دفترچه پاسخ

آزمون ۱۵ اردیبهشت ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲و ریاضی‌پایه	کاظم اجلالی-سیدرضا اسلامی-محسن بهرام‌پور-عادل حسینی-مهدی ملارمضانی-جهانبخش نیکنام
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-حنانه اتقاقی-علی ایمانی-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-فرزانه خاکپاش-علی فتح‌آبادی-احمدرضا فلاح
	ریاضیات گسسته و آمارواحتمال	امیرحسین ابومحبوب-محسن بهرام‌پور-فرزانه خاکپاش-سوگند روشنی-محمد صحت‌کار-احمدرضا فلاح
	فیزیک	خسرو ارغوانی‌فرد-بابک اسلامی-عبدالرضا امینی‌نسب-زهره آقامحمدی-مجتبی خلیل‌ارجمندی-بیتا خورشید محمدعلی راست‌پیمان- بهنام رستمی-حمید زرین‌کفش-معصومه شریعت‌ناصری-مسعود قره‌خانی-محسن قندچلر-مصطفی کیانی علیرضا گونه حسین مخدومی-امیراحمد میرسعید-مصطفی واثقی-شادمان ویسی
	شیمی	علی امینی-کامران جعفری-امیر حاتمیان-حمید ذبحی-پویا رستگاری-روزبه رضوانی-علی رفیعی-رسول عابدینی‌زواره محمد عظیمیان‌زواره-علیرضا کیانی‌دوست-اکبر هنرمند

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲و ریاضی‌پایه	هندسه	ریاضیات گسسته و آمارواحتمال	فیزیک	شیمی
گزینشگر	سیدرضا اسلامی کاظم اجلالی	امیرحسین ابومحبوب	سوگند روشنی	مصطفی کیانی	ایمان حسین نژاد
گروه ویراستاری	مهدی ملارمضانی	عادل حسینی	عادل حسینی	حمید زرین کفش زهره آقامحمدی	محمدحسن محمدزاده مقدم امیر حاتمیان
		ویراستار استاد: مهرداد ملوندی	ویراستار استاد: مهرداد ملوندی	ویراستار استاد: سیدعلی میرنوری	
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	بابک اسلامی	امیرحسین مسلمی
مستندسازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	احسان صادقی	سمیه اسکندری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	محمد اکبری	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	میلاد سیاوشی-فرزانه فتح‌اله زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس نقاط بحرانی تابع نقاطی است که در آن‌ها مشتق تابع برابر صفر است.

$$f'(x) = -3\sin 3x - 3\sin x$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} \sin 3x = -\sin x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \pi + x \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

اجتماع این دو دسته جواب را می‌توانیم $x = \frac{k\pi}{2}$ در نظر بگیریم. در بین گزینه‌ها، $\frac{7\pi}{2}$ عضو این دسته جواب است.

(حسابان ۲- صفحهٔ ۱۱۷)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(محسن بهرام‌پور)*

$x = -4$ یکی از ریشه‌های تابع f' است:

$$f'(x) = 3x^2 + 2mx - 24$$

$$\xrightarrow{f'(-4)=0} 48 - 8m - 24 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 2$$

در تابع درجه سوم $y = ax^3 + bx^2 + \ldots$ طول نقطه عطف $x_I = -\dfrac{b}{3a}$ است.

پس در این سؤال طول نقطه عطف $x_I = -1$ و عرض آن $f(-1) = 28$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۷ و ۱۳۸ تا ۱۴۰)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

باید بازه‌ای را پیدا کنیم که در آن $(fog)''$ منفی باشد. داریم:

$$(fog)'(x) = g'(x).f'(g(x))$$

$$= (2x-1)(x^2+x-2) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$$

$$\Rightarrow (fog)''(x) = 6x^2 + 2x - 5$$

$$\xrightarrow{(fog)''(x)=0} x = \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{6}$$

پس تقعر تابع fog در بازهٔ $\left(\frac{-1-\sqrt{31}}{6}, \frac{-1+\sqrt{31}}{6}\right)$ رو به پایین است که طول این بازه برابر $\frac{\sqrt{31}}{3}$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۰)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(محسن بهرام‌پور)*

ضابطه تابع را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2} & ; x \le 0 \\ \dfrac{x}{1-x^2} & ; x \ge 0 \end{cases}$$

پس مشتق تابع به صورت روبه‌رو است:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & ; x \le 0 \\ \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & ; x \ge 0 \end{cases}$$

تنها ریشه تابع f'، $x = -1$ است و با توجه اینکه $x = 1$ نیز مجانب قائم نمودار تابع است، جدول تغییرات رفتار تابع را می‌نویسیم:

		-1		1	
f'	$-$	0	$+$	$\|$	$+$
f	$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$

پس تابع فقط یک اکسترمم نسبی از نوع مینیمم دارد.

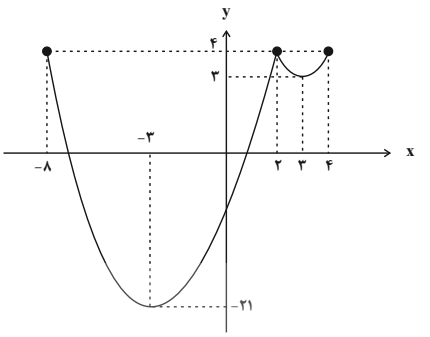
(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۶)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(سیدرضا اسلامی)*

نمودار تابع را در دامنه‌اش رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x - 12 & ; -8 \le x \le 2 \\ x^2 - 6x + 12 & ; 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

ایران توشه — توشه ای برای موفقیت



با توجه به نمودار بالا نقاط $(-۳,-۲۱)$ و $(۲,۴)$ اکسترمم‌های نسبی تابع هستند که جزء اکسترمم‌های مطلق نیز محسوب می‌شوند.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۶)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

تابع در دامنه‌اش یعنی بازهٔ $[۱,+\infty)$ پیوسته است. پس برای اینکه یکنوا باشد کافی است، f' در آن تعیین علامت ندهد.

$$f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{x+۲}}+\frac{k}{۲\sqrt{x-۱}}$$

پس یعنی معادله زیر نباید جواب ساده داشته باشد.

$$\xrightarrow{f'(x)=۰}\sqrt{x+۲}=-\frac{۲}{k}\sqrt{x-۱}$$

بدیهی است که اگر $k>۰$ باشد. معادلهٔ‌بالا جواب ندارد، حال در حالت $k<۰$ داریم:

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}x+۲=\frac{۴}{k^۲}x-\frac{۴}{k^۲}\Rightarrow x=\frac{۴+۲k^۲}{۴-k^۲}$$

این جواب نباید در دامنه تابع قرار بگیرد:

$$\Rightarrow\frac{۴+۲k^۲}{۴-k^۲}<۱\Rightarrow\frac{۳k^۲}{۴-k^۲}<۰\Rightarrow ۴-k^۲<۰\xrightarrow{k<۰}k<-۲$$

اما دقت کنید به ازای $k=۰$ تابع $f(x)=۲\sqrt{x+۲}$ اکیداً صعودی و به ازای $k=-۲$ تابع $f(x)=۲(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۱})$ اکیداً نزولی است.

پس مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای k به صورت زیر است:

$$k\in(-\infty,-۲]\cup[۰,+\infty)=\mathbb{R}-(-۲,۰)$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۲)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(جوانبخش نیکنام)*

مختصات نقاط H و A به‌ترتیب $H(x,۰)$ و $A(x,f(x))$ است، پس مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}OH.AH=\frac{۱}{۲}xf(x)$$

$$\Rightarrow S(x)=\frac{۱}{۲}\frac{x}{x^۳+۱}$$

در نقطه بحرانی تابع $S(x)$، بیشترین مساحت رخ می‌دهد:

$$S'(x)=\frac{۱}{۲}\frac{۱-۲x^۳}{(۱+x^۳)^۲}=۰\Rightarrow ۱-۲x^۳=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$$

$$\Rightarrow S_{max}=S\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}\right)=\frac{۱}{۲}\frac{\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۶}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(سیدرضا اسلامی)*

خط $y=۲a-۱$ مجانب افقی نمودار تابع است و این خط نمودار تابع را در $x=-\frac{۱}{۲}$ قطع کرده است، پس داریم:

$$\frac{(۲a-۱)x^۳}{x^۳+ax+۱}=۲a-۱$$

$$\Rightarrow(۲a-۱)x^۳=(۲a-۱)x^۳+a(۲a-۱)x+۲a-۱$$

$$\Rightarrow a(۲a-۱)x+۲a-۱=(۲a-۱)(ax+۱)=۰$$

$$\xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}}a=۲\Rightarrow f(x)=\frac{۳x^۳}{x^۳+۲x+۱}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۳x^۲(۴x+۳)}{(x^۳+۲x+۱)^۲}\xrightarrow{f'(x)=۰}x=۰,-\frac{۳}{۴}$$

با توجه به نمودار، مینیمم نسبی تابع در $x=-\frac{۳}{۴}$ رخ می‌دهد:

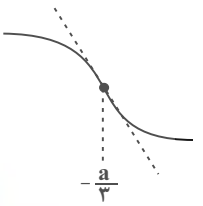
$$\Rightarrow f(-\frac{۳}{۴})=\frac{۳(-\frac{۳}{۴})^۳}{(-\frac{۳}{۴})^۳+۲(-\frac{۳}{۴})+۱}=\frac{-\frac{۸۱}{۶۴}}{-\frac{۵۹}{۶۴}}=\frac{۸۱}{۵۹}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۶)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۹- **گزینهٔ «۲»** *(سیدرضا اسلامی)*

نمودار رسم شده در صورت سؤال، نمودار تابع در همسایگی یک نقطه عطف آن است، اما از آنجایی که تابع $y = x^۳ + ax^۲ - ۱۰x \; ; \; x < ۲$ در صورت وجود، نقطه عطفی به صورت زیر دارد و هم‌چنین با توجه به این نکته که تابع درجه دوم $y = bx^۲ + ۱۸x - ۳۲ \; ; \; x \geq ۲$ نمی‌تواند نقطه عطف داشته باشد،



نمودار رسم‌شده در صورت سؤال، باید نمودار تابع در همسایگی $x = ۲$ (نقطه مرزی دو ضابطه) باشد، یا به بیان دیگر $x = ۲$ طول یکی از نقاط عطف نمودار تابع f است. پس تابع در $x = ۲$ باید پیوسته و مشتق‌پذیر باشد:

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۴a - ۱۲, f(۲) = \lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۴b + ۴$$

$$\xrightarrow{\text{پیوستگی}} ۴a - ۱۲ = ۴b + ۴ \Rightarrow a - b = ۴ \quad (۱)$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ + ۲ax - ۱۰ & ; \; x < ۲ \\ ۲bx + ۱۸ & ; \; x \geq ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_-(۲) = ۴a + ۲ \; , \; f'_+(۲) = ۴b + ۱۸$$

$$\xrightarrow{\text{برابری مشتق‌های یک‌طرفه}} ۴a + ۲ = ۴b + ۱۸ \Rightarrow a - b = ۴ \quad (۲)$$

معادلات (۱) و (۲) یکسان هستند، پس برای به دست آوردن حدود a و b سراغ مشتق دوم می‌رویم:

$$f''(x) = \begin{cases} ۶x + ۲a & ; \; x < ۲ \\ ۲b & ; \; x > ۲ \end{cases}$$

برای اینکه $x = ۲$ طول نقطه عطف باشد، f'' در آن باید تغییر علامت دهد:

$$\Rightarrow b(a+۶) < ۰ \Rightarrow \begin{cases} b < ۰, a + ۶ > ۰ \\ \text{یا} \\ b > ۰, a + ۶ < ۰ \end{cases}$$

با توجه به اینکه $a = b + ۴$ داریم:

$$\begin{cases} b < ۰ \; , \; b + ۱۰ > ۰ \Rightarrow -۱۰ < b < ۰ \\ \text{یا} \\ b > ۰ \; , \; b + ۱۰ < ۰ : \text{غیرممکن} \end{cases}$$

از طرفی شیب خط مماس بر نمودار $x = ۲$ یعنی همان $f'(۲)$ باید مثبت باشد.

$$\Rightarrow ۴b + ۱۸ > ۰ \Rightarrow b > -\frac{۹}{۲}$$

در نهایت حدود b بازهٔ $(-\frac{۹}{۲} , ۰)$ و حدود a بازهٔ $(-\frac{۱}{۲} , ۴)$ به دست می‌آید.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۱ و ۱۳۸ تا ۱۴۰)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(سیدرضا اسلامی)*

دو خط داده شده موازی هستند و خط وسط آن‌ها $y + ۴x = \frac{۱۹ + ۳}{۲} = ۱۱$ است، این خط باید از مرکز تقارن تابع هموگرافیک f یعنی نقطه $W(۳ - a^۲, ۳a)$ بگذرد:

$$\Rightarrow ۳a + ۱۲ - ۴a^۲ = ۱۱ \Rightarrow ۴a^۲ - ۳a - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow a = ۱, a = -\frac{۱}{۴}$$

