ایران توشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود گام به گام
- دانلود آزمون گاج و قلم چی و سنجش
- دانلود فیلم و مقاله آنلیزشی
- کنکور و مشاوره

IranTooshe.Ir

@irantooshe

IranTooshe

فصل اول : ماتریس ها

ماتریس: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می شود. هر عدد حقیقی واقع در آن ماتریس درایه نامیده می شود. اگر ماتریس A، m سطر و n ستون داشته باشد، مرتبه ماتریس A، $m \times n$ است و آن را به صورت $A_{m\times n}$ و یا $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم. a_{ij} یعنی درایه واقع در سطر iام و ستون j ام ماتریس A.

مثال: ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳\times ۴}$ با شرایط $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i>j \\ ۷ & i=j \\ i^۲ & i<j \end{cases}$ را مشخص کنید.

ماتریس های خاص

۱. ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است و آن را با $\overline{O}$ نمایش می دهیم.

$$\overline{O}_{۲\times ۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$$

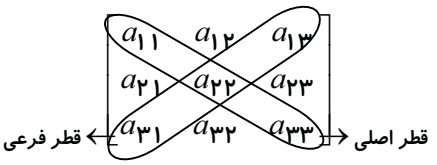
۲. ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر دارد. مرتبه این ماتریس، $۱\times n$ است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴۸ & -۷ \end{bmatrix}_{۱\times ۵}$$

۳. ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد. مرتبه این ماتریس، $n\times ۱$ است.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}_{۴\times ۱}$$

۴. ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند. مرتبه این ماتریس $n \times n$ است. این ماتریس دارای قطر اصلی و فرعی است. در درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس مربعی $i<j$، روی قطر اصلی $i=j$ و پایین قطر اصلی $i>j$ است. (i شماره سطر و j شماره ستون درایه a_{ij} است)



۴'. ماتریس پایین مثلثی ماتریس مربعی است که همه درایه های بالای قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ d & b & ۰ \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

۴''. ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربعی که همه درایه های پایین قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵. ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفرند. $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

عناصر روی قطر اصلی نیز می توانند صفر باشند.

۶. ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که تمام درایه های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند. $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

۷. ماتریس همانی (واحد- یکه) ماتریس اسکالری که درایه های روی قطر اصلی آن یک باشد. $I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & ۱ \end{bmatrix}$ $I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & 0 \\ 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix}$

ماتریس همانی را می توان به صورت $I_n = [a_{ij}]_{n\times n}$ که $a_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ نیز نمایش داد.

تساوی دو ماتریس: دو ماتریس A و B مساوی‌اند هرگاه: ۱. دو ماتریس هم مرتبه باشند ۲. درایه‌های نظیر به نظیر در A و B برابر باشند.

به عبارت دیگر $\forall i, j \quad a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x - y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x + y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت حاصل $(x + y + z)$ را بیابید.

چند عمل روی ماتریس‌ها

۱. جمع و تفریق ماتریس ها: اگر دو ماتریس هم مرتبه باشند، با جمع و تفریق کردن درایه‌های نظیر دو ماتریس، جمع یا تفریق دو ماتریس بدست می‌آید.

مثال: اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times ۳}$ و $a_{ij} = \begin{cases} ۷ & i = j \\ i + j & i > j \\ i^۲ & i < j \end{cases}$، در ماتریس $I - A$ کدام درایه وجود ندارد؟

۱. مضرب ۳ ۲. مضرب ۴ ۳. مضرب ۵ ۴. مضرب ۷

۲. ضرب عدد در ماتریس: اگر عددی در ماتریس ضرب شود، در تمام درایه‌های آن ضرب می شود.

چند ویژگی جمع وتفریق: ماتریسهای هم مرتبه A، B و C را در نظر بگیرید.

۱. خاصیت جابجایی $A + B = B + A$ ۲. k عدد حقیقی می‌باشد $k(A + B) = kA + kB$

۳. خاصیت عضو خنثی در جمع $A+\overline{O}=A$ **۴. خاصیت شرکتپذیری** $(A+B)+C=A+(B+C)$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & -۲\\ ۰ & ۵ & ۶\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۴ & ۳\end{bmatrix}$ **و ماتریس** C **چنان باشد که** $B-۲A+۳C=\overline{O}$، **آن گاه درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس** C **کدام است؟**

۱. ۴ **۲. ۳** **۳. ۲** **۴. ۱** **۲**

ضرب ماتریس‌ها:

اگر $A_{m\times n}$، $B_{k\times p}$ **باشد،** $A\times B$ **زمانی وجود دارد که** $n=k$ **باشد، یعنی ضرب دو ماتریس زمانی قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشند.** $A\times B$، **ماتریسی است از مرتبه** $m\times p$. **مثلاً** $A_{۳\times ۲}\times B_{۲\times ۴}=C_{۳\times ۴}$

برای ضرب دو ماتریس، از ماتریس اول سطر و از ماتریس دوم، ستون برمی داریم و درایه های هر سطر در ستون، نظیر به نظیر ضرب و حاصل با هم جمع می شود و در ماتریس حاصلضرب جایگزین می‌شود. پس:

الف. از ضرب یک سطر در یک ستون یک درایه ایجاد می شود.

ب. سطر i **ام (مثلاً سطر سوم) ماتریس** $A\times B=C$ **از ضرب سطر** i **ام (سطر سوم) ماتریس** A **در همه ستون‌های ماتریس** B **ایجاد می‌شود.**

ج. (ستون j **ام** B**)** $\times$ **(ماتریس** A**) = ستون** j **ام** $A\times B$

مثال: برای هر حالت $A\times B$ **و** $B\times A$ **را در صورت امکان محاسبه کنید.**

الف. $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳ & -۱\\ -۱ & ۰ & ۱ & -۲\\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰\end{bmatrix}$

ب. $A=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\\ ۲\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\end{bmatrix}$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

مثال: اگر A ماتریسی ۵×۳ باشد در این صورت در هریک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A \times B$ و $B \times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف، مرتبه آن را بیابید.

الف. $B = [b_{ij}]_{۳\times۲}$ **ب.** $B = [b_{ij}]_{۳\times۵}$ **ج.** $B = [b_{ij}]_{۵\times۳}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ **و** $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ **و** $C = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ **در این صورت درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.**

الف. $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ **ب.** $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

مثال: اگر $A = [۲i - j]_{۳\times۳}$ **و** $B = [i^۲ + j^۲]_{۳\times۳}$**، آن‌گاه درایه سطر دوم و ستون سوم** $A \times B - B \times A$ **کدام است؟**

۱. ۳۳ **۲.** ۳۰ **۳.** ۳۲ **۴.** ۲۸

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

توان ماتریس‌ها: اگر A ماتریس مربعی باشد داریم: $A^۱ = A \ , \ A^۲ = A.A \ , A^۳ = A.A^۲ = A^۲.A \ , \ \ldots A^n = A.A^{n-۱} = A^{n-۱}.A$

توجه: اگر A ماتریس مربعی و m و n عدد طبیعی و k عدد حقیقی باشد آن‌گاه

۱. $I^n = I$ **۲.** $(kA)^n = K^n A^n$ **۳.** $A^m \times A^n = A^{m+n}$ **۴.** $(A^m)^n = A^{mn}$

نکته: برای محاسبه توان‌های ماتریس مربعی A (به طور خاص در مورد توان‌های بزرگ) راه کلی این است که بین A، $A^۲$، $A^۳$ و ... رابطه‌ای پیدا کنیم.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ **حاصل $A^۲$ و $A^۳$ را بیابید و سپس قانونی برای محاسبه A^n (n عدد طبیعی) بیان کنید.**

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ **، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس** $A+A^2+A^3+\ldots A^{1395}$ **کدام است؟**

۱. ۱۲ ۲. ۱۳۹۴ ۳. ۱۳ ۴. ۱۳۹۵

نکته: ماتریس بالا $A_{3\times 3}$ **مثلثی اکید نام دارد (ماتریس مثلثی که قطر اصلی نیز صفر است) که پوچ توان از مرتبه ۳ است یعنی توان سوم آن‌ها صفر است.**

نکته: اگر A **ماتریس مربعی از مرتبه** 2×2 **باشد یعنی** $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ **آن‌گاه رابطه** $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=0$ **برقرار است.**

مثال: با فرض $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ **داریم** $A^2=\alpha I+\beta A$ **، حاصل** $2\alpha-\beta$ **کدام است؟**

۱. ۴- ۲. ۴ ۳. ۶ ۴. ۶-

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

۱. ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد.

۲. اگر $AB=AC$ **باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت** $B=C$ **(قانون حذف همیشه برقرار نیست)**

توجه داریم که قانون حذف زمانی برقرار است که ماتریس حذف شونده وارون‌پذیر باشد. (وارون پذیری در قسمت بعدی خوانده می‌شود)

۳. ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکتپذیری دارد. $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$

مثال: جواب معادله $\begin{bmatrix}x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 1\end{bmatrix}=0$ **کدام‌اند؟**

۱. ۳- و ۱- ۲. ۳- و ۱ ۳. ۳ و ۱- ۴. ۳ و ۱

۴. در ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری (و فاکتورگیری) برقرار است.

$$\begin{cases} A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C \\ (B\pm C)\times A=B\times A\pm C\times A \end{cases}$$

۵. اگر حاصل ضرب دو ماتریس صفر شود، نمی‌توان نتیجه گرفت یکی از دو ماتریس صفر بوده است. مثلاً

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix} \text{ آن‌گاه } AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

البته برای مثال بهتر است ماتریسی مثال بزنیم که بیشترین صفر ممکن را داشته باشد.

۶. حاصل ضرب دو ماتریس قطری، یک ماتریس قطری است و برای محاسبه آن باید درایه‌های روی قطر اصلی دو ماتریس را نظیر به نظیر ضرب کرد.

۷. اگر دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشند. یعنی $AB=BA$ باشد، اتحادها در مورد آن‌ها برقرارند.

بطور مثال $(A+B)^2=(A+B)\times(A+B)=A\times A+\underbrace{A\times B+B\times A}_{=}+B\times B=A^2+2AB+B^2$

توجه داریم که از جمله ماتریس‌هایی که با ماتریس مربعی A تعویض‌پذیر می‌باشد ماتریس همانی I می باشد پس اتحادها در مورد این دو ماتریس نیز برقرار است بطور مثال $(A-I)^3=A^3-3A^2\times I+3A\times I^2-I^3=A^3-3A^2+3A-I$

نکته مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$، **آن‌گاه درایه واقع در سطر سوم و ستون اول از ماتریس ABC کدام است؟**

۱. ۵۳ **۲. ۵۲** **۳. ۵۱** **۴. ۵۰**

مثال: اگر $A^2=\begin{bmatrix}-2 & -5\\ 15 & 13\end{bmatrix}$ و $B^2=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 12 & 7\end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 6 & 6\end{bmatrix}$ **باشند،** $AB+BA$ **کدام است؟**

۱. $\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -27 & -16\end{bmatrix}$ **۲.** $\begin{bmatrix}-6 & 1\\ -27 & -16\end{bmatrix}$ **۳.** $\begin{bmatrix}-4 & -1\\ -27 & -16\end{bmatrix}$ **۴.** $\begin{bmatrix}-6 & -1\\ -27 & -16\end{bmatrix}$

چند تمرین کتاب صفحه ۲۰:

۱. دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq \overline{۰}$ و $B\neq \overline{۰}$ ولی $AB=\overline{۰}$

۲. با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌هابرقرار نمی‌باشد.

۳. اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

۴. اگر $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ و $B=\lfloor b_{ij}\rfloor$ به صورت $b_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ و $a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$ معرفی شده باشند. ابتدا A و B را مشخص کرده وسپس $A\times B$ و $B\times A$ را به دست آورید.

۵. اگر $A=\begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix}$ ماتریس قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد، دراین صورت $A\times B$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای بگیرید؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶. اگر A ماتریسی ۳×۳ واسکالر باشد و B ماتریسی هم مرتبه‌ی A، در این صورت

الف. برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

ب. آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟

۷. اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید:

الف. $(A-B)^۲=A^۲-۲AB+B^۲$ **ب.** $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

۸. اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ **مفروض باشد. حاصل $A^۳$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

چند تست

۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ **و $A\times B$ یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی $B\times A$ کدام است؟**

۱. صفر ۲. ۸ ۳. ۱۴ ۴. ۲۴

۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۷ & ۲a & ۰\\ ۸ & ۴ & -۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۲b & ۰ & ۰\\ ۵ & ۴ & ۰\\ ۵ & ۶ & ۴c\end{bmatrix}$ **و $۴a+۳b-۲c=۷$ باشد، مجموع عناصر روی قطر اصلی BA چه‌قدر است؟**

۱. ۱۴ ۲. ۱۶ ۳. ۱۶ ۴. ۲۱

۱

۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۵ & ۲\\ ۷ & ۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۴\\ ۵ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $C=A\times B$، آن‌گاه حاصل $c_{۲۳}$ کدام است؟

۱. صفر ۲. ۱۶ ۳. ۲۲ ۴. ۲۴ ۳

۴. حاصل جمع ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix}-۲ & x & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۱ & -۱\\ -۱ & ۲ & ۲\\ ۰ & x & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲\\ x\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ کدام است؟

۱. $\frac{۳}{۲}$ ۲. ۱ ۳. -۱ ۴. $-\frac{۳}{۲}$ ۱

۵. اگر B و A هر دو ۲×۲ باشند و $BA=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $B\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}A+B\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ -۳ & -۳\end{bmatrix}A$ کدام است؟

۱. صفر ۲. -۲ ۳. -۶ ۴. -۱۲ ۴

۶. اگر $A-B=-kI$ باشد، حاصل $A^۲-AB+kB$ کدام است؟

۱. $k^۲$ ۲. $k^۲I$ ۳. $-k^۲$ ۴. $-k^۲I$ ۲

۷. اگر $B^۲=-B$ و $A+B=I$ باشد، $A^۲B$ کدام است؟

۱. $-۴B$ ۲. $-۲B$ ۳. $۲B$ ۴. $۴B$ ۴

۸. اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I$، دو تایی (α,β) کدام است؟

۱. $(۲,۱۱)$ ۲. $(۲,۱۳)$ ۳. $(۴,۱۱)$ ۴. $(۴,۳)$ ۲

۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & x & y\\ ۰ & ۱ & x\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^۳$ کدام است؟

۱. $۳x$ ۲. $۳y$ ۳. $۲(x^۲+y^۲)$ ۴. $۳(x^۲+y^۲)$ ۱

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$، ماتریس $A^۴$ کدام می‌باشد؟

۱. بالا مثلثی ۲. پایین مثلثی ۳. قطری غیر همانی ۴. همانی ۴

۱۱. اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & -۱ & -۱\\ -۱ & -۱ & -۱\\ -۱ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های $A^۵$ کدام است؟

۱. $-۳^۷$ ۲. $۳^۷$ ۳. $-۳^۶$ ۴. $۳^۶$ ۳

۱۲. سه ماتریس دارای رابطه $A=B+C$ می باشند، حاصل $A^۲+B^۲-AB-BA$ کدام است؟

۱. $-C^۲$ ۲. ۰ ۳. C ۴. $C^۲$ ۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳. ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۴ & -۳ \\ -۳ & -۴ \end{bmatrix}$ در رابطه $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$ صدق می‌کنند، حاصل $\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱. -۳ ۲. ۱ ۳. ۳ ۴. ۵ ۲

۱۴. اگر A یک ماتریس مربعی و $A^۲-I=۲A$ باشد، $A^۵-A^۴$ کدام است؟

۱. $۲۹A+۱۲I$ ۲. $۱۷A+۷I$ ۳. $۱۲A+۵I$ ۴. A ۲

۱۵. اگر $AB-۲BA=\bar{۰}$ و $B^۳A=kAB^۳$ باشند، k کدام است؟

۱. ۸ ۲. $\frac{۱}{۸}$ ۳. $-\frac{۱}{۸}$ ۴. -۸ ۲

۱۶. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $BA^n=\begin{bmatrix} ۴ & ۴۱ \\ ۳ & ۳۲ \end{bmatrix}$، آن‌گاه:

۱. $n=۱۱$ ۲. $n=۱۰$ ۳. $n=۹$ ۴. $n=۸$ ۲

۱۷. اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوری که $A^۲-A=\bar{۰}$، آن‌گاه $(۲A-I)^{۱۳۹۹}$ کدام است؟

۱. $\bar{۰}$ ۲. I ۳. A ۴. $۲A-I$ ۴

۱۸. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۳ \\ -۷ & ۱۵ \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $\left(B^{-۱}AB\right)^{۱۴}$ کدام است؟

۱. $-A$ ۲. A ۳. I ۴. $-I$ ۴

۱۹. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^n-A^{n-۱}$ کدام است؟

۱. $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} ۲^{n-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} ۲^{n-۱} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

وارون ماتریس و دترمینان:

وارون (معکوس) ماتریس: برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی چون B می‌باشد به طوری که $AB = BA = I$ در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

مثال: نشان دهید دو ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند.

در این کتاب فقط معکوس ماتریس مربعی 2×2 را محاسبه می کنیم. وارون ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در صورت وجود به صورت $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ بدست می‌آید.

به عدد حقیقی $ad - bc$ دترمینان A می‌گویند و با نماد $|A|$ نشان می‌دهند؛ یعنی: $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

پس برای محاسبه معکوس (وارون) ماتریس $A_{2\times 2}$، درایه‌های روی قطر اصلی را جابجا و درایه‌های قطر فرعی را قرینه کرده و عکس دترمینان را درآن ضرب می‌کنیم.

توجه: با توجه به فرمول A^{-1} واضح است اگر $|A|$ صفر باشد، ماتریس وارون ندارد (وارون‌پذیر نیست). به عبارتی شرط لازم و کافی برای این که A^{-1} وجود داشته باشد (A وارون‌پذیر باشد) آن است که $|A| \neq 0$.

مثال: وارون ماتریس $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ را در صورت وجود بدست آورید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & m \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه m کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: اگر A و B مربع هم مرتبه و وارون‌پذیر باشد به طوری که $A + B = 2AB$ آن‌گاه $A^{-1} + B^{-1}$ کدام است؟

۱. I ۲. $2I$ ۳. $3I$ ۴. هیچ‌کدام

حل دستگاه ۲ × ۲ به کمک ماتریس وارون:

در دستگاه $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ ، $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **ماتریس ضرایب و** $B=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ **ماتریس مقادیر معلوم (ماتریس سمت راست) و** $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ **ماتریس مجهولات دستگاه می باشد. در این صورت دستگاه به شکل معادله ماتریسی** $AX=B$ **نوشته می‌شود و در صورتی که ماتریس** A **وارون‌پذیر باشد (یا** $|A|\neq 0$ **) با ضرب** A^{-1} **از چپ در معادله فوق می توان مجهولات را به صورت زیر بدست آورد.**

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

یعنی برای حل دستگاه باید معکوس ماتریس ضرایب را از سمت چپ در ماتریس مقادیر معلوم ضرب کرد.

مثال: دستگاه $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$ **را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.**

تعبیر هندسی و بحث در تعداد جواب‌های دستگاه: می دانیم در دستگاه $\begin{cases} a\,x+b\,y=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ **هر معادله دستگاه، معرف یک خط در صفحه می‌باشد. دو خط در صفحه سه وضعیت دارند؛**

۱. **در یک نقطه متقاطعند. در این صورت نقطه برخورد در هر دو معادله صدق می‌کند پس جواب دستگاه می باشد. برای اینکه دو خط متقاطع باشند باید شیب آن‌ها نابرابر باشد یعنی دستگاه جواب منحصر بفرد دارد هرگاه** $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ **(در این حالت دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر است** $|A|\neq 0$ **)**

۲. **با هم نقطه مشترک ندارند (موازی) هستند. یعنی دستگاه جواب ندارد پس** $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

۳. **بر هم منطبق هستند یعنی دستگاه بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه از خط جواب دستگاه می‌باشد پس** $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

نکته: دقت داریم که اگر دترمینان ضرایب دستگاه مخالف صفر باشد آن‌گاه دستگاه جواب منحصربفرد دارد ولی اگر دترمینان ضرایب صفر باشد دستگاه ممکن است بی شمار جواب یا اصلاً جواب نداشته باشد. لذا برای بحث بهتر است از سه حالت ذکر شده استفاده کنیم. (کسرهای ذکر شده)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} **بیابید.**

الف. $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 2x+y=8 \end{cases}$ **ب.** $\begin{cases} x+3y=5 \\ -2x-6y=1 \end{cases}$ **ج.** $\begin{cases} -2x+3y=2 \\ 4x-6y=-4 \end{cases}$

دترمینان و کاربرد

اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد($1 \le n \le 3$) در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

الف. $A = [k]_{1\times 1} \Rightarrow |A| = k$

ب. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$

ج. اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ **آن‌گاه دترمینان این ماتریس به صورت زیر محاسبه می‌شود:**

$$|A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

پس دترمینان بر حسب سطر اول به صورت

$$|A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

توجه: هر ماتریس 3×3 دلخواه می توان دترمینان آن را بر حسب هر سطر و ستونی به دست آورد که حاصل همواره عددی حقیقی و منحصربفرد است. ولی بهتر است بر اساس سطر یا ستونی بسط دهیم که بیشترین صفر را دارا می‌باشد (چرا؟)

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ **بر حسب سطر اول و ستون (سطر) سوم بسط دهید.**

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: دترمینان ماتریس $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ **را محاسبه کنید.**

ویژگی‌های دترمینان:

۱. اگر درایه‌های یک سطر یا یک ستون همگی صفر باشند، حاصل دترمینان صفر است.

۲. اگر دو سطر(یا دو ستون) یک دترمینان با هم برابر باشند یا مضربی از هم باشند، حاصل دترمینان صفر است.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ kd & ke & kf \end{vmatrix} = ۰$$

۳. اگر همه عناصر یک سطر (ستون) ماتریس در عدد ثابت k ضرب شوند آن‌گاه دترمینان در k ضرب می‌شود و بعکس

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & l \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & e \\ d & e & f \\ g & h & l \end{vmatrix}$$

مثال: اگر $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -۲$ **آن‌گاه مقدار** $\begin{vmatrix} ۲a & ۶b & -۲c \\ -a' & -۳b' & c' \\ -a'' & -۳b'' & c'' \end{vmatrix}$ **کدام است؟**

۱. ۱۲ ۲. -۱۲ ۳. ۶ ۴. -۶

۴. اگر جای دو سطر(ستون) یک دترمینان را با هم عوض کنیم مقدار دترمینان در (-۱) ضرب می‌شود. (به تعداد جابجایی‌ها، عدد ۱- ضرب خواهد شد)

۵. اگر مضربی از یک سطر(ستون) را به سطر(ستون) دیگر اضافه کنیم حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند.

۶. دترمینان ماتریس‌های قطری، بالا مثلثی، پایین مثلثی برابر است با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی

۷. دترمینان ماتریس‌های شبه قطری و شبه مثلثی ۳×۳ برابر است با قرینه حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر فرعی

مثال: حاصل $\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{vmatrix}$ **برابر است با:**

۱. ۴ ۲. -۴ ۳. ۱۰ ۴. -۱۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸. اگر A ماتریس $n \times n$ باشد آن‌گاه $|kA| = k^n |A|$.

۹. اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند، آن‌گاه $|AB| = |A||B|$.

۱۰. اگر $A = B$ آن‌گاه $|A| = |B|$ ولی برعکس آن درست نیست.

۱۱. $|A^n| = |A|^n$ **(ازجمله** $|A^{-۱}| = |A|^{-۱} = \frac{۱}{|A|}$ **)**

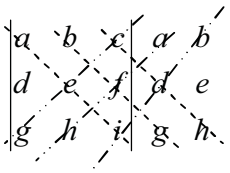
۱۲. $|I| = ۱$.

۱۳. دترمینان به شکل $\begin{vmatrix} ۰ & a & b \\ -a & ۰ & c \\ -b & -c & ۰ \end{vmatrix}$ **صفر است.**

۱۴. دترمینان جمع دو ماتریس قانون ندارد. $|A+B| \neq |A|+|B|$

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس ۳×۳.

دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن، منهای مجموع حاصل‌ضرب‌های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن.



$$|A| = (aci + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

مثال دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ **را از دستور ساروس بدست آورید.**

چند تمرین کتاب: صفحه ۳۰

۱. اگر $A = [۱ \quad ۲ \quad -۳]$ **و** $B = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ **در این صورت** $|AB|$ **و** $|BA|$ **را بدست آورید. (آیا نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟)**

نکته: اگر $A_{m\times n}$ **و** $B_{n\times m}$ **و** $A\times B = C_{m\times m}$ **آنگاه با فرض** $m > n$ **داریم:** $|C| = ۰$

۲. اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ **در این صورت** $|A^۲|$ **را بدست آورید.**

۳. اگر $A = \begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$ **در این صورت** $|A|^۳ - ۲$ **را بیابید.**

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴. اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}$ حاصل عبارت $\left(۲A^{-۱}-۳B^{-۱}\right)$ را بیابید.

