، $y=(x+2)^3+2$ و $y=(x-1)^3-3$ و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کرد که به ترتیب با یک واحد حرکت نمودار x^3 در راستای منفی yها (شکل ۱)، با دو واحد حرکت به‌سمت چپ در راستای xها و دو واحد حرکت به‌سمت بالا در راستای yها (شکل ۲) و با یک واحد به‌سمت راست در راستای xها و ۳ واحد حرکت به‌سمت پایین در راستای yها (شکل ۳) رسم می‌شوند و مطابق شکل‌ها، دامنه و برد این توابع نیز $\mathbb{R}$ هستند.



شکل ۱



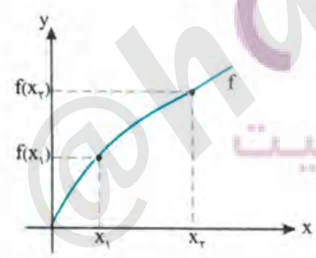
شکل ۲

شکل ۳

- **توابع صعودی و نزولی:**

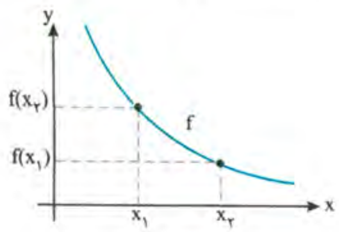
الف) وقتی به‌ازای افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع f مدار y نیز افزایش یابد، تابع را اکیداً صعودی می‌گوییم. در این‌گونه توابع داریم:

$$x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

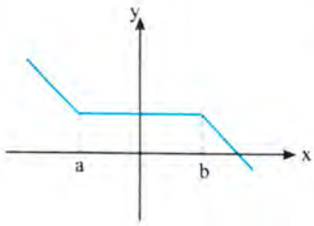


ب) وقتی به‌ازای افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع f مقدار y کاهش یابد، تابع اکیداً نزولی است. در این‌گونه توابع داریم:

$$x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



نکته به نمودار شکل زیر دقت کنید.



این تابع در بازه‌های $(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[a,b]$ ثابت است و درجا می‌زند.

به این‌گونه توابع، نزولی می‌گوییم و به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$x_1,x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

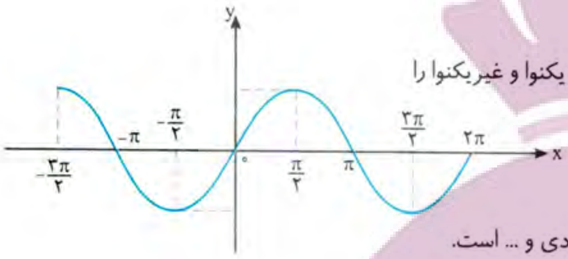
و اگر رابطه‌ای به‌صورت زیر تعریف شود به آن تابع صعودی می‌گوییم:

$x_1,x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

◆ تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. باتوجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

◆ **توابع یکنوا و غیریکنوا:**

ابتدا به نمودار زیر دقت کنید که بعد با توضیح کامل این نمودار مفهوم توابع یکنوا و غیریکنوا را درک می‌کنیم:



این تابع در بازهٔ $[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی و ... است.

به این توابع که گاهی صعودی و گاهی نزولی‌اند، نه صعودی و نه نزولی یا غیریکنوا می‌گوییم.

به توابعی که در دامنه‌شان همواره صعودی یا همواره نزولی باشند، یکنوا می‌گویند.

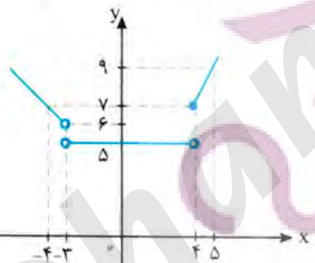
◆ برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع در بازه‌های مختلف، ساده‌ترین کار رسم شکل است.

مثال نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-x+3 & x<-3\\ 5 & -3\leq x<4\\ 2x-1 & x\geq 4\end{cases}$$

پاسخ: برای هر ضابطه، نمودار تابع را مطابق شکل می‌کشیم و مشخص می‌شود که:

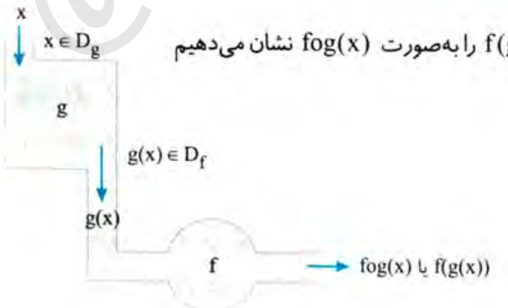
در بازهٔ $x<4$: تابع نزولی، در بازهٔ $-3\leq x<4$ تابع ثابت و در بازهٔ $x\geq -3$: تابع صعودی است.



درس دوم: ترکیب توابع

اگر f و g دو تابع باشند، به‌طوری که اشتراک برد g و دامنهٔ f غیرتهی باشد، تابع $f(g(x))$ را به‌صورت $fog(x)$ نشان می‌دهیم و آن را ترکیب f با g می‌نامیم.

مراحل ساخت تابع مرکب fog را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:



مثال اگر $f=\{(۰,-۲),(۳,۴),(۴,۱),(-۱,۵)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,-۲),(۱,۰),(-۲,۵),(۴,-۶)\}$ باشند، تابع gof را در صورت امکان بنویسید.

پاسخ: به‌ازای هرکدام از مقادیر دامنهٔ f به جای x، تابع مرکب را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} gof(۰)=g(f(۰))=g(-۲)=۵ \\ gof(۳)=g(f(۳))=g(۴)=-۶ \\ gof(۴)=g(f(۴))=g(۱)=۰ \\ gof(-۱)=g(f(-۱))=g(-۱)=\text{تعریف نشده} \end{array}\right\} \Rightarrow gof=\{(۰,۵),(۳,-۶),(۴,۰)\}$$

دامنهٔ تابع مرکب: ۱- دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که در دامنهٔ f قرار داشته باشند، به شرطی که $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد؛ به بیان دیگر:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

۲- دامنهٔ تابع مرکب fog مجموعه xهایی است که در دامنهٔ g قرار داشته باشند به شرطی که $g(x)$ در دامنهٔ f قرار داشته باشد؛ به بیان دیگر:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

مثال اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=x^۲-۱$ باشد، دامنه و ضابطه تابع gof را بنویسید.

پاسخ: ابتدا دامنه f و g را به‌دست می‌آوریم تا بتوانیم دامنهٔ gof را بنویسیم.

$$D_f=[۱,+\infty),\ D_g=\mathbb{R}$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in Dg\}$$
$$=\{x\in[۱,+\infty) \mid \sqrt{x-۱}\in R\}=[۱,+\infty)$$

دقت کنید که عبارت $\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}$ به‌ازای $x-۱\geq ۰$ یعنی $x\geq ۱$ درست است.

تذکر دامنهٔ توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به‌دست می‌آوریم، (نه از روی ضابطه!) زیرا از روی ضابطه ممکن است دامنه نادرست به‌دست آید (مانند همین مثال!) اما محاسبهٔ ضابطه:

$$(gof)(x)=g(f(x))=(f(x))^۲-۱=(\sqrt{x-۱})^۲-۱=x-۱-۱=x-۲$$

دامنهٔ $\mathbb{R}$ به‌دست آمده که نادرست است.

نکته اگر $(fog)(x)$ و $f(x)$ را بدهند و $g(x)$ را بخواهند، به‌ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) به‌جای x، عبارت $g(x)$ را در تابع f قرار می‌دهیم تا $fog(x)$ به‌دست آید.

۲) با مقایسهٔ $(fog)(x)$ به‌دست‌آمده با $(fog)(x)$ داده‌شده در مسئله، $g(x)$ مشخص می‌شود.

مثال اگر $f(x)=\frac{x}{x+۱}$ و $(fog)(x)=\frac{۲}{x-۱}$ باشد، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را بیابید.

پاسخ:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)+۱}\overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}\frac{۲}{x-۱}\Rightarrow(x-۱)(g(x))=۲(g(x)+۱)$$

$$\Rightarrow xg(x)-g(x)=۲g(x)+۲\Rightarrow xg(x)-۳g(x)=۲\Rightarrow g(x)(x-۳)=۲\Rightarrow g(x)=\frac{۲}{x-۳}$$

نکته اگر $(fog)(x)$ و $g(x)$ را بدهند و $f(x)$ را بخواهند، به‌ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) ضابطهٔ $g(x)$ را به‌جای آن در $f(g(x))$ را جایگذاری می‌کنیم.

۲) عبارت داخل پرانتز را t فرض می‌کنیم.

۳) x را برحسب t پیدا می‌کنیم.

۴) به‌جای همهٔ xها در عبارت مقدار آن برحسب t را جایگذاری می‌کنیم.

مثال اگر $fog(x)=x^2-2x$ و $g(x)=2x-1$ باشند، تابع $f(x)$ را بیابید.

پاسخ: به جای $g(x)$ در عبارت $f(g(x))=x^2-2x$ مقدار $2x-1$ را قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(2x-1)=x^2-2x \\ 2x-1=t \Rightarrow x=\dfrac{t+1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(t)=\left(\frac{t+1}{2}\right)^2-2\left(\frac{t+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{t^2+2t+1}{4}-t-1 \Rightarrow f(t)=\frac{t^2-2t-3}{4} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2-2x-3}{4}$$

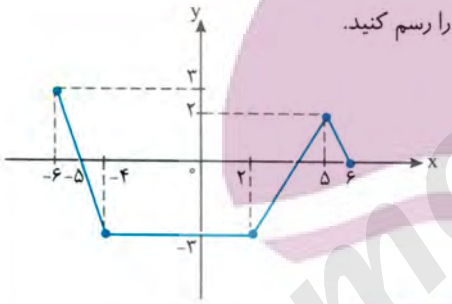
تبدیل نمودار تابع:

رسم نمودار $y=kf(x)$

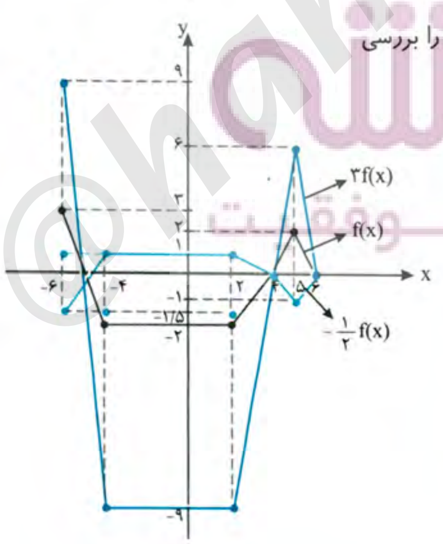
برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y=kf(x)$ کافی است، عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y=f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم. (دامنهٔ تابع $y=kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است؛ اما برد آن‌ها لزوماً یکسان نیست.)

تذکر
۱. اگر $k>1$ باشد، برای رسم نمودار $y=kf(x)$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود. (انبساط عمودی)
۲. اگر $0<k<1$ باشد، برای رسم نمودار $y=kf(x)$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k فشرده می‌شود. (انقباض عمودی)
۳. اگر $k<0$ باشد، برای رسم نمودار $y=kf(x)$، ابتدا نمودار $f(x)$ نسبت به محور xها قرینه می‌شود و سپس با ضریب $|k|$ به‌طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.

مثال با استفاده از نمودار تابع $f(x)$، نمودار توابع $y=3f(x)$ و $y=-\frac{1}{2}f(x)$ را رسم کنید.



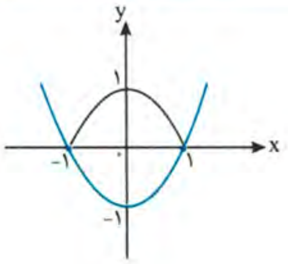
پاسخ: با استفاده از جدول روبه‌رو، تغییر هر خط از نمودار تابع f در تابع‌های جدید را بررسی می‌کنیم و سپس با استفاده از نقاط این جدول، آن توابع را رسم می‌کنیم.



x	$f(x)$	$3f(x)$	$-\frac{1}{2}f(x)$
-۶	۳	۹	-۱/۵
-۴	-۳	-۹	۱/۵
۲	-۳	-۹	۱/۵
۵	۲	۶	-۱
۶	۰	۰	۰

تذکر از آن‌جایی که ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ و $kf(x)=0$ یکسان می‌باشد؛ نتیجه می‌گیریم که محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور xها یکسان است.

رسم نمودار $y=|f(x)|$



برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیرمحور xهاست، قرینه نمودار f را نسبت به محور xها رسم کنیم. برای مثال، باتوجه به نمودار $y=x^2-1$ (نمودار آبی)، نمودار $y=|x^2-1|$ (نمودار خاکستری) رسم شده است.

رسم نمودار $y=f(kx)$

برای رسم نمودار $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

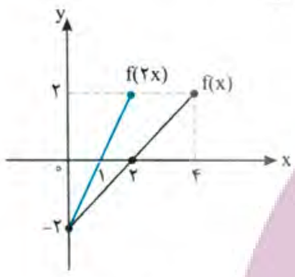
- اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به‌دست آورد.
- اگر $k<0$، ابتدا نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به‌طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

مثال تابع $f(x)=x-2$ را با دامنه $[0,4]$ رسم کنید. سپس دامنه و نمودار تابع $y=f(2x)$ را رسم کنید.

پاسخ:

x	f(x)	x	f(2x)
۰	-۲	۰	-۲
۲	۰	۱	۰
۴	۲	۲	۲

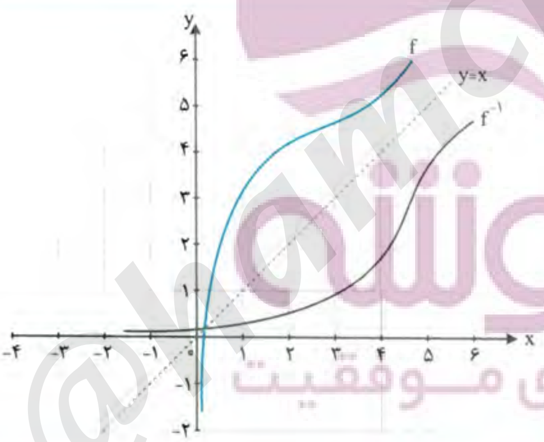
$\div 2$



داخل f، عددهای بازهٔ $[0,4]$ باید قرار بگیرد (چه داخل f، x باشد و چه 2x) بنابراین: $0\le 2x\le 4 \Rightarrow 0\le x\le 2$:دامنه

درس سوم: تابع وارون

جمع وارون:



۱) تابع یک‌به‌یک: تابع یک‌به‌یک تابعی است که مؤلفهٔ دوم تکراری نداشته باشد یا اگر تکراری باشد، مؤلفهٔ اول آن هم تکراری باشد. نمودار این توابع به‌گونه‌ای است که هر خط افقی آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۲) تابع وارون: اگر جای x و y را در توابع یک‌به‌یک جابه‌جا کنیم، تابع جدیدی ایجاد می‌شود که آن را تابع وارون می‌گوییم و با نماد f^{-1} نمایش می‌دهیم. نمایش تابع وارون هم، قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

نکته دقت کنید که شرط معکوس‌پذیری یک تابع، یک‌به‌یک بودن آن است.

۳) ضابطهٔ تابع وارون: برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) به جای $f(x)$، y را جایگذاری می‌کنیم.

۲) x را در معادله بر حسب y پیدا می‌کنیم. (اصطلاحاً x را تنها می‌کنیم.)

۳) اسم x و y را عوض می‌کنیم و در نهایت به‌جای y از $f^{-1}(x)$ استفاده می‌کنیم.

مثال ضابطهٔ تابع وارون توابع $y=-2x+1$ و $y=\sqrt{x-1}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$y=-2x+1 \to 2x=1-y \Rightarrow x=\frac{1-y}{2} \Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{1-y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1-x}{2}$$

$$y=\sqrt{x-1} \Rightarrow y^2=x-1 \Rightarrow x=y^2-1 \Rightarrow f^{-1}(y)=y^2-1 \Rightarrow f^{-1}(x)=x^2-1$$

نکته ۱) دامنهٔ تابع برابر برد تابع وارون و برد تابع، برابر دامنهٔ تابع وارون است:

$$D_f=R_{f^{-1}}$$
$$R_f=D_{f^{-1}}$$

۲) اگر f وارون‌پذیر باشد، و f^{-1} وارون آن باشد، آن‌گاه:

$$(fof^{-1})(x)=x \ , \ (f^{-1}of)(x)=x$$

هم‌چنین دامنهٔ fof^{-1} همان دامنهٔ f^{-1} و دامنهٔ $f^{-1}of$ همان دامنهٔ f است.

۳) در توابع رابطهٔ زیر همواره برقرار است:

$$(fog)^{-1}(x)=g^{-1}of^{-1}(x)$$

مثال اگر $f=\{(1,2),(3,-1),(4,5)\}$ باشد، حاصل $fof^{-1}(x)$ و $f^{-1}of(x)$ را بیابید.

پاسخ: زوج‌های $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-1}=\{(2,1),(-1,3),(5,4)\}$$

حالا به‌ترتیب xها را از این تابع به $fof^{-1}(x)$ می‌دهیم و yها را پیدا می‌کنیم.

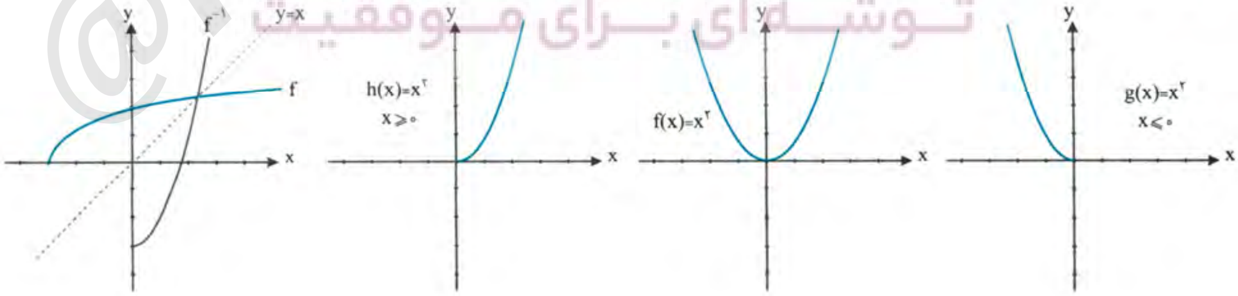
$$\begin{cases} f(f^{-1}(2))=f(1)=2 \\ f(f^{-1}(-1))=f(3)=-1 \Rightarrow fof^{-1}=\{(2,2),(-1,-1),(5,5)\} \\ f(f^{-1}(5))=f(4)=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1}(f(1))=f^{-1}(2)=1 \\ f^{-1}(f(3))=f^{-1}(-1)=3 \Rightarrow f^{-1}of=\{(1,1),(3,3),(4,4)\} \\ f^{-1}(f(4))=f^{-1}(5)=4 \end{cases}$$

محدود کردن دامنهٔ تابع:

همان‌طور که گفتیم تابعی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد. گاهی بعضی از توابع یک‌به‌یک نیستند، اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ آن‌ها، آن‌ها را به تابع یک‌به‌یک تبدیل کرد و سپس وارون آن‌ها را به‌دست آورد.

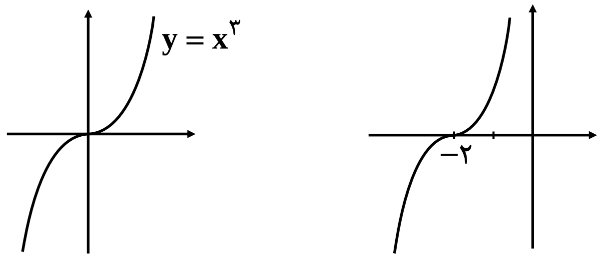
می‌دانیم که تابع $y=x^2$ یک‌به‌یک نیست، زیرا شکل این تابع سهمی است و خط موازی محور xها این نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. اما اگر دامنهٔ آن را به‌صورت $[0,+\infty)$ و یا $(-\infty,0]$ محدود کنیم، آن وقت تابع $y=x^2$ یک تابع یک‌به‌یک می‌شود.



سوالات مربوط به رسم تابع درجه سوم

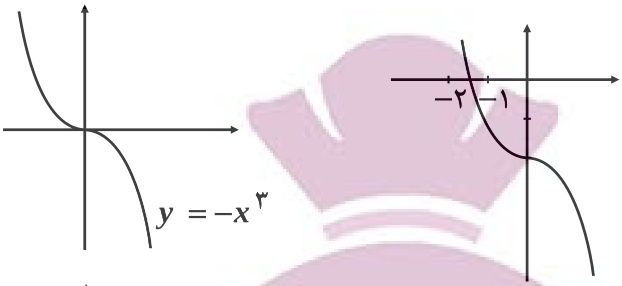
۱- با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^3$ ، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن ها را مشخص کنید.