اما مقدار $a = ۱$ قابل قبول است؛ زیرا به ازای $a = -\frac{۱}{۴}$ ، $f'(x) > ۰$ است و دو خط $y = -۴x + ۳$ و $y = -۴x + ۱۹$ نمی‌توانند بر f مماس شوند.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۳x - ۲}{x - ۲}$$

حال مختصات نقاط تماس A و B را می‌یابیم:

$$\bullet \; \frac{۳x - ۲}{x - ۲} = -۴x + ۳ \Rightarrow ۳x - ۲ = -۴x^۲ + ۱۱x - ۶$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۸x + ۴ = ۴(x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x_A = ۱ \Rightarrow y_A = -۱$$

$$\bullet \; \frac{۳x - ۲}{x - ۲} = -۴x + ۱۹ \Rightarrow ۳x - ۲ = -۴x^۲ + ۲۷x - ۳۸$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۲۴x + ۳۶ = ۴(x-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow x_B = ۳ \Rightarrow y_B = ۷$$

فاصله دو نقطه $A(۱, -۱)$ و $B(۳, ۷)$ از یکدیگر برابر است با:

$$AB = \sqrt{(۳-۱)^۲ + (۷+۱)^۲} = \sqrt{۶۸} = ۲\sqrt{۱۷}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۳)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

ریاضی پایه

۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

معادلهٔ داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(k+1)x^2 - x - (2k+1) = 0$$

که در آن داریم:

$$S = \alpha+\beta = \frac{1}{k+1}, P = \alpha\beta = -\frac{2k+1}{k+1}$$

حال برای رابطه $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 1$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha+\beta) = PS = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{2k+1}{(k+1)^2} = 1 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = -2k - 1$$

$$\xrightarrow{k<-\frac{1}{2}} k^2 + 4k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2 \pm \sqrt{2}$$

هر دو مقدار قابل قبول است.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۷ تا ۹)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ نقطه $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ رأس سهمی است، پس در این سؤال رأس سهمی $y = x^2 - mx + 2m$ نقطهٔ $(\frac{m}{2}, -\frac{m^2}{4} + 2m)$ است. عرض این نقطه از مربع طول آن بیشتر است، یعنی:

$$-\frac{m^2}{4} + 2m > \frac{m^2}{4} \Rightarrow \frac{m^2}{2} - 2m < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m = m(m-4) < 0 \Rightarrow 0 < m < 4$$

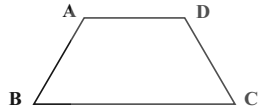
اعداد صحیح این بازه ۱، ۲ و ۳ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۶ است.

(ریاضی۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲ و ۸۶ تا ۸۸)

۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

شیب اضلاع AB، BC، CD و AD به‌ترتیب ۱-، $\frac{3}{4}$، صفر و $\frac{3}{4}$ است،

پس این چهارضلعی ذوزنقه است و می‌توانیم شکل فرضی زیر را در نظر بگیریم:



طول قاعده‌های این ذوزنقه برابر است با:

$$BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10, AD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

ارتفاع ذوزنقه نیز فاصله دو خط موازی AD و BC است:

$$AD: 3x - 4y = 1, BC: 3x - 4y = -20$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع} = \frac{|1-(-20)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{21}{5}$$

پس مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(10+5)\left(\frac{21}{5}\right) = \frac{63}{2} = 31/5$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی ملارمضانی)*

باید معادله روبه‌رو را حل کنیم: $2x - \frac{3}{x} = \sqrt{x+1} + 3$

روش اول: می‌دانیم در نقطه مشترک دو تابع، مختصات نقاط یکسان است، پس به‌جای حل معادله بالا (که در روش دوم دقیق حل خواهیم کرد)، به‌ازای هر مقدار در گزینه‌ها، طول نقطه در تابع $y = \sqrt{x+1} + 3$ را حساب

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

کنیم. اگر مختصات نقطه به‌دست‌آمده در ضابطه تابع $y=2x-\frac{3}{x}$ هم صدق کند، نقطه مشترک دو تابع را پیدا کرده‌ایم.

«گزینهٔ ۱»: $\sqrt{x+1}+3=3\Rightarrow\sqrt{x+1}=0\Rightarrow x=-1$

نقطه $(-1,3)$ روی نمودار تابع $y=2x-\frac{3}{x}$ قرار ندارد.

«گزینهٔ ۲»: $\sqrt{x+1}+3=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\sqrt{x+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\Rightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

نقطهٔ $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{5}}{2})$ روی نمودار تابع $y=2x-\frac{3}{x}$ قرار دارد؛ زیرا:

$$2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})-\frac{3}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}=1-\sqrt{5}-\frac{6}{1-\sqrt{5}}$$

$$=1-\sqrt{5}+\frac{3}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

اگر گزینه‌های دیگر را بررسی کنیم، می‌بینیم مختصات نقطهٔ به دست آمده در ضابطهٔ تابع $y=2x-\frac{3}{x}$ صدق نمی‌کند.

روش دوم:

$$2x-\frac{3}{x}=\sqrt{x+1}+3\xrightarrow{\times x}2x^2-3=x\sqrt{x+1}+3x$$

$$\Rightarrow 2x^2-x\sqrt{x+1}=3x+3$$

$$\xrightarrow{+(x+1)}2\frac{x^2}{x+1}-\frac{x}{\sqrt{x+1}}=3$$

حال با تغییر متغیر $t=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ داریم:

$$2t^2-t-3=0\Rightarrow(t+1)(2t-3)=0\Rightarrow t=-1\ \text{یا}\ \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{x+1}}=-1\Rightarrow\sqrt{x+1}=-x\xrightarrow{x<0}x+1=x^2\\ \Rightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ \frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{3}{2}\Rightarrow 3\sqrt{x+1}=2x\xrightarrow{x>0}9x+9=4x^2\\ \Rightarrow x=3\end{cases}$$

با جایگذاری $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $x=3$ در ضابطه یکی از توابع، عرض نقاط به‌ترتیب $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ و ۵ به‌دست می‌آید.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

ابتدا عرض نقطه P و طول نقطه P' را محاسبه می‌کنیم:

$$x_P^2+y_P^2=1\xrightarrow{x_P=\frac{1}{3}}y_P^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

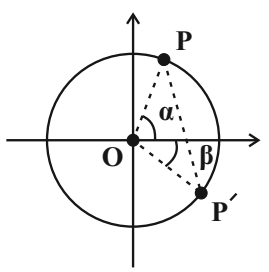
$$\xrightarrow{y_P>0}y_P=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$x_{P'}^2+y_{P'}^2=1$$

$$\xrightarrow{y_{P'}=-\frac{2}{3}}x_{P'}^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$$\xrightarrow{x_{P'}>0}x_{P'}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

حال با توجه به شکل زیر داریم:



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\sin\alpha=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳},\cos\alpha=\frac{۱}{۳},\sin\beta=\frac{۲}{۳},\cos\beta=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

پس مساحت مثلث برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{POP'}}=\frac{۱}{۲}r^۲\sin(\alpha+\beta)\xrightarrow{r=۱}S=\frac{۱}{۲}\sin(\alpha+\beta)$$

$$S=\frac{۱}{۲}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\frac{۱}{۲}(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\times\frac{\sqrt{۵}}{۳}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳})=\frac{\sqrt{۱۰}+۱}{۹}$$

(ریاضی۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(سیدرضا اسلامی)*

ابتدا عبارت A را ساده‌تر و خلاصه‌تر می‌نویسیم:

$$\sin\left(\frac{۷\pi-۲\theta}{۲}\right)=\sin\left(\frac{۷\pi}{۲}-\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos(\theta-۷\pi)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{۳\pi+۲\theta}{۲}\right)=\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right)=\sin\theta$$
$$\Rightarrow A=۳\sin\theta-۶\cos\theta$$

پس برای محاسبهٔ مقدار A به $\sin\theta$ و $\cos\theta$ نیاز داریم.

حال از اتحاد $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$ استفاده می‌کنیم:

$$۱+(۵a^۲+۳)=(a-۲)^۲\Rightarrow ۵a^۲+۴=a^۲-۴a+۴$$

$$\Rightarrow ۴a^۲+۴a=۴a(a+۱)=۰\Rightarrow a=۰\text{ یا }-۱$$

به ازای $a=۰$ ، $\tan\theta=\sqrt{۳}$ و $\cos\theta=-\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید، در نتیجه $\sin\theta=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $A=۳(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ خواهد بود.

به ازای $a=-۱$ نیز، $\tan\theta=۲\sqrt{۲}$ و $\cos\theta=-\frac{۱}{۳}$ به دست می‌آید، در نتیجه $\sin\theta=-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ و $A=۲(۱-\sqrt{۲})$ خواهد بود.

(ریاضی۱- مثلثات؛ صفحهٔ ۴۳)

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۱۷- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

ابتدا با اتحاد $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$ از تساوی اول استفاده می‌کنیم:

$$\sin(\alpha+\beta)=۲\sin(\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=۲\sin\alpha\cos\beta-۲\cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\beta=۳\cos\alpha\sin\beta$$
$$\Rightarrow \tan\alpha=۳\tan\beta\text{ یا }\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=۳$$

حال با اتحاد $\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{۱\mp\tan x\tan y}$ از تساوی دوم استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{۳\tan\alpha-۳\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

با جایگزینی $۳\tan\beta$ به جای $\tan\alpha$ داریم:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\frac{۴\tan\beta}{۱-۳\tan^۲\beta}=\frac{۶\tan\beta}{۱+۳\tan^۲\beta}\xrightarrow{۲\tan\beta\neq ۰}\tan^۲\beta=\frac{۱}{۱۵}$$

$$\Rightarrow \tan^۲\alpha=\frac{۹}{۱۵}\Rightarrow \tan^۲\alpha-\tan^۲\beta=\frac{۸}{۱۵}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱۸- **گزینهٔ «۴»** (کاظم اجلالی)

دامنه تابع f مجموعهٔ $D_f=[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}]-\{۱\}$ است. این تابع در نقاط صحیح ± ۲ ، -۱ و صفر حد دارد، پس برای اینکه در پنجمین نقطه صحیح هم حد داشته باشد، باید در $x=۱$ دارای حد باشد. در این نقطه حد مخرج $f(x)$ صفر است، پس حد صورت آن هم باید صفر باشد:

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}(\sqrt{۵-x^۲}-۲m)=۲-۲m=۰\Rightarrow m=۱$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{۵-x^۲}-۲}{x-۱}$$

در نهایت داریم:

$$\lim_{x\to m} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۵-x^۲}-۲}{x-۱}\times\frac{\sqrt{۵-x^۲}+۲}{\sqrt{۵-x^۲}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x^۲}{۴(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۱-x)(۱+x)}{۴(x-۱)}=-\frac{۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۹- **گزینهٔ «۴»** (عادل حسینی)

$x=۱$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است و با حد مبهم $\frac{۰}{۰}$ مواجه هستیم.

حاصل حد را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x^n-x}}{\sqrt{x^۲-x}}+\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x^۲-x}}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x}\sqrt{x^{n-۱}-۱}}{\sqrt{x}\sqrt{x-۱}}+\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}\sqrt{x-۱}}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{(x-۱)(x^{n-۲}+x^{n-۳}+\cdots+x+۱)}}{\sqrt{x-۱}}$$

$$+\lim_{x\to ۱^+}\left(\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x-۱}}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}\right)$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\underbrace{\sqrt{\underbrace{x^{n-۲}+x^{n-۳}+\cdots+x+۱}_{\text{جمله دارد}}}}_{n-۱}+\underbrace{\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x}+۱}}_{\text{برابر صفر است.}}$$

$$\Rightarrow L=\sqrt{n-۱}=۴\Rightarrow n=۱۷$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** (کاظم اجلالی)

تابع $y=[x^۲]$ در نقاطی از بازهٔ $(۰,m)$ که $x^۲$ مقداری صحیح شود، ناپیوسته است. این نقاط به صورت زیر هستند:

$$\{۱,\sqrt{۲},\sqrt{۳},۲,\sqrt{۵},\ldots\}$$

ولی تابع f در $x=۱$ پیوسته است، زیرا:

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱} f(x)=۰$$

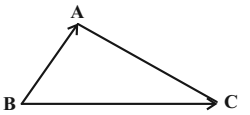
بنابراین بیشترین مقدار m برابر $\sqrt{۲}$ است.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

هندسه ۳

۲۱- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*



$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(۲,۱,۱)-(۳,۱,۲)=(-۱,۰,-۱)$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(۲,۳,۱)-(۳,۱,۲)=(-۱,۲,-۱)$$

$$\cos\hat{B}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{۱+۰+۱}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۶}}=\frac{۲}{\sqrt{۱۲}}$$

$$=\frac{۲}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

(هندسه ۳: بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

۲۲- **گزینهٔ «۴»** *(فرزانه خاکپاش)*

$$\vec{a}=(-۱,m,۳),\ \vec{b}=(۰,۱,-۱)\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=(-m-۳,-۱,-۱)$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۳}\Rightarrow\sqrt{(-m-۳)^۲+(-۱)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}(-m-۳)^۲+۲=۳\Rightarrow(m+۳)^۲=۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m+۳=۱\Rightarrow m=-۲\\ m+۳=-۱\Rightarrow m=-۴\end{cases}$$