۵. دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$ را بر حسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶. ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka & kb & kc\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۷. برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار $|A|$ و $|kA|$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۸. اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ انتدا ماتریس $A^{-۱}$ را بدست آورده و $|A|$ را با $\left|A^{-۱}\right|$ مقایسه کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

چند تست دترمینان و وارون

۱. اگر $A=\begin{bmatrix} - & \\ & \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$، حاصل $|A+B|+|AB|$ کدام است؟

۱. ۱۹- ۲. ۹۱ ۳. ۷۷- ۴. ۱۰۵

۲. اگر $A=\begin{bmatrix} - & |A|- \\ |A|+ & - \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A کدام می تواند باشد؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $-\sqrt{\ }$ ۳. ۲- ۴. ۴-

۳. اگر $A=\begin{bmatrix} & - \\ - & - \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} - & \\ - & \end{bmatrix}$، حاصل $|A\ B|+|A\ B|$ کدام است؟

۱. ۲۴- ۲. ۱۲- ۳. ۱۲ ۴. ۲۴

۴. اگر $A=\begin{bmatrix} \log & \log \\ \log & \log \end{bmatrix}$، آن گاه $|A|$ کدام است؟

۱. $\log\ /$ ۲. $\log\ /$ ۳. $\log$ ۴. $\log\ /$

۵. اگر $\begin{vmatrix} & - \\ x & \end{vmatrix}=A+x\begin{vmatrix} & \\ - & \end{vmatrix}$ مقدار A کدام است؟

۱. ۳ ۲. ۴ ۳. ۵ ۴. ۶

۶. اگر در ماتریس اسکالر $A=[a_{ij}]_{\times}$، $a=$ باشد، $|A|$ کدام است؟

۱. صفر ۲. ۱۶- ۳. ۱۶ ۴. ۶۴

۷. اگر $A=[a_{ij}]_{\times}$ و $B=[b_{ij}]_{\times}$ با تعاریف $a_{ij}=\begin{cases} \circ & i<j \\ & i\geq j \end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases} \circ & i+j=k+ \\ & i+j=k \end{cases}$ باشند حاصل $|A^{-}|-|(A-B)^{-}|$ کدام است؟

۱. ۲- ۲. صفر ۳. ۱ ۴. ۲

۸. به ازای کدام مقدار k معادله $\begin{vmatrix} x & k \\ x+ & \\ & x+ \end{vmatrix}=$ فقط یک ریشه دارد؟

۱. ۱- ۲. صفر ۳. ۱ ۴. ۲

۹. معادله $\begin{vmatrix} & & x \\ & x & x \\ x & x & \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & & \\ & x & x \\ & & - \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} - & & \\ & x & \\ & & x \end{vmatrix}$ چند ریشه دارد؟

۱. بی شمار ۲. ۲ ۳. ۱ ۴. هیچ

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix} - & - \\ & \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} - & - \\ \square & \\ - & \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $B^{-}-AB-BA+A$ کدام است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹ .۱ ۳ .۲ −۳ .۳ −۹ .۴ ۱

۱۱. اگر $A = \begin{vmatrix} - & - \\ - & |A| \end{vmatrix}$، حاصل $|A|A| + A|$ کدام است؟

۶ .۱ ۹ .۲ ۱۲ .۳ ۱۸ .۴ ۴

۱۲. اگر $A \times$ ، $= A|A|$ باشد، $|A|$ کدام است؟

۲ .۱ ۴ .۲ ۸ .۳ ۱۶ .۴ ۴

۱۳. اگر $A \times$ و $|A| = -$ باشد، حاصل $\left|\frac{A}{|A|}\right|$ کدام است؟

− .۱ $\frac{-}{-}$.۲ −.۳ −− .۴ ۲

۱۴. A و B ماتریس های مربعی از مرتبه ۳ هستند و $|A| = --$ و $|B| =$ است. اگر $kAB = - I$ باشد، k کدام است؟

-۴ .۱ -۲ .۲ ۲ .۳ ۴ .۴ ۴

۱۵. A ماتریس مربعی است که درایه های روی قطر اصلی آن ۳ و -۱ و۲ و درایه های پایین قطر اصلی آن صفر است. دترمینان A کدام است؟

۱. صفر ۶ .۲ ۱۵ .۳ ۳۶ .۴ ۴

۱۶. اگر $M = [m_{ij}] \times$ و $|M| = \left|\frac{M}{|M|} + M\right|$ باشد، $\left|\frac{M}{|M|}\right|$ کدام است؟

-۲ .۱ −− .۲ − .۳ ۲ .۴ ۱

۱۷. دو سطر یک ماتریس مربعی را در عدد ۳ و سه ستون آن را در عدد۲- ضرب نموده‌ایم. دترمینان ماتریس حاصل چند برابر ماتریس اولیه است؟

۷۲ .۱ ۶۴ .۲ -۶۴ .۳ -۷۲ .۴ ۴

۱۸. اگر $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = -$، حاصل $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ -c & b & -a \\ a & -b & c \end{vmatrix}$ کدام است؟

-۱۲ .۱ -۶ .۲ ۶ .۳ ۱۲ .۴ ۱

۱۹. مقدار x از رابطه $\begin{vmatrix} x- & x- \\ - & x- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+ & \\ x+ & \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱. ۶- و ۱- ۲. ۶ و ۱- ۳. ۶- و ۱ ۴. ۶ و ۱ ۳

۲۰. اگر $A = \begin{bmatrix} - & \\ a & \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} & a \\ - & \end{bmatrix}$ و $C = A \times B$، آن گاه به ازای کدام مجموعه مقادیر a، حاصل دترمینان C منفی است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱. ϕ ۲. $\{a : a < \ \}$ ۳. $\{a : a < \ \}$ ۴. R ۱

۲۱. اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$ ، آن گاه $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱. ۴۳ ۲. -۸۶ ۳. صفر ۴. ۸۶ ۴

۲۲. اگر $A = \begin{bmatrix} \ & - \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \ & \ \end{bmatrix}$ آن گاه حاصل $\dfrac{\begin{vmatrix} A & +A\times B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B & +B\times A \end{vmatrix}}$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. -۱ ۳. ۲ ۴. $--$ ۲

۲۳. اگر $\begin{bmatrix} d \\ -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ & - \\ \ & \ \end{bmatrix}$ آن گاه مجموع دترمینان های دو ماتریس سمت راست تساوی کدام است؟

۱. ۴ ۲. ۳۶ ۳. ۲۰ ۴. ۱۶ ۲

۲۴. اگر $A = \begin{bmatrix} i & -j \end{bmatrix}_{\times}$ آن گاه دترمینان ماتریس $A \times \begin{bmatrix} \ & \ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱. ۱۵ ۲. ۲۲۵ ۳. ۱۶ ۴. صفر ۴

۲۵. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و c,b,a و d اعداد طبیعی باشند به طوری که $|A| - |A| + \ = \ $ آن گاه کم ترین مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

۱. ۵ ۲. ۶ ۳. ۷ ۴. ۸ ۲

۲۶. اگر a و b دو عدد حقیقی و i و j شماره های سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس $A = [ai+bj]_{\times}$ کدام است؟

۱. صفر ۲. $ab(a+b)$ ۳. ab ۴. $a+b$ ۱

۲۷. به ازای کدام مقادیر a و b، اگر ۲ واحد به درایه ی واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس $\begin{bmatrix} a+ & b & c \\ & b+ & c \\ a & b & c+ \end{bmatrix}$ اضافه شود، آن گاه ۳ واحد به دترمینان آن اضافه می شود؟

۱. a هر چه باشد، $b = --$ ۲. a هر چه باشد، $b = -$ ۱

۳. b هرچه باشد، $a = --$ ۴. b هر چه باشد، $a = --$

۲۸. به هردرایه سطر سوم دترمینان $\begin{vmatrix} \ & \ & - \end{vmatrix}$ کدام عدد افزوده شود تا مقدار دترمینان ۸ واحد بیش تر گردد؟

۱. ۲- ۲. ۱- ۳. ۱ ۴. ۲ ۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۹. اگر به تمام درایه های واقع در ستون دوم ماتریس $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ یک واحد افزوده شود به مقدار دترمینان ماتریس اولیه کدام عدد اضافه می شود؟

۱. ۳- ۲. ۲- ۳. ۳ ۴. ۶ ۱

۳۰. اگر به هر درایه واقع در سطر دوم دترمینان $\begin{vmatrix} a \\ - \end{vmatrix}$ یک واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان ۶ واحد اضافه می شود. a کدام است؟

۱. ۱- ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴ ۳

۳۱. اگر از هر درایه واقع در سطر دوم دترمینان $\begin{vmatrix} - & \\ a- & a+ \\ - & \end{vmatrix}$ ، ۲ برابر شماره ستون آن کم شود، به مقدار دترمینان اولیه چقدر افزوده می شود؟

۱. ۱۳۲ ۲. ۱۴۴ ۳. ۱۴۸ ۴. ۱۵۶ ۴

۳۲. اگر $A + A = -I$ باشد، حاصل $|A|$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴ ۱

۳۳. اگر $A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $\left(A^{-}\right)$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴ ۱

۳۴. با فرض $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ ، ماتریس B از تساوی $A \times B = - I$ کدام است؟

۱. $\begin{bmatrix} & \\ & - \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} - & - \\ - & \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} & - \\ - & \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} - & \\ - & - \end{bmatrix}$ ۲

۳۵. اگر $A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^{-}\left(A + I\right)$ کدام است؟

۱. $\begin{bmatrix} - & \square \\ - & \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} - & \\ \square & \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} - & \square \\ & - \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} - & \square \\ & - \end{bmatrix}$ ۴

۳۶. اگر ماتریس های $\times$ ، A و P چنان باشند که $\left(P^{-} \times A \times P\right) = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$، آن گاه دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱. ۶- ۲. ۶ ۳. ۳ ۴. ۳- ۲

۳۷. اگر $A = \begin{bmatrix} & a \\ - & \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} & - \\ a & \\ & \end{bmatrix}$ آن گاه به ازای کدام مقدار a ماتریس $A \times B$ وارون پذیر است؟

۱. ۲ ۲. ۶- ۳. هر مقدار a ۴. هیچ مقدار a ۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۸. اگر دو ماتریس A و $I-A$ وارون هم باشند، ماتریس A کدام است؟

۱. A ۲. $-A$ ۳. I ۴. $-I$ ۲

۳۹. اگر A یک ماتریس $\times$ باشد به طوری که $A \neq A^{-}$ و $A = A^{-}$، آن گاه معکوس ماتریس $I-A$ به کدام صورت است؟

۱. $A-A$ ۲. $A+A$ ۳. $A-A+I$ ۴. $A+A+I$ ۴

۴۰. از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ - & \end{bmatrix}$، سطر اول ماتریس A کدام است؟

۱. $[\quad]$ ۲. $[\quad]$ ۳. $[-\quad]$ ۴. $[\quad]$ ۴

۴۱. اگر $A = \begin{bmatrix} & -\tan x \\ \tan x & \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} & \tan x \\ -\tan x & \end{bmatrix}$، آن گاه سطر اول ماتریس $A^{-} \times B$ کدام است؟ ۱

۱. $[\cos x \quad \sin x]$ ۲. $[\sin x \quad \cos x]$ ۳. $[\sin x \quad -\cos x]$ ۴. $[\cos x \quad -\sin x]$

۴۲. اگر $A = \begin{bmatrix} & -\tan x \\ \tan x & \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبه ۲ باشد، سطر اول ماتریس $(I+A)^{-}(I-A)$ کدام است؟ ۱

۱. $[\cos x \quad -\sin x]$ ۲. $[\cos x \quad \sin x]$ ۳. $[\sin x \quad \cos x]$ ۴. $[-\sin x \quad \cos x]$

۴۳. اگر $A = \begin{bmatrix} - & - \\ \square & \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} - & - \\ & \end{bmatrix}$، آن گاه A کدام است؟

۱. $\begin{bmatrix} - & \\ & - \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} & \\ - & - \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} & - \\ - & \end{bmatrix}$ ۲

۴۴. اگر برای دو ماتریس A و B داشته باشیم $(A+B)(A-B) = A - B$، آن گاه حاصل $((A \times B) \times A^{-})$ کدام است؟

۱. A ۲. B ۳. I ۴. $A \times B$ ۲

۴۵. اگر A ماتریس وارون پذیر بوده به طوری که $A + A^{-} = I$ حاصل A کدام است؟

۱. A ۲. I ۳. $-A$ ۴. $-I$ ۴

۴۶. اگر $A + A + I = A^{-}$ باشد، وارون ماتریس A کدام است؟

۱. A ۲. $-A$ ۳. $I+A$ ۴. $-I-A$ ۱

۴۷. اگر A و B و $A-B$ ماتریس های وارون پذیر باشند، $A \times (A-B)^{-} \times B$ برابر کدام است؟

۱. $(B-A)^{-}$ ۲. $(A-B)^{-}$ ۳. $(A^{-}-B^{-})^{-}$ ۴. $(B^{-}-A^{-})^{-}$ ۴

۴۸. اگر $\begin{bmatrix} & - \\ & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$ آن گاه $x+y$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴ ۳

۴۹. دستگاه معادلات $\begin{cases} (m- \quad)x + \quad y = m \\ x + (m+ \quad)y = \end{cases}$ به ازای کدام مقدار m جواب ندارد؟

۱. -۵ ۲. -۳ ۳. ۳ ۴. ۵ ۴

۵۰. به ازای کدام مقدار a دستگاه معادلات $\begin{cases} x + \quad y = \\ y = a(x- \quad) \end{cases}$ بی شمار جواب دارد؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱. — — ۲. — — ۳. — ۴. —

۲

۵۱. اگر جواب دستگاه $\begin{bmatrix} & a \\ b & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ - \end{bmatrix}$ زوج مرتب $(\ , \ )$ باشد، آن گاه مجموع درایه های ماتریس ضرایب دستگاه کدام است؟

۱. -۳ ۲. -۲ ۳. ۲ ۴. ۳

۱

۵۲. اگر نقطه برخورد نمایش نموداری دستگاه $\begin{cases} ax+by= \\ ax-by= \end{cases}$ به صورت $(\ , \ )$ باشد، آن گاه دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه کدام است؟

۱. — ۲. ۱ ۳. — ۴. — —

۱

۵۳. اگر دستگاه $\begin{cases} a\ x-ay= -a \\ bx+(\ -\ b)y=a+ \end{cases}$ دارای جواب منحصربفرد $(\ , \ )$ باشد، زوج مرتب (a,b) کدام است؟

۱. $(\ ,- \ )$ ۲. $(- \ , \ )$ ۳. $(- \ ,- \ )$ ۴. $(\ , \ )$

۱

۵۴. اگر دستگاه $\begin{cases} ax-by= a-b \\ (c+ \ )x+cy= -a+ \ b \end{cases}$ دارای بی شمار جواب باشد و $(\ , \ )$ یکی از جواب ها باشد، آن گاه مقدار a کدام است؟

۱. ۱ ۲. -۱ ۳. ۲ ۴. -۲

۳

۵۵. اگر A ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} x-y=- \\ x- \ y= \end{cases}$ و I ماتریس همانی و α و β دو عدد حقیقی باشند، به طوری که $\alpha A+\beta I = A^{-\square}$، مقدا β کدام است؟

۱. — — ۲. — ۳. — ۴. —

۳

۵۶. اگر A ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} x-y= \\ x+y=- \end{cases}$ باشد و B ماتریس هم مرتبه ی A باشد به طوری که $A+B=A\times B$، سطر اول ماتریس B کدام است؟

۱. $\begin{bmatrix} \ - \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} - \ \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} - \\ \ - \end{bmatrix}$

۱

۵۷. اگر $A \ = \bar{o}$، وارون ماتریس $A \ - \ I$ کدام است؟

۱. $-\!-\!\left(A \ + \ A+ \ I\right)$ ۲. $-\left(A \ + \ A+ \ I\right)$ ۳. $-\left(A \ + \ A+I\right)$ ۴. $-\!-\!\left(A \ + \ A+I\right)$

۵۸. اگر $I \ = \ A$، وارون ماتریس $I+A$ کدام است؟

۱. $I-A$ ۲. $I-A$ ۳. $-(A-I)$ ۴. $-(I-A)$

۵۹. اگر ماتریس مربعی A در رابطه $(A-I) \ = \bar{o}$ صدق کند، حاصل $A^{-} \ - I$ کدام است؟

۱. $(A-I)(A- \ I)$ ۲. $(A+I)(A+ \ I)$ ۳. $(A-I)(A+ \ I)$ ۴. $(A+I)(A- \ I)$

۶۰. اگر $A \ = A$، ماتریس $(I \ - \ A)^{-}$ برابر کدام است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱. $I - -A$ ۲. $I + -A$ ۳. $I + -A$ ۴. $-I - A$

۶۱. اگر A ماتریس وارون پذیر باشد و $A = I - A$، آن گاه وارون A کدام است؟

۱. $A - I$ ۲. $A - A$ ۳. $A + A$ ۴. $A - A$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

فصل دوم:

مقاطع مخروطی

معرفی مقاطع مخروطی

رویه مخروطی: فرض کنید دو خط d و l در نقطه A متقاطع(غیر عمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویه مخروطی(سطح مخروطی) می‌نامیم. در این حالت خط l را محور، نقطه A را راس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.

برای درک بهتر به شکلهای کتاب صفحه ۳۴ و ۳۵ مراجعه کنید.

الف. در حالتی که صفحه p بر محور سطح مخروطی عمود باشد واز راس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.
واگر از راس عبور کند فقط نقطه A حاصل می‌شود.

ب. در حالتی که صفحه p بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، شکل حاصل یک بیضی خواهد بود.

ج. اگر صفحه p با مولد d موازی باشد و از راس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. (در این حالت اگر p از راس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آن‌ها یک خط است.)

د. اگر صفحه p به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است. (در کتاب هندسه دوازدهم به بررسی خواص هذلولی پرداخته نشده است)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

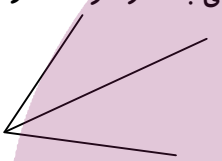
مکان هندسی: مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

در واقع هر مکان هندسی مانند یک قضیه دو شرطی می‌باشد. به قضیه‌های زیر توجه کنید.

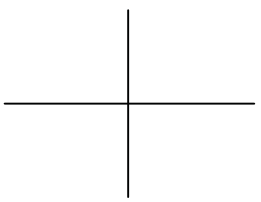
۱. نقطه A روی نیم‌ساز زاویه B قرار دارد اگر وتنها اگر فاصله این نقطه تا دو ضلع زاویه B یکسان باشد.

پس می‌توان گفت: نیم‌ساز هر زاویه مکان هندسی نقطه‌ای ازصفحه آن زاویه است که فاصله آن نقطه تا اضلاع زاویه مقدار یکسانی باشد.

یعنی فاصله هر نقطه که روی نیمساز قرار دارد از دو ضلع زاویه مقدار برابری می باشد و هر نقطه از صفحه که از دو ضلع زاویه فاصله یکسانی داشته باشد، روی نیمساز قرار دارد.



۲. نقطه M روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد اگر وتنها اگر فاصله آن تا دو سر پاره‌خط مقدار یکسانی باشد. لذا عمود منصف هر پاره خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن از دو سر پاره‌خط به یک اندازه می‌باشد. یعنی هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره-خط فاصله یکسانی دارد و هر نقطه از صفحه که از دو سر پاره‌خط فاصله یکسانی داشته باشد روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

معرفی چند مکان هندسی مهم درصفحه:

۱.مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت A و B درصفحه به یک فاصله‌اند، عمود منصف پاره خط AB است.

۲. مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه است.

۳. مکان هندسی نقاطی در صفحه که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت R قرار دارند، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R است.

۴. مکان هندسی نقاطی ازصفحه که از خط d به فاصله k قرار دارند، دو خط موازی d، به فاصله k از آن و در دو طرف آن است.

مثال: دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. در تعداد جواب بحث کنید.

مثال: در صفحه مثلث ABC نقطه بیابید که از دو ضلع AB و AC به یک فاصله باشد و فاصله یکسان از دو راس B و C داشته باشد.

توجه: همان طور که در دو مثال بالا دقت کردیم نقطه یا نقاط جواب، محل برخورد دو یا چند مکان و یا یک مکان با اطلاعات مساله می‌باشد. برای حل ابتدا مکان یا مکان‌های خواسته شده را معرفی می‌کنیم و سپس مجموعه مشترک این مکان‌ها را به عنوان جواب معرفی می‌کنیم.

نکته: برای یافتن مکان هندسی خاصی ابتدا چندین نقطه که در شرایط مکان صدق می‌کند را یافته و سپس این نقاط را به هم وصل می‌کنیم تا مکان مورد نظر مشخص گردد.

چند تمرین کتاب صفحه ۳۹

۱. مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید:

الف. نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.

ب. مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند.

ج. مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

ت. مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O,R)$ در صفحه این دایره مماس خارجی‌اند.

۲. نقاط A، B، C، D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله واز C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید)

ایران توشه
ترشه‌ای برای موفقیت

۳. نقاط A ، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید)

۴. نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید)

۵. هر گاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکلی است؟

۶. هر گاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران خط d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه p ، یک شطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف درباره سطح مقطع حاصل بحث کنید.