الف) $y=(x+2)^3$



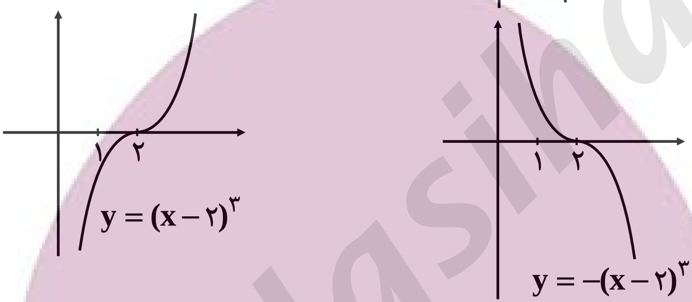
$D_f=\mathbb{R}$
$R_f=\mathbb{R}$

ب) $y=-x^3-2$



$D_f=\mathbb{R}$
$R_f=\mathbb{R}$

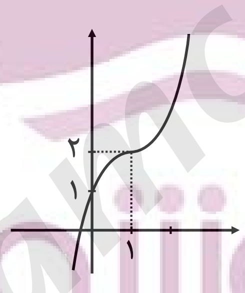
پ) $y=-(x-2)^3$



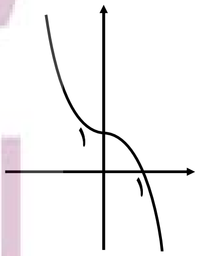
$D_f=\mathbb{R}$
$R_f=\mathbb{R}$

۲- به کمک نمودار تابع $y=x^3$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

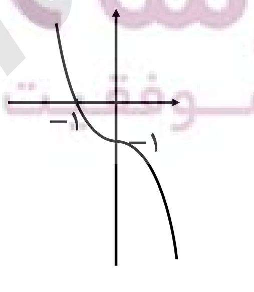
۱) $y=(x-1)^3+2$



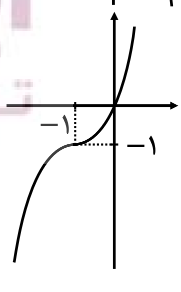
۲) $y=-x^3+1$



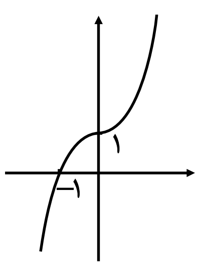
۳) $y=-x^3-1$



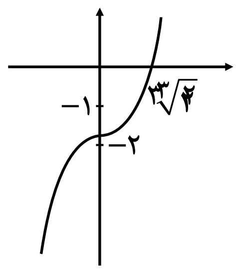
۴) $(x+1)^3-1$



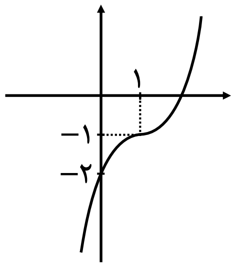
۵) $y=x^3+1$



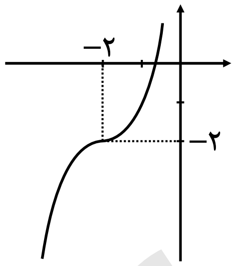
۶) $y=x^3-2$



۷) $y=(x-1)^3-1$

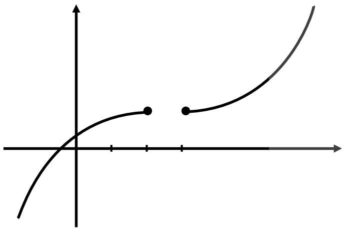


۸) $y=(x+2)^3-2$

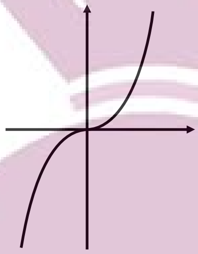


سوالات مربوط به صعودی و نزولی بودن

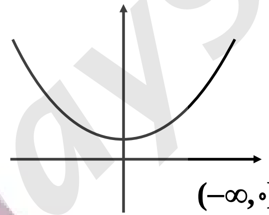
۱- مشخص کنید توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟



صعودی

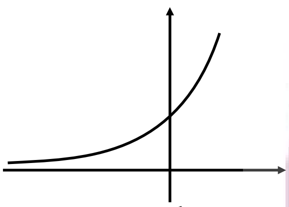


اکیداً صعودی

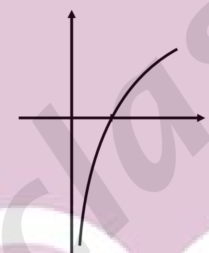


اکیداً نزولی $\to (-\infty,0]$

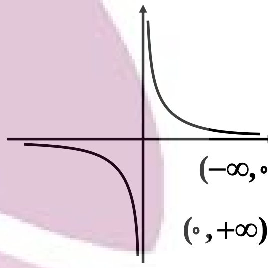
اکیداً صعودی $\to [0,+\infty)$



اکیداً صعودی

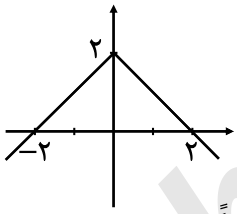


اکیداً صعودی



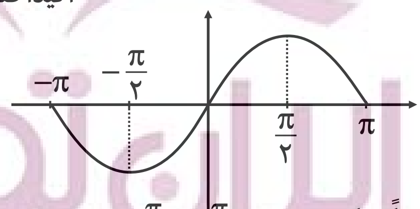
اکیداً نزولی $\to (-\infty,0)$

اکیداً نزولی $\to (0,+\infty)$



اکیداً صعودی $\to (-\infty,0]$

اکیداً نزولی $\to [0,+\infty)$

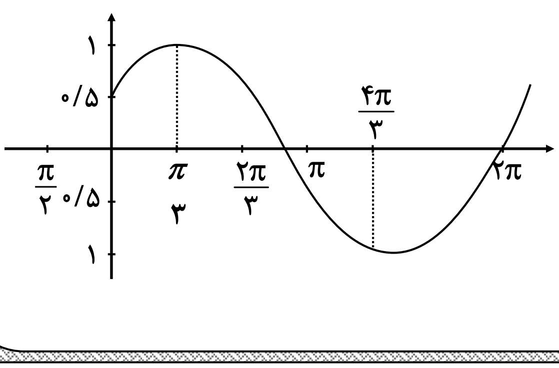


اکیداً نزولی $\to [-\pi,-\frac{\pi}{2}],[\frac{\pi}{2},\pi]$

اکیداً صعودی $\to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

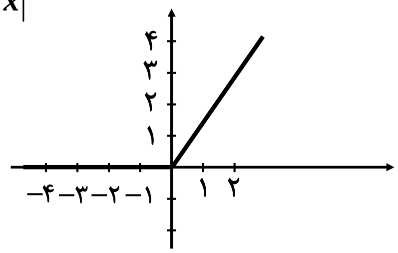
۲- نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند؟

الف) $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$



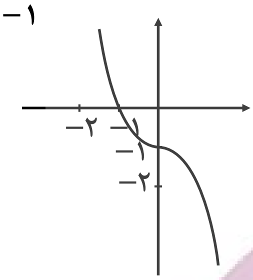
در بازه‌های $[\frac{۴\pi}{۳},۲\pi]$ و $[۰,\frac{\pi}{۳}]$ صعودی و در بازه $[\frac{\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}]$ نزولی

ب) $g(x)=x+|x|$



در R صعودی، در $x\geq ۰$ اکیداً صعودی، در $x\leq ۰$ ثابت(در کل کتاب تابع صعودی است)

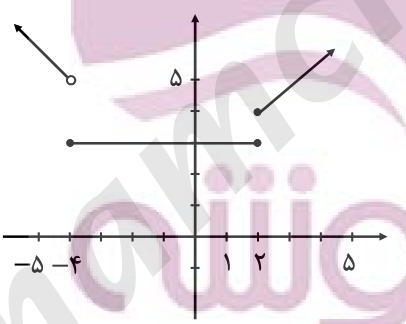
پ) $t(x)=-x^{۳}-۱$



اکیداً نزولی

۳- نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید:

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\leq x<۲\\ ۳x-۲ & x\geq ۲\end{cases}$$

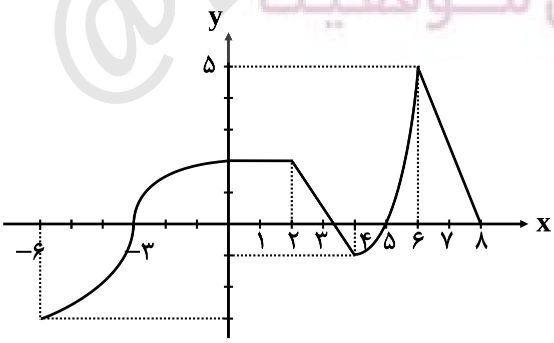


صعودی $x\in[۲,+\infty)$

نزولی $x\in(-\infty,-۴)$

ثابت $x\in[-۴,۲)$

۴- با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



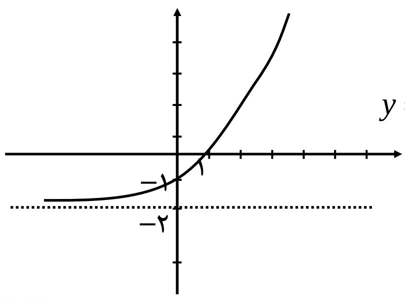
صعودی $x\in(-\infty,۰]\cup[۴,۶]$

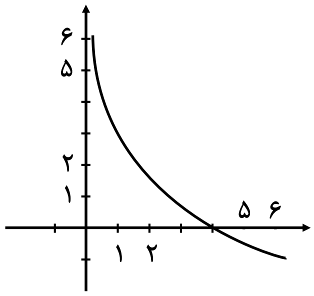
نزولی $x\in[۲,۴]\cup[۶,۸]$

ثابت $x\in[۰,۲]$

۵- تابع نمایی $y = ۲^x - ۲$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_۲^x + ۲$ را رسم کنید، یکنوایی آنها را مشخص کنید.

$y = ۲^x - ۲$ اکیداً صعودی

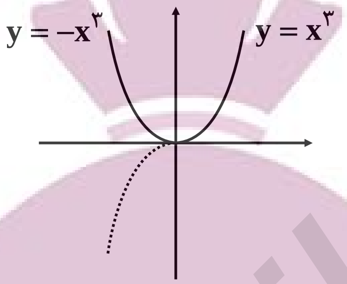




$y = -\log_۲^x + ۲$ اکیداً نزولی

۶- تابع $y = x^۲|x|$ در بازه‌ی $(-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a چقدر است؟

صفر



$$y = \begin{cases} x^۳ & x \geq ۰ \\ -x^۳ & x < ۰ \end{cases}$$

۷- تابعی مثال بزنید که در دامنه‌ی خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزرنید که در دامنه‌ی خود اکیداً نزولی باشد.

اکیداً نزولی $\begin{cases} y = (\frac{۱}{۲})^x \\ y = -x^۳ \end{cases}$

اکیداً صعودی $\begin{cases} y = ۳^x \\ y = x^۳ \end{cases}$

سوالات مربوط به ترکیب توابع

۱- با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان بدست آورید.

x	$f(x)$
-۳	-۷
-۲	-۵
-۱	-۳
۰	-۱
۱	۳
۲	۵
۳	۵

x	$g(x)$
-۳	۸
-۲	۳
-۱	۰
۰	-۱
۱	۰
۲	۳
۳	۸

الف) $fog(۱) = f(g(۱)) = f(۰) = -۱$

ب) $fog(-۱) = f(g(-۱)) = f(۰) = -۱$

پ) $gof(۰) = g(f(۰)) = g(-۱) = ۰$

ت) $gog(-۲) = g(g(-۲)) = g(۳) = ۸$

ث) $gof(۲) = g(f(۲)) = g(۵)$ وجود ندارد

ج) $fof(۱) = f(f(۱)) = f(۳) = ۵$

۲- اگر $f(x) = \sqrt{x-۱}$ و $g(x) = ۲x^۲ - ۱$ ، دامنه و ضابطه توابع fog و gof را بدست آورید.

$D_g = \mathbb{R}.D_f = [۱, +\infty)$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [۱, +\infty) \mid \sqrt{x-۱} \in \mathbb{R}\} = [۱, +\infty)$

$gof(x) = g(f(x)) = ۲f^۲(x) - ۱ = ۲ \times (\sqrt{x-۱})^۲ - ۱ = ۲(x-۱) - ۱ = ۲x - ۳$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲x^۲ - ۱ \geq ۱\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ \geq ۱\} = (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty)$

$fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - ۱} = \sqrt{۲x^۲ - ۱ - ۱} = \sqrt{۲x^۲ - ۲}$

۳- اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$ ، دامنه و ضابطه توابع fog و fof را بدست آورید.

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x}}=\frac{۲x}{۳-x}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{۱\},D_g=R-\{۰\}$$

$$D_{fog(x)}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in R-\{۰\}\,|\,\frac{۳}{x}\in R-\{۱\}\}=R-\{۰,۳\}$$

$$fof(x)=f(f(x))=\frac{۲}{\frac{۲}{x-۱}-۱}=\frac{۲}{\frac{۲-x+۱}{x-۱}}=\frac{۲x-۲}{۳-x}$$

$$D_{fof(x)}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_f\}=\{x\in R-\{۱\}\,|\,\frac{۲}{x-۲}\in R-\{۱\}\}=R-\{۱,۳\}$$

۴- اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$ ، توابع fog و gof را بدست آورید.

fog

$۵\rightarrow۷\rightarrow۸$

$۳\rightarrow۵\rightarrow۳$

$۷\rightarrow۹\rightarrow۸$

$۹\rightarrow۱۱\rightarrow۴$

$fog=\{(۵,۸),(۳,۳),(۷,۸),(۹,۴)\}$

gof

$۷\rightarrow۸\rightarrow$ وجود ندارد

$۵\rightarrow۳\rightarrow۵$

$۹\rightarrow۸\rightarrow$ وجود ندارد

$۱۱\rightarrow۴\rightarrow$ وجود ندارد

$gof=\{(۵,۵)\}$

۵- در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان بدست آورید.

الف) $f(x)=x^۲-۵,\ g(x)=\sqrt{x+۶}$ $\qquad D_{fog},(fog)(x)$

$$D_f=R,D_g=[-۶,+\infty)\Rightarrow D_{fog}=[x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}\Rightarrow$$

$$D_{fog}=\{x\in[-۶,+\infty)\,|\,\sqrt{x+۶}\in R\}=[-۶,+\infty)$$

$$f(g(x))=(\sqrt{x+۶})^۲-۵=x+۱$$

ب) $f(x)=\sqrt{۳-۲x},\ g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}$ $D_{fog},\ fog(x)$

$$D_f=(-\infty,\frac{۳}{۲}],D_g=R-\{\frac{۵}{۳}\}$$

$$D_{fog}=\{x\in R-\{\frac{۵}{۳}\}\,|\,\underbrace{\frac{۶}{۳x-۵}\in(-\infty,\frac{۳}{۲}]}_{I}\}=(-\infty,\frac{۵}{۳})\cup[۳,+\infty)$$

$$I \to \frac{6}{3x-5} \le \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{6}{3x-5} - \frac{3}{2} \le 0 \Rightarrow \frac{12-9x+15}{2(3x-5)} \le 0 \Rightarrow \frac{-9x+27}{2(3x-5)} \le 0$$

$\frac{5}{3}$		3	
$+$	$-$	$+$	
جواب		جواب	

$$fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{3-2(\frac{6}{3x-5})} = \sqrt{\frac{9x-27}{3x-5}}$$

پ) $f(x) = \sqrt{x+2}, g(x) = \sqrt{x^2-16}$ $\qquad D_{gof}, gof(x)$

$$D_f = [-2,+\infty), D_g = x^2-16 \ge 0 \to x^2 \ge 16 \to |x| \ge 4 \to D_g = (-\infty,-4] \cup [4,+\infty)$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [-2,+\infty) \mid \sqrt{x+2} \in (-\infty,-4] \cup [4,+\infty)\} = [14,+\infty)$$

$$I \to \begin{cases} \sqrt{x+2} \le -4 \text{ غیر قابل قبول} \\ \sqrt{x+2} \ge 4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+2 \ge 16 \to x \ge 14 \end{cases} \to x \in [14,+\infty)$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{(\sqrt{x+2})^2 - 16} = \sqrt{x-14}$$

ت) $f(x) = \sin x, g(x) = \sqrt{x}$ $\qquad D_{gof}, gof(x)$

$$D_f = R, D_g = [0,+\infty)$$

$$D_{gof} = \{x \in R \mid \underbrace{\sin x \in [0,+\infty)}_{I}\} = [2k\pi, 2k\pi+\pi]$$

$$I \to \sin x \ge 0 \xrightarrow[\in]{\text{ناحیه اول و دوم}} x \quad [2k\pi, 2k\pi \quad \pi]$$

$$g(f(x)) = \sqrt{\sin x}$$

۶- اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x + 4$، ضابطه $g(x)$ را بدست آورید.

$$f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$$

$$f(x) = 3x - 4$$

$$f(g(x)) = 3g(x) - 4$$

برای اینکه ضابطه $g(x)$ را بدست آوریم، کافی است خودمان $f(f(x))$ را تشکیل دهیم و مساوی عبارت داده شده قرار دهیم

$$\Rightarrow 3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14 \to 3g(x) = 3x^2 - 6x + 18 \to g(x) = x^2 - 2x + 6$$

۷- مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، آنگاه $fog(5) = -25$

باید حاصل $fog(5)$ را بدست آوریم:

$$f(g(5)) = f(\sqrt{21}) = (\sqrt{21})^2 - 4 = 17$$

$$g(5) = \sqrt{5^2 - 4} = \sqrt{21}$$

مشاهده می‌کنیم $fog(5) = 17$ می‌باشد پس قسمت الف نادرست است.

ب) برای دو تابع f و g که $f \ne g$ ، تساوی $(fog)_{(x)} = (gof)_{(x)}$ هیچ وقت برقرار نیست.

نادرست، اگر $f(x) = x$ و $g(x) = -x$ مشاهده می‌کنیم که $fog(x) = gof(x)$

$$f(g(x)) = (-x) = -x, g(f(x)) = -(x) = -x$$

پ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ آنگاه $(fog)(4) = 5$

درست است

$$f(g(4)) \xrightarrow{g(4)=7} f(7) = 5$$

۸- تابع $h(x)=(۳x^۲-۴x+۱)^۵$ ترکیب کدام تابع زیر است؟

الف) $f(x)=\sqrt[۵]{x}, g(x)=۳x^۲-۴x+۱$

$f(g(x))=\sqrt[۵]{۳x^۲-۴x+۱}\neq h(x)$

$g(f(x))=۳(\sqrt[۵]{x})^۲-۴(\sqrt[۵]{x})+۱\neq h(x)$

ب) $f(x)=x^۵, g(x)=۳x^۲-۴x+۱$

$f(g(x))=(۳x^۲-۴x+۱)^۵=h(x)$

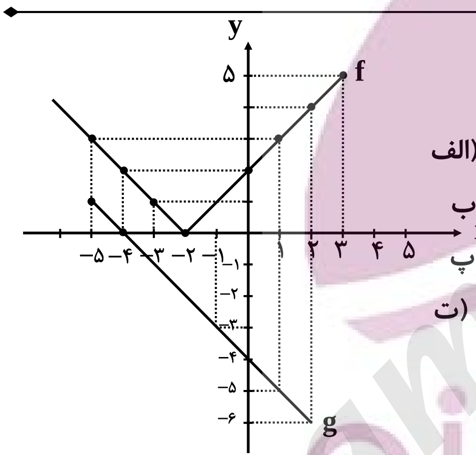
$g(f(x))=۳(x^۵)^۲-۴x^۵+۱\neq h(x)$

۹- هر یک از توابع زیر را به ورت ترکیب دو تابع بنویسید.

الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=\sqrt[۳]{x} \\ g(x)=x^۲+۱ \end{cases} \rightarrow f(g(x))=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$

ب) $L(x)=\sqrt{x^۲+۵} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=\sqrt{x} \\ g(x)=x^۲+۵ \end{cases} \rightarrow f(g(x))=\sqrt{x^۲+۵}$

۱۰- با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $fog(-۱)=f(g(-۱))=f(-۳)=۱$

ب) $gof(۰)=g(f(۰))=g(۲)=-۶$

پ) $fog(۱)=f(g(۱))=f(-۵)=۳$

ت) $gof(-۱)=g(f(-۱))=g(۱)=-۵$

۱۱- با توجه به ضابطه‌های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x)=۲x-۵, g(x)=x^۲-۳x+۸, fog(x)=۷$

$f(g(x))=۲(x^۲-۳x+۸)-۵=۲x^۲-۶x+۱۶-۵=۷\rightarrow ۲x^۲-۶x+۴=۰$

$\xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x_۱=۱ \\ x_۲=\frac{c}{a}=۲ \end{cases}$

ب) $f(x)=۳x^۲+x-۱, g(x)=۱-۲x, gof(x)=-۵$

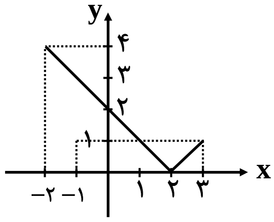
$g(f(x))=۱-۲(۳x^۲+x-۱)=-۵\rightarrow -۶x^۲-۲x+۸=۰$

$\xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x_۱=۱ \\ x_۲=\frac{c}{a}=-\frac{۴}{۳} \end{cases}$

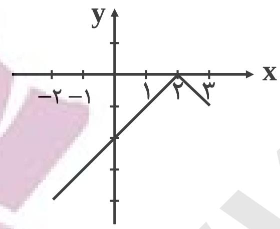
سوالات مربوط به تبدیل توابع

۱- نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازه $[-۲,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۲|$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|$ را رسم کنید.

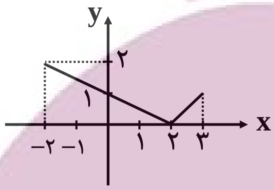
$f(x)=|x-۲|$



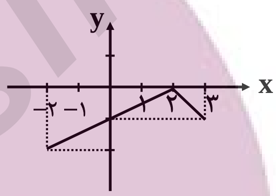
$g(x)=-|x-۲|$



$h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$



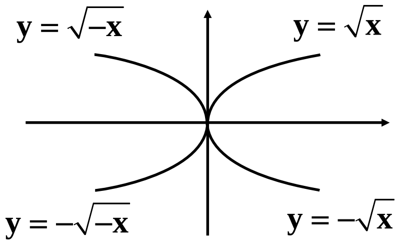
$k(x)=-\frac{۱}{۲}|۲-x|$



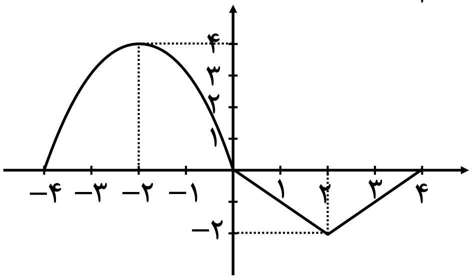
۲- نمودار تابع $y=|x^۲-۱|$ را رسم کنید:

می‌دانیم اگر کل عبارت داخل قدر مطلق باشد، ابتدا نمودار را بدون در نظر گرفتن قدر مطلق رسم می‌کنیم و سپس قسمت پایین محور x ها به بالا منتقل می‌شود

۳- نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ ، $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ را به کمک نمودار $y=\sqrt{x}$ را رسم کنید.