(هندسه ۳: بردارها؛ صفحهٔ ۸۱)

۲۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(۱,۰,-۱)-(-۱,۲,۰)=(۲,-۲,-۱)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(۰,-۱,۱)-(-۱,۲,۰)=(۱,-۳,۱)$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{۱}{۲}|(۲,-۲,-۱)\times(۱,-۳,۱)|$$

$$=\frac{۱}{۲}|(-۵,-۳,-۴)|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

(هندسه ۳: بردارها؛ صفحه‌های ۸۱ تا ۸۴)

۲۴- **گزینهٔ «۴»** *(فرزانه خاکپاش)*

برای سه بردار یکهٔ $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ داریم:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\ ,\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ ,\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

بنابراین حاصل عبارت داده شده برابر است با:

$$\vec{i}.(\vec{k}\times\vec{j})+\vec{j}.(\vec{i}\times\vec{k})+\vec{k}.(\vec{j}\times\vec{i})$$

$$=\vec{i}(-\vec{i})+\vec{j}(-\vec{j})+\vec{k}(-\vec{k})$$

$$=-|\vec{i}|^۲-|\vec{j}|^۲-|\vec{k}|^۲=-۱-۱-۱=-۳$$

(هندسه ۳: بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۴)

۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*

اگر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ هم‌اندازه باشند، آن‌گاه $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ عمود است، یعنی ضرب داخلی دو بردار برابر صفر است و در نتیجه داریم:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲\Rightarrow ۶۴=۸+|\vec{b}|^۲$$

$$\Rightarrow|\vec{b}|^۲=۵۶\Rightarrow|\vec{b}|=۲\sqrt{۱۴}$$

در این حالت متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$، یک مستطیل است و مساحت آن برابر است با:

$$S=|\vec{a}||\vec{b}|=۲\sqrt{۲}\times۲\sqrt{۱۴}=۴\sqrt{۲۸}=۸\sqrt{۷}$$

(هندسه ۳: بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۴)

۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

اندازه‌های سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر یکدیگر است، پس سه بردار یک مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته‌اند. ابتدای هر بردار بر انتهای بردار دیگر منطبق است، پس زاویهٔ بین هر دو بردار، برابر $۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$ است. با توجه به این توضیحات داریم:

$$\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}=\vec{b}.\vec{c}$$

$$\vec{a}.\vec{b}+۲\vec{a}.\vec{c}-\vec{b}.\vec{c}=\vec{a}.\vec{b}+۲\vec{a}.\vec{b}-\vec{a}.\vec{b}=۲\vec{a}.\vec{b}$$

$$=۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos۱۲۰^\circ=۲\times۳\times۳\times(-\frac{۱}{۲})=-۹$$

(هندسه ۳: بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۲۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}\vec{a}=(۱,۲,۱)\\ \vec{b}=(۱,-۱,۳)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=(۷,-۲,-۳)$$

بردار $\vec{c}$ در صورتی در صفحهٔ گذرنده از دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ قرار دارد که حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر صفر باشد، پس داریم:

$$\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۷ & -۲ & -۳\\ m & ۰ & n\end{vmatrix}=۰\Rightarrow(-۲n-۶m+۰)-(-۲m+۰+۱۴n)=۰$$

$$\Rightarrow -۴m-۱۶n=۰\Rightarrow ۴m=-۱۶n\Rightarrow \frac{m}{n}=-\frac{۱۶}{۴}=-۴$$

(هندسه ۳: بردارها؛ صفحه‌های ۸۳ و ۸۴)

۲۸- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر صفحهٔ شامل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است، پس بر هر بردار دیگر موجود در این صفحه از جملهٔ $\vec{a}+\vec{b}$ نیز عمود خواهد بود، یعنی $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})=۰$ است.

$$|\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}|^۲=|(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{b})|^۲$$

$$=|\vec{a}+\vec{b}|^۲+|\vec{a}\times\vec{b}|^۲+۲(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$=(۲^۲+۳^۲+۱^۲)+۳۵+۰=۴۹\Rightarrow|\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}|=۷$$

(هندسه ۳: بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۴)

۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است، پس بر هر بردار موجود در صفحهٔ این دو بردار از جمله بردار $\vec{a}-\vec{b}$ نیز عمود خواهد بود. بنابراین داریم:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲\vec{a}.\vec{b}$$

$$=۲^۲+(\sqrt{۲})^۲-۲\times۲\times\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$=۴+۲-۴=۲\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{۲}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin۴۵^\circ=۲\times\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲$$

$$|(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{b})|=|\vec{a}-\vec{b}||\vec{a}\times\vec{b}|\sin۹۰^\circ$$

$$=\sqrt{۲}\times۲\times۱=۲\sqrt{۲}$$

(هندسه ۳: بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۴)

۳۰- **گزینهٔ «۴»** *(احمدرضا فلاح)*

فرض کنید $\vec{b}'$ تصویر قائم بردار $\vec{b}$ روی بردار $\vec{a}$ باشد، در این صورت داریم:

$$|\vec{b}'|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|}\Rightarrow ۲=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{۳}\Rightarrow|\vec{a}.\vec{b}|=۶$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^۲+(\vec{a}.\vec{b})^۲=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^۲+۳۶=۹\times۱۶$$

$$\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^۲=۱۴۴-۳۶=۱۰۸\Rightarrow|a\times b|=۶\sqrt{۳}$$

اگر مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده روی بردارهای $۲\vec{a}+۳\vec{b}$ و $۳\vec{a}-۲\vec{b}$، برابر S باشد، آن‌گاه داریم:

$$S=|(۲\vec{a}+۳\vec{b})\times(۳\vec{a}-۲\vec{b})|$$

$$=|۶\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{۰}}-۴\vec{a}\times\vec{b}+۹\vec{b}\times\vec{a}-۶\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{۰}}|$$

$$=|-۴\vec{a}\times\vec{b}-۹\vec{a}\times\vec{b}|=|-۱۳\vec{a}\times\vec{b}|=۱۳|\vec{a}\times\vec{b}|$$

$$=۱۳\times۶\sqrt{۳}=۷۸\sqrt{۳}$$

(هندسه ۳: بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۴)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ریاضیات گسسته

۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(محسن بهرام‌پور)*

شرط گفته بیان می‌کند هر عضو از مجموعه B، نظیر عضوی از مجموعه A است. به عبارتی توابع پوشا از مجموعه ۶ عضوی به مجموعه ۳ عضوی را باید به دست آوریم:

$$۳^n-(۳\times۲^n-۳)=۳^۶-(۳\times۲^۶-۳)$$
$$=۷۲۹-۱۸۹=۵۴۰$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

۳۲- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

با توجه به شرایط سؤال، کافی است برای هر عضو دامنه (A) حق انتخاب در نظر بگیریم:

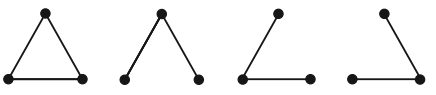
$$\text{تعداد انتخاب}: \frac{۱}{۱}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۳}{۳}\times\frac{۲}{۴}=۱۸$$
$$\text{اعضا}:$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحهٔ ۷۸)

۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(محسن بهرام‌پور)*

ابتدا روستایی که قرار است تنها بماند را انتخاب می‌کنیم. سپس در هر حالت می‌توان ۴ طراحی زیر برای جاده‌ها را انجام داد که ۳ روستای دیگر تنها نمانند.

$$\binom{۴}{۱}\times۴=۱۶$$



(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحهٔ ۷۶)

۳۴- **گزینهٔ «۴»** *(محسن بهرام‌پور)*

با توجه به اطلاعات سؤال، خواهیم داشت:

$$|A'\cap B'\cap C'|=|S|-|A\cup B\cup C|$$
$$=|S|-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|$$
$$-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$$
$$=۹\times۹\times۸\times۷-(۳\times۸\times۸\times۷\times۱$$
$$-۳\times۷\times۷\times۱\times۱+۶\times۱\times۱\times۱)$$
$$=۴۵۳۶-۱۳۴۴+۱۴۷-۶=۳۳۳۳$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۵)

۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

باید تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۵ عضوی را بررسی کنیم که شرایط زیر را داشته باشیم:

$$f: A=\{۱,۲,۳,۴\}\to B=\{a,b,c,d,e\}$$
$$f(۱)\neq a$$
$$f(۲)\neq c$$

تعداد توابع یک به یک $-((f(۱)=a\cup f(۲)=c))$

$$=۵\times۴\times۳\times۲-(۴\times۳\times۲+۴\times۳\times۲-۳\times۲)$$
$$=۱۲۰-۴۲=۷۸$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحهٔ ۷۸)

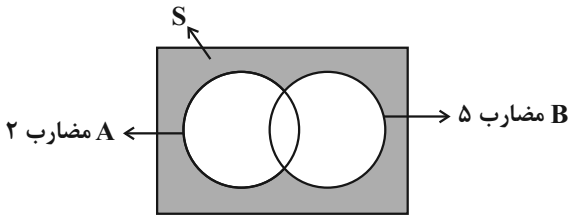
۳۶- **گزینهٔ «۴»** *(محمد صحت‌کار)*

مجموعه مرجع (مجموعه S) را اعداد طبیعی مضرب ۷ نابیشتر از ۱۴۰۰ در نظر بگیریم. در این صورت خواهیم داشت:

تعداد اعداد مطلوب $=|A'\cap B'|=|(A\cup B)'|=|S|-|A\cup B|$

$$=\left[\frac{۱۴۰۰}{۷}\right]-\left(\left[\frac{۱۴۰۰}{۱۴}\right]+\left[\frac{۱۴۰۰}{۳۵}\right]-\left[\frac{۱۴۰۰}{۷۰}\right]\right)$$
$$=۲۰۰-(۱۰۰+۴۰-۲۰)=۲۰۰-۱۲۰=۸۰$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۵)

۳۷- **گزینهٔ «۲»** (احمدرضا فلاح)

تعداد کل مسابقات مختلف برگزار شده در این مجموعه، برابر $\binom{۲۱}{۲} = ۲۱۰$ می‌باشد. بنابراین در ۲۱۰ روز بازیها برگزار شده و مسابقه تکراری نداریم ولی اگر یک روز دیگر مسابقات ادامه پیدا کند، دو نفر در میان آن‌ها وجود دارد که طبق اصل لانه کبوتری حداقل دوبار با هم مسابقه داده باشند.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۳۸- **گزینهٔ «۱»** (احمدرضا فلاح)

اعضای مجموعه A را دو تا دو تا چنان کنار هم در یک خانه قرار می‌دهیم که مجموع آن‌ها برابر ۳۱ شود:

$$(۱,۳۰)(۲,۲۹)(۳,۲۸)\ldots(۱۵,۱۶),۳۱,۳۲,۳۳,۳۴,۳۵$$

از هر زیرمجموعهٔ دوتایی، یک عدد به همراه تمام اعدادی که در زیرمجموعه‌های دوتایی قرار نمی‌گیرند را باید انتخاب کنیم. حال با انتخاب عدد بعدی از مجموعهٔ A، حتماً دو عدد در میان اعداد انتخابی وجود دارد که مجموع آن‌ها برابر ۳۱ است. بنابراین حداقل تعداد انتخابی برابر است با:

$$۱۵+۵+۱=۲۱$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۳۹- **گزینهٔ «۲»** (محمد صحت‌کار)

در هر دو عدد متوالی یکی زوج و دیگری فرد است. پس مجموعهٔ A را به دو مجموعهٔ اعداد زوج و اعداد فرد افراز می‌کنیم. برای به دست آوردن حداکثر مقدار n، باید تمام اعداد زوج (یا اعداد فرد) و حداقل یک عضو از مجموعهٔ دیگر انتخاب شود. اگر با انتخاب ۲۸ عدد این اتفاق رخ می‌دهد. بنابراین تعداد اعداد زوج (یا اعداد فرد) باید $۲۸-۱=۲۷$ عدد باشد.