ایران توشه
توشه‌ای برای سرنوشت

چند تست مکان هندسی

۱. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله هستند کدام است؟

۱. یک خط ۲. دو خط موازی ۳. دو خط عمود برهم ۴. یک صفحه ۱

۲. مکان هندسی مراکز دایره هایی که بر دو خط موازی مماس اند، کدام است؟

۱. دایره ۲. دو خط موازی ۳. یک خط ۴. دو خط عمود برهم ۳

۳. مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌ها با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند، کدام است؟

۱. خطی موازی با d و به فاصله r از d ۲. خطی موازی با d و به فاصله r از d ۳

۳. دو خط موازی با d و به فاصله r از d ۴. دو خط موازی با d وبه فاصله r از d

۴. مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌ها با شعاع ۲ که بر دایره ی $C(O, \ )$ مماس داخلی اند، کدام است؟

۱. دایره ای به شعاع ۱ ۲. دایره ای به شعاع ۲ ۳. دایره ای به شعاع ۳ ۴. دایره‌ای به شعاع ۴ ۳

۵. مکان هندسی مرکزهای همه دایره ها با شعاع ثابت r که بر دایره ی $C(O,r)$ مماس خارجی اند، کدام است؟ ۱

۱. دایره ای به شعاع r ۲. دایره ای به شعاع $\frac{r}{}$ ۳. مربعی به طول ضلع r ۴. مربعی به طول ضلع r

۶. مکان هندسی مرکز دایره هایی با شعاع ۳ که بر دایره $C(O, \ )$ مماس خارجی اند را در نظر بگیرید. بیشترین فاصله نقاط این مکان هندسی چه قدر است؟

۱. ۷ ۲. ۱۱ ۳. ۱۴ ۴. ۲۰ ۳

۷. مکان هندسی مرکز دایره هایی که در صفحه که بر خط d در نقطه A مماس اند، کدام است؟

۱. خطی موازی با خط d ۲. دایره ای به مرکز A ۳. خطوط عمود بر خط d ۴. خط عمود بر d در نقطه A ۴

۸. تعداد نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به ترتیب به فاصله ی ۲/۵ و ۳/۵ سانتی متر باشند، کدام است؟

۱. بی شمار ۲. ۴ ۳. ۲ ۴. صفر ۲

۹. مکان هندسی مرکز دایره هایی با شعاع ۳ که از نقطه ثابت A می گذرند، کدام است؟ ۴

۱. مربعی به طول ۳ سانتی متر ۲. دایره ای به قطر ۳ سانتی متر

۳. مربعی به طول ۶ سانتی متر ۴. دایره ای به قطر ۶ سانتی متر

۱۰. خط d و پاره خط AB برهم عمود نیستند. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله باشند؟ ۲

۱. صفر ۲. ۱ ۳. ۲ ۴. بی شمار

۱۱. خط d و دو نقطه A و B طوری در صفحه قرار دارند که خط گذرنده از A و B بر خط d عمود است. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشند؟ ۳

۱. صفر ۲. صفر و یک ۳. صفر یا بی شمار ۴. یک یا بی شمار

۱۲. نقاط A و B و C و D در صفحه مفروض اند. کدام گزینه تعداد نقاطی را مشخص کنید که از A و B و به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشند؟

۱. حداکثر یک ۲. دقیقاً یک ۳. یک، بی شمار ۴. صفر، یک، بی شمار ۴

۱۳. حداکثر چند نقطه روی دایره C به شعاع ۵ وجود دارد که از خط Δ به فاصله ۲/۵ باشند؟

۱. ۴ ۲. ۳ ۳. ۲ ۴. ۱ ۱

۱۴. مکان هندسی رئوس مثلث هایی در صفحه که طول قاعده آن ها ۴ سانتی متر و مساحت آن ها ۸ سانتی متر مربع باشد، کدام است؟

۱. دو دایره به شعاع ۴ سانتی متر به مراکز B و C ۲. چهار دایره به شعاع ۴ سانتی متر به مراکز B و C

۳. خطی موازی باقاعده و به فاصله ۴ سانتی متر از آن ۴. دو خط موازی به فاصله ۸ سانتی متر ۴

۱۵. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند، کدام است؟

۱. دو خط عمود برهم ۲. یک دایره ۳. یک خط ۴. دو خط متقاطع ۱

۱۶. مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فواصلشان از دو خط متقاطع مقداری ثابت باشد، کدام است؟

۱. یک خط ۲. دو خط متقاطع ۳. یک دایره ۴. دو دایره ۲

۱۷. حداکثر چند نقطه روی خط L وجود دارد که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۴ ۴. بی‌شمار ۴

۱۸. مکان هندسی مرکز دایره هایی که از دو نقطه A و B می گذرند، کدام است؟ ۲

۱. خطوط موازی با AB ۲. یک خط عمود بر AB ۳. دو خط موازی با AB ۴. خطوط عمود بر AB

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۹. مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله های آن ها از دو خط موازی d و d' که فاصله آن ها ۴ سانتی متر است، برابر با ۴ سانتی متر باشد، کدام است؟ ۳

۱. یک خط بین دو خط d و d' ۲. دو خط موازی با d و d' ۳. نقاط بین d و d' ۴. نقاط روی d و d'

۲۰. مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدر مطلق تفاضل فاصله های آن ها از دو خط موازی d و d' که فاصله آن ها ۴ سانتی متر است، برابر با ۳ سانتی متر باشد، کدام است؟ ۲

۱. تمام نقاط بین d و d' ۲. دو خط موازی با d و d' ۳. نقاط خارج از فضای بین دو خط ۴. یک خط

۲۱. فاصله دو نقطه A و B روی دو خط عمود برهم d و d' همواره برابر ۲ است. مکان هندسی نقطه وسط AB کدام است؟ ۳

۱. یک خط ۲. دو خط موازی ۳. دایره ۴. مربع

۲۲. A و B دو نقطه ثابت و C نقطه ای متغیر از یک صفحه اند. با حرکت نقطه C، مکان هندسی نقطه همرسی عمود منصف های مثلث ABC کدام است؟ ۴

۱. دایره‌ای به مرکز وسط AB ۲. یک نقطه ۳. خطی موازی AB ۴. خطی عمود بر AB

۲۳. مکان هندسی راس A از مثلث ABC که نقاط B و C و طول میانه AM در آن ثابت هستند، کدام است؟ ۱

۱. دایره ۲. یک خط ۳. دو خط موازی ۴. نیم خط

۲۴. نقاط M و N به ترتیب روی دو خط موازی d و d' قرار دارند. مکان هندسی وسط پاره خط MN کدام است؟ ۱

۱. یک خط ۲. نیم دایره ۳. دایره ۴. پاره خط عمود بر d و d'

۲۵. نقطه A و طول ضلع AB از مثلث ABC ثابت اند. مکان هندسی نقطه M پای میانه ی مرسوم از راس C کدام است؟ ۲

۱. خط ۲. دو خط ۳. نیم دایره ۴. دایره

سئوال زمان بر

۲۶. حداکثر چند دایره به شعاع ۱ می توان رسم کرد که بر دایره ی $C(O, \ )$ و خط d مماس باشند؟ ۱

۱. ۴ ۲. ۸ ۳. ۱۲ ۴. بی شمار

۲۷. دایره ای بر مثلث ABC که در راس A قائمه است، محیط شده است. اگر نقاط B و C ثابت باشند و نقطه A روی محیط دایره حرکت کند، مکان هندسی نقطه G مرکز مثلث کدام است؟ ۱

۱. دایره ای به شعاع $\frac{BC}{}$ ۲. دایره ای به شعاع $\frac{BC}{}$ ۳. دایره ای به شعاع $\frac{BC}{}$ ۴. دایره‌ای به شعاع $\frac{BC}{}$

۲۸. مکان هندسی نقاطی که از سه نقطه A و B و C به یک فاصله باشد، کدام است؟ ۱

۱. حداکثر یک نقطه ۲. یک نقطه ۳. حداکثر دو خط متقاطع ۴. دو خط متقاطع

۲۹. دو نقطه C و D و طول AD از متوازی الاضلاع $ABCD$ ثابت اند. مکان هندسی محل تلاقی قطر های متوازی الاضلاع $ABCD$ روی شکل قرار دارد؟ ۴

۱. نقطه همرسی میانه های مثلث ADC ۲. نقطه همرسی میانه های مثلث BCD

۳. خطی که از وسط DC عبور می کند. ۴. دایره‌ای به مرکز وسط DC

۳۰. خط d اضلاع زاویه O را در نقاط A و B قطع کرده است. اگر مکان خط d تغییر کند، مکان هندسی محل تلاقی نیم سازهای زوایای OAB و OBA کدام است؟

ایران توشه
توشه ایران برای موفقیت

۱. خط ۲. یک نقطه ثابت ۳. تمام نقاط بین دو نیم خط زاویه ۴. دایره ۱

۳۱. قاعده BC از مثلث ABC ثابت و نقطه M وسط BC مفروض است. راس A روی خطی موازی با BC و به فاصله d از آن حرکت می کند. مکان هندسی G، نقطه برخورد میانه های مثلث ABC کدام است؟

۱. خطی موازی با BC و به فاصله $\frac{d}{}$ از آن ۲. دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{d}{}$ ۱

۳. خطی موازی با BC و به فاصله $\frac{d}{}$ ۴. دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{d}{}$

۳۲. قطر های مربعی قسمتی از دو خط متمایز d و d' هستند. مکان هندسی نقاطی در صفحه که مجموع فواصل آن نقاط از دو خط d و d' برابر ۱۳ باشد، کدام است؟ ۴

۱. دایره‌ای به شعاع ۱۳ ۲. مربعی به طول ضلع ۱۳ ۳. دایره ای به شعاع $\sqrt{}$ ۴. مربعی به طول ضلع $\sqrt{}$ □

۳۳. مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدر مطلق تفاضل آن ها از دو خط متقاطع برابر ۳ سانتی متر باشد، کدام است؟

۱. ۴خط ۲. ۴ نیم خط ۳. محیط یک مستطیل ۴. ۸ نیم خط ۴

۳۴. دایره $C(O,R)$ و نقطه A درون آن مفروض است. مکان هندسی وسط وترهای گذرنده از نقطه A کدام است؟

۱. دایره ۲. نیم دایره ۳. پاره‌خط ۴. دو خط موازی ۱

۳۵. نقطه A و دایره $C(O,R)$ مفروض است. وسط پاره‌خط‌هایی که A را به نقاط دایره وصل می‌کند، روی شکل... قرار دارند؟

۱. دایره به قطر OA ۲. دایره به شعاع OA ۳. دایره به قطر R ۴. دایره به شعاع R ۳

۳۶. دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروضند. نقطه A و A' به ترتیب روی دایره‌های C و C' چنان قرار دارند که $OA \| O'A'$ است. مکان هندسی وسط پاره خط AA' کدام است؟

۱. دایره به قطر OO' ۲. دایره‌ای به شعاع OO' ۳. دایره به قطر $R+R'$ ۴. دایره به شعاع $R+R'$ ۳

۳۷. دو نقطه A و B به فاصله ۱۲ سانتی‌متر مفروض‌اند. از نقطه A بر همه خط‌هایی که از دو نقطه B می‌گذرند؛ خطی عمود کرده‌ایم. مکان هندسی پای عمودها کدام است؟

۱. دایره‌ای به قطر ۱۲ ۲. دایره‌ای به قطر ۶ ۳. عمود منصف AB ۴. دو خط موازی AB

۳۸. سه نقطه A ، B و C روی یک خط نیستند. چند خط در صفحه مثلث ABC وجود دارد که این سه نقطه از آن‌ها به یک فاصله باشد؟

۱. صفر ۲. یک ۳. دو ۴. سه ۴

۳۹. پاره‌خط AB به طول ۱۰ سانتی‌متر موازی خط l و به فاصله ۵ سانتی‌متر از آن قرار دارد. چند نقطه مانند M روی خط l می‌توان یافت که مثلث AM متساوی الساقین باشد؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

دایره:

دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه معرفی شد که فاصله هر نقطه از آن مانند $A(x,y)$ از نقطه $O(\alpha,\beta)$ فاصله یکسان R می‌باشد. O مرکز دایره و R شعاع دایره می باشد. پس معادله دایره به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$OA = R \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = R \Rightarrow \boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2}$$

به معادله فوق معادله استاندارد دایره می گویند.

مثال: معادله دایره‌ای به مرکز $O(2,-1)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به دست آورید.

معادله گسترده یا ضمنی دایره: اگر معادله دایره را بسط داده و ساده کنیم معادله دایره به شکل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ تبدیل می‌شود که به آن معادله گسترده دایره می گویند.

یافتن مرکز و شعاع دایره از روی حالت گسترده:

مرکز دایره: $O\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ و شعاع از رابطه‌های $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ یا $R=\sqrt{(\text{طول مرکز})^2+(\text{عرض مرکز})^2-c}$ بدست می‌آید زیرا:

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(-2,-1)$ مرکز آن و $M(1,1)$ یک نقطه از آن باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(1,-1)$ مرکز آن بوده و برخط به معادله $3x-4y+3=0$ مماس باشد.

مثال: مرکز و شعاع را بیابید.

الف. $x^2+y^2-2x+4y-4=0$

ب. $2x^2+2y^2+4x-6y=1$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(-۱,۱)$ بوده و بر دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۰$ مماس بیرون باشد.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و با دایره $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۳$ مماس داخل باشد.

مثال: معادلات قطرهای دایره‌ای $(m+۲)x + (m+۱)y = ۱$ است. اگر دایره از نقطه $(۳,-۱)$ بگذرد، شعاع آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: به ازای کدام مقدار k خط $y = k$ بر دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y = ۰$ مماس است.

۱) $\pm\sqrt{۲}$ ۲) $۱\pm\sqrt{۲}$ ۳) $\pm\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

مثال: به ازای کدام مقدار a معادله $x^۲ + y^۲ - ۳x + ۵y + a = ۰$ یک دایره است؟

۱) $a > ۳$ ۲) $a < ۱/۵$ ۳) $a < ۸/۵$ ۴) $a \le ۱۷$

مثال: اگر فاصله نقاط مقطع مخروطی $(m-۲)x^۲+(۴-m)y^۲+(n-۱)xy+ax-۲y=۰$ از نقطه $(۲,b)$ یکسان باشد، مقادیر n، m، b و a را بیابید.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۴)$ دو سر قطر آن باشد.

مثال: معادله دایره گذرنده از سه نقطه $A(۱,۱)$، $B(۲,۲)$ و $C(۳,۱)$ را بنویسید.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه $(۱,۲)$ و $(۳,۰)$ بگذرد و مرکز آن روی خط $y=۲x-۱$ قرار داشته باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: شعاع دایره محیطی مثلث ABC که در آن $A(۰,۱)$، $B(-۱,۰)$ و C منطبق بر مبدا مختصات می‌باشد کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲. $۲\sqrt{۲}$ ۳. $\sqrt{۲}$ ۴. ۱

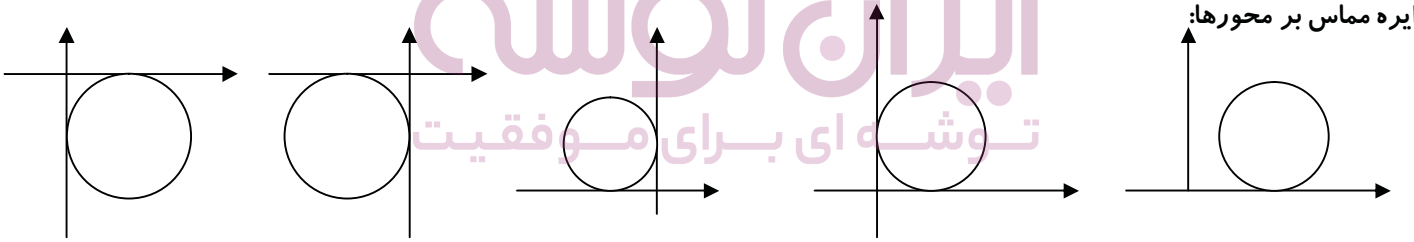
مثال: مختصات مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ که از نقاط $(۴,۱)$ و $(-۳,۰)$ می‌گذرد کدام است؟

۱. $(۱,۳)$ ۲. $(-۱,۳)$ ۳. $(۰,۴)$ ۴. $(۰,-۴)$

مثال: معادله دایره‌ای که طول مرکز آن ۲ باشد و بر دو خط $۲x+۲y=۶$ و $x+y=۱$ مماس است.

مثال: معادله دایره‌ای به شعاع $۳\sqrt{۲}$ را بنویسید که بر نیمساز ربع اول و دوم مماس است.

دایره مماس بر محورها:



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: معادله دایره‌ای به مرکز $O(۱,-۲)$ که بر محور xها مماس است، کدام است؟

۱. $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱$ ۲. $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۴$

۳. $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۴$ ۴. $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۱$

مثال: دو دایره از نقطه $(۲,۱)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس‌اند. شعاع این دایره‌ها کدام است؟

بررسی وضعیت خط و دایره:

مثال: وضعیت خط $۳x+۴y+۳=۰$ و دایره $x^۲+y^۲-۲x-۷=۰$ بررسی کنید.

مثال: دایره‌ای روی خط $x-۲y=۰$ پاره خطی به طول ۴ جدا می‌کند و مرکز آن نقطه $(۱,-۲)$ است. کدام یک از نقاط زیر روی این دایره است؟

۱. $(-۱,۱)$ ۲. $(۱,-۱)$ ۳. $(-۱,-۱)$ ۴. $(۱,۱)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: بیشترین فاصله یک نقطه از دایره $(x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۱$ تا خط $۳x+y=۸$ چقدر است؟

۱. $۱+\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$ ۲. $۲+\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$ ۳. $۲-\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$ ۴. $۱-\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$

چند تمرین کتاب صفحه ۴۶

۱. معادله دایره‌ای را بنویسید که:

الف. خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=۶$ بر آن مماس باشد.

ب. از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد و $y = ۲x - ۱$ شامل قطری از آن باشد.

۲. حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲ + y^۲ - ۳x + ۵y + a = ۰$ بتواند معادله یک دایره باشد.

۳. وضعیت هر یک از نقاط $A(-۱,-۱)$، $B(۱,-۲)$ و $C(۲,۳)$ و $D(۴,-۱)$ را نسبت به دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۵ = ۰$ تعیین کنید.

۴. وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف. $x^۲ + y^۲ = ۴$, $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۴$

ب. $(x-۱)^۲ + y^۲ = ۱$, $x^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$

ج. $x^۲ + y^۲ = ۱$, $x^۲ + y^۲ - ۳\sqrt{۲}x - ۳\sqrt{۲}y + ۵ = ۰$

د. $x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۹ = ۰$, $x^۲ + y^۲ = ۱$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵. معادله دایره محیطی مثلث ABC با رئوس $A(-۱,-۱)$، $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در راس B به دست آورید.

چند تست دایره:

۱. معادله دایره‌ای که دو نقطه $A(\ ,-\ )$ و $B(\ ,\ )$ دو سر قطری از آن باشند، کدام است؟

۱. $x\ +y\ -\ x-y+\ =$ ۲. $x\ +y\ -\ x-y+\ =$ ۳. $x\ +y\ -\ x-y-\ =$ ۴. $x\ +y\ -\ x-y-\ =$ ۱

۲. سطح دایره $=\ (\ x+\ )+(\ y-\ )$ در کدام نواحی مختصات قرار دارد؟

۱. فقط دوم ۲. اول، دوم و سوم ۳. اول و دوم ۴. هر چهار ربع ۳

۳. اگر نقطه $(\ ,\ )$ مرکز دایره $x\ +y\ -ax+\ by=$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱. صفر ۲. -۲ ۳. ۲ ۴. ۴ ۱

۴. فاصله جمیع نقاط واقع بر منحنی $x\ +y\ -mx+ny=k$ از نقطه $(-\ ,\ )$ برابر $\sqrt{\ }$ است، مقدار $m-n+k$ چه قدر است؟

۱. -۱۴ ۲. -۶ ۳. ۶ ۴. ۱۴ ۳

۵. شعاع دایره $(m-\ n)x\ +(\ m-n)y\ --mx-\ ny=$ کدام است؟

۱. ۲ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\frac{\sqrt{\ }}{\ }$ ۴. $\frac{\sqrt{\ }}{\ }$ ۴

۶. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، منحنی به معادله $x\ +(a\ -\ )y\ +\ y+a=$ یک دایره است؟

۱. $\{-\ \}$ ۲. $\{\ \}$ ۳. $\{-\ ,\ \}$ ۴. ϕ ۱

۷. دسته خطوط به معادلات $(m+\ )y+(m+\ )x+\ =$ قطرهای یک دایره اند. اگر این دایره از نقطه $(\ ,\ )$ بگذرد، شعاع آن چقدر است؟

۱. ۴ ۲. ۵ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۲

۸. دایره $a(x\ +y\ -\ x)+b(x\ +y\ -\ y)=$ از نقطه $(\ ,-\ )$ می گذرد، شعاع دایره کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\frac{\sqrt{\ }}{\ }$ ۳. $\frac{\sqrt{\ }}{\ }$ ۴. $\frac{\sqrt{\ }}{\ }$ ۲

۹. نقطه $(a,\ a)$ مرکز دایره گذرنده بر دو نقطه $(\ ,\ )$ و $(\ ,\ -)$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱. ۳ ۲. ۴ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۱

۱۰. شعاع دایره‌ای که از دو نقطه $(\ ,\ )$ و $(\ ,\ )$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله $y=\ x-$ باشد کدام است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\square}$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۳

۱۱. معادله قطری از دایره ی $x\ +y\ -\ x+\ y=$ که موازی محور y ها ست، کدام است؟

۱. $x=-$ ۲. $x=-$ ۳. $x=$ ۴. $x=$ ۴

۱۲. معادله دایره ای که مرکز آن نقطه $(\ -,\ -)$ و $(\ ,\ )$ یک نقطه از آن باشد، کدام است؟

۱. $x\ +y\ -\ x-\ y-\ =$ ۲. $x\ +y\ +\ x+\ y-\ =$ ۲

۳. $x\ +y\ +\ x+\ y-\ =$ ۴. $x\ +y\ +\ x+\ y+\ =$

۱۳. اگر دایره $=\ \ +y\ -\ x+\ y-$ محور x ها را در نقاط A و B قطع کند، آن گاه طول پاره خط AB کدام است؟

۱. $\square\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۲

۱۴. دایره ای مرکزش روی محور x ها قرار دارد و محور y ها را در نقطه ای به عرض ۳ و محور x ها را در نقطه ای به طول ۱- قطع می کند، معادله دایره کدام است؟ ۲

۱. $(x-\ )\ +y\ =$ ۲. $(x-\ \ +y\ =$ ۳. $(x-\ )\ +y\ =$ ۴. $(x-\ )\ +y\ =$

۱۵. دایره ای از دو نقطه $(\ ,\ )$ و $(\ ,\ )$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x-y=$ است. شعاع دایره کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. ۲ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. ۳ ۳

۱۶. شعاع دایره ای که از سه نقطه $P(\ ,\ )$، $Q(\ ,\ )$ و $R(\ ,\ )$ می گذرد، کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۱

۱۷. معادله دایره ای که از نقاط تلاقی خط $x+\ \ y=$ با محورهای مختصات و مبدا مختصات می گذرد، کدام است؟

۱. $(x-\ )\ +(y-\ )\ =$ ۲. $(x-\ )\ +(y-\ \ =$ ۲

۳. $(x-\ )\ +(y-\ )\ =$ ۴. $(x-\ )\ +(y-\ )\ =$

۱۸. خط های $y=x+\ $ و $y=-x+\ $ محور x ها را به ترتیب در نقاط B و C قطع می کنند و نقطه تلاقی آن ها را A می نامیم، شعاع دایره ای که از سه نقطه‌ی A و B و C می گذرد، کدام است؟

۱. ۵ ۲. ۴/۵ ۳. ۳ ۴. ۳/۵ ۳

۱۹. از نقطه $A(-\ \ ,\ )$ دو مماس AB و AC بر دایره $x\ +y\ -\ x+\ y+\ =$ رسم شده است. معادله دایره محیطی مثلث ABC کدام است؟

۱. $x\ +y\ +\ x+\ y-\ =$ ۲. $x\ +y\ -\ x-\ y+\ =$ ۱

۳. $x\ +y\ +\ x-\ y-\ =$ ۴. $x\ +y\ -\ x+\ y-\ =$

۲۰. طول وتری که دایره به معادله $x\ +y\ -\ x=$ — از خط به معادله $y=\ x$ جدا می کند، کدام است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۵ ۳

۲۱. خط $my+x-\ =$ دایره ی $x\ -\ x+y\ -\ \ =$ را در دو نقطه قطع می کند، فاصله این دو نقطه چقدر است؟

۱. ۲ ۲. ۴ ۳. ۱ ۴. $\sqrt{\ }$ ۲

۲۲. خط $x+\ \ y=$ دایره $x\ +y\ -\ x-\ y=$ را در دو نقطه ی A و B قطع می کند، فاصله A و B از هم چقدر است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱. ۴ ۲. ۸ ۳. ۱۰ ۴. ۱۲ ۲

۲۳. مرکز دایره ای به شعاع ۳ که دو خط $x+y-=$ و $x+y+=$ را قطع می کند و از هر یک وتری به طول ۴ جدا می کند کدام است؟

۱. $(\ ,-\ )$ ۲. $(-\ ,\ )$ ۳. $(\ ,\ )$ ۴. $(\ ,\ )$ ۱

۲۴. مساحت دایره ای که از دو خط $x-y=$ و $x-y=$ وترهای به طول ۱۴ جدا کند کدام است؟

۱. π ۲. π ۳. π ۴. π ۳

۲۵. خط $y=x+$ دایره $x+y-x-=$ را در دو نقطه ی A و B قطع می کند، طول نقطه وسط پاره خط AB کدام است؟

۱. $-$ ۲. $-$ ۳. $--$ ۴. $--$ ۳

۲۶. شعاع دایره ای که از نقاط $A(\ ,\ )$ و $B(-\ ,\ )$ می گذرد و فاصله مرکز آن از خط شامل AB برابر $\sqrt{\ }$ است، کدام است؟

۱. $\sqrt{\square}$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. ۳ ۲

۲۷. به ازای کدام مقادیر a، خط $x+y+a=$ دایره $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰$ را در دو نقطه متمایز قطع می کند؟

۱. $-\square<a<$ ۲. $a>$ ۳. $a<$ ۴. $-<a<\square$ ۱

۲۸. خط $y=mx$ دایره $x+y-x+y+=$ را در نقاط A و B قطع می کند و $AB=\sqrt{\ }$ است. مقدار m کدام است؟

۱. ۳ ۲. $--$ ۳. $-$ ۴. ۱ ۳

۲۸. اندازه مماسی که از نقطه $(\ ,-\ )$ بر دایره $x+y+x+y=$ رسم شود، کدام است؟

۱. ۴ ۲. ۵ ۳. ۶ ۴. ۷ ۲

۲۹. از نقطه $(\ ,\ )$ دو مماس بردایره $x+y=$ رسم می کنیم تا بر دایره در نقاط A و B مماس شوند، مختصات A و B کدام است؟

۱. $(\ ,\pm\sqrt{\ })$ ۲. $(\sqrt{\ },\pm\ )$ ۳. $(\pm\sqrt{\ },\ )$ ۴. $(\pm\ ,\sqrt{\ })$ ۱

۳۰. خط D در نقطه $T(\ ,\ )$ بردایره ی $x+y-=$ مماس است. معادله خط D کدام است؟

۱. $y+x-=$ ۲. $y+x+=$ ۳. $y+x-=$ ۴. $y-x-=$ ۳

۳۱. از نقطه $M(\ ,\ )$ می توان دو مماس بردایره $x+y=$ رسم کرد. مختصات یکی از نقاط تماس کدام است؟