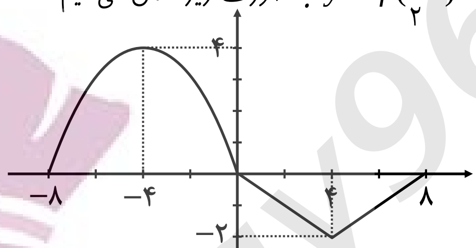
۴- نمودار تابع f با دامنه $[-۴,۴]$ به صورت زیر رسم شده‌است. نمودار تابع $y = f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید



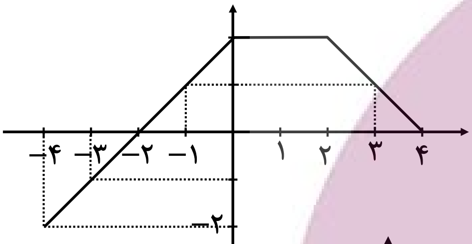
برای تعیین دامنه $y = f(\frac{۱}{۲}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-۴ \le \frac{۱}{۲}x \le ۴ \Rightarrow -۸ \le x \le ۸$$

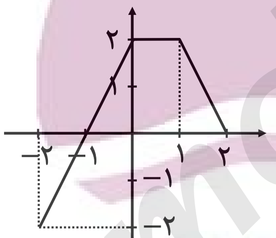
x	-۸	-۴	۰	۴	۸
$f(\frac{۱}{۲}x)$	۰	۴	۰	-۲	۰



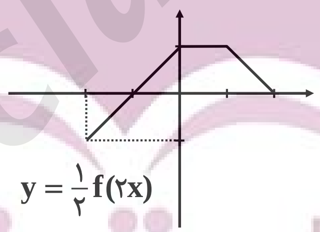
۵- با استفاده از نمودار تابع f ، نمودار های خواسته شده را رسم کنید:



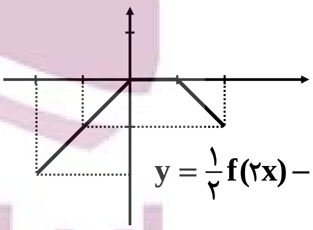
$y = \frac{۱}{۲} f(۲x) - ۱$



$y = f(۲x)$

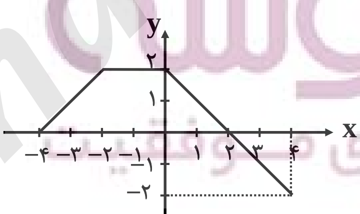


$y = \frac{۱}{۲} f(۲x)$

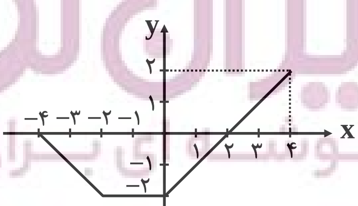


$y = \frac{۱}{۲} f(۲x) - ۱$

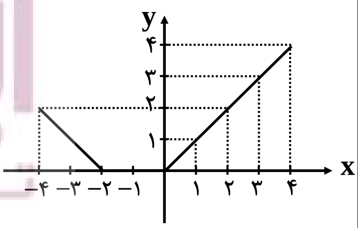
$y = -f(-x) + ۲$



$y = f(-x)$

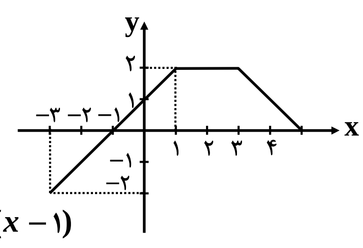


$y = -f(-x)$

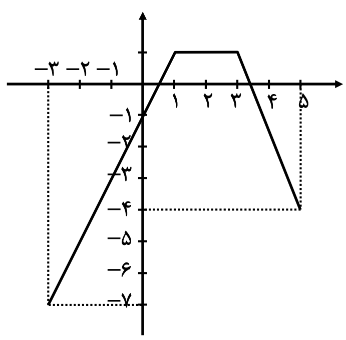


$y = -f(-x) + ۲$

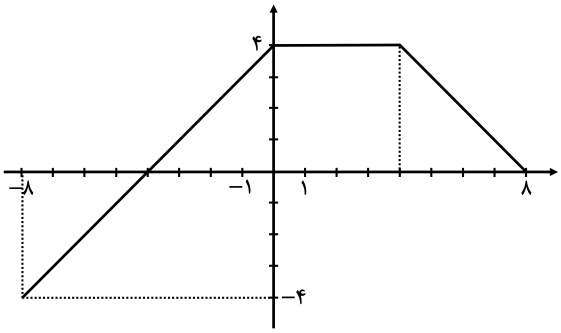
$y = ۲f(x-۱) - ۳$



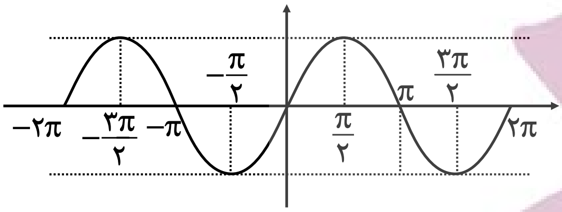
$y = f(x-۱)$



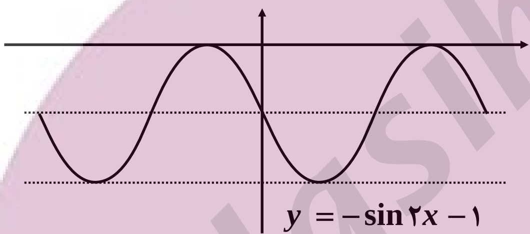
$y = ۲f(\frac{۱}{۲}x)$



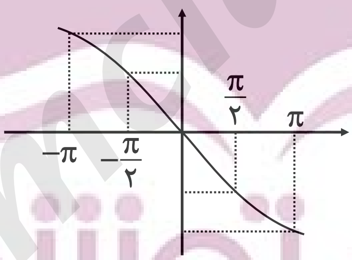
۶- توابع $y=-\sin ۲x-۱$ و $y=۲\sin(-\frac{۱}{۳}x)$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ رسم کنید.



الف) $y=-\sin ۲x-۱$



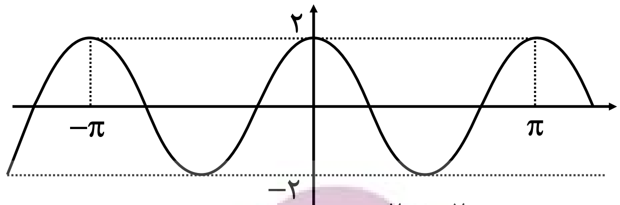
ب) $y=۲\sin(-\frac{۱}{۳}x)$



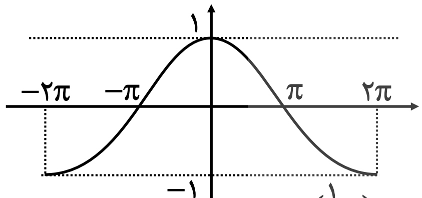
۷- با استفاده از نمودار $y=\cos x$ توابع زیر رسم شده‌است. ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ ب) $y=۲\cos ۲x$

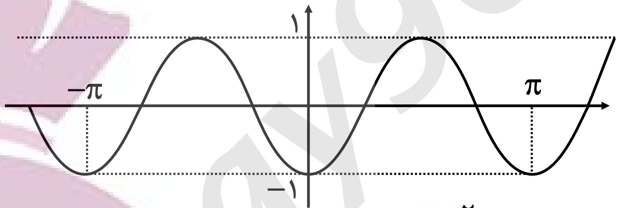
پ) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$ ت) $y=-\cos ۲x$



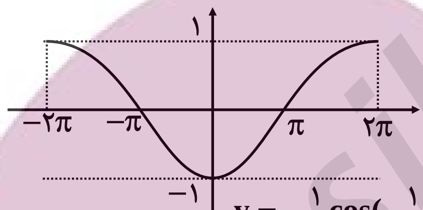
$y=۲\cos ۲x$



$y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$



$y=-\cos ۲x$



$y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$

سوالات مربوط به تابع وارون

۱- ضابطه‌ی تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$

$D_f=\mathbb{R} \qquad R_f=\mathbb{R}$

$f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳ \xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=-\frac{۱}{۲}y+۳ \to \frac{۱}{۲}y=-x+۳$

$y=-۲x+۶ \to f^{-۱}(x)=-۲x+۶$

$D_{f^{-۱}}=\mathbb{R} \qquad R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$

ب) $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$

$D_g=[۲,+\infty) \qquad R(g)=[۱,+\infty)$

$g(x)=۱+\sqrt{x-۲} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=۱+\sqrt{y-۲} \to \sqrt{y-۲}=x-۱$

$y-۲=(x-۱)^۲ \to g^{-۱}(x)=(x-۱)^۲+۲$

$D_{g^{-۱}}=[۱,+\infty) \qquad R_{g^{-۱}}=[۲,+\infty)$

پ) $h(x)=x^۲+۱$

$D_h=[۰,+\infty) \qquad R_h=[۱,+\infty)$

$h(x)=x^۲+۱ \xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=y^۲+۱ \to y^۲=x-۱ \to y=\sqrt{x-۱} \to h^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}$

$D_{h^{-۱}}=[۱,+\infty) \qquad R_{h^{-۱}}=[۰,+\infty)$

۲- ضابطه‌ی تابع وارون توابع یک به یک زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}$

$f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\frac{-۸y+۳}{۲}=\quad ۸y\quad ۲x\quad ۳$

$\to y=\frac{-۲x+۳}{۸}\to f^{-۱}(x)=\frac{-۲x+۳}{۸}$

ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

$g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x\quad ۵+\quad \sqrt{۳y\quad ۱}$

$-\sqrt{۳y+۱}=x+۵\to ۳y+۱=(x+۵)^{۲}\to ۳y=(x+۵)^{۲}-۱$

$\to y=\frac{(x+۵)^{۲}-۱}{۳}\to g^{-۱}(x)=\frac{(x+۵)^{۲}-۱}{۳}$

۳- در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳$, $g(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$

$fog(x)=f(g(x))=-\frac{۷}{۲}(-\frac{۲x+۶}{۷})-۳=x+۳-۳=x$

$gof(x)=g(f(x))=\frac{-۲(-\frac{۷}{۲}x-۳)+۶}{۷}=\frac{۷x-۶+۶}{۷}=x$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸}$, $g(x)=۸+x^{۲}: x\leq ۰$

$fog(x)=f(g(x))=-\sqrt{۸+x^{۲}-۸}=-\sqrt{x^{۲}}=-|x|\xrightarrow{x\leq ۰}-(-x)=x$

ص $gof(x)=g(f(x))=۸+(-\sqrt{x-۸})^{۲}=۸+x-۸=x$

۴- رابطه‌ی بین درجه‌ی سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت $f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ است که در آن x میزان درجه‌ی سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجه‌ی فارنهایت است. $f^{-۱}(x)$ را بدست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد؟

$f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲\xrightarrow{y\leftrightarrow x}x\quad \frac{۹}{۵}y\quad ۳۲\quad ۵x\quad ۹y\quad ۱۶۰$

$۹y=۵x-۱۶۰\to y=\frac{۵}{۹}x-\frac{۱۶۰}{۹}\to f^{-۱}(x)=\frac{۵}{۹}x-\frac{۱۶۰}{۹}$

میزان تغییرات درجه نسبت به فارنهایت را نشان می‌دهد.

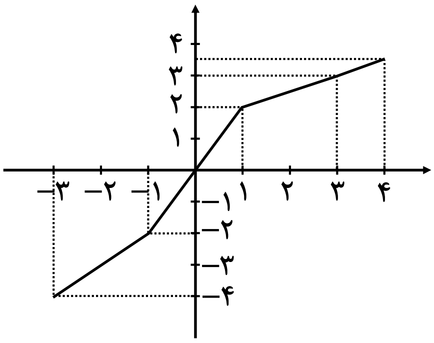
۵- توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه‌ی آنها توابعی یک به یک بسازید:

الف) $f(x)=|x|$ $\quad x\geq ۰$

ب) $g(x)=-x^{۲}$ $\quad x\leq ۰$

پ) $h(x)=(x+۲)^{۲}-۱$ $\quad x\geq ۰$

۶- از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



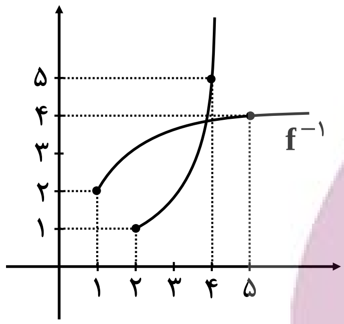
x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-1}(x)$	-۳	-۱	۱	۳

۷- با محدود کردن دامنه‌ی تابع $f(x)=x^۲-۴x+۵$ ، یک تابع یک به یک بدست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

$f(x)=x^۲-۴x+۵=(x-۲)^۲+۱$ $D_f=[۲,+\infty)$ $R_f=[۱,+\infty)$

$y=(x-۲)^۲+۱ \to y-۱=(x-۲)^۲ \to x-۲=\pm\sqrt{y-۱} \Rightarrow$

$x=\pm\sqrt{y-۱}+۲ \xrightarrow{x\geq ۲} f^{-1}(x)=\sqrt{x-۱}+۲$ $D_{f^{-1}}=[۱,+\infty)$ $R_{f^{-1}}=[۲,+\infty)$



۸- اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$، مقادیر زیر را بدست آورید:

الف) $(fog)^{-1}(۵)$

$fog(x)=f(x^۳)=\frac{۱}{۸}x^۳-۳ \to y+۳=\frac{۱}{۸}x^۳ \to$

$x^۳=۸y+۲۴ \to x=\sqrt[۳]{۸y+۲۴}$

$(fog)^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴}$

$(fog)^{-1}(۵)=\sqrt[۳]{۸\times۵+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

ب) $(f^{-1}of^{-1})(۶)=\ f^{-1}(\underbrace{f^{-1}(۶)}_{۸(۶+۳)=۷۲})=f^{-1}(۶)=۸(۷۲+۳)=۶۰۰$

پ) $(g^{-1}of^{-1})(۵)=\ g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(۵)}_{۸(۵+۳)=۶۴})=g^{-1}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

درس اول: تناوب و تانژانت

دوره تناوب: توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $\max = |a| + c$ و مقدار مینیمم $\min = -|a| + c$ و دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = -4\sin(3x) + 1$ و $y = \pi\cos(2x) - 3$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$y = -4\sin(3x) + 1 \Rightarrow \max = |-4| + 1 = 5 \Rightarrow \min = -|-4| + 1 = -3 \quad T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

$$y = \pi\cos(2x) - 3 \Rightarrow \max = |\pi| + (-3) = \pi - 3 \Rightarrow \min = -|\pi| + (-3) = -\pi - 3 \quad T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

مثال: در هر مورد ضابطهٔ تابع مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده‌شده را بنویسید.

الف) $T = \pi \;,\; \max = 4 \;,\; \min = -2$

ب) $T = 4\pi \;,\; \max = 1 \;,\; \min = -1$

پاسخ: برای حل این مثال، کافی است که قدرمطلق را از رابطه‌های T، max و min کنار بگذارید تا به‌راحتی به یک تابع مثلثاتی برسید.

الف) $T = \frac{2\pi}{b} = \pi \Rightarrow b = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\max = a + c = 4\\ \min = -a + c = -2\end{array}\right\} \Rightarrow c = 1, a = 3$$

بنابراین تابع مثلثاتی به‌صورت $y = 3\sin(2x) + 1$ یا $y = 3\cos(2x) + 1$ است.

ب) $T = \frac{2\pi}{b} = 4\pi \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\max = a + c = 1\\ \min = -a + c = -1\end{array}\right\} \Rightarrow c = 0, a = 1$$

بنابراین تابع مثلثاتی به‌صورت $y = \sin(\frac{1}{2}x)$ یا $y = \cos(\frac{1}{2}x)$ است.

تابع تانژانت: برای تابع $y = \tan x$، دامنه برابر $D = \left\{x \in R \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ و برد برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی و دوره تناوب برابر π است.

مثال: اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ باشد و $\sin\alpha = \frac{3}{5}$، مقدار $\tan\alpha$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \xrightarrow{0<\alpha<\frac{\pi}{2}} \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

درس دوم: معادلات مثلثاتی

محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایای 2α: با استفاده از روابط زیر، مقادیر $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را می‌توان محاسبه کرد:

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$

2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

مثال مقادیر $\cos 22/5^\circ$ و $\sin 22/5^\circ$ را به‌دست آورید.

پاسخ: در این‌گونه سؤال‌ها کافی است به این دقت کنید که ۲ برابر زاویهٔ داده‌شده $(22/5^\circ)$ برابر زاویهٔ (45°) می‌شود که نسبت‌های مثلثاتی را در آن داریم:

$$\cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2 22/5^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2 22/5^\circ \Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = 2\cos^2 22/5^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 22/5^\circ - 1 \Rightarrow \cos^2 22/5^\circ = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

معادله مثلثاتی:

- **جواب‌های کلی معادلهٔ** $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ است. $(k \in \mathbb{Z})$
- **جواب‌های کلی معادلهٔ** $\cos x = \cos\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ است. $(k \in \mathbb{Z})$.

مثال جواب‌های معادله‌های $2\sin x + \sqrt{2} = 0$ و $2\cos x - 1 = 0$ را در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$2\sin x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

جواب‌های این معادله باتوجه به بازهٔ $[-2\pi, \pi]$ عبارت‌اند از: $-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}, -\pi + \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}$.

$$2\cos - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \, (k \in \mathbb{Z})$$

جواب‌های این معادله باتوجه به بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ عبارت‌اند از: $-2\pi + \frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}$.

مهم‌ترین سؤال‌هایی که از فصل ۲ طرح می‌شوند، عبارت‌اند از:

۱) سؤالی که دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم یک تابع مثلثاتی را می‌خواهد.

۲) سؤالی که جواب‌های کلی یک معادلهٔ مثلثاتی $\sin x = \sin\alpha$ یا $\cos x = \cos\alpha$ را می‌خواهد.

۳) و سؤال بعدی!!!

مثال چند مثلث با اضلاعی با طول ۴ و ۶ می‌توان ساخت که مساحتش برابر ۶ باشد؟

پاسخ: اگر زاویهٔ بین دو ضلع به طول‌های ۴ و ۶ را α در نظر بگیریم، باتوجه به فرمول برای مثلثی به طول ضلع‌های a و b که زاویهٔ بینشان α باشد، داریم:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin\alpha = 6 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\text{باز حل معادلهٔ مثلثاتی}} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \,,\, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow[\text{زاویهٔ مثلث بودن}]{\text{با توجه به}} \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ یا } \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

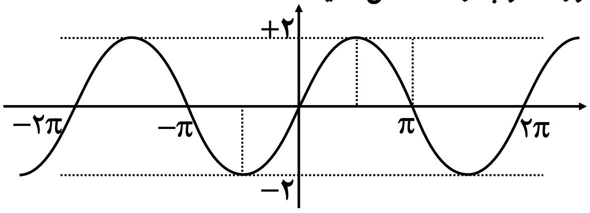
بنابراین دو مثلث با این ویژگی وجود دارد.

سوالات مربوط به دوره تناوب، ماکزیمم، مینیمم و تانژانت

فصل دوم

۱- در نمودارهای زیر مقدار ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب را مشخص کنید:

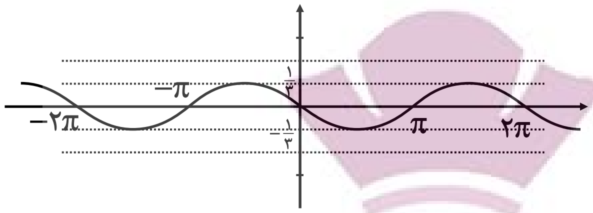
$y = ۲\sin x$



$\max = ۲$ $\qquad \min = -۲$

$T = ۲\pi$

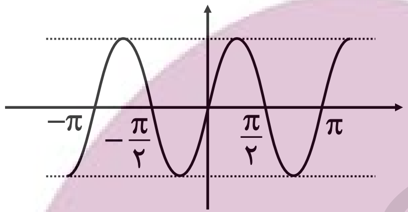
$y = -\frac{۱}{۳}\sin x$



$\max = \frac{۱}{۳}$ $\qquad \min = -\frac{۱}{۳}$

$T = ۲\pi$

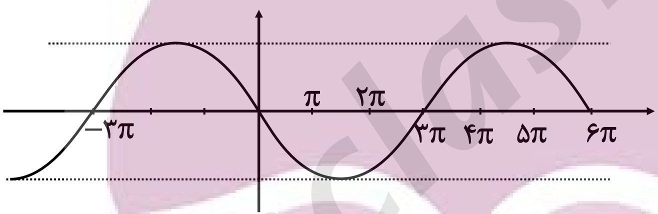
$y = \sin(۲x)$



$\max = ۱$ $\qquad \min = -۱$

$T = \pi$

$y = \sin(-\frac{x}{۳})$



$\max = ۱$ $\qquad \min = -۱$

$T = ۶\pi$

۲- دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید:

الف) $y = ۳\sin(۲x) - ۲$

$\max = |۳| - ۲ = ۱$ $\qquad \min = -|۳| - ۲ = -۵$ $\qquad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$

ب) $y = -\frac{۱}{۴}\cos(\pi x)$

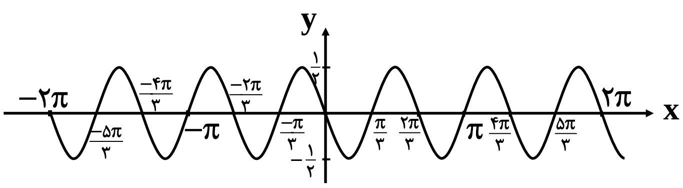
$\max = |-\frac{۱}{۴}| = \frac{۱}{۴}$ $\qquad \min = -|-\frac{۱}{۴}| = -\frac{۱}{۴}$ $\qquad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$

پ) $y = \pi\sin(-x) + ۱$

$\max = |\pi| + ۱ = \pi + ۱$ $\qquad \min = -|\pi| + ۱ = ۱ - \pi$ $\qquad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{|-۱|} = ۲\pi$

۳- هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه‌ای $f(x) = a\sin bx + c$ یا $f(x) = a\cos bx + c$ است. مقدار ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب و ضابطه‌ی تابع را مشخص کنید.

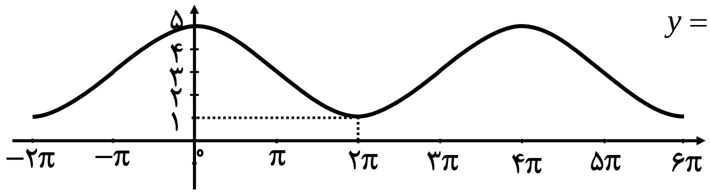
الف)



با توجه به نمودار ضابطه‌ی تابع به صورت زیر است:

$y = a\sin bx + c$

و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = ۰$ و $|a| = \frac{۱}{۲}$ و $|b| = ۳$ بدست می‌آید که در آن علامت a منفی و علامت b مثبت است. بنابراین داریم: $y = -\frac{۱}{۲}\sin ۳x$

ب) 

با توجه به نمودار، ضابطه‌ی تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره‌ی تناوب برابر ۴π است. بنابراین $c = ۳$ و $|b| = \frac{۱}{۲}$ و $|a| = ۲$. لذا $a = ۲$ و $b = \frac{۱}{۲}$ و بنابراین داریم: $y = ۲\cos(\frac{x}{۲}) + ۳$.