اگر n عددی فرد باشد تعداد اعداد زوج و فرد در مجموعهٔ A با هم برابر است و خواهیم داشت:

$$\text{تعداد اعداد زوج (یا فرد)} = \frac{n-۱۰۰+۱}{۲} = ۲۷$$

$$\Rightarrow n-۱۰۰+۱=۵۴ \Rightarrow n=۱۵۳$$

اگر n عددی زوج باشد تعداد اعداد زوج یک واحد بیشتر از تعداد اعداد فرد است و خواهیم داشت:

$$\text{تعداد اعداد زوج} = \frac{(n-۱۰۰+۱)-۱}{۲}+۱=۲۷$$

$$\Rightarrow \frac{n-۱۰۰}{۲}=۲۶ \Rightarrow n-۱۰۰=۵۲ \Rightarrow n=۱۵۲$$

پس n می‌تواند ۱۵۲ یا ۱۵۳ باشد. بنابراین گزینهٔ «۲» پاسخ درست است.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۴۰- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین ابومحبوب)

تعداد کدهای تولیدی توسط این دستگاه برابر است با:

$$\underset{\text{تعداد ارقام}}{۵} \times \underset{\text{تعداد حروف}}{۴} \times \underset{\text{تعداد نمادها}}{۳} \times \underset{\text{جایگشت}}{۳!} = ۳۶۰$$

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری برای این که حداقل ۳ نفر دارای کد یکسان باشند، حداقل تعداد حاضرین در سالن باید برابر $۲\times۳۶۰+۱=۷۲۱$ باشد.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۲

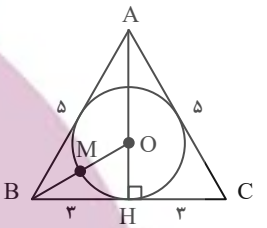
۴۱- **گزینهٔ «۴»** *(هانیه اتفاقی)*

ابتدا ارتفاع AH را در این مثلث رسم می‌کنیم.

$$\overset{\Delta}{ABH}: AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۱۶$$
$$\Rightarrow AH = ۴$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ = ۱۲$$

$$P_{ABC} = \frac{AB + AC + BC}{۲} = \frac{۵ + ۵ + ۶}{۲} = ۸$$



بنابراین شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC برابر است با:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{۱۲}{۸} = \frac{۳}{۲}$$

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OHB داریم:

$$OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ + ۳^۲ = \frac{۹}{۴} + ۹ = \frac{۴۵}{۴}$$
$$\Rightarrow OB = \frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$$

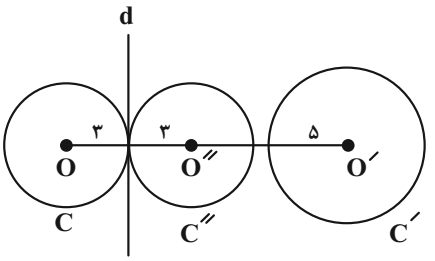
مطابق شکل نقطهٔ M نزدیک‌ترین نقطهٔ دایرهٔ محاطی داخلی مثلث به نقطهٔ B است، پس داریم:

$$BM = OB - OM = \frac{۳\sqrt{۵}}{۲} - \frac{۳}{۲} = \frac{۳(\sqrt{۵} - ۱)}{۲}$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ C و C' را محاسبه می‌کنیم.



طول مماس مشترک داخلی $= \sqrt{OO'^۲ - (R + R')^۲}$

$$\Rightarrow ۱۵ = \sqrt{OO'^۲ - (۳ + ۵)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} ۲۲۵ = OO'^۲ - ۶۴ \Rightarrow OO'^۲ = ۲۸۹$$
$$\Rightarrow OO' = ۱۷$$

مطابق شکل C'' بازتاب C نسبت به خط d است و در نتیجه داریم:

$$O'O'' = OO' - OO'' = ۱۷ - ۶ = ۱۱$$

طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ C' و C'' برابر است با:

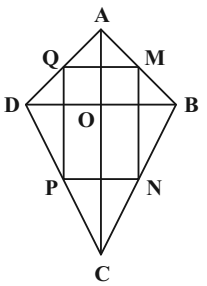
$$\sqrt{O'O''^۲ - (R' - R'')^۲} = \sqrt{۱۱^۲ - (۵ - ۳)^۲}$$
$$= \sqrt{۱۲۱ - ۴} = \sqrt{۱۱۷}$$
$$= \sqrt{۹ \times ۱۳} = ۳\sqrt{۱۳}$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۴۳- **گزینهٔ «۲»** *(علی فتح‌آبادی)*

از به هم وصل کردن متوالی وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی، همواره یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید که طول اضلاع آن نصف طول قطرهای چهارضلعی اصلی است، بنابراین داریم:



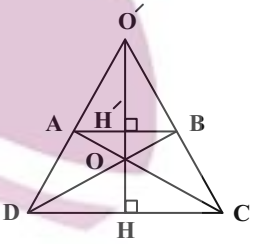
$$\begin{cases} MQ \parallel NP \parallel BD \\ MQ = NP = \frac{BD}{۲} \end{cases}$$

طبق رابطه‌های فوق MN انتقال یافتهٔ QP با بردار $\frac{\overrightarrow{DB}}{۲}$ است. چون مرکز تقارن متوازی‌اضلاع $MNPQ$ لزوماً بر محل تلاقی قطرهای چهارضلعی $ABCD$ منطبق نیست، پس گزینه‌های «۱» و «۳» در حالت کلی درست نیستند.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۵۱)

۴۴- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق شکل نقاط O و O' به‌ترتیب مراکز تجانس‌های معکوس و مستقیمی هستند که قاعدهٔ AB را بر قاعدهٔ CD تصویر می‌کنند.



ابتدا طول ارتفاع ذوزنقه را به دست می‌آوریم:

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}h(AB+CD)\Rightarrow ۳۰=\frac{h}{۲}(۶+۹)\Rightarrow h=۴$$

می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت تشابه است، بنابراین داریم:

$$AB\parallel CD\Rightarrow O'\overset{\Delta}{A}B\sim O'\overset{\Delta}{C}D\Rightarrow \frac{O'H'}{O'H}=\frac{AB}{CD}=\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}}\frac{O'H'}{HH'}=\frac{۲}{۱}\xrightarrow{HH'=۴}O'H'=۸$$

$$\overset{\Delta}{OAB}\sim\overset{\Delta}{OCD}\Rightarrow\frac{OH'}{OH}=\frac{AB}{CD}=\frac{۲}{۳}$$

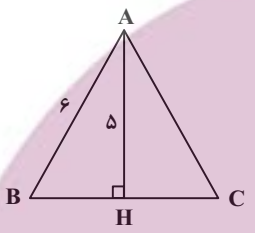
$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}\frac{OH'}{HH'}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{OH'}{۴}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow OH'=\frac{۸}{۵}$$

$$OO'=O'H+OH'=۸+\frac{۸}{۵}=۹/۶$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۵۱)

۴۵- **گزینهٔ «۱»** *(فرزانه خاکپاش)*

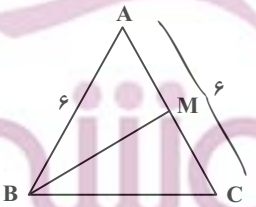
می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، میانهٔ وارد بر قاعده همان ارتفاع وارد بر قاعده است، پس داریم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: BH^۲=AB^۲-AH^۲=۳۶-۲۵=۱۱$$

$$\Rightarrow BH=\sqrt{۱۱}\Rightarrow BC=۲BH=۲\sqrt{۱۱}$$

طبق قضیه میانه‌ها در مثلث ABC داریم:



$$AB^۲+BC^۲=۲BM^۲+\frac{AC^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۶^۲+(۲\sqrt{۱۱})^۲=۲BM^۲+\frac{۶^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳۶+۴۴=۲BM^۲+\frac{۶^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳۶+۴۴=۲BM^۲+۱۸$$

$$\Rightarrow ۲BM^۲=۶۲\Rightarrow BM^۲=۳۱\Rightarrow BM=\sqrt{۳۱}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحهٔ ۶۹)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

آمار و احتمال

۴۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$\bar{x}=\frac{۲(\frac{۱}{۲}x-۴)+۲(x-۱)+۳(x+۲)+۱(۲x)}{۲+۲+۳+۱}=۱۷/۵$$

$$\Rightarrow \frac{۸x-۴}{۸}=۱۷/۵$$

$$\Rightarrow ۸x-۴=۱۴۰$$

$$\Rightarrow ۸x=۱۴۴\Rightarrow x=۱۸$$

با جایگذاری $x=۱۸$ ، داده‌های جدول به صورت زیر است:

$$۵,۵,۱۷,۱۷,۲۰,۲۰,۲۰,۳۶$$

تعداد داده‌ها عددی زوج و میانه برابر میانگین دو دادهٔ وسط است، پس داریم:

$$\text{میانه}=\frac{۱۷+۲۰}{۲}=۱۸/۵$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۴ و ۸۵)

۴۷- **گزینهٔ «۴»** *(فرزانه خاکپاش)*

اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های x_i به‌ترتیب برابر $\bar{x}$ و σ باشد، میانگین و انحراف معیار داده‌های $u_i=۳x_i+۲$ به‌ترتیب برابر $۳\bar{x}+۲$ و ۳σ است، پس داریم:

$$\frac{CV_۲}{CV_۱}=\frac{\frac{۳\sigma}{۳\bar{x}+۲}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{۳\bar{x}}{۳\bar{x}+۲}\Rightarrow ۳\bar{x}+۲=۱۲\bar{x}$$

$$\Rightarrow ۹\bar{x}=۲\Rightarrow \bar{x}=\frac{۲}{۹}$$

$$\bar{u}=۳\bar{x}+۲=\frac{۲}{۳}+۲=\frac{۸}{۳}$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۹۶ و ۹۷)

۴۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

بیشترین مقدار واریانس و انحراف معیار در صورتی پدید می‌آید که انحراف از میانگین داده‌ها حداکثر مقدار ممکن باشد. کافی است دو داده نزدیک‌ترین فاصلهٔ ممکن به یکدیگر را داشته و دادهٔ دیگر بیشترین فاصله را از آن‌ها داشته باشد. با توجه به یکسان بودن رقم یکان این سه عدد، می‌توانیم مقادیر ۱۰، ۸۰ و ۹۰ را انتخاب کنیم که در این صورت داریم:

$$\bar{x}=\frac{۱۰+۸۰+۹۰}{۳}=۶۰$$

$$\sigma^۲=\frac{(۱۰-۶۰)^۲+(۸۰-۶۰)^۲+(۹۰-۶۰)^۲}{۳}$$

$$=\frac{۲۵۰۰+۴۰۰+۹۰۰}{۳}\Rightarrow \sigma^۲=\frac{۳۸۰۰}{۳}$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

۴۹- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با توجه به اختلاف شماره‌های ۲۱ و ۹۳ که برابر ۷۲ است، تعداد اعضای هر گروه یا طبقه باید مقسوم علیه ۷۲ باشد.

از طرفی چون ۶۰۰ دانش‌آموز به گروه‌های n نفری تقسیم شده‌اند، پس n مقسوم‌علیه ۶۰۰ است، یعنی n باید مقسوم‌علیه مشترک ۷۲ و ۶۰۰ باشد.

داریم:

$$(۷۲,۶۰۰)=(۲^۳\times ۳^۲,۲^۳\times ۳\times ۵^۲)=۲^۳\times ۳=۲۴$$

در نتیجه $n\mid ۲۴$ که با توجه به شرط $n>۶$ داریم:

$$n=۸,۱۲,۲۴$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷)

۵۰- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه خاکپاش)*

اگر n و $\bar{x}$ به‌ترتیب اندازه و میانگین نمونه و σ انحراف معیار جامعه باشد، آن‌گاه فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای برآورد میانگین جامعه به صورت $[\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}]$ است. بنابراین داریم:

$$(\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}})-(\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}})=۱۳-۱۱$$

$$\Rightarrow \frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}=۲\Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\sigma=۴}\frac{۴}{\sqrt{n}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sqrt{n}=۸\Rightarrow n=۶۴$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۳

۵۱- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

مدل اتمی بور، نمی‌تواند متفاوت بودن شدت خط‌های طیف گسیلی را توضیح دهد. نارسایی دیگر مدل بور این است که برای اتم‌هایی که بیش از یک الکترون دارند، به‌کار نمی‌رود.

مدل بور توانست پایداری اتم، چگونگی حرکت الکترون به دور هسته و همچنین طیف گسیلی و جذبی اتم هیدروژن را به خوبی توضیح دهد.

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحهٔ ۱۳۱)

۵۲- **گزینهٔ «۲»** *(بهنام رستمی)*

طبق رابطهٔ $E_n = -\frac{E_R}{n^2}$، با افزایش شمارهٔ ترازهای انرژی، انرژی ترازها افزایش یافته اما فاصلهٔ بین ترازهای انرژی کاهش می‌یابد. از طرفی طبق رابطهٔ $r_n = a_0 n^2$، با افزایش شمارهٔ ترازهای انرژی، شعاع مدارها افزایش یافته و همچنین فاصلهٔ بین مدارها نیز بیشتر می‌شود. بنابراین در اتم هیدروژن هنگامی‌که از مدارهای پایین‌تر به مدارهای بالاتر می‌رویم، انرژی ترازهای آن همانند شعاع مدارهای آن افزایش می‌یابد اما فاصلهٔ بین ترازهای انرژی برخلاف فاصلهٔ بین مدارها کاهش می‌یابد.

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۸)

۵۳- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

سومین حالت برانگیخته $(n = 4)$ و حالت پایه $(n = 1)$ است. پس داریم:

$$\Delta E = E_4 - E_1 \xrightarrow{E_n = -\frac{E_R}{n^2}} E = -\frac{E_R}{16} + E_R = \frac{15}{16}E_R$$

برای دومین حالت برانگیخته $n = 3$ و اولین حالت برانگیخته $n = 2$ است.