۱. $(\ ,\ )$ ۲. $(\ ,-\ )$ ۳. $(-\ ,\ )$ ۴. $(\ ,\ )$ ۴

۳۲. شیب خطی که از نقطه $A(-\ ,-\ )$ بگذرد و بر دایره $x+y+x-y-=$ مماس باشد، کدام است؟

۱. $-,--$ ۲. $--,--$ ۳. $\frac{-}{--},-$ ۴. $-,-$ ۱

۳۳. اگر خط $y=$ بردایره $x+y-x+y+n=$ مماس باشد، آن گاه n کدام است؟

۱. -۵ ۲. -۱ ۳. صفر ۴. ۵ ۱

۳۴. معادله خط قائم بردایره $x+y-x+y-=$ که موازی خط $x+y=$ است، کدام است؟

۱. $x+y=$ ۲. $x+y-=$ ۳. $x+y-=$ ۴. $x+y+=$ ۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۵. تمام خطوطی که با دایره $x + y - x + y =$ زاویه $^\circ$ می سازند، از نقطه ثابت A می گذرند. مختصات A کدام است؟

۱. $(\ ,-\ )$ ۲. $(-\ ,\ )$ ۳. $(\ ,-\ )$ ۴. $(-\ ,-\ )$ ۱

۳۶. دایره ای بر خط به معادله $y = x -$ مماس است و تمام قائم های بردایره از نقطه $(\ ,\ -)$ می گذرند. بیش ترین فاصله نقاط این دایره از محور x ها کدام است؟

۱. $+\sqrt{\ }$ ۲. $+\sqrt{\ }$ ۳. ۵ ۴. ۶ ۱

۳۷. به ازای کدام مقدار a، زاویه بین خط مماس بردایره $x + y - x + y =$ و خط به معادله $x + y = a$ در نقطه تلاقی آن ها، $^\circ$ است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۵ ۱

۳۸. اگر دایره $x + y + mx - y =$ در مبدا مختصات برنیم ساز ناحیه اول و سوم مماس باشد، آن گاه شعاع دایره چقدر است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. ۲ ۴. $\sqrt{\ }$ ۱

۳۹. دایره ای از دو نقطه $(\ ,\ )$ و $(\ ,\ )$ گذشته و بر محور x ها مماس است، این دایره محور y ها را در نقطه ای دیگر با کدام عرض قطع می کند؟

۱. ۵ ۲. ۶ ۳. ۷ ۴. ۸ ۴

۴۰. شعاع کوچکترین دایره ای که از نقطه $(\sqrt{\ },\sqrt{\ })$ می گذرد و بر خط $y = x$ مماس باشد، کدام است؟

۱. ۴ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. ۲ ۴. $\sqrt{\ }$ ۳

۴۱. دایره ای از دو نقطه $(\ ,\ )$ و $(\ ,-)$ گذشته و بر خط به معادله $y =$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

۱. $-$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $-$ ۴. ۳

۴۲. معادله دایره ای که مرکز آن به طول ۱- و بر دو خط به معادلات $y = x$ و $y = x +$ مماس باشد کدام است؟

۱. $x + y + x - y =$ ۲. $x + y + x - y =$ ۱

۳. $x + y - x + y =$ ۴. $x + y + x - y =$

۴۳. دایره ای برمحور x ها و خط $x + y =$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطه مشترک آن با محور x ها با کدام طول است؟

۱. ۱ ۲. ۱/۵ ۳. ۲ ۴. ۲/۵ ۱

۴۴. نقطه $M(\sqrt{\ },b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط $y = x$ و $x = y$ مماس است. شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۱/۵ ۳. ۲ ۴. ۲/۵ ۳

۴۵. مرکز دایره ای بر نیم ساز ناحیه اول است. اگر این دایره از نقطه $A(\ ,\ )$ گذشته و بر خط به معادله $y = x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\square}$ ۱

۴۶. اگر دایره $x + ax + y - y = b$ در ربع اول بر هر دو محور مماس باشد، $a + b$ چقدر است؟

۱. -۸ ۲. -۴ ۳. -۱۶ ۴. -۱۲ ۴

۴۷. دو دایره از نقطه $(\ ,\ )$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس اند، شعاع دایره ها کدام است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱. ۱ و ۴ ۲. ۱ و ۵ ۳. ۲ و ۴ ۴. ۵ و ۲ ۲

۴۸. دو دایره گذرا از نقطه $(-,\ )$ بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع دایره بزرگتر کدام است؟

۱. ۱۴ ۲. ۱۵ ۳. ۱۷ ۴. ۱۹ ۳

۴۹. اگر (x,y) نقطه ای روی نمودار به معادله $x+y-x-y=$ باشد، آن گاه کم ترین مقدار عبارت $\sqrt{(x+\ )+(y+\ )}$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴ ۲

۵۰. فاصله نزدیکترین نقطه دایره به معادله $x+y-x+y=$ از خط به معادله $x+y=$ کدام است؟

۱. $-$ ۲. ۱ ۳. $-$ ۴. ۲ ۲

۵۱. همه خط های $y-mx-m+=$ دایره به معادله $x+y+x+y-\square=$ را در دو نقطه قطع می کنند. کوتاهترین فاصله این نقاط کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\square\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۴

۵۲. طول وتری از دایره $x+y=$ که نقطه $A(\ ,\ )$ وسط آن باشد، کدام است؟

۱. ۵ ۲. ۸ ۳. ۴ ۴. ۱۰ ۲

۵۳. معادله وتر مشترک دو دایره $x+y=$ و $x+y+x+y=$ کدام خط است؟

۱. $x+y-=$ ۲. $x+y+=$ ۳. $y-x+=$ ۴. $y-x-=$ ۲

۵۴. طول وتر مشترک دو دایره $x+y-=$ و $x+y-x-y+=$ کدام است؟

۱. $\sqrt{\ }$ ۲. $\sqrt{\ }$ ۳. $\sqrt{\ }$ ۴. $\sqrt{\ }$ ۴

۵۵. حدود m برای آن که نقطه $A(m,m-)$ خارج دایره $x+y=$ باشد، کدام است؟

۱. $-<m<$ ۲. $m>-$ ۳. $m<$ ۴. $m<-$ یا $m>$ ۴

۵۶. به ازای چند مقدار صحیح k، نقطه $A(-\ ,\ )$ داخل دایره $x+y+\square x-y+k=$ قرار گیرد؟

۱. ۲۰ ۲. ۱۱ ۳. ۱۲ ۴. بی شمار ۴

۵۷. به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x+y+x-y=$ و $x+y-y+b=$ مماس داخل اند؟

۱. -۵ ۲. -۴ ۳. -۳ ۴. -۲ ۲

۵۸. دو دایره C و C' در نقطه $(\ ,\ )$ مماس برون هستند. اگر قائم های بر دایره C همواره از نقطه $(-,\ )$ بگذرد، مرکز دایره C' با شعاع $\sqrt{\ }$ کدام است؟

۱. $(-\ ,\ )$ ۲. $(-\ ,\ )$ ۳. $(\ ,-\ )$ ۴. $(\ ,-\ )$ ۱

۵۹. دایره C بردایره به معادله $x+y-x+y=$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره C از نقطه $(\ ,\ )$ می گذرد. شعاع دایره C کدام است؟

۱. ۶ ۲. ۷ ۳. ۸ ۴. ۹ ۲

۶۰. دو دایره به معادله های $x+y-x+y=$ و $x+y-x+y+=$، نسبت به یکدیگر چگونه اند؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱. مماس خارجی ۲. مماس داخلی ۳. متقاطع در دو نقطه ۴. متخارج ۲

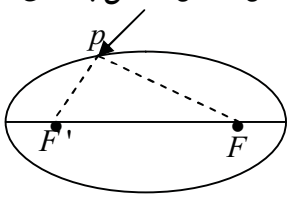
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

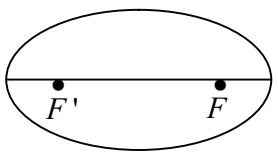
بیضی

یک تکه نخ در نظر گرفته و دو سر آن را در دو نقطه F و F' ثابت کنید. فرض کنید طول نخ l باشد و $l > FF'$، یک مداد را داخل نخ کنید و منحنی‌ای به گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که بیضی نام دارد.

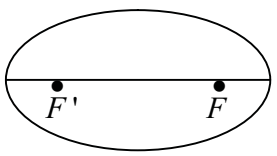


۱. یک نقطه دلخواه روی شکل رسم شده در نظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطه از دو نقطه ثابت F و F' برابر چیست؟

۲. یک نقطه دلخواه مانند A در درون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه ثابت F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه مورد نظر از F و F' کوچکتر از l است.



۳. یک نقطه دلخواه مانند B بیرون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه مورد نظر از F و F' بزرگتر از l است.



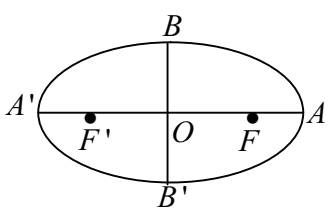
از مراحل ۱ تا ۳ متوجه چه ویژگی مشترکی در همه نقاط بیضی شدید که هیچ نقطه دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

با توجه به مراحل بالا تعریف بیضی به صورت زیر مشخص می‌شود.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت (کانون های بیضی) یک مقدار یکسان باشد.

دو نقطه ثابت را با نماد F و F' نمایش داده و کانون‌های بیضی و مقدار ثابت را $2a$ می‌نامیم. $MF + MF' = 2a$ (M روی بیضی)

در مورد بیضی موارد زیر را به خاطر بسپارید.



۱. F و F': کانون‌ها، A و A': رئوس کانونی، B و B' رئوس ناکانونی، O مرکز، FF': فاصله کانونی، AA': قطر بزرگ و BB' : قطر کوچک

۲. $FF' = 2c$ ، $AA' = 2a$ و $BB' = 2b$

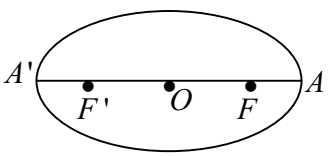
۳. $AO = A'O = a$ ، $BO = B'O = b$ ، $FO = F'O = c$ و $AF = A'F' = a - c$ و $AF' = A'F = a + c$

۴. $a^2 = b^2 + c^2$ بنابراین $a > b, c$

نمایش درستی بعضی موارد ذکر شده:

۱. در ترسیم بیضی با نخ و مداد دو وضعیتی را که مداد در نقاط A و A' قرار می‌گیرد را در نظر بگیرید.

الف. نشان دهید که $FA = F'A'$ و از آن نتیجه بگیرید که $OA' = OA = a$ و لذا طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.



ب. نشان دهید طول نخ مورد نظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

۲. در رسم بیضی در وضعیتی را که مداد در نقطه B و B' قرار دارد در نظر بگیرید:

الف. نشان دهید $b^2 + c^2 = a^2$.

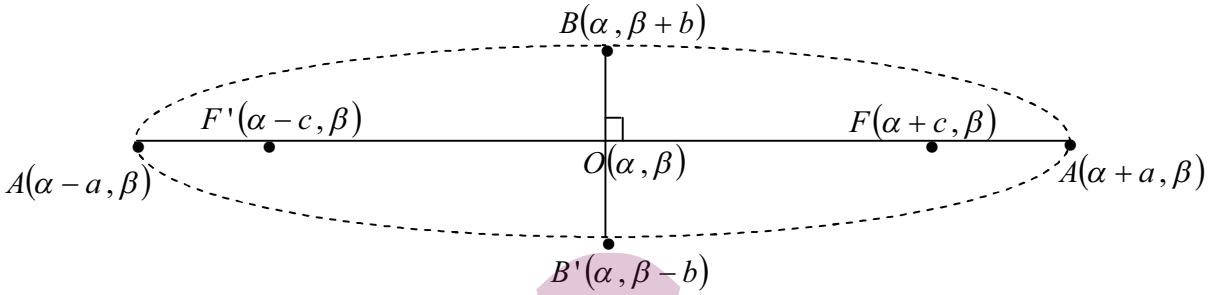
ب. نتیجه بگیرید که $OB' = OB = b$ و لذا قطر کوچک بیضی برابر $2b$ است.

توجه: اگر قطر بزرگ بیضی به صورت افقی باشد بیضی را افقی و اگر به صورت عمودی باشد بیضی را قائم می‌نامیم.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

نگاه مختصاتی به بیضی:

در بیضی افقی داریم:



به همین ترتیب در بیضی قائم داریم: (شما رسم کنید)

مثال: در یک بیضی افقی با مرکز $O(۱,۲)$ و $a=۳$ و $b=۲$ موارد زیر را مشخص کنید.

الف. مختصات کانون‌ها، رئوس کانونی(رئوس اصلی) و رئوس ناکانونی(رئوس فرعی)

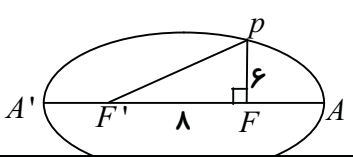
ب. فاصله کانونی، قطر بزرگ(قطر اصلی)، قطر کوچک (قطر فرعی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: فاصله یک راس ناکانونی بیضی از کانون و راس کانونی به ترتیب ۲ و $\sqrt{۵}$ است. بیشترین فاصله نقطه $M(x,y)$ روی بیضی از یکی از کانون‌های بیضی کدام است؟

۱. $۱+\sqrt{۳}$ ۲. $۲+\sqrt{۳}$ ۳. $۱+۲\sqrt{۳}$ ۴. $۲+۲\sqrt{۳}$

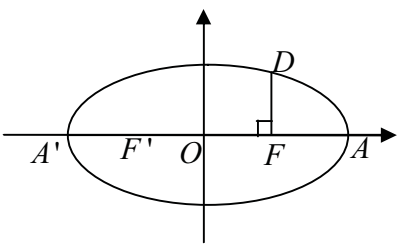
مثال: در بیضی مقابل نسبت طول قطر کوچک به قطر بزرگ کدام است؟



۱. $\frac{۳}{۴}$ ۲. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

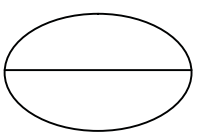
۳. $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴. $\frac{۱}{۲}$

مثال: در یک بیضی، قطرهای بزرگ و کوچک بر محورهای مختصات منطبق هستند. اگر F کانون بیضی و $OF = FA = ۲$ باشد آنگاه مجموع مختصات نقطه D کدام است؟



۱. ۵ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

نکته: خطی از کانون‌های بیضی (F یا F')، عمود بر محور کانونی (FF') رسم می‌کنیم تا بیضی را در نقاط M و N قطع کند، پاره‌خط MN را وتر کانونی بیضی می‌گویند که طول آن برابر با $\frac{۲b^۲}{a}$ است.(بعداً ثابت کنید)



مثال: طول وتر کانونی مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه $F(۲,۴)$ و $F'(۲,۲)$ برابر ۸ باشد، چقدر است؟

۱. $\frac{۶}{۵}$ ۲. $\frac{۴}{۳}$ ۳. $\frac{۵}{۲}$ ۴. $\frac{۷}{۲}$

خروج از مرکز بیضی

عدد $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند. چون در بیضی $a > c$ است، پس همواره $۰ < e < ۱$ است. اگر e به یک نزدیک شود، بیضی کشیده‌تر می‌شود (به خط نزدیک می‌شود). اگر e به صفر نزدیک شود، بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود.

توجه: در حالتی که $e = ۱$ شود، بیضی تبدیل به یک پاره خط می‌شود (پاره‌خط FF') و اگر $e = ۰$ شود، بیضی تبدیل به دایره می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

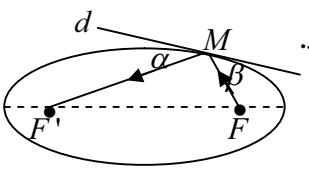
نکته: خروج از مرکز از رابطه $e=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}$ نیز بدست می‌آید. (درستی رابطه را نشان دهید)

مثال: $F(۴,۲)$ و $F'(-۲,۲)$ کانون‌های یک بیضی هستند که $A(۶,۲)$ یک راس کانونی آن است. خروج از مرکز بیضی را بدست آورید.

مثال: $B\left(۱+\frac{۲}{\sqrt{۳}},۰\right)$ و $B'\left(۱-\frac{۲}{\sqrt{۳}},۰\right)$ رئوس ناکانونی بیضی هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ باشد، مجموع فواصل نقطه p روی بیضی از دو کانون بیضی کدام است؟

۱. ۶ ۲. $۲\sqrt{۳}$ ۳. ۳ ۴. $\sqrt{۶}$

ویژگی بازتابندگی بیضی:



اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس باشد و بدنه داخلی بیضی آینه‌ای باشد، نتایج زیر به دست می‌آید.

۱. اگر از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی بتابد، بازتاب آن از کانون دیگر می‌گذرد.

۲. زاویه‌های تابش و بازتابش با هم برابرند؛ یعنی $\alpha=\beta$ است.

۳. اگر مجموع فواصل نقاط خط d از دو کانون را به دست آوریم، مجموع فواصل نقطه M از دو کانون، کمترین مقدار را دارد.(هرون)

مثال: درستی نتایج بالا را بررسی کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: نقاط $B(1,2+2\sqrt{5})$ و $B'(1,2-2\sqrt{5})$ رئوس ناکانونی یک بیضی با بدنه داخلی آینه‌ای هستند که فاصله راس ناکانونی از کانون آن $3\sqrt{5}$ است. از یک منبع نور که روی کانون سمت راست بیضی قرار دارد پرتوی به نقطه $(6,4)$ روی بیضی می‌تابد. شیب پرتو باز تابش چقدر است؟

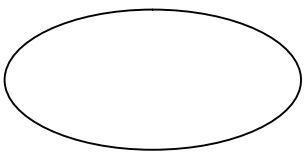
۱. ۰/۵ ۲. ۱ ۳. ۱/۵ ۴. ۲

چند تمرین کتاب صفحه ۵۷

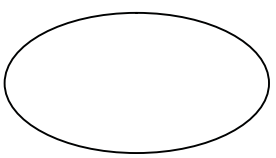
۱. دو نقطه A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است.

اگر $AF'=BF$ باشد، نشان دهید:

الف. در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

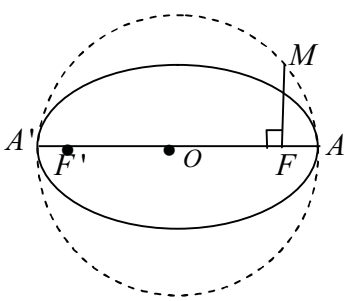


ب. در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

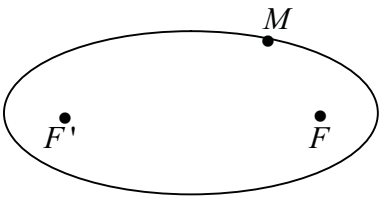


ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

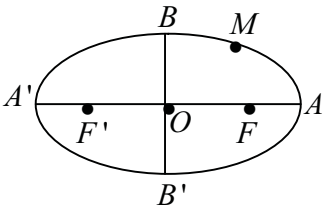
۲. قطر دایره، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را ددر نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



۳. در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بربیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$.



۴. نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

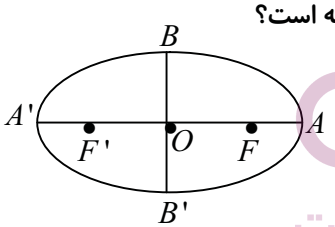


الف. نشان دهید $OM = OF = OF'$.

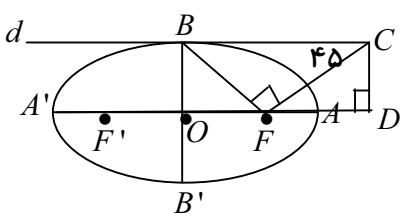
ب. نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ج. طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

۵. در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه FBF' چند درجه است؟



۶. دربیضی مقابل AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = 45^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را بدست آورید.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷. فرض کنید از مثلث ABC ، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.

چند تست بیضی

۱. چند نقطه روی خط $y=x+1$ یافت می شود که مجموع فواصلشان از دو نقطه $A(0,1)$ و $B(1,2)$ برابر ۲ باشد؟

۱. صفر ۲. ۱ ۳. ۲ ۴. بی شمار ۳

۲. مختصات یک کانون بیضی که بر چهار خط $x=2$، $x=-4$، $y=5$ و $y=1$ مماس باشد، کدام است؟

۱. $(-1,3+\sqrt{5})$ ۲. $(-1,3-\sqrt{5})$ ۳. $(-1+\sqrt{5},3)$ ۴. $(-1+\sqrt{5},-3)$ ۳

۳. اگر $B\left(\frac{1}{2},-3\right)$ و $F\left(-\frac{5}{2},1\right)$ به ترتیب یک راس و یک کانون بیضی باشند، فاصله دورترین نقطه محیط بیضی از مرکز بیضی کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{22}}{4}$ ۲. ۴ ۳. ۵ ۴. $\sqrt{34}$ ۳

۴. اگر نقاط $(0,-\sqrt{10})$ و $(0,\sqrt{5})$ راس های یک بیضی باشند، کدام گزینه مختصات یکی از کانونهای بیضی است؟

۱. $\left(0,-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ ۲. $(\sqrt{15},0)$ ۳. $(0,-\sqrt{5})$ ۴. $(0,-\sqrt{15})$ ۳

۵. بیضی به مرکز $(-2,3)$ بر محور y ها و خط $y=7$ مماس است. مساحت مثلثی که رئوس آن کانون های بیضی و یکی از رئوس ناکانونی است، چقدر است؟

۱. $2\sqrt{3}$ ۲. ۴ ۳. $4\sqrt{3}$ ۴. ۸ ۳

۶. $A\left(1,-1-2\sqrt{2}\right)$ و $B(3,-1)$ رئوس بیضی هستند. بیشترین مساحت از بین چهار ضلعی هایی که دو راس آن روی بیضی و دو راس دیگر آن کانون های بیضی باشند، چقدر است؟

۱. $8\sqrt{2}$ ۲. ۸ ۳. $4\sqrt{2}$ ۴. ۴ ۲

۷. در یک بیضی نقاط $F'(2,2)$ و $F(2,4)$ کانون های آن و فاصله راس کانونی بیضی از دورترین کانون ۴ است. مختصات یکی از رئوس ناکانونی بیضی کدام است؟

۱. $(2-\sqrt{2},3)$ ۲. $(2+\sqrt{2},2)$ ۳. $(2+\sqrt{2},3)$ ۴. $(2+2\sqrt{2},3)$ ۴

۸. در یک بیضی اگر فاصله یک کانون از دو راس کانونی ۱ و ۹ باشد، طول قطر بزرگ چند برابر طول قطر کوچک بیضی است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱. $\frac{۵}{۴}$ ۲. $\frac{۴}{۳}$ ۳. $\frac{۵}{۳}$ ۴. ۳ ۳

۹. $M(-۲,-۳)$ و $N(-۴,۰)$ رئوس یک بیضی هستند، به ازای چه مقادیری از R دایره $(x+۲)^۲+y^۲=R^۲$ و بیضی، چهار نقطه مشترک دارند؟

۱. $\frac{۱}{۳}<R<\frac{۱}{۲}$ ۲. $\frac{۱}{۶}<R<\frac{۱}{۴}$ ۳. $۲<R<۳$ ۴. $۴<R<۶$ ۳

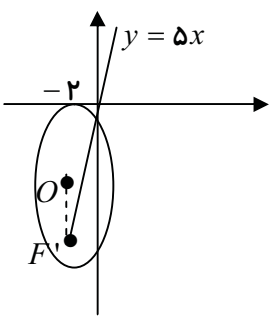
۱۰. طول قطرهای بزرگ و کوچک یک بیضی ۶ و۴ است. خطی که از کانون، عمود بر محور کانونی بیضی رسم شودبیضی را در نقاط M و N قطع می کند. طول MN چقدر است؟

۱. $\sqrt{۱۳}$ ۲. $\sqrt{۵}+۱$ ۳. ۳ ۴. $\frac{۸}{۳}$ ۴

۱۱. نقطه M محل برخورد بیضی با خطی است که از کانون، عمود بر محور کانونی رسم شده است. اگر مجموع فواصل M از دو کانون بیضی و فاصله دو کانون بیضی به ترتیب ۴ و ۲ باشند، فاصله M از دورترین کانون چقدر است؟

۱. ۱/۵ ۲. $\sqrt{۵}$ ۳. $۳\sqrt{۲}-۲$ ۴. ۲/۵ ۴

۱۲. O و F' به ترتیب مرکز و کانون بیضی شکل مقابل هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۲}{۳}$ باشد، طول وتر کانونی بیضی کدام است؟