۴- دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را بدست آورید:

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۷x$

$$\xrightarrow[\max=|a|+c,\min=-|a|+c]{y=a\sin bx+c \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|۷|} = \frac{۲\pi}{۷} \qquad \max = |۲| + ۱ = ۳ \qquad \min = -|۲| + ۱ = -۱$$

ب) $\sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$

$$\xrightarrow[\max=|a|+c,\min=-|a|+c]{y=a\cos bx+c \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۲}|} = ۴ \qquad \max = |-۱| + \sqrt{۳} = ۱ + \sqrt{۳} \qquad \min = -|-۱| + \sqrt{۳} = -۱ + \sqrt{۳}$$

پ) $-\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲$

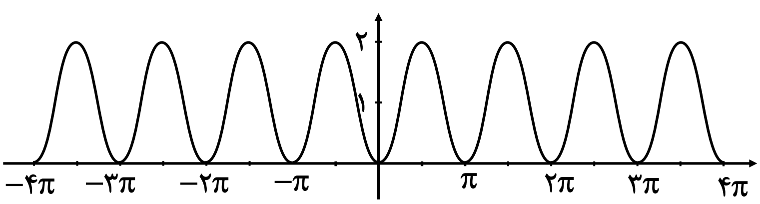
$$\xrightarrow[\max=|a|+c,\min=-|a|+c]{y=a\sin bx+c \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|} = ۴\pi \qquad \max = |-\pi| - ۲ = \pi - ۲ \qquad \min = -|-\pi| - ۲ = -\pi - ۲$$

ت) $-\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

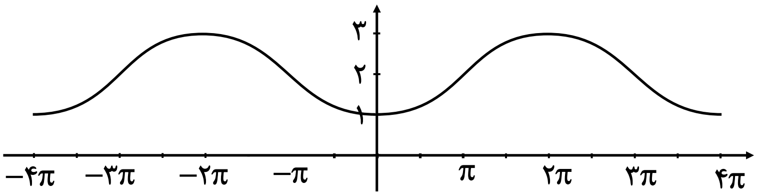
$$\xrightarrow[\max=|a|+c,\min=-|a|+c]{y=a\cos bx+c \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}} T = \frac{۲\pi}{|۳|} = \frac{۲}{۳}\pi \qquad \max = |-\frac{۳}{۴}| = \frac{۳}{۴} \qquad \min = -|-\frac{۳}{۴}| = -\frac{۳}{۴}$$

۵- هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

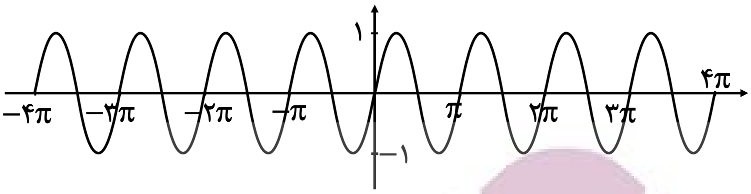
الف) $y = \sin \pi x$ ب) $y = ۲ - \cos\frac{۱}{۲}x$ پ) $y = \sin ۲x$ ت) $y = ۱ - \cos ۲x$

۱) 

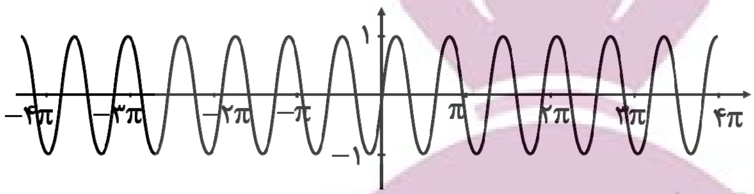
ت

۲) 

ب

۳) 

الف

۴) 

ث

۶- در هر مورد ضابطه‌ی تابع مثلثاتی با دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید:

الف) $T=\pi,\max=۳,\min=-۳$

$y=a\sin bx+c \ ,\max=|a|+c,\min=-|a|+c$

$a=\frac{۳-(-۳)}{۲}=۳ \qquad c=\frac{۳+(-۳)}{۲}=۰ \qquad \pi=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow b=۲\Rightarrow y=۳\sin ۲x$

ب) $T=۳,\max=۹\ ,\min=۳$

$y=a\sin bx+c \ ,\max=|a|+c,\min=-|a|+c$

$a=\frac{۹-۳}{۲}=۳ \qquad c=\frac{۹+۳}{۲}=۶ \qquad ۳=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow b=\frac{۲}{۳}\pi\Rightarrow y=۳\sin\frac{۲\pi}{۳}x+۶$

پ) $T=۴\pi,\max=-۱,\min=-۷$

$y=a\sin bx+c \ ,\max=|a|+c,\min=-|a|+c$

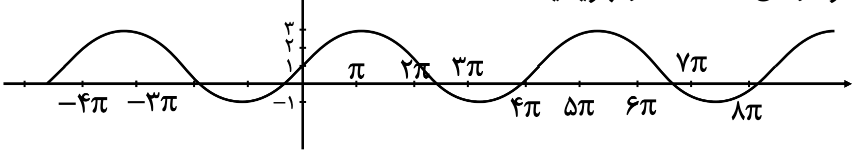
$a=\frac{-۱-(-۷)}{۲}=۳ \qquad c=\frac{-۱+(-۷)}{۲}=-۴ \qquad ۴\pi=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۳\sin(\frac{۱}{۲}x)-۴$

ت) $T=\frac{\pi}{۲},\max=۱,\min=-۱$

$y=a\sin bx+c \ ,\max=|a|+c,\min=-|a|+c$

$a=\frac{۱-(-۱)}{۲}=۱ \qquad c=\frac{۱+(-۱)}{۲}=۰ \qquad \frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow b=۴\Rightarrow y=\sin(۴x)$

۷- ضابطه‌ی مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید:

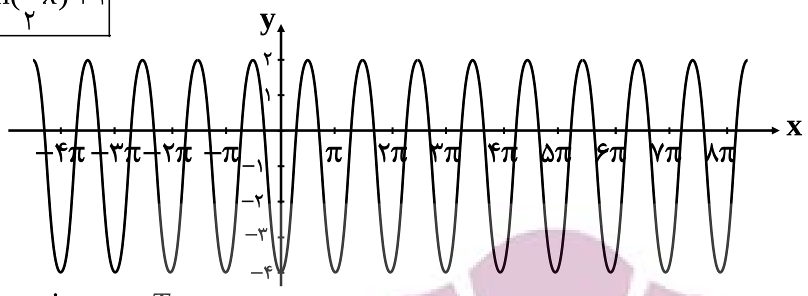
الف) 

$\max = ۳, \min = -۱, T = ۴\pi$

$C = \frac{۳+(-۱)}{۲} = ۱, a = \frac{۳-(-۱)}{۲} = ۲, |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲}$

$\boxed{y = \sin(\frac{۱}{۲}x) + ۱}$

ب)

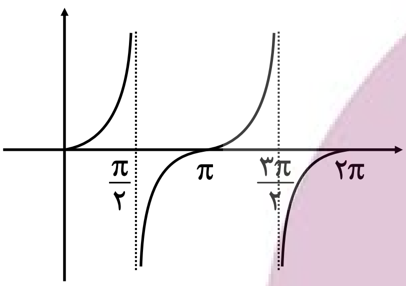


$\max = ۲, \min = -۴, T = \pi$

$C = \frac{۲+(-۴)}{۲} = -۱, a = \frac{۲-(-۴)}{۲} = ۳, |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$

$\boxed{y = ۳\cos(۲x) - ۱}$

۸- صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ بررسی کنید.



تابع در دامنه‌ی خود همواره صعودی است.

۹- کدام یک از جملات زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. *نادرست*

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. *نادرست*

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیر صعودی باشد. *نادرست*

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. *درست*

۱۰- با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را باهم مقایسه کنید.

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{\pi}{۲}$
sin	۰	$\nearrow$	$\frac{۱}{۲}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\nearrow$	۱
tan	۰	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\nearrow$	۱	$\nearrow$	$\sqrt{۳}$	$\nearrow$	$+\infty$ ت.ن

ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

در ربع چهارم هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
sin	-1	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0
tan	ت.ن	↗	$-\sqrt{3}$	↗	-1	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	0

سوالات مربوط به نسبت‌های مثلثاتی 2α

۱- مقدار $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 30 = 1 - 2\sin^2 15 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15 \rightarrow \sin^2 15 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha \Rightarrow \sin 30 = 2\sin 15 \times \cos 15$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \times \cos\alpha \rightarrow \cos 15 = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

۲- فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد. حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 2 \times (\frac{5}{13})^2 - 1 = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169}$$

ب) $\sin 2\alpha$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (\frac{5}{13})^2$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{144}{169} \xrightarrow{\text{در ناحیه اول } \alpha} \sin\alpha = \frac{12}{13} \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \times \cos\alpha = \frac{12}{13} \quad \frac{5}{13} \quad \frac{120}{169}$$

۳- نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ بدست آورید.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \cos 45 = 1 - 2\sin^2(22/5) \Rightarrow \sin^2(22/5) = \frac{1-\cos 45}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2(22/5) = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin(22/5) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \rightarrow \cos 45 = 2\cos^2(22/5) - 1$$

$$\rightarrow \cos^2(22/5) = \frac{1+\cos 45}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \rightarrow \cos(22/5) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

سوالات مربوط به معادلات مثلثاتی

تیپ اول سینوس‌ها:

۱- معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{6}) = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + (\pi + \frac{\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۲- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{3}) = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ب) $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

$$4\sin x + \sqrt{8} = 0 \rightarrow \sin x = \frac{-\sqrt{8}}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin x = \sin(\frac{-\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{4}) = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + (\pi - (-\frac{\pi}{4})) = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳- معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

$$\sin 2x = \sin 3x$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۴- معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0 \rightarrow \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin 3x = \sin(\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

۵- جواب معادله $\sin x.\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را بدست آورید.

ابتدا طرفین معادله را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲\sin x.\cos x=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}\to ۲\sin x.\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to \sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to \sin ۲x=\sin(\frac{\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\to x=k\pi+\frac{\pi}{۶},k\in\mathbb{Z}\\ ۲x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۳}\to x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶},k=\mathbb{Z}\end{cases}$$

۶- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{۲}=\sin ۳x$

$$۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\to x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\quad k\in\mathbb{Z}$$

ب) $\cos ۲x-\sin x+۱=۱$

$$۱-۲\sin^۲ x-\sin x=۰\Rightarrow ۲\sin^۲ x+\sin x-۱=۰\xrightarrow{\sin x=t}۲t^۲+t-۱=۰\xrightarrow{b=a+c}\begin{cases}t=-۱\\ t=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=-۱\to\sin x=\sin(\frac{-\pi}{۲})\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{-\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=\frac{۱}{۲}\to\sin x=\sin(\frac{\pi}{۶})\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}\end{cases}$$

پ) $۲\sin^۲ x+\sin x-۱=۰$

$$\xrightarrow{\sin x=t}۲t^۲+t-۱=۰\xrightarrow{b=a+c}\begin{cases}t=-۱\\ t=+\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=-۱\to\sin x=\sin\frac{-\pi}{۲}\to x=۲k\pi+\frac{-\pi}{۲}\\ \sin x=\frac{۱}{۲}\to\sin x=\sin(\frac{\pi}{۶})\to\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+(\pi-\frac{\pi}{۶})\end{cases}\end{cases}$$

ت) $\cos^۲ x-\sin x=\frac{۱}{۴}$

$$۱-\sin^۲ x-\sin x=\frac{۱}{۴}\to\sin^۲ x+\sin x-\frac{۳}{۴}=۰\xrightarrow{\sin x=t}$$

$$t^{2}+t-\frac{3}{4}=0\Rightarrow \Delta=b^{2}-4ac=(1)^{2}-4(1)(-\frac{3}{4})=4\Rightarrow\begin{cases}t_{1}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}\\ t_{2}=\frac{-1-2}{2}=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin x=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbb{Z}\\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \sin x=\frac{-3}{2}\quad \text{غیر ممکن}\end{cases}$$

ث) $\sin x-\cos 2x=0$

$$\sin x-(1-2\sin^{2}x)=0\to 2\sin^{2}x+\sin x-1=0\to(\sin x+1)(2\sin x-1)=0$$

$$\begin{cases}\sin x+1=0\to\sin x=-1\to x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}\quad k\in\mathbb{Z}\\ 2\sin x-1=0\to\sin x=\frac{1}{2}\to\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\quad k\in\mathbb{Z}\\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{cases}$$

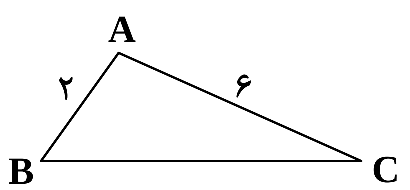
۷- یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $16\frac{m}{s}$ برای هم تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ V (برحسب ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (برحسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد. آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d=\frac{V^{2}\sin 2\theta}{10}$$

$$12/8=\frac{(16)^{2}\sin 2\theta}{10}\to\sin 2\theta=\frac{12/8\times 10}{256}=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}2\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ 2\theta=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\theta=k\pi+\frac{\pi}{12}\\ \theta=\frac{(2k+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\end{cases}$$

۸- مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌مترمربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$S=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin\hat{A}$$

$$3=\frac{1}{2}\times 2\times 6\times\sin\hat{A}\to\sin\hat{A}=\frac{1}{2}\to\sin\hat{A}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \\ \widehat{A} = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فقط می‌توان $A = \dfrac{\pi}{2}$ و $\widehat{A} = \dfrac{5\pi}{6}$ را در نظر گرفت پس دو مثلث می‌توان ساخت.

تیپ دوم کسینوس‌ها:

۱- معادله $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید:

$$\cos x.(2\cos x - 9) = 5 \rightarrow 2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 \xrightarrow{\cos x = t}$$

$$2t^2 - 9t - 5 = 0 \rightarrow (2t-1)(t+5) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{1}{2} \\ t = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \dfrac{2x}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = -5 \Rightarrow \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

۲- معادله $\sin x + \cos x = 1$ را در بازه $0 \le x \le 2\pi$ حل کنید. (ویژه ریاضی)

$$\sin x + \cos x = 1 \rightarrow \sin x = 1 - \cos x \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2 x = (1-\cos x)^2$$

$$\rightarrow \sin^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x \xrightarrow{\sin^2 x = 1-\cos^2 x} 1 \quad \cos^2 x \quad 1 \quad 2\cos x \quad \cos^2 x \quad 2\cos^2 x \quad 2\cos x \quad 0$$

$$\rightarrow 2\cos x(\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \\ \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0, 2\pi \end{cases}$$

۳- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \cos x = \cos(\dfrac{\pi}{2}) \rightarrow x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} & k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos\dfrac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ب) $\cos x = \cos 2x$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm 2x$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + 2x \rightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

درس اول: حد بی‌نهایت

بخش‌پذیری $f(x)$ بر $(x-a)$: در تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(x-a)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است. بنابراین اگر $f(a)=0$ شود، $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

مثال تقسیم $f(x)=2x^3-x^2-2x+1$ بر $(x+1)$ را انجام دهید؛ سپس با استفاده از مطلب بالا نشان دهید $f(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است.

پاسخ:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2-2x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -(2x^3+2x^2) & 2x^2-3x+1 \\ \hline -3x^2-2x & \\ -(-3x^2-3x) & \\ \hline x+1 & \\ -(x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

مقدار $f(-1)$ را به‌دست می‌آوریم $(x+1=0 \Rightarrow x=-1)$:

$$f(-1)=2(-1)^3-(-1)^2-2(-1)+1=0$$

بنابراین $f(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است.

حد توابع کسری: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آن‌ها در این نقطه به‌ترتیب L و m باشد به‌طوری که $m \neq 0$، آن‌گاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{L}{m}$ است؛ اما اگر $m=L=0$ باشد، آن‌گاه ابتدا عامل صفرکنندهٔ $(x-a)$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم و سپس حد تابع $\frac{f}{g}$ را به‌دست می‌آوریم.

مثال حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$ ب) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+2x-3}$ ج) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+x}{\sqrt[3]{x}+1}$

پاسخ:

الف) مقدار صورت و مخرج کسر (الف) به ازای $x=2$ برابر صفر است بنابراین عامل $(x-2)$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+1}=\frac{4}{3}$$

ب) مقدار صورت و مخرج کسر (ب) به‌ازای $x=1$ برابر صفر است، بنابراین صورت و مخرج کسر را در $(x+\sqrt{x})$ ضرب می‌کنیم تا با گویا کردن عبارت صورت، بتوانیم عامل صفرکنندهٔ $(x-1)$ را از صورت و مخرج حذف کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+2x-3}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x^2+2x-3)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+3)(x+\sqrt{x})}=\frac{1}{(4)(2)}=\frac{1}{8}$$

ج) مقدار صورت و مخرج کسر (ج) به‌ازای $x=-1$ برابر صفر است، بنابراین صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر گویا شود و سپس بتوانیم عامل صفرکنندهٔ $(x+1)$ را حذف کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{\sqrt[3]{x}+1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x\cancel{(x+1)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{(x+1)}}=(-1)(1)=-1$$

حدهای نامتناهی

حدهای بعضی توابع مثل $f(x)=\frac{1}{x-2}$ در $x=2$، تعریف نشده است و فقط می‌توان مقدار حد چپ و حد راست در این تابع را به‌دست آورد. در این‌گونه موارد وقتی $x\to 2^+$ مخرج کسر عددی مثبت و خیلی نزدیک به صفر می‌شود؛ بنابراین $\frac{1}{x-2}$ عددی مثبت و بسیار بزرگ می‌شود: $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$؛ اما وقتی $x\to 2^-$ مخرج کسر عددی منفی و خیلی نزدیک به صفر می‌شود؛ بنابراین $\frac{1}{x-2}$ عددی منفی و بسیار کوچک می‌شود $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$؛ بنابراین $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$ تعریف نشده است.

درس دوم: حد در بی‌نهایت

وقتی x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم، برای محاسبهٔ حد تابع کسری، کافی است از بزرگ‌ترین توان x در صورت و از بزرگ‌ترین توان x در مخرج فاکتور بگیریم و سپس از نکتهٔ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ استفاده کنیم.

مثال حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x^2-4x+3}{3x^2+x-5}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-8x^3+4x-9}{4x^2+3x+1}$

پاسخ:

از بزرگ‌ترین توان x در صورت و مخرج یعنی x^2 فاکتور می‌گیریم:

الف) $\frac{\cancel{x^2}\left(6-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(3+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{6-0+0}{3+0-0} = 2$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\overset{x}{\cancel{x^3}}\left(-8+\frac{4}{x^2}-\frac{9}{x^3}\right)}{\cancel{x^2}\left(4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} (x)\times\frac{-8+0-0}{4+0+0} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x) = +\infty$

دقت کنید که بعد از فاکتورگیری از بزرگ‌ترین توان x یعنی x^3 در صورت و x^2 در مخرج، هر عبارت کسری که در صورت عدد و در مخرج توانی از x باشد مثل $\frac{4}{x^2}$ یا $\frac{9}{x^3}$ یا $\frac{3}{x}$ یا ... مقداری برابر صفر خواهد داشت.

سوالات مربوط به بخش پذیری

۱- چند جمله‌ای $g(x)=2x^3+x^2+1$ بر $x+1$ بخش پذیر است؟ با انجام تقسیم درستی ادعای خود را بررسی کنید:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -(2x^3+2x^2) & 2x^2-x+1 \\ \cline{1-1} -x^2+1 & \\ -(x^2-x) & \\ \cline{1-1} +x+1 & \\ -(x+1) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow g(x)=(x+1)(2x^2-x+1)$$

راه دوم: برای بدست آوردن باقی‌مانده در یک تقسیم می‌توانیم ریشه مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهیم.

$$x+1=0 \to x=-1$$
$$\Rightarrow g(-1)=2(-1)^3+(-1)^3+1=0$$

چون باقی‌مانده برابر صفر شده پس $g(x)$ بر $x+1$ بخش پذیر است.

۲- نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=2x^3+5x^2-3x-10$ بر دو جمله‌ای $x+2$ بخش پذیر است؟

$$x+2=0 \to x=-2$$
$$\Rightarrow f(-2)=2(-2)^3+5(-2)^2-3(-2)-10=-16+20+6-10=0$$
$\Rightarrow$ باقی‌مانده $=0$

پس $f(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر است.

۳- نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=2x^3+x^2+1$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است.

$$x+1=0 \to x=-1$$
$$\Rightarrow f(-1)=2(-1)^3+(-1)^2+1=-2+1+1=0$$

سوالات مربوط به حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

۱- حد تابع $g(x)=\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه به طول $x=5$ بدست آورید.

$$\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}\times\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\overset{-1}{\cancel{5-x}}}{\cancel{(x-5)}(2+\sqrt{x-1})}=\frac{-1}{2+2}=-\frac{1}{4}$$

۲- حد های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $$\lim_{x\to(-3)}\frac{x^2-9}{x^2+3x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to(-3)}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)}=\lim_{x\to(-3)}\frac{x-3}{x}=\frac{-6}{-3}=+2$$

ب) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(x-\frac{1}{2})(4x-2)}{(x-\frac{1}{2})(2x+2)} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x-2}{2x+2} = \dfrac{0}{3} = 0$

پ) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9} = \dfrac{0}{0}$

مخرج را بر عامل صفر شونده یعنی $(x-3)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-13x^2+24x-9 & x-3 \\ \hline -(2x^3-6x^2) & 2x^2-7x+3 \\ \hline -7x^2+24x-9 & \\ -(-7x^2+21x) & \\ \hline +3x-9 & \\ -(+3x-9) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(2x^2-7x+3)} = \frac{1}{0}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x-2)}{2x^2-7x+3} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{(x-2)}{2x^2-7x+3} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

ت) $\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to(-1)} \frac{(x-1)(x+1)}{x+\sqrt{2x+3}} \times \frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-\sqrt{2x+3}} = \lim_{x\to(-1)} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2-(2x+3)} =$$

$$\lim_{x\to(-1)} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{(x+1)(x-3)} = \frac{(-2)(-2)}{(-4)} = \frac{4}{-4} = -1$$

ث) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} \times \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{(3)(2)} = \frac{1}{6}$$

ج) $\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2} \times \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} = \lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{(x+1)}{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} = \dfrac{1}{3}$

۳- حد های زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-x}{4x^2-1} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{x(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

ب) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-4x^2-4x-5}{x^2-25} = \dfrac{0}{0}$

عامل صفر کنید $(x-5)$ می‌باشد پس باید صورت را بر $x-5$ تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2-4x-5 & x-5 \\ \hline -(x^3-5x^2) & x^2+x+1 \\ x^2-4x-5 & \\ -(x^2-5x) & \\ x-5 & \\ -(x-5) & \\ 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x^2+x+1)}{(x-5)(x+5)}=\frac{25+5+1}{5+5}=\frac{31}{10}$$

پ) $\lim\limits_{x\to(-4)}\dfrac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4}=\lim\limits_{x\to(-4)}\dfrac{(x+4)(x-1)}{x^2(x+4)+x+4}=\lim\limits_{x\to(-4)}\dfrac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x^2+1)}=\dfrac{-5}{17}$

۴- حد های زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x(x-1)}\times\dfrac{x+\sqrt{2x-1}}{x+\sqrt{2x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-(2x-1)}{x(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}=0$

ب) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{2-\sqrt{x+1}}\times\dfrac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{4-(x+1)}$

$=-(6)(2+2)=-24$

پ) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x+16}{\sqrt[3]{x}+2}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-8)}\dfrac{2(x+8)}{\sqrt[3]{x}+2}\times\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}$

$\lim\limits_{x\to(-8)}=\dfrac{2(x+8)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{(x+8)}=2(4+2\times 2+4)=24$

سوالات مربوط به حد های نامتناهی

۱- حد های زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{2x}{x-5}=\dfrac{+10}{0^-}=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{2x}{x-5}=\dfrac{+10}{0^+}=+\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{(0^+)^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{(0^-)^2}=+\infty\end{cases}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲}{|x-۳|} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{۲}{|x-۳|}=\frac{۲}{|۰^+|}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{۲}{|x-۳|}=\frac{۱}{|۰^-|}=+\infty \end{cases}$

ث) $\lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۳})}\frac{[x]}{|۳x+۱|} \xrightarrow{\left[-\frac{۱}{۳}\right]=-۱} \lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۳})}\frac{-۱}{|۳x+۱|}=\frac{-۱}{|۰|}=-\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x+۱}{\sin^۲ x} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x+۱}{\sin^۲ x}=\frac{+۱}{(۰^+)^۲}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x+۱}{\sin^۲ x}=\frac{+۱}{(۰^-)^۲}=+\infty \end{cases}$

۲- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{|x|} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{|x|}=\frac{۱}{|۰^+|}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۱}{|x|}=\frac{۱}{|۰^-|}=+\infty \end{cases}$

ت) $\lim\limits_{x\to(-۶)}\frac{۹}{(x+۶)^۲} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۶)^+}\frac{۹}{(x+۶)^۲}=\frac{۹}{(۰^+)^۲}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to(-۶)^-}\frac{۹}{(x+۶)^۲}=\frac{۹}{(۰^-)^۲}=+\infty \end{cases}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{-۱}{(x-۳)^۴} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{-۱}{(x-۳)^۴}=\frac{-۱}{(۰^+)^۴}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{-۱}{(x-۳)^۴}=\frac{-۱}{(۰^-)^۴}=-\infty \end{cases}$

ج) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲} \Rightarrow \frac{-۱}{(۰)^۲}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$

چ) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{۱-۵x}{x^۲-۹}=\frac{-۱۴}{۰^+}=-\infty$

ح) $\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\frac{-۳x}{x^۲-۴}=\frac{+۶}{۰^+}=+\infty$

خ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱}{\cos x} \xrightarrow[(\cos x<۰)\ \text{ربع دوم}]{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱}{۰^-}=-\infty$

د) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x \xrightarrow[\text{پس } \tan x>0]{x\to\frac{\pi}{2}^- \text{ در ناحیه اول است}} +\infty$

ذ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x \xrightarrow[\text{پس } \tan x<0]{x\to\frac{\pi}{2}^+ \text{ در ناحیه دوم است}} -\infty$

ر) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{2-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-1}{x-3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

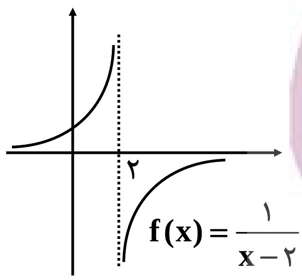
۳- الف) عبارت $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟

حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر است.