پس داریم:

$$E' = -\frac{E_R}{9} + \frac{E_R}{4} = \frac{5}{36}E_R$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{E}{E'} = \frac{\frac{15}{16}E_R}{\frac{5}{36}E_R} = \frac{27}{4}$$

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۸)

۵۴- **گزینهٔ «۴»** *(بینا فورشید)*

می‌دانیم شعاع مدارهای اتم هیدروژن از رابطهٔ $r_n = a_0 n^2$ و انرژی الکترون در هر مدار از رابطهٔ $E_n = -\frac{E_R}{n^2}$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} \Rightarrow -3/4 = -\frac{13/6}{n^2} \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = 2$$

$$r_n = a_0 n^2 \Rightarrow r = a_0 \times 2^2 \Rightarrow r = 4a_0$$

$$r' = 4r = 4 \times 4a_0 = 16a_0 \Rightarrow \xrightarrow{r_n = a_0 n'^2} n' = 4$$

$$E_4 = -\frac{E_R}{4^2} = -\frac{13/6}{16} = -0/85eV$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta E = -0/85 - (-3/4) = 2/55\,eV$$

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۷)

۵۵- **گزینهٔ «۲»** (علیرضا گونه)

برای محاسبهٔ مقدار انرژی در ترازهای $n=2$ و $n=1$ با استفاده از رابطهٔ $E_n = -\frac{E_R}{n^2}$ می‌توان نوشت:

$$E_1 = -\frac{13/6}{1^2} = -13/6\,eV$$

$$E_2 = -\frac{13/6}{2^2} = -3/4\,eV$$

حال با استفاده از رابطهٔ $E_U - E_L = \frac{hc}{\lambda}$، طول‌موج فوتون گسیلی را محاسبه می‌کنیم:

$$E_2 - E_1 = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow -3/4 - (-13/6) = \frac{1240}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1240}{10/2} \approx 121/5\,nm$$

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۹)

۵۶- **گزینهٔ «۳»** (حسین مفرومی)

برای اختلاف انرژی فوتون گسیل شده در دو حالت مختلف از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta E(n_1 \to n_2) = E_1 - E_2$$

بنابراین به سادگی می‌توان نشان داد:

$$\Delta E(n_1 \to n_2) = \Delta E(n_1 \to n_3) - \Delta E(n_2 \to n_3)$$
$$\Delta E(n_1 \to n_2) = \Delta E(n_1 \to n_3) + \Delta E(n_3 \to n_2)$$

با این توضیحات، عبارت‌های (الف) و (ب) نادرست و عبارت‌های (پ) و (ت) صحیح هستند.

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۹)

۵۷- **گزینهٔ «۱»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

هنگامی‌که الکترون از تراز بالاتر به تراز پایین‌تر رفته باشد، فوتون گسیل می‌شود. انرژی فوتون گسیل شده برابر با اختلاف انرژی دو تراز است. داریم:

$$\Delta E = E_{\text{مبدأ}} - E_{\text{مقصد}} = E_3 - E_2 = \frac{-E_R}{3^2} - \left(\frac{-E_R}{2^2}\right)$$

$$\xrightarrow[E_R = 13/6\,eV]{\Delta E = hf} hf = 13/6 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \Rightarrow hf = \frac{17}{9}\,eV$$

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۹)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۸- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا گونه)*

برای گسیل القایی، انرژی فوتون ورودی باید دقیقاً با اختلاف انرژی‌های دو تراز یعنی $E_U - E_L$ یکسان باشد. همچنین دقت کنید در گسیل القایی یک فوتون وارد و دو فوتون خارج می‌شود. $E_U - E_L = ۳eV$

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۳۲ و ۱۳۳)

۵۹- **گزینهٔ «۲»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

ویژگی‌های هستهٔ اتم را تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های هسته تعیین می‌کند و خواص شیمیایی مربوط به تعداد پروتون‌های هسته است، به همین دلیل است که ایزوتوپ‌های یک عنصر خواص شیمیایی یکسانی دارند ولی خواص هسته‌ای آن‌ها متفاوت است.

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحهٔ ۱۳۹)

۶۰- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا گونه)*

اندازهٔ نیروی گرانشی بین نوکلئون‌های هسته ضعیف‌تر از اندازهٔ نیروی الکترواستاتیکی رانشی بین پروتون‌ها است.

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحهٔ ۱۴۰)

۶۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

چون شیب خط $Z = N$ برابر با یک است، خطی که بر آن عمود باشد دارای شیب منفی یک است.

شیب‌خط $\frac{\Delta Z}{\Delta N} = -۱$

$$\Rightarrow \frac{Z_۲ - Z_۱}{N_۲ - N_۱} = -۱ \Rightarrow Z_۲ - Z_۱ = -N_۲ + N_۱$$

$$\Rightarrow Z_۲ + N_۲ = Z_۱ + N_۱ \Rightarrow A_۲ = A_۱$$

بنابراین عناصری که روی این خط قرار داشته باشند دارای عدد جرمی برابر هستند.

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۱)

۶۲- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا گونه)*

در واپاشی β^-، یکی از نوترون‌های درون هسته به یک پروتون و الکترون تبدیل می‌شود $^{A}_{Z}X_N \rightarrow {}^{A}_{Z+۱}Y_{N-۱} + {}^{۰}_{-۱}\beta^-$

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۵)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۶۳- **گزینهٔ «۴»** *(بهنام رستمی)*

با توجه به قاعدهٔ دست راست پرتوی (۱) پرتوی بتای منفی و پرتوی (۲) پرتوی گاما است. بنابراین عبارت (ب) درست است.

بررسی سایر جملات:

عبارت (الف) نادرست است زیرا با توجه به تصویر، میزان انحراف پرتوی (۱) بیشتر از پرتوی (۳) است.

عبارت‌های (پ) و (ت) نادرست هستند، زیرا در تمام فرایندهای واپاشی پرتوزا مشاهده شده است که تعداد کل نوکلئون‌ها در طی فرایند واپاشی هسته‌ها پایسته است؛ یعنی تعداد نوکلئون‌های پیش از فرایند با تعداد نوکلئون‌های پس از فرایند مساوی است.

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۵)

۶۴- **گزینهٔ «۱»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

$$\begin{matrix}{}^{A}_{Z}Y_N \rightarrow {}^{196}_{79}X_{117} + 3({}^{4}_{2}\alpha) + 1({}^{0}_{-1}\beta)\\ \Rightarrow \begin{cases} A = 196 + (3\times 4) + 0 = 208 \\ Z = 79 + (3\times 2) + 1 = 86 \end{cases}\\ A = Z + N \Rightarrow 208 = 86 + N \Rightarrow N = 122\end{matrix}$$

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۵)

۶۵- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود قره‌خانی)*

نیمه‌عمر مدت زمانی است تا تعداد هسته‌های فعال یک عنصر رادیواکتیو نصف شود بنابراین هر چه نیمه‌عمر عنصری کوتاه‌تر باشد، تعداد هسته‌های فعال آن سریع‌تر کاهش خواهد یافت و در نتیجه شیب نمودار تندتر می‌شود.

بنابراین داریم: $t_C > t_A > t_B$

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۶۶- **گزینهٔ «۲»** *(مسعود قره‌خانی)*

مقدار ۶/۲۵ درصد معادل $\frac{1}{16}$ **است. یعنی می‌توان نوشت:**

$$\frac{N}{N_0} = (\frac{1}{2})^n \Rightarrow \frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^n \Rightarrow n = 4$$

یعنی در ۳۶ روز ۴ نیمه‌عمر گذشته است و داریم:

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 4 = \frac{36}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = 9 \text{ روز}$$

پس از ۱۸ روز دو نیمه‌عمر دیگر می‌گذرد و داریم:

$$\frac{N}{N_0} = (\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64} \simeq 1/5\%$$

(فیزیک ۳ - آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۷- **گزینهٔ «۱»** *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

پس از گذشت ۸۰ سال، $\frac{۳۱}{۳۲}m$ واپاشی می‌شود و $\frac{۱}{۳۲}m$ از آن فعال می‌ماند.

$$m \to \frac{m}{۲} \to \frac{m}{۴} \to \frac{m}{۸} \to \frac{m}{۱۶} \to \frac{m}{۳۲}$$

این مدت معادل ۵ نیم‌عمر است پس: $\frac{۵T_۱}{۲} = ۸۰ \Rightarrow \frac{T_۱}{۲} = ۱۶$ **سال**

طبق نمودار بالا می‌دانیم پس از گذشت ۴ نیمه‌عمر یعنی ۶۴ سال، $\frac{۱}{۱۶}$ جرم فعال اولیه از این عنصر فعال می‌ماند.

(فیزیک ۳ – آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۶۸- **گزینهٔ «۴»** *(محسن قندهاری)*

طبق رابطهٔ $N = \frac{N_۰}{۲^n}$، که در آن n تعداد نیمه‌عمر است، برای هر دو عنصر که تعداد نیمه‌عمر برابری را سپری کرده‌اند، درصد باقی‌مانده برابر است.

اما در قسمت دوم، چون نیمه‌عمر A بیشتر از نیمه‌عمر B است، در نتیجه پس از گذشت زمانی برابر، عنصر B درصد بیشتری از خود را واپاشی می‌کند.

(فیزیک ۳ – آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۶۹- **گزینهٔ «۳»** *(بهنام رستمی)*

در راکتورهای هسته‌ای، از موادی مانند آب معمولی، آب سنگین و گرافیت به‌عنوان کندساز نوترون‌ها و از موادی مانند کادمیم و بور برای تنظیم آهنگ واکنش شکافت یعنی کنترل تعداد نوترون‌های موجود برای به‌وجود آوردن شکافت، استفاده می‌شود.

(فیزیک ۳ – آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۲)

۷۰- **گزینهٔ «۱»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

از شکافت اورانیوم ۲۳۵، که با یک نوترون کند آغاز می‌شود، مقدار زیادی انرژی آزاد می‌شود. اصل پایستگی جرم به تنهایی برقرار نیست، جرم واکنش‌دهنده‌ها بیشتر از جرم محصولات واکنش است که اختلاف جرم به‌صورت انرژی آزاد می‌شود که بخشی از این انرژی، به‌صورت انرژی جنبشی محصولات واکنش خواهد بود.

(فیزیک ۳ – آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۲)

فیزیک ۲

۷۱- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

وقتی به جسمی n الکترون بدهیم، بار الکتریکی آن به اندازهٔ $\Delta q = -ne$ تغییر می‌کند. بنابراین چون بار اولیهٔ جسم $q_1 = +q$ است، با دادن الکترون به آن داریم:

$$q_2 = q_1 + \Delta q \xrightarrow{\Delta q = -ne} q_2 = q_1 - ne$$

از طرف دیگر، چون اندازهٔ بار الکتریکی $\frac{1}{4}$ مقدار اولیه و نوع بار آن مخالف بار اولیه‌اش است، می‌توان نوشت:

$$q_2 = -\frac{1}{4}q_1 \xrightarrow{q_2 = q_1 - ne} -\frac{1}{4}q_1 = q_1 - ne$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}q_1 = ne \xrightarrow[e=1/6\times10^{-19}C]{n=5\times10^{14}} \frac{5}{4}q_1 = 5\times10^{14}\times1/6\times10^{-19}$$

$$\Rightarrow q_1 = 6/4\times10^{-5}C = 64\mu C$$

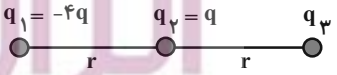
(فیزیک ۲ - الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۲ تا ۵)

۷۲- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

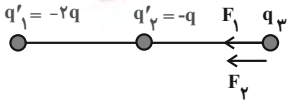
چون بار q_3 در حالت تعادل قرار دارد، پس بارهای q_1 و q_2 غیرهم‌نامند. از طرفی بزرگی میدان‌های حاصل از بارهای q_1 و q_2 در محل بار q_3 برابر است. داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow k\frac{|q_1|}{4r^2} = k\frac{|q_2|}{r^2} \Rightarrow |q_1| = 4|q_2|$$

اگر $q_2 = q$ باشد، داریم: $q_1 = -4q$



اگر ۵۰ درصد از بار q_1 یعنی مقدار $(-2q)$ را به بار q_2 منتقل کنیم، آرایش جدید بارها مطابق شکل زیر خواهد شد:



اکنون اندازهٔ نیروی خالص وارد بر بار q_3 و اندازهٔ نیروی بین دو بار q_2 و q_3 را می‌یابیم. چون بارهای q'_1 و q'_2 هم‌علامت هستند، بنابراین جهت نیروهای وارد بر بار q_3 از طرف این دو بار یکسان خواهد بود و داریم:

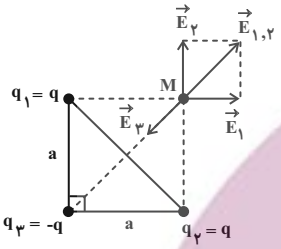
$$\begin{cases} F_1 = k\frac{|-2q||q_3|}{4r^2} = \frac{1}{2}k\frac{|q||q_3|}{r^2} \\ F_2 = k\frac{|-q||q_3|}{r^2} = k\frac{|q||q_3|}{r^2} \end{cases}$$

$$\frac{(F_{net})_3}{F_2} = \frac{F_1 + F_2}{F_2} = \frac{\frac{3}{2}k\frac{|q||q_3|}{r^2}}{k\frac{|q||q_3|}{r^2}} = \frac{3}{2}$$