۱. $\frac{۵}{۹}$ ۲. $\frac{۱۰}{۳}$ ۳. $\frac{۱۰}{۹}$ ۴. $\frac{۲۰}{۳}$ ۴

۱۳. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۲}{۳}$ باشد، نسبت قطر کوچک به قطر بزرگ کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۲. $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۳. $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ ۴. $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ ۱

۱۴. مرکز یک بیضی و مرکز دایره $(x-۵)^۲+(y+۳)^۲=۹$ یکی است. اگر قطرهای بیضی به موازات محورهای مختصات و بیضی بر محورهای مختصات مماس باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱. $\frac{۴}{۵}$ ۲. $\frac{۳}{۵}$ ۳. $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴. $\frac{۳}{۴}$ ۱

۱۵. خروج از مرکز بیضی که دو راس آن $A(۴,۰)$ و $B(۱,۵)$ باشند کدام است؟

۱. $\frac{۴}{۵}$ ۲. $\frac{۳}{۵}$ ۳. $\frac{۱}{۵}$ ۴. $\frac{۲}{۳}$ ۱

۱۶. $F(۲,۵)$ و $F'(۲,-۳)$ کانون های یک بیضی هستند که از نقطه $(۱,-۶)$ می گذرد. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲. $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۳. $\frac{\sqrt{۵}}{۲۰}$ ۴. $\frac{۱}{۲}$ ۱

۱۷. در یک بیضی فاصله یک کانون از دورترین نقاط بیضی ۳ برابر فاصله همان کانون از نزدیک ترین نقاط آن بیضی است. طول قطر کوچک چند برابر فاصله کانونی بیضی است؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱. $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ ۲. $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳. $\sqrt{۳}$ ۴. $۲\sqrt{۲}$ ۳

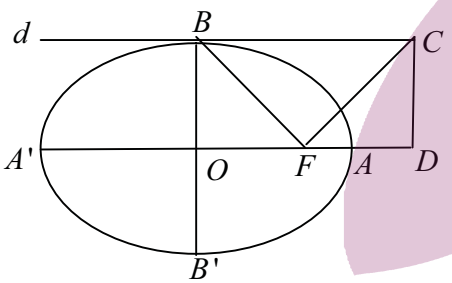
۱۸. در یک بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. از دو راس ناکانونی به یک کانون بیضی وصل می کنیم، زاویه بین دو پاره خط چقدر است؟

۱. ۳۰ درجه ۲. ۶۰ درجه ۳. ۴۵ درجه ۴. $\cos^{-۱}\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲

۱۹. A و A' دو راس کانونی، B و B' رئوس ناکانونی و F و F' کانون های یک بیضی هستند، اگر نسبت مساحت چهار ضلعی $BFB'F'$ به مساحت چهار ضلعی $ABA'B'$ برابر $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ باشد، قطر بزرگ بیضی چند برابر قطر کوچک آن است؟

۱. $\frac{۳}{\sqrt{۷}}$ ۲. $\sqrt{۳}$ ۳. $\sqrt{۷}$ ۴. ۳ ۳

۲۰. در شکل مقابل AA' و BB' دو قطر بیضی هستند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم کنیم و در نقطه F عمود بر BF رسم می کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند، از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند، اگر $BCF = ۴۵^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ کدام است؟



۱. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲. ۱ ۳. $\frac{۱}{۲}$ ۴. $\sqrt{۲}$ ۴

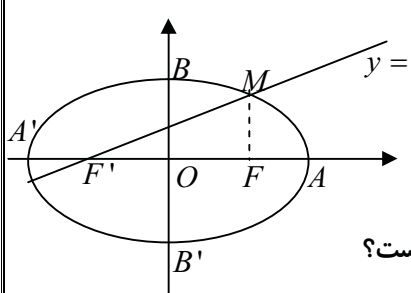
۲۱. در شکل مقابل AA' و BB' دو قطر بیضی هستند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم کنیم و در نقطه F عمود بر BF رسم می کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند، از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند، اگر $\frac{FD}{FC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

۱. $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۲. $\frac{۱}{۲}$ ۳. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴. $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲

۲۲. با فرض این که $A(۵,۲)$ و $A'(-۱,۲)$ رئوس کانونی مسیر حرکت یک سیاره به دور خورشید باشند و فاصله یک راس کانونی از یک راس ناکانونی برابر $\sqrt{۱۳}$ باشد، کدام گزینه می تواند مختصات نقطه گرفتن خورشید را مشخص کند؟

۱. $(۲,۲)$ ۲. $(۲,۴)$ ۳. $(۲,۲+\sqrt{۱۳})$ ۴. $(۲-\sqrt{۵},۲)$ ۴

۲۳. قطر کوچک بیضی مقابل، کدام است؟



۱. $۲\sqrt{۳}$ ۲. $۴\sqrt{۳}$ ۳. $۵\sqrt{۳}$ ۴. ۸ ۲

۲۴. در مثلث ABC اندازه ضلع مقابل $BC = ۲\sqrt{۳}$ و $AB + AC = ۴$، بیشترین مساحت مثلث کدام است؟

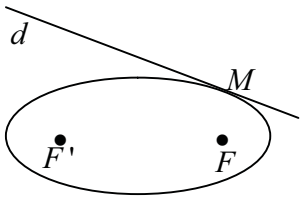
۱. ۲ ۲. ۳ ۳. $\sqrt{۳}$ ۴. $\sqrt{۲}$ ۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵. اندازه قطر کوچک بیضی ۴ و فاصله کانونی آن $۴\sqrt{۳}$ است. خطی از کانون F می گذرد و بیضی را در دو نقطه M و N قطع می کند. اگر F' کانون دیگر بیضی باشد، محیط مثلث MNF' کدام است؟

۱. ۸ ۲. ۱۶ ۳. ۴ ۴. ۱۸ ۲

۲۶. در بیضی مقابل $FF'=۲\sqrt{۶}$ و طول قطر کوچک آن برابر $۲\sqrt{۳}$ است. خط d در نقطه M بر بیضی مماس است. از نقطه F' خطی موازی MF رسم می کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. حاصل $NF'+MF$ کدام است؟



۱. ۴ ۲. ۸ ۳. ۶ ۴. ۹ ۳

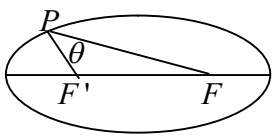
۲۷. فاصله کانونی یک بیضی $FF'=۲\sqrt{۶}$ و طول قطر بزرگ آن برابر $AA'=۴\sqrt{۲}$ است. دایره ای به قطر، قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم. از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده ایم تا بیضی را در N و دایره را در M بالای AA' قطع کند. طول پاره خط MN کدام است؟

۱. $\frac{۱}{۲}$ ۲. $\frac{۲}{۳}$ ۳. $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴

۲۸. نقطه $M(x,y)$ در معادله $\sqrt{(x-۳)^۲+(y+۱)^۲}+\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۵)^۲}=۱۰$ صدق می کند. بیش ترین فاصله نقاط این نمودار از یکدیگر کدام است؟

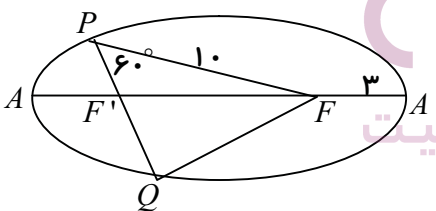
۱. ۱۰ ۲. ۱۲ ۳. ۸ ۴. ۶ ۱

۲۹. قطر کوچک بیضی مقابل، ۴ و فاصله کانونی آن $۲\sqrt{۵}$ است. اگر P نقطه ای روی بیضی باشد به طوری که $PF-PF'=۴$، آن گاه $\cos\theta$ کدام است؟



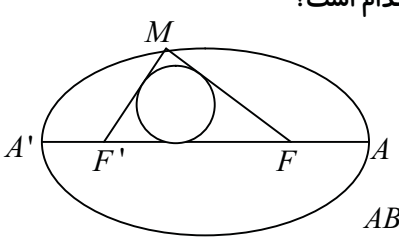
۱. $\frac{۱}{۵}$ ۲. $\frac{۲}{۵}$ ۳. $\frac{۳}{۵}$ ۴. $\frac{۴}{۵}$ ۳

۳۰. در بیضی به کانون های F و F' مطابق شکل نقاط P و Q روی آن چنان هستند که $PF=۱۰$ و $\hat{P}=۶۰^\circ$. اگر $AF=۳$ باشد آن گاه محیط مثلث PQF کدام است؟



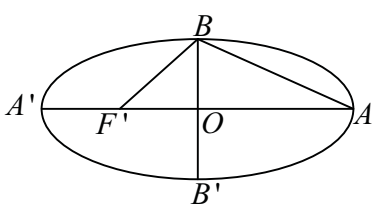
۱. $۲۹\frac{۱}{۳}$ ۲. $۲۹\frac{۲}{۳}$ ۳. $۲۹\frac{۱}{۲}$ ۴. $۲۹\frac{۳}{۴}$ ۱

۳۱. طول قطرهای بیضی مقابل ۱۰ و ۸ است. شعاع دایره محاطی داخلی مثلث قائم الزاویه MFF' کدام است؟



۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴ ۲

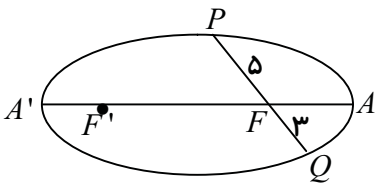
۳۲. در بیضی مقابل AA' و BB' قطر های بزرگ و کوچک و F' کانون بیضی است. اگر $ABF'=۹۰^\circ$ باشد آن گاه خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱. $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ ۲. $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$ ۳

۳. $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۴. $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳۳. در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $AA'=۱۲$ است. طول فاصله کانونی کدام است؟



۱. $۳\sqrt{۶}$ ۲. $۳\sqrt{۳}$ ۳. $۶\sqrt{۲}$ ۴. ۸

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

سهمی

روش رسم:

تعریف سهمی: سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه $A(۰,۱)$ و خط $x=۲$ به یک فاصله باشند، کدام است؟

۱. $x^۲-۲x+۴y=۳$ ۲. $y^۲+۲y-۴x=۳$ ۳. $y^۲-۲y+۴x=۳$ ۴. $y^۲=۴(x-۱)$

ویژگی‌های سهمی

۱. سهمی سه جزء اصلی دارد: F (کانون سهمی)، S (راس سهمی) و d (خط هادی سهمی)

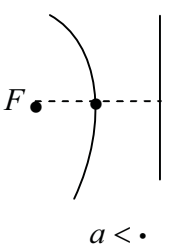
۲. فاصله راس سهمی(S) تا کانون (F) برابر با فاصله راس سهمی تا خط هادی (d) است؛ یعنی راس سهمی وسط کانون و خط هادی قرار دارد.

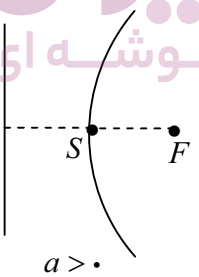
۳. فاصله راس سهمی تا کانون را فاصله کانونی می‌نامیم و با $|a|$ نمایش می‌دهیم. a را با نام پارمتر سهمی نیز صدا می‌زنند.

۴. کانون همواره در دهانه سهمی قرار دارد. خط هادی همواره پشت سهمی است.

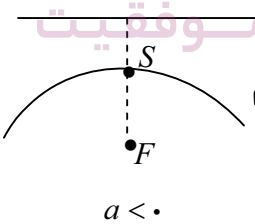
۵. اگر $a>۰$ باشد، دهانه سهمی در جهت مثبت محورهای مختصات باز می‌شود و اگر $a<۰$ باشد، دهانه سهمی در جهت منفی محورها بازمی-شود.

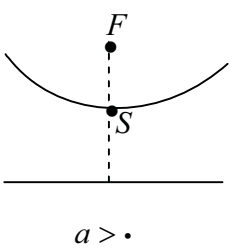
الف. سهمی افقی





ب. سهمی قائم





۶. اگر سهمی، افقی باشد، خط هادی، موازی با محور y ها است (معادله خط هادی به صورت $x=k$ است) و اگر سهمی، قائم باشد، خط هادی، موازی با محور x ها است. (معادله خط هادی به صورت $y=k$ است)

۷. امتداد SF، محورتقارن (محور کانونی) سهمی است که برخط هادی عود است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: $S(۱,۲)$ و $F(۱,-۱)$ به ترتیب راس و کانون یک سهمی هستند. معادله خط هادی سهمی کدام است؟

۱. $y=-۴$ ۲. $y=-۱$ ۳. $y=۴$ ۴. $y=۵$

معادلات سهمی

الف. معادلات کلاسیک (استاندارد - متعارف) سهمی

۱. معادله سهمی افقی با راس $S(\alpha,\beta)$ **و پارامتر سهمی** a **به صورت** $(y-\beta)^۲=۴a(x-\alpha)$ **می باشد. اگر** $a>۰$ **دهانه سهمی رو به راست و اگر** $a<۰$ **سهمی رو به چپ باز می‌شود. در این سهمی کانون** $F(\alpha+a,\beta)$ **و خط هادی به صورت** $x=\alpha-a$ **می‌باشد. در حالت خاص که مبدا مختصات راس سهمی باشد؛ معادله سهمی به شکل** $y^۲=۴ax$ **نوشته می‌شود.**

۲. معادله سهمی قائم با راس $S(\alpha,\beta)$ **و پارامتر سهمی** a **به صورت** $(x-\alpha)^۲=۴a(y-\beta)$ **می باشد. اگر** $a>۰$ **دهانه سهمی رو به بالا و اگر** $a<۰$ **سهمی رو به پایین باز می‌شود. در این سهمی کانون** $F(\alpha,\beta+a)$ **و خط هادی به صورت** $y=\beta-a$ **می‌باشد. در حالت خاص که مبدا مختصات راس سهمی باشد؛ معادله سهمی به شکل** $x^۲=۴ay$ **نوشته می‌شود.**

مثال: در سهمی $(y-۱)^۲=۸(x-۲)$ **نوع سهمی و مختصات راس و کانون و معادله خط هادی را بیابید.**

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب. معادلات گسترده سهمی:

اگر معادله استاندارد سهمی را بسط دهیم معادله گسترده آن حاصل می شود.

اگر معادله گسترده یک سهمی داده شده باشد، آن را به کمک مربع کامل کردن به صورت استاندارد نوشته و سپس اطلاعات لازم را از آن استخراج می‌کنیم

اگر سهمی افقی باشد معادله گسترده آن به صورت $Ay^۲+By+Cx+D=۰$ **و اگر سهمی قائم باشد، معادله به صورت** $Ax^۲+Bx+Cy+D=۰$ **می‌باشد.**

مثال: معادله یک سهمی به صورت $y=x^۲+۳x+۵$ **داده شده است. کانون و خط هادی را مشخص کنید.**

مثال: به ازای کدام مقدار b، طول نقطه F (کانون) سهمی $2y^2+4y-x+b=0$ برابر $\frac{17}{8}$ است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۵

مثال: معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه را بنویسید که فاصله آن‌ها از نقطه $(4,0)$ برابر فاصله آن‌ها از خط $x=2$ باشد.

مثال: معادله سهمی که خط $x=-2$ هادی آن و محور y ها را در دو نقطه‌ی $A(3,0)$ و $B(-1,0)$ قطع می‌کند، کدام است؟

۱. $(y+1)^2=-4(x+1)$ ۲. $(y+1)^2=4(x-1)$ ۳. $(y-1)^2=4(x+1)$ ۴. $(y-1)^2=-4(x-1)$

مثال: معادله سهمی که بر محور xها مماس و محور تقارن آن خط $x=1$ و سهمی از نقطه $A(-1,0)$ بگذرد کدام است؟

۱. $x^2-2x=-y-1$ ۲. $x^2-2x-y+1=0$ ۳. $2x^2-4x=y-1$ ۴. $x^2+2x-y-1=0$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

نکته: در حالت گسترده سهمی همواره: $4a=-\frac{C}{A}=-\frac{\text{ضریب متغیر درجه اول}}{\text{ضریب متغیر درجه دوم}}$ **می‌باشد.**

مثال: فاصله کانون تا خط هادی سهمی به معادله $3y^2-6y-2x=0$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{3}$ ۲. $\frac{2}{3}$ ۳. $\frac{3}{2}$ ۴. ۳

مثال: دهانه سهمی به معادله $y^2 + a(x-y) = 0$ رو به راست باز می‌شود و فاصله کانون تا خط هادی آن ۲ واحد است، مختصات کانون آن کدام است؟

۱. $(-1,-2)$ ۲. $(0,-2)$ ۳. $(0,-1)$ ۴. $(1,2)$

مثال: محور کانونی یک سهمی موازی یکی از محورهای مختصات است. اگر سهمی محور y ها را در دو نقطه به عرض ۱ و ۵ قطع کند و راس آن روی نیمساز ناحیه دوم باشد، سهمی محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

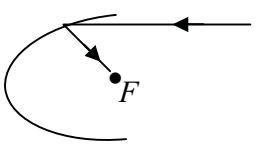
۱. $-\frac{39}{4}$ ۲. $-\frac{15}{4}$ ۳. $\frac{15}{4}$ ۴. $\frac{39}{4}$

نکته: وتری که از کانون سهمی، عمود بر محور کانونی(خط تقارن) سهمی رسم می‌شود و سهمی را در نقاط M و N قطع کند، وتر کانونی نام دارد، و طول آن برابر با $MN = 4|a|$.

در واقع پارامتر سهمی، میزان باز و بسته شدن دهانه سهمی را تنظیم می‌کند.

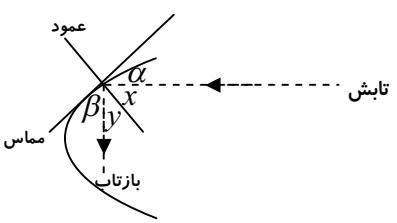
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ویژگی بازتابندگی آینه سهموی



۱. اگر اشعه نوری موازی محور کانونی سهمی به آن بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی می‌گذرد.

۲. اگر اشعه نوری از کانون برسهمی بتابد، موازی محور کانونی سهمی بازتاب می‌کند.



۳. اگر اشعه نوری به آینه سهمی بتابد، زاویه های تابش و بازتابش با هم برابرند.

یعنی $x = y$ و $\alpha = \beta$

مثال: یک پرتو نور به معادله $y=4$ به سهمی $y^2=16x$ می‌تابد. معادله بازتابش را بدست آورید.

انتقال محورها:

محورهای مختصات را به موازات خودشان از نقطه $O(0,0)$ به نقطه $O'(\alpha,\beta)$ انتقال می‌دهیم. اگر مختصات نقطه A در دستگاه xoy به صورت $A(x,y)$ و در دستگاه $XO'Y$ به صورت $A(X,Y)$ باشد، آن‌گاه: $\begin{cases} x+0=X+\alpha \\ y+0=Y+\beta \end{cases}$

مثال: اگر دستگاه مختصات را به نقطه $O'(1,\pi)$ انتقال دهیم، معادله $y=\cos^{-1}(x-1)$ در دستگاه جدید کدام است؟

۱. $y=\pi-\cos^{-1}x$ **۲.** $y=-\pi+\cos^{-1}x$ **۳.** $y=\cos^{-1}x$ **۴.** $y=\cos^{-1}(-x)$

چند تمرین کتاب صفحه ۵۸

۱. سهمی $y^2=2x-4y$ مفروض است. مختصات راس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

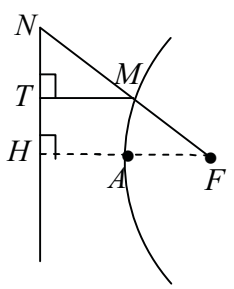
۲. مختصات راس و کانون سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ را به دست آورید.

۳. معادله سهمی را بنویسید که $S(۱,۲)$ راس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد.

۴. سهمی $y^۲ = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

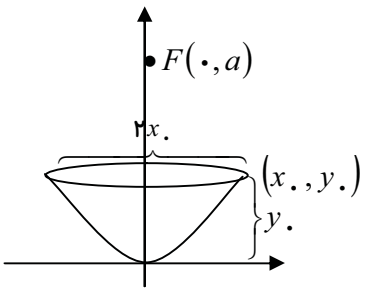
۵. سهمی p با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه کنید.

۶. در شکل سهمی با راس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷. برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش معلم به دانش‌آموز گفت باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل‌ضرب را بر اندازه گودی(عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد و عدد حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این فرمول رابررسی کنید.



چند تست سهمی

۱. فاصله نقطه $A(2,3)$ روی سهمی با کانون $F(3,-1)$، از خط هادی چقدر است؟

۱. $\sqrt{17}$ ۲. $\sqrt{15}$ ۳. $\sqrt{13}$ ۴. $\sqrt{11}$ ۱

۲. سهمی به کانون $F(2,4)$ و خط هادی به معادله $x=-1$، محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

۱. $\frac{17}{6}$ ۲. $\frac{19}{6}$ ۳. $\frac{10}{3}$ ۴. $\frac{11}{3}$ ۲

۳. خط $y=1$ محور تقارن و خط $x=2$ خط هادی یک سهمی است. اگر این سهمی از $A(3,2)$ بگذرد، فاصله کانون آن تا مبدا چقدر است؟

۱. $\sqrt{5}$ ۲. $\sqrt{10}$ ۳. $\sqrt{2}$ ۴. $\sqrt{13}$ ۲

۴. اگر نقطه $S(-2,1)$ راس سهمی $x^2+ax-4by=a$ باشد، $a+2b$ کدام است؟

۱. ۸- ۲. صفر ۳. ۴ ۴. ۸ ۲

۵. معادله مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه که از خط $x=-1$ و نقطه $A(-3,2)$ به یک فاصله هستند، کدام است؟ ۳

۱. $(x+2)^2=4(y-2)$ ۲. $(y-2)^2=4(x+2)$ ۳. $(y-2)^2=-4(x+2)$ ۴. $(x+2)^2=-4(y-2)$

۶. فاصله کانون سهمی به معادله $2y^2+15=3(x+4y)$ از خط هادی سهمی کدام است؟

۱. $\frac{3}{4}$ ۲. $\frac{2}{3}$ ۳. $\frac{4}{3}$ ۴. $\frac{3}{2}$ ۱

۷. دو اشعه به موازات محور x ها، بر سهمی به معادله $y^2-2y+4x=11$ می تابند. پس از بازتاب در کدام نقطه متقاطع‌اند؟

۱. $(2,1)$ ۲. $(2,3)$ ۳. $(3,1)$ ۴. $(4,1)$ ۱

۸. مختصات کانون سهمی که خط هادی آن موازی محور y ها بوده و نقطه $S(-1,0)$ راس آن بوده و از نقطه $(0,1)$ بگذرد، کدام است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱. $\left(-\frac{۳}{۴},۰\right)$ ۲. $\left(-۱,\frac{۱}{۴}\right)$ ۳. $\left(\frac{-۵}{۴},۰\right)$ ۴. $\left(-۱,-\frac{۱}{۴}\right)$ ۱

۹. معادله خط هادی سهمی $y=\frac{۱}{۸}\left(۴+۴x-x^{۲}\right)$ کدام است؟

۱. $y=۳$ ۲. $y=-۱$ ۳. $y=-۳$ ۴. $y=۲$ ۱

۱۰. نقطه $S(۲,۱)$ راس یک سهمی است که محور تقارن آن موازی محور yها است و از نقطه $(۰,۵)$ می گذرد. معادله خط هادی آن کدام است؟

۱. $y=\frac{۱}{۴}$ ۲. $y=\frac{۱}{۲}$ ۳. $y=\frac{۳}{۴}$ ۴. $y=\frac{۳}{۲}$ ۳

۱۱. به ازای کدام مقدار a کانون سهمی به معادله $y^{۲}-ay-۳x=\frac{a^{۲}}{۲}$ بر روی نیمساز ناحیه اول است؟

۱. ۳- و ۱- ۲. ۳- و ۱ ۳. ۳ و ۱- ۴. ۱ و ۳ ۲

۱۲. محور تقارن $x^{۲}+y^{۲}=(x+۱)^{۲}+(۲y+۱)^{۲}$ کدام است؟

۱. $y=-\frac{۲}{۳}$ ۲. $x=۱$ ۳. $y=۱$ ۴. $x=-\frac{۲}{۳}$ ۱

۱۳. دهانه سهمی به معادله $y^{۲}+m(x-y)=۰$ رو به راست باز می شود و فاصله کانون تا خط هادی آن ۴ واحد است. مختصات کانون این سهمی کدام است؟