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟

حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر است.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند.



سوالات مربوط به حد در بی‌نهایت

۱- مقدار حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x+2}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{2}{x})}{\lim\limits_{x\to-\infty} (1) - \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{1}{x})} = \frac{3+0}{1-0}$$

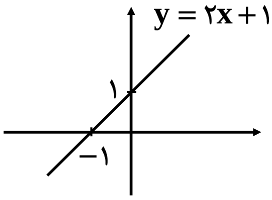
ب) $$\lim_{t\to-\infty} \frac{1-5t^2}{t^2+3t} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1-5t}{t^2}}{\frac{t^2+3t}{t^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{t^2}-5}{1+\frac{3}{t}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{1}{t^2}) - \lim\limits_{x\to-\infty} (5)}{\lim\limits_{x\to-\infty} (1) + \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{3}{t})} = \frac{0-5}{1+0} = -5$$

پ) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2-3x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{2}{x}) - \lim\limits_{x\to+\infty} (3)} = \frac{0}{0-3} = 0$$

۲- با توجه به نمودار هر تابع طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

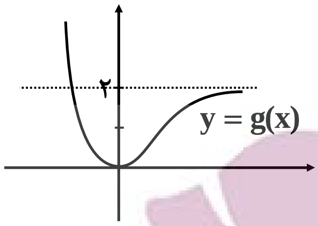
$$\lim_{x\to+\infty}(۲x+۱)= +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(۲x+۱)= -\infty$$



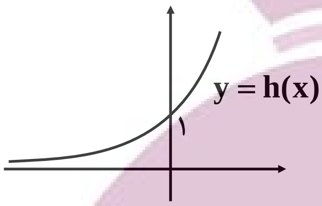
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)= ۲$$



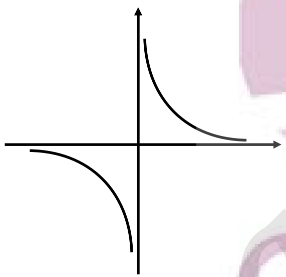
$$\lim_{x\to-\infty} h(x)= ۰$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)= +\infty$$



۳- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بدست آورید.

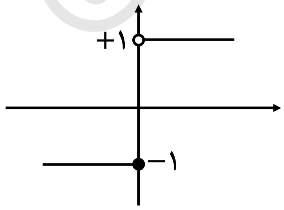
الف) $f(x)=\frac{۱}{x}$: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\quad \lim_{x\to ۰} f(x)$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=۰ \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=۰$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty \\ \lim_{x\to ۰^-} f(x)=-\infty\end{cases}$$

ب) $g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰\end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} g(x),\ \lim_{x\to+\infty} g(x)$

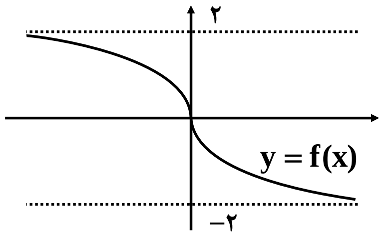


$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-۱,\ \lim_{x\to+\infty} g(x)=+۱$$

۴- با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

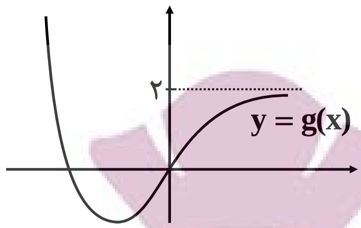
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ۲$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -۲$$



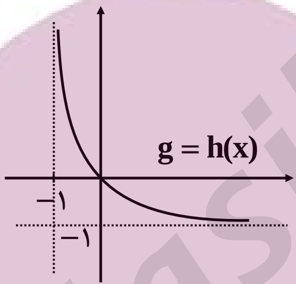
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = ۲$$

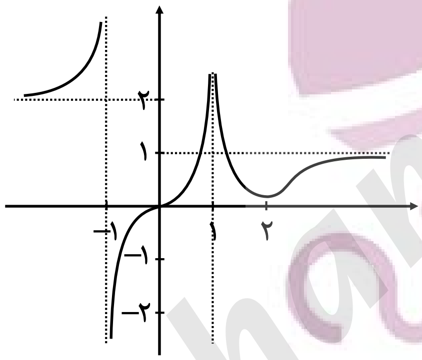


$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -۲$$

$$\lim_{x\to(-۱)^+} h(x) = +\infty$$



۵- نمودار تابع f به شکل زیر است. حدود خواسته شده را بنویسید.



۱) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = ۲$

۲) $\lim_{x\to(-۱)} f(x) = +\infty$

۳) $\lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = -\infty$

۴) $\lim_{x\to۱^-} f(x) = +\infty$

۵) $\lim_{x\to۱^+} f(x) = +\infty$

۶) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ۱$

۶- حدود زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim_{x\to-\infty} (۹+\frac{۷}{x^۳}) = ۹+۰=۹$

۲) $\lim_{x\to+\infty} (-\frac{۱}{۲}x^۳+۷x^۲-۶) = \lim_{x\to+\infty} (-\frac{۱}{۲}x^۳) = -\infty$

۳) $\lim_{x\to-\infty} (\frac{۱}{۲x-۳}) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{۱}{۲x}) = ۰$

۴) $\lim_{x\to+\infty} (\frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}) = \frac{\lim_{x\to+\infty}(۳+\frac{۱}{x^۲})}{\lim_{x\to+\infty}(\frac{۴}{x}-۵)} = \frac{۳}{-۵} = \frac{-۳}{۵}$

۵) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{3x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(3x)}=\frac{2}{3}$

۶) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-3x+1}{x^2+5x-3}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)}=2$

۷) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^5-6x^3-x}{x^2-5x+1}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^5)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)}=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$

۸) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{3-x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(-x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

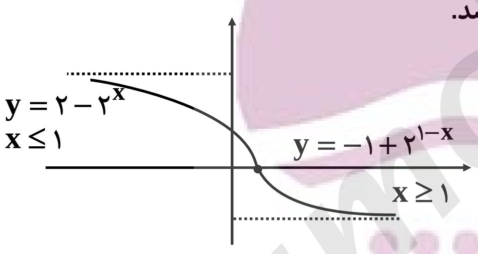
۹) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(-6x^3)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)}=\frac{-6}{2}=-3$

۷- الف) هر یک از رابطه‌های $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ به چه معناست؟

اگر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود، تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می‌توان به ۱− نزدیک کرد.

اگر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شود، تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می‌توان به ۲ نزدیک کرد.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد.



درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

شیب خط: شیب خطی که از نقاط $(A, f(A))$ و $(B, f(B))$ می‌گذرد برابر $m_{AB} = \frac{f(B)-f(A)}{B-A}$ است و شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a, f(a))$ برابر $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ و یا $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است.

مثال باتوجه به تابع $f(x) = x^2 - 3x$:

الف) شیب خطی که از نقاط $A(1, f(1))$ و $B(4, f(4))$ عبور می‌کند چه‌قدر است؟

ب) معادله خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ چه‌قدر است؟

پاسخ:

الف) $m_{AB} = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{(4)-(-2)}{2} = 3$

ب) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 3(1+h) - (-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2 - h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h-1)}{\cancel{h}} = -1$

و یا به طریق زیر $f'(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x - (-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}} = -1$$

شیب خط مماس در نقطه به طول ۱ : $f'(1) = -1$

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - (-2) = (-1)(x-1) \Rightarrow y = -x - 1$$

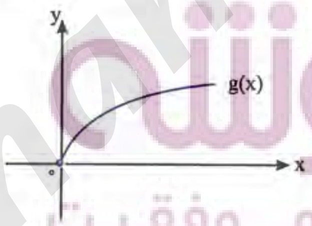
درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

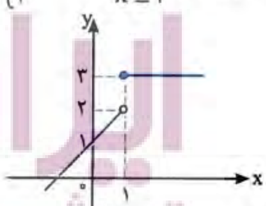
نکته ۱) مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 به یکی از دو صورت $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ یا $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ است.

۲) اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در a پیوسته است، بنابراین اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در a مشتق‌پذیر نیست.

مثال مشتق‌پذیری توابع $f(x) = |x^2 - 1|$ ، $g(x)\sqrt{x-1}$ ، $h(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 3 & x \geq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ را بررسی کنید.

پاسخ: توابع $g(x) = \sqrt{x-1}$ و $h(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 3 & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x = 1$ پیوسته نیستند، زیرا کافی است به شکل آن‌ها توجه کنید:





توابع $g(x)$ و $h(x)$ در $x = 1$ پیوسته نیستند، بنابراین در این نقطه مشتق‌پذیر هم نیستند؛ اما برای تابع $f(x)$ که در $x = 1$ پیوسته است، مشتق چپ و راست در این نقطه را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{|x^2-1| - 0}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = 2 \\ f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-(x^2-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = -2 \end{cases}$$

چون مشتق چپ و راست تابع f در $x = 1$ مساوی نیستند، پس تابع f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

نکته: تابع f در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست، هر گاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱) f در a پیوسته نباشد.

۲) f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند.

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد.

پ) هر دو نامتناهی باشند.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱) $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = ۰$

۲) $f(x) = x^n \,,\, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(x) = nx^{n-۱}$

۳) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

۴) $f(x) = \sqrt{ax+b} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{۲\sqrt{ax+b}}$

۵) $f(x) = \sqrt[۳]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$

۶) اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

پ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^۲}$

۷) اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم: $(fog)'(x) = g'(x).f'(g(x))$

بنابراین اگر f تابعی از u و u تابعی از x باشد، داریم: $y = f(u) \Rightarrow y' = u'\,f'(u)$

مثال: اگر $f(۱) = ۳$، $f'(۱) = ۶$، $g(۱) = -۲$ و $g'(۱) = ۵$ باشند، مطلوب است $(f+g)'(۱)$، $(۳f-۲g)'(۱)$، $(f.g)'(۱)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)'(۱)$.

پاسخ:

$$(f+g)'(۱) = f'(۱) + g'(۱) = ۶ + ۵ = ۱۱$$

$$(۳f-۲g)'(۱) = ۳f'(۱) - ۲g'(۱) = ۳\times۶ - ۲\times۵ = ۸$$

$$(f.g)'(۱) = f'(۱)g(۱) + g'(۱)f(۱) = (۶)(-۲) + (۵)(۳) = ۳$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(۱) = \frac{f'(۱)g(۱) - g'(۱)f(۱)}{(g(۱))^۲} = \frac{(۶)(-۲) - (۵)(۳)}{(-۲)^۲} = -\frac{۲۷}{۴}$$

مثال: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = (x^۲ - ۱)^۳(\sqrt{x})$

ب) $g(x) = \frac{x^۲ + x - ۱}{۲ - x}$

پاسخ: الف) با استفاده از رابطهٔ $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ داریم:

$$f'(x) = ((x^۲-۱)^۳)(x^۲-۱)^۳)'(\sqrt{x}) + (x^۲-۱)^۳(\sqrt{x})' = ۳(x^۲-۱)'(x^۲-۱)^۲(\sqrt{x}) + (x^۲-۱)^۳\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)$$

$$= ۳(۲x)(x^۲-۱)^۲(\sqrt{x}) + \frac{(x^۲-۱)^۳}{۲\sqrt{x}}$$

ب) با استفاده از رابطهٔ $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^۲}$ داریم:

$$g(x) = \frac{(x^۲+x-۱)'(۲-x) - (۲-x)'(x^۲+x-۱)}{(۲-x)^۲} = \frac{(۲x+۱)(۲-x) - (-۱)(x^۲+x-۱)}{(۲-x)^۲} = \frac{-x^۲+۴x+۱}{(۲-x)^۲}$$

تذکر در قسمت (الف) و در محاسبهٔ مشتق $(x^2-1)^3$ به‌صورت زیر و با کمک مشتق تابع مرکب نیز می‌توانیم در چرک‌نویس عمل کنیم.

فرض می‌کردیم $h(x)=(x^2-1)^3$، $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2-1$ باشد (یعنی $h(x)=f(g(x))$): $h'(x)=g'(x)f'(g(x))$

اگر $u=g(x)$ باشد، آن‌گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم:

$$f(u)=u^3 \Rightarrow f'(u)=3u^2=3(g(x))^2=3(x^2-1)^2$$

$$g(x)=x^2-1 \Rightarrow g'(x)=2x$$

بنابراین: $h'(x)=g'(x).f'(g(x))=(2x).(3(x^2-1)^2)=3(2x)(x^2-1)^2$

خلاصهٔ راه بالا، همان است که در حل مثال آورده‌ایم؛ یعنی وقتی با تابعی مرکب مثل $(x^2-1)^3$ یعنی u^3 روبه‌رو شدیم، کافی است بنویسیم:

$$(u^3)'=u'.3u^2$$

(تنها تفاوت با مشتق x^3 یعنی $3x^2$ حضور u' است!)

مثال باتوجه به راه خلاصهٔ بالا، مشتق تابع $y=(\frac{x^2}{2x+1})^4$ را به‌دست آورید.

پاسخ: با فرض $u=\frac{x^2}{2x+1}$ داریم:

$$y=u^4$$

$$y=u'.4u^3=(\frac{x^2}{2x+1})'.4(\frac{x^2}{2x+1})^3=4(\frac{(2x)(2x+1)-2(x^2)}{(2x+1)^2})(\frac{x^2}{2x+1})^3 \Rightarrow y'=4(\frac{2x^2+2x}{(2x+1)^2})(\frac{x^2}{2x+1})^3$$

درس سوم: آهنگ تغییر

- آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر است با: $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

مثال جسمی از سطح زمین و به‌طور عمودی پرتاب می‌شود. ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادلهٔ $f(t)=-5t^2+30t$ به‌دست می‌آید.

الف) سرعت متوسط این جسم در بازه زمانی $[1,2]$ چه‌قدر است؟

ب) سرعت لحظه‌ای این جسم در زمان $t=3$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

سرعت متوسط در بازه $[1,2]$ $=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{40-25}{1}=15\frac{m}{s}$

سرعت لحظه‌ای: $f'(t)=-10t+30 \Rightarrow$ سرعت لحظه‌ای در زمان $(t=3)$ $=f'(3)=0$

بنابراین جسم در لحظهٔ $t=3$ به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (متر $f(3)=45$) می‌رسد.

بار استفاده از روابط بالا، می‌توان سؤال‌های آهنگ تغییر را به‌راحتی حل کرد، فقط دقت کنید اگر متوسط تغییر خواسته شد، سراغ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و اگر تغییر لحظه‌ای خواسته شد، سراغ $f'(a)$ بروید.

تمرین‌های فصل چهارم: مشتق

تیپ اول: تعریف حدی مشتق

۱- معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^۲ + ۳$ را در نقطه‌ای به طول (-۲) بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(\alpha , f(\alpha))$ به صورت زیر است:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(\alpha)$$

$$f(-۲)=(-۲)^۲+۳=۷\ ,\ f(-۲+h)=(-۲+h)^۲+۳=۴-۴h+h^۲+۳=۷-۴h+h^۲$$

$$f'(-۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۷-۴h+h^۲-۷}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۴h+h^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(-۴+h)}{\cancel{h}}=-۴$$

۲- اگر $f(x)=x^۲$ ، $f'(۳)$ را به دو روش به دست آورید.

پاسخ: روش اول:

$$f(۳)=۹$$

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(h+۳)^۲-۹}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+۶h+۹-۹}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(h+۶)}{\cancel{h}}=۶$$

روش دوم: می‌دانیم $f'(\alpha)=\lim_{x\to \alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۶$$

۳- برای تابع $f(x)=-x^۲+۱۰x$ ، $f'(۸)$ را به دو روش حساب کنید.

روش اول:

$$f(۸)=-(۸)^۲+۱۰(۸)=-۶۴+۸۰=۱۶$$

$$f'(۸)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۸+h)-f(۸)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-(۸+h)^۲+۱۰(۸+h)-۱۶}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{-(۶۴+h^۲+۱۶h)+۸۰+۱۰h-۱۶}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-h^۲-۶h}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-\cancel{h}(h+۶)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to ۰}(-(h+۶))=-۶$$

روش دوم:

$$f'(۸)=\lim_{x\to ۸}\frac{f(x)-f(۸)}{x-۸}=\lim_{x\to ۸}\frac{-x^۲+۱۰x-۱۶}{x-۸}=\lim_{x\to ۸}\frac{-\cancel{(x-۸)}(x-۲)}{\cancel{x-۸}}=-۶$$

۴- اگر $f(x)=۳x^۲-۲x+۱$ ، $f'(۲)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

پاسخ: ابتدا شیب خط مماس را به کمک فرمول حدی مشتق به دست می‌آوریم:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\xrightarrow{f(۲)=۹}\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x+۱-۹}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(۳x+۴)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(۳x+۴)=۱۰$$

$$\begin{cases}(۲,۹)\\ m=۱۰\end{cases}\Rightarrow y-۹=۱۰(x-۲)\Rightarrow y=۱۰x-۱۱\quad \text{معادله خط مماس}$$

۵- اگر $f(x)=x^{۳}-۲$ ، $f'(-۱)$ را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.

پاسخ:

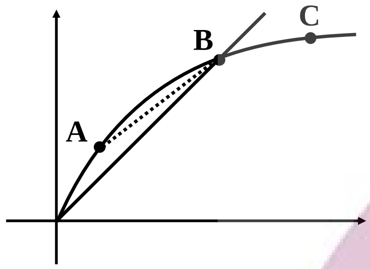
$$f(-۱)=(-۱)^{۳}-۲=-۳$$

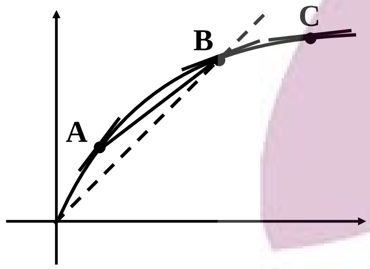
$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۳}-۲-(-۳)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۳}+۱}{x+۱}$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\cancel{(x+۱)}(x^{۲}-x+۱)}{\cancel{x+۱}}=\lim_{x\to -۱}(x^{۲}-x+۱)=۳$$

تیپ دوم: محاسبه شیب از روی نمودار

۶- برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده‌شده از (الف) تا (ج) را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.





الف) شیب نمودار در نقطه A : پاسخ: $m_{۱}$

ب) شیب نمودار در نقطه B : پاسخ: $m_{۲}$

پ) شیب نمودار در نقطه C : پاسخ: $m_{۳}$

ت) شیب خط AB : پاسخ: $m_{۴}$

ث) شیب خط $y=۲$: پاسخ: $m_{۵}=۰$

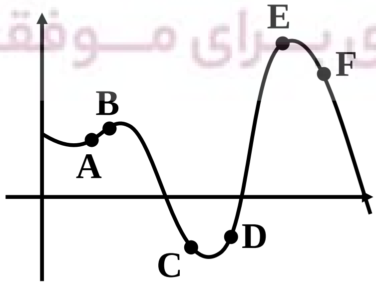
ج) شیب خط $y=x$: پاسخ: $m_{۶}=۱$

با توجه به نمودار شیب در نقطه A بیشتر از سایر نقاط می‌باشد و ترتیب قرارگیری به صورت زیر است:

$$m_{۱}>m_{۶}>m_{۴}>m_{۲}>m_{۳}>m_{۵}$$

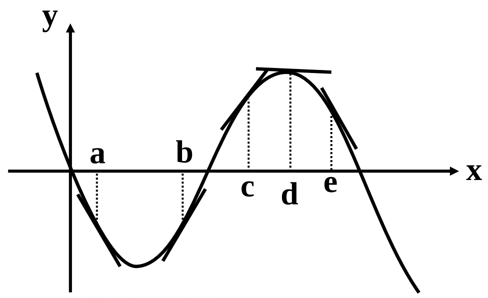
۷- نقاط داده‌شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه‌شده در جدول نظیر کنید.

نقطه	شیب
F	-۳
C	-۱
E	۰
A	$\frac{۱}{۲}$
B	۱
D	۲



پاسخ: با توجه به نمودار شیب در نقطه D از شیب در نقطه B تند است پس عدد ۲ را برای D انتخاب می‌کنیم. هم‌چنین در نقطه F با سرعت بیشتری نسبت به نقطه C در حال نزول هستیم.

۸- با در نظر گرفتن نمودار F در شکل زیر، نقاط به طول‌های a، b، c، d و e را با مشتق‌های داده‌شده در جدول نظیر کنید.



x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۰/۵
e	−۲

پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم خط مماس در نقطه d موازی محور x هاست پس مشتق در آن نقطه برابر صفر است و شیب خط مماس در نقطه c تندتر از شیب در نقطه b می‌باشد و هم‌چنین در نقطه e با شیب تندتری در حال نزول هستیم.

۹- نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید. به طوری که:

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن نقطه منفی است.

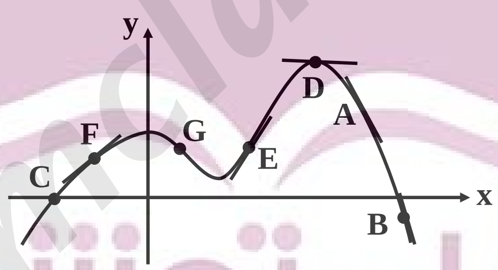
پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌جا صفر است ولی مقدار مشتق در آن نقطه مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن‌جا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی نمودار هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن‌جا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

پاسخ:



۱۰- نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه نقاط مثبت است.

پاسخ: نادرست - (شیب در نقطه D، C و F منفی است.

ب) $m_A < m_B$

پاسخ: نادرست - (شیب در نقطه A از نقطه B تندتر است.)

پ) $m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست

ت) شیب منفی در نقاط D، F و C منفی است.

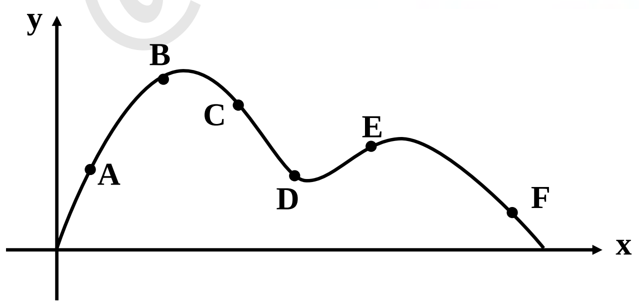
پاسخ: درست

ث) $m_F < m_D < m_C$

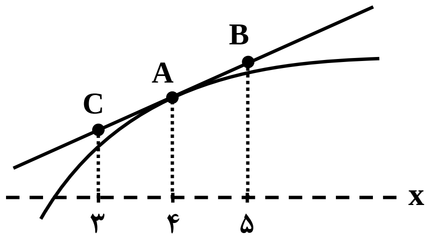
پاسخ: (شیب در نقطه D کندتر از نقطه C است.)

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست



۱۱- برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(۴)=۱/۵$, $f(۴)=۲۵$ ، با توجه به شکل مختصات نقاط A، B و C را بیابید.



پاسخ: با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم شیب خطی که از نقاط A، B و C عبور می‌کند برابر است. مشتق در نقطه $x=۴$ یعنی $f'(۴)$.