(فیزیک ۲ - الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۵ تا ۱۷)

۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(بابک اسلامی)*

با استفاده از رابطهٔ بزرگی میدان الکتریکی ناشی از یک ذرهٔ باردار و با توجه به این‌که اندازهٔ بارهای q_1 و q_2 و همچنین فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ M یکسان است، می‌توان نوشت:



$$E_1 = E_2 = k\frac{|q|}{a^2}$$

$$E_{1,2} = k\frac{|q|}{a^2}\sqrt{2}$$

$$E_3 = k\frac{|q|}{2a^2}$$

از طرفی چون علامت بار q_3 منفی است، بنابراین با توجه به جهت میدان‌های $\vec{E}_{1,2}$ و $\vec{E}_3$ داریم:

$$E_M = E_{1,2} - E_3 = \frac{k|q|}{a^2}\sqrt{2} - k\frac{|q|}{2a^2} = k\frac{|q|}{a^2}(\sqrt{2} - \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow E_M = (\frac{2\sqrt{2}-1}{2})k\frac{|q|}{a^2} = (\frac{2\sqrt{2}-1}{2})E_1$$

(فیزیک ۲ - الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

۷۴- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا گونه)*

با توجه به این‌که اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B یعنی $(V_A - V_B)$ به اندازهٔ ۲۰ ولت بیشتر از اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطهٔ B و C یعنی $(V_C - V_B)$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$V_A - V_B = V_C - V_B + 20 \Rightarrow V_A - V_C = 20V$$

حال با استفاده از رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ می‌توانیم تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار $q = -5\mu C$ در حرکت از نقطهٔ A تا نقطهٔ C را به‌دست آوریم.

$$V_C - V_A = \frac{\Delta U}{q} \xrightarrow[q=-۵\times۱۰^{-۶}C]{V_C-V_A=-۲۰V} -۲۰ = \frac{\Delta U}{-۵\times۱۰^{-۶}}$$

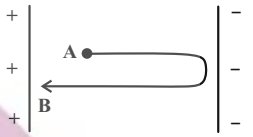
$$\Rightarrow \Delta U = ۱۰^{-۴}J = ۰/۱mJ$$

بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی بار q در طی حرکت از نقطهٔ A تا نقطهٔ C به اندازهٔ ۰/۱ میلی‌ژول افزایش می‌یابد.

(فیزیک ۲ – الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

۷۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیراحمد میرسعید)*

قطعاً علامت بار q منفی بوده است تا پس از پرتاب به صفحهٔ مثبت رسیده و برخورد کرده است. چون اتلاف انرژی نداریم، می‌توان نوشت:



$$\Delta U + \Delta K = ۰ \Rightarrow \Delta U + (K_B - K_A) = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta U = -\frac{۱}{۲}m(v_B^۲ - v_A^۲) = -\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۱۰}\times(۳۶-۱۶)$$

$$\Rightarrow \Delta U = -۲J$$

$$\Delta U = -|q|Ed\cos\theta \Rightarrow -|q|\times۱۰^{۷}\times۴\times۱۰^{-۲}\times\cos۰ = -۲$$

$$\Rightarrow |q| = ۵\times۱۰^{-۶}C \xrightarrow{q<۰} q = -۵\mu C$$

(فیزیک ۲ – الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۳)

۷۶- **گزینهٔ «۳»** *(حسین مفروجی)*

چون خازن به مولد متصل است، ولتاژ خازن ثابت است. ابتدا تغییر ظرفیت خازن را مشخص می‌کنیم:

$$C = \kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{\kappa_۲}{\kappa_۱}\times\frac{d_۱}{d_۲} = \frac{۲}{۱}\times\frac{d}{\frac{d}{۲}} \Rightarrow \frac{C_۲}{C_۱} = ۴$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$U = \frac{۱}{۲}CV^۲ \xrightarrow{V_۱=V_۲} \frac{U_۲}{U_۱} = \frac{C_۲}{C_۱} = ۴$$

$$Q = CV \xrightarrow{V_۱=V_۲} \frac{Q_۲}{Q_۱} = \frac{C_۲}{C_۱} = ۴$$

(فیزیک ۲ – الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۴۰)

۷۷- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی واثقی)*

ولت‌سنج به معادل شاخهٔ بالا به‌صورت موازی متصل شده است. بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها با یکدیگر برابر است و داریم:

$$I_V R_V = I_A(R_A + R)$$

$$\Rightarrow I_V\times۱۰^{۴} = ۰/۲(۱+۱۱۹) \Rightarrow I_V = ۲/۴\times۱۰^{-۳}A$$

$$n = \frac{q}{e} = \frac{I_V t}{e} = \frac{۲/۴\times۱۰^{-۳}\times۶۰}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۹\times۱۰^{۱۷}$$

(فیزیک ۲: جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۷۸- **گزینهٔ «۴»** *(بابک اسلامی)*

با استفاده از رابطهٔ بین مقاومت الکتریکی و تغییرات دما، داریم:

$$R_۲ = R_۱(۱+\alpha\Delta\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{R_۲}{R_۱} = ۱ + ۴/۵\times۱۰^{-۳}\times(۲۷۹۳-۲۹۳) \Rightarrow \frac{R_۲}{R_۱} = ۱۲/۲۵$$

(فیزیک ۲: جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۷۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیراحمد میرسعید)*

با توجه به متن کتاب درسی، فقط گزینهٔ «۲» صحیح است.

(فیزیک ۲: جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۸۰- **گزینهٔ «۱»** *(حمید زرین‌کفش)*

مقاومت استوانهٔ با قطر مقطع d را $R_۱$ و مقاومت استوانهٔ با قطر مقطع $۲d$ را $R_۲$ می‌نامیم. با توجه به رابطهٔ بین مقاومت و ویژگی‌های ساختمانی آن، داریم:

$$R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_۲}{R_۱} = \frac{\rho_۲}{\rho_۱}\times\frac{L_۲}{L_۱}\times\frac{A_۱}{A_۲}$$

$$\xrightarrow[A\propto d^۲]{\rho_۱=\rho_۲} \frac{R_۲}{R_۱} = \frac{L_۲}{L_۱}\times\left(\frac{d_۱}{d_۲}\right)^۲ \Rightarrow \frac{R_۲}{۴} = \frac{L}{۱/۵L}\times\left(\frac{d}{۲d}\right)^۲$$

$$\Rightarrow R_۲ = \frac{۲}{۳}\Omega$$

چون $R_۱$ و $R_۲$ موازی‌اند، داریم:

$$\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} \Rightarrow R_{eq} = \frac{۴}{۷}\Omega$$

برای جریان عبوری از باتری داریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} = \frac{۷}{\frac{۴}{۷}+\frac{۳}{۷}} = ۷A$$

و در نهایت توان خروجی باتری برابر است با:

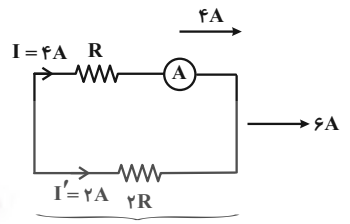
$$P_{\text{خروجی}} = \varepsilon I - rI^۲ = ۷\times۷ - \frac{۳}{۷}\times۷^۲ = ۲۸W$$

(فیزیک ۲: جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۱، ۵۲ و ۶۱ تا ۷۷)

توشه ای برای موفقیت

۸۱- **گزینهٔ «۱»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

اگر هر دو کلید بسته باشند، مقاومت R در سمت چپ اتصال کوتاه شده و داریم:

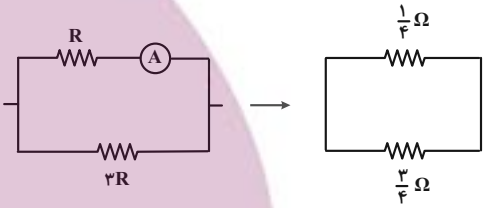


جریان این شاخه نصف شاخهٔ بالاست

$$\xrightarrow{I_{کل}=۶A} I_{کل}=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} \Rightarrow ۶=\frac{۷}{R_{eq}+۱}$$

$$\Rightarrow R_{eq}=\frac{۱}{۶}\Omega \Rightarrow \frac{۱}{۶}=\frac{R\times ۲R}{R+۲R} \Rightarrow R=\frac{۱}{۴}\Omega$$

اگر فقط کلید $k_۲$ را باز کنیم، مطابق شکل زیر داریم:



$$R'_{eq}=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}}=\frac{۳}{۱۶}\Omega$$

$$I'_{کل}=\frac{\varepsilon}{R'_{eq}+r}=\frac{۷}{\frac{۳}{۱۶}+۱} \Rightarrow I'_{کل}=\frac{۱۱۲}{۱۹}A$$

جریان گذرنده از آمپرسنج در این حالت برابر است با:

$$I'=\frac{۳R}{R+۳R}I'_{کل}=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱۱۲}{۱۹} \Rightarrow I'=\frac{۸۴}{۱۹}A$$

بنابراین درصد تغییرات جریان عبوری از آمپرسنج برابر است با:

$$\frac{I'-I}{I}\times ۱۰۰=\frac{\frac{۸۴}{۱۹}-۴}{۴}\times ۱۰۰\simeq ۱۰٪$$

(فیزیک ۲: جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷)

۸۲- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

ابتدا به کمک قانون اهم، مقاومت مجهول $R_۲$ را می‌یابیم. دقت کنید جریان عبوری از آمپرسنج از تک‌تک مقاومت‌ها می‌گذرد. بنابراین داریم:

$$R_۲=\frac{V}{I}=\frac{۲۰}{۴}=۵\Omega$$

چون مقاومت‌ها متوالی هستند، مقاومت معادل مدار را با جمع کردن کلیهٔ مقاومت‌ها به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$R_{eq}=R_۱+R_۲+R_۳=۶+۵+۳=۱۴\Omega$$

برای محاسبهٔ توان مصرفی مقاومت $R_۳$ داریم:

$$P_۳=R_۳\ I^۲=۳\times ۴^۲=۴۸W$$

(فیزیک ۲: جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷)

۸۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیرامحمد میرسعید)*

الف) صحیح است.

ب) وجود هستهٔ آهنی باعث تقویت میدان مغناطیسی درون سیملولهٔ حامل جریان می‌شود، پس این عبارت نادرست است.

پ) صحیح است.

ت) نادرست است.

(فیزیک ۲: مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۴ و ۹۹ تا ۱۰۳)

۸۴- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا بزرگی نیروهای وارد بر ذرهٔ باردار را از طرف میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی محاسبه می‌کنیم؛ داریم:

$$F_E=|q|E=۱۰\times ۱۰^{-۶}\times ۲\times ۱۰^۴=۰/۲N$$

$$F_B=|q|vB\sin\theta=۱۰\times ۱۰^{-۶}\times ۱/۵\times ۱۰^۵\times ۰/۴=۰/۶N$$

می‌دانیم که در میدان الکتریکی، جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ باردار مثبت، هم‌جهت با خط‌های میدان است، پس نیروی الکتریکی وارد بر ذره برون‌سو است. از طرفی جهت نیروی مغناطیسی با استفاده از قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود که جهت آن نیز برون‌سو است. پس داریم:

$$F_{net}=F_B+F_E=۰/۸N$$ برون‌سو

(فیزیک ۲: مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۹ و ۹۰)

۸۵- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی خلیل‌ارجمندی)*

طبق رابطهٔ اندازهٔ میدان در مرکز پیچه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} B=\frac{\mu_۰NI}{۲R} \\ N=\frac{\theta}{۳۶۰^\circ}=\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}=\frac{۱}{۶} \end{array}\right\} \xrightarrow[I=۳A\ ,\ N=\frac{۱}{۶}\ ,\ R=۱۰cm=۰/۱m]{\mu_۰=۱۲\times ۱۰^{-۷}\frac{T.m}{A}}$$

$$B=\frac{۱۲\times ۱۰^{-۷}\times\frac{۱}{۶}\times ۳}{۲\times ۰/۱}=۳\times ۱۰^{-۶}T=۰/۰۳G$$

طبق قاعدهٔ دست راست، جهت میدان ناشی از جریان پیچه در مرکزش به صورت برون‌سو ⊙ است. اما چون قطعهٔ مسی از مواد دیامغناطیسی است، میدان پیچه در آن سبب القای میدان مغناطیسی خلاف میدان اولیه می‌شود، پس میدان ایجاد شده در قطعه، درون‌سو است ⊗.