۱. $(-۱,-۴)$ ۲. $(۰,-۴)$ ۳. $(۱,۴)$ ۴. $(۰,-۲)$ ۲

۱۴. طول وتر کانونی سهمی $y^{۲}-۴y+۲x+۲=۰$ کدام است؟

۱. ۴ ۲. ۳ ۳. ۲ ۴. ۱ ۳

۱۵. در سهمی به معادله $۳y^{۲}+۶x-۴y=۰$ خط گذرنده از کانون و موازی خط هادی، منحنی سهمی را در نقاط A و B قطع می کند، اندازه وتر AB کدام است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۶ ۱

۱۶. یک سهمی افقی از نقاط $(۳,۳)$، $(۶,-۳)$ و $(۲,۱)$ می گذرد. کوتاهترین فاصله نقاط سهمی از خط هادی کدام است؟

۱. $\frac{۱}{۲}$ ۲. ۱ ۳. $\frac{۳}{۲}$ ۴. ۲ ۲

۱۷. فاصله کانون تا خط هادی یک سهمی ۲ واحد است. این سهمی محور yها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و ۵- قطع می‌کند. طول راس آن با علامت مثبت کدام است؟

۱. $\frac{۵}{۴}$ ۲. $\frac{۳}{۲}$ ۳. $\frac{۹}{۴}$ ۴. $\frac{۵}{۲}$ ۳

۱۸. معادله دایره‌ای که مرکز آن کانون سهمی به معادله $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۳x+۲$ و مماس بر خط هادی این سهمی باشد کدام است؟

۱. $x^{۲}+y^{۲}-۶x+۴y+۱۲=۰$ ۲. $x^{۲}+y^{۲}-۴x+۶y+۸=۰$

۳. $x^{۲}+y^{۲}+۶x-۴y+۵=۰$ ۴. $x^{۲}+y^{۲}-۶x+۳y+۹=۰$ ۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۹. یک تلسکوپ انعکاسی دارای آیینه سهموی است که فاصله راس تا کانون ۷۲ سانتی متر و قطر قاعده آن ۱۶۸ سانتی متر است. عمق آیینه در مرکز چند سانتی متر است؟

۱. ۲۴ ۲. ۲۴/۵ ۳. ۲۶ ۴. ۲۶/۵

۲۰. از کانون سهمی $y^2-2y+4x=19$ عمودی بر محور کانونی رسم می کنیم تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند. مختصات A و B کدام است؟

۱. $(5,1)$ و $(-5,1)$ ۲. $(4,1)$ و $(4,3)$ ۳. $(5,-1)$ و $(-5,1)$ ۴. $(4,3)$ و $(4,-1)$

۲۱. اگر دوایری به مراکز نقاط واقع بر سهمی $x^2-2x+8y+1=0$ رسم کنیم به طوری که از کانون سهمی عبور کنند، این دوایربه کدام خط، مماس خواهند بود؟

۱. $x=3$ ۲. $x=2$ ۳. $y=3$ ۴. $y=2$

۲۲. اگر مبدا مختصات را به نقطه $O'(1,-2)$ انتقال دهیم به طوری که محورهای مختصات جدید موازی محورهای x و y باشند، خط $y=2x-3$ در مختصات جدید کدام است؟

۱. $y=2x-3$ ۲. $y=2x-1$ ۳. $y=2x+3$ ۴. $y=2x+1$

۲۳. مبدا مختصات را به نقطه $(-1,1)$ انتقال داده‌ایم. خط $y-x=k$ در مختصات جدید از نقطه $(1,1)$ می گذرد، k کدام است؟

۱. -۲ ۲. -۱ ۳. ۱ ۴. ۲

۲۴. به ازای کدام مقدار b، طول نقطه F کانون سهمی $2y^2+4y-x+b=0$ برابر $\frac{17}{8}$ است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۵

۲۵. به ازای کدام مقدار a، خط هادی سهمی $2y^2-12y+ax+8=0$ به معادله $x=\frac{21}{8}$ است؟

۱. ۳ و ۱۲ ۲. ۳ و ۱۶ ۳. ۵ و ۱۲ ۴. ۵ و ۱۶

۲۶. نقاط $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ و $B\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ متعلق به یک سهمی هستند که خط $x=-\frac{1}{4}$، خط هادی آن است. مختصات راس سهمی کدام است؟

۱. $\left(\frac{1}{4},0\right)$ ۲. $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ۳. $(0,0)$ ۴. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

۲۷. خط به معادله $y=1$، محور تقارن و خط $x=2$ خط هادی سهمی هستند. اگر این سهمی از نقطه $(3,2)$ بگذرد، فاصله کانون تا خط هادی کدام است؟

۱. ۱ ۲. $\frac{5}{4}$ ۳. $\frac{3}{2}$ ۴. ۲

۲۸. معادله خط هادی یک سهمی، $x=\frac{13}{4}$ است. هر پرتوی که از نقطه $\left(-2,-\frac{5}{4}\right)$ بر این سهمی بتابد، در امتداد محور xها باز می تابد. این سهمی محور xها را با کدام طول قطع می کند؟

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. $\frac{3}{4}$ ۳. $\frac{5}{9}$ ۴. $\frac{5}{4}$

۲۹. کدام نقطه از سهمی $y^2=4x$ از کانون و راس آن به یک فاصله است؟

۱. $(1,2)$ ۲. $(2,2\sqrt{2})$ ۳. $\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ ۴. $\left(\frac{1}{4},1\right)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۰. اگر خط به معادله $x=-۱$ خط هادی سهمی $۲y^۲-۴y=ax$ باشد، فاصله نقطه $A(۳,۴)$ از کانون سهمی کدام است؟

۱. $۳\sqrt{۲}$ ۲. $۲\sqrt{۶}$ ۳. ۵ ۴. ۶ ۱

۳۱. خط $y=x+۲$ سهمی $x^۲=۴y$ را در دو نقطه P و Q قطع می کند. اگر F کانون آن باشد، آن گاه $PF+QF$ کدام است؟

۱. ۸ ۲. $۸\sqrt{۳}$ ۳. ۱۰ ۴. $۴\sqrt{۳}$ ۳

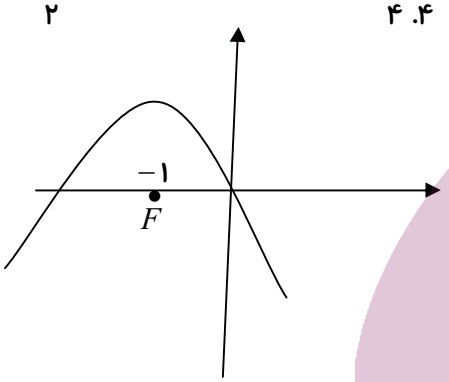
۳۲. اگر سهمی $y=x^۲-(k-۲)x-۲k$ محور x ها را در دو نقطه A و B قطع کند، به طوری که $AB=۶$، آن گاه فاصله کانون تا خط هادی سهمی کدام است؟

۱. $\frac{۱}{۴}$ ۲. $\frac{۱}{۲}$ ۳. $\frac{۳}{۴}$ ۴. ۱ ۲

۳۳. محور تقارن یک سهمی با راس $(-۱,۳)$ موازی محور y ها است. اگر این سهمی از نقطه $(۵,۹)$ بگذرد، فاصله کانون تا خط هادی آن کدام است؟

۱. ۲/۵ ۲. ۳ ۳. ۳/۵ ۴. ۴ ۲

۳۴. معادله سهمی به شکل مقابل، به صورت $x^۲+۲x=ay$ است. مقدار a کدام است؟



۱. ۲- ۲. ۱- ۳. ۱ ۴. ۲ ۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

فصل سوم: بردارها

فضای R^2:

هر نقطه از صفحه مختصات را به صورت زوج مرتب (x,y) نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه $\{(x,y)|x,y\in R\}$ شامل همه نقاط صفحه مختصات می‌باشد و آن را با R^2 نمایش می‌دهند ، یعنی $R^2=\{(x,y)|\ x,y\in R\}$.

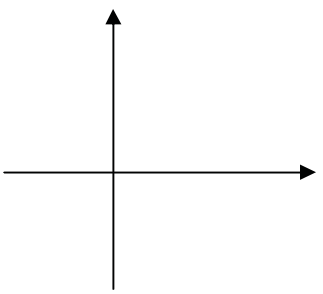
چند مثال در فضای R^2

مثال: نمودار روابط زیر را رسم کنید.

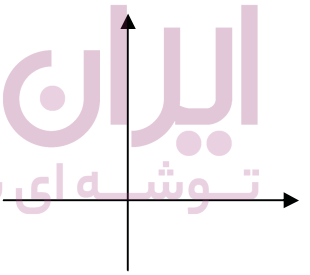
الف. $x=0$

ب. $y=0$

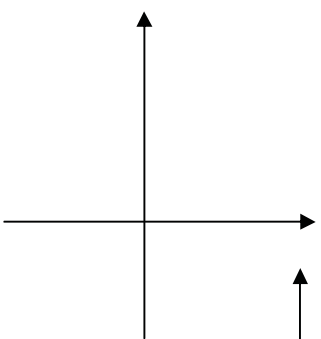
ج. $x=1\ ,\ -1\le y<3$



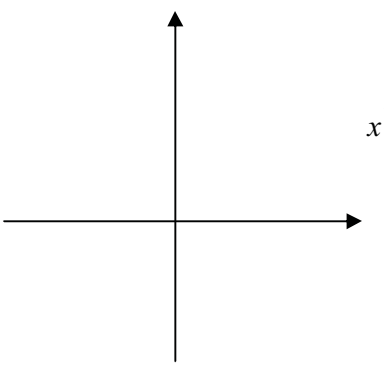
د. $y=x^2\ ,\ -1<x\le 2$



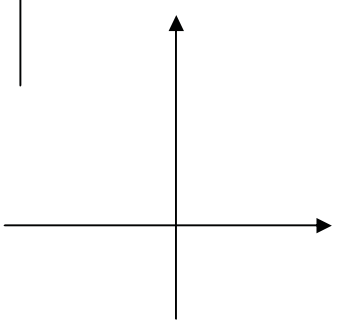
ه. $-1\le x\le 1\ ,\ 1\le y\le 2$



و. $x^2<y\le 2$



ز. $y\ge x^2$

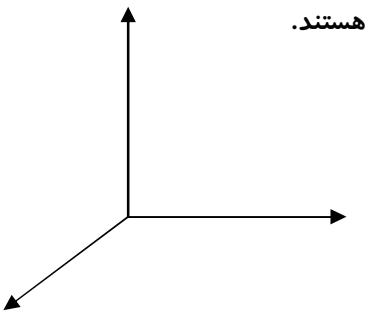


ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

دستگاه مختصات سه بعدی:

در دستگاه مختصات سه بعدی، سه مولفه طول، عرض و ارتفاع داریم؛ یعنی دستگاه مختصات سه بعدی شامل ox، oy و oz است و هر نقطه آن به شکل (x, y, z) نمایش داده می‌شود. در دستگاه مختصات سه بعدی محورهای ox، oy و oz دو بدو بر هم عمودند وبردارهای i، j و k بردارهای یکه (؟) محورها می‌باشد. دستگاه مختصات سه بعدی، یک دستگاه راست گرد(جهت مثلثاتی) است که می‌توان جای x، y و z را با رعایت ترتیب آن‌ها (اول x، بعد y و سپس z، در جهت مثلثاتی) عوض کرد.

از برخورد هر دو محور یک صفحه تشکیل شده است. صفحات مورد نظر xoy، xoz، yoz هستند.



محورها فضا را به به هشت ناحیه تقسیم می‌شود که چهارتای آن بالای صفحه xoy و چهار تای آن پایین صفحه xoy قرار می‌گیرد و مانند دستگاه مختصات دو بعدی شماره‌گذاری می‌شود.

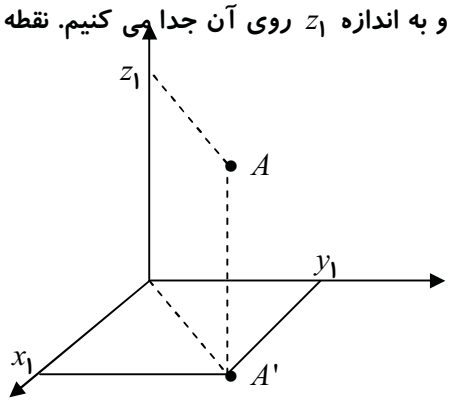
شماره ناحیه	علامت محورها		
	z	y	x
۱	+	+	+
۲	+	+	−
۳	+	−	−
۴	+	−	+

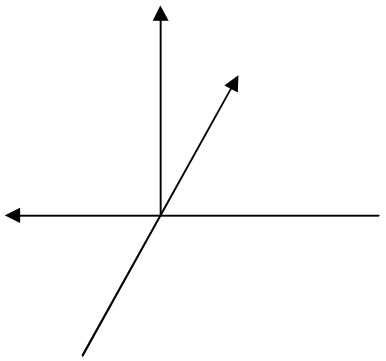
شماره ناحیه	علامت محورها		
	z	y	z
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

نمایش هندسی نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ در دستگاه مختصات

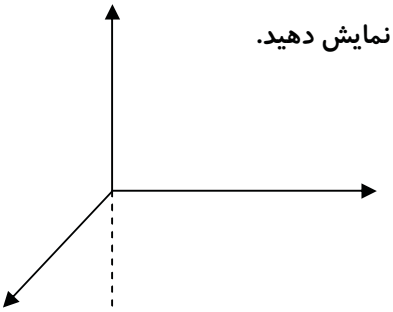
برای مشخص کردن نقطه A در دستگاه مختصات، به اندازه x_1 و y_1 روی محورهای مختصات جدا کرده تا نقطه A' روی صفحه xoy مانند حالت دو بعدی مشخص شود. از نقطه A' خطی موازی محور zها رسم می کنیم و به اندازه z_1 روی آن جدا می کنیم. نقطه حاصل، نقطه A خواهد بود.



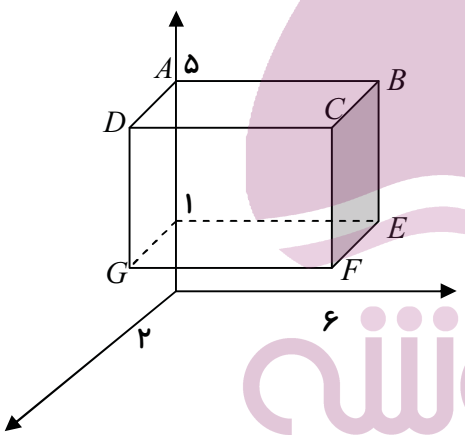


توجه: برای نمایش بهتر نقاطی که مولفه‌های x و y آن‌ها منفی می‌باشد، می‌توان محورها را دوران داد.

مثال: نقاط $A(۱,۲,-۱)$ و $B(-۲,-۱,۲)$ را نمایش دهید.



مثال: در مکعب شکل مقابل:



الف. مختصات رئوس مکعب را بنویسید.

ب. معادله وجه $ABCD$ را بنویسید.

ج. معادله یال AD را بنویسید.

د. نقطه‌ای روی وجه $CBEF$ مشخص کنید.

ه. نقطه ای روی یال CF مشخص کنید.

و. معادله مکعب را مشخص کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

تصویر وقرینه‌ی یک نقطه نسبت به صفحات و محورهای مختصات:

الف. در تصویر روی محور یا صفحات مختصات، مولفه‌های محور یا صفحات ذکر شده را ثابت نگه می‌داریم و بقیه مولفه‌ها صفر می‌شوند.

مثال: تصویر نقطه $A(\alpha,\beta,\gamma)$ را روی محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱. روی محور x ها

۲. روی محور y ها

۳. روی محور z ها

۴. روی صفحه xoy

۵. روی صفحه yoz

۶. روی صفحه xoz

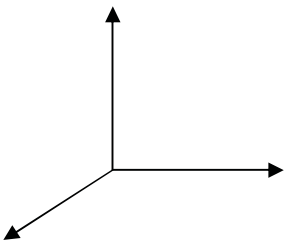
ب. در قرینه نسبت به محور یا صفحات مختصات، مولفه‌های محور یا صفحات ذکر شده را ثابت نگه می‌داریم و بقیه مولفه‌ها قرینه می‌شوند.

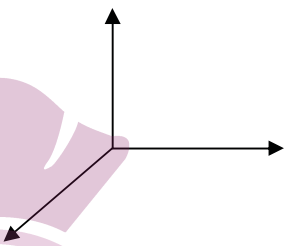
مثال: قرینه نقطه $A(\alpha,\beta,\gamma)$ را روی محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱.نسبت به محور x ها **۲. نسبت به محور y ها**

۳. نسبت به محور z ها **۴. نسبت به صفحه xoy**

۵. نسبت به صفحه yoz **۶. نسبت به صفحه xoz**





چند قرینه دیگر: قرینه نقطه $A(\alpha,\beta,\gamma)$ نسبت به صفحه $x=y$، $A'(\beta,\alpha,\gamma)$ و نسبت به صفحه $x=-y$، $A'=(-\beta,-\alpha,\gamma)$ است. و نسبت به صفحه $x=k$، $A'(۲k-\alpha,\beta,\gamma)$ می‌باشد.

مثال: نقطه $A(-۱,-۳,۲)$ مفروض است، اگر قرینه نقطه A نسبت به صفحه xoz، A' و تصویر نقطه A' روی محور y ها، A'' باشد؛ حاصل جمع عرض های دو نقطه A' و A'' کدام است؟

۱. ۳- ۲. صفر ۳. ۳ ۴. ۶

فاصله نقطه از صفحات و محورهای مختصات:

برای محاسبه فاصله نقطه $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ تا محورهای مختصات یا صفحات مختصات، باید مولفه ذکر شده را در رابطه $\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲+z_۱^۲}$ صفر قرار دهیم.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: فاصله نقطه $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ را تا محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱. محور x ها **۲. محور y ها**

۳. محور z ها **۴. صفحه xoy**

۵. صفحه xoz **۶. صفحه yoz**

اگر $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند؛

۱. فاصله این دو نقطه برابر است با $|AB|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}$.

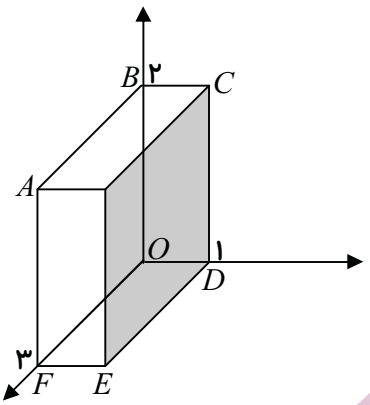
۲. مختصات نقطه M وسط پاره‌خط AB به صورت $M\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲},\frac{z_۱+z_۲}{۲}\right)$ می‌باشد.

توجه: با توجه به رابطه بالا فاصله نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ از مبدا مختصات برابر است با $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

مثال: اگر فاصله نقطه A از محورهای ox، oy و oz به ترتیب برابر با $\sqrt{2}$، $\sqrt{5}$ و $\sqrt{5}$ باشد، فاصله نقطه A از مبدا مختصات چقدر است؟

۱. $\sqrt{3}$ ۲. ۲ ۳. $\sqrt{6}$ ۴. $2\sqrt{2}$

مثال: اگر شکل مقابل نمایش یک اتاق باشد، مطلوبست:



الف. طول قطر کف اتاق

ب. طول قطر اتاق

ج. مختصات مرکز اتاق

نکته: مرکز ثقل(نقطه گرانیگاه) مثلث ABC را با نماد G نشان داده و محل برخورد میانه می‌باشد. مختصات G از رابطه $G = \frac{A+B+C}{3}$ بدست می‌آید.

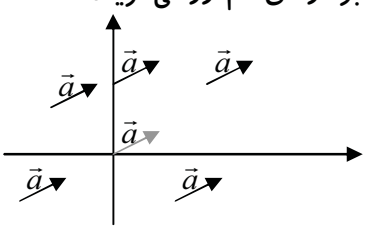
نکته: می دانیم در متوازی الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند؛ پس بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع $ABCD$، رابطه $A + C = B + D$ برقرار است.

مثال: اگر $A(-1,0,2)$، $B(2,1,1)$ و $D(4,-1,3)$ سه راس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، مختصات راس C را بیابید.

بردارها:

هر پاره خط جهت دار مانند AB، یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن A و انتهای آن B می‌باشد. این بردار را با $\overrightarrow{AB}$ واندازه آن را با نماد $|\overrightarrow{AB}|$ نشان می‌دهند. اغلب برای سهولت بردار را با یک حرف کوچک لاتین مانند $\vec{a}$ نشان می‌دهند.

دو بردار را مساوی یا همسنگ گوییم هرگاه اندازه و جهت آن‌ها یکسان باشند. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند. پس بی‌شمار بردار مساوی هم وجود دارد. اصطلاحاً این بردارهای برابر را بردارهای هم ارز می‌گویند.



طول بردار: اگر $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ ابتدا و انتهای بردار $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ باشند، آن‌گاه بردار به صورت $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ معرفی می‌شود. و طول آن از رابطه $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ بدست می‌آید. و طول بردار $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A}$ از رابطه $\left|\overrightarrow{OA}\right| == \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ بدست می‌آید.

ضرب عدد در بردار:

برای ضرب عدد حقیقی k در بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$، کافی است عدد k را در تک تک مولفه‌های بردار ضرب کنیم. $k\vec{a} = (k\,a_1, k\,a_2, k\,a_3)$ اگر $k > 0$ آن‌گاه $\vec{a}$ و $k\,\vec{a}$ هم جهت و اگر $k < 0$ باشد، غیر هم جهت هستند. پس می توان گفت دو بردار زمانی موازی هم هستند که مضرب هم باشند.

نکته: در صورتی دو بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ موازی یکدیگرند که مضرب هم باشند یعنی: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

مثال: اگر بردارهای $\vec{a}(m-1, 1, n+m)$ و $\vec{b}(0, -2, -4)$ موازی باشند، $n - m$ کدام است؟

۱. ۲- ۲. صفر ۳. ۱ ۴. ۲

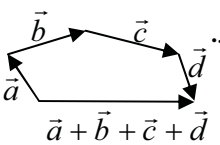
جمع دو بردار:

جمع دو بردار را از دو رویکرد تحلیلی و هندسی بررسی می‌کنیم.

الف. تحلیلی: اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ باشند، آن‌گاه: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ یعنی برای جمع دو بردار، طول‌ها با هم و عرض‌ها باهم و ارتفاع‌ها با هم جمع می‌شوند.

ب. هندسی: جمع دو بردار به روش هندسی به دو روش زیر انجام می‌شود:

۱. روش مثلثی: زمانی از این روش استفاده می‌شود که دو (یا چند) بردار، پشت سر هم باشند. یعنی انتهای بردار قبلی، ابتدای بردار بعدی باشد. در این روش، مجموع بردارها از وصل کردن ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر به دست می‌آید.



مثال: به کمک جمع دو بردار نشان دهید: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B - A$

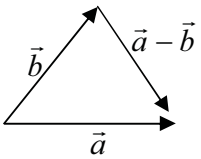
۲. روش متوازی الاضلاع: وقتی دو بردار، هم مبدا (هم راس) باشند، برای جمع از روش متوازی الاضلاع استفاده می‌کنیم. در این روش از انتهای هر بردار، موازی و هم ارز بردار دیگر رسم می‌کنیم، قطر متوازی الاضلاع که ابتدای آن راس مشترک دو بردار است، جمع دو بردار را نشان می‌دهد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

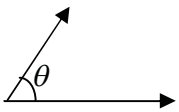
تفاضل (تفریق) دو بردار

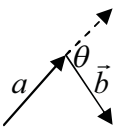
الف. تحلیلی: : اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ **و** $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ **باشند، آن‌گاه:** $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ **یعنی برای تفریق دو بردار، طول‌ها ازهم و عرض‌ها از هم و ارتفاع‌ها از هم کم می‌شوند.**

ب. هندسی: برای تفاضل دو برداری که هم مبدا هستند. از انتهای بردار دوم به انتهای بردار اول وصل می‌کنیم.