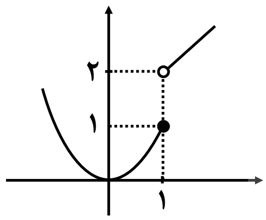
$$m=f'(۴)=۱/۵=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow\frac{y_B-۲۵}{۵-۴}=۱/۵\to y_B=۲۶/۵\to B(۵,۲۶/۵)$$

$$۱/۵=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}\Rightarrow\frac{۲۵-y_C}{۴-۳}=۱/۵\to y_C=۲۳/۵\to C=(۳,۲۳/۵)$$

تیپ سوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

۱۲- تابع g (شکل زیر) را به صورت $g(x)=\begin{cases}x^۲ & x\le ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ در نظر می‌گیریم. چرا $g'(۱)$ موجود نیست.

پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که حدهای چپ و راست تابع در نقطه $x=۱$ با هم برابر نیستند. پس تابع پیوسته نیست و مشتق هم ندارد.



۱۳- نشان دهید مشتق تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ در نقطه $x=-۱$ موجود نیست.

پاسخ:

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-(-۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{|x^۲-۱|}{x+۱}$$

حد راست: $\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x^۲-۱}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{\cancel{(x+۱)}(x-۱)}{\cancel{x+۱}}=\lim_{x\to(-۱)^+}(x-۱)=-۲$

حد چپ: $\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x^۲-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}-(x-۱)=+۲$

مشاهده می‌کنیم مشتق‌های چپ و راست با هم برابر نیستند پس $f'(-۱)$ موجود نیست.

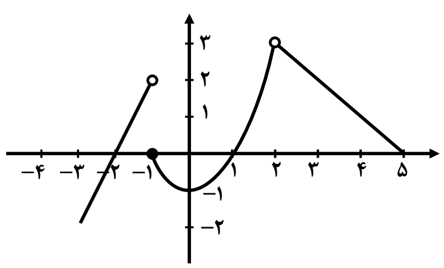
۱۳- مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.

پاسخ: تابع f روی بازه $[a,b)$ مشتق‌پذیر است. هرگاه f روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.
تابع f روی بازه $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

۱۴- تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & -۲\le x\le ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. چرا تابع f در بازه $[۱,۲]$ مشتق‌پذیر نیست؟

پاسخ: زیرا با این‌که روی بازه $(۱,۲)$ مشتق‌پذیر است، اما در $x=۱$ پیوستگی راست ندارد. (حد راست با مقدار تابع برابر نیست)، پس در $x=۱$ مشتق راست ندارد.

۱۵- اگر $f(x)\begin{cases}2x+4 & x<-1\\ x^2-1 & -1\le x<2\\ -x+5 & 2<x<5\end{cases}$ **نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیر f را روی بازه‌های $[-1,1]$، $(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید.**



پاسخ: تابع در بازه $[-2,0]$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا در $x=-1$ ناپیوسته است.

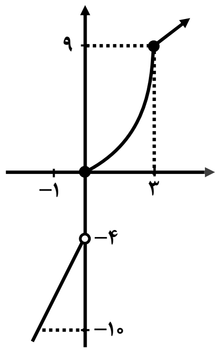
تابع در بازه‌ی $(2,5)$ مشتق‌پذیر است.

تابع در بازه $[-1,1]$ مشتق‌پذیر است.

۱۶- تابع $f(x)=\begin{cases}5x-4 & x<0\\ x^2 & 0\le x\le 3\\ x+6 & x>3\end{cases}$ **داده شده است.**

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

پاسخ:



ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

پاسخ:

$$f(0)=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x=0$$

$\Rightarrow$ پیوسته نیست

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{5x-4-0}{x-0}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$

$$f(3)=9$$

$$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x+6-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-3}=1$$

$\Rightarrow$ مشتق چپ و راست با هم برابر نیست

$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}(x+3)=6$$

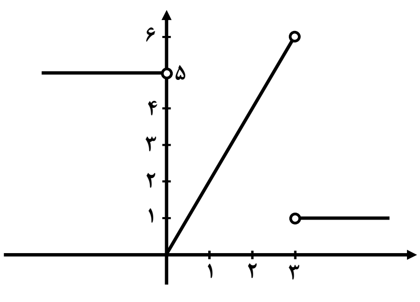
پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم در $x=0$ و $x=3$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'(x)=\begin{cases}5 & x<0\\ 2x & 0<x<3\\ 1 & x>3\end{cases}$$

ت) نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

پاسخ:

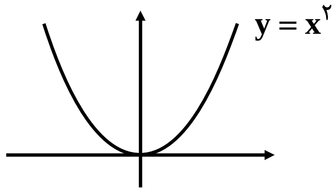


۱۷- نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

پاسخ:

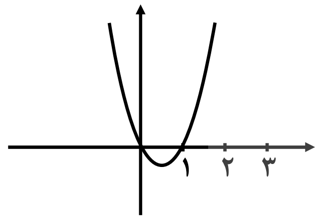
$y = x^۲$



ب) در ۲ = x برابر ۳ شود.

پاسخ:

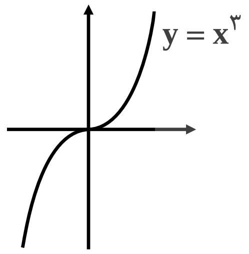
$$f(x) = x^۲ - x$$
$$f'(x) = ۲x - ۱$$
$$f'(۲) = ۲(۲) - ۱ = ۳$$



پ) در تمام نقاط مثبت شود.

پاسخ:

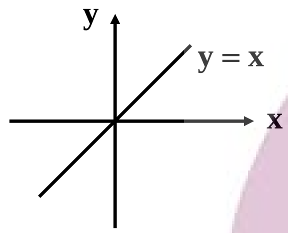
$y = x^۳$



ت) در تمام نقاط یکسان شود.

پاسخ:

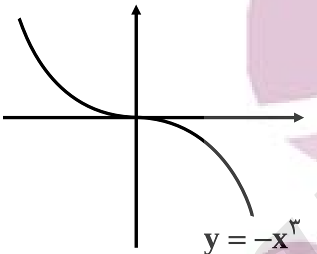
$y = x$



ث) در تمام نقاط منفی شود.

پاسخ:

$y = -x^۳$



۱۸- مشتق‌پذیری تابع $f(x)\begin{cases} x^۲ + ۳ & x \geq ۱ \\ ۲x & x < ۱ \end{cases}$ را در نقطه ۱ = x بررسی کنید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (x^۲ + ۳) = ۴$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (۲x) = ۲$$

حد چپ و راست در نقطه ۱ = x برابر نیست. پس پیوسته نیست و مشتق هم در ۱ = x ندارد.

۱۹- اگر $f(x) = |x^۲ - ۴|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیر f را در نقطه ۲− = x بررسی کنید.

پاسخ:

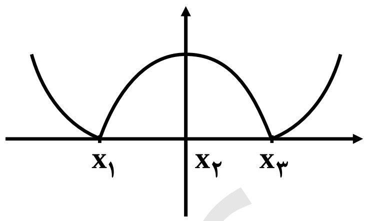
$$f'_+(-۲) = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{-(x^۲ - ۴) - ۰}{x + ۲} = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{-(x-۲)(x+۲)}{x+۲} = \lim_{x\to(-۲)^-} -(x-۲) = +۴$$

$$f'_-(-۲) = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{(x^۲ - ۴) - ۰}{x + ۲} = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{(x-۲)(x+۲)}{x+۲} = -۴$$

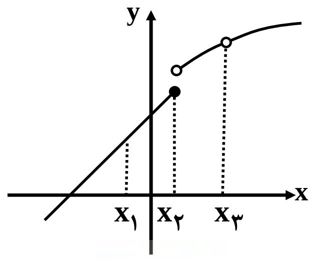
مشاهده می‌کنیم مشتق چپ و راست با هم برابر نیست پس تابع f در ۲− = x مشتق ندارد.

۲۰- در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص‌شده، مشتق‌پذیر نیست.

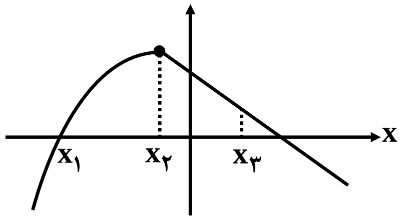
پاسخ:



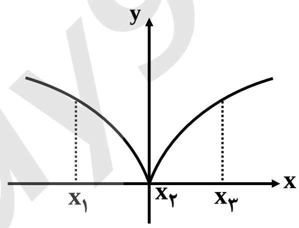
در x_1 و x_3 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط گوشه‌ای



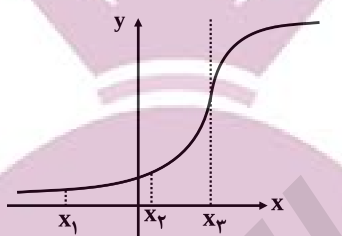
در x_2 و x_3 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط ناپیوسته



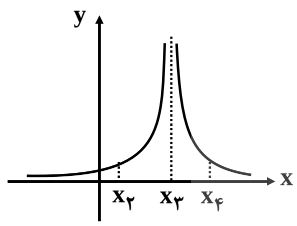
در x_2 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط گوشه



در x_2 مشتق‌پذیر نیست.
مشتق نامتناهی



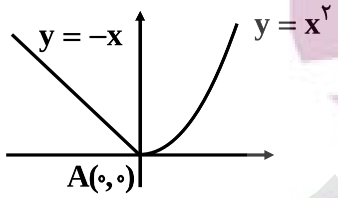
در x_3 مشتق‌پذیر نیست.
(مشتق نامتناهی)



در x_3 مشتق‌پذیر نیست.
(نقطه ناپیوستگی)

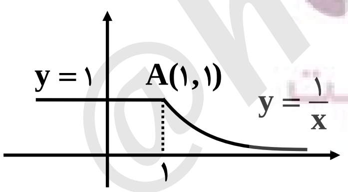
۲۱- با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده‌شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیرنیستند.

پاسخ:



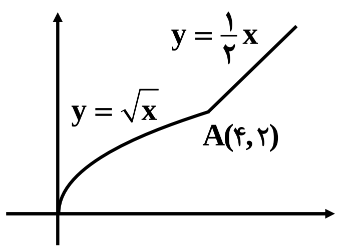
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_+(0)=0\\ f'_-(0)=-1\end{cases}\qquad f'_+(0)\neq f'_-(0)$$



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\geq 1\\ 1 & x<1\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & x>1\\ 0 & x<1\end{cases}$$

$$f'_+(1)=-1\ ,\ f'_-(1)-0\rightarrow f'_+(1)\neq f'_-(1)$$

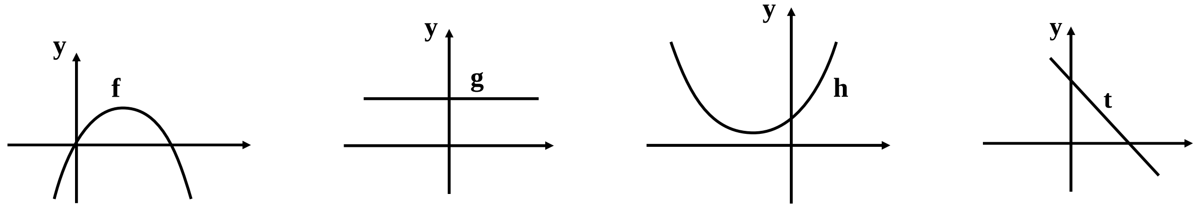


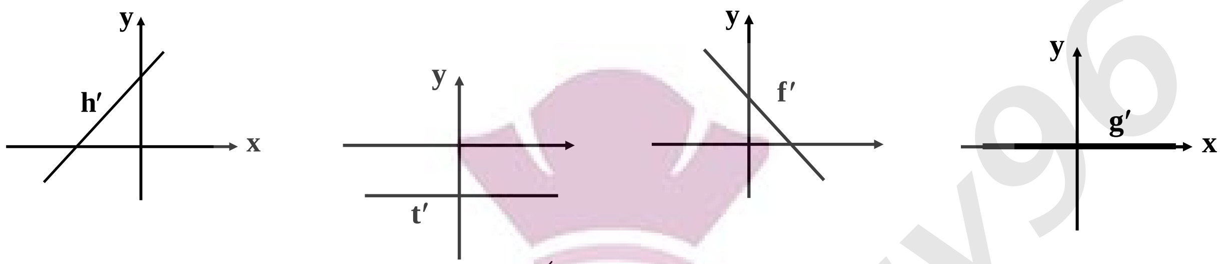
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x & x\geq 4\\ \sqrt{x} & x<4\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x>4\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & x<4\end{cases}$$

$$f'_+(4)=\frac{1}{2}\ ,\ f'_-(4)=\frac{1}{4}\rightarrow f'_+(4)\neq f'_-(4)$$

۲۲- نمودار توابع f ، g، h و t را به نمودار مشتق آن‌ها نظیر کنید.

پاسخ:





۱) *اگر نمودار تابع اصلی صعودی باشد، نمودار مشتق آن بالای محور x ها قرار می‌گیرد.*
۲) *اگر نمودار تابع اصلی نزولی باشد، نمودار مشتق آن پایین محور x ها قرار می‌گیرد.*
۳) *اگر نمودار تابع اصلی قله یا دره داشته باشد، در نمودار مشتق، آن نقاط محل برخورد با محور x ها می‌شود.*

تیپ چهارم: محاسبه مشتق توابع

۲۳- مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $f(x)=x^{۵}+۴x^{۳}-\sqrt{۲}x+۱$

$$f'(x)=۵x^{۴}+۱۲x^{۲}-\sqrt{۲}$$

۲) $f(x)=(۲x^{۳}+۱)(-x^{۲}+۷x-۲)$

$$f'(x)=(۶x^{۲})(-x^{۲}+۷x-۲)+(۲x^{۳}+۱)(-۲x+۷)$$

۳) $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{۳x+۱}$

$$f'(x)=\frac{(۲x)(۳x+۱)-(۳)(x^{۲}-۴)}{(۳x+۱)^{۲}}=\frac{۳x^{۲}+۲x+۱۲}{(۳x+۱)^{۲}}$$

۴) $f(x)\quad \dfrac{۱}{x-۴}$

$$f'(x)=\frac{۰(x-۴)-(۱)(۱)}{(x-۴)^{۲}}=\frac{-۱}{(x-۴)^{۲}}$$

۵) $f(x)=(\dfrac{-۳x-۱}{x^{۲}+۵})^{۸}$

$$f'(x)=۸(\frac{-۳(x^{۲}+۵)-(۲x)(-۳x-۱)}{(x^{۲}+۵)^{۲}})(\frac{-۳x-۱}{x^{۲}+۵})^{۷}$$

۶) $f(x)=\dfrac{x}{۲x^{۲}+x-۱}$

$$f'(x)=\frac{(۱)(۲x^{۲}+x-۱)-(۴x+۱)(x)}{(۲x^{۲}+x-۱)^{۲}}$$

۷) $f(x)=(۳x^{۲}-۴)(۲x-۵)^{۲}$

$$f'(x)=(۶x)(۲x-۵)^{۲}+(۳x^{۲}-۴)(۲(۲)(۲x-۵)^{۱})=(۲x-۵)(۲۴x^{۲}-۳۰x-۱۶)$$

۸) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۱)$

$$f'(x)=(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}})(x^{۳}+۱)+(\sqrt{۳x+۲})(۳x^{۲})$$

۹) $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^{۲}-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^{۲}}=\frac{-۳x^{۲}+۴x-۳}{(-۳x+۲)^{۲}}$$

۱۰) $f(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{۹(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^{۲}}$$

۲۴- اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$ ، $f'(۲)=۵$ و $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$(f.g)'(۲)=f'(۲)g(۲)+f(۲).g'(۲)=۵\times ۸+۳\times(-۶)=۴۰-۱۸=۲۲$$

$$(\frac{f}{g})'(۲)=\frac{f'(۲).g(۲)-g'(۲).f(۲)}{(g(۲))^{۲}}=\frac{۵\times ۸-۳\times(-۶)}{۸^{۲}}=\frac{۴۰+۱۸}{۶۴}=\frac{۲۹}{۳۲}$$

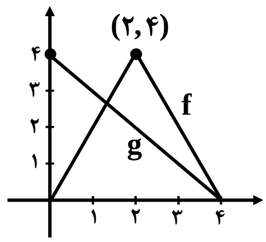
۲۵- اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$.

پاسخ:

$$(f+g)'(۱)=f'(۱)+g'(۱)=۳+۵=۸$$

$$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱)=۳(۳)+۲(۵)=۹+۱۰=۱۹$$

۲۶- نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.



الف) اگر $h(x)=f(x)-g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

پاسخ:

ابتدا ضابطه توابع f و g را می‌نویسیم:

$[۲,۴]$ برای بازه‌ی f ضابطه تابع: $mf=\dfrac{۰-۴}{۴-۲}=-۲=f'(x)\ ,\ y-۰=(-۲)(x-۴)\Rightarrow y=-۲x+۸$

$[۰,۲]$ برای بازه‌ی f ضابطه تابع: $mf=\dfrac{۴-۰}{۲-۰}=۲=f'(x)\Rightarrow y-۰=۲(x-۰)\Rightarrow y=۲x$

g ضابطه تابع: $mg=\dfrac{۰-۴}{۴-۰}=-۱\rightarrow y-۰=(-۱)(x-۴)\Rightarrow y=-x+۴$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-۲x+۸ & ۲\le x\le ۴\\ ۲x & ۰\le x\le ۲\end{cases}\ ,\ g(x)=-x+۴$$

$$\begin{array}{llll} f(۱)=۲ & f'(۱)=۲ & g(۱)=۳ & g'(۱)=-۱\\ f(۲)=۴ & f'_+(۲)=-۲\ ,\ f'_-(۲)=۲ & g(۲)=۲ & g'(۲)=-۱\\ f(۳)=۲ & f'(۳)=-۲ & g(۳)=۱ & g'(۳)=-۱ \end{array}$$

$$h'(۱)=f'(۱).g(۱)+f(۱).g'(۱)=۲\times۳+(-۱)\times۲=۴$$

$$h'(۲)=\begin{cases}f'_+(۲).g(۲)+f(۲).g'(۲)=(-۲)\times۲+۴(-۱)=-۸\\ f'_-(۲).g(۲)+f(۲).g'(۲)=۲\times۲+۴(-۱)=۰\end{cases}$$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست

$$h'(۳)=f'(۳).g(۳)+f(۳).g'(۳)=(-۲)\times۱+۲(-۱)=-۴$$

$$k'(۱)=\frac{f'(۱).g(۱)-g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}=\frac{۲\times۳-۲\times(-۱)}{۳^۲}=\frac{۸}{۹}$$

$$k'_+(۲)=\frac{f'_+(۲).g(۲)-g'(۲)f(۲)}{g^۲(۲)}=\frac{-۲\times۲-۴(-۱)}{۲^۲}=\frac{۰}{۴}=۰$$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست.

$$k'_-(۲)=\frac{f'_-(۲).g(۲)-g'(۲).f(۲)}{g^۲(۲)}=\frac{۲\times۲-۴(-۱)}{۴}=۲$$

$$k'(۳)=\frac{f'(۳).g(۳)-g'(۳).f(۳)}{g^۲(۳)}=\frac{-۲\times۱-۲\times(-۱)}{۱^۲}=۰$$

تیپ پنجم: آهنگ تغییر

۲۷- با توجه به تابع رشد $f(x)=7\sqrt{x}+50$ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) آهنگ متوسط رشد، در بازه زمانی $[0,25]$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$\begin{matrix} f(25)=7\sqrt{25}+50=85 \\ f(0)=7(\sqrt{0})+50=50 \end{matrix} \Rightarrow \frac{f(25)-f(0)}{25-0}=\frac{85-50}{25}=\frac{35}{25}=1/4$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

پاسخ: برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای باید از تابع مشتق بگیریم:

$$f'(x)=7\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{7}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(25)=\frac{7}{2\sqrt{25}}=\frac{7}{10}\ ,\ f'(49)=\frac{7}{2\sqrt{49}}=\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=25$ بیشتر است.

۲۸- ارتفاع یک جسم از سطح زمین از معادله $h(t)=-5t^2+40t$ به دست می‌آید.

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا زمان برخورد به زمین را به دست می‌آوریم:

$$h(t)=0\Rightarrow -5t^2+40t=0\Rightarrow -5t(t-8)=0\Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=8 \end{cases}$$

برای به دست آوردن معادله سرعت، کافی است از معادله $h(t)$ نسبت به t مشتق بگیریم:

$$V_{(t)}=-10t+40\Rightarrow \begin{cases} V(0)=-10(0)+40=40 \\ V(8)=-10(8)+40=-40 \end{cases}$$

ب) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم $35\frac{m}{s}$ و $-35\frac{m}{s}$ است.

پاسخ:

$$V=-10t+40\Rightarrow \begin{cases} -10t+40=35\rightarrow -10t=-5\rightarrow t=\frac{1}{2} \\ -10t+40=-35\rightarrow -10t=-75\rightarrow t=7/5 \end{cases}$$

۲۹- جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۲	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

پاسخ:

$$T(8)=11\ ,\ T(12)=19\Rightarrow \frac{19-11}{12-8}=\frac{8}{4}=2$$

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

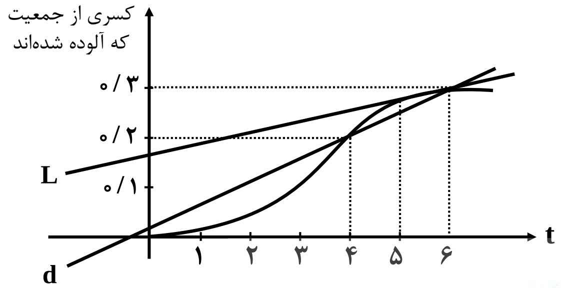
پاسخ:

$$T(12)=19\ \ ,\ T(18)=9\rightarrow \frac{9-19}{18-12}=-1/7$$

مشاهده می‌کنیم از ساعت ۸ تا ۱۲ به طور متوسط هوا گرم‌تر می‌شود. از ساعت ۱۲ تا ۱۸ به طور متوسط هوا سردتر می‌شود.

۳۰- کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط L و d چه چیزی را نشان می‌دهند؟



پاسخ: در هفته سوم آهنگ آلوده شدن از هفته ششم بیشتر است. یعنی هر چه زمان بیشتر گذشته شود، جمعیت کم‌تری از شهر آلوده شدند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=۱$ و $t=۲$ یا $t=۳$ بیشتر است؟

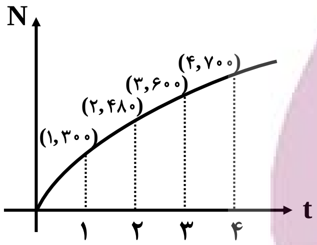
پاسخ: در $t=۳$ شیب خط مماس بیشتر است.

پ) قسمت (ب) را برای $t=۴$، $t=۵$ و $t=۶$ بررسی کنید.

پاسخ: در $t=۶$ از همه کم‌تر است.

۳۱- نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از ضرب t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از صفر تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.