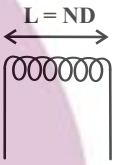
(فیزیک ۲: مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹ و ۱۰۱ تا ۱۰۳)

۸۶- **گزینهٔ «۱»** *(شارمان ویسی)*

اندازهٔ میدان مغناطیسی داخل سیملولهٔ آرمانی از رابطهٔ $B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{L} I$ به‌دست می‌آید. چون حلقه‌های سیملوله در یک ردیف به هم چسبیده‌اند، داریم:

طول سیملوله = تعداد حلقه‌ها × قطر هر حلقه

$$\Rightarrow D \times N = L$$



$$B = \mu_0 \frac{NI}{ND} \Rightarrow B = \mu_0 \frac{I}{D}$$

(فیزیک ۲: مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۱)

۸۷- **گزینهٔ «۲»** *(شارمان ویسی)*

در حالت اول چون سطح حلقه بر خط‌های میدان مغناطیسی عمود است:

$$\theta_1 = 0 \Rightarrow \cos\theta_1 = 1$$

و در حالت دوم خطوط میدان با سطح حلقه زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازند. یعنی:

$$\theta_2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده داریم:

$$|\bar{\varepsilon}| = |-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}| = |-N\frac{AB(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}{\Delta t}|$$

$$\Rightarrow |\bar{\varepsilon}| = |-1 \times \frac{0/1 \times 2 \times (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)}{10^{-3}}| \Rightarrow |\bar{\varepsilon}| = 30V$$

(فیزیک ۲: القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۵)

۸۸- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قره‌فانی)*

عددی که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد $V = \varepsilon - Ir$ است و چون I کاهش یافته، V افزایش یافته است. طبق رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$، افزایش R باعث کاهش I می‌شود، پس دانش‌آموز مقاومت رئوستا را افزایش داده است. با کاهش I میدان مغناطیسی درون سیملولهٔ سمت چپ کاهش پیدا کرده و طبق قانون لنز جریانی که در سیملولهٔ سمت راست القا می‌شود باید با این تغییرات مقابله کند. بنابراین جریان عبوری از مقاومت R' از B به A خواهد بود.

(فیزیک ۲: القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۸)

۸۹- **گزینهٔ «۲»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

می‌دانیم ضریب القاوری سیملوله با مربع تعداد دورهای آن متناسب است.

$$L \propto N^2$$

و انرژی ذخیره شده در سیملوله نیز با ضریب القاوری آن متناسب است.

$$U \propto L$$

در نتیجه:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{L_2}{L_1} = (\frac{N_2}{N_1})^2 = (2)^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = 4$$

(فیزیک ۲: القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۲)

۹۰- **گزینهٔ «۱»** *(بهنام رستمی)*

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{20} \Rightarrow T = \frac{2}{10}s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2}{10}} = 10\pi \frac{rad}{s}$$

معادلهٔ جریان:

$$I = I_{max} \sin\omega t \Rightarrow I = 4\sin(10\pi)t$$

$$\xrightarrow{t=\frac{1}{40}s} I = 4 \times \sin\frac{10\pi}{40} = 4\sin\frac{\pi}{4} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}A$$

$$P = RI^2 = 5 \times (2\sqrt{2})^2 = 40W$$

(فیزیک ۲: القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۳

۹۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

فرمول مولکولی پارازایلن و سیکلوهگزان به‌ترتیب C_8H_{10} و C_6H_{12} می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) درست، اتیلن گلیکول و ترفتالیک اسید در نفت خام وجود نداشته و هرکدام دارای دو پیوند $O-H$ می‌باشند.

۲) درست، اتیل استات (حلال چسب) با فرمول $C_4H_8O_2$ به صورت واکنش زیر تولید می‌شود:

$$C_2H_5OH + CH_3COOH \xrightarrow{\text{کاتالیزگر}} CH_3-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-O-C_2H_5 + H_2O$$

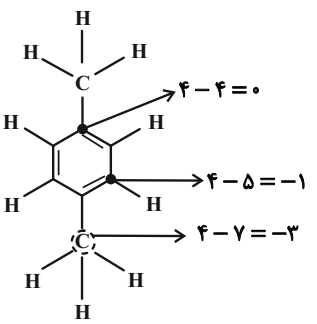
۳) درست، فراورده این واکنش متانول است که می‌توان آن را از چوب نیز تهیه کرد.

(شیمی۳، صفحه‌های ۱۱۲، ۱۱۴، ۱۱۵ و ۱۱۸)

۹۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

عبارت‌های الف و ب و ت نادرست است. بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست، در پارازایلن اتم‌های کربن دارای عدد اکسایش ۱- و ۰ و ۳- هستند. (۳ نوع)



ب) نادرست، در واکنش تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید از محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات به عنوان اکسنده استفاده می‌شود.

پ) درست – مطابق متن کتاب درسی (صفحهٔ ۱۱۹)

ت) نادرست – برای تولید اتیلن گلیکول، از اکسایش اتیلن در حضور محلول آبی و رقیق پتاسیم پرمنگنات استفاده می‌کنند.

(شیمی۳، صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۶ و ۱۱۹)

۹۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

آب + اتیل اتانوآت $\xrightarrow{H_2SO_4}$ اتانوئیک اسید + اتانول

⇒ (اتیل استات) اتیل اتانوآت به عنوان حلال چسب کاربرد دارد.

$$C_2H_5OH + C_2H_4O_2 \xrightarrow[\text{کاتالیزگر}]{H_2SO_4} C_4H_8O_2 + H_2O$$

$$۶mL\ \text{محلول} \times \frac{۱/۲g\ \text{محلول}}{۱mL\ \text{محلول}} \times \frac{۷۵g\ C_2H_4O_2}{۱۰۰g\ \text{محلول}} \times \frac{۱mol\ C_2H_4O_2}{۶۰g\ C_2H_4O_2} \times \frac{۱mol\ C_4H_8O_2}{۱mol\ C_2H_4O_2} \times \frac{۸۸g\ C_4H_8O_2}{۱mol\ C_4H_8O_2}$$

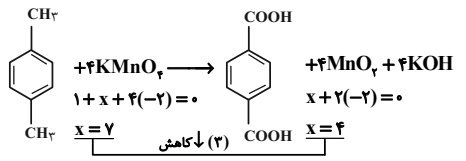
$$\text{مقدار نظری} = ۷/۹۲g$$

$$\%R = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰\% = \frac{۵/۹۴}{۷/۹۲} \times ۱۰۰\% = ۷۵\%$$

(شیمی۳، صفحهٔ ۱۱۲)

۹۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

از معادلهٔ موازنه شده واکنش داریم:



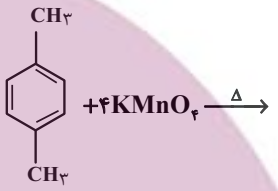
ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

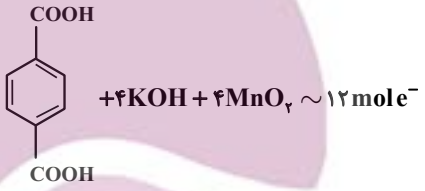
تغییر عدد اکسایش گونه اکسنده ۳ می‌باشد.

$$?\,ml\ \text{محلول} = 8g\,C_8H_6O_4 \times \frac{83}{100} \times \frac{1mol\,C_8H_6O_4}{166g\,C_8H_6O_4} \times \frac{4mol\,KMnO_4}{1mol\,C_8H_6O_4} \times \frac{1L\ \text{محلول}}{0/4mol\,KMnO_4} \times \frac{1000mL}{1L} = 400ml\ \text{محلول}$$

(شیمی۳، صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۶)

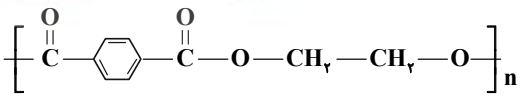
۹۵- **گزینهٔ «۱»** (امیر حاتمیان)





در واکنش تبدیل ۱ مول پارازایلن به ۱ مول ترفتالیک اسید ۱۲ مول الکترون مبادله می‌شود. بنابراین مقدار ترفتالیک اسید به ازای مبادله ۳۶ مول الکترون برابر ۳ مول است:

$$\text{تعداد کل مولکول‌های ترفتالیک اسید} = 3\times6\times10^{23} = 18\times10^{23}$$



$$\text{جرم مولی هر واحد تکرارشونده} = 192$$

$$\text{تعداد مولکول اسید شرکت کنند در هر زنجیر پلیمر} = \frac{18\times10^{23}}{3\times10^{21}}$$

$$= 600 \Rightarrow n = 600$$

$$\text{جرم مولی} -(-C_{10}H_8O_4-)_n = 600\times192 = 115200\,g.mol^{-1}$$

(شیمی۳، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** (کامران جعفری)

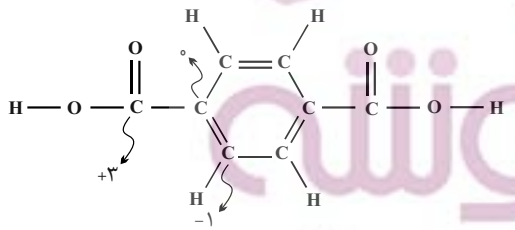
مورد اول- نادرست: مونومرهای آن به طور مستقیم از نفت خام بدست نمی‌آیند.

مورد دوم- نادرست: در تولید آن جهت تبدیل مواد از اکسنده‌ها استفاده می‌گردد.

مورد سوم- درست

مورد چهارم – نادرست: هر واحد تکرارشونده دارای ۴ اکسیژن است که در مجموع ۸ جفت الکترون ناپیوندی دارند.

مورد پنجم – درست: بالاترین عدد اکسایش کربن در آن ۳+ و کمترین ۱- است و اختلاف برابر ۴ است.



(شیمی۳، صفحه‌های ۱۱۴ و ۱۱۵)

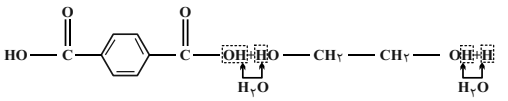
۹۷- **گزینهٔ «۱»** (امیر حاتمیان)

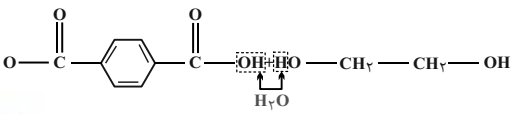
موارد الف و ب و پ نادرست هستند.

بررسی موارد:

الف) شکل درست

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

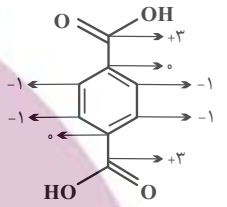




مطابق شکل بالا ۳ مولکول H_2O آزاد می‌شود.

ب) نادرست، پتاسیم پرمنگنات نقش اکسنده را دارد.

پ) نادرست



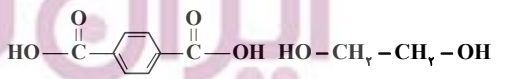
$+2$ = مجموع عددهای اکسایش کربن‌ها

ت) درست است.

(شیمی۳، صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۸)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** *(علی رفیعی)*

مونومرهای تشکیل دهنده PET :



$(C_8H_6O_4)$ $(C_2H_6O_2)$

الف) عناصر هر دو C، H و O می‌باشد.

ب) تعداد هیدروژن هر دو ترکیب یکسان است.

ج) دو ترکیب تعداد اکسیژن نابرابر دارند.

د) فقط ترفتالیک اسید خاصیت آروماتیکی دارد.

(شیمی۳، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۹۹- **گزینهٔ «۳»** *(اکبر هنرمند)*

آ) با وجود غلظت بالای یون پرمنگنات (اکسنده)، باز هم شرایط انجام واکنش تبـدیل پارازایلن به ترفتالیک‌اسید تأمین نمی‌شود، مگر آن‌که دمای مخلوط افزایش یابد.

ب)

$$A(C_2H_4)=\%C=\frac{\text{جرم اتم‌های C}}{\text{جرم } C_2H_4}\times 100=\frac{2\times 12}{28}\times 100\simeq \%85/7$$

$$B(C_8H_{10})=\%C=\frac{\text{جرم اتم‌های C}}{\text{جرم } C_8H_{10}}\times 100=\frac{8\times 12}{106}\times 100\simeq \%90/6$$

روش دوم: چون نسبت $\frac{C}{H}$ در C_8H_{10} نسبت به C_2H_4 بیشتر است، بنابراین درصد جرمی کربن در پارازایلن بیشتر است.

پ) $(I)\ C_2H_6O_2 : x+6(+1)+2(-2)=0 \Rightarrow x=-2$

$(II)\ C_8H_6O_4 : y+6(+1)+4(-2)=0 \Rightarrow y=+2$

ت) $C_2H_6O_2$ شمار پیوندها در $=\frac{\overbrace{(2\times 4)}^{C}+\overbrace{(6\times 1)}^{H}+\overbrace{(2\times 2)}^{O}}{2}=9$

$C_8H_6O_4$ شمار پیوندها در $=\frac{\overbrace{(8\times 4)}^{C}+\overbrace{(6\times 1)}^{H}+\overbrace{(4\times 2)}^{O}}{2}=23$

(شیمی ۳، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۱۰۰- **گزینهٔ «۲»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

بررسی عبارت‌ها:

عبارت‌های (ب) و (ت) درست است.

آ) از واکنش اتن با هیدروژن کلرید، ترکیب کلرواتان به‌دست می‌آید که در افشانه‌های بی‌حس‌کنندهٔ موضعی کاربرد دارد.