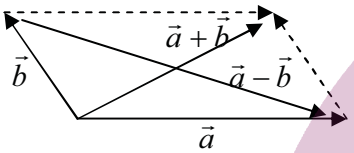
زاویه بین دو بردار: اگر دو بردار هم ابتدا (هم انتها) باشند، آن‌گاه زاویه تشکیل شده، $(0 \le \theta \le \pi)$ **زاویه بین دو بردار نامیده می‌شود.**



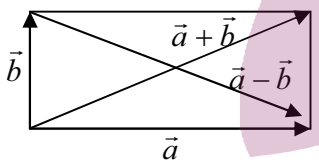


نکته: دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ **و** $\vec{a} - \vec{b}$ **قطرهای متوازی الاضلاعی هستند که روی بردارهای** $\vec{a}$ **و** $\vec{b}$ **ساخته می‌شود. پس:**

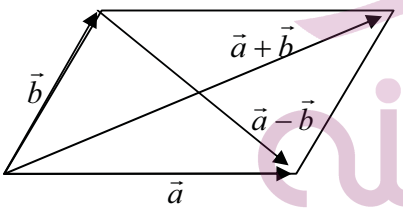
۱. اگر زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ **و** $\vec{b}$ **بیشتر از** 90° **باشد آن‌گاه** $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$



۲. اگر زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ **و** $\vec{b}$**،** 90° **باشد آن‌گاه** $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$



۳. اگر زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ **و** $\vec{b}$ **کم‌تر از** 90° **باشد آن‌گاه** $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$



بردار یکه: بردار به طول یک بردار یکه نامیده می‌شود. اگر $\vec{a}$ **برداری دلخواه باشد، آن‌گاه** $e_{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ **برداری به طول یک و در جهت بردار** $\vec{a}$ **می‌باشد. بردار های یکه محورهای مختصات به ترتیب** $i(1,0,0)$**،** $j(0,1,0)$ **و** $k(0,0,1)$ **می باشند.**

نکته: می‌دانیم که در لوزی قطرها بر هم عمودند، یکدیگر را نصف می‌کنیم و نیمساز زاویه‌ها می‌باشند، پس $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ **اگر و تنها اگر** $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$ **. در این صورت** $\vec{a} + \vec{b}$ **نیمساز زاویه بین** $\vec{a}$ **و** $\vec{b}$ **می‌باشد.**

نکته: اگر بخواهیم نیم‌ساز زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ **و** $\vec{b}$ **را بیابیم، ابتدا باید دو بردار یکه یا هم طول در راستاهای** $\vec{a}$ **و** $\vec{b}$ **بسازیم؛ سپس جمع این دوبردار نقش نیم‌ساز را خواهند داشت. پس نیمساز زاویه داخلی بین دو بردار** $\vec{a}$ **و** $\vec{b}$ **به صورت** $e_{\vec{a}} + e_{\vec{b}} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ **یا هر مضربی از آن از جمله** $|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ **می‌باشد.**

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

نمایش یک بردار بر حسب بردارهای یکه محورها: فرض کنید $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ یک بردار باشد در این صورت بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ بر حسب بردارهای یکه محورها نوشته‌ایم.

مثال: اگر $\vec{a} = i + 2j - k$ و $\vec{b} = (2, -1, -3)$ آن‌گاه اندازه بردار $2\vec{a} - 3\vec{b}$ را بدست آورید.

مثال: نقاط $A(-1, 2, 1)$ و $B(2, -1, -2)$ مفروض‌اند. اگر $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MA}$ باشد، مجموع طول و ارتفاع نقطه M کدام است؟

۱. صفر ۲. $\frac{2}{5}$ ۳. $\frac{3}{5}$ ۴. ۱

مثال: بر روی دو بردار $\vec{a} = -i + 2j + 3k$ و $\vec{b} = 2i - j + k$ متوازی الاضلاعی ساخته شده است. طول قطر کوچک کدام است؟

۱. $\sqrt{18}$ ۲. $\sqrt{20}$ ۳. $\sqrt{22}$ ۴. $\sqrt{24}$

مثال: چهار بردار OA و OB و OC و OD در تساوی $\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OD}$, $k > 1$ صدق می‌کنند؛ چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟

۱. مستطیل ۲. ذوزنقه ۳. لوزی ۴. متوازی الاضلاع

مثال: سه بردار با اندازه برابر در رابطه $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ صدق می‌کند، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

۱. صفر ۲. ۶۰ ۳. ۱۲۰ ۴. ۹۰

مثال: اگر $\vec{a} = mi + j - 2k$ و $\vec{b} = 3j - k$ باشد و $\vec{a} + \vec{b}$ بر $\vec{a} - \vec{b}$ عمود باشد، آن‌گاه بردار $\vec{a} + \vec{b}$ کدام است؟

۱. $\sqrt{30}$ ۲. $\sqrt{29}$ ۳. $\sqrt{31}$ ۴. $\sqrt{26}$

مثال: زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 53° می‌باشد، زاویه بین بردارهای $e_{\vec{a}} + e_{\vec{b}}$ و $|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$ چند درجه است؟

۱. ۵۰ ۲. ۲۵ ۳. ۹۰ ۴. ۲۷۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار هم طول که زاویه آن‌ها با جهت مثبت محور xها به ترتیب ۲۴ و ۵۶ درجه باشد، زاویه برآیند هندسی این دو بردار با جهت مثبت محور xها کدام است؟

۱. ۳۰ ۲. ۴۰ ۳. ۲۰ ۴. ۷۰

چند تست فضای R^3 و بردار

۱. اگر نقطه $A(m-1, m^2-4, m^2-2m)$ روی محور OX و نقطه $B(m^2+2m, m+1, n-m+3)$ روی صفحه xy باشند، نقطه $C(m+2n, m-n, m+n)$ روی ..... قرار دارد.

۱. محور zها ۲. صفحه XOZ ۳. محور yها ۴. صفحه YOZ

۲. اندازه تصویر بردار $\vec{v}(3,1,2)$ بر صفحه yz کدام است؟

۱. $\sqrt{5}$ ۲. $\sqrt{10}$ ۳. $\sqrt{13}$ ۴. $\sqrt{14}$

۳. اندازه تصاویر بردار a روی صفحات برابر $\sqrt{5}$، $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ است. طول بردار a کدام است؟

۱. ۵ ۲. ۴ ۳. ۳ ۴. ۵

۴. نقاط $A(1,2,-3)$ و $B(-1,2,4)$ مفروض اند. فاصله نقطه A'، قرینه نقطه A نسبت به محور xها از نقطه B'، تصویر B روی صفحه xy کدام است؟

۱. $\sqrt{10}$ ۲. $\sqrt{17}$ ۳. $\sqrt{24}$ ۴. $\sqrt{29}$

۵. اگر نقاط $M(1,-2,2)$، $N(0,-3,3)$ و $P(4,a,b)$ روی یک خط راست باشند، $a+b$ کدام است؟

۱. ۲ ۲. ۱ ۳. صفر ۴. -۱

۶. نقاط A، B، C و D در رابطه $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})$ صدق می کنند، اگر $m>1$ باشد چهار ضلعی $ABCD$ همواره کدام است؟

۱. ذوزنقه ۲. لوزی ۳. متوازی الاضلاع ۴. مستطیل

۷. طول تصویر پاره خط AB که در آن $A(1,2,3)$ و $B(5,5,1)$ است بر صفحه xy کدام است؟

۱. ۵ ۲. $\sqrt{29}$ ۳. ۷ ۴. ۹

۸. در مستطیل $ABCD$ حاصل $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$ کدام است؟

۱. $2\overrightarrow{BC}$ ۲. $\vec{O}$ ۳. $2\overrightarrow{DA}$ ۴. $2\overrightarrow{AB}$

۹. حاصل $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}$ کدام است؟

۱. $\vec{O}$ ۲. $2\overrightarrow{BA}$ ۳. $\overrightarrow{BA}$ ۴. $2\overrightarrow{AB}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰. دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ به طول های مساوی با محور OX به ترتیب 43° و 75° می سازند. زاویه بردار $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ با محور OX چند درجه است؟

۱. 60° ۲. 59° ۳. 58° ۴. 57° ۲

۱۱. بر روی بردارهای $-6\vec{i}$ و $-2\vec{j}$ و $2\sqrt{2}\vec{k}$ یک مکعب مستطیل ساخته شده است. فاصله مرکز مکعب مستطیل تا مبدا مختصات چه قدر است؟

۱. ۳ ۲. $2\sqrt{3}$ ۳. ۴ ۴. $4\sqrt{3}$ ۲

۱۲. اگر نقاط $A(1,2,3)$، $C(-1,0,1)$ و $B(2,3,-1)$ رئوس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، مجموع طول و ارتفاع نقطه D کدام است؟

۱. -۴ ۲. -۳ ۳. ۳ ۴. ۴ ۳

۱۳. اگر $v_1 = 2i+3j+k$ و $v_2 = i-j+k$، حاصل $\frac{|v_1-2v_2|}{|v_1+2v_2|}$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. $\sqrt{6}$ ۳. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ۴. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۱

۱۴. نقاط $A(5,-4,1)$، $B(-1,2,4)$ و $O(0,0,0)$ مفروض هستند و $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ می باشد. مقدار $|\overrightarrow{OM}|$ کدام است؟

۱. $\sqrt{10}$ ۲. $\sqrt{11}$ ۳. $\sqrt{13}$ ۴. $\sqrt{14}$ ۱

۱۵. اگر دو بردار $\vec{a}=2i-j+3k$ و $\vec{b}=i+2j+4k$ دو ضلع مجاور یک مثلث با راس مشترک باشند، طول ضلع سوم مثلث برابر است با:

۱. $\sqrt{10}$ ۲. $\sqrt{11}$ ۳. $\sqrt{12}$ ۴. $\sqrt{13}$ ۲

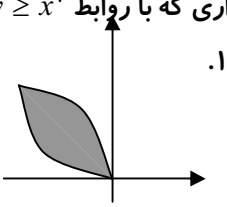
۱۶. اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، زاویه بین دو بردار $\vec{b}$ و $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$ کدام است؟

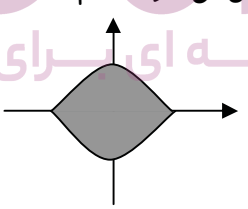
۱. $\frac{\pi}{4}$ ۲. $\frac{\pi}{3}$ ۳. $\frac{\pi}{8}$ ۴. $\frac{3\pi}{8}$ ۳

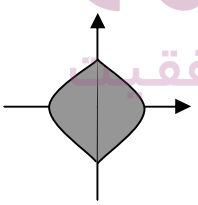
۱۷. مساحت ناحیه‌ای که با روابط $|x-1|\le 1$ و $|y+3|\le 2$ مشخص می شود، کدام است؟

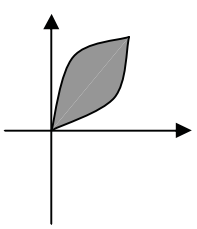
۱. ۱۰ ۲. ۶ ۳. ۹ ۴. ۸ ۴

۱۸. نموداری که با روابط $y\ge x^2$ ، $x\ge y^2$ مشخص می شود، کدام است؟

۱.


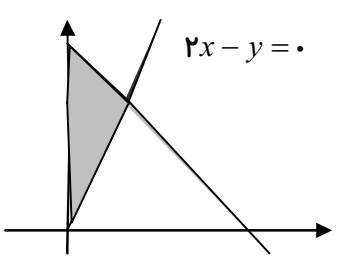
۲.


۳.


۴.


۱۹. نمودار کدام یک از روابط زیر به صورت مقابل است؟

۱. $\begin{cases}2x-y\le 0\\ x+y\le 6\\ x\ge 0\end{cases}$ ۲. $\begin{cases}2x-y\le 0\\ x+y\le 6\\ y\ge 0\end{cases}$



۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳. $\begin{cases} 2x-y\le 0 \\ x+y\ge 6 \\ y\ge 0 \end{cases}$ ۴. $\begin{cases} 2x-y\ge 0 \\ x+y\ge 6 \\ x\ge 0 \end{cases}$

۲۰. به ازای کدام مقدار n، نقطه $A(2n,1-n)$ بالای نیمساز ربع دوم و چهارم و پایین محور xها قرار دارد؟ ۴

۱. $n>-1$ ۲. $0<n<1$ ۳. $-1<n<1$ ۴. $n>1$

۲۱. نموداری که با روابط $\begin{cases} |x-y|=1 & xy<0 \\ |y+x|=1 & xy>0 \end{cases}$ مشخص می شود، کدام است؟ ۲

۱. دو خط مستقیم ۲. یک مربع ۳. یک مستطیل ۴. دو پاره خط

۲۲. اگر فاصله نقطه A از صفحات مختصات ۴، ۵ و $2\sqrt{10}$ باشد، فاصله A از مبدا مختصات کدام است؟ ۳

۱. ۱۰ ۲. ۸ ۳. ۹ ۴. $4\sqrt{5}$

۲۳. اگر نقطه M وسط پاره خط AB باشد، با شرط $A=(1,-2,5)$ و $B=(1,2,m)$، کم ترین طول پاره خط OM کدام است؟

۱. ۱ ۲. $\frac{1}{2}$ ۳. $\frac{3}{2}$ ۴. ۲ ۱

۲۴. نقطه $A=(16,5,12)$ مفروض است. تفاضل فواصل آن از محور xها و yها کدام است؟

۱. ۶ ۲. ۷ ۳. ۸ ۴. ۹ ۲

۲۵. مجموع فواصل نقطه $A=(2,-2,-1)$ از صفحات مختصات چند برابر فاصله آن تا مبدا مختصات است؟

۱. $\frac{5}{3}$ ۲. $\frac{5}{2}$ ۳. $\frac{3}{2}$ ۴. $\frac{2}{3}$ ۱

۲۶. نقطه A به مختصات $(-1,2,3)$ مفروض است. چند نقطه روی صفحه XOZ موجود است که فاصله‌اش از نقطه A برابر ۳ باشد؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. صفر ۴. بی شمار ۴

۲۷. قرینه نقطه $A=(2-a,a,-a)$ نسبت به نقطه $B=(1,-1,2)$ روی صفحه XOZ قرار دارد. طول پاره خط AB کدام است؟

۱. $\sqrt{5}$ ۲. $2\sqrt{2}$ ۳. $\sqrt{10}$ ۴. ۳ ۳

۲۸. قرینه نقطه $A=(b+1,2a,1)$ نسبت به صفحه XOZ روی خط $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$ قرار دارد. زوج مرتب (a,b) کدام است؟

۱. $(2,2)$ ۲. $(-2,-2)$ ۳. $(2,-2)$ ۴. $(-2,2)$ ۱

۲۹. قرینه نقطه $A=(-3,4,5)$ نسبت به خط $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ کدام است؟

۱. $(3,-8,5)$ ۲. $(-3,-8,5)$ ۳. $(-3,8,5)$ ۴. $(3,8,5)$ ۲

۳۰. در چهار ضلعی $ABCD$ اگر M وسط CD باشد، حاصل $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CB}$ کدام است؟

۱. $2\overrightarrow{AM}$ ۲. $\overrightarrow{AM}$ ۳. $2\overrightarrow{MA}$ ۴. $\overrightarrow{MA}$ ۱

۳۱. دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ غیر موازیند. اگر دوبردار $\vec{u}=(x-2)\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{v}=(2x+1)\vec{a}-\vec{b}$ موازی باشند، مقدار x کدام است؟

۱. -1 ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. ۱ ۴. $-\frac{1}{3}$ ۲

۳۲. زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابربا 60° و $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$. زاویه بین دو بردارهای $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}$ چند درجه است؟

۱. ۳۰ ۲. ۶۰ ۳. ۴۵ ۴. ۱۲۰ ۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۳. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر باشند به طوری که $\vec{a}+\vec{b}$ بر $\vec{a}-\vec{b}$ عمود باشد، آن گاه کدام گزاره درست است؟

۱. $\vec{a}\perp\vec{b}$ ۲. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ۳. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ و $\vec{a}\perp\vec{b}$ ۴. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ ۲

۳۴. زاویه بین دو بردار $\vec{u}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\vec{v}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ کدام است؟

۱. 45° ۲. 90° ۳. 180° ۴. 0° ۲

۳۵. زاویه بین دو بردار $\vec{u}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\vec{v}=|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$ کدام است؟

۱. 0° ۲. 45° ۳. 90° ۴. 180° ۱

۳۶. اگر $\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{b}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ باشد، کدام بردار نیم ساز زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است؟

۱. $\vec{j}+\vec{k}$ ۲. $\vec{j}-\vec{k}$ ۳. $-\vec{j}+\vec{k}$ ۴. $-\vec{j}-\vec{k}$ ۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ضرب داخلی: اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ **و** $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ **دو بردار باشند، ضرب داخلی آن‌ها با نماد** $a.b$ **نمایش داده می شود و به صورت زیر تعریف می‌شود (محاسبه می‌شود)**

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

مثال: ضرب داخلی دو بردار $\vec{a} = i - j$ **و** $\vec{b} = 2i + 3k$ **را حساب کنید.**

مثال: اگر $\vec{a}.\vec{b} + |\vec{a}||\vec{b}| = 0$ **باشد، زاویه بین** $\vec{a}$ **و** $\vec{b}$ **چقدر است؟**

۱. صفر ۲. $\frac{\pi}{4}$ ۳. $\frac{\pi}{2}$ ۴. π

مثال: ویژگی‌های ضرب داخلی دو بردار:

۱. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

۲. خاصیت پخشی نسبت به جمع و تفریق بردارها:

$$(\vec{b} \pm \vec{c}).\vec{a} = \vec{b}.\vec{a} \pm \vec{a}.\vec{c} \qquad \vec{a}.(\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} \pm \vec{a}.\vec{c}$$

در واقع فاکتورگیری نیز برقرار است.

۳. اگر $r \in R$ **آن‌گاه** $r(\vec{a}.\vec{b}) = (r\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(r\vec{b})$

۴. $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$

۵. طرفین یک رابطه را می‌توان در یک بردار، ضرب داخلی کرد ولی عکس آن درست نیست.

$$\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c}$$
$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$

مثال: اگر $|\vec{a}| = 2$ **و** $|\vec{b}| = 3$ **و** $\vec{a}.(\vec{a} + \vec{b}) = 7$**، آن‌گاه زاویه بین دو بردار** $\vec{a}$ **و** $\vec{b}$ **کدام است؟**

۱. $\frac{\pi}{4}$ ۲. $\frac{\pi}{3}$ ۳. $\frac{\pi}{2}$ ۴. $\frac{2\pi}{3}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

کاربرد ضرب داخلی:

۱. شرط عمود بودن دو بردار: شرط لازم و کافی برای عمود بودن دو بردار این است که ضرب داخلی آن‌ها صفر شود.

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، ۱۲۰° می‌باشد و بردار $۲\vec{a}+\vec{b}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود است. در این صورت $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲. زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از رابطه $\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ بدست می‌آید.

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، ۱۲۰° می‌باشد و $|\vec{a}|=۲|\vec{b}|$، زاویه بین بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و بردار کوچکتر چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

مثال: اگر $A(۱,۲,۵)$ و $B(۳,۱,۷)$ و $C(۴,-۱,۵)$ سه راس مثلث باشد، زاویه A کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳. استفاده از اتحادها در بردارها

$$(\vec{a}+\vec{b})^۲=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}-\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲\vec{a}.\vec{b}$$

$$(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^۲-|\vec{b}|^۲$$

نتیجه: $|\vec{a}+\vec{b}|^۲+|\vec{a}-\vec{b}|^۲=۲\left(|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲\right)$

مثال: در هر حالت مقدار خواسته شده را بدست آورید.

۱. $\vec{a}+\vec{b}=i+۲j+k \ , |\vec{a}|=|\vec{b}|=۱ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=?$

۲. $|\vec{a}|=۱,|\vec{b}|=۲,|\vec{c}|=۱ \ , \ \vec{a}+\vec{b}+۳\vec{c}=\vec{۰} \ , \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}=?$

مثال: اگر ۲ $=|\vec{a}|$، ۳$=|\vec{b}|$ و $\theta = ۶۰^\circ$ باشند. طول بردارهای $۴\vec{a}-۳\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ را بیابید.

مثال: اگر ۳ $=|\vec{a}|$، ۸$=|\vec{b}|$ و ۷ $=|\vec{a}+\vec{b}|$ آن‌گاه طول بردار $\vec{a}-\vec{b}$ چقدر است؟

۱. ۶ ۲. ۸ ۳. $\sqrt{۹۳}$ ۴. $\sqrt{۹۷}$

۴. نامساوی کشی شوارتز:

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار باشند آن گاه $|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}| \ |\vec{v}|$

مثال: نامساوی بالا را ثابت کنید.

مثال: اگر ۹ $= x^۲+y^۲+z^۲$ باشد، بیشترین مقدار عبارت $۶x-۳y+۲z$ کدام است؟

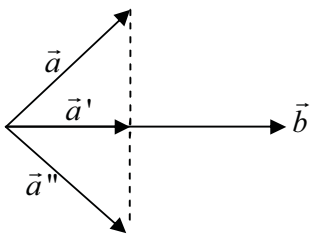
۱. ۷ ۲. ۲۱ ۳. ۹ ۴. ۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: اگر $3x+4y+2z=6$، کمترین مقدار $9x^2+4y^2+z^2$ کدام است؟

۱. ۲ ۲. ۴ ۳. ۶ ۴. ۳۶

۵. کاربرد مهم: تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی امتداد (راستای ؟) بردار $\vec{b}$:



تصویر $\vec{a}$ را با نماد $\vec{a}'$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

و قرینه بردار $\vec{a}$ نسبت به بردار $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}''$ نشان داده و $\vec{a}''=2\vec{a}'-\vec{a}$

نکته: $|\vec{a}''|=|\vec{a}|$ و $|\vec{a}'|=|\vec{a}|\cos\theta$ و $|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

مثال: تصویر بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(1,-1,0)$ بیابید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

چند تست ضرب داخلی:

۱. با فرض $a=(3,m,5)$ و $b=(3-m,7,0)$، به ازای یک مقدار m دو بردار $a+b$ و $a-b$ عمود برهم هستند. زاویه بین دو بردار a و b در این حالت، چند درجه است؟

۱. ۳۰ ۲. ۴۵ ۳. ۶۰ ۴. ۹۰ ۳

۲. دو بردار a و b با معلومات $|a|=5$ و $|b|=7$ و $a-b=2i+j-3k$ مفروض اند. تصویر قائم بردار b بر روی بردار a، چند برابر بردار a است؟

۱. ۰/۷ ۲. ۰/۸ ۳. ۱/۲ ۴. ۱/۴ ۳

۳. سه بردار $v_1=(1,-1,a)$ و $v_2=(2,b,1)$ و $v_3=(c,3,2)$ دو به دو برهم عمودند. $a+b+c$ کدام است؟

۱. ۵ ۲. ۶ ۳. ۷ ۴. ۸ ۱

۴. نقطه‌ی O مبدا مختصات و $\overrightarrow{OA}=3i+j$ و $\overrightarrow{OB}=-i+5j+4k$ مفروض هستند. اگر $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ باشد. کسینوس زاویه‌ی بردار $\overrightarrow{OM}$ با محور y ها کدام است؟

۱. $-\frac{2}{5}$ ۲. $-\frac{2}{7}$ ۳. $\frac{2}{5}$ ۴. $\frac{3}{7}$ ۲

۵. سه نقطه $A(2,1,0)$ و $B(3,-1,2)$ و $C(-1,1,3)$ سه راس مثلثی هستند. $CosA$ کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۲. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۱

۶. بر روی دو بردار $a=3i+3j$ و $b=i-j-2k$ متوازی الاضلاع ساخته شده است. کسینوس زاویه‌ی بین دو قطر این متوازی الاضلاع، کدام است؟

۱. $\frac{1}{4}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{2}{3}$ ۳

۷. اگر بردار $a=(1,-1,m)$ با محور z ها زاویه ۴۵ درجه بسازد، کسینوس زاویه‌ی این بردار با محور x ها کدام است؟

۱. $\frac{1}{4}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳

۸. دو بردار $a=3i-6j+3k$ و $b=-7i+4j+k$ نسبت به بردار c قرینه یکدیگرند. اگر زاویه بین دو بردار a و c در بازه $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ باشد، آن گاه بردار جهت c کدام است؟

۱. $\frac{1}{2}(-2i+2j+k)$ ۲. $\frac{1}{3}(-2i-j+2k)$ ۳. $\frac{1}{3}(2i-2j+k)$ ۴. $\frac{1}{3}(2i+j-2k)$ ۴

۹. قرینه بردار $a=(-2,0,1)$ نسبت به امتداد بردار $b=(1,2,-1)$ کدام بردار است؟

۱. $(1,-2,0)$ ۲. $(-1,2,0)$ ۳. $(0,2,-1)$ ۴. $(0,-2,1)$ ۱

۱۰. سه بردار a و b و c با اندازه ی ۳ و ۴ و ۷ واحد در رابطه $a+b+c=0$ صدق می کنند، مقدار $a.b+b.c+c.a$ کدام است؟

۱. -۳۷ ۲. -۱۹ ۳. ۱۹ ۴. ۳۷ ۱

۱۱. تصویر قائم بردار $(6,-3,0)$ روی امتداد بردار $(-2,-1,2)$ کدام بردار است؟

۱. $(2,-1,-2)$ ۲. $(-2,1,2)$ ۳. $(4,-2,-4)$ ۴. $(2,3,-1)$ ۲

۱۲. بردارهای $a(3,2,4)$ وبردار $b=(2,1,m)$ برهم عمودند و بردارهای b و $c(n,-2-2,p)$ با هم موازی هستند. حاصل $n+p+m$ کدام است؟