پاسخ:

$$\frac{N(۱)-N(۰)}{۱-۰}=\frac{۳۰۰-۰}{۱}=۳۰۰\ ,\ \frac{N(۲)-N(۱)}{۲-۱}=\frac{۴۸۰-۳۰۰}{۱}=۱۸۰$$

$$\frac{N(۳)-N(۲)}{۳-۲}=\frac{۶۰۰-۴۸۰}{۱}=۱۲\ ,\ \frac{N(۴)-N(۳)}{۴-۳}=\frac{۷۰۰-۶۰۰}{۱}=۱۰۰$$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

پاسخ: چون شب مماس‌ها کم می‌شود. (چون آهنگ لحظه‌ای در حال کاهش است) (تقعر روی به پایین است.)

۳۲- معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^۲-t+۱۰$ برحسب متر در بازه زمانی $[۰,۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰,۵]$ با هم برابرند؟

پاسخ:

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \begin{cases} f(۰)=۱۰ \\ f(۵)=۵^۲-۵+۱۰=۳۰ \end{cases} \Rightarrow \text{سرعت متوسط}=\frac{۳۰-۱۰}{۵-۰}=۴$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} : f'(t)=۲t-۱ \Rightarrow \text{سرعت لحظه‌ای} = \text{سرعت متوسط}$$

$$۲t-۱=۴ \rightarrow t=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

۳۳- توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است. براساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه است، نشان دهد؟

ثانیه t	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
متر $f(t)$ m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

الف) ۱/۲۳

ب) ۱۴/۹۱

پ) ۱۱/۵

ت) ۱۶/۰۳

پاسخ: برای این‌که سرعت توپ را در $t = ۰/۴$ به دست آوریم می‌توانیم میانگین سرعت متوسط را در بازه‌های [۰/۳,۰/۴] و [۰/۴,۰/۵] به دست آوریم.

$$۱)\ \frac{f(۰/۵)-f(۰/۴)}{۰/۵-۰/۴}=\frac{۱۷/۴-۱۶/۳}{۰/۱}=\frac{۱/۱}{۰/۱}=۱۱$$

$$۲)\ \frac{f(۰/۴)-f(۰/۳)}{۰/۴-۰/۳}=\frac{۱۶/۳-۱۵/۱}{۰/۱}=\frac{۱/۲}{۰/۱}=۱۲$$

$$\text{میانگین}=\frac{۱۱+۱۲}{۲}=۱۱/۵$$

۳۴- کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه [۰,۱] همیشه کم‌تر از شیب منحنی در نقطه است.

پاسخ: نادرست است. زیرا تابع $y = x^۳$ و از (۰,۰) و (۱,۱) می‌گذرد.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(۱)-f(۰)}{۱-۰}=\frac{۱-۰}{۱-۰}=۱$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}: f'(x)=۳x^۲ \to f(۰)=۰$$

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پاسخ: نادرست است. تابعی مانند $y=\sqrt{x}$ تابعی صعودی است و آهنگ تغییر متوسطش همواره نزولی است. (تقعرش رو به پایین است.)

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(\alpha)=۰$ و $f(\alpha)=۰$

پاسخ: نادرست است. تابع $y=x^۳$ در نظر بگیرید.

$$f(۰)=۰$$

$$f'(x)=۳x^۲ \to f'(۰)=۰$$

۳۵- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳ \le t \le ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

پاسخ:

$$m(۴)=\sqrt{۴}+۲\times۴^۳=۱۳۰$$

$$m(۳)=\sqrt{۳}+۲\times۳^۳=۵۵/۷$$

$$\Rightarrow ۱۳۰-۵۵/۷=۷۴/۳$$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=۳$ چه‌قدر است؟

پاسخ: $$m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۶t^۲ \to m'(۳)=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}+۶(۳)^۲=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}+۵۴$$

۳۶- گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظه $t=۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^۲$ به دست می‌آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[۰,۱]$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$V(۰)=۴۰(۱-\frac{۰}{۱۰۰})^۲=۴۰ \quad , \quad V(۱)=۴۰(۱-\frac{۱}{۱۰۰})^۲=۳۹/۲۰۴ \Rightarrow \bar{V}=\frac{۳۹/۲۰۴-۴۰}{۱-۰}=-۰/۷۹۶$$

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰,۱۰۰]$ می‌شود؟

پاسخ:

$$V'=۴۰\times۲(۱-\frac{t}{۱۰۰})\times(-\frac{۱}{۱۰۰})=\frac{-۸}{۱۰}(۱-\frac{t}{۱۰۰})$$

$$\begin{cases}V(۰)=۴۰\\ V(۱۰۰)=۴۰\times(۱-\frac{۱۰۰}{۱۰۰})^۲=۰\end{cases} \Rightarrow \bar{V}=\frac{۰-۴۰}{۱۰۰-۰}=-\frac{۴}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{-۸}{۱۰}+\frac{۰/۸t}{۱۰۰}=-\frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۸t}{۱۰۰۰}=\frac{۴}{۱۰} \Rightarrow t=۵۰$$

درس اول: اکسترمم‌های تابع

آزمون یکنوایی تابع:

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آن‌گاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آن‌گاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آن‌گاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

نقطه بحرانی: اگر f در یک همسایگی از $c \in D_f$ تعریف شده باشد، نقطه به طول c را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c) = ۰$ باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

اکسترمم‌های نسبی تابع: فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند $(\nearrow\searrow)$، آن‌گاه $x = c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x = c$ از منفی به مثبت تغییر کند $(\searrow\nearrow)$، آن‌گاه $x = c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد، به‌طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آن‌گاه f و c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

اکسترمم‌های مطلق تابع: نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

۱) مشتق تابع را به‌دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

۲) مقدار تابع را در هریک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.

۳) در مرحلهٔ ۲، بزرگ‌ترین عدد به‌دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آن‌ها مقدار مینیمم مطلق تابع در بازه $[a, b]$ خواهد بود.

مثال باتوجه به تابع $f(x) = x^۳ - ۶x^۲ + ۹x + ۱۰$

الف) تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازهایی اکیداً نزولی است؟

ب) نقاط اکسترمم نسبی و بحرانی تابع f را به‌دست آورید.

پ) نقاط اکسترمم مطلق تابع f را در بازه $[-۱, ۵]$ به دست آورید.

پاسخ: الف)

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۳(x^۲ - ۴x + ۳) = ۳(x-۱)(x-۳)$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۱ \text{ یا } ۳$$

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
بازه		$(-\infty,۱)$		$(۱,۳)$		$(۳,\infty)$	
علامت f'		+	۰	−	۰	+	
یکنوایی f	$-\infty$	$\nearrow$ اکیداً صعودی	۱۴	$\searrow$ اکیداً نزولی	۱۰	$\nearrow$ اکیداً صعودی	$+\infty$

ب) نقاط $x = ۱$ و $x = ۳$ که $f'(x) = ۰$ می‌شود، نقاط بحرانی تابع f هستند که باتوجه به جدول بالا، به ترتیب ماکزیمم نسبی $(\nearrow\searrow)$ و مینیمم نسبی $(\searrow\nearrow)$ تابع f هستند.

پ) مقدار تابع f را در نقاط بحرانی $(x = ۱ , x = ۳)$ و در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه $(x = -۱ , x = ۵)$ به‌دست می‌آوریم:

$f(۱) = ۱۴ ,\ f(۳) = ۱۰ ,\ f(-۱) = -۶ ,\ f(۵) = ۳۰$

بزرگ‌ترین عدد مشخص می‌کند که نقطهٔ $x = ۵$ ماکزیمم مطلق تابع است و کوچک‌ترین عدد مشخص می‌کند که نقطهٔ $x = -۱$ مینیمم مطلق تابع است.

مثال اگر نقطهٔ $(1,-1)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+ax^2+b$، مقادیر a و b را بیابید.

پاسخ: در نقطهٔ اکسترمم نسبی، $f'(x)=0$ است، بنابراین:

$$f(x)=x^3+ax^2b \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow 3+2a=0 \Rightarrow a=-1/5$$

نقطهٔ اکسترمم یعنی $(1,-1)$ در رابطهٔ $f(x)$ صدق می‌کند:

$$f(1)=-1 \Rightarrow (1)^3+(-1/5)(1)^2+b=-1 \Rightarrow b=-0/5$$

درس دوم: بهینه‌سازی

در این درس تمام عبارت‌ها را برحسب یک متغیر می‌نویسیم و سپس نقاط بحرانی تابعی که به دنبال بهینه‌سازی آن هستیم را به‌دست می‌آوریم.

مثال ثابت کنید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۲۰ سانتی‌متر، بیش‌ترین مساحت مربوط به مستطیلی با طول و عرض هم اندازه است؟

پاسخ: ابعاد مستطیل را x و y می‌گیریم:

$$\text{محیط}: 2(x+y)=20 \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y=10-x$$

به دنبال بهینه‌سازی مساحت هستیم، پس تابع مساحت را تشکیل می‌دهیم.

$$S(x)=xy=x(10-x)=10x-x^2 \quad , \quad x\in[0,10]$$

چون S همواره مشتق‌پذیر است، برای یافتن نقاط بحرانی، ریشه معادله $S'(x)=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$S'(x)=10-2x \Rightarrow S'(x)=0 \Rightarrow x=5 \qquad \text{(نقطه بحرانی)}$$

با توجه به جدول، مشخص می‌شود که ماکزیمم مقدار مساحت یعنی ۲۵ سانتی‌متر مربع به ازای طول و عرض مساوی ۵ سانتی‌متر ایجاد می‌شود.

x		۵		۱۰
$S'(x)$	+		−	
$S(x)$	۰ ↗	۲۵	↘	۰
		ماکزیمم مطلق		

مثال غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق از رابطهٔ $c(t)=\frac{5t}{t^3+16}$ به‌دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون به بیش‌ترین مقدار ممکن می‌رسد؟

پاسخ: نقطهٔ بحرانی تابع $c(t)$ را مشخص می‌کنیم.

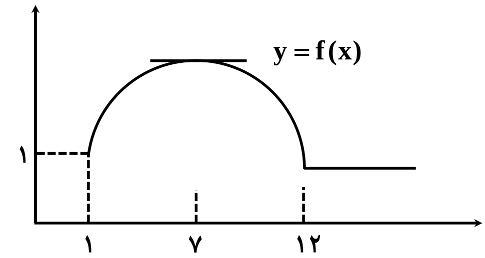
$$c'(t)=\frac{5(t^3+16)-(3t^2)(5t)}{(t^3+16)^2}$$

$$c'(t)=0 \Rightarrow 5(t^3+16)-(3t^2)(5t)=0 \xRightarrow{\div 5} t^3+16-3t^3=0 \Rightarrow 16=2t^3 \Rightarrow t=2\ \text{ساعت}$$ (نقطهٔ بحرانی تابع $c(t)$)

عبارت $c'(t)$ را تعیین علامت می‌کنیم؛ مشخص است که مخرج آن همواره مثبت است، بنابراین علامت $c'(t)$ به علامت صورت آن بستگی دارد:

t		۲		$+\infty$
$c'(x)$	+		−	
$c(x)$	↗	$\simeq 0/42$	↘	۰
		ماکزیمم مطلق		

۱- با توجه به نمودار مقابل جاهای خالی را پر کنید.



الف) در بازه $(۱,۷)$ که تابع f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، مثبت است. بنابراین در این بازه علامت f' مشتق است.
ب) در بازه‌ی $(۷,۱۲)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f منفی است. بنابراین در این بازه علامت f' منفی است.
پ) در بازه $(۱۲,+\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' صفر است.

۲- به کمک مشتق بیان کنید تابع $f(x)=x^۳-۳x$ در چه بازه‌های اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است.

پاسخ:
کافی است مشتق تابع f را تعیین علامت کنیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۳\xrightarrow{f'(x)=۰}۳x^۲-۳x=۰\rightarrow x=+۱,x=-۱$$

x		-۱		$+۱$	
علامت f'	$+$		$-$		$+$
یکنوایی تابع	اکیداً صعودی	۲	اکیداً نزولی	-۲	اکیداً صعودی

در بازه $(-\infty,-۱)$ و $(۱,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(-۱,+۱)$ اکیداً نزولی

۳- بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^۳-۱۲x+۴$ در آن نزوی اکید باشد، کدام است؟

پاسخ:
برای حل سوال کافی است نامعادله $f'(x)<۰$ را حل کنیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲\xrightarrow{f(x)=۰}۳x^۲-۱۲=۰\rightarrow x^۲=۴\rightarrow x=-۲,x=+۲$$

تابع f در بازه $(-۲,۲)$ نزولی اکید است.

x	$-\infty$		-۲		$+۲$		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$	
f		اکیداً صعودی	$+۲۰$	اکیداً نزولی	-۱۲	اکیداً صعودی	

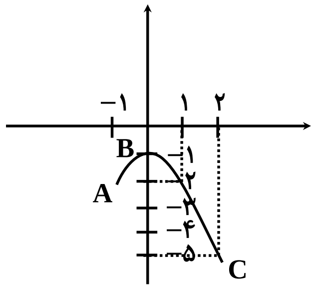
۴- با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x)=\dfrac{۱}{x^۲+۱}$، مشخص کنید تابع f در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی است؟

$$g'(x)=\frac{-۲x}{(x^۲+۱)^۲}\xrightarrow{g'(x)=۰}-۲x=۰\rightarrow\boxed{x=۰}$$

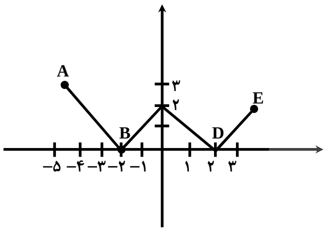
تابع در بازه‌های $(-\infty,۱)$ صعودی اکید و در بازه‌ی $(۱,+\infty)$ نزولی اکید است.

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	۰	$-$	
$g(x)$		صعودی		نزولی	

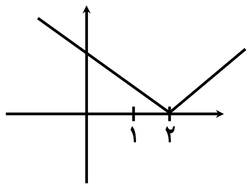
۵- نوع اکسترمم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.



نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترمم نسبی نیست		-
B	max نسبی	-۱	$f'(0)$ برابر صفر است
C	نقطه اکسترم نسبی نیست	-	-



نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	-	-
B	min نسبی	۰	$f'(-2)$ موجود نیست
C	max نسبی	۲	$f'(-2)$ موجود نیست
D	min نسبی	۰	$f'(2)$ موجود نیست
E	نه max و نه min	-	-



۶- با رسم نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ ، نشان دهید که f در $x=2$ مینیمم دارد.

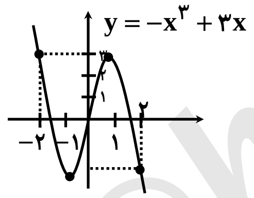
$$f(x)=|x-2| \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x-2 & x\geq 2 \\ -x+2 & x<0 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} x & x>2 \\ -1 & x<2 \end{cases}$$

ب) آیا $f'(2)$ موجود است؟

خیر، زیرا مشتق چپ و راست با هم برابر نیستند.

پ) آیا $x=2$ طول نقطه بحرانی است؟

بله، زیرا تابع در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست ولی $x=2$ عضو دامنه است.



۷- نمودار تابع $f(x)=-x^3+3x$ را رسم کرده‌ایم: $y=-x^3+3x$

الف) طول‌های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.

از روی نمودار: $(1,2),(-1,-2)$

طول‌ها: $+1,-1$

به کمک مشتق: $f'(x)=-3x^2+3$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} -3x^2+3=0 \rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

ب) می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است ریشه‌های $f'(x)=0$ یعنی نقاط بحرانی را بدست آورید.

$$f'(x)=-3x^2+3=0 \rightarrow \pm 1$$

$$f(1)=+2 \qquad , \qquad f(-1)=-2$$

۸- تابع با ضابطه $f(x)=-x^2+2x+2$ را در نظر بگیرید. طول نقاط بحرانی را بدست آورید.

$$f'(x)=-2x+2 \xrightarrow{f'(x)=0} -2x+2=0 \rightarrow \boxed{x=\pm 1} \Rightarrow \boxed{x=+1}$$

۹- جدول تغییرات تابع $\mathbf{g(x)=x^{3}-3x^{2}}$ را رسم کنید که نقاط اکسترمم نسبی تابع در آن را مشخص شده باشد.

$$g'(x)=3x^{2}-6x\xrightarrow{g'(x)=0}3x(x-2)=0\Rightarrow x=0,x=2$$

x	$-\infty$		۰		۲		$-\infty$
بازه		$(-\infty,0)$		$(0,2)$		$(2,+\infty)$	
علامت f'		+		−		+	
یکنوایی تابع f		صعودی اکید ↗	۰ max نسبی	نزولی اکید ↘	−۸ min نسبی	صعودی اکید ↗	

۱۰- نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $\mathbf{f(x)=\sqrt{4-x^{2}}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^{2}}}=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^{2}}}\xrightarrow{f'(x)=0}-2x=0\rightarrow\boxed{x=0}\Rightarrow f(0)=2$

به کمک مشتق؛ می‌دانیم ریشه‌های ساده مشتق تابع، نقاط بحرانی هستند.

ب) $\mathbf{g(x)=x^{3}+3x^{2}-4}\Rightarrow g'(x)=3x^{2}+6x\xrightarrow{g'(x)=0}3x^{2}+6x=0\rightarrow 3x(x+2)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow g(0)=-4\rightarrow(0,4)\\ x=-2\rightarrow g(-2)=0\rightarrow(-2,0)\end{cases}$$

پ) $\mathbf{h(x)=\sqrt[3]{x}}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}\Rightarrow$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست پس نقطه $(0,0)$ نقطه بحرانی است.

۱۱- در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $\mathbf{f(x)=x^{3}+3x^{2}-9x-10}$

$$f'(x)=3x^{2}+6x-9\xrightarrow{f'(x)=0}3(x^{2}+2x-3)=0\rightarrow 3(x-1)(x+3)=0\rightarrow x=1,x=-3$$

	$-\infty$		-3		$+1$		$+\infty$
f'		+	۰	−	۰	+	
f		↗	max ۱۷	↘	min −۱۵	↗	

$$\Rightarrow\begin{cases}\max(-3,+17)\\ \min(1,-15)\end{cases}$$

ب) $\mathbf{g(x)=-2x^{3}+3x^{2}+12x-9}$

$$g'(x)=-6x^{3}+6x+12\xrightarrow{g'(x)=0}-6x^{2}+6x+12=0\rightarrow-6(x^{2}-x-2)=0\rightarrow-6(x-2)(x+1)=0\rightarrow$$

$x=2,x=-1$

	$-\infty$		-1		۲		$+\infty$
g'		−	۰	+	۰	−	
g		↘	min −۱۶	↗	max ۱۱	↘	

$$\Rightarrow\begin{cases}\min(-1,-16)\\ \max(2,11)\end{cases}$$

پ) $\mathbf{h(x)=-x^{3}-3x+2}$

$h'(x)=-3x^{2}-3\xrightarrow{h'(x)=0}-3x^{2}-3=0\rightarrow x^{2}=-1\rightarrow$ غیر قابل قبول(نقطه بحرانی ندارد)

۱۲- اگر نقطه $(۲,۱)$، نقطه اکسترمم تابع $f(x)=x^۳+bx^۲+d$ باشد، مقادیر b و d را بدست آورید.

نقطه $(۲,۱)$ عضوی از تابع است پس می‌توانیم آن را در تابع صدق دهیم.

$$f(۲)=۱\rightarrow ۸+۴b+d=۱\rightarrow \boxed{۴b+d=-۷}\quad I$$

چون $(۲,۱)$ اکسترمم است پس مشتق در نقطه $x=۲$ برابر صفر است.

$$f'(x)=۳x^۲+۲bx$$

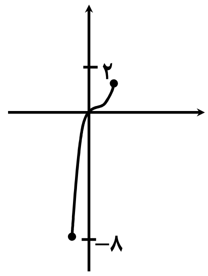
$$f'(۲)=۰\Rightarrow ۱۲+۴b=۰\rightarrow \boxed{b=-۳}$$

$$I\quad ۴(-۳)+d=-۷\rightarrow d=۵$$

۱۳- به کمک رسم نمودار توابع، مقادیر اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

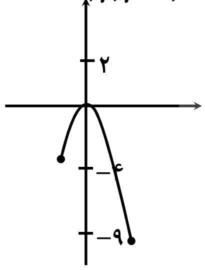
الف) $f(x)=x^۳ : x\in[-۲,۱]$

در $x=-۲$ مینیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر ۸- است. در $x=۱$ ماکزیمم مطلق دارد که مقدار آن ۱ است.



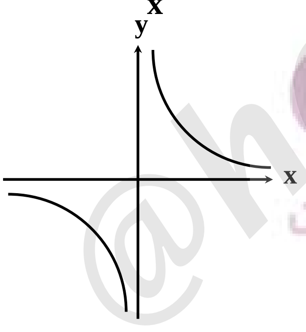
ب) $g(x)=-x^۲ : x\in[-۲,۳]$

در $x=۰$ دارای ماکزیمم مطلق و نسبی است که مقدار آن برابر صفر است. در $x=۳$ مینیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر ۹- است.



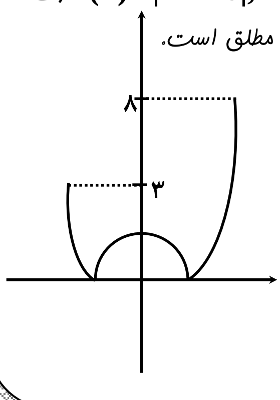
پ) $h(x)=\frac{۱}{x}$

نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم



ت) $t(x)=|x^۲-۱|, x\in[-۲,۳]$

در $x=۱$ و $x=-۱$ دارای مینیمم مطلق و نسبی است و در $x=۰$ ماکزیمم نسبی است و در $x=۳$ ماکزیمم مطلق است.



۱۴- مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده در صورت وجود بدست آورید.

الف) $\mathbf{f(x) = -۲x^۳ + ۹x^۲ - ۱۳ : x \in [-۱,۲]}$

$$f'(x) = -۶x^۲ + ۱۸x = ۰ \rightarrow -۶x(x-۳) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۳ \end{cases}$$

$x = ۳$ *قابل قبول نیست زیرا در بازه* $[-۱,۲]$ *قرار ندارد.*

$$f(-۱) = -۲(-۱)^۳ + ۹(-۱)^۲ - ۱۳ = -۲$$
$$f(۰) = -۱۳ \quad \Rightarrow \underset{\text{مطلق}}{\min}(۰,۱۳), \underset{\text{مطلق}}{\max}(۲,۷)$$
$$f(۲) = -۲(-۲)^۳ + ۹(۲)^۲ - ۱۳ = +۷$$

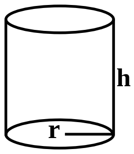
ب) $\mathbf{g(x) = x^۳ + ۲x - ۵ : x \in [-۲,۱]}$

$$g'(x) = ۳x^۲ + ۲ = ۰ \rightarrow x^۲ = \frac{-۲}{۳} \quad \text{غ ق ق}$$

$$g(-۲) = (-۲)^۳ + ۲(-۲) - ۵ = -۱۷ \Rightarrow \underset{\text{مطلق}}{\min}(-۲,-۱۷), \underset{\text{مطلق}}{\max} = (۱,-۲)$$
$$g(۱) = (۱)^۳ + ۲(۱) - ۵ = -۲$$

۱۵- می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای شکل روبه‌رو و درباز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

پاسخ:



$$\text{حجم استوانه} = ۱(Lit) = ۱۰۰۰cm^۳$$

$$\pi r^۲ h = ۱۰۰۰ \Rightarrow h = \frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲}$$

سطح جانبی + مساحت قاعده = مساحت کل

$$\Rightarrow S = \pi r^۲ + ۲\pi rh = \pi r^۲ + ۲\pi r(\frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲}) \Rightarrow S = \pi r^۲ + \frac{۲۰۰۰}{r}$$

با یافتن نقطه بحرانی S *و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص می‌کنیم به ازای چه مقداری از* r*، مقدار* S *مینیمم می‌شود.*

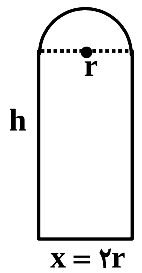
$$S' = ۲\pi r - \frac{۲۰۰۰}{r^۲} \xrightarrow{S'=۰} ۲\pi r^۳ = ۲۰۰۰ \Rightarrow r = \sqrt[۳]{\frac{۱۰۰۰}{\pi}} = \frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}} \Rightarrow S(\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}) = \pi(\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}) + \frac{۲۰۰۰}{\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}}$$

۱۶- دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

$$x - y = ۱۰ \Rightarrow x = ۱۰ + y$$
$$S(y) = x.y = (۱۰ + y)y = y^۲ + ۱۰y \Rightarrow S'_{(y)} = ۲y + ۱۰$$
$$\xrightarrow{S'_{(y)}=۰} ۲y + ۱۰ = ۰ \Rightarrow y = -۵ \Rightarrow x = ۱۰ + (-۵) = ۵$$

۱۷- در بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن می‌باشد. به‌طوری که قطر نیم برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابیدکه بیشترین نوردهی را داشته باشد.

پاسخ:



$$\text{محیط} = 4/5 = 2h + 2r + \frac{1}{2}(2\pi r)$$

$$\Rightarrow 2h + 2r + \pi r = \frac{9}{2} \Rightarrow h = \frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}$$

مساحت نیم‌دایره + مساحت مستطیل = مساحت پنجره

$$S = 2r \times h + \frac{1}{2}(\pi r^2) = 2r \times (\frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}) + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$\Rightarrow S = -(\frac{\pi + 4}{2})r^2 + \frac{9}{2}r$$

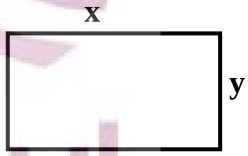
$$\Rightarrow S' = -2(\frac{\pi + 4}{2})r + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow r = \frac{-4/5}{-(\pi + 4)} = \frac{4/5}{\pi + 4}$$

	$\frac{4/5}{\pi+4}$
$S'_{(r)}$	+ 0 −
$S_{(r)}$	↗ max ↘

۱۸- کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟



پاسخ:

الف)

$$xy = 1000 \rightarrow y = \frac{10000}{x}$$ پ

$$p(x) = 2(2000000x) + 2(8000000 \times \frac{10000}{x}) = \frac{4 \times 10^6 (x^2 + 40000)}{x}$$

ب)

$$p'(x) = 4 \times 10^6 \left(\frac{2x^2 - x^2 - 10000}{x^2}\right) = 4 \times 10^6 \left(\frac{x^2 - 40000}{x}\right)$$

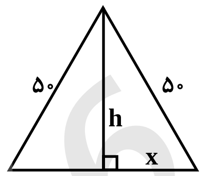
$$\xrightarrow{p'(x)=0} 4 \times 10^6 \left(\frac{x^2 - 40000}{x^2}\right) = 0 \rightarrow x^2 - 40000 = 0 \rightarrow x^2 = 40000 \rightarrow x = 200$$

$$x = 200 \xrightarrow{y = \frac{10000}{x}} y = 50$$

۱۹- الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

ب) بدون استفاده از مشتق نیز این مسئله را حل کنید.

پاسخ: الف)



$h^۲ + x^۲ = ۵۰^۲ \to h = \sqrt{۲۵۰۰ - x^۲}$

$S_{(x)} = \frac{۱}{۲} \times ۲x \times h = x(\sqrt{۲۵۰۰ - x^۲}) \qquad D = [۰/۵۰]$

$S'_{(x)} = \sqrt{۲۵۰۰ - x^۲} + x \times \frac{-۲x}{۲\sqrt{۲۵۰۰ - x^۲}} = \frac{۲۵۰۰ - x^۲ - x^۲}{\sqrt{۲۵۰۰ - x^۲}} = \frac{۲۵۰۰ - ۲x^۲}{\sqrt{۲۵۰۰ - x^۲}}$

$\xrightarrow{S'_{(x)}=۰} ۲۵۰۰ - ۲x^۲ = ۰ \to x^۲ = \frac{۲۵۰۰}{۲} = ۱۲۵۰ \to \boxed{x = \sqrt{۱۲۵۰} = ۲۵\sqrt{۲}}$

$\xrightarrow{h=\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}} h = \sqrt{۲۵۰۰ - ۱۲۵۰} = \sqrt{۱۲۵۰} \to \boxed{h = ۲۵\sqrt{۲}}$

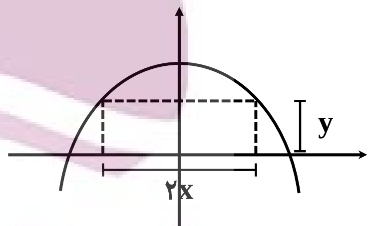
$S_{(x)} = (۲۵\sqrt{۲})(\sqrt{۲۵۰۰ - ۱۲۵۰}) = ۶۲۵ \times ۲ = ۱۲۵۰$

ب) با توجه به $S = \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \times ۵۰ \times \sin\theta$ *بیشترین مساحت وقتی است* $\sin\theta = ۱$ *باشد پس* $\theta = ۹۰^\circ$ *می‌شود. پس خواهیم داشت:*

$S = \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \times ۵۰ \times \sin\theta = \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \times ۵۰ \times ۱ = ۱۲۵۰$

۲۰- ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگر بالای محور xها روی سهمی $y = ۱۲ - x^۲$ باشند.

پاسخ:



$S_{(x)} = ۲xy = ۲x(۱۲ - x^۲) = ۲۴x - ۲x^۳$

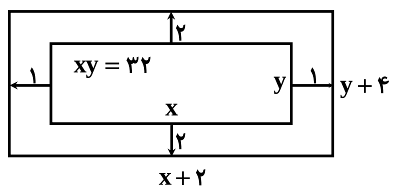
$S'_{(x)} = ۲۴ - ۶x^۲ \xrightarrow{S'_{(x)}} ۲۴ - ۶x^۲ = ۰ \to x^۲ = ۴ \to x = ۲$

$\xrightarrow{y=۱۲-x^۲} y = ۱۲ \quad ۴ \quad ۸$

طول مستطیل برابر ۸ و عرض آن برابر ۲ است.

۲۱- هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن ثابت $۳۲cm^۲$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه ۲cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

پاسخ:



$S_{(x)} = (x + ۲)(y + ۴) = xy + ۴x + ۲y + ۸$

$\xrightarrow{xy=۳۲} S_{(x)} = ۴x + ۲y + ۴۰ \xrightarrow{y=\frac{۳۲}{x}} S_{(x)} \quad ۴x \quad \frac{۶۴}{x} \quad ۴۰$

$S'_{(x)} = ۴ - \frac{۶۴}{x^۲} = \frac{۴x^۲ - ۶۴}{x^۲} \xrightarrow{S'_{(x)}=۰} ۴x^۲ - ۶۴ = ۰ \to x^۲ = ۱۶ \to x = ۴$

ابعاد جعبه برابر است با: $\xrightarrow{y'=\frac{۳۲}{x}} y = \frac{۳۲}{۴} = ۸$

۲۲- آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. هم‌چنین می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت $۲\frac{m}{s}$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری بیابید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.

پاسخ:

می‌دانیم زمان را می‌توانیم از فرمول $t=\frac{x}{V}$ بدست آوریم. پس:

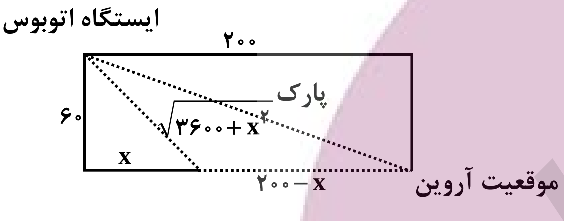
$$t=t_۱+t_۲ \text{ و } t_۱=\frac{x_۱}{v_۱}=\frac{۲۰۰-x}{۳} \text{ و } t_۲=\frac{x_۲}{t_۲}=\frac{\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow t=\frac{۲۰۰-x}{۳}+\frac{\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}}{۲}=\frac{۱}{۶}(۴۰۰-۲x+۳\sqrt{۳۶۰۰+x^۲})$$

$$t'=\frac{۱}{۶}(-۲+۳\times\frac{\cancel{۲}x}{\cancel{۲}\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}})\xrightarrow{t'=۰}۲=\frac{۳x}{\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}}\Rightarrow ۲\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}=۳x$$

$$\xrightarrow{۲}۱۴۴۰۰+۴x^۲=۹x^۲\rightarrow ۵x^۲=۱۴۴۰۰\Rightarrow x^۲=۲۸۸۰$$

$$\Rightarrow t=\frac{۱}{۶}(۴۰۰-۲\times۲۴\sqrt{۵}+۳\sqrt{۳۶۰۰+۲۸۸۰})=۱۰۰$$



درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

دوران

۱) از دوران یک مستطیل حول طولش، استوانه‌ای به ارتفاع مساوی با طول و شعاع قاعدهٔ مساوی با عرض مستطیل ایجاد می‌شود.

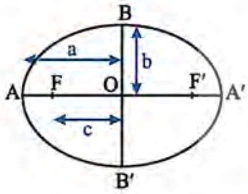
۲) از دوران مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم b و c حول ضلع قائمهٔ b، مخروطی به ارتفاع b و شعاع قاعده c ایجاد می‌شود.

۳) از دوران یک دایره حول یکی از قطرهایش، کره‌ای به شعاع مساوی با شعاع دایره ایجاد می‌شود.

بیضی: مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه (یعنی کانون‌های بیضی)، برابر با مقداری ثابت است.

اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن را بیضی افقی و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، آن را بیضی قائم می‌نامند.

باتوجه به بیضی افقی روبه‌رو:



۱) مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون F و F'، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی $(AA' = 2a)$.

۲) رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ در هر بیضی برقرار است. (a اندازه نیم‌قطر بزرگ، b اندازه نیم قطر کوچک و c نصف فاصله کانونی)

۳) مقدار $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند.

مثال کانون‌های یک بیضی نقاط $(2, 5)$ و $(2, -3)$ است.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر اندازه قطر بزرگ بیضی ۱۲ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

پاسخ:

الف) باتوجه به مؤلفه‌های طول یکسان کانون‌ها، نتیجه می‌گیریم، بیضی قائم است: $5 - (-3) = 8 =$ فاصله کانونی

مرکز بیضی در وسطه فاصلهٔ کانون‌ها قرار دارد:

$$O = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{5+(-3)}{2}\right) = (2, 1)$$

معادلهٔ قطر بزرگ همان معادلهٔ خطی است که از کانون‌های بیضی عبور می‌کند و چون معادلهٔ کانون‌ها $x = 2$ می‌باشند، بنابراین معادلهٔ قطر بزرگ نیز $x = 2$ است.

قطر کوچک بر قطر بزرگ عمود است، پس معادلهٔ آن باید به صورت $y = k$ باشد که چون $O(2, 1)$ بر روی قطر کوچک قرار دارد، نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ قطر کوچک $y = 1$ است.

ب)

$12 =$ اندازه قطر بزرگ $\Rightarrow a = 12 \div 2 = 6$

$8 =$ فاصله کانونی $\Rightarrow c = 8 \div 2 = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 6^2 = b^2 + 4^2 \Rightarrow b^2 = 20 \Rightarrow b = 2\sqrt{5} \Rightarrow$ اندازه قطر کوچک $= 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

خروج از مرکز بیضی: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6}$

درس دوم: دایره

معادلهٔ استاندارد دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r برابر $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ است.

وضعیت نقطه و دایره:

الف) نقاطی که در معادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ صدق می‌کنند، روی محیط دایره قرار دارند.

ب) نقاطی که در نامعادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < r^2$ صدق می‌کنند، درون دایره قرار دارند.

پ) نقاطی که در نامعادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 > r^2$ صدق می‌کنند، خارج دایره قرار دارند.

معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ می‌باشد، مختصات مرکز این دایره $O\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$ و شعاع دایره $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ است.

مثال معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به‌صورت زیر است.

$$x^۲ + y^۲ - ۶x + ۴y - ۳ = ۰$$

الف) مرکز و شعاع این دایره را به‌دست آورید.

ب) معادلهٔ استاندارد این دایره را بنویسید.

پ) وضعیت نقطهٔ $(۲, -۱)$ نسبت به این دایره را مشخص کنید.

پاسخ:

الف)

$$O(\frac{-a}{۲}, \frac{-b}{۲}) = (\frac{-(-۶)}{۲}, \frac{-(۴)}{۲}) \Rightarrow O(۳, ۲)$$

$$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲ + (۴)^۲ - ۴(-۳)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴} = ۴$$

ب) باتوجه به شعاع و مرکز به‌دست آمده، معادله استاندارد $(x-۳)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴^۲$ است.

پ) به جای x و y در معادله استاندارد، به ترتیب ۲ و ۱- را قرار می‌دهیم و مقدار حاصل را با $۴^۲$ مقایسه می‌کنیم: نقطهٔ $(۲, -۱)$ درون دایره قرار دارد.

$$(۲-۳)^۲ + (-۱+۲)^۲ = ۲ < ۴^۲ \Rightarrow$$

◆ **وضعیت خط و دایره:**

۱) فاصلهٔ نقطه $A(x_۰, y_۰)$ از خط معادله $ax + by + c = ۰$ برابر $d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ است.

۲) فاصلهٔ مرکز دایره نسبت به خط را با استفاده از رابطهٔ بالا به‌دست می‌آوریم، سپس با مقایسه d با شعاع دایره، وضعیت خط و دایره مشخص می‌شود.

مثال وضعیت خط $x + ۲y = ۱$ نسبت به دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۴y - ۲۰ = ۰$ را مشخص کنید.

پاسخ:

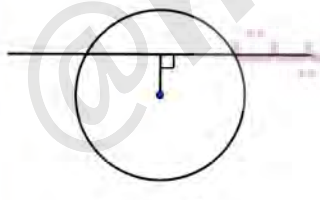
مرکز دایره: $O(\frac{-a}{۲}, \frac{-b}{۲}) = (\frac{-۲}{۲}, \frac{-۴}{۲}) = (-۱, -۲)$

شعاع دایره: $r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲ + ۴^۲ - ۴(-۲۰)} = ۵$

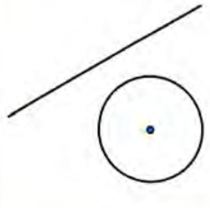
فاصله مرکز دایره از خط $x + ۲y - ۱ = ۰$: $d = \frac{|(-۱) + ۲(-۲) - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + ۲^۲}} = \frac{۶}{\sqrt{۵}} = \frac{۶\sqrt{۵}}{۵} < r = ۵$

بنابراین خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

تذکر اگر $d < r$ شود، خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند:



اگر $d = r$ شود، خط و دایره مماس‌اند

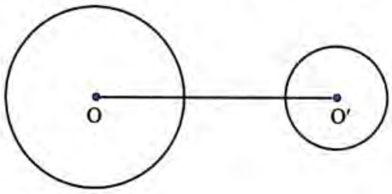


و اگر $d > r$ شود، خط دایره را قطع نمی‌کند.

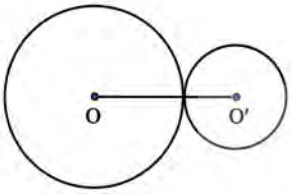
وضعیت دو دایره:

با محاسبهٔ فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره (خط‌المرکزین) (d) و مراجعه به جدول زیر، وضعیت دو دایرهٔ $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ مشخص می‌شود.

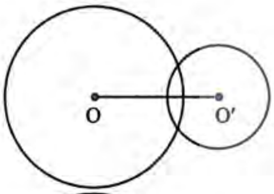
- دو دایره بیرون هم (متخارج) $d > r + r'$



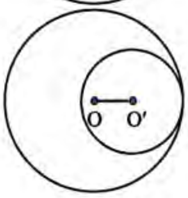
- دو دایره مماس بیرون $d = r + r'$



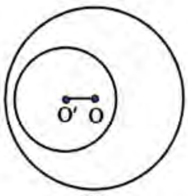
- دو دایره متقاطع $r - r' < d < r + r'$



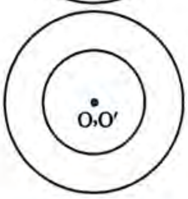
- دو دایرهٔ مماس درون $d = r - r'$



- دو دایرهٔ متداخل $d < r - r'$



- دو دایرهٔ هم‌مرکز $d = 0$



مثال: وضعیت دو دایرهٔ $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا مرکز و شعاع هر دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \begin{cases} \text{مرکز}: \left(\frac{-(-6)}{2}, \frac{-(-8)}{2}\right) \Rightarrow O = (3,4) \\ r = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2 - 4(21)} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \begin{cases} \text{مرکز}: \left(\frac{-(-2)}{2}, \frac{-(-4)}{2}\right) \Rightarrow O' = (1,2) \\ r' = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - 4(4)} \Rightarrow r' = 1 \end{cases}$$

فاصله دو مرکز برابر است با: $OO' = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}$

باتوجه به این‌که $2 - 1 < \sqrt{8} < 2 + 1$ یعنی $r - r' < OO' < r + r'$ نتیجه می‌گیریم که دایره‌های فوق، متقاطع‌اند.

۳ رابطه مهم:

۱) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \xrightarrow[\text{یعنی } A\cap B=\varnothing]{\text{اگر A و B ناسازگار باشند}} P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

۲) احتمال شرطی: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\quad (P(B)\neq 0)$

۳) پیشامدهای A, B مستقل: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

قانون احتمال کل: اگر A_1، A_2، A_3 و... پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل‌دهنده و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر برقرار خواهد بود.

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)+\dots$$

مهم‌ترین رابطه‌ای که در این فصل با آن کار داریم همین «قانون احتمال کل» است که برای حل مسئله‌های مرتبط با آن: اولاً باید $A_1, A_2, A_3, \dots$ را به درستی تشخیص دهید (که معمولاً همان ظرف‌های مختلف مسئله یا همان کیسه‌های مختلف با همان جنسیت زن و مرد و ... هستند) و سپس B که خواستهٔ شرطی اصلی مسئله است.

با حل یک مثال، این روش را تمرین می‌کنیم.

مثال ۳ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۰ مهره قرار دارد که ۳ تای آن‌ها قرمز است. در دومین ظرف ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آن‌ها قرمز است و در سومین ظرف ۱۲ مهره قرار دارد که ۹ تای آن‌ها قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال این که مهره انتخابی قرمز باشد چه‌قدر است؟

پاسخ: پیشامد انتخاب ظرف‌ها را به ترتیب با A_1، A_2 و A_3 و پیشامد خارج شدن مهره قرمز را با B نمایش می‌دهیم.

می‌دانیم احتمال انتخاب هر یک از ظرف‌های یکسان است:

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$$

و احتمال انتخاب مهره قرمز از هر ظرف برابر $\dfrac{\text{تعداد مهره‌های قرمز}}{\text{تعداد کل مهره‌ها}}$ در آن ظرف است:

$$P(B|A_1)=\frac{3}{10},\ P(B|A_2)=\frac{6}{8},\ P(B|A_3)=\frac{9}{12}$$

بنابراین احتمال خارج شدن مهره قرمز یعنی $P(B)$ برابر است با:

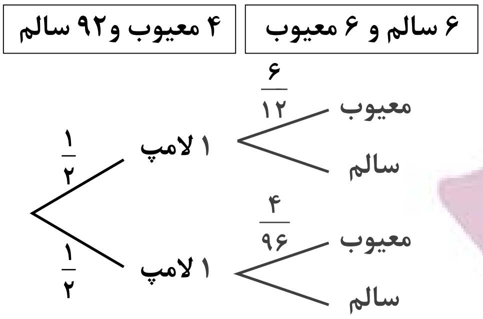
$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$P(B)=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{12}\right)=\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0/6$$

فصل ۷ احتمال

۱- دو جعبه داریم. درون یکی از آن‌ها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آن‌ها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴تا از آن‌ها معیوب‌اند به تصادف جعبه‌ای را انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چه‌قدر احتمال دارد لامپ موردنظر معیوب باشد؟

پاسخ:



$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۹۶}=\frac{۴۸}{۱۹۲}+\frac{۴}{۱۹۲}=\frac{۵۲}{۱۹۲}=\frac{۱۳}{۴۸}$$

۲- فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟

پاسخ:

$$P(A)=\frac{۲۰}{۱۰۰} \quad , \quad P(B)=\frac{۵۰}{۱۰۰} \quad , \quad P(C)=\frac{۳۰}{۱۰۰}$$

$$P(D|A)=\frac{۳}{۱۰۰} \quad , \quad P(D|B)=\frac{۵}{۱۰۰} \quad , \quad P(D|C)=\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$P(D)=P(A)\times P(D|A)+P(B)\times P(D|B)+P(C)\times P(D|C)$$

$$=\frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۵۰}{۱۰۰}\times\frac{۵}{۱۰۰}+\frac{۳۰}{۱۰۰}\times\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۶+۲۵+۳}{۱۰۰۰}=۰$$

$$=۰/۰۳۴=\%۳/۴$$

۳- یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب کنیم. در این آزمایش احتمال این‌که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$S=(R, PPPP, PPPR, PPRP, PRPP, PRRP, PRPR, PRRR, PPRR)$$

$$A=(R, PPPR, PPRP, PRPP)$$

$$P(A)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

۴- در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A و ۲تا از نوع B و ۱۵تا از نوع C وجود دارد. و احتمال این‌که عمر آن‌ها از ۱۰ سال بیشتر باشد، برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$ برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

پاسخ:

A	۵
B	۲
C	۱۵

$$P(kh|A)=\frac{۴}{۵} \quad , \quad P(kh|B)=\frac{۹}{۱۰} \quad , \quad P(kh|C)=\frac{۱}{۲}$$

$$P(kh)=P(A)\times P(kh|A)+P(B)\times P(kh|B)+P(C)\times P(kh|C)$$

$$P(kh)=\frac{۵}{۲۲}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۲۲}\times\frac{۹}{۱۰}+\frac{۱۵}{۲۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۱۱}+\frac{۹}{۱۱۰}+\frac{۱۵}{۴۴}=\frac{۴۰+۱۸+۷۵}{۲۲۰}=\frac{۱۳۳}{۲۲۰}$$

۵- مینا در انتخاب رشته‌ی خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته‌ی ریاضی، تجربی و انسانی مردود است. اگر او رشته‌ی ریاضی را انتخاب کند به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال این‌که او رشته‌ی ریاضی را انتخاب کند ۰/۱ احتمال این‌که رشته تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال این‌که رشته انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهدا شد؟

پاسخ:

$$p(\text{ق})=p(\text{ریاضی})\times p(\text{ق}|\text{ریاضی})+p(\text{تجربی})\times p(\text{ق}|\text{تجربی})+p(\text{انسانی})\times p(\text{ق}|\text{انسانی})$$

$$=\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۴۵}{۱۰۰}+\frac{۶}{۱۰}+\frac{۱۰}{۱۰۰}+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۳۰}{۱۰۰}=\frac{۴۵+۶۰+۹۰}{۱۰۰۰}=\frac{۱۹۵}{۱۰۰۰}=\%۱۹/۵$$