ب) از واکنش اتن با آب، اتانول به‌دست می‌آید که نوعی حلال آلی است.

پ) اتیل‌استات حلّال چسب است که از واکنش اتانول و اتانوییک‌اسید تولید می‌شود.

ت) در دما و فشار بالا، از واکنش پلیمری‌شدن اتن، پلی‌اتن تولید می‌شود.

(شیمی ۳، صفحهٔ ۱۱۲)

شیمی ۱

۱۰۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

محاسبهٔ تعداد ذره‌های با بارنسبی (-1) که همان الکترون است در ۰/۲۵ مول گونه N_3^{-7} (آزید):

$$\text{تعداد الکترون در } {}_7N_3^- = 3(7)+1 = 22e^-$$

$$?\,\text{تعداد } \bar{e} = 0/25\,\text{mol}\,N_3^- \times \frac{N_A\,\text{یون}}{1\,\text{mol}\,N_3^-} \times \frac{22\bar{e}}{\text{یک یون}\,N_3^-} = 5/5 N_A \bar{e}$$

محاسبهٔ تعداد اتم‌های اکسیژن در ۴۹ گرم ترکیب H_2SO_4:

$$?\,\text{اتم}\,O = 49g\,H_2SO_4 \times \frac{1\,\text{mol}\,H_2SO_4}{98g\,H_2SO_4} \times \frac{N_A\,\text{مولکول}}{1\,\text{mol}\,H_2SO_4} \times \frac{4\,\text{اتم}\,O}{1\,\text{مولکول}\,H_2SO_4} = 2N_A\,\text{اتم}\,O$$

$$\frac{5/5N_A}{2N_A} = 2/75$$

(شیمی ۱، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۱۰۲- **گزینهٔ «۱»** *(حمید زبحی)*

ابتدا جرم حل شوندهٔ موجود در محلول سیرشده در دمای $15^\circ C$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی آب} = \frac{\text{جرم آب}}{\text{جرم حل‌شونده} + \text{جرم آب}} \times 100$$

$$\Rightarrow 90 = \frac{180}{180+x} \times 100 \Rightarrow x = 20g$$

پس ۴۰ گرم نمک در ته ظرف رسوب کرده است: $60 - 20 = 40$

در نهایت جرم آب لازم برای انحلال ۴۰ گرم نمک را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,\text{آب} = 40gA \times \frac{180g\,\text{آب}}{20g\,A} = 360g\ \text{آب}$$

(شیمی ۱، صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۲)

۱۰۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

اگر ۴۰ گرم نمک A را در ۵۰ گرم آب حل کنیم محلول سیرشده حاصل می‌شود. محلول‌های حاصل از نمک‌های B و D سیرنشده می‌شوند.

$$\text{نمک A} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{آب} & A \\ 100g & \sim 80g \\ 50g & \sim x \end{bmatrix} \rightarrow x = 40g$$

$$\text{جرم محلول سیرشده} = 50 + 40 = 90$$

$$\text{نمک B} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{آب} & B \\ 100g & \sim 100g \\ 50g & \sim x \end{bmatrix} \rightarrow x = 50g \rightarrow$$ محلول سیرنشده است.

$$\text{نمک C} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{آب} & C \\ 100g & \sim 70g \\ 50g & \sim x \end{bmatrix} \rightarrow x = 35g$$

پس از ۴۰ گرم C فقط ۳۵ گرم آن حل می‌شود پس داریم:

$$\text{جرم محلول سیرشده} = 50 + 35 = 85g$$

$$\text{نمک D} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{آب} & D \\ 100g & \sim 120g \\ 50g & \sim x \end{bmatrix} \rightarrow x = 60g \rightarrow$$ محلول سیرنشده است.

پس جرم محلول سیرشده نمک C از همه کمتر است.

(شیمی ۱، صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

۱۰۴- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا کیانی‌دوست)*

$$\begin{cases} 2\times10^{-3}\,\text{mol}\,NO \times \frac{30g}{1\,\text{mol}\,NO} = 6\times10^{-2}g \\ 200ml \times \frac{1g}{1mL} = 200gr\ \text{محلول} \end{cases}$$

$$ppm = \frac{6\times10^{-2}}{200} \times 10^6 = 300$$

$$S = \frac{6\times10^{-2}g}{200g} \times 100 = 3\times10^{-2}$$

(شیمی ۱، صفحه‌های ۹۴، ۹۵ و ۱۰۰)

ایران توشه — توشه ای برای موفقیت

۱۰۵- **گزینهٔ «۴»** *(پویا رستگاری)*

در مخلوط داده شده تنها گازهای بوتن و بوتین با گاز هیدروژن واکنش می‌دهند. تعداد مول‌های بوتین را برابر با $4x$ و تعداد مول بوتن را برابر با $3x$ مول در نظر می‌گیریم؛ $24/64$ لیتر گاز هیدروژن در شرایط استاندارد معادل با $\frac{24/64}{22/4}=1/1$ مول از این گاز است. واکنش هر دو گاز بوتن و بوتین، با گاز هیدروژن را نوشته و تعداد مول‌های مورد نیاز هیدروژن را برای هرکدام را محاسبه می‌کنیم:

$$C_4H_8 + H_2 \rightarrow C_4H_{10}$$

$$?mol\,H_2 = 3x\,mol\,C_4H_8 \times \frac{1mol\,H_2}{1mol\,C_4H_8} = 3x\,mol\,H_2$$

$$C_4H_6 + 2H_2 \rightarrow C_4H_{10}$$

$$?mol\,H_2 = 4x\,mol\,C_4H_6 \times \frac{2mol\,H_2}{1mol\,C_4H_6} = 8x\,mol\,H_2$$

مجموع تعداد مول گاز هیدروژن مصرف شده برابر با $1/1$ مول است پس داریم:

$$3x + 8x = 1/1 \Rightarrow x = 0/1mol$$

در نهایت تعداد اتم‌های هیدروژن در $0/1$ مول بوتان را بدست می‌آوریم:

$$?atmH : 0/1mol\,C_4H_{10} \times \frac{10mol\,atmH}{1mol\,C_4H_{10}}$$

$$\times \frac{6/02\times10^{23}\,atm\,H}{1mol\,atm\,H} = 6/02\times10^{23}\,atm$$

(شیمی ۱، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹ و ۷۷ تا ۸۱ وشیمی ۲، صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

۱۰۶- **گزینهٔ «۱»** *(علی امینی)*

$$\text{ارزش سوختی تخم‌مرغ} = \frac{Q}{m'} = \frac{60/1kg\times2\frac{kJ}{kg.^\circ C}\times10^\circ C}{200g} = 6/01\frac{kJ}{g}$$

طبق فرض سؤال، درصد جرمی چربی و پروتئین را برابر با x و درصد جرمی کربوهیدرات را $23-2x$ در نظر می‌گیریم.

$$6/01 = \frac{x}{100}\times38 + \frac{x}{100}\times17 + \frac{(23-2x)}{100}\times17$$

$$\Rightarrow 601 = 38x + 17x - 34x + 23\times17$$

$$\Rightarrow 21x = 601 - 391 = 210 \Rightarrow x = 10$$

$$\begin{cases} 10\% \text{ چربی} \\ 10\% \text{ پروتئین} \\ 3\% \text{ کربوهیدرات} \end{cases} \Rightarrow \frac{\text{جرم کربوهیدرات}}{\text{جرم پروتئین + چربی}} = \frac{3}{10+10} = \frac{3}{20} = 0/15$$

(شیمی ۲، صفحه‌های ۷۰ و ۷۱)

۱۰۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیر حاتمیان)*

آنتالپی واکنش خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$N_2H_4(g) + O_2(g) \rightarrow N_2(g) + 2H_2O(g)$$

۱) واکنش I را معکوس می‌کنیم.

$$I)\ N_2H_4(g) + H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g) \quad \Delta H_1' = -183kJ$$

۲) معادلهٔ واکنش (II) بدون تغییر

$$II)\ 2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g) \quad \Delta H_2' = -486kJ$$

۳) معادله واکنش (III) را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم.

$$III)\ 2NH_3(g) \rightarrow N_2(g) + 3H_2(g) \quad \Delta H_3' = 92kJ$$

$$\Delta H_{کل} = \Delta H_1' + \Delta H_2' + \Delta H_3'$$
$$= -183 - 486 + 92 = -577kJ$$

(شیمی۲، صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴)

۱۰۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیر حاتمیان)*

تغییر غلظت (مول) با ضرایب استوکیومتری مواد متناسب است. در ۲۰ ثانیهٔ اول تغییر غلظت A، B و C به‌ترتیب برابر $-1/5$، $0/5$ و ۱ است، بنابراین ضرایب استوکیومتری A، B و C به‌ترتیب ۳، ۱ و ۲ است. چون تغییر غلظت A منفی است A واکنش‌دهنده و تغییرات غلظت B و C مثبت است بنابراین C و B فراورده هستند.

$$3A \rightarrow B + 2C$$

در ۲۰ ثانیه دوم تغییر غلظت A برابر است با:

$$|\Delta[A]| = |0/75 - 1/5| = 0/75\frac{mol}{L}$$: در بازهٔ زمانی ۲۰ تا ۴۰

با توجه به ضریب استوکیومتری مواد تغییر غلظت در بازهٔ زمانی ۲۰ تا ۴۰ برای مواد B و C برابر خواهد بود با:

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

در بازهٔ زمانی ۲۰ تا ۴۰ ثانیه $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{|\Delta[A]|}{\Delta[B]} = \frac{3}{1} \rightarrow \Delta[B] = \frac{|\Delta[A]|}{3} \\ \quad = \frac{0/75}{3} = 0/25 \frac{mol}{L} \\ \frac{|\Delta[A]|}{\Delta[C]} = \frac{3}{2} \rightarrow \Delta[C] = \frac{2}{3}|\Delta[A]| \\ \quad = \frac{2}{3} \times 0/75 = 0/5 \frac{mol}{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 0/5 + 0/25 = 0/75 \\ Y = 1 + 0/5 = 1/5 \end{cases}$$

(شیمی ۲، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۱)

۱۰۹- **گزینهٔ «۳»** (امیر حاتمیان)

در تمام مدت زمان انجام واکنش، از شروع تا پایان قانون پایستگی جرم در یک واکنش برقرار است. در حین تعادل مجموع جرم CO_2 و CaO و $CaCO_3$ برابر ۰/۲ گرم است. بنابراین:

$$m_{CaCO_3} + m_{CaO} + m_{CO_2} = 0/2g \rightarrow m_{CO_2}$$
$$= 0/2g - 0/156g = 44 \times 10^{-3} g$$

اکنون از جرم CO_2 مول CaO و غلظت $Ca(OH)_2$ را بدست می‌آوریم:

$$CaO(s) + H_2O(l) \rightarrow Ca(OH)_2(aq)$$

$$?mol\,Ca(OH)_2 = 44 \times 10^{-3} g\,CO_2 \times \frac{1mol\,CO_2}{44g\,CO_2}$$
$$\times \frac{1mol\,CaO}{1mol\,CO_2} \times \frac{1mol\,Ca(OH)_2}{1mol\,CaO} = 10^{-3} mol\,Ca(OH)_2$$

غلظت $Ca(OH)_2$ $M = \frac{10^{-3}}{0/25} = 4 \times 10^{-3} mol.L^{-1}$

$$[OH^-] = M.\alpha.n' = 4 \times 10^{-3} \times 1 \times 2 = 8 \times 10^{-3} mol.L^{-1}$$

$$[H^+] = \frac{10^{-14}}{8 \times 10^{-3}} = 0/125 \times 10^{-11} = 125 \times 10^{-14}$$
$$= 5^3 \times 10^{-14}$$

$$pH = -\log 5^3 \times 10^{-14} = 14 - 3\overbrace{\log 5}^{0/7} = 11/9$$

(شیمی ۳، صفحه‌های ۱۵، ۱۶، ۲۰، ۲۱ و ۲۸ و ۱۰۱ تا ۱۰۳)

۱۱۰- **گزینهٔ «۳»** (روزبه رضوانی)

$$H_2 \text{ مول اولیه} = 10g\,H_2 \times \frac{1mol\,H_2}{2g\,H_2} = 5mol\,H_2$$

$$H_2 \text{ مول تعادلی} = 6g\,H_2 \times \frac{1mol\,H_2}{2g\,H_2} = 3mol\,H_2$$

$$Br_2 \text{ مول تعادلی} = 40g\,Br_2 \times \frac{1mol\,Br_2}{160g\,Br_2} = 0/25mol\,Br_2$$

	H_2	+ Br_2	$\rightleftharpoons$ $2HBr$
	5	$\frac{a}{160}$	0
	$-x$	$-x$	$2x$
	$5-x$	$\frac{a}{160}-x$	$2x$

$$5 - x = 3 \Rightarrow x = 2mol$$
$$\frac{a}{160} - x = 0/25 \Rightarrow a = 360$$

$$K = \frac{[HBr]^2}{[H_2][Br_2]} \Rightarrow \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{0/25}{5}\right)} \simeq 21/3$$

(شیمی ۳، صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)

ایران توشه — توشه ای برای موفقیت