۱. -۲ ۲. -۱ ۳. صفر ۴. ۱ ۱

۱۳. m چقدر باشد تا نقاط $A(2,1,4)$، $B(m-1,5,2m+1)$ و $C(3,3,1)$ رئوس یک مثلث قائم الزاویه در راس A باشند؟

۱. $\frac{14}{5}$ ۲. $\frac{5}{14}$ ۳. $\frac{-14}{5}$ ۴. $-\frac{5}{14}$ ۱

۱۴. اگر $|a|=2$ و $|b|=3$ و $a.b=4$ باشد، حاصل $(a+2b).(3a+b)$ چه قدر است؟

۱. ۲۸ ۲. ۳۰ ۳. ۵۰ ۴. ۵۸ ۴

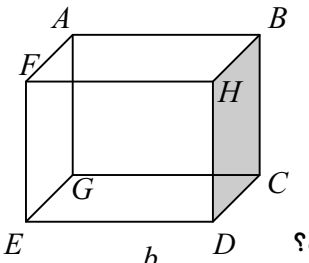
۱۵. در مربع $ABCD$ به قطر ۲، حاصل $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ برابر است با:

۱. ۸ ۲. ۶ ۳. $4\sqrt{2}$ ۴. $8\sqrt{2}$ ۱

۱۶. حاصل $i.(2j+k)+3i.(j-k)+2i.(i+2k)$ کدام است؟

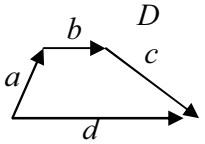
۱. -۲ ۲. -۱ ۳. ۱ ۴. ۲

۱۷. در مکعب مقابل به ضلع واحد، حاصل $(۲\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{EC}).(\overrightarrow{AD}-۳\overrightarrow{FC})$ کدام است؟



۱. ۶ ۲. ۴ ۳. -۴ ۴. -۶

۱۸. در شکل مقابل اگر $|a|=۱$، $|b|=۱$، $|c|=۳$ و $|d|=۵$ باشد حاصل $a.b+a.c+b.c$ کدام است؟

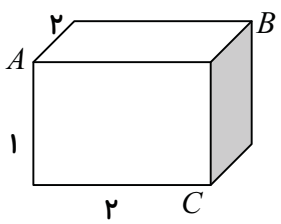


۱. ۵ ۲. ۴/۵ ۳. ۳ ۴. ۵/۵

۱۹. اگر اندازه دو بردار $v_۱=۲i+(a+۱)j+۴k$ و $v_۲=ai+۴j+۳k$ برابر باشند، کسینوس زاویه بین دو بردار کدام است؟

۱. $\frac{۱۶}{۲۹}$ ۲. $\frac{۲۴}{۲۹}$ ۳. $\frac{۴}{\sqrt{۲۹}}$ ۴. $\frac{۲۸}{۲۹}$

۲۰. در مکعب مستطیل مقابل با ابعاد ۱ و ۲ و ۲، کسینوس زاویه C در مثلث ABC کدام است؟



۱. صفر ۲. $\frac{۱}{۵}$ ۳. $\frac{۱}{۳}$ ۴. $\frac{۲}{۳}$

۲۱. اگر $a=۳i-۴k$ و اندازه تصویر بردار b در امتداد بردار a برابر ۲ باشد، $a.b$ کدام است؟

۱. -۱۰ ۲. -۲ ۳. ۲ ۴. ۱۰

۲۲. اگر $a.j=-۲a.k=a.(-۲i+۳j+۲k)=۲$، اندازه تصویر بردار $u(-۳,-۳,۳)$ روی بردار a کدام است؟

۱. $۲\sqrt{۶}$ ۲. $\sqrt{۶}$ ۳. $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۴. $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۲۳. اگر $۶x+\sqrt{۲}y+۲z=۴\sqrt{۲}$ باشد، مینیمم مقدار $۹x^۲+y^۲+۲z^۲$ کدام است؟

۱. $\sqrt{۲}$ ۲. ۴ ۳. ۲ ۴. $۲\sqrt{۲}$

۲۴. اگر $۴x^۲+۹y^۲+z^۲=۹$، ماکزیمم عبارت $۴x+۶y+z$ کدام است؟

۱. $۳\sqrt{۳}$ ۲. ۹ ۳. $۹\sqrt{۲}$ ۴. $۹\sqrt{۳}$

۲۵. اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۱,۱)$ دو نقطه باشند، مکان هندسی نقاطی مانند M که در رابطه $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=۰$ صدق کنند، کدام است؟

۱. $x^۲+y^۲=۳y+۱$ ۲. $x^۲+y^۲=۱-۳y$ ۳. $x^۲+y^۲=۳y-۱$ ۴. $x^۲+y^۲=-۳y-۱$

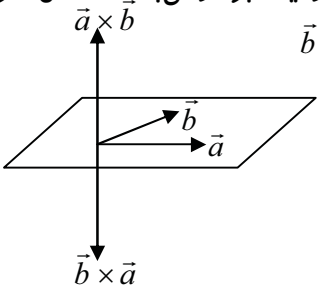
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ضرب خارجی دو بردار (ضرب برداری- ضرب بیرونی):

برخلاف ضرب داخلی دو بردار که حاصل آن یک عدد حقیقی است، حاصل ضرب خارجی دو بردار، یک بردار می‌باشد. حاصل ضرب خارجی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{a}\wedge\vec{b}$ نمایش داده می‌شود. $\vec{a}\times\vec{b}$ برداری است عمود بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (قانون دست راست)



فرض کنیم $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار درفضای R^3 باشند ضرب خارجی $\vec{a}\times\vec{b}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

نکته: اندازه $\vec{a}\times\vec{b}$: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

مثال: اگر $\vec{v}_1(-1,1,2)$ و $\vec{v}_2(1,-2,3)$ باشد، زاویه $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ با کدام محور بزرگ‌تر است؟

۱. محور x ها ۲. محور y ها ۳. محور z ها ۴. با هر سه یکسان است

مثال: اگر $|\vec{a}|=2$ و $|\vec{b}|=\sqrt{3}$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=3$ آن‌گاه زاویه بین این دو بردار کدام است؟

۱. ۳۰ ۲. ۴۵ ۳. ۶۰ ۴. ۹۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}(0,2,-1)$ و $\vec{b}(2,3,1)$ کدام است؟

۱. $5i-2j+4k$ ۲. $5i+2j-4k$ ۳. $-5i+2j+4k$ ۴. $5i+2j+4k$

نکته: بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ (یا $\vec{b}\times\vec{a}$) بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و همه ترکیبات خطی $\vec{b}$ و $\vec{a}$ به صورت $m\vec{a}+n\vec{b}$ عمود است.

مثال: دو بردار با مولفه‌های $\vec{a}(1,2,-1)$ و $\vec{b}(2,4,m)$ مفروضند. به ازای کدام مقادیر m اندازه بردار $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})$ برابر صفر است.

۱. $m=-2$ ۲. $m=\pm 2$ ۳. هیچ مقدار m ۴. هر مقدار m

مثال: بردار $\vec{v}$ به طول ۲۶، عمود بر دو بردار $\vec{a}(-3,-2,4)$ و $b(3,1,0)$ می‌باشد. مختصات بردار $\vec{v}$ کدام است؟

۱. $(6,24,-8)$ ۲. $(-6,24,-8)$ ۳. $(3,12,-4)$ ۴. $(-3,12,-4)$

ویژگی‌های ضرب خارجی دو بردار:

۱. ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد. $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$ و $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

۲. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{a}|$

۳. خاصیت شرکتپذیری ندارد. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

۴. $(r\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(r\vec{b})=r(\vec{a}\times\vec{b})\quad,\quad r\in R$

۵. خاصیت توزیع پذیری $\vec{a}\times(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c}$ $\qquad(\vec{b}\pm\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}\pm\vec{c}\times\vec{a}$

۶. خاصیت حذف برقرار نیست. $\vec{b}=\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ **ولی عکس آن برقرار نیست.**

۷. ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر صفر است. یعنی $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

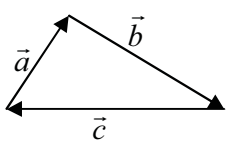
۸. دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند اگر وفقط اگر ضرب خارجی آن‌ها صفر برداری شود. $\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

۹. اتحادها برقرار نیستند.

مثال: اگر ۴ $=|\vec{a}|$، ۵ $=|\vec{b}|$ و ۲۰ $=|(a+b)\times(a-b)|$ باشد، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{4}$ ۲. $\frac{\pi}{3}$ ۳. $\frac{\pi}{2}$ ۴. $\frac{\pi}{6}$

نکته: (حرکت دوری) اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ آن‌گاه $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$



مثال: اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند به طوری که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ و $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{u}$ باشد، آن‌گاه $a\times c$ برابر کدام است؟

۱. $\vec{u}$ ۲. $-\vec{u}$ ۳. $-\frac{1}{2}\vec{u}$ ۴. $\frac{1}{2}\vec{u}$

ایران توسعه
توشه ای برای موفقیت

کاربرد ضرب خارجی در مساحت متوازی الاضلاع و مثلث:

مساحت متوازی الاضلاعی که بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن باشد، از رابطه $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$ بدست می‌آید و مساحت مثلثی(شکلی) که با این دو بردار پدید می‌آید به صورت $S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ محاسبه می‌شود.

نکته: مساحت متوازی الاضلاعی که دو قطر آن d و d' باشد به صورت $S=\frac{1}{2}|d\times d'|$ محاسبه می‌شود.

نکته: اگر $\vec{a}$ و $\vec{d}$ به ترتیب یک ضلع و یک قطر متوازی الاضلاع باشند مساحت متوازی از رابطه $S=|\vec{a}\times\vec{d}|$ نیز محاسبه می‌شود.

مثال: درستی نکات بالا را بررسی کنید.

مثال: مساحت متوازی الاضلاعی که سه راس آن نقاط $(1,2,1)$ و $(0,1,1)$ و $(1,-1,2)$ باشد، چقدر است؟

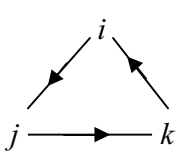
۱. $\sqrt{10}$ ۲. $\sqrt{11}$ ۳. $\sqrt{13}$ ۴. $\sqrt{15}$

مثال: در یک متوازی الاضلاع، قاعده و ارتفاع به ترتیب ۵ و ۳ می‌باشد. حاصل عبارت $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|$ کدام است؟

۱. ۵۰ ۲. ۲۵ ۳. ۶۰ ۴. ۷۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ضرب داخلی و خارجی بردار های یکه محورها:



ضرب داخلی: $i.i=j.j=k.k=1$ و $i.j=j.k=k.i=0$

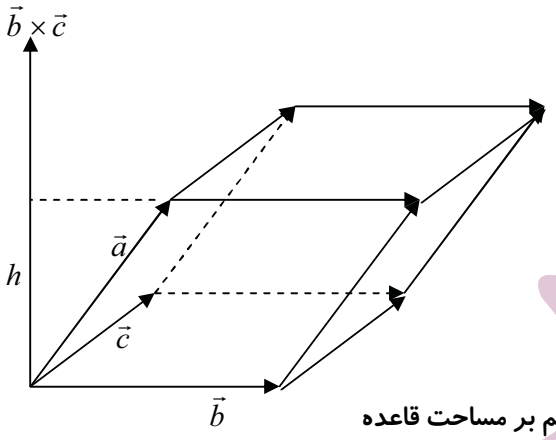
ضرب خارجی: مانند حرکت دوری: $i\times j=k$ و $j\times k=i$ و $k\times i=j$ و خلاف جهت مثلاً $i\times k=-j$

مثال: حاصل $2i.(j\times k)+3j.(i\times k)+4k.(i\times j)$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. صفر

مثال: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول‌های ۵ و ۸ مفروضند. مساحت تولید شده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است. اگر زاویه بین دو بردار کمتر از قائمه باشد، اندازه تفاضل این دو بردار کدام است؟

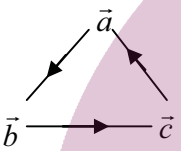
۱. ۵ ۲. ۶ ۳. ۶/۵ ۴. ۷/۵



حجم متوازی السطوح:

می دانیم مساحت قاعده متوازی السطوح برابر است با $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ و طول ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با اندازه ، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ یعنی $h=\dfrac{\left|\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|}$ و از طرفی ارتفاع برابر است با حجم متوازی السطوح تقسیم بر مساحت قاعده

لذا حجم متوازی السطوح از رابطه $V=\left|\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|$ بدست می‌آید.



به ضرب $\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$، ضرب مختلط نیز می‌گویند.

نکته: ضرب مختلط دارای حرکت دوری می باشد. یعنی

$$\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}.\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

مثال: اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، مقدار کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟

۱. $\vec{a}.\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)$ ۲. $\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ ۳. $\vec{b}.\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$ ۴. $\left(\vec{a}\times\vec{c}\right).\vec{b}$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

چند کاربرد ضرب مختلط:

۱. اگر $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$، $\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$ و $\vec{c}=\left(c_1,c_2,c_3\right)$ سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، حجم متوازی السطوح تولید شده توسط این سه بردار از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$V=\left|\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

نکته: حجم منشور مثلث القاعده با سه بردار بالا نصف حجم متوازی السطوح می‌باشد.

نکته: حجم چهاروجهی(هرم) $\frac{1}{3}$ حجم منشور و در نتیجه $\frac{1}{6}$ حجم متوازی السطوح می‌باشد.

مثال: حجم متوازی السطوح که یال‌های آن بردارهای $\vec{a} = i + 2j + 3k$ و $\vec{b} = j + 2k$ و $\vec{c} = i + 3k$ باشد، چقدر است؟

۱. ۲ ۲. ۴ ۳. ۸ ۴. ۱۲

مثال: بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به طوری که $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ و $|\vec{c}| = 3$ و $\vec{b}.\vec{c} = 0$ و زاویه بردار $\vec{a}$ با صفحه شامل $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر 60° می‌باشد. حجم متوازی السطوحی که بر این سه بردار بنا می‌شود، چقدر است؟

۱. صفر ۲. ۶ ۳. $6\sqrt{3}$ ۴. $4\sqrt{3}$

۲. (کاربرد مهم دوم) هم صفحه بودن سه بردار

$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ $\Leftrightarrow$ سه بردار در یک صفحه واقع باشند.

در واقع متوازی السطوحی تشکیل نشود.

مثال: سه بردار $(1,-1,1)$ و $(0,2,1)$ و $(m,0,2)$ هم صفحه‌اند. m کدام است؟

۱. $\frac{3}{4}$ ۲. $\frac{4}{3}$ ۳. $\frac{-3}{4}$ ۴. $\frac{-4}{3}$

مثال: به ازای کدام مقدار m، بردار $\vec{a} = (1,2,m)$ را می‌توان به صورت مجموع دو بردار در راستاهای $(0,-1,2)$ و $(2,3,-1)$ نوشت؟

۱. $\frac{2}{3}$ ۲. $-\frac{2}{3}$ ۳. $\frac{3}{2}$ ۴. $-\frac{3}{2}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

چند تمرین کتاب صفحه ۸۴:

۱. برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است، تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به دست آورید.

الف. $\vec{a}(2,-1,2)$ ، $\vec{b}=i$ **ب.** $\vec{a}(2,3,1)$ و $\vec{b}(3,2,1)$

۲. سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آن‌ها $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

۳. اگر $\vec{a}(1,-3,4)$ و $\vec{b}(3,-4,2)$ و $\vec{c}(-1,1,4)$ باشند، آن‌گاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را بدست آورید.

۴. برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}(1,-3,2)$ و $\vec{b}(-2,1,-5)$ را پیدا کنید.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵. سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آن‌ها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ بحث کنید.

۶. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری که $|\vec{a}|=3$، $|\vec{b}|=26$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$. مقدار $a.b$ را محاسبه کنید.

۷. مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A(۳,۵,۷)$، $B(۵,۵,۰)$ و $(-۴,۰,۴)$ داده شده است را بیابید.

۸. فرض کنید $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{۰}$. مقدار $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ را حساب کنید.

چند تست ضرب خارجی:

۱. اگر $a\times b=\vec{۰}$ و بردارهای a و b غیر صفر باشند. آن گاه الزاماً کدام درست است؟

۱. $a=-b$ ۲. $a=b$ ۳. $a\perp b$ ۴. $a\parallel b$ ۴

۲. اگر i، j و k بردارهای واحد مختصات باشند، حاصل $(i\times(i\times j))\times k$ کدام است؟

۱. $\vec{۰}$ ۲. $-i$ ۳. j ۴. $-k$ ۲

۳. اگر $a=i-۲j$، $b=۳j+۲k$ و $c=۴i+j-۲k$ باشد، تصویر بردار $(a\times b)\times c$ روی محور xها کدام است؟

۱. i ۲. $۳i$ ۳. $۲i$ ۴. $۴i$ ۱

۴. دو بردار با تصاویر $a=(۱,۲,-۱)$ و $b=(۲,۴,m)$ مفروضند. به ازای کدام مقادیر m، اندازه بردار $(a+b).(a\times b)$ برابر صفر است؟

۱. فقط $m=-۲$ ۲. فقط $m=\pm ۲$ ۳. هیچ مقدار m ۴. هر عدد حقیقی m ۴

۵. اگر بردار $a=(x,y,z)$ بر بردارهای $b=(۱,-۱,۲)$ و $c=(۲,۰,۱)$ عمود باشد و $|a|=۲$ باشد، حاصل $x+y+z$ کدام است؟

۱. $\frac{۱۰}{\sqrt{۱۴}}$ ۲. $\frac{۱۲}{\sqrt{۱۴}}$ ۳. $\frac{۶}{\sqrt{۱۴}}$ ۴. $\frac{۸}{\sqrt{۱۴}}$ ۴

۶. اگر $a.i=۲$ و $a.j=-۴$ باشد، $a\times k$ کدام است؟

۱. $-۴i+۲j$ ۲. $۴i-۲j$ ۳. $-۴i+۲j$ ۴. $-۴i-۲j$ ۴

۷. تصویر بردار $a\times b$ بر روی $۲a-b$ کدام است؟

۱. $\vec{۰}$ ۲. $۲a+b$ ۳. $b-۲a$ ۴. $b\times a$ ۱

۸. اگر $|v_۱\times v_۲|=۴$ باشد، اندازه بردار $(v_۱+v_۲)\times(۳v_۱-v_۲)$ چه قدر است؟

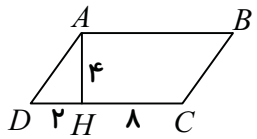
۱. ۱۶ ۲. ۸ ۳. ۴ ۴. صفر ۱

۹. حاصل $(a+b)\times(c-a)+(b+c)\times(۲a+b)$ کدام است؟

۱. $a\times c$ ۲. $c\times a$ ۳. $\vec{۰}$ ۴. $b\times c$ ۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰. در متوازی الاضلاع مقابل حاصل $|AB\times AC|+|AC\times BD|+|AB\times AD|$ کدام است؟



۱. ۸۰ ۲. ۱۲۰ ۳. ۱۶۰ ۴. ۲۰۰

۱۱. اگر بردار های a، b و c در رابطه $a+b+c=\vec{0}$ صدق کنند و $|a|=|b|=|c|=\sqrt{۲}$ باشد، $|a\times c|$ کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲. ۱ ۳. $\sqrt{۲}$ ۴. $\sqrt{۳}$ ۴

۱۲. اگر a، b و c سه بردار غیر صفر باشند و $a+b+c=\vec{0}$ و $a\times b=۳k$ باشد، حاصل $۴c\times a-c\times b$ کدام است؟

۱. $۹k$ ۲. $۱۴k$ ۳. $۱۵k$ ۴. $۱۸k$ ۳

۱۳. اگر اندازه ضرب خارجی دو بردار a و $b\times c$ با ضرب داخلی آن‌ها برابر باشد، زاویه بین a و $b\times c$ کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{۶}$ ۲. $\frac{\pi}{۴}$ ۳. $\frac{\pi}{۲}$ ۴. $\frac{\pi}{۳}$ ۲

۱۴. زاویه بین دو بردار a و b کم‌تر از ۹۰ است، $|a|=۶$، $|b|=۵$ و $|a\times(a+b)|=۱۸$، حاصل $a.(a+b)$ کدام است؟

۱. ۵۴ ۲. ۵۶ ۳. ۶۰ ۴. ۶۴ ۳

۱۵. مساحت مثلث ABC با سه راس $A(۱,-۲,۳)$، $B(۲,۰,۱)$ و $C(-۳,۲,۱)$ کدام است؟

۱. $\sqrt{۳۵}$ ۲. $\sqrt{۴۲}$ ۳. $\sqrt{۵۴}$ ۴. $\sqrt{۶۵}$ ۴

۱۶. اگر $a(۱,-۲,۳)$ و $b(۲,۰,۱)$، مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $a+۳b$ و $۲a+۵b$ کدام است؟

۱. $۲\sqrt{۳}$ ۲. $\sqrt{۲}$ ۳. $۳\sqrt{۵}$ ۴. $۵\sqrt{۳}$ ۳

۱۷. اگر $a=۲i-j+k$ و $b=j-k$ باشند، مساحت مثلثی که بر روی بردار $a\times b$ و $a+۲b$ ساخته می شود، کدام است؟

۱. $\sqrt{۵}$ ۲. $۲\sqrt{۲}$ ۳. ۳ ۴. $۲\sqrt{۳}$ ۴

۱۸. چهار بردار a، b، c و d در دو رابطه $a\times c=d\times b$ و $a\times d=c\times b$ صدق می کنند. الزاماً دو بردار غیرصفر $a+b$ و $c+d$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱. مساوی ۲. قرینه ۳. عمود ۴. موازی ۴

۱۹. دو بردارثابت $a(-۱,۲,۳)$ و $b(-۱,۰,۳)$ و بردار متغیر c مفروض‌اند. اگر $a\times c=b\times c$ باشد، مکان بردار c کدام است؟ ۲

۱. موازی با محور x ها ۲. موازی محور y ها ۳. موازی محور z ها ۴. همه بردارهای گذرنده از مبدا مختصات

۲۰. m چه قدر باشد تا چهار نقطه $A(m-۲,m,۱)$، $B(۰,۲,۱)$، $C(۲,-۳,۲)$ و $D(۱,۲,۴)$ در یک صفحه باشند؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۶ ۲

۲۱. اگر a، b و c سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟

۱. $a.(c\times b)$ ۲. $a.(b\times c)$ ۳. $b.(a\times c)$ ۴. $(a\times c).b$ ۲

۲۲. اگر $a\times c=a\times b$ و $b\neq c$، آن گاه کدام نتیجه گیری نادرست است؟ ۱

۱. a عمود بر $b-c$ ۲. a موازی $b-c$ ۳. $a.(b\times c)=۰$ ۴. a، b و c موازی یک صفحه اند

۲۳. اگر $a=(۲,-۳,۱)$. $b=(۱,۲,-۴)$ باشند، حجم متوازی السطوحی که بر روی سه بردار a، b و $a\times b$ ساخته شود، کدام است؟

۱. ۲۲۵ ۲. ۲۳۰ ۳. ۲۴۵ ۴. ۲۵۰ ۲

۲۴. بر روی سه بردار $a=۲i-j$، $b=j+۳k$ و $c=۴i-k$ یک متوازی السطوح ساخته شده است. اگر قاعده این متوازی السطوح را بردارهای a و b تشکیل دهند، ارتفاع متوازی السطوح کدام است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱. ۱ ۲. ۱/۵ ۳. $\sqrt{۳}$ ۴. ۲ ۴

۲۵. به ازای کدام مقدار m، بردار $a(-۳,۱۰,m)$ برابر مجموع دو بردار هم راستا با بردارهای $(۳,۱,۲)$ و $(۱,۴,-۲)$ است؟

۱. -۱۰ ۲. -۸ ۳. ۹ ۴. ۱۱ ۱

۲۶. بین سه بردار a، b و c رابطه $(a\times b)+(b\times c)+(c\times a)=\vec{۰}$ برقرار است. وضعیت این سه بردار نسبت به هم چگونه است؟

۱. موازی هم ۲. منطبق برهم ۳. واقع در یک صفحه ۴. دو به دو عمود بر هم ۳

۲۷. اگر a، b و c سه بردار غیر صفر باشند، خلاصه شده $(۲a-b).((b+c)\times(c-a))$ کدام است؟

۱. $a.(b\times c)$ ۲. $۲a.(b\times c)$ ۳. $۳a.(b\times c)$ ۴. صفر ۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت