

# ایران توشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی

- دانلود گام به گام

- دانلود آزمون گاج و قلم چی و سنجش

- دانلود فیلم و مقاله انگلیزی

- کنکور و مشاوره

 IranTooshe.Ir

 @irantooshe

 IranTooshe





## مجموعه ها

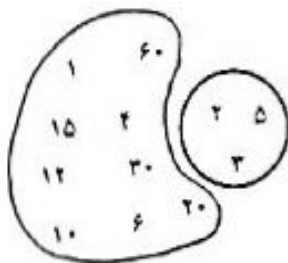
وَهُوَ الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ النُّجُومَ لِتَهْتَدُوا بِهَا فِي ظُلُمَاتِ الْبَرِّ وَالْبَحْرِ .....  
او کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی های  
خشکی و دریا، به وسیله آنها راه یابید...  
(سوره انعام، آیه ۹۷)



منظومه شمسی مجموعه ای است شامل ستاره خورشید و سیاره هایی که  
روی مدارهای خاصی در حال چرخش هستند؛ نظیر ستاره خورشید. ستاره هایی  
با بزرگی چند هزار برابر خورشید رصد شده است. طوری که اگر به اندازه  
خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می پوشانند.



## فعالیت



در شکل روبه‌رو شمارنده‌های طبیعی عدد ۶۰ را نوشته‌ایم و بین آنها شمارنده‌های اول را مشخص کرده‌ایم. شما هم شمارنده‌های ۶۰ را که اول نیست در یک منحنی بسته قرار دهید.

اگر شمارنده‌های طبیعی و اول عدد ۶۰ یعنی ۲، ۳، ۵ را در داخل دو آکلاด قرار دهیم و آن را با حرفی چون A یا B یا ... نام‌گذاری کنیم و بنویسیم  $A = \{2, 3, 5\}$  در این صورت یک مجموعه تشکیل داده‌ایم و به هریک از عددهای ۲، ۳ و ۵ یک عضو مجموعه A می‌گوییم؛ در این صورت مجموعه A دارای ۳ عضو است.

\* شما شمارنده‌های مرکب عدد ۶۰ را به صورت یک مجموعه بنویسید و آن را B بنامید.

$$B = \{4, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 40\}$$

\* مجموعه شامل شمارنده‌های عدد ۶۰ که نه اول باشد و نه مرکب، چند عضو دارد؟ این مجموعه را نیز C بنامید و آن را نمایش دهید.

$$C = \{1\}$$

\* مجموعه D شامل همه شمارنده‌های دورقمی ۶۰ را تشکیل دهید؛ این مجموعه چند عضو دارد؟

$$D = \{10, 12, 15, 20, 30, 40\}$$

از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعه شامل ۳ شمارنده زوج عدد ۶۰ را تشکیل دهند. احمد

نوشت:  $\{4, 6, 10\}$  و رضا نوشت:  $\{6, 10, 12\}$  به نظر شما چرا جواب‌های آنها با هم فرق دارد؟ چون ۸ شمارنده زوج وجود دارد نتیجه: عبارت‌هایی شبیه این عبارت، که مشخص کننده یک مجموعه معین و یکتا باشد، احمد و رضا هر کدام از این ۸ شمارنده ۵ سه شمارنده انتخاب کرده‌اند مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.

## توشه‌ای برای موفقیت

در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه، مهم نیست و با جای جایی

عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود؛ همچنین با تکرار عضوهای یک

مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود؛ بنابراین به جای  $\{3, 2, 4\}$  می‌نویسیم  $\{2, 4\}$ .

## معرفی مجموعه

ما، در زندگی روزمره در صحبت‌ها و نوشته‌هایمان از واژه‌هایی مانند دسته، گروه و مجموعه استفاده می‌کنیم؛ برای مثال وقتی می‌گوییم «گروهی از ورزشکاران وارد ورزشگاه شدند»، نام ورزشکاران را مشخص نکرده‌ایم، در حالی که ما از مجموعه در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیر تکراری) استفاده می‌کنیم.

## فعالیت

۱- کدام یک از عبارت‌های زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ مجموعه مورد نظر را نمایش دهید.

✓ الف) عدد‌های طبیعی و یک رقمی (X) ب) چهار شاعر ایرانی (X ج) دو عدد اول کوچک‌تر از ۱۲

{۱، ۲، ۳، ...، ۹}

۲- با توجه به شرط متعایز بودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پر کنید:

الف) به جای  $A = \{۱، ۲، ۱، ۴، ۵\}$  باید بنویسیم  $A = \{۱، ۲، ۴، ۵\}$

ب) به دلیل تکراری بودن عدد ۵ در  $B = \{۵، ۶، ۵، ۷\}$  آن را به صورت  $B = \{۵، ۶، ۷\}$  می‌نویسیم.

اگر مجموعه  $A$  را به صورت  $A = \{a, b, ۵, ۷\}$  در نظر بگیریم برای نشان دادن

اینکه  $a$  عضوی از مجموعه  $A$  است می‌نویسیم  $a \in A$  و می‌خوانیم « $a$  عضو  $A$  است»

و چون عدد ۴ عضو  $A$  نیست، می‌نویسیم  $۴ \notin A$  و می‌خوانیم « $۴$  عضو  $A$  نیست».



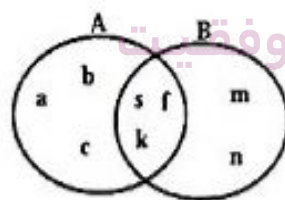
نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون: مجموعه را می‌توان با

استفاده از منحنی‌های بسته نمایش داد؛ به عنوان مثال مجموعه  $A = \{۱، ۲، ۳، ۴\}$

را به صورت روبه‌رو نمایش می‌دهیم که نمایش با استفاده از نمودار ون است.

# ایران تونش

## فعالیت



۱- با توجه به نمودار ون، که برای دو مجموعه  $A$  و  $B$  رسم

شده است، مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را با عضوهایشان مشخص کنید.

$A = \{a, b, c, s, f, k\}$   $B = \{m, n, s, f, k\}$

۲- دو مجموعه  $A = \{۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶\}$  و  $B = \{۵، ۶، ۷، ۸\}$  را در نظر بگیرید:

دو مجموعه را با یک نمودار ون نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بسته مربوط به  $A$  و

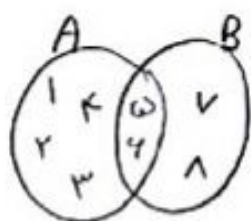
هم در منحنی بسته  $B$  وجود دارد؟ ۵ و ۶

۳- مجموعه عدد‌های دو رقمی و زوج اول را بنویسید و آن را  $E$  بنامید. این مجموعه چند

عضو دارد؟ عضو ندارد.

$E = \{ \}$

۳





«اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعه تهی می‌نامیم و

با نماد  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نمایش می‌دهیم.» توجه شود که این مجموعه با مجموعه  $\{0\}$  یا  $\{*\}$

که هر کدام دارای یک عضو هستند، یکی نیست.

۴- کدام یک از عبارت‌های زیر، مجموعه تهی را مشخص می‌کند؟

✓ الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶ ب) عددهای صحیح بین -۱ و ۱

ج) عددهای اول و زوج د) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اول باشند.

## کار در کلاس

(سؤال اول باز پاسخ می‌باشد)

۱- سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان دهنده مجموعه تهی باشد؛ سپس عبارت‌های خود را با

نوشته‌های هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید. (اعداد طبیعی کوچکتر از ۱) د (اعداد صحیح بین ۲- و ۷-) د (اعداد صحیح زوج بین ۲ و ۴)

۲- سه عبارت بنویسید که هر کدام مشخص کننده مجموعه‌ای فقط با یک عضو باشد. (جنبین

مجموعه‌هایی را مجموعه‌های یک عضوی می‌نامند.) (اعداد صحیح کوچکتر از ۱) د (اعداد اول بین ۱۰ و ۹۰) د (اعداد اول زوج)

۳- عبارت‌هایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند با علامت  $\checkmark$  و بقیه را با علامت  $\times$  مشخص

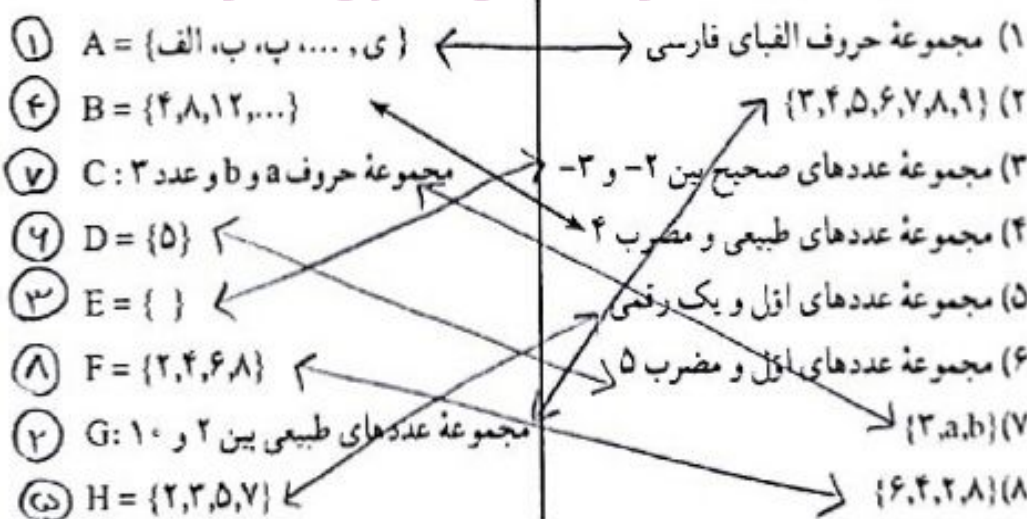
کنید (با ذکر دلیل).

✓ الف) چهار عدد فرد متوالی ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲

✓ ج) عددهای اول کوچک‌تر از ۲۰ د) سه شهر ایران ✓ ه) شمارنده‌های عدد ۲۴

× و) ۵ عدد بزرگ ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳

۴- مانند نمونه کامل کنید: **توشه‌ای برای موفقیت**





۵- کدام یک از عبارات های زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ با نمودار ون نشان دهید:

✓ الف) عددهای صحیح مثبت و کمتر از ۱۰

✓ ب) شمارنده های اول عدد ۱۹

✓ ج) عددهایی که شش وجه یک تاس معمولی مشخص می کند.

✓ د) جواب های معادله  $2x+8=1$

ه) چهار میوه خوشمزه

✓ و) عددهای منفی و بزرگ تر از یک

### تمرین

۱- متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد

عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید:

۵ عضو → الف)  $A = \{1, 8, 27, 64, 125\}$  توان سوم اعداد طبیعی بین ۲ و ۴

۱ عضو → ب)  $C = \{10\}$  اعداد طبیعی بین ۹ و ۱۱

۳۳۳ عضو → ج) عددهای طبیعی مضرب ۳ و کوچک تر از ۱۰۰۰

ممنوع عضو → د) عددهای طبیعی بزرگ تر از ۴ و کوچک تر از ۵

صفر عضو → ه) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد.

صفر عضو → و) عددهای اول دورقمی که مضرب ۷ باشند.

۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد» یک مجموعه را مشخص نمی کند.

ب) مجموعه  $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$  دارای ۸ عضو است.

ج) مجموعه  $A = \{0, \emptyset\}$  دارای ۲ عضو است.

د) با توجه به مجموعه  $A = \{2, 5, 7, 9, 11\}$  داریم: ۵ عضو A است یا با نماد ریاضی  $5 \in A$

و ۱۲ عضو A نیست یا با نماد ریاضی  $12 \notin A$ .

۳- سه مجموعه متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آن باشد. (با ریاضی)

$\{2\}$  و  $\{2, 3, 5, \dots\}$  و  $\{1, 2, 3\}$



## درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

### دو مجموعه برابر

#### فعالیت

۱۰	-۱۵	۱۲
۴	۴	۲
-۲	۱۸	-۲

۱- جدول عددهای صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعه عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را  $A$  بنامید.

$$A = \{2, 4, 4\}$$

اکنون مجموعه  $B$  را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  چند عضو دارد؟  $B = \{2, 4, 4\}$  آیا هر عضو  $A$  در مجموعه  $B$  است؟ آیا هر عضو  $B$  در مجموعه  $A$  است؟ بله

همان‌طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعه  $A$  و  $B$  یکسان است و هر عضو  $A$ ، عضوی از  $B$  و هر عضو  $B$ ، عضوی از  $A$  است؛ در این صورت دو مجموعه  $A$  و  $B$  برابر است و می‌نویسیم  $A = B$ .

$$A = \{8, 9, 10\}$$

۲- مجموعه  $A$  شامل سه عدد طبیعی متوالی است به طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا  $A$  را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با  $A$  برابر است:

$$\{7, 8, 9\}$$

الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰

$$\{8, 9, 10\}$$

ب) مجموعه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱

$$\{8, 9, 10\}$$

ج) مجموعه سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است.

همان‌طور که دیدید مجموعه  $\{8, 9, 10\}$  با مجموعه  $\{7, 8, 9\}$  برابر نیست؛ زیرا همه عضوهایشان

یکسان نیست.

اگر عضوی در  $A$  باشد که در  $B$  نباشد یا عضوی در  $B$  باشد که عضو  $A$  نباشد در این صورت

مجموعه  $A$  با  $B$  برابر نیست و می‌نویسیم  $A \neq B$ .

#### کاردرکلاس

۱- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشند:

می‌توان اعداد را به صورت‌های دیگر نیز نوشت

$$\left\{5, -3, \frac{2}{5}, 4, \frac{9}{3}\right\} = \left\{\frac{2}{5}, 3, \frac{-\sqrt{144}}{(-2)}, \sqrt{16}, \sqrt{25}\right\} \quad \text{الف)}$$

$$\left\{ 7 \cdot \frac{4}{10} \cdot \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\sqrt{\frac{4}{9}} \cdot 1625 \right\} = \left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot -10 \cdot \frac{5}{8} \cdot \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot -2 \right\} \quad (ب)$$

۲- دو مجموعه به نام های A و B مانند سوال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

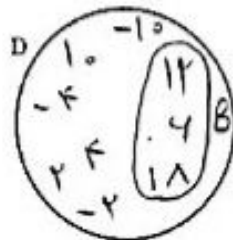
$$A = \{-\sqrt{4}, -\sqrt{9}, -\sqrt{25}\}$$

(باز پاسخ) هر چه بد درست مورد قبول است

$$B = \{-2, -3, -5\}$$

زیر مجموعه

## فعالیت



مجموعه عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای

مجموعه D را در نمودار بنویسید:

در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۲ بخش پذیر است با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعه B را بنویسید، آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟  $B = \{4, 12, 18\}$

در مجموعه D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا  $D = C$ ؟  $C = \{2, 4, 6, 12, 18, -2, -4, -10\}$

همان طور که دیدید، عضوهای مجموعه B همگی در D هست؛ یعنی هر عضو B، عضوی از

D است؛ در این صورت مجموعه B زیرمجموعه D است و می نویسیم  $B \subseteq D$ .

آیا مجموعه C زیرمجموعه D است؟ بله

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیرمجموعه خودش

هست؛ یعنی اگر A مجموعه ای دلخواه باشد، داریم:  $A \subseteq A$ .

اکنون زیرمجموعه ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشند؛ نام دیگر این

مجموعه چیست؟  $\{ \}$

آیا عبارت  $\{10, 4, -6, 2\} \subseteq D$  درست است؟ چرا؟ نخیر چون ۶ عضو مجموعه D نمی باشد.

اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می گوییم B زیرمجموعه A نیست و می نویسیم  $B \not\subseteq A$ .

آیا در مجموعه تهی عضوی هست که در مجموعه دلخواهی مانند A نباشد؟ نخیر

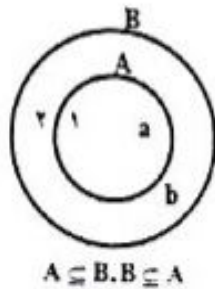
مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه ای دلخواه مانند A است؛ یعنی:  $\emptyset \subseteq A$ .



مثال: دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

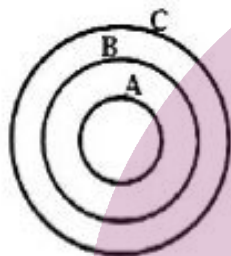
الف)  $\{a,b,c,e\} \not\subseteq \{a,b,d\}$ : زیرا در مجموعه سمت چپ،  $d$  هست که در مجموعه سمت راست نیست.

ب)  $\{-1,0,1,3\} \subseteq \{4,3,0,1,-1,2\}$ : زیرا هر عضو مجموعه سمت چپ، عضوی از مجموعه سمت راست است.



ج) با توجه به شکل مقابل  $A \subseteq B$  درست است؛ زیرا همه عضوهای  $A$  در  $B$  قرار دارد و  $B \not\subseteq A$  درست است؛ زیرا عضوی در  $B$  مانند  $2$  می‌توان یافت که در  $A$  وجود ندارد.

## کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

$$C \not\subseteq A \checkmark, B \subseteq A \times, A \not\subseteq C \times$$

$$A \subseteq B \checkmark, B \subseteq C \checkmark, \emptyset \subseteq A \checkmark$$

۲- مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  را در نظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید (با ذکر دلیل):

$$A = \{1, 2, 4, 6\}, B = \{5, 1, 3\}, C = \{2, 5, 1, 3, 6\}$$

$$B \not\subseteq A \checkmark, 2 \in B \times, A \subseteq B \times, B \subseteq C \checkmark, A \not\subseteq C \checkmark, 2 \in A \times$$

$$\{1, 4\} \in A \times, 6 \in A \times, \{5, 6\} \subseteq C \checkmark, 5 \in C \checkmark, \emptyset \subseteq A \times$$

مثال: همه زیرمجموعه‌های  $A = \{a, b, c\}$  در زیر نوشته شده است:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مانند مثال قبل، تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

$$\{a, b, c, d\} \quad \{1, 2\} \quad \{a, b, c, d\} \quad \{1, 2\}$$

نمایش مجموعه‌های اعداد  
در سال‌های گذشته با اعداد طبیعی آشنا شده‌اید؛ از این عددها برای شمارش استفاده می‌کنیم.

$$\{a, b, c, d\}$$

مجموعه عددهای طبیعی را با  $\mathbb{N}$  نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

تاکنون مجموعه‌ها را با عضوها و نمودار ون مشخص کردیم. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است: برای مثال: مجموعه عددهای طبیعی زوج  $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  را در نظر بگیرید. می‌دانیم عضوهای این مجموعه خاصیت مشترکی دارد؛ یعنی همگی آنها مضرب ۲ است و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به صورت  $2k$  قابل نمایش است که در آن  $k \in \mathbb{N}$ . پس می‌نویسیم:

$$E = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$$

و می‌خوانیم  $E$  برابر است با مجموعه عددهایی به شکل  $2k$  به طوری که  $k$  متعلق به مجموعه عددهای طبیعی است. در مجموعه  $E$  علامت «|» خوانده می‌شود «به طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم:

الف) مجموعه عددهای طبیعی فرد:  $O = \{2k-1 | k \in \mathbb{N}\}$

ب)  $A = \{7, 8, 9, 10\}$  یا  $A = \{x \in \mathbb{N} | 7 \leq x \leq 10\}$  یا  $A = \{x \in \mathbb{N} | 6 < x < 11\}$

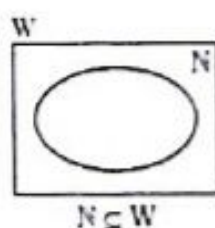
ج) زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{N}$  که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش پذیر است:  $\{3k | k \in \mathbb{N}\}$

مثال: مجموعه  $A = \{5n+3 | n \in \mathbb{N}\}$  را با عضوهایش مشخص کنید:

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به جای  $n$  یک عدد طبیعی در  $5n+3$  قرار دهید.

$n$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
$5n+3$	$\frac{5(1)+3}{13}$	$\frac{5(2)+3}{13}$	$\frac{5(3)+3}{13}$	$\frac{5(4)+3}{13}$	$\frac{5(5)+3}{13}$	$\frac{5(6)+3}{13}$	$\frac{5(7)+3}{13}$	...
	۸	۱۳	۱۸	۲۳	۲۸	۳۳	۳۸	...

بنابراین داریم:  $A = \{8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, \dots\}$



مجموعه عددهای حسابی را با  $W$  نمایش می‌دهند:  $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

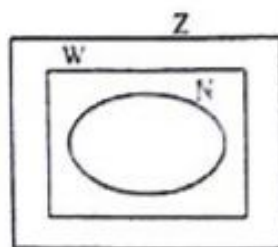
مجموعه عددهای حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به صورت

$$W = \{k-1 | k \in \mathbb{N}\} \text{ نوشت.}$$

هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی  $N \subseteq W$

مجموعه عددهای صحیح را با  $Z$  نمایش می‌دهیم:

$$= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



همه عددهای طبیعی و حسابی، عضو  $Z$  هم هست؛ پس:  $N \subseteq W \subseteq Z$



## کار در کلاس

مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید:  $\{ \dots, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots \}$   
 الف) مجموعه عددهای صحیح فرد  $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x < 5\}$  (ب)

ج)  $B = \{2k+2 | k \in \mathbb{Z}\} = \{ \dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots \}$

مجموعه عددهای گویا را با  $Q$  نمایش می‌دهیم. چون اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی‌توان این مجموعه را با اعضا مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعه عددهای

گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم:  $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$  و  $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح  $a$  داریم:  $a = \frac{a}{1}$

در نتیجه  $\mathbb{Z} \subseteq Q$

## تمرین

۱- مجموعه  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم

برابر است؟  $\{ -1 \}$   $\{ 1, -1 \}$   $\{ 0, 1, -1 \}$   
 $B = \{x | x \in A, x' \leq 2\}$  ,  $C = \{x | x \in A, -1 \leq x \leq 1\}$  ,  $D = \{x | x \in A, x' = 1\}$

۲- سه مجموعه مانند  $A$ ,  $B$  و  $C$  بنویسید به طوری که  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$ . آیا می‌توان نتیجه

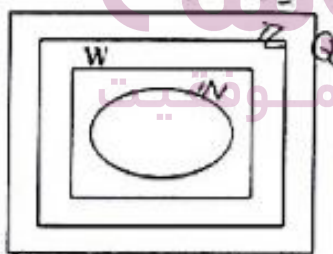
گرفت  $A \subseteq C$ ؟ (باز پاسخ)

$A = \{1, 2\}$   
 $B = \{1, 2, 3\}$   
 $C = \{1, 2, 3, 4\}$

۳- تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

الف)  $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 2x+1=3\}$  (ب)  $B = \{x | x = 0, 2, 3\}$  و  $\{0, 4\}$

۴- نمودار رولکرو، وضعیت مجموعه‌های  $Q$ ,  $W$ ,  $N$  و  $Z$



را نسبت به هم نشان می‌دهد: آنها را نام گذاری و با علامت  $\subseteq$  با هم

مقایسه کنید.  $N \subseteq W$  ,  $W \subseteq Z$  ,  $Z \subseteq Q$  و  $N \subseteq Z$  ,  $W \subseteq Q$  ,  $Z \subseteq Q$

کدام درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص

کنید: مثلاً  $\frac{1}{2}$  گویا نیست و  $\frac{1}{2}$  هست ولی حسابی نیست

الف) هر عدد گویا عددی حسابی است.

ب) هر عدد صحیح عددی گویا است.

ج) هر عدد صحیح عددی گویا است.

د) هر عدد صحیح عددی گویا است.

۱۰- بنویسید که تفریح آن مخالف ضرب باشد.

بنویسید که تفریح آن مخالف ضرب باشد.

بنویسید که تفریح آن مخالف ضرب باشد.

بنویسید که تفریح آن مخالف ضرب باشد.

بنویسید که تفریح آن مخالف ضرب باشد.

هر عدد حسابی را می‌توان به صورت یک عدد کسری نوشت که تفریح آن مخالف

الف) هر عدد حسابی عددی گویا است. متن باشد.

ب) هر عدد صحیح عددی گویا است.

ج) هر عدد صحیح عددی گویا است.

د) هر عدد صحیح عددی گویا است.

۱۰- بنویسید که تفریح آن مخالف ضرب باشد.

بنویسید که تفریح آن مخالف ضرب باشد.

بنویسید که تفریح آن مخالف ضرب باشد.

بنویسید که تفریح آن مخالف ضرب باشد.

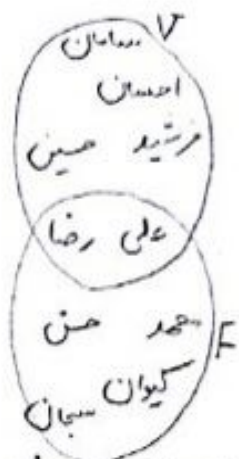
بنویسید که تفریح آن مخالف ضرب باشد.

## فعالیت

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

$F = \{ \text{علی، رضا، محمد، کیوان، سامان و حسن} \}$

$V = \{ \text{علی، رضا، حسین، فرشید، احسان و سامان} \}$



۱- در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند.

(الف) اگر مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با  $V$  و فوتبال را با  $F$  نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار ون نمایش و سپس با عضوهایشان بنویسید.

(ب) مجموعه دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید:  $\{ \text{علی، رضا} \}$

(ج) مجموعه دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند، بنویسید:  $\{ \text{علی، رضا، محمد، حسن، کیوان، سامان، حسین، فرشید، احسان} \}$

۲- دو مجموعه  $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 6\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{Z} | -2 \leq x \leq 3\}$  را در نظر بگیرید و

مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید:

(الف)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (ب)  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

(ج)  $A \cap B = \{1, 2, 3\}$  = مجموعه عددهایی که در هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  هست

(د)  $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  = مجموعه عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه  $A$  و  $B$  هست

اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، مجموعه‌ای شامل

همه عضوهای است که هم عضو مجموعه  $A$  و هم عضو مجموعه  $B$  است. این مجموعه را با نماد  $A \cap B$  نشان می‌دهیم. در نمودار روبه‌رو قسمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.

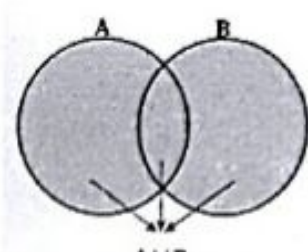
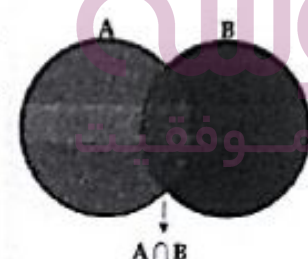
$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$ ،

مجموعه‌ای است شامل همه عضوهای که حداقل در یکی از دو مجموعه  $A$  و  $B$  باشد. این مجموعه را با نماد  $A \cup B$  نشان می‌دهیم. در نمودار، قسمت هاشور خورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

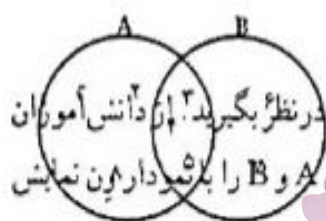
اگر در شکل فقط قسمت اشتراک  
رنگی باشد بهتر است.



مثال : با توجه به نمودار زیر ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان می‌نویسیم و سپس  $A \cap B$  و  $A \cup B$  را تشکیل می‌دهیم :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\} \text{ و } B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5\} , A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

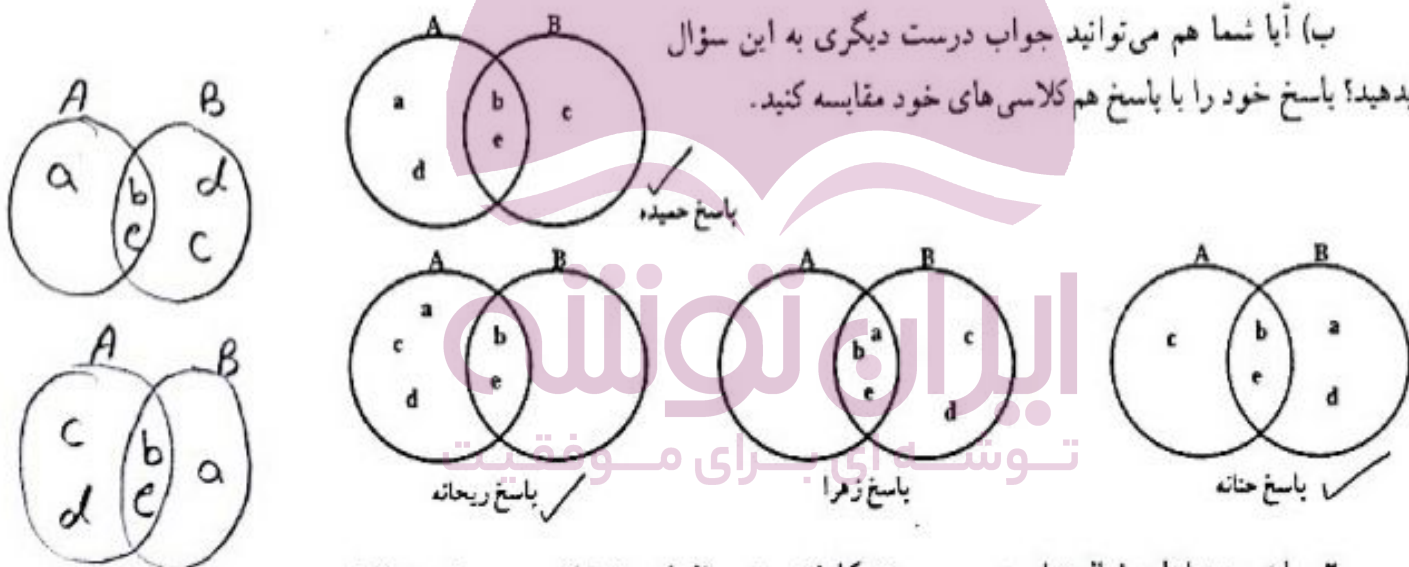


۱- دو مجموعه  $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$  و  $A \cap B = \{b, e\}$  را در نظر بگیرید. از دانش آموزان یک کلاس خواسته شده است که با توجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را بشمارند و این نمایش

### فعالیت

دهند. پاسخ چهار دانش آموز این کلاس را در زیر می‌بینید :

الف) درباره درستی یا نادرستی پاسخ این دانش آموزان بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.



۲- با توجه به اولین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد  $V - F$  نمایش می‌دهیم :

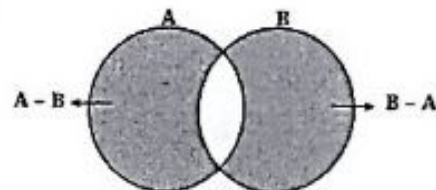
$$V - F = \{\text{اساسان و فرستاده‌های تیم فوتبال}\}$$

$$F - V = \{\text{لیوان و سبیلان و...}\}$$



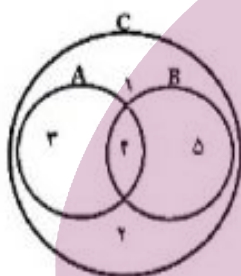
تفاضل دو مجموعه: مجموعه  $A - B$  (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همه عضوهایی که عضو مجموعه A هستند ولی عضو مجموعه B نیستند. در شکل زیر مجموعه‌های  $A - B$  و  $B - A$  هاشور خورده است:

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$



مثال: اگر  $A = \{a, b, c, d, e, k\}$  و  $B = \{c, d, k, f, s, t\}$  در این صورت:  
 $A - B = \{a, b, e\}$  و  $B - A = \{f, s, t\}$

### کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست

است؟

- الف)  $A \subseteq C$  ✓      ب)  $B \subseteq C$  ✓      ج)  $C \subseteq (A \cup B)$  ✗  
 د)  $(A \cup B) \subseteq C$  ✓      هـ)  $2 \in (A \cup B)$  ✗      و)  $4 \notin (A \cap B)$  ✗  
 ز)  $A \cup B = A$  ✗      ح)  $5 \in (A \cup B)$  ✓      ط)  $4 \in (A \cup B)$  ✓

۲- مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را B

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن، شمارنده ۱۸ باشد ولی شمارنده ۱۲ نباشد.  $\{9, 18\}$   
 ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن، هم شمارنده ۱۲ و هم شمارنده ۱۸ باشند.  $\{1, 2, 3, 6\}$

۳- مجموعه‌های  $(\mathbb{Z} - \mathbb{N})$ ،  $(\mathbb{N} - \mathbb{Z})$  و  $(\mathbb{W} - \mathbb{N})$  را تشکیل دهید.  
 $\{ \dots, -2, -1, 0 \}$      $\{ 0, 1, 2, \dots \}$      $\{ 0, 1, 2, \dots \}$

قرارداد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با  $n(A)$  نمایش می‌دهیم: به

عنوان مثال، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، می‌نویسیم  $n(A) = k$ .

مثلاً اگر  $A = \{2, 4, 6, 7\}$  در این صورت  $n(A) = 4$ .

۱۳

$$\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{ \dots, -2, -1, 0 \} - \{ 0, 1, 2, \dots \} = \{ \dots, -2, -1 \}$$

$$\mathbb{N} - \mathbb{Z} = \{ 0, 1, 2, \dots \} - \{ \dots, -2, -1, 0 \} = \{ \}$$

$$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots \} - \{ 0, 1, 2, \dots \} = \{ \}$$

سؤال ۳:

- الف  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$   
 ب  $\{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11\}$   
 ج  $\{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$   
 د  $\{9\}$   
 ه  $\{2, 4, 6, 8\}$   
 و  $\{8, 10, 11\}$

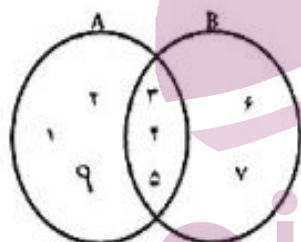
- ز  $\{2, 4, 6, 8, 9\} \cup \{5, 7, 9\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$   
 ح  $\{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$   
 ط  $\{2, 4, 6, 8, 9\}$   
 ی  $\{\}$   
 ک  $\{1, 5, 7, 9\}$   
 ل  $\{1, 7, 8, 10, 11\}$  **تصویر**

سؤال ۱:

۱- مجموعه های  $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$  و  $B = \{1, 5, 7, 9\}$  و  $C = \{1, 7, 8, 10, 11\}$  را در نظر بگیرید؛ سپس هر یک از مجموعه های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید:

- الف  $A \cup B$  ب  $B \cup C$  ج  $A \cup C$  د  $A \cap B$   
 ه  $A - B$  و  $C - B$  ز  $(A - C) \cup (B - C)$  ح  $(A \cup B) - C$   
 ط  $A \cap A$  ی  $A \cap \emptyset$  ک  $B \cup B$  ل  $C \cup \emptyset$

۲- با توجه به نمودار زیر، عبارات های درست را با  $\checkmark$  و گزاره های نادرست را با  $\times$  مشخص کنید:



$(A - B) \cup (A \cap B) = A$  (الف)  $\checkmark$   $B - A = \{6, 7\}$  (ب)  $\checkmark$

$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6\}$  (ج)  $\times$

$n(A \cup B) = 8$  (د)  $\checkmark$

$n(A - B) = n(B - A)$  (ه)  $\times$   $A - B = B - A$  (و)  $\checkmark$

۳- کلمات و مجموعه های داده شده زیر را در جاهای خالی قرار دهید:

اجتماع (۳)

A (۲)

B (۱)

$(A \cup B)$  (۵)

زیرمجموعه (۴)

الف) اشتراک دو مجموعه، زیر مجموعه اجتماع همان دو مجموعه است.

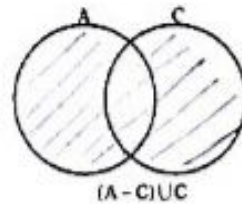
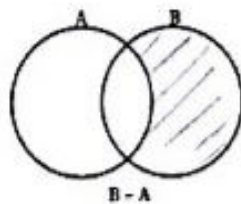
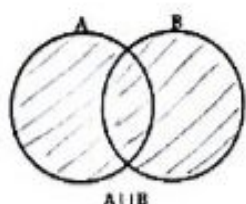
ب) هر یک از دو مجموعه A و B زیرمجموعه  $A \cup B$  است.

ج) اشتراک دو مجموعه A و B زیرمجموعه هر یک از دو مجموعه A و B است.

د) مجموعه  $A - B$  زیرمجموعه مجموعه A است.

ه) اجتماع دو مجموعه  $(A \cap B)$  و  $(B - A)$  با مجموعه B مساوی است.

۴- در هر یک از شکل های زیر مجموعه مورد نظر را هاشور بزنید.



## درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

در سال گذشته برای محاسبه احتمال هر پیشامد از دستور زیر استفاده کردیم :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

اکنون با توجه به آشنایی و شناخت شما نسبت به مجموعه‌ها و نمادگذاری‌ها نا محدودی راحت‌تر می‌توان این فرمول را نوشت و به کار برد.

اگر مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن را  $S$ ، مجموعه شامل همه حالت‌های مطلوب را  $A$  و احتمال رخ دادن پیشامد  $A$  را با نماد  $P(A)$  نشان دهیم، دستور بالا به صورت  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  نوشته می‌شود.

### یادآوری

مثال: اگر تاسی را بیندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید :



(الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ب) عدد رو شده اول باشد  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ج) عدد رو شده از ۶ بزرگ‌تر باشد. ۰

(د) عدد رو شده از ۷ کمتر باشد. ۱

حل: (الف) پیشامد مطلوب یعنی رو شدن مضرب ۳ را  $A$  می‌نامیم؛ در این صورت داریم:

$$A = \{3, 6\}, S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; n(A) = 2, n(S) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$B: \text{پیشامد رو شدن عدد اول}; B = \{2, 3, 5\}; n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$C: \text{پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶}; C = \emptyset \rightarrow n(\emptyset) = 0$$

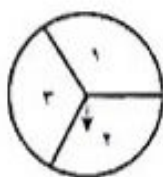
$$P(C) = P(\emptyset) = \frac{0}{6} = 0$$

$$D: \text{پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷}; D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$$

$$P(D) = P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$$



## فعالیت



۱- با توجه به چرخنده مقابل، همه حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعه  $S$  بنامید.  $S$  را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

$$S = \{1, 2, 3\}$$

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید:

$A = \{3, 1\}$  (عقربه روی ناحیه ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)

$B = \{1, 2\}$  (عقربه روی اعداد زوج بایستد)

$C = \{2, 3\}$  (عقربه روی اعداد اول بایستد)  $D = \{2\}$  (عقربه روی عدد ۲ بایستد) .....  $E = \{1, 2, 3\}$  (عقربه روی هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳ بایستد)

ب) هر یک از زیرمجموعه‌های  $S$  را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هر یک از این پیشامدها را به دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانسی است؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

$A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\} \rightarrow P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

ج) همه زیرمجموعه‌های  $S$  را تشکیل دهید:  $D = \{1, 2\}, E = \{1, 3\}, F = \{2, 3\} \rightarrow P(D) = P(E) = P(F) = \frac{2}{3}$

$G = \{\emptyset\} \rightarrow P(G) = 0$

$H = \{1, 2, 3\} \rightarrow P(H) = 1$

کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.



الف) مجموعه همه حالت‌های ممکن  $S = \{1, 2, \dots, 10\}$  است. پیشامد  $A$  را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعه  $A$  را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به دست آورید.

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ب) مجموعه با پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن پیشامد،  $\frac{4}{10}$  باشد. عدد روی کارت خارج شده بیشتر از ۶ باشد.

ج) اگر  $B$  پیشامد خارج شدن عدد اول و  $C$  پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های  $B$  و

$C$  را تشکیل دهید و احتمال رخداد هر یک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای  $B$  و  $C$  هم‌شانسی است؟ چرا؟

$$B = \{2, 3, 5, 7\} \quad P(B) = \frac{4}{10}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad P(C) = \frac{5}{10}$$

۱- اگر ناسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف) عدد رو شده زوج باشد.  $\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  (ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ تر باشد.  $\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

ج) عدد رو شده زوج و اول باشد.  $\frac{1}{4}$  (د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد.  $\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

۲- اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اولاً مجموعه همه حالت‌های ممکن را تشکیل دهید

هر عضو این مجموعه را به طور مثال به صورت (د، د، ب) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این

خانواده دارای دو دختر باشد؟ (دارای دو دختر یعنی دقیقاً دو دختر و یعنی فرزند اول سر و دو فرزند

بعدی دختر بوده است).  $\frac{3}{8}$

۳- در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی

از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:

الف) این مهره آبی باشد.  $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$  (ب) این مهره سبز نباشد.  $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

ج) این مهره قرمز یا سبز باشد. (یعنی این مهره باشد).  $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$  (د) این مهره قرمز یا سبز نباشد.  $1 - \frac{2}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

۴- اگر ناسی را دو بار بیندازیم (یا دو ناسی آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد:

(اگر مجموعه همه حالت‌های ممکن را S بنامیم،  $n(s) = 36$ )

الف) هر دو بار، عدد اول رو شود.  $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$  (ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد.  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ج) دو عدد رو نشده، مضرب ۳ باشد.  $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$  (د) مجموع دو عدد، ۷ باشد.  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

### تجرباتی

در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از

اشیا نام برده شده است. غافل از آنکه اگر بگویم مجموعه گروهی از اشیاء است، باید

بگویم گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟

در واقع جاره‌ای نیست جز آنکه مانند سمور لیس‌شوتر (ریاضی دان معاصر)

بگویم: در همه شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است. به عبارت دیگر

مجموعه جزء نخستین تعریف شده‌ها است، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه،

که برای آنها تعریف دقیقی نداریم ولی آنها را با اثر خود می‌شناسیم.

۱۷

الف) (۲، ۲) و (۲، ۳) و (۲، ۵) و (۳، ۲) و (۳، ۳) و (۳، ۵) و (۵، ۲) و (۵، ۳) و (۵، ۵)

ب) (۲، ۲) و (۲، ۵) و (۳، ۳) و (۳، ۴) و (۴، ۴) و (۴، ۵) و (۵، ۵) و (۵، ۶) و (۶، ۶)

سؤال ۴:

ج) (۲، ۳) و (۳، ۴) و (۴، ۵) و (۵، ۶) و (۶، ۷) و (۷، ۸)

د) (۴، ۳) و (۵، ۲) و (۶، ۱) و (۷، ۰) و (۸، ۰) و (۹، ۰) و (۱۰، ۰)





# عزادهای حقیقی

وَإِذْ أَخَذْنَا مِنَ النَّبِيِّينَ مِيثَاقَهُمْ وَأَخَذْنَا مِنْهُ كُلَّ شَيْءٍ  
... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را به عدد  
شمارش کرده است.  
(سورة جن، آیه ۲۸)



غیبات الدین جمشید گلشنی زبردست ترین حبلان، برجسته ترین ریاضی دان دینور اسلامی و از بزرگ ترین  
مفاخر تاریخ ایران به شمار می رود گلشنی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط  
چندضلعی های محاطی و محیطی نوشت عدد π که عددی حقیقی و گنگ است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار  
محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی تر جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند او در  
ابتدای رساله محیطیه خود به زبان ریاضی به نام خدا را چنین بیان می کند  
«به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است»



## فعالیت

۱- در فصل گذشته با نمایش های مختلف مجموعه های اعداد آشنا شدید. عبارت های زیر را مانند

نمونه کامل کنید :

ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in \mathbb{N}   x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$	
۲	عددهای حسابی کوچکتر یا مساوی ۲	$\{x \in \mathbb{W}   x \leq 2\}$ $\{0, 1, 2\}$	
۳	عددهای صحیح بین ۲ و -۳	$\{x \in \mathbb{Z}   -3 < x < 2\}$ $\{-2, -1, 0, 1\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگتر از -۱	$\{x \in \mathbb{Z}   x > -1\}$ $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	

نامساوی  $x \geq 3$  برای کدام یک از عددهای زیر درست است؟  $3, 4, 5, 6$

۱, ۲, ۳, ۴, ۵

۲- می خواهیم بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{2}$  چند کسر بنویسیم. روش های مختلفی را که چهار دانش آموز

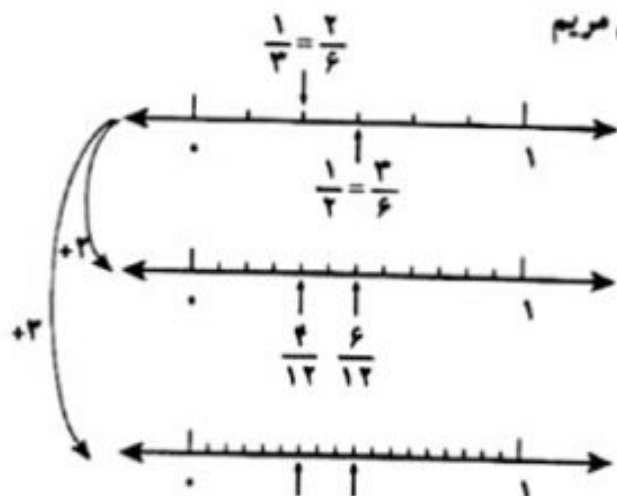
نوشته اند، بررسی و کامل کنید. راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش بهار

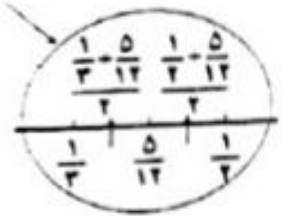
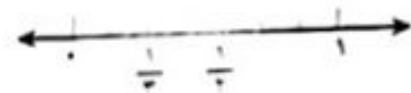
روش مریم

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2} \\
 \frac{2}{6} < ? < \frac{3}{6} \\
 \frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} \\
 \frac{6}{18} < \frac{7}{18} < \frac{8}{18} < \frac{9}{18}
 \end{array}$$

Curved arrows labeled  $\times 2$  and  $\times 3$  indicate the multiplication of numerators and denominators to find common denominators.



روش مهناز



روش عطیه

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$

الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بین‌شمار، کسر پیدا کرد.

ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوهایشان داد؟ چرا؟ نه خیر چون بین دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

ج) آیا می‌توان مجموعه عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

کار در کلاس

$$1- \text{بین } \frac{2}{5} \text{ و } \frac{3}{4} \text{ سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.} \quad \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \left( \frac{9}{20} \right), \left( \frac{10}{20} \right), \left( \frac{11}{20} \right), \quad \frac{2 \times 5}{4 \times 5}$$

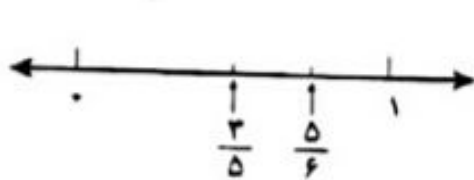
$$2- \text{بین } -\frac{1}{4} \text{ و } -1 \text{ دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.} \quad \frac{-1 \times 4}{1 \times 4} = \frac{-4}{4}, \quad \frac{-1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{-3}{6}, \quad \frac{-1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{-2}{6}, \quad \frac{-1 \times 1}{4 \times 1} = \frac{-1}{4}$$

فعالیت

۱- می‌خواهیم کسرهای  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{5}{6}$  و  $\frac{7}{8}$  و  $\frac{5}{9}$  را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم.

روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به کار برده‌اند با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در

صورت لزوم کامل کنید.



روش شاهد: شاهد به صورت تقریبی کسرها  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{5}{6}$  را روی محور مشخص کرده است. آیا به نظر شما استفاده از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟

روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسرها، آنها را مقایسه می کند. توضیح دهید که عدد ۳۶۰ چگونه به دست می آید. کار مرتضی را کامل کنید:

$$\frac{5}{9} = \frac{200}{360}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{315}{360}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{300}{360}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{216}{360}$$

روش مجید: مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید:

$$\frac{5}{9} = 0.55$$

$$\frac{7}{8} = 0.87$$

$$\frac{5}{6} = 0.83$$

$$\frac{3}{5} = 0.60$$

در مورد روش های مختلف و ویژگی های هر کدام در کلاس گفت و گو کنید.

۲- با کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسرها را تا دو رقم اعشار بنویسید:

$$\frac{1}{7} = 0.1428571428$$

$$\frac{1}{9} = 0.1111$$

$$\frac{7}{6} = 1.16$$

$$\frac{1}{5} = 0.20$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333$$

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

الف) ماشین حساب شما تا چند رقم را روی صفحه نمایش نشان می دهد؟ اگر نه  
ب) بین مقدارهای اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟ بعضی از کسرها دوره تناوب دارند.

$$1 \div 3 = 0.33333$$

در نمایش اعشاری کسر  $\frac{1}{3}$ ، رقم ۳ به طور متناوب تکرار می شود و انتها ندارد؛ ولی نمایش اعشاری کسر  $\frac{1}{5}$  متناهی یا مختوم است؛ چون تمام رقم های اعشار آن مشخص است و به انتها می رسد. از نماد زیر برای نمایش عددهای اعشاری متناوب استفاده می کنیم:

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = 0.\bar{3}$$

$$\frac{7}{6} = 1.1666\ldots = 1.1\bar{6}$$



## کار در کلاس

نمایش اعشاری هریک از کسرهای زیر را بنویسید :

$$\frac{5}{11} = 0.\overline{45}$$

$$\frac{7}{22} = \frac{7}{9} = 0.\overline{7}$$

$$\frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6} = 0.\overline{83}$$

$$\frac{7}{2 \times 11} = \frac{7}{22} = 0.\overline{318}$$

$$\frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{10} = 0.\overline{3}$$

$$\frac{5}{2 \times 4} = \frac{5}{8} = 0.\overline{625}$$

اگر به نمایش اعشاری کسرهای بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسرهای نمایش اعشاری مختوم دارد که (پس از ساده شدن) مخارج آنها شمارنده اولی به جز ۲ و ۵ ندارد.

## تمرین

۱- پس از محاسبه هر قسمت، کسر مرکب را تا حد امکان ساده کنید :

$$1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$-1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{17}{24}$$

$$\frac{5}{6} + 2\frac{1}{2} = \frac{17}{3}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) + \left(-1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} + 5\frac{1}{3} = \frac{\frac{5}{12}}{-\frac{1}{12}} \div \frac{14}{3} = -\frac{5}{14} \times \frac{3}{14} = -\frac{15}{196}$$

$$\frac{4}{9} \times -\frac{9}{10} = -\frac{4}{10}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 - 2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} + 4\frac{7}{12}}{12} = \frac{-30 - 40 + 55}{12} = -\frac{15}{12} = -\frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} + \left(2 + \frac{-6}{5}\right) = \frac{1}{-1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{-1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$$

$$\frac{5}{6} + \frac{-\frac{7}{8}}{-\frac{3}{10}} = \frac{5}{6} + \frac{71}{30} = \frac{143}{30}$$

۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$-\frac{25}{7} < -\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{8} < 2$$

$$-\frac{92}{24} < -\frac{14}{24} < \frac{18}{24} < \frac{31}{24} < \frac{48}{24}$$

$$\text{الف) } \frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -\frac{25}{6} = -\frac{22}{6} \Rightarrow \frac{21}{24}, -\frac{14}{24}, \frac{18}{24}, \frac{48}{24}, -\frac{92}{24}$$

$$\text{ب) } \frac{16}{7}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{15}, -\frac{5}{6}, \frac{2}{5}, \frac{56}{12} \Rightarrow \frac{22}{12}, -\frac{4}{12}, \frac{2}{15}, -\frac{5}{6}, \frac{2}{5}, \frac{56}{12}$$

$$-\frac{5}{6} < -\frac{4}{12} < \frac{2}{15} < \frac{2}{15} < \frac{56}{12} < \frac{22}{12}$$

$$\text{الف) } \frac{10}{11}, \frac{12}{13}$$

$$\text{ب) } 0, -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, 0, \dots$$

$$\frac{1 \times 13}{11 \times 13} = \frac{13 \times 2}{13 \times 2} = \frac{24}{284} = \frac{241}{284}, \frac{242}{284}, \frac{243}{284}, \frac{12 \times 11}{13 \times 11} = \frac{132 \times 2}{132 \times 2} = \frac{244}{284}$$

$$\text{ب) } \frac{14}{5}, -\frac{3}{4}, 2, 15, -\frac{5}{6}, \frac{2}{5}, \frac{57}{13}$$

$$2, 15, 57, -15, 2, 15, -1322, 4, 7, 4, 2.77$$

$$-1322 < -15 < 2, 15, 57, 2, 15 < 4, 2.77 < 4, 7$$

$$-\frac{5}{6} < -\frac{3}{4} < \frac{14}{5} < 2, 15 < \frac{57}{13} < \frac{2}{5}$$

سوال ۳:

$$\text{ب) } 0, -\frac{1}{2}$$

توشه ای برای موفقیت

سوال ۴:

$$-\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = -\frac{4}{12}, -\frac{3}{12}, -\frac{2}{12}, -\frac{1}{12}, 0$$

A number line is shown with tick marks every 1 unit. The points are labeled with fractions:  $-\frac{5}{7}$ ,  $-\frac{2}{7}$ ,  $\frac{1}{7}$ ,  $\frac{4}{7}$ , and  $\frac{11}{7}$ .

روی محور نمایش دهید.  $\frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{9}{7}, \frac{11}{7}, \frac{13}{7}$

سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

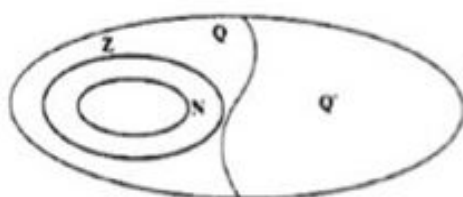
22



عدد  $\pi$  نیز گنگ است. در زیر عدد  $\pi$  تا ۳۰ رقم اعشار نوشته شده است: اعداد محاسبات، معمولاً تا

دو رقم اعشار  $\pi$  استفاده می شود:  $\pi = 3/141592653589793238462643383279$

به طور کلی جذر عددهایی که مربع کامل (عددهایی مانند ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ... مربع کامل است) گنگ است؛ مانند  $\sqrt{5}$ ،  $\sqrt{6}$ ، ...



مثال: مجموعه های  $N$  و  $Z$  و  $Q$  و  $Q'$  به کمک نمودار ون، مشخص شده است.

مثال:  $-\frac{3}{4} \in Q'$   $\sqrt{3} \in Q'$   $\sqrt{8} \in Q'$   $0 \in Q$   $0/2002000200002000 \dots \in Q'$

## کار در کلاس

کدام عبارت، درست و کدام عبارت، نادرست است؟

$Q \cap Q' = \emptyset$  ✓  $N \subseteq Q'$  ✗  $Z \subseteq Q$  ✓  $Z \subseteq Q'$  ✗

## فعالیت

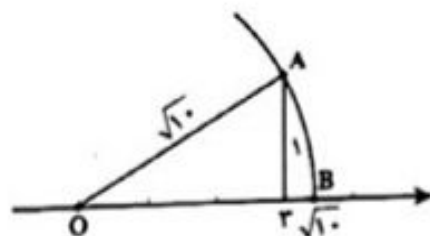
الف) بین دو عدد ۱ و ۲ چند عدد گویا می توان نوشت؟ بی شمار

ب) اگر این عددها را روی محور نمایش دهیم، متناظر با این عددها، چند نقطه روی محور می توان پیدا کرد؟ بی شمار

ج) روی محور نقطه نمایش  $\sqrt{2}$  را پیدا کنید.

د) اگر نقاطی را رنگ کنیم، که عددی گویا را نمایش می دهد، آیا همه نقاط پاره خط  $AB$  رنگ می شود؟ آیا  $\sqrt{2}$  نیز رنگ می شود؟ آیا این نقاط، که هر کدام نمایش یک عدد گویا است، یک پاره خط به وجود می آورد؟ چرا؟ چون اعداد گویا <sup>نصف</sup> هستند که بین اعداد گویا فاصله می اندازند.

مثال: نقطه نمایش عدد گنگ  $\sqrt{10}$  روی محور به صورت زیر است:



به مرکز  $O$  و به شعاع  $OA$  کمان رسم می کنیم. نقطه  $B$

روی محور عدد  $\sqrt{10}$  را نمایش می دهد.

$$OA^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow OA = \sqrt{10}$$

۲۴

$$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$$

$$3 < \sqrt{10} < 4$$

« ضلع سمت قائم الزام، را ۳ در نظر بگیریم »

مثال:  $\sqrt{7}$  بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ فرار دارد.

می‌دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ است؛ یعنی:

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

## کار در کلاس

$$\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$$

۱- بین  $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.

$$\sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}$$

۲- بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.

۳- الف) مجموعه  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 \leq x \leq 3\}$  را در نظر بگیرید. آیا نمایش  $A$  به صورت زیر درست است؟ تفسیر

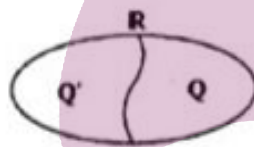
$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$



ب) نقطه نمایش  $\sqrt{5}$  را روی محور مشخص کنید.

ضلع شش



عددها به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ دسته‌بندی

می‌شود. اجتماع مجموعه عددهای گویا و عددهای اصم را

مجموعه عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با  $\mathbb{R}$  نمایش می‌دهیم.

نساوی  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$  بین سه مجموعه  $\mathbb{Q}$  و  $\mathbb{Q}'$  و  $\mathbb{R}$  برقرار است.

مثال:

$$0 \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{10} \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$$

$$0.75 \in \mathbb{R}$$

$$0.12022022202222022222\ldots \in \mathbb{R}$$

$$\pi \in \mathbb{R}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

## کار در کلاس

۱- داخل  $\bigcirc$  علامت  $\in$  یا  $\notin$  بگذارید:

$$2 \in \mathbb{Z}$$

$$0.2 \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{18} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

$$-5 \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{25} \notin \mathbb{Q}'$$

$$\frac{0}{6} \in \mathbb{R}$$

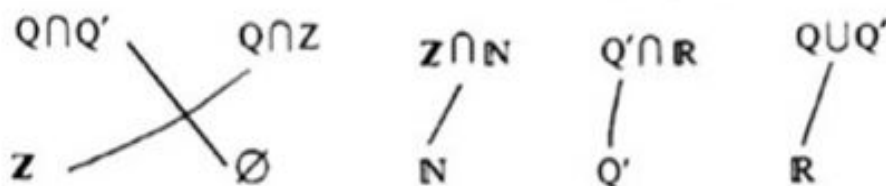
$$\sqrt{2/5} \in \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{1/9} \in \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{109} \in \mathbb{Q}$$

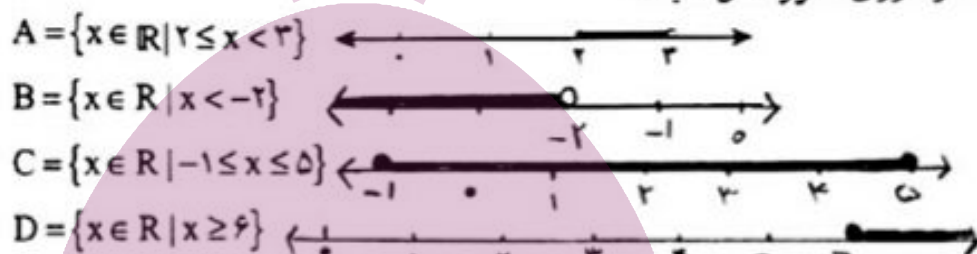
$$\frac{9}{-1} \in \mathbb{Z}$$

۲- مجموعه‌های سطر اول را به مجموعه مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اول با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.



### فعالیت

با توجه به اینکه مجموعه عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را مانند نمونه روی محور نشان دهید:



با توجه به مجموعه A چرا نقطه ۲ روی محور توپر و نقطه ۳ روی محور توخالی است؟ چون عدد ۲ عضو مجموعه A است. ولی عدد ۳ عضو مجموعه A نیست.

### کار در کلاس

۱- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و با توجه به محور، مجموعه متناظر آن را بنویسید:

A =  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$  (الف)

B =  $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$  (ب)

C =  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$  (ج)

۲- با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید:

$0.75 \in A$  ✓

$0.252552555... \in B$  ✓

$\sqrt{13} \in A$  ✓

$\sqrt{7} \in C$  ✗

$\sqrt{1} \in A$  ✓

$-1000 \in C$  ✓

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر، برابر است؟



(الف)  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

(ب)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

(ج) ✓  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$



۱- با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اول کامل کنید:

مجموعه اعداد	$\sqrt{3/2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\pi$	$-\frac{3}{4}$	$0.292292229....$	-10	$\frac{6}{2}$
N طبیعی	x	x	x	x	x	x	x	✓
W حسابی	X	X	✓	X	X	X	X	✓
Z صحیح	X	X	✓	X	X	X	✓	✓
Q گویا	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓
Q' گنگ	✓	X	X	✓	X	X	X	X
R حقیقی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲- در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید: A نامی اعداد حقیقی بین ۵ و ۱۰ است و B نامی اعداد گویا بین ۴ و ۵ است

الف)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$  ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$

ب)  $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$  ,  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 9\}$

۳- طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید:

۱)  $N \cup Z = Z$  ۲)  $R - Q' = Q$  ۳)  $Z \cap N = \mathbb{N}$  ۴)  $R \cap Q' = Q'$

۴- عدد  $1 + \sqrt{5}$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟  $3 < 1 + \sqrt{5} < 4$

۵- بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید:

۵ و ۲- الف) ۶ و ۷ ب)  $\sqrt{3}, 6$  ج)  $\sqrt{2}, \sqrt{4/1}$  د)

۶- عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با ✗ مشخص کنید. برای عبارات درست

مثال بزنید.

۱) ☒ عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. مثال: ۳- هم صحیح و هم گویا است.

۲) ☐ عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.

۳) ☒ عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. مثال:  $\sqrt{3}$  هم عدد گنگ است و هم حقیقی.

۴) ☒ عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد. مثال: ۵ هم عدد طبیعی است و هم حقیقی.

۷- در نمایش اعشاری عدد  $\sqrt{10}$  و عدد  $\frac{3}{11}$  چه تفاوتی هست؟  $\sqrt{10} \approx 3.16227766$   $\frac{3}{11} = 0.27$  عدد  $\sqrt{10}$  دوره تناوب ندارد ولی کسر  $\frac{3}{11}$  دوره تناوب دارد.

الف)  $\sqrt{4}, \sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{1}, \sqrt{0}, \sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-4}$

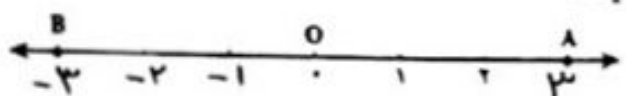
ب)  $\sqrt{34} = 4, \sqrt{8}, \sqrt{7}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{3}$

ج)  $4 = \sqrt{34}, \sqrt{37}, \sqrt{38}, \sqrt{39}, \sqrt{40}, 7 = \sqrt{49}$

د)  $5 = \sqrt{25}, \sqrt{20}, \sqrt{15}, \sqrt{10}, \sqrt{5}, \sqrt{4}, \sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{1}, \sqrt{0}, \sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-4}, \sqrt{-5}$

## فعالیت

۱- با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید :



$$A = 3$$

$$B = -3$$

نقاط A و B چه عددی را نمایش می دهد؟

فاصله نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟ ۳ واحد

فاصله نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟ ۳ واحد

می خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد. ۲ و -۲

۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می توان

یافت؟ ۲ نقطه

فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می نامیم و با علامت |a| (بخوانید

قدر مطلق a) نمایش می دهیم؛ بنابراین در مثال بالا می توان نوشت:  $|-2| = |2| = 2$

مثال: فاصله نقاط نظیر دو عدد  $\frac{2}{3}$  و  $-\frac{2}{3}$  تا مبدأ برابر  $\frac{2}{3}$  است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد

$$\frac{2}{3} \text{ و } (-\frac{2}{3}) \text{ برابر } \frac{2}{3} \text{ است؛ یعنی: } |\frac{2}{3}| = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$$

مثال: قدر مطلق  $\sqrt{5}$  را به صورت  $|\sqrt{5}|$  نشان می دهیم که مساوی  $\sqrt{5}$  است. قدر مطلق

$0.4$  را به صورت  $|0.4|$  نشان می دهیم که مساوی  $0.4$  است.

قدر مطلق صفر، صفر و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد

است. قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد:

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

مثال: به محاسبات زیر توجه کنید:

$$|10 - 20 + 5| = |-5| = 5$$

$$|(-6) \times (+10)| = |-60| = 60$$

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید :

- الف) دو عدد  $a$  و  $b$  مثبت است.  $1) a > 0, b < 0$   
 ب) عدد  $a$  نامنفی است.  $2) a > 0, b > 0$   
 ج) دو عدد  $a$  و  $b$  منفی است.  $3) a \geq 0$   
 د) عدد  $a$  مثبت و عدد  $b$  منفی است.  $4) a < 0, b < 0$   
 هـ) عدد  $a$  نامثبت است.  $5) a \leq 0$

۲- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب

را به هم وصل کنید :

- الف)  $a > 0, b > 0$   $1) ab < 0$   
 ب)  $a < 0, b < 0$   $2) ab > 0, a + b > 0$   
 ج)  $a < 0, b > 0$   $3) ab > 0, a + b < 0$

۳- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب

را به هم وصل کنید :

- الف)  $a > 0$   $1) |a| = -a$   
 ب)  $a > 0, b > 0$   $2) |a| = a$   
 ج)  $a < 0$   $3) |a + b| = a + b$   
 د)  $a < 0, b < 0$   $4) |a + b| = -(a + b)$

۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید :

مثال:  $a = -5$   
 $b = 3$

- (۱) قدر مطلق حاصلضرب دو عدد، مساوی با حاصلضرب قدر مطلق آنهاست.  
 (۲) قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق های آن دو عدد، کوچک تر یا مساوی است.

### فعالیت

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$$\sqrt{2} \approx 1/4 \quad \sqrt{3} \approx 1/7 \quad \sqrt{5} \approx 2/2 \quad \sqrt{6} \approx 2/4 \quad \sqrt{7} \approx 2/6$$

$$|a \times b| = |a| \times |b|$$

$$|-5 \times 3| = |-5| \times |3|$$

$$|-15| = 5 \times 3$$

$$15 = 15$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|-5 + 3| \leq |-5| + |3|$$

$$|-2| \leq 5 + 3$$

$$2 \leq 5 + 3$$

$$2 \leq 8$$



با توجه به مقادیر تقریبی صفحه قبل، تساوی های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح

دهید :

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

دلیل :  $\sqrt{2} = 1/4$  پس  $1 - \sqrt{2}$  عددی منفی می شود :

$$۱) |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$$

$$۲) |\sqrt{7} - \sqrt{8}| = -(\sqrt{7} - \sqrt{8}) = \sqrt{8} - \sqrt{7}$$

$$۳) |2\sqrt{5} - \sqrt{5}| = 1\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$۴) |-4 - \sqrt{3}| = -(-4 - \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3}$$

$\sqrt{3} = 1,7$  پس  $2 - \sqrt{3}$  عددی مثبت می شود. دلیل :

دلیل :  $\sqrt{7} = 2,6$  و  $\sqrt{8} = 2,8$

$\sqrt{7} - \sqrt{8}$  عددی منفی می شود. دلیل :

$\sqrt{5}$  عدد مثبت است. دلیل :

$\sqrt{3} = 1,7$  پس  $4 - \sqrt{3}$  عددی منفی است. دلیل :

مثال : اگر  $a = \frac{1}{4}$  و  $b = \sqrt{2}$  و  $c = -3$  باشد، حاصل عبارت  $|a+b+c|$  را به دست می آوریم :

$$|a+b+c| = \left| \frac{1}{4} + \sqrt{2} + (-3) \right| = \left| -2/5 + \sqrt{2} \right|$$

چون  $-2/5 + \sqrt{2}$  عددی منفی است ( $\sqrt{2} = 1/4$ )، پس حاصل عبارت مساوی با  $-(-2/5 + \sqrt{2})$  یعنی  $2/5 - \sqrt{2}$  است.

$$|3 - \sqrt{5}| + |-2 - \sqrt{5}| = (3 - \sqrt{5}) - (-2 - \sqrt{5})$$

مثال :

$$= 3 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 5$$

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید :

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-3)^2}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{6^2}$	$\sqrt{(-6)^2}$	$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{(-127)^2}$	$\sqrt{325^2}$
حاصل	۳	۳	۶	۶	۷	۱۲۷	۳۲۵

از فعالیت بالا چه نتیجه ای می گیرید؟ حاصل جذر همیشگی به صورت قدر مطلق نوشته می شود.

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدر مطلق، می توانیم بنویسیم :  $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال : برای محاسبه  $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$  خواهیم داشت :

$$\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = \underbrace{|1 - \sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$





ادْعُ إِلَى سَبِيلِ رَبِّكَ بِالْحُكْمِ وَالْقَوَاعِدِ الْعَقْلِيَّةِ وَجَادِلْهُمْ بِالَّتِي هِيَ أَحْسَنُ ...  
 با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به لیکوترین روش استدلال و  
 مناظره کن! (سوره احزاب، آیه ۱۶۵)



ما این برف از آسمان رحمت الهی را با خود به زمین می آوریم و در زمین حال بعد از زمینی زمستان است اما  
 شاید حالت برف را ندیدیم که این عالم هستی را می بینیم که در آنجا که برف می بارد  
 ما به آن ظاهر کدام شکل منحصر به خود را می بینیم و هیچ دو تایی از آنها «همینند» نیستند



## فعالیت

متن های زیر را بخوانید و به سؤال های داده شده پاسخ دهید.

۱- امیر و محسن برای دیدن یک مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت: «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می بازد.» امیر پرسید: «چگونه با این اطمینان حرف می زنی؟» محسن دلیل آورد که: «چون هر بار که به ورزشگاه رفته ام تیم مورد علاقه من باخت است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است درست (معتبر) است؟ چرا؟ نه خیر - چون احتمال دارد باز د.

۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی متر دارد. بیسکویت باقر از همان

نوع و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

$$۴ \times ۸ = ۳۲ \text{ مساحت}$$

$$۳۶ > ۳۲$$

$$۶ \times ۶ = ۳۶ \text{ مساحت}$$

۳- دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید

مقایسه کنید. به نظر شما کدام معتبرتر و قابل اطمینان تر هستند. دلیل فعالیت ۲

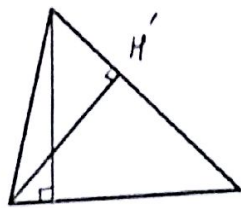
«استدلال» دلیل آوردن و استفاده کردن از دانسته های قبلی است برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

همان گونه که در موارد بالا مشاهده کردید حتی در بسیاری کارهای روزمره نیز نیاز به استدلال کردن پیدا می کنیم. برای استدلال کردن راه های متفاوتی وجود دارد که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد اثبات می گوئیم.

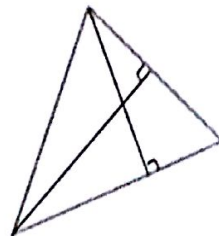
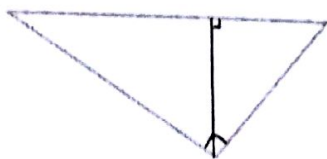
## کار در کلاس

۱- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به آنچه قبلاً اتفاق افتاده نتیجه ای می گیرد که درست نمی باشد.

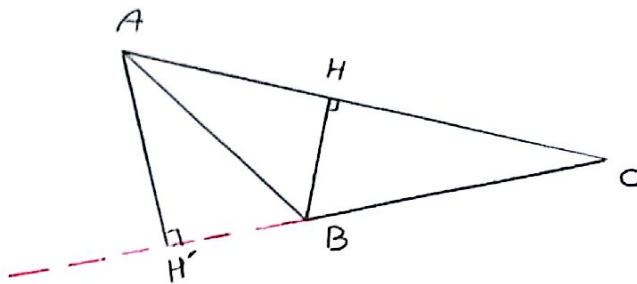
۲- دو تا از ارتفاع های هر یک از مثلث ها را رسم کنید.



۳۵



- من هجروقت درس می خونم معلم از من درس نمی پرسد



آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث می‌باشد؟ **خیر**  
 یک مثال بزنید که نتیجه بالا را نقض کند.

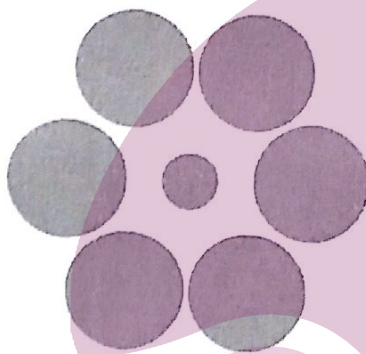
اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است. استدلالی که او استفاده کرده است مشابه استدلال کدام یک از دو قسمت فعالیت قبل است؟ **قسمت ۱**

### فعالیت

الف



ب



۱- کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته‌اند، بزرگ‌ترند؟ **الف**

الف) با مشاهده تشخیص دهید. **الف**

ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر اندازه آنها را با هم مقایسه کنید. **با هم برابرند**

۲- قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از یک

شیرینی موردعلاقه شما هستند. کدام قطعه را

انتخاب می‌کنید؟ (قطعه بزرگ‌تر کدام است؟) **B**

با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه

کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟ **خیر**

۳- آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع

کافی است؟ چرا؟ **خیر - چون احتمال خطا وجود دارد.**

هرچند معمولاً در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه به کار بردن شکل‌ها و ترسیم آنها و

استفاده از شهود کمک زیادی به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائه حدس‌های درست می‌کند

اما باید توجه داشته باشیم که هیچ‌گاه نمی‌توانیم با اطمینان بگوییم که تشخیص ما حتماً

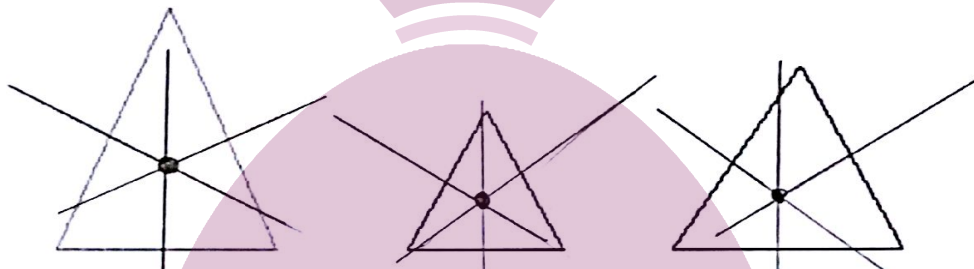
درست بوده است.

## کار در کلاس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کند. در مورد نتایجی که از این مثال‌ها می‌گیرید با یکدیگر بحث کنید.

## تمرین

۱- در شکل‌های زیر عمود منصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید :



آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمود منصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟ نه خیر. بارسم مثلث را بازدارد

۲- نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری قصد بلند کردن وزنه‌ای ۱۰۰ کیلویی را داشت. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

نیما: زیرا هفته پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این حال توانست وزنه ۹۰ کیلویی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه‌بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال‌ها بحث کنید. نیما

۳- چون من تا به حال هیچ‌وقت تصادف نکرده‌ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد. کشت‌شود \*

این استدلال مشابه کدام یک از استدلال‌های زیر است؟

(الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.

(ب) همه فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود،



پس فیلم جنگی بوده است.

✓ (ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچه خاله کوچکم هم دختر خواهد بود.  
(د) چون همه قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

۴- دو نفر درباره چهار برادر به نام‌های علی، حسن، حسین و باقر می‌دانستند که: علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است، اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند. اولی: در تمام خانواده‌هایی که من دیده‌ام که دو فرزند به نام‌های علی و حسن دارند، فرزند بزرگ‌تر را علی نامیده‌اند.

دومی: چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است.

استدلال کدام یک درست است؟ در مورد درستی استدلال‌ها بحث کنید. دومی - چون استدلالش قابل اعتماد است.

حسین < علی

علی < باقر < حسن  
حسین < حسن



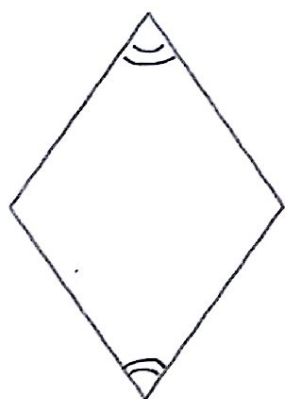
# اطلاعات داده شده مسئله را فرض و خواسته مسئله را حکم می‌نمایند.

## درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

### فعالیت

در درس گذشته یاد گرفتید که دیدن و استفاده از حواس و یا بیان مثال‌های متعدد و همچنین اندازه گرفتن برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و درست کمک گرفت و با استدلال کردن درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلال‌مان از اطلاعات داده شده مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواسته مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

### فعالیت



۱- به گفت‌وگوی زیر توجه کنید.

**مهرداد:** آیا زاویه‌های روبه‌رو به هم، در هر لوزی با هم برابرند؟  
**سعید:** بله، چون ما از قبل می‌دانستیم که در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی هستند. لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را به شکل زیر کامل کنید.

توشه‌ای برای موفقیت

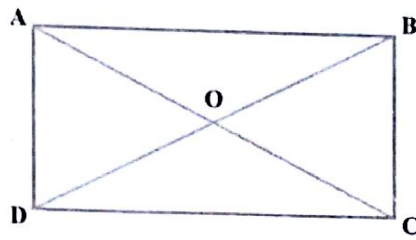
فرض	شکل لوزی است
حکم	زاویه‌های روبه‌رو برابرند

استدلال:

$\left. \begin{array}{l} \text{لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است} \\ \text{در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو برابرند} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{در لوزی زاویه‌های روبه‌رو برابرند}}$

۲- اولین اقدامی که برای اثبات یک مسئله انجام می‌دهیم، تشخیص فرض و حکم و حقایق مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئله زیر فرض، حکم و حقایق از قبل ثابت

شده یا دانسته را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید.



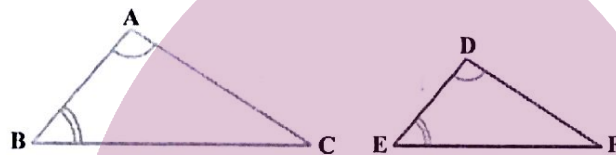
فرض	ABCD مستطیل است
حکم	قطرهای مستطیل، مساوی هستند

فرض :  $\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AB = DC \\ AD = BC \\ AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$

حکم :  $AC = BD$

### کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید.  
الف) در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده‌اند. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابرند.



فرض :  $\frac{\hat{A}}{\hat{B}} = \frac{\hat{D}}{\hat{E}}$       حکم :  $\hat{C} = \hat{F}$

ب) اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است.

ج) اگر مجموع دو زاویه از چهارضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهارضلعی EFGH برابر باشد ثابت کنید مجموع دو زاویه دیگر ABCD با مجموع دو زاویه دیگر EFGH برابرند.

فرض :  $\hat{A} + \hat{B} = \hat{E} + \hat{F}$       حکم :  $\hat{C} + \hat{D} = \hat{G} + \hat{H}$

فعالیت :  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \hat{E} + \hat{F} + \hat{G} + \hat{H} = 360^\circ$

۱- در مسئله زیر توضیح دهید چرا استدلال نوشته شده درست نیست.

۳۸

ب

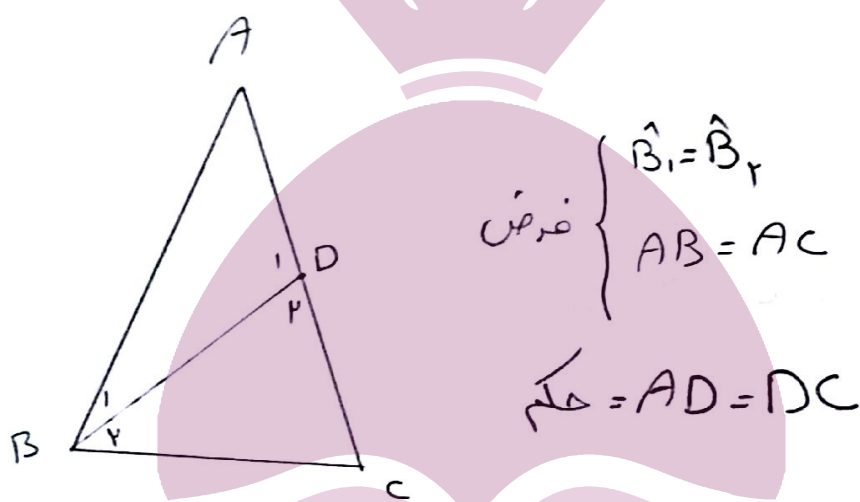
فرض :  $\hat{D} > \hat{E}$

حکم :  $FE > FD$



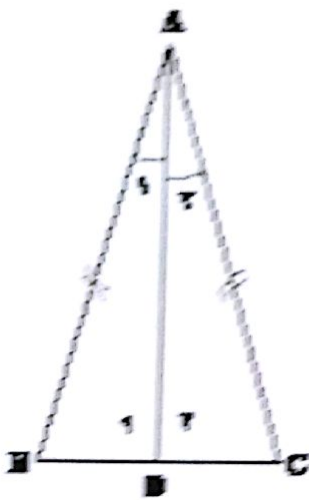


جواب سوال ۱ صنف ۳۹



دو مثلث  $ABD_1$  و  $CB_2D_2$  همنهشت می باشند چرا که تنها دو ضلع آنها  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$  و  $BD$  ضلع مشترک می باشد در حالتی که همنهشتی به سبب این است که حالت نیاز داریم .  
(من من من) ، (من من من) ، (من من من)

تذکره: در مثلث مساوی این تنها، نیاز از زاویه بین دو ساق می تواند میانجی، ارتفاع، عمود منصف باشد.



۱- در مسئله زیر فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیایید :

مثلث  $ABC$  متساوی الساقین است و  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  است.  
ثابت کنید  $AD$  میانه نیز هست :

فرض:  $AD$  میانه است  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و  
حکم:  $BD = DC$

استدلال: چون  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  است پس:  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و

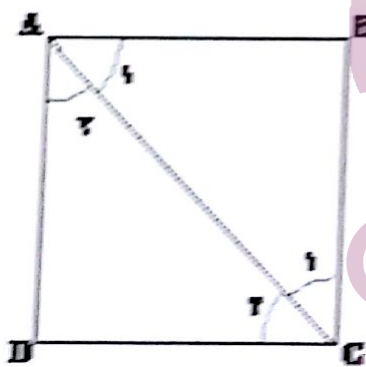
$\hat{D}_1 = \hat{D}_2$  و ضلع  $AD$  در دو مثلث مشترک است. پس مثلث های  $ADB$  و  $ADC$  به حالت دو زاویه

و ضلع بین (رض ز) با هم برابر است. پس اجزای متناظر آنها برابر است. در نتیجه:  $BD = DC$

استدلال بالا را اصلاح کنید و نتیجه بگیرید در مثلث متساوی الساقین نیمساز وارد بر قاعده،

میانه هم هست. آیا در مثلث  $ABC$  می توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه  $B$  نیز میانه ضلع مقابل آن

است؟ به نظرتی، آیا می توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز  $A$  را به نیمساز دیگر تعمیم داد. در حاشیه



۲- با استدلال زیر به سادگی می توان نتیجه گیری کرد که

قطر  $AC$  از مربع  $ABCD$  نیمساز زاویه های  $A$  و  $C$  است. چون

در مثلث  $ABC$  و  $ADC$  به حالت سه ضلع همتنهیست است. زوایای

متناظر با هم برابر است؛ بنابراین  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$  و لذا  $AC$

نیمساز است.

آیا می توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر

نیز تعمیم داد و گفت به طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه های دو سر آن قطر است؟ بله

۲- به نظر شما چرا در فعالیت ۱ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود، اما در

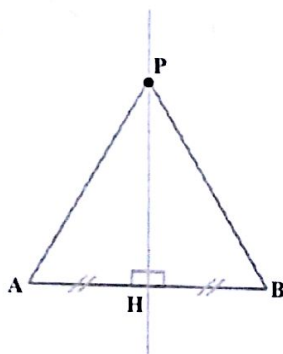
فعالیت ۲ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام

ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشند،

می توان درستی نتیجه را به همه عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.

۴-



P در شکل مقابل، روی عمود منصف پاره خط در نظر گرفتیم و به دو سر پاره خط وصل کردیم و چون دو مثلث  $\triangle BHP$  و  $\triangle AHP$  به حالت (ض ض) (ض ض) هستند نتیجه گرفتیم پاره خط های PA و PB با هم برابرند.

لذا فاصله نقطه P که روی عمود منصف پاره خط AB است

از دو سر پاره خط AB یکسان است.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه بالا برای «هر» نقطه روی عمود منصف برقرار است کافی است؟ بله - برای اینکه مکان نقطه P را می توانیم تغییر دهیم و همین ویژگی را اثبات کنیم.

کار در کلاس در واقع عمود منصف مکان هندسی نقاطی است که از دو سر پاره خط به یک اندازه هستند.

به استدلال هایی که چهار دانش آموز برای مسئله زیر آورده اند دقت کنید.

مجموع زاویه های داخلی یک مثلث  $180^\circ$  است.

استدلال حامد: یک مثلث متساوی الاضلاع را در نظر می گیریم. چون سه زاویه دارد و هر

زاویه  $60^\circ$  است پس مجموع زاویه های مثلث  $180^\circ$  است.

استدلال حسین: حسین چند مثلث مختلف با حالت های گوناگون کشید و زوایای آنها را

اندازه گرفت و دید که در همه آنها مجموع زوایای داخلی برابر  $180^\circ$  است و نتیجه گرفت که مجموع

زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.

استدلال مهدی: مهدی گفت با این مسئله در سال گذشته آشنا شدیم و شکلی شبیه آنچه در

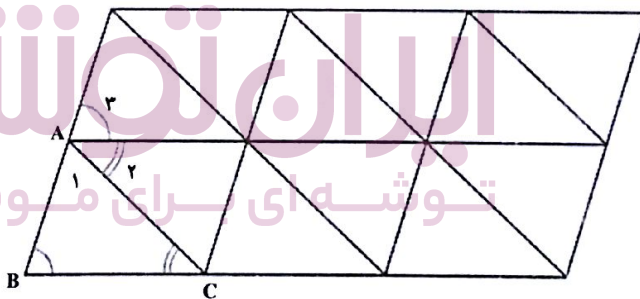
کتاب سال قبل آمده بود کشید

و با مشخص کردن زاویه های

مثلث ABC به صورت مقابل،

استدلالی با استفاده از شکل

به صورت زیر آورد.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

۱- استدلال حامد استقرای است پس نمی توان تعمیم به کل کرد.

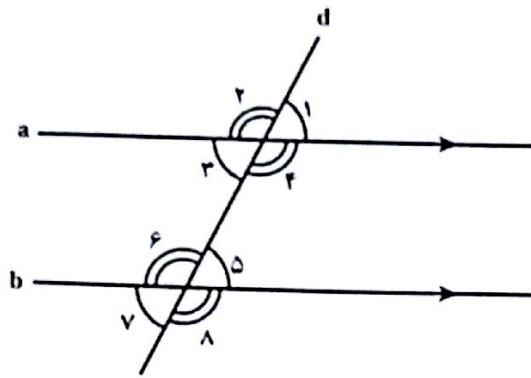
۴۰

۲- استدلال حسین استقرای است

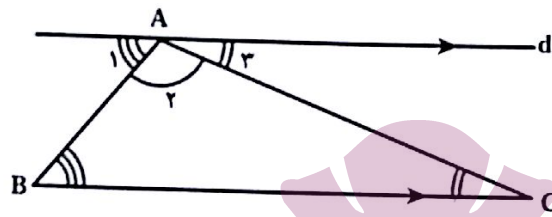
۳- استدلال مهدی

۴- استدلال رضا استنتاجی است و قابل تعمیم می باشد.





استدلال رضا: رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی است.»



حال مثلی دلخواه مانند  $\triangle ABC$  را در نظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویه تشکیل شده در رأس A را با

شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویه  $\hat{A}_2$  همان زاویه A در مثلث است و با در نظر گرفتن AB به عنوان مورب داریم  $\hat{B} = \hat{A}_1$  و با در نظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم  $\hat{C} = \hat{A}_3$  پس با جای گذاری  $\hat{A}_2$  و  $\hat{A}_3$  به ترتیب به جای  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  خواهیم داشت:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$  استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی به صورت مرتب و خلاصه بدین صورت

نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

درباره معتبر بودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید. استدلال رضا



مسئله: حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

دکتر شادس می‌توان مقادیر مساوی را از دو طرف مساوی بردارد.

۴۱

$$\text{پول بهرام} + \text{پول حمید} = ۵۰۰۰$$

$$\text{پول بهرام} + \text{پول سعید} = ۵۰۰۰$$

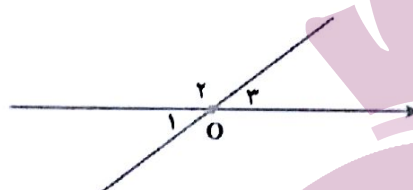
$$\text{پول سعید} = \text{پول حمید} \Rightarrow \text{پول بهرام} + \text{پول سعید} = \text{پول بهرام} + \text{پول حمید}$$

سعدیه = A  
مهراهم = B  
حمید = C

$$\begin{cases} A + C = 5000 \\ B + C = 5000 \end{cases} \Rightarrow A + C = B + C \Rightarrow A = B$$

برابر است

بین استدلالی که برای مسئله بالا و مسئله بعدی هست چه شباهتی می بینید؟  
مسئله: زوایای متقابل به رأس با هم برابرند.  
فرض کنیم  $O_1$  و  $O_2$  مانند شکل زیر متقابل به رأس باشند. داریم:



$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 &= 180^\circ \\ \hat{O}_3 + \hat{O}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_3 + \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

اگر بخواهید هر کدام از اندازه زاویه های  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_2$  و  $\hat{O}_3$  را به یکی از پول های عطا و عنایت و هدایت متناظر کنید، چگونه این کار را انجام می دهید؟

$\hat{O}_2 =$  پول مهراهم  
 $\hat{O}_1 =$  پول سعدیه و  $\hat{O}_3 =$  پول حمید

تشریح

۱- آیا اثبات ارائه شده برای مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. (مثلاً متساوی الاضلاع)

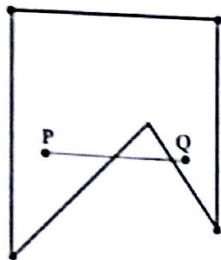
مسئله: در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی برابر است با مجموع اندازه های دو زاویه داخلی غیر مجاور با آن.

اثبات: مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می گیریم. می دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است و زوایای  $\hat{A}_1$  و  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  هر کدام  $60^\circ$  هستند. بنابراین  $\hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_1 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

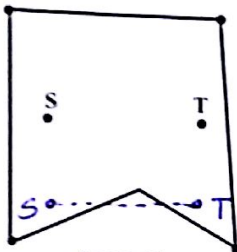
فرض  $\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$   
 $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$   
 $\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$

۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی های محدب آشنا شده اید. تعریف چندضلعی محدب را می توان بدین صورت آورد. «یک چندضلعی محدب است اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون آن چندضلعی را به هم وصل می کند، تماماً درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» و چند ضلعی که محدب نباشد مقعر است. آیا تشخیص های داده شده توسط دو دانش آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی های زیر و دلایلی که ارائه کرده اند با توجه به تعریف بالا درست می باشند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

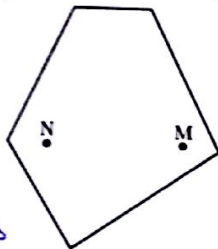




نرگس : چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند به طور کامل در آن قرار نمی گیرد. درست است



مهدیه : چند ضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط S و T درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد. درست نیست. چون اگر دو نقطه S و T را در سمت پایین شکل قرار دهیم پاره خط ST در آن قرار نمی گیرد.



مریم : چند ضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد. درست است

۳- آیا استدلال های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

(الف)  $ABCD \Leftarrow \begin{cases} \text{هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است.} \\ \text{چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.} \end{cases}$

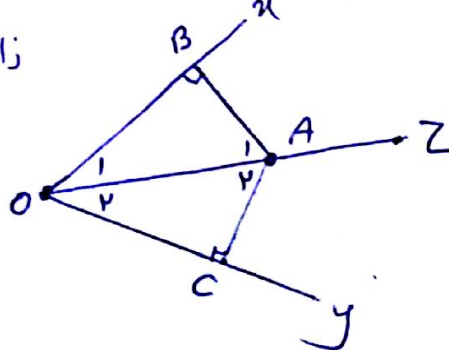
(ب)  $\begin{cases} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{ABCD مربع نیست.} \end{cases} \Leftarrow \text{همه ضلع های } ABCD \text{، با هم برابر نیستند.}$

(ج)  $ABCD \text{ مربع نیست.} \Leftarrow \begin{cases} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{در چهار ضلعی } ABCD \text{ ضلع ها برابر نیستند.} \end{cases}$

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یادآوری : فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره خطی که از آن نقطه بر خط عمود می شود.

راهنمایی : یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است را بیان کنید.

زاویه دلخواه  $\angle XOY$  فرض  
نیمساز  $OZ$   
حکم:  $AB = AC$



$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OC \\ \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow[\text{زاویه}]{\text{وتردیک}} \triangle OAB \cong \triangle OAC$$

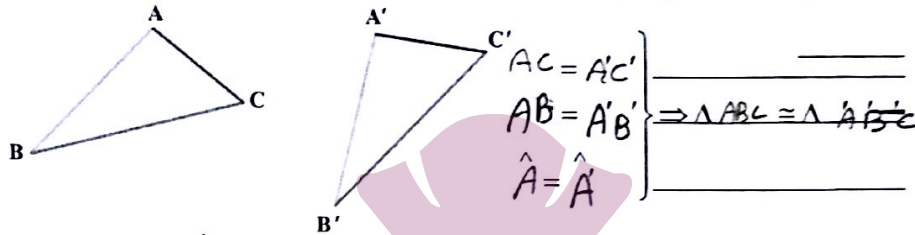
نتیجه برای اجزای متساوی  $AB = AC$  است  
چون این استدلال بر هر نقطه روی نیمساز قابل تعمیم است.



## درس سوم: همنهشتی مثلث ها

### یادآوری

با مفهوم همنهشتی مثلث ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می خواهیم این حالت ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم. مثلاً حالت همنهشتی (ض ز ض) را، این گونه نمایش می دهیم:



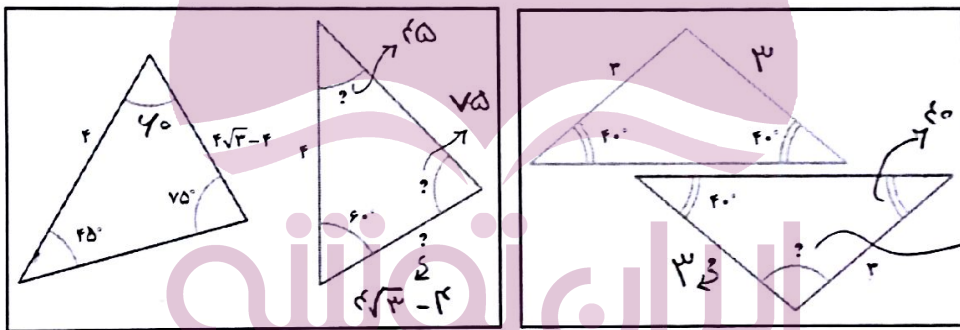
برای یادآوری بیشتر دو حالت دیگر همنهشتی مثلث ها و دو حالت همنهشتی ویژه مثلث های قائم الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

### فعالیت

۱- در شکل های زیر، جفت مثلث های ترسیم شده در یک کادر، با یکدیگر همنهشتند. اندازه باره خط ها و زاویه های مجهول را روی شکل مشخص کنید.

$$75^\circ + 45^\circ = 120^\circ$$

$$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

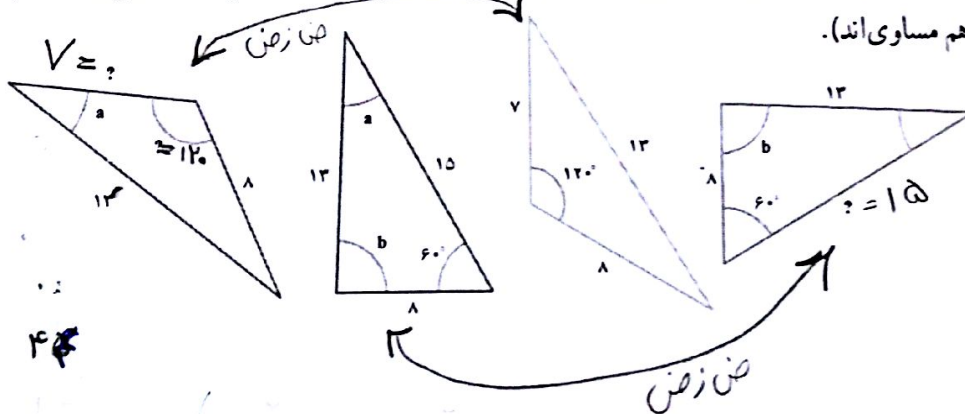


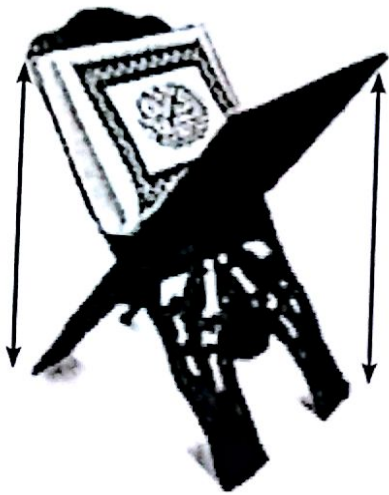
$$40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$$

$$180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

۲- در شکل زیر چهار مثلث رسم شده اند که دو به دو با یکدیگر همنهشتند.

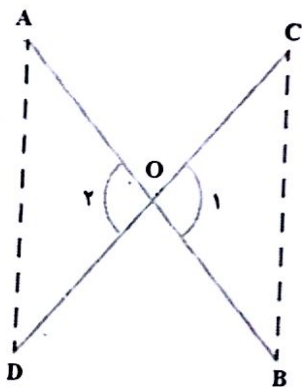
اندازه های مجهول را روی آنها تعیین نمایید. (زاویه هایی که با یک حرف مشخص شده اند، با هم مساوی اند).





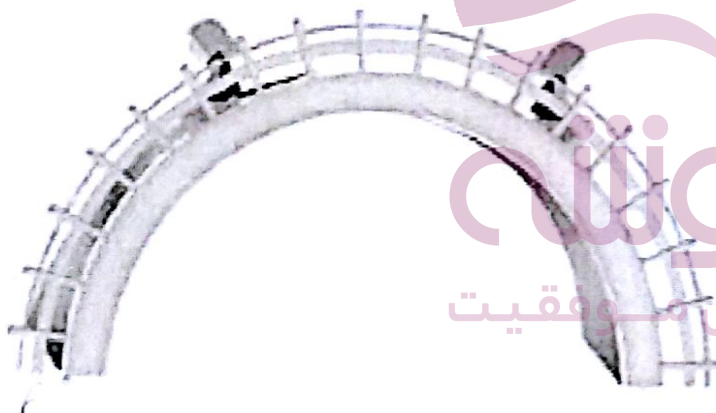
مثال : با رحل های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آنها داریم که دو لایه جویی آن از وسط هم گذشته اند. می خواهیم نشان دهیم که این تکیه گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصله دو لبه کناری آن، در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که :  $OA=OB$  و  $OC=OD$  و حکم این است که :  $AD=BC$ . روشن است که زوایای  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_2$  برابرند (چرا؟) پس مثلث های  $OBC$  و  $OAD$  همبختند و از آنجا درستی حکم به دست می آید :

چون متقابل به رأس هستند

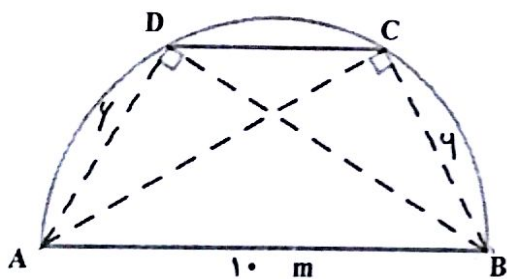


$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OC = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ض ض)} \\ \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \Rightarrow AD = BC \end{array}$$

### فعالیت



در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم دایره هست که بچه ها برای بازی از روی پله های آن بالا می روند. می دانیم فاصله ابتدای پل (نقطه A) از انتهای آن (نقطه B) ده متر است و اکنون ترانه روی پله C که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد نشسته است (BC=۶) و شهرزاد روی پله D که از ابتدای پل همین قدر فاصله دارد، نشسته است و آنها حدس می زنند که باید فاصله شان از پایه های مقابل نیز برابر باشد، یعنی  $AC=BD$ .



$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \rightarrow AC = \sqrt{64} = 8$$

$$BD = 8$$

چون زاویه محاطی روبه روب قطر ۹۰ درجه است

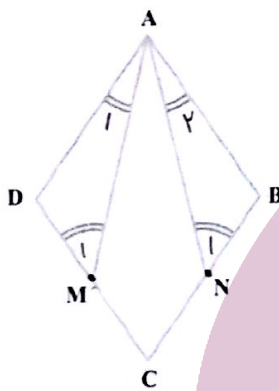
۱- چرا زاویه های  $\hat{C}$  و  $\hat{D}$  در شکل، قائمه اند؟ طول های AC و BD را به کمک قضیه

فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید:  $AC=BD$

۲- به کمک همبستگی مثلث های ACB و ADB همین نتیجه را ثابت کنید.

$$\left\{ \begin{array}{l} BC = AD \\ AB = AB \end{array} \right. \xrightarrow{\text{قضیه}} \triangle ABC \cong \triangle ABD \xrightarrow{\text{بنابراین تساوی اجزای متناظر}} AC = BD$$

**فعالیت**



در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه های M و N وسط های

اضلاع CD و CB هستند.

۱- با توجه به ویژگی های لوزی، تساوی های زیر را کامل کنید:

$$AD = AB = DC = BC \dots \dots \dots \hat{A} + \hat{B} = \dots \dots \dots$$

$$\hat{A} = \hat{C} \dots \dots \dots \hat{B} = \hat{D} \dots \dots \dots \hat{C} + \hat{B} = \dots \dots \dots$$

آیا می توانید تساوی های دیگری هم بنویسید؟

۲- با کامل کردن تساوی های زیر نشان دهید:

$$DC = BC \Rightarrow \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} BC \Rightarrow DM = BN$$

۳- با توجه به نتیجه قسمت دوم و تساوی های قسمت اول ثابت کنید مثلث های ADM و ABN

همبستگی دارند. از آنجا چگونه می توانید تساوی پاره خط های AM و AN را نتیجه بگیرید؟ زاویه های برابر

$$\left\{ \begin{array}{l} AD = AB \\ \hat{D} = \hat{B} \\ DM = BN \end{array} \right. \xrightarrow{\text{قضیه}} \triangle ADM \cong \triangle ABN$$

**کاردر کلاس**



می خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی الاضلاع

مانند شکل روبه رو، ضلع های مقابل، همواره با هم برابرند.

مفروضات و داده های مسئله چیست؟ تمام آنها را

بنویسید. حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله نظرات

چند دانش آموز را ببینید و با توجه به آنها به سوالات پاسخ دهید.



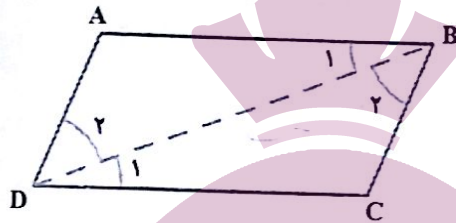
آفرین: در تعریف متوازی الاضلاع برابری ضلع های روبه رو را می دانستیم. علاوه بر آن با اندازه گیری هم می توانیم این موضوع را نشان دهیم.

شهرزاد: معلوم است که ضلع های روبه رو با هم مساوی اند! با چشم هم می توان دید!

آیا می توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟ نه خیر چون احتمال خطا هست

وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده ایم؟ چرا؟ نه خیر چون در اندازه گیری به وجود داشت؟

نم احتمال خطا وجود دارد.



ترانه: به نظر من باید دو مثلث هم نهشت بیایم و با اثبات هم نهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی الاضلاع برسیم. اما در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطر ها، دو مثلث ایجاد می کنیم.

در این دو مثلث، ضلع های روبه روی AD و BC، روبه رو به کدام زاویه ها هستند؟ چرا این دو زاویه برابرند؟

اثبات را به صورت زیر کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب } \angle B_1 = \angle D_1 \\ AD \parallel BC, \text{ مورب } \angle B_2 = \angle D_2 \\ BD = BD \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CDB \text{ (ض ز)} \Rightarrow AD = BC, AB = CD$$

چرا برای اثبات هم نهشتی مثلث های ایجاد شده، نمی توانستیم روی حالت های (ض ض) و (ض ض ض) حساب کنیم؟ چون هدف اثبات حکم است و در عرض دو ضلع برابر نداریم.

با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می توانستیم، همین نتیجه را با رسم قطر AC به دست آوریم؟ بله

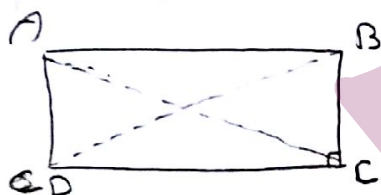
از هم نهشتی مثلث های ایجاد شده در متوازی الاضلاع، به جز برابری ضلع های مقابل، نتیجه دیگری هم در مورد زاویه های متوازی الاضلاع به دست می آید. این نتیجه را بنویسید:

در هر متوازی الاضلاع، زوایای روبه رو، مساوی اند.

۱-

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضمن ز}} \triangle AOB \cong \triangle COD$$

بنابراین تساوی اجزای متساوی  $OB = OD$  و  $OA = OC$



۲-

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{BC} \\ \hat{D} = \hat{C} \\ \overline{DC} = \overline{DC} \end{cases} \xrightarrow{\text{ضمن ضمن}} \triangle BCD \cong \triangle ADC$$

بنابراین تساوی اجزای متساوی  $\overline{AC} = \overline{BD}$

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{AM} = \overline{AM} \\ \overline{BM} = \overline{MC} \end{cases} \xrightarrow{\text{ضمن ضمن}} \triangle ABM \cong \triangle AMC$$

۳-

بنابراین تساوی اجزای متساوی  $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$  و  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

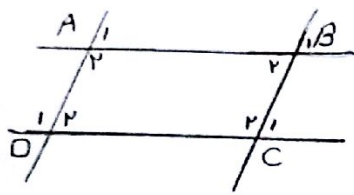
$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow AM \text{ نیایزات}$$

$$\begin{cases} \overline{BM} = \overline{MC} \\ \overline{AB} = \overline{AC} \end{cases} \Rightarrow \text{در } \triangle ABC \text{ دو ضلع برابر و یک ضلع مشترک} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$$



۴-

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{OM} = \overline{OM} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر مشترک}} \triangle OAM \cong \triangle OBM \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BM}$$



$$AB \parallel CD \text{ و } AD \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{D}_2 \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_2 + \hat{D}_2 = 180^\circ \text{ I} \\ \hat{A}_2 + \hat{A}_1 = 180^\circ \end{cases}$$

$$AB \parallel CD \text{ و } BC \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_2 = \hat{C}_1 \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 180^\circ \text{ II} \\ \hat{B}_2 + \hat{B}_1 = 180^\circ \end{cases}$$

$$AD \parallel BC \text{ و } AB \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_2 = \hat{A}_1 \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_2 + \hat{B}_2 = 180^\circ \text{ III} \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \end{cases}$$

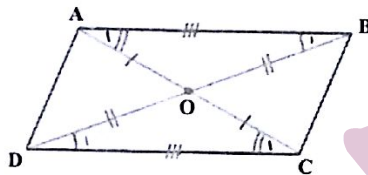
۲- نتیجه قسمت دوم را بدون استفاده از همنهشتی مثلث ها، و با امتداد دادن اضلاع

متوازی الاضلاع، به کمک خطوط موازی و مورب به طور مستقیم ثابت کنید.

$$\text{از رابطه های I و III} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_2 + \hat{D}_2 = 180^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{B}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2$$

به همین ترتیب  $\hat{A}_2 = \hat{C}_2$  خواهد بود.

تشریح



۱- به کمک نتایج به دست آمده در مورد اضلاع رویه رو در متوازی الاضلاع، ثابت کنید قطرهای هر متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید:  $OB=OD$  و  $OA=OC$ .

۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است!)

۳- در مثلث متساوی الساقین ABC، میانه AM را رسم

کرده ایم. مثلث های AMB و AMC به چه حالتی همنهشت هستند؟

چرا AM نیمساز زاویه  $\hat{A}$  است؟ چرا AM بر BC عمود است؟

۴- سجاده به تجربه دیده که هر بار که از بیرون دایره ای، دو مماس

بر آن رسم کرده، مماس ها به ظاهر با هم برابرند. اما دلیل درستی این

موضوع را نمی داند. با وصل کردن نقطه O (مرکز دایره) به سه نقطه A

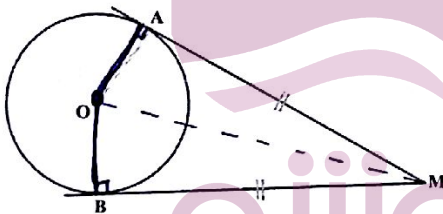
و B و M در شکل، و با توجه به ویژگی شعاع و

مماس که در سال گذشته دیدید و اثبات همنهشتی

دو مثلث مناسب به او کمک کنید تا علت درستی

این حکم را بداند.

حکم:  $\overline{AM} = \overline{MB}$



۵- در شکل مقابل خط d از وسط پاره خط AB

گذشته و A و B از d به یک فاصله اند ( $AH=BH$ ) ثابت کنید

$OH=OH'$ . او استدلال زیر را برای اثبات حکم ارائه کرد:

$OA=OB$  (طبق فرض)

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$  (متقابل به رأس)

$AH=BH'$  (فرض)

(ض ز ض)

$\Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH' \Rightarrow OH=OH'$

حکم:  $\overline{OH} = \overline{OH'}$

آیا استدلال را می پذیرید؟ در غیر این صورت آن را طوری اصلاح کنید که درست شود.

۴۹ نه خیر - حالت تساوی دو مثلث استنباط می باشد. بنابر حالت

وتر یک ضلع یا وتر یک زاویه تند درست می باشد.

و تر و یک ضلع یا و تر و یک زاویه تند درست می باشد.

$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و زاویه تند}} \triangle OAH \cong \triangle OBH' \Rightarrow \overline{OH} = \overline{OH'}$$

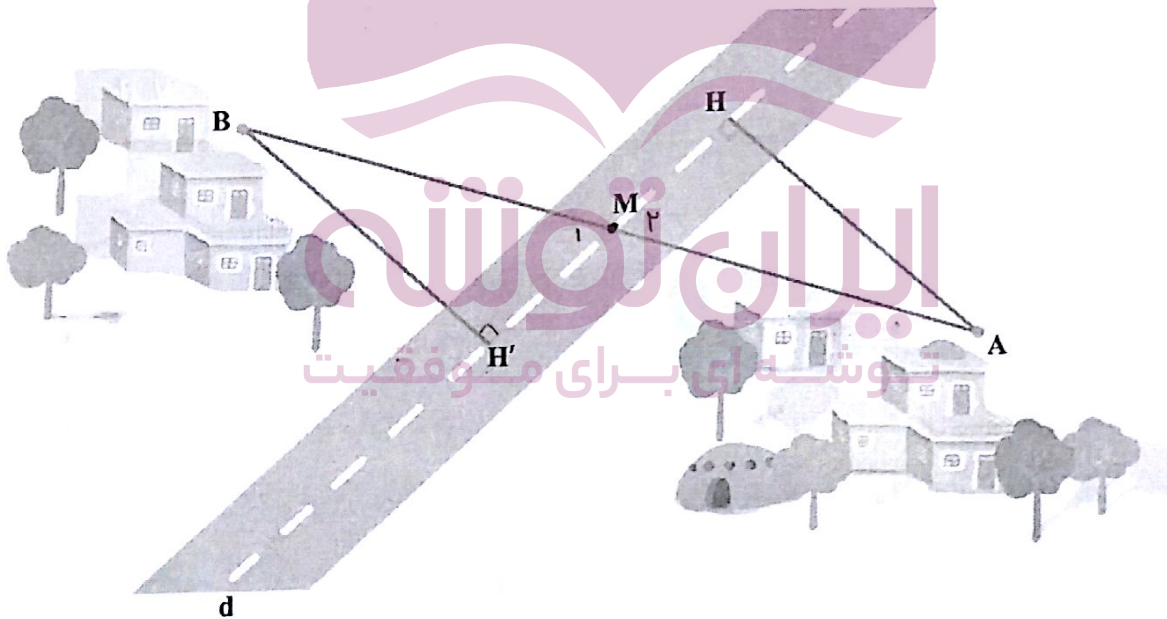
یا

$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{AH} = \overline{BH'} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OAH \cong \triangle OBH' \Rightarrow \overline{OH} = \overline{OH'}$$



برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد، اما مراحل را می‌توان مشخص کرد که برای هر مسئله هندسه، آنها را توصیه می‌کنند. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی در عمل معرفی می‌کنیم.

مثال: دو روستای A و B از سال‌ها قبل با یک جادهٔ خاکی مستقیم به هم وصل بوده‌اند. چند سال قبل در آن منطقه یک جادهٔ آسفالتی مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شدند و جادهٔ آسفالتی درست از وسط جادهٔ خاکی عبور می‌کرد و راه ارتباط دو روستا به جادهٔ آسفالتی از طریق همان جاده خاکی انجام می‌شود. اکنون برای کوتاه کردن این راه، ادارهٔ راهسازی تصمیم گرفته که از هر روستا، یک جادهٔ آسفالتی با کوتاه‌ترین فاصلهٔ ممکن، تا جادهٔ اصلی ایجاد کند. بنابراین از روستای A یک جادهٔ مستقیم، عمود بر این جادهٔ اصلی و به طول ۴ کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه‌های ایجاد جادهٔ دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصلهٔ روستای B از جاده نیز همین مقدار است. یعنی در شکل مقابل خط  $d$  جادهٔ اصلی است که از M وسط AB عبور کرده و AH و فاصلهٔ روستای A تا جاده (۴km) و  $BH'$  فاصلهٔ روستای B تا جادهٔ اصلی است و می‌خواهیم نشان دهیم که  $AH=BH'$ .



### قدم‌های حل مسئله

- ۱- صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل‌دهندهٔ آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصلهٔ نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟
- ۲- اگر مسئله فاقد شکل است، با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید. در این جا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم نمایید.

۳- داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص داده و در یک جدول بنویسید. در اینجا فرض‌های اصلی این است که  $M$  وسط  $AB$  است؛ یعنی  $MA=MB$  و  $AH$  و  $BH'$  بر یک عمود و حکم این است که:  $AH=BH'$

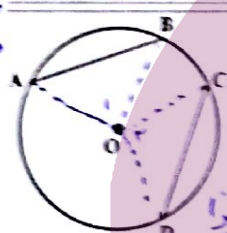
فرض	$MA=MB$ , $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
حکم	$AH=BH'$

۴- برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آنها را به مرور می‌آموزد. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره‌خط، استفاده از مثلث‌های همبست است. در این شکل، کدام دو مثلث برای این منظور مناسب است؟  
با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با معادله‌های ریاضی کامل کنید:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} MA=MB \text{ (فرض)} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \hat{A} = \hat{B} \text{ (مقابل برآس)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAH \cong \triangle MBH' \Rightarrow AH=BH' \end{array}$$

## فعالیت

$$\left\{ \begin{array}{l} OB=OC \\ OA=OD \\ AB=CD \end{array} \right. \rightarrow$$



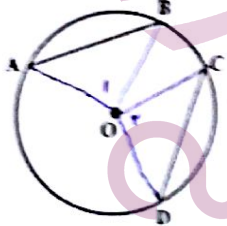
$$\triangle AOB \cong \triangle COD$$

در شکل مقابل وترهای  $AB$  و  $CD$  با هم مساوی است.

۱- نشان دهید کمان‌های  $\widehat{AB}$  و  $\widehat{CD}$  مساوی است.

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \xrightarrow[\text{هرگز برای اثبات مناسب نیست}]{\hat{O}_1 = \hat{O}_2}$$

۲- در شکل مقابل کمان‌های  $\widehat{AB}$  و  $\widehat{CD}$  مساوی است. نشان



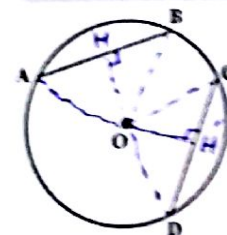
دهد وترهای  $AB$  و  $CD$  با هم برابرند.

$$\left\{ \begin{array}{l} OA=OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OB=OC \end{array} \right. \xrightarrow{\text{فرض}} \triangle AOB \cong \triangle COD$$

$$AB=CD \text{ (مساوی پاره‌ها در دو مثلث برابر)}$$

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر

برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.



۳- از سال گذشته می‌دانید خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود

شود، وتر را نصف می‌کند. با توجه به این موضوع، نشان دهید مرکز دایره

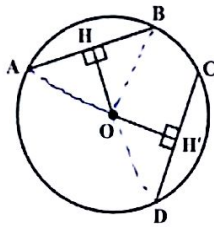
از دو وتر مساوی به یک فاصله است.

$$AB=CD \Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD \rightarrow AH=HB=CH'=DH'$$

۵۰

$$\left\{ \begin{array}{l} OB=OC \\ CH'=BH \end{array} \right. \xrightarrow{\text{دو وتر مساوی}} \triangle OHB \cong \triangle OH'C \Rightarrow OH=OH'$$

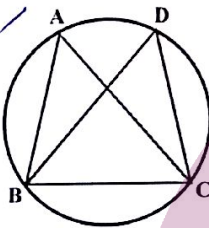




۴- در شکل مقابل می دانیم مرکز دایره از دو وتر AB و CD به یک فاصله است ( $OH=OH'$ ). مرکز دایره را به A و D وصل کنید و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید که طول های دو وتر AB و CD با هم برابر است:

$$\begin{aligned} OA = OD = R & \quad \text{شعاع (وتر و مرکز دایره)} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ & \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OH'D \Rightarrow AH = DH' \Rightarrow AB = CD \\ (OH = OH') & \quad \text{نیم فاصله فرض} \end{aligned}$$

### کار در کلاس

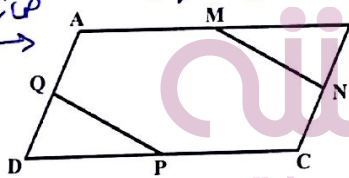


در شکل مقابل می دانیم  $AB=CD$ ، چرا  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ؟ چون در یک دایره اگر دو وتر برابر باشند  
۲- جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید:

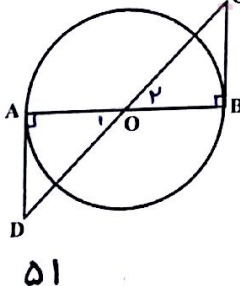
$$\begin{aligned} \widehat{AB} &= \widehat{CD} \\ \widehat{BC} &= \widehat{BC} \\ \widehat{AB} + \widehat{BC} &= \widehat{CD} + \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \end{aligned}$$

۳- چرا  $AC=BD$ ؟ چون در یک دایره اگر دو وتر برابر باشند و وتر های تقاطع آنها نیز با هم برابرند

$$\begin{aligned} \triangle DPQ &\cong \triangle MNB \\ \begin{cases} MB = DP \\ BN = DQ \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases} & \quad \text{قضیه} \end{aligned}$$



۱- در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع است و M و N و P و Q وسط های اضلاع متوازی الاضلاع است، ثابت کنید:  $MN=PQ$  نیم تساوی اضلاع متوازی الاضلاع



۲- در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس است، نشان دهید که BC و AD برابرند.

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{B} = 90^\circ \\ OA &= OB \\ \hat{O}_1 &= \hat{O}_2 \end{aligned} \xrightarrow{\text{قضیه}} \triangle OAD \cong \triangle OBC$$

نیم تساوی اضلاع متوازی الاضلاع

$$AD = BC$$

$$\begin{aligned} AB &= CD \Rightarrow \frac{1}{4} AB = \frac{1}{4} CD \\ AD &= BC \Rightarrow \frac{1}{4} AD = \frac{1}{4} BC \end{aligned}$$



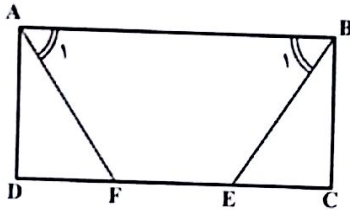


۳- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارد که  $BM = NC$ .  
 نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.

$$\begin{cases} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \\ BM = CN \end{cases} \xrightarrow{\text{فرض}} \triangle ABM \cong \triangle ACN \rightarrow AM = AN$$

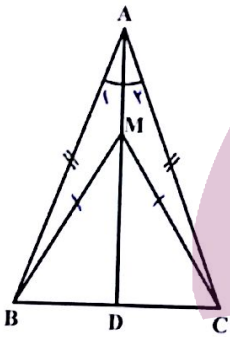
پس مثلث AMN متساوی الساقین است

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{A}_2$$



۴- در مستطیل ABCD، پاره خط‌های AF و BE طوری رسم شده که دو زاویه  $A_1$  و  $B_1$  برابرند، ثابت کنید AF و BE مساوی اند.

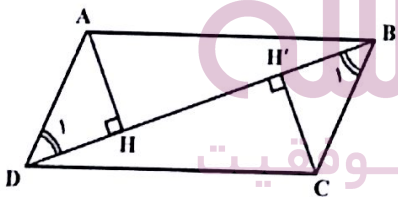
$$\begin{cases} \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \\ AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{فرض}} \triangle ADF \cong \triangle BEC \Rightarrow AF = BE$$



۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله هر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس از دو سر قاعده، برابر است:

$$\begin{cases} AB = AC \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AM = AM \end{cases} \xrightarrow{\text{فرض}} \triangle AMB \cong \triangle AMC \rightarrow MB = MC$$

و همچنین مثلث MBC نیز متساوی الساقین است.



۶- در شکل مقابل متوازی الاضلاع ABCD متوازی الاضلاع است و AH و CH' فاصله‌های نقاط A و C از قطر BD است. دلیل برابری دو زاویه  $B_1$  و  $D_1$  را توضیح دهید. نشان دهید مثلث‌های ADH و BCH' همنهشتند و از آنجا برابری AH و CH' را نتیجه بگیرید، سپس جمله زیر را کامل کنید:

در هر متوازی الاضلاع، هر دو رأس مقابل، از قطر ————— بین آنها به یک فاصله است

$$AD \parallel BC \text{ و } DB \text{ قطر} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \quad ۵۲$$

$$\begin{cases} AD = BC \\ \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{و تکرار زاویه}} \triangle ADH \cong \triangle BCH' \rightarrow AH = CH'$$

پس متساوی الساقین است

– در تصویرهای زیر دو گل شبیه به هم را می‌بینید. آیا هر گل به‌طور کامل مثل هم هستند؟ نه

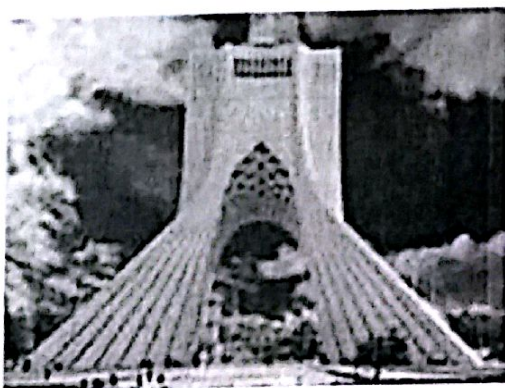


– در تصویرهای زیر دو عکس از یک شخص را می‌بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟

در پس‌اندیش



– تصویرهای زیر عکس‌هایی از میدان آزادی تهران می‌باشند. کدام یک مشابه میدان آزادی است و کدام یک نیست؟ الف درست و ب نیست

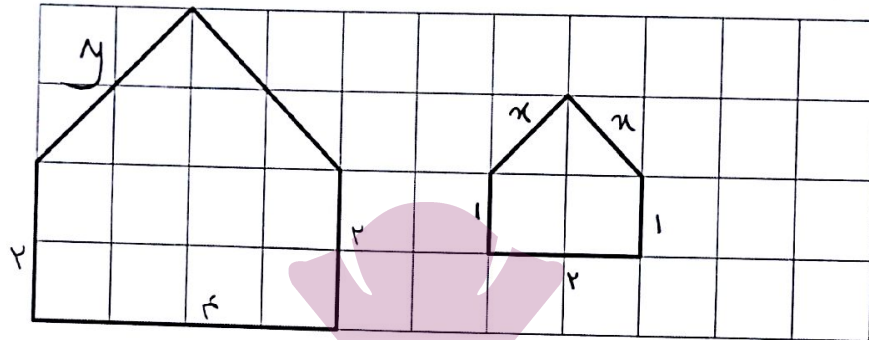


الف

ب



۱- مربع های صفحه شطرنجی زیر به ضلع یک سانتی متر هستند.

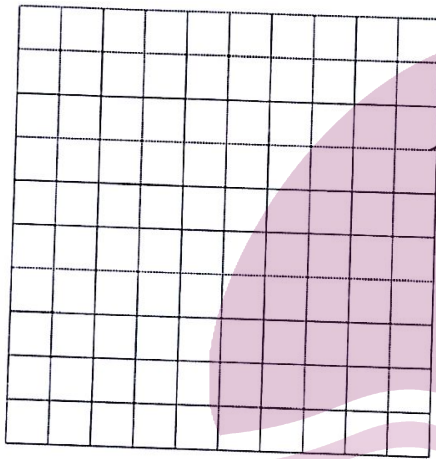


$$2^2 + 4^2 = y^2$$

$$y = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$1^2 + 2^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{5}$$



اندازه ضلع ها و زاویه های هر دو شکل را بنویسید.

۱- چه رابطه ای بین ضلع های دو شکل وجود دارد؟

چه رابطه ای بین زاویه های دو شکل وجود دارد؟

اندازه ضلع های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع های

شکل (۲) است؟

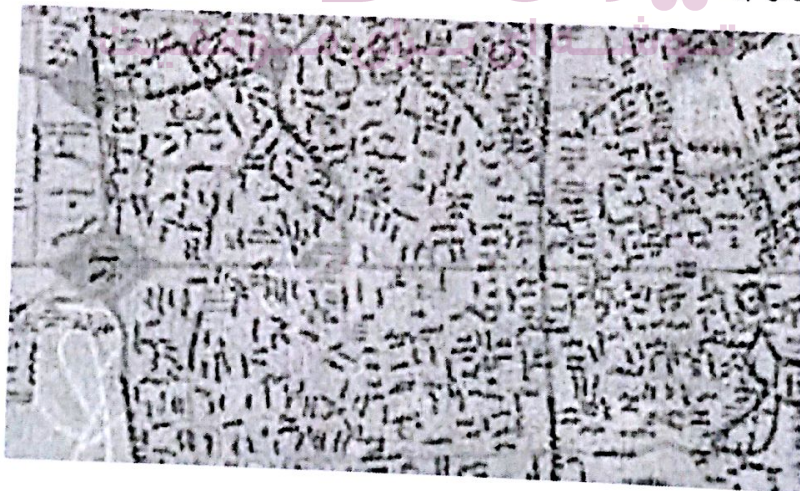
در صفحه شطرنجی مقابل یک شکل رسم کنید و

یک شکل مثل آن بکشید که اندازه ضلع هایش ۲ برابر شکل

اول باشد.

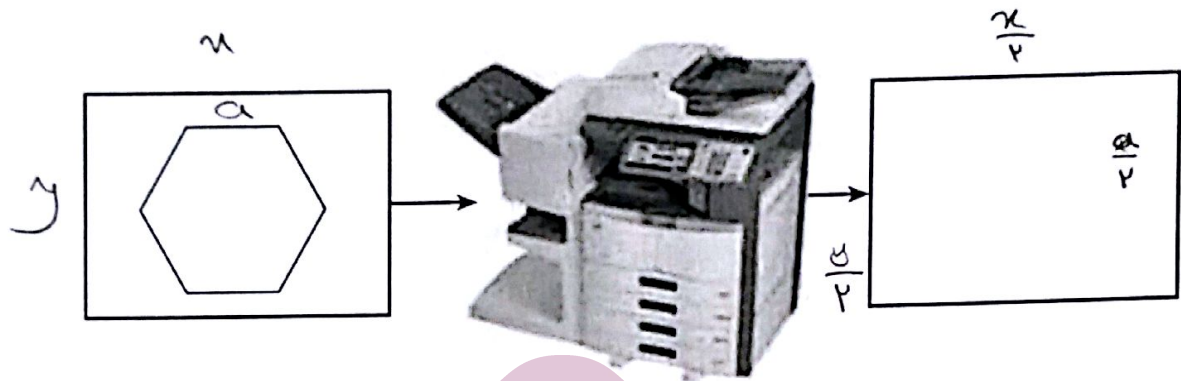
۲- در تصویر زیر نقشه قسمتی از شهر تهران را می بینید مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است.

یعنی هر یک سانتی متر روی نقشه برابر با ۱۰۰,۰۰۰ سانتی متر مقدار واقعی است. فاصله دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید.





۳- شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده‌ایم. عدد روی دستگاه ۵۰٪ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید.

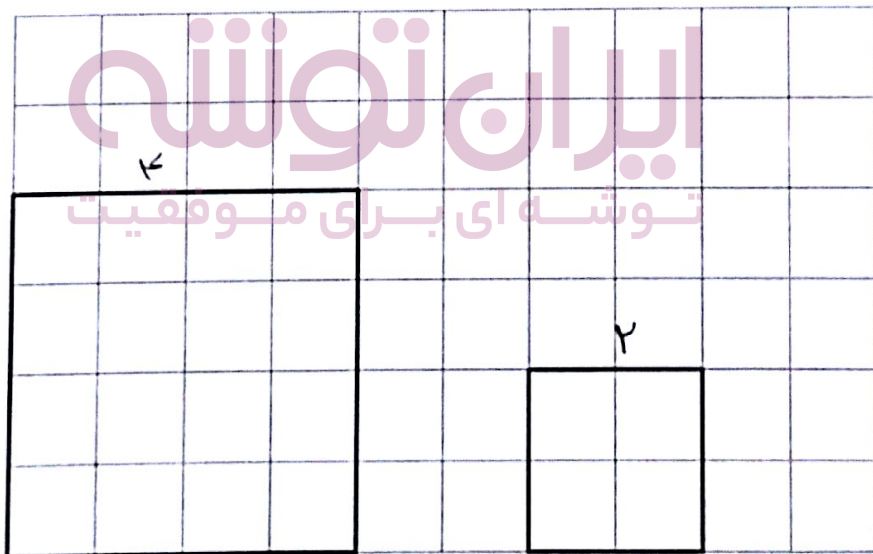


هرگاه در دو شکل همه ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده یا بدون تغییر باشند) و اندازه زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، به آن دو شکل متشابه می‌گوییم.

### کار در کلاس

۱- آیا دو مربع زیر متشابه هستند؟ اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟

آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابه‌اند؟ چرا؟ الف را به الف با هم برابر. اضلاع متشابه

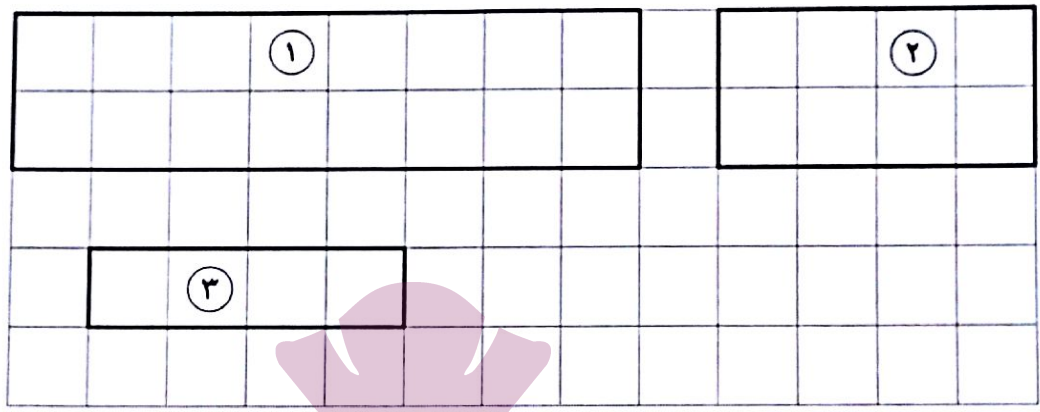


$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{A}' = \hat{B}' = \hat{C}' = \hat{D}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = 2$$

۱- زوایای برابر با هم دارند  
۲- نسبت اضلاع متشابه است

۲- از مستطیل های زیر کدام با هم متشابهند؟ چرا؟ شماره ۱ و ۳ - چون اضلاع متساوی و زوایا برابر است  
 آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه است؟ نه حتما چون امکان دارد اضلاع متساوی نباشند.

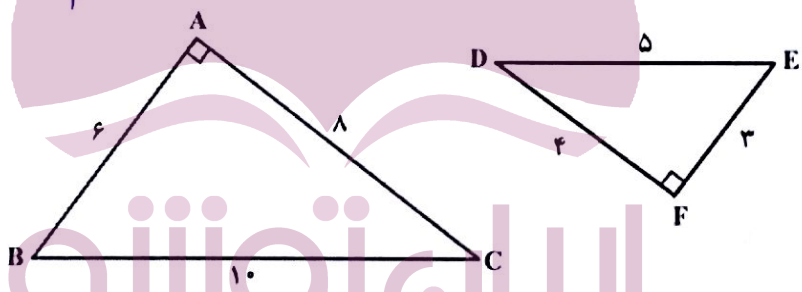


### فعالیت

دو مثلث زیر با هم متشابه است. ضلع های متناظر و زاویه های متناظر را هم رنگ کنید. نسبت ضلع های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به دست آمد؟

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FD}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$$

اضلاع متساوی است.

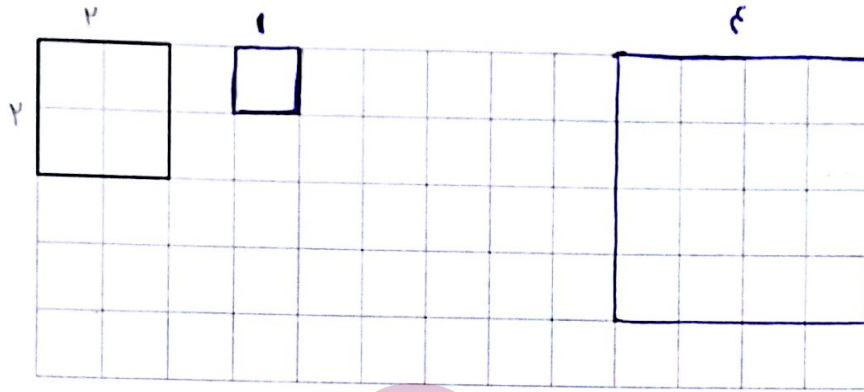


به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می گویند.

### کار در کلاس

۱- با توجه به مربع صفحه بعد، مربع دیگری رسم کنید به گونه ای که نسبت تشابه دو مربع  $\frac{1}{4}$

باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟  
 ۲ جواب دارد چون دو مربع به اضلاع ۱ و ۲ خواهیم داشت



$$BC' = 2^2 + 2^2$$

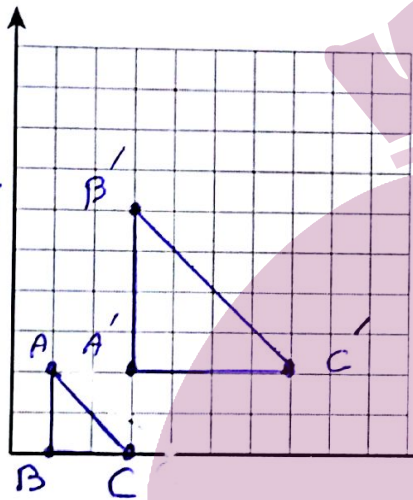
$$BC' = 32$$

$$BC' = \sqrt{32} = 2\sqrt{8}$$

$$AC = 2^2 + 2^2 = 4 + 4$$

$$AC = 8$$

$$AC = \sqrt{8}$$



۲- در صفحه مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } ABC$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } A'B'C'$$

طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت تشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

$$AB = 2 \quad , \quad A'B' = 4$$

$$BC = 2 \quad , \quad A'C' = 4$$

$$AC = \sqrt{8} \quad , \quad B'C' = 2\sqrt{8}$$

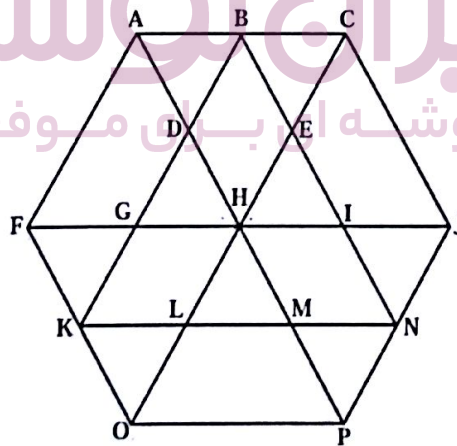
$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$$

تمرین

۱- چندضلعی‌های متشابهی که در شکل زیر تشخیص می‌دهید، نام ببرید.



$$\triangle GDAF \cong \triangle EIJC$$

$$\triangle DGH \cong \triangle EHI$$

$$\triangle AFQH \cong \triangle HCTP$$

$$\triangle HFO \cong \triangle HJP$$

$$\triangle AHC \cong \triangle HOP$$

$$\triangle HDKL \cong \triangle HMNE$$



۲- آیا هر دو شکل همنهشت با هم، متشابه نیز هستند؟ بل

در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟ ۱

۳- آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟ نه خیر چون ممکن است زوایای برابر نباشند.

۴- در یک نقشه، مقیاس ۱:۲۰۰ است. فاصله دو نقطه روی نقشه ۳/۵ سانتیمتر است. فاصله

این دو نقطه در اندازه واقعی چقدر است؟  $\frac{1}{200} = \frac{3.5}{x} \rightarrow x = 700$

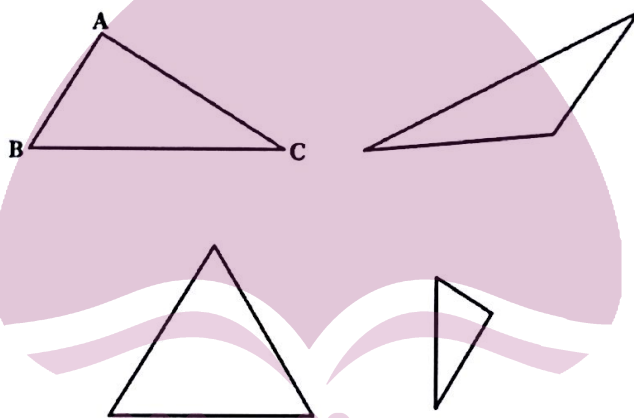
۵- آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟ بل چون اضلاع متشابه و زوایای برابر است.

۶- آیا هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند؟ چرا؟ نه خیر چون ممکن است زوایای برابر نباشند.

۷- مثلث ABC به ضلع های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع  $x-1$  و ۱۰ و  $x+7$  با هم متشابه

هستند (اندازه ضلع های مثلث ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار  $x$  را پیدا کنید.

۸- کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟



سوال  
۷-

$$\frac{4}{x-1} = \frac{5}{10} = \frac{8}{x+7} \rightarrow \begin{matrix} x-1=8 \\ x=9 \end{matrix}, x+7=14$$

۴	$x-1$
۵	۱۰
۸	$x+7$



# توان و ریشه I

وَجَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ  
هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم  
(سوره انبیاء، آیه ۳۰)



توشه ای برای موفقیت



یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر  
 $3.3 \times 10^{28}$  مولکول است که می‌توان آن را به مسورت  $3/3 \times 10^{28}$   
نمایش داد. هرگونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم.



در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد (ناصفر) آشنا شده‌اید. به‌طور مثال می‌دانید:

$$2^3 = 8 \quad \text{و} \quad (-5)^2 = 25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \frac{-1}{32}$$

همچنین می‌دانید که اگر  $a$  عددی غیرصفر باشد،  $a^0 = 1$ .

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل  $2^{-3}$  چیست؟ به کمک فعالیت زیر پاسخ سؤال بالا را می‌توان پیدا کرد.

### فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات داده شده پاسخ دهید:

$16$	$8$	$4$	$2$	$1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$
$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$	$2^{-1}$	$2^{-2}$	$2^{-3}$	$2^{-4}$	$2^{-5}$

آ) اعداد واقع در سطر اول جدول بالا با هم چه ارتباطی دارند؟ هم‌ی اعداد توان از ۲ هستند

ب) هر یک از اعداد واقع در سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟ اعداد توان از سطر اول هستند

ج) توان‌های اعداد واقع در سطر دوم تا  $2^0$  با یکدیگر چه رابطه‌ای دارند؟ هر کدام از تقسیم بر ۲ بدست آمده یا یک واحد از توان کم شده

د) اگر بخواهیم در جاهای خالی این الگو را ادامه دهیم، چه اعدادی را می‌توان نوشت؟  $-1$  و  $-2$  و  $-3$  و  $-4$  و  $-5$

ه) به کمک جدول بالا تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

به‌طور کلی اگر  $a$  یک عدد غیرصفر باشد و  $n$  یک عدد طبیعی باشد،  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

یعنی: توان منفی هر عدد مساوی معکوس توان مثبت است.  
 $\bar{a}^n = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$

مثال:

$$1) 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$3) \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$$

$$2) \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$$

$$4) (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$$



۱- با توجه به مثال های حل شده زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان دار بتوان

طبیعی بنویسید.

آ)  $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = (\frac{1}{5})^2$

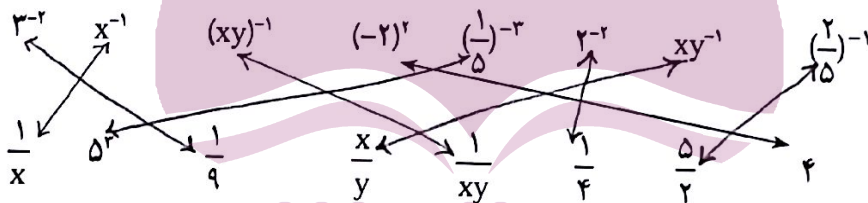
ب)  $(\frac{2}{3})^{-2} = \frac{1}{(\frac{2}{3})^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = (\frac{3}{2})^2$

ج)  $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{(-8)} = -\frac{1}{8} = (-\frac{1}{2})^3$  د)  $(-\frac{2}{7})^{-4} = \frac{1}{(-\frac{2}{7})^4} = \frac{1}{\frac{16}{2401}} = \frac{2401}{16} = (\frac{7}{2})^4$

کتاب برای نوشتن

به طور کلی اگر  $n$  یک عدد طبیعی و  $a \neq 0$  آنگاه:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = (\frac{1}{a})^n$

۲- مانند نمونه هر عبارت را به عبارت نظیر آن وصل کنید.



۳- حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید.

آ)  $(-\frac{1}{3})^{-4} = (-3)^4 = 81$

و)  $1^{-2} = 1$

ب)  $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$  ز)  $\frac{(-3)^0}{3} = \frac{1}{3}$

ج)  $-(-5)^2 = -25$

ح)  $-\frac{1}{2^{-2}} = -(\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$

د)  $-(-5)^{-2} = -\frac{1}{(-5)^2} = -\frac{1}{25}$

ط)  $(\frac{2}{5})^{-2} + (\frac{5}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2 = 2 \times (\frac{5}{2})^2 = 2 \times \frac{25}{4} = \frac{25}{2}$

ه)  $-5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$

ی)  $2^0 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

اگر  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی باشند و  $a$  یک عدد دلخواه باشد داریم:  $a^m \times a^n = a^{m+n}$   
 آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟  
 با انجام فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای اعداد صحیح هم حدس زد.

## فعالیت

توضیح دهید که هر یک از حاصل ضرب‌های زیر چگونه به دست آمده است؟ توان صحیحی که در پاسخ وجود دارد با هر یک از توان‌های موجود در عبارت اولیه چه رابطه‌ای دارند؟

$$3^{-4} \times 3^6 = \frac{1}{3^4} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

$$5^2 \times 5^{-7} = \dots = 5^{2+(-7)} = 5^{-5}$$

در حالت کلی اگر  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح باشند و  $a$  یک عدد دلخواه (غیر صفر)، رابطه زیر برقرار است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال:

$$2^3 \times 2^{-5} \times 2^{-2} = 2^{3-5-2} = 2^{-4}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^4) \times (4x^2) = 24x^{-1+4+2} = 24x^5 \quad (x \neq 0)$$

## کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید:

$$5^{-7} \times 5^{10} = 5^3 \quad (-4)^{-1} \times (-4)^{-1} = (-4)^{-2}$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^4 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-9} = \left(\frac{-3}{8}\right)^{-5}$$

$$\left(\frac{1}{V}\right)^6 \times \left(\frac{1}{V}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{V}\right)^1$$

$$b^{-2} \times b^{-2} = b^{-4}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-7} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$$

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد مخالف صفر و  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح باشند، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n} ; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} ; \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m ;$$

$$(a^m)^n = a^{mn} ; (ab)^m = a^m \cdot b^m ; \quad a^0 = 1$$

### کار در کلاس

الف)  $\frac{7^7}{7^9} = 7^{7-9} = 7^{-2}$

ب)  $2^{-2} \times 5^{-2} = 10^{-2}$

ج)  $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2} \times 12^{-2} = \left(\frac{-2}{3} \times 12\right)^{-2} = (-8)^{-2} = \left(-\frac{2}{8}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2$

د)  $\frac{2^8 \times 5^{10}}{2^6 \times 5^6} = \frac{2^8}{2^6} \times \frac{5^{10}}{5^6} = 2^2 \times 5^4 = 10^4$

ه)  $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^7 \cdot z^3} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-7} \cdot z^{1-3} = x^7 \cdot y^{-5} \cdot z^{-2} = \frac{x^7}{y^5 z^2} \quad x, y, z \neq 0$

### تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف)  $3^{-2} \begin{cases} \frac{1}{9} \\ -6 \end{cases}$

ب)  $3^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

ج)  $3^{-1} \times 4^{-1} \begin{cases} 12^{-1} \\ 7^{-1} \end{cases} = (3 \times 4)^{-1}$

د)  $3^{-1} + 4^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ 7^{-1} \end{cases}$

ه)  $5^{-2} \begin{cases} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \end{cases}$

و)  $(-2)^2 \begin{cases} 3^{-2} \\ -8 \end{cases} = (-2)(-2)(-2)$



۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود  $10^{-24}$  گرم است. جرم یک وزنه  $100$  کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

$$100 \text{ kg} = 100 \times 1000 = 100000 = 10^5 \text{ g}$$

$$\frac{10^5}{10^{-24}} = 10^{5-(-24)} = 10^{29}$$

۳- عددهای  $16^2$  و  $8^4$  و  $2^{11}$  را با یکدیگر مقایسه کنید.

۴- در جاهای خالی علامت  $<$ ،  $>$  یا  $=$  قرار دهید:

الف)  $3^{-1} \bigcirc 3^{-2}$

ب)  $2^{-3} \bigcirc 2^{-5}$

ج)  $(0/5)^{-2} \bigcirc (0/6)^{-2}$

د)  $5^{-1} \bigcirc 5^{-2}$

هـ)  $\left(\frac{-8}{15}\right)^{-1} \bigcirc 1$

و)  $-5^{-2} \bigcirc (-5)^{-2}$

۵- در هر یک از تساوی های زیر  $x$  چه عددی است؟

الف)  $5^x \times 5^{-2} = 5^4$

ب)  $5^x \div 5^{-2} = 5^4$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف)  $a^4 \times a^5 = a^{20}$   $\times$

هـ)  $(-3)^{-1} + (3^{-1})^{-1} = 4$   $\checkmark$

ب)  $a^4 \times a^5 = a^4$   $\checkmark$

و)  $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-2}$   $\times$

ج)  $(a^m)^n = (a^n)^m$   $\checkmark a > 0$

ز)  $6^{-2} = -\frac{2}{6}$   $\times$

د)  $3^{-2} = -9$   $\times$

ح)  $3^{-1} < 3^{-1}$   $\checkmark$

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید.

الف)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \times 27^{-3}$

ب)  $25^{-2} \times (0/2)^{-4}$

ج)  $\left(\frac{15}{14}\right)^{-4} \times \left(\frac{45}{28}\right)^4$

د)  $(-5^{-2})^{-1}$

۸- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$2^{-2}$  و  $1^{-10}$  و  $(-1)^{11}$  و  $(-7)^2$  و  $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-2}$  و  $2^2$  و  $5^{-2}$  و  $2^{-2}$

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$\checkmark (0/987)^{10} < 10^0$   $(1/2)^7 < (10/2)^7$   $\left(\frac{5}{4}\right)^2 < (0/7)^2$   $\left(\frac{3}{4}\right)^2 > (0/75)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \checkmark$

۱۰- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) 
$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}} = \frac{2^{-3} \times 2^{-8}}{2^{-3} \times 2^{-8}} = \frac{2^{-11}}{2^{-11}} = 1$$

ب) 
$$\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-1} = \left(-\frac{9}{4}\right)^{-1} = -\frac{4}{9}$$

$$2^{11}, 1^8, 16^3 \rightarrow \begin{cases} 2^{11} \\ 1^8 = (2^3)^4 = 2^{12} \\ 16^3 = (2^4)^3 = 2^{12} \end{cases}$$

$$2^{11} < 2^{12} = 1^8 = 16^3$$

پاسخ سؤال ۳

الف  $x + (-3) = 4$  ب  $x - (-3) = 4$

$x = 4 + 3 = 7$   $x = 4 - 3 = 1$

سؤال ۵

۱  $3^{10} \times (3^3)^{-3} = 3^{10} \times 3^{-9} = 3^1$  ب  $(\frac{1}{3})^4 \times (2^2)^{-2} = 2^4 \times 2^{-4} = 2^0 = 1$  سؤال ۷

ج  $(\frac{14}{15})^4 \times (\frac{45}{21})^4 = (\frac{14}{15} \times \frac{45}{21})^4 = (\frac{3}{2})^4$

د  $(-\frac{1}{25})^{-1} = (-\frac{1}{25})^{-1} = -25$

$\frac{1}{8}, \frac{1}{125}, 1, 8, 4, 49, -1, 1, -\frac{1}{16}$

سؤال ۸

$-1 < -\frac{1}{16} < \frac{1}{125} < \frac{1}{8} < 1 < 4 < 8 < 49$

$(-1)^{21} < -2^{-4} < 2^{-3} < 2^{-3} < (-\frac{1}{2})^0 = 1 < (-\frac{1}{2})^{-2} < 2^3 < (-7)^2$

پوشه ای برای درسی و فیزی

۲۵٪ =  $\frac{25}{10000} = \frac{25}{10} \times \frac{1}{1000} = 2,5 \times 10^{-3}$

$3245000 = 3245 \times 1000 = 3,245 \times 10^6$

$\frac{3245}{1000} \times 1000 \times 1000 = 3,245 \times 10^6$

تقسیم، مکان ممیز چگونه تغییر می کند؟ در هند ممیز سمت راست حریت می تند و در تقسیم سمت چپ

تقسیم بر ضرب در	تقسیم بر ضرب در	تقسیم بر ضرب در	تقسیم بر ضرب در	تقسیم بر ضرب در	تقسیم بر ضرب در	تقسیم بر ضرب در
۱۰۵	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۴	۱۰۴	۱۰۵
۱۵	۱۵۰	۱۵۰۰	۱۵۰۰۰	۱۵۰۰۰	۱۵۰۰۰	۱۵۰۰۰
%۲	%۲	%۲	%۲	%۲	%۲	%۲
۹۳	۹۳	۹۳	۹۳	۹۳	۹۳	۹۳

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هر کدام از این عددها را به صورت یک عدد اعشاری مثبت با یک رقم صحیح در توانی از عدد  $10^n$  نمایش می‌دهند که آن را «نماد علمی» آن عدد می‌گویند، بنابراین:

$$36 \dots = 36 \times 10$$

این گونه نمایش به جز سادگی در نوشتن، محاسبات را آسان تر می کند و در ضمن نوعی نظم و هماهنگی در نمایش عددهای بزرگ (یا کوچک) به شمار می آید.



مثال:

$$1240000 = 1/24 \times 10^5$$

$$17000000000 = 1/7 \times 10^1$$

$$1393 = 1/393 \times 10^2$$

$$92040000 = 9/204 \times 10^6$$

$$125/39 = 1/2539 \times 10^2$$

قطر متوسط یک سلول گلبول قرمز  $7 \times 10^{-6}$  میلی متر است.

همانند عددهای بزرگ، عددهای کوچک مانند  $7 \times 10^{-6}$  را هم می توان به صورت نماد علمی

$$7 \times 10^{-6} = 0.000007$$

نمایش داد، یعنی:

ضخامت یک برگه کاغذ حدود  $0.0016$  سانتی متر است که با نماد علمی آن را به صورت

$$1.6 \times 10^{-3}$$

به طور کلی نماد علمی یک عدد اعشاری مثبت به صورت  $a \times 10^n$  است که در آن

$1 \leq a < 10$  و  $n$  عددی صحیح است.

$$0.00001275 = 1/275 \times 10^{-5}$$

$$0.0137 = 1/37 \times 10^{-2}$$

$$123 = 1/23 \times 10^2$$

$$29000 = 2/9 \times 10^4$$

مثال:

کار در کلاس

۱- هر یک از اعداد داده شده را با نماد علمی نمایش دهید.

$$245000 = 2.45 \times 10^5$$

$$150,000,000 = 1.5 \times 10^8$$

$$0.005 = 5 \times 10^{-3}$$

$$0.000061 = 6.1 \times 10^{-5}$$

$$1404 = 1.404 \times 10^3$$

$$0.1275 = 1.275 \times 10^{-1}$$

۲- نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید.

$$5/2 \times 10^{-2} = 0.025$$

$$7/304 \times 10^{-5} = 0.00007304$$

$$2/28 \times 10^8 = 228000000$$

$$9/4612 \times 10^1 = 9491200000$$

$$6/02 \times 10^{-2} = 0.0602$$

$$1/1 \times 10^2 = 1100$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\frac{r_0^{-\omega} \times r^\omega}{r_0^{-\omega}} = \frac{r^\omega}{r^{-\omega}} = \frac{r^{-\omega} \times 10^{-\omega} \times r^\omega}{r^{-\omega} \times 10^{-\omega}} = r^\omega \times r^\omega = 100$$

$$\frac{\Lambda^{-1} \times r^r}{r^{-r} \times \frac{1}{\Lambda}} = \frac{\frac{1}{\Lambda} \times r^r}{r^{-r} \times \frac{1}{\Lambda}} = r^r \times r^r = 14 \times 14 = r^{2r}$$

## ۲- کدامیک درست و کدامیک نادرست است؟

$$1/0.2 \times 10^{-5} = 0.00000102 \quad \text{X}$$

$$0/9 \times 10^{-1} = 0/09 \quad \checkmark$$

$$4/3 \times 10^2 = 430.0 \quad \checkmark$$

$$V_{0.04} \times 1.0^{-2} = 0/V_{0.04} \quad \times$$

$$618 \times 10^y = 6180000$$

$$1/250^\circ \times 10^4 = 1250^\circ \quad \checkmark$$

۳- شعاع خورشید تقریباً ۶۹۵۰۰۰ کیلومتر است. این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۴- اندازه یک باکتری ۵/۰۰۰۰۰۰ متر است. این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۵- قطر خورشید حدود  $1.4 \times 10^6$  متر و قطر زمین حدود  $1.27 \times 10^7$  متر است. قطر خورشید تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید.

$$2 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^1 = 8 \times 10^1$$

$$\frac{12/0 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-11}} = \frac{12 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-11}} = 6 \times 10^{-2} \times 10^{11} = 6 \times 10^9$$

۷- فاصله مریخ از زمین  $9/17 \times 10^7$  کیلومتر و فاصله کیوان از زمین  $6/287 \times 10^8$  کیلومتر

است. کدام سیاره به زمین نزدیک تر است؟ **هریچ**

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

۲- در جایی خالی حداقل ۱ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

اعداد زوج را از ۱) ( $\infty - 0$ ) ب)  $0 < \frac{0}{\infty}$  آ)  $(-1 - 0)$  نمره یا مادی -

۹- از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$$1/5 \times 10^{-2}, 1/2 \times 10^6, 5/30 \times 10^{-2}, 3/4 \times 10^{-2}$$

$$0,35 \times 10^{-2} < 1,5 \times 10^{-2} < 2,5 \times 10^{-2} < 1,2 \times 10^{-2}$$

$$1,0 \times 10^{-4} = 0,01\%$$

$$1,2 \times 10^4 = 15,000$$

$$0.13 \times 10^{-3} = 0.00013$$

$$w_1 V \times 10^4 = 0.03 V$$

## فعالیت

۱- مانند نمونه‌ها حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-3)^2 = 9 \quad (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$(-\sqrt{5})^2 = +5 \quad \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} \quad 4^2 = 16 \quad (-4)^2 = 16$$

مربع (توان دوم) اعداد ۳ و -۳ برابر ۹ است. اعداد ۳ و -۳ را ریشه‌های دوم عدد ۹ می‌نامند. همان‌گونه که در سال‌های گذشته دیده‌اید ریشه‌های دوم ۹ را با  $\sqrt{9}$  و  $-\sqrt{9}$  نمایش می‌دهند و داریم:

$$\sqrt{9} = 3 \text{ و } -\sqrt{9} = -3$$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید:

عدد	۳	-۳	۴	-۴	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\sqrt{4}$	$-\sqrt{4}$
مربع عدد (توان دوم)	۹		۱۶		$\frac{4}{9}$		۵		$\frac{1}{49}$		۶	

ریشه‌های دوم عدد  $\frac{4}{9}$ ، اعداد  $\frac{2}{3}$  و  $-\frac{2}{3}$  هستند. ریشه‌های دوم ۷، اعداد  $\sqrt{7}$  و  $-\sqrt{7}$  هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم  $\sqrt{0} = 0$ .

به طور کلی اگر  $b$  یک عدد حقیقی مثبت باشد،  $\sqrt{b}$  و  $-\sqrt{b}$  را ریشه‌های دوم  $b$  می‌نامند. همان‌طور که می‌دانید اعداد منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۲	-۲	۳	-۳	۴	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	۵	$-\frac{2}{3}$	۰
مکعب عدد (توان سوم)	۸	-۸	۲۷	-۲۷	۶۴	$\frac{1}{125}$	$-\frac{1}{125}$	۱۲۵	$-\frac{8}{27}$	۰



توان سوم (مکعب) عدد ۲ برابر ۸ است، یعنی  $2^3 = 8$ . ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم  $\sqrt[3]{8} = 2$ . همچنین چون  $(-2)^3 = -8$  ریشه سوم عدد -۸ برابر -۲ است و می‌نویسیم  $\sqrt[3]{-8} = -2$ . به عبارت دیگر با آنکه اعداد منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول بالا دیده می‌شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر ۴... و ریشه سوم عدد  $-\frac{8}{27}$  عدد  $-\frac{2}{3}$ ... است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \sqrt[3]{-27} = -3$$

به طور کلی اگر  $b$  یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با  $\sqrt[3]{b}$  نمایش می‌دهیم  
هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

## کار در کلاس

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\sqrt{81} = 9 \quad \sqrt{49} = 7 \quad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 \quad \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5} \quad \sqrt[3]{64} = 4 \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = -\frac{2}{10} \quad \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$$

۲- به کمک رابطه  $\sqrt{x^2} = |x|$  که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6 \quad \sqrt{8^2} = |8| = 8 \quad \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| \quad \sqrt{(2-9)^2} = |2-9| = 9-2 = 7 \quad \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \left|1-\frac{1}{3}\right| = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۳- حاصل عبارت  $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$  را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید. یکی از حالات

حل شده است.

ا)  $x$  و  $y$  هر دو مثبت هستند ( $x > 0, y > 0$ ).  
 $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x + y$

ب)  $x$  مثبت و  $y$  منفی است ( $x > 0, y < 0$ ).  
 $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x - y$

ج)  $x$  منفی و  $y$  مثبت است ( $x < 0, y > 0$ ).  
 $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x + y$

د)  $x$  و  $y$  هر دو منفی هستند ( $x < 0, y < 0$ ).  
 $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x - y$

## ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت  $a$  و  $b$  رابطه‌های زیر را یاد گرفتید :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشه سوم برقرارند :

### فعالیت

با توجه به عددهای داده شده  $a$  و  $b$  مانند نمونه جدول زیر را کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر جدول چه حدسی می‌زنید؟

$a$	$\sqrt[3]{a}$	$b$	$\sqrt[3]{b}$	$ab$	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
۸	۲	۱۲۵	۵	۱۰۰۰	۱۰	$2 \times 5 = 10$
۲۷	۳	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{3}{2}$	$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
-۸	-۲	۲۷	۳	-۲۱۶	-۶	$-2 \times 3 = -6$

به‌طور کلی برای هر دو عدد  $a$  و  $b$  داریم :  $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$  ، همچنین اگر

$b \neq 0$  داریم :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

ایران توشه  
توشه‌ای برای موفقیت

### کار در کلاس

۱- آیا رابطه مقابل درست است؟ نه‌ضرب

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8+27}$$

استدلال زیر برای نادرستی رابطه بالا را بررسی کنید و آن را توضیح دهید :

«رابطه برقرار نیست. زیرا سمت چپ تساوی مساوی ۵ است در حالی که سمت راست کمتر

از ۴ (یعنی  $\sqrt[3]{64}$  است.)»

۲- در تساوی های زیر جاهای خالی را کامل کنید :

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = 4 \quad \quad \quad 3\sqrt{-2} \times 5\sqrt[3]{4} = 15\sqrt[3]{-8} = 5 \times (-2) = -10$$

$$\sqrt{128} = \sqrt{64} \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2} \quad \quad \quad \sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8} \quad \quad \quad \frac{\sqrt{-54}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-54}{2}} = \sqrt{-27} = -3$$

### تمرین

۱- ریشه های دوم عددهای زیر را بیابید :

$$\begin{aligned} 144 &\xrightarrow{\sqrt{\quad}} 12, -12 \\ 12 &\xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{12}, -\sqrt{12} \\ 18 &\xrightarrow{\sqrt{\quad}} -\sqrt{18}, \sqrt{18} \end{aligned}$$

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید :

$$\begin{aligned} &\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18 \\ &\xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} \sqrt[3]{10}, -\frac{1}{216}, -5, 216, 72, 4 \end{aligned}$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$$\begin{aligned} \sqrt{(-1)^2} = -1 &\quad \times \quad \sqrt[3]{(-1)^3} = -1 &\quad \checkmark \quad \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5 &\quad \checkmark \quad \sqrt[3]{(-5)^3} = -5 &\quad \checkmark \\ -\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16} &\quad \checkmark \quad \sqrt{1/44} = 1/2 &\quad \checkmark \quad (\sqrt{-1})^2 = 1 &\quad \times \quad \sqrt{-64} = -4 &\quad \checkmark \end{aligned}$$

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

$$\begin{aligned} \sqrt{125} \times \sqrt{36} &\quad \sqrt{-1} \times \sqrt{81} &\quad \sqrt{\frac{81}{3}} \\ &\quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ &\quad 3 \quad \quad 30 \quad \quad -9 \end{aligned}$$

$$\sqrt{-25} \times \sqrt{5} = \sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$$



۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای  $a$  قرار دهیم، نامساوی زیر درست باشد:

$$\sqrt[3]{-8} < \sqrt{4}$$

$$\sqrt[3]{1} < \sqrt{4}$$

$$\sqrt[3]{-1} < \sqrt{4}$$

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4}$$

$a < 8$  اعداد صحیح کوچکتر از ۸

$$\sqrt{(-3)^2} = 3$$

۶- رابطه  $\sqrt{(-x)^2} = x$  به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید. اگر  $x > 0$  یا  $x < 0$

۷- اگر مساحت کل یک مکعب  $96a^2$  باشد، حجم آن را بر حسب  $a$  به دست آورید. درصفت بعد

۸- اگر  $x > 0$  و  $y < 0$  باشد، حاصل  $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$  را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید. درصفت بعد

۹- عبارت های زیر را مانند نمونه ساده کنید:  $\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$

$$\sqrt{150}$$

,

$$\sqrt{80}$$

,

$$\sqrt{24}$$

,

$$\sqrt[3]{125^2}$$

۱۰- آیا تساوی های زیر درست است؟ بله

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید:

$$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} =$$

$$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{5}} =$$

۱۱- حاصل را به دست آورید :

پاسخ :

$$\textcircled{11} \quad \sqrt[3]{2^3 \times 2} \times \sqrt[3]{2^3} = 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = 12 \sqrt[3]{2} = 12 \times 2 = 24$$

$$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{3^3 \times 2} \times \sqrt[3]{2^3 \times 3 \times 5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \times 3^3 \times 5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{(2 \times 3)^3 \times 5}}{\sqrt[3]{5}} = 4$$

$$\sqrt{S} = 96a^2 \Rightarrow \sqrt{S} = 96a^2 \div 4 = 14a^2 = (4a)^2 \quad \boxed{\sqrt{}}$$

$$\text{انرژی مضاعف} = \sqrt{(4a)^2} = 4a$$

$$\sqrt{=} = 4a \times 4a \times 4a = (4a)^3 = 64a^3$$

$$\boxed{\wedge} \quad \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = |x| - |y| = x - (-y) = x + y$$

$$\textcircled{9} \quad \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{2 \times 3 \times 5} = \sqrt[3]{5^3} \times \sqrt[3]{4} = 5\sqrt[3]{4}$$

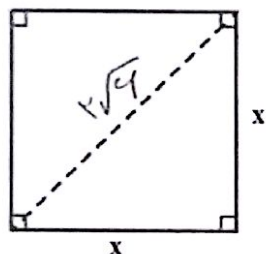
$$\sqrt{10} = \sqrt{2^2 \times 5} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{5} = 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 3} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{(5^2)^3} = \sqrt[3]{25^3} = 25$$

## فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن  $2\sqrt{6}$  متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید:



حل: به کمک رابطه فیثاغورس داریم:  $x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$

در نتیجه:  $2x^2 = 24$  و از آنجا  $x^2 = 12$

بنابراین مساحت... این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که محیط... مربع  $\sqrt{12}$  متر یا  $2\sqrt{3}$

متر است.

همچنین: متر  $8\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \dots$  محیط... مربع

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشند می‌توان آنها

را با هم جمع یا تفریق کرد. مثلاً دو عبارت  $3\sqrt{2}$  و  $7\sqrt{2}$  دارای قسمت‌های رادیکالی

یکسان هستند و داریم:  $7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$  و  $7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

همچنین:

$$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات  $2\sqrt{5}$  و  $\sqrt[3]{2}$  یا عبارات  $7\sqrt{2}$  و  $\sqrt[3]{2}$  یکسان نیستند.

## کار در کلاس

مانند نمونه‌ها حاصل جمع هر ستون را در سطر آخر بنویسید:

$3\sqrt{7}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$3\sqrt{a}$	$\sqrt{xy}$	$\sqrt{2}$
$-4\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{b}$	$2\sqrt{x}$	$\sqrt{3}$
$8\sqrt{7}$	$8\sqrt[3]{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{10}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{a}$	$-7\sqrt{x}$	$\sqrt{5}$
$2\sqrt{5}$	$-5\sqrt[3]{2}$	$-2\sqrt{10}$	$-7\sqrt{b}$	$\sqrt{xy}$	$6\sqrt{2}$
$11\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$	$\frac{5\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{10}$	$\frac{14}{5}\sqrt{a} - 5\sqrt{b}$	$2\sqrt{xy} - 5\sqrt{x}$	$7\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$



حاصل عبارات زیر را ساده کنید.  
 راه حل ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید. [اگر روش دیگری می دانید آن را در کلاس مطرح کنید.]

آ)  $\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$

ابتدا حاصل هریک از رادیکال ها را به دست می آوریم:  
 (جاهای خالی را کامل کنید.)

$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

بنابراین:

ب)  $\sqrt{50} + \sqrt{24} + \sqrt{81} = \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{2^3 \times 3} + \sqrt{3^4}$   
 $= 5\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 3^2 = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 9$

مثال ها: حاصل  $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$  را به روش به دست آورده ایم. آنها را با هم مقایسه کنید:

اول روش  $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{48 \times 3} + \sqrt{48 \times 2} = \sqrt{144} + \sqrt{96} = 12 + 4\sqrt{6}$

دوم روش  $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{4^2 \times 3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12 + 4\sqrt{6}$

ج) حاصل  $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3}$  را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟) چون هر عدد تقسیم بر خودش حاصل یک می شود

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

حاصل عبارت های زیر را ساده کنید : فضای کافی در نظر گرفته شده

$$۱) \sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128}$$

$$۴) \sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}}$$

$$۲) \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$$

$$۵) (\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$۳) 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{128}$$

### گویا کردن مخرج کسره های رادیکالی

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا ساده کردن محاسبات لازم است که مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم. به طور مثال برای محاسبه  $\frac{20}{\sqrt{2}}$  باید عدد ۲۰ را بر  $\sqrt{2}$  تقسیم کنیم در حالی که می توانیم مخرج کسر را به صورت زیر گویا کنیم :

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

### فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسره های زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است حل را کامل کنید :

$$ا) \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$ب) \frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

$$ج) \frac{4}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$د) \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{22}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{14}}{2} = \frac{\sqrt[3]{14}}{2}$$

$$ه) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2x}}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$و) \frac{5}{\sqrt[3]{z^2}} \times \frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z}} = \frac{5\sqrt[3]{z}}{z} \quad (z \neq 0)$$

مخرج کسرها را زیر را گویا کنید:

$$\text{ا) } \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{\sqrt{32}} = \frac{2}{\sqrt{4 \times 8}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{ج) } \frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{12\sqrt{4}}{6} = 2\sqrt{4}$$

$$\text{د) } \frac{5}{\sqrt[3]{3x}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2x^2}}{\sqrt[3]{3^2x^2}} = \frac{5\sqrt[3]{9x^2}}{3x} \quad (x \neq 0)$$

تمرین

جواب در صفحه بعد

۱- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید:

$$\text{ا) } 2\sqrt{50} \times \sqrt{32} \times 2\sqrt{72}$$

$$\text{ج) } \sqrt[3]{27^2}$$

$$\text{ه) } (\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$$

$$\text{ب) } \sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$$

$$\text{د) } \sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$$

$$\text{و) } 2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$$

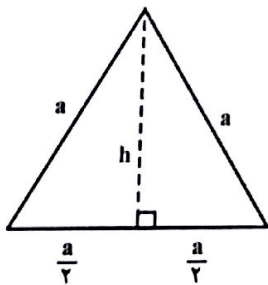
$$2\sqrt{x^2} - x$$

۲- اگر  $x < 0$  حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

۳- محیط و مساحت مربعی به طول  $3\sqrt{5}$  سانتی متر را به دست

کلمه طول این فرست

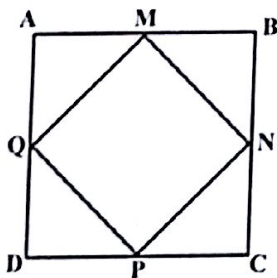
آورید.



۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع 'a' را نشان

می دهد. اندازه ارتفاع 'h' را بر حسب 'a' به دست آورید. سپس مساحت

آن را بر حسب 'a' بنویسید.



۷۷

۵- نقاط M, N, P, Q وسط های اضلاع مربع ABCD

هستند. اگر مساحت مربع ABCD، ۱۰۰ متر مربع باشد، مساحت مربع

MNPQ چقدر است؟

$$\begin{cases} AB = \sqrt{100} = 10 \\ AM = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} AM = 5 \rightarrow MQ = AM + AQ \\ AQ = 5 \end{cases}$$

$$MQ^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \rightarrow MQ = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$P = 20\sqrt{2}$$



$$۱) ۲\sqrt{۵ \times ۲} \times \sqrt{۴ \times ۲} \times ۲\sqrt{۴ \times ۲} = ۲ \times ۵\sqrt{۲} \times ۴\sqrt{۲} \times ۲ \times ۴\sqrt{۲} =$$

۱

$$\underbrace{۲ \times ۵ \times ۴ \times ۲ \times ۴}_{= ۴۸۰} \times ۲ \times \sqrt{۲} = ۹۶۰\sqrt{۲}$$

$$ب) \sqrt{۲ \times ۲} + \sqrt{۸ \times ۲} - \sqrt{۵ \times ۲} = ۲\sqrt{۲} + ۸\sqrt{۲} - ۵\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$$

$$ج) \sqrt[۳]{(۳^۳)^۲} = \sqrt[۳]{(۳^۲)^۳} = \sqrt[۳]{۹^۳} = ۹ \quad \text{و} \quad \sqrt[۳]{۳^۴} = ۳^۲$$

$$د) \sqrt[۳]{\frac{-۳^۳}{۳^۳}} = -\frac{۳}{۳}$$

$$ه) \sqrt{۲} \times \sqrt{۱۰} + \sqrt{۲} \times \sqrt{۲} - \sqrt{۵} \times \sqrt{۱۰} - \sqrt{۵} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۲۰} + ۲ - \sqrt{۵۰} - \sqrt{۱۰} =$$

$$= \sqrt{۲ \times ۵} + ۲ - \sqrt{۵ \times ۲} - \sqrt{۱۰} = ۲\sqrt{۵} + ۲ - ۵\sqrt{۲} - \sqrt{۱۰}$$

$$۹) ۲\sqrt{۴ \times ۳} - ۳\sqrt{۳ \times ۳} = ۲ \times ۴\sqrt{۳} - ۳ \times ۳\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳} - ۹\sqrt{۳} = -\sqrt{۳}$$

$$۲) ۲\sqrt{x^۲} - x = ۲|x| - x = -۲x - x = -۳x$$

$$۲\sqrt{(-۵)^۲} - (-۵) = ۲|-۵| + ۵ = ۲ \times ۵ + ۵ = ۳ \times ۵ = -۳ \times (-۵)$$

$$۳) D = ۴ \times ۳\sqrt{۵} = ۱۲\sqrt{۵} \text{ cm}$$

$$S = (۳\sqrt{۵})^۲ = ۳^۲ \times \sqrt{۵}^۲ = ۹ \times ۵ = ۴۵ \text{ cm}^۲$$

$$۴) \text{رابطه فیثاغورس} \quad a^۲ = h^۲ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ \rightarrow h^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴} = \frac{۳}{۴}a^۲$$

$$\rightarrow h = \sqrt{\frac{۳}{۴}a^۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a, \quad S = \frac{h \times a}{۲} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a \times a}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

۶- در جاهای خالی علامت  $<$ ،  $=$  یا  $>$  بگذارید.

$$6, 2 = 2, 2 + 2 = \sqrt{5} + \sqrt{4} \quad \sqrt{5+4} = 2 \quad 4 \quad \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} \ominus \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \quad \sqrt{4+9} \approx \sqrt{3^2+4^2} \ominus 5$$

۷- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید:

$$\text{آ) } \sqrt{100} = 10 \quad \text{ب) } 2\sqrt{900} = 6 \quad \text{ج) } \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \quad \text{د) } \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\text{ه) } \frac{2^{-5}}{2^{-8}} = \sqrt{64} = 8 \quad \text{و) } \frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3 \quad \text{ز) } \frac{m^6 \times m^{-2}}{m^3} = m \quad \text{ح) } 9\sqrt{-27} = \frac{12^3}{(-4)^3} \quad \text{چالش برانگیز}$$

۸- مخارج کسره‌های زیر را گویا کنید:

$$\text{آ) } \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \quad \text{ب) } \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} \quad \text{ج) } \frac{2}{\sqrt{v}} \times \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{v}}{v}$$

$$\text{ب) } = \frac{2\sqrt[3]{a}}{a}$$

۹- در مورد تساوی  $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2}$  کدام گزاره درست است. توضیح دهید.

آ) تساوی همیشه درست است. ب) تساوی همیشه نادرست است. ج) اگر  $x \geq 0$  تساوی درست است.

است.

فناوری نانو مجموعه‌ای از فرایندهای تفکیک، ادغام و تشکیل مواد در حد یک اتم یا مولکول است. یک نانومتر برابر  $10^{-9}$  متر یعنی صدهزار برابر کوچک‌تر از قطر موی سر انسان است. کشور عزیز ما ایران در بین ۱۰ کشور برتر در حوزه فناوری نانو قرار دارد.





## عبارت‌های جبری

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

	a	b	c
a	$a^2$	$ab$	$ac$
b	$ab$	$b^2$	$bc$
c	$ac$	$bc$	$c^2$

استفاده از شکل‌های هندسی برای اثبات تساوی‌های جبری سابقه‌ای دیرینه دارد. ریاضی‌دانان دوره اسلامی - ایرانی از پیشگامان این کار بوده‌اند.



## فعالیت

هر عبارت را، که به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، یک جمله‌ای می‌نامیم.  
عبارت‌های زیر همگی یک جمله‌ای هستند.

$$7, x, 5x^{10}, -\sqrt{3}a^2x^2z, \frac{1}{5}xy, \pi x^2, 4z, -\frac{2}{7}$$

و عبارت‌های زیر یک جمله‌ای نیستند.

$$\frac{1}{x}, 3^x, 2\sqrt{x}, |x|, 2x^2+2x, \sqrt[3]{y}, 1+x$$

هرگاه یک جمله‌ای‌ها دارای عبارت‌های حرفی یکسان باشند، به آنها یک جمله‌ای‌های متشابه گفته می‌شود؛ به عنوان مثال یک جمله‌ای‌های  $4x^2y$  و  $\frac{7}{4}x^2y$  و  $-3x^2y$  متشابه‌اند اما یک جمله‌ای‌های  $3x^2$  و  $3x$  متشابه نیستند.

۱- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید:

$$۱) 2(-4x \times 7x^2) = 2(-28x^3) = -56x^3$$

$$۲) \left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = \frac{8}{27}x^6y^3$$

$$۳) (-3x^3)^2 \left(\frac{1}{3}x^2\right)^3 = 9x^6 \times \frac{1}{27}x^6 = \frac{1}{3}x^{12}$$

$$۴) \left(\frac{1}{2}a^2b\right)(ab)\left(\frac{-2}{5}a^2c^5\right) = \frac{-1}{5}a^5b^2c^5$$

$$۵) 2(5xy^2)^2(-2x^5y^2) = (2 \times 25x^2y^4)(-2x^5y^2) = -100x^7y^6$$

$$۶) (2x^2y)(3x^2y^2) + xy^2(-5x^2y) = 6x^4y^3 - 5x^3y^3 = x^3y^3$$

در یک جمله‌ای  $5a^2x^2y$ ، توان متغیر  $a$  برابر با ۲ است؛ بنابراین درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیر  $a$ ، برابر با ۲ است؛ به همین ترتیب درجه نسبت به  $x$ ، ۳ و درجه نسبت به  $y$ ، ۱ است. درجه نسبت به دو متغیر  $x$  و  $y$  را برابر با  $1+3=4$  تعریف می‌کنیم.

۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

درجه نسبت به x و y	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x	متغیرها	یک جمله ای
$2+4=6$	۴	۲	$a, x, y$	$\sqrt{3}a^2x^2y^4$
$2+2=4$	۲	۲	$x, y, z$	$5x^2y^2z^2$
$3+0=3$	$4+0=4$	۳	$x, u$	$-12x^3u$
۰	۰	۰	—	$\frac{3}{5}$

یک جمله ای های  $3x^2y^2$  و  $-5x^2y^2$  را که متشابه نیستند، یک جمله ای های غیر متشابه می گوئیم. چنانچه تعدادی یک جمله ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله ای است. چند جمله ای می تواند یک جمله ای یا جمع جبری چند یک جمله ای غیر متشابه باشد؛ مانند:

$$4x^2 - 4x + 1, \quad x^2 - 2x, \quad \frac{2}{3}ax^2y - \frac{3}{4}axy^2 - axy, \quad 3x^2$$

در هر چند جمله ای، درجه نسبت به یک متغیر را برابر با بزرگ ترین درجه نسبت به آن متغیر تعریف می کنیم؛ برای مثال در چند جمله ای  $-2xy^2 + x^2y - 1$ ، درجه نسبت به  $x$  برابر با ۲ و درجه نسبت به  $y$  برابر با ۳ است. همچنین درجه نسبت به چند متغیر را، بزرگ ترین درجه یک جمله ای های آن نسبت به متغیرهای مورد نظر تعریف می کنیم. در این مثال درجه نسبت به  $x$  و  $y$  برابر با ۴ است. معمولاً در چند جمله ای ها، جملات را نسبت به توان های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می کنند.

۳- چند جمله ای های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر  $x$  مرتب کنید:

الف)  $3x^2 + 5 - 2x + 2x^2 = 2x^2 + 3x^2 - 2x + 5$

ب)  $-2bxy^2 + ax^2y - 4bx^2y^2$

ج)  $\frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy^3 + 3x^2y - 4 = 3x^2y + \frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy^3 - 4$

$= -4bx^2y^2 + ax^2y - 2bx^2y^2$

کار در کلاس

عبارت های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان های نزولی  $x$  مرتب کنید.

الف)  $-5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax)] =$

$$-5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - 3a^2 + 8ax] = -5a^2 - 3ax + x^2 - 4a^2 - 5ax - 3a^2 - 8ax + 3a^2 - 8ax = x^2 - 14ax - 4a^2$$

$$5x^5 + 4x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x$$

$$\text{ب) } (4x+5x^4)(x^2-x+1) = 4x^3 - 4x^2 + 4x + 5x^6 - 5x^5 + 5x^4 =$$

$$\text{ج) } (x+x^4)(x^2+x^4+1) = x^3 + x^5 + x^6 + x^3 + x^5 + x =$$

$$\text{د) } (x^2-2x+1)(x^2+x^2-2) = x^4 - x^2 - x^3 - x^2 + 4x - 2$$

## فعالیت

۱- به ازای مقادیر داده شده برای  $x$ ، جدول زیر را کامل کنید :

$x$	$x^2$	$6x$	$x^2+6x+9$	$(x+3)^2$
-۲	۴	-۱۲	۴-۱۲+۹=۱	$(-۲+۳)^2=۱$
۰	۰	۰	۹	۹
۵	۲۵	۳۰	۲۵+۳۰+۹	۴۹
$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۹}{۴}$	$۴۸ \frac{۳}{۲} = ۹$	$\frac{۹}{۴} + ۹ + ۹ = \frac{۸۱}{۴}$	$(\frac{۳}{۲} + ۳)^2 = \frac{۸۱}{۴}$

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟  
حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر  $x$  ادامه دهید.

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟ دو ستون آخر با هم برابرند.

حاصل عبارت جبری  $(x+3)^2$  را به دست آورید و آن را با عبارت جبری  $x^2+6x+9$  مقایسه کنید.

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشد که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشد، برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

بنابراین برابری  $(x+3)^2 = x^2+6x+9$  یک اتحاد است.

برابری  $3x-3 = x+1$  را در نظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای  $x=2$ ، به دست آورید.

$$3 \times 2 - 3 = 2 + 1$$

آیا این برابری یک اتحاد است؟ برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای  $x$  بررسی کنید. نتیجه همان طور که می‌دانید به چنین برابری‌هایی معادله گفته می‌شود.

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

$$\text{الف) } (a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$$



$$c) (a+b)^r = (a+b)(a+b) = a^r + ab + ab + b^r = a^r + r ab + b^r$$

سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

- جمله دوم سمت راست برابری یعنی  $x = 20$  چه رابطه‌ای با ۲ و ۵۰ دارد؟ در هر حاصل ضرب آن را به دست

– جمله سوم سمت راست برابری یعنی <sup>۴</sup> چه رابطه‌ای با <sup>۲</sup> دارد؟ مربع <sup>۲</sup>

عبارت جبری  $5x+2$  دو جمله‌ای و  $(5x+2)^2$  را مربع دو جمله‌ای می‌نامیم و برای سرعت بخشیدن

به عملیات جبری می‌توان مربع دو جمله‌ای را به صورت زیر محاسبه کرد:

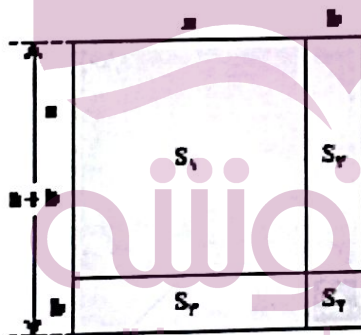
$$(\Delta x + 2)^2 = (\Delta x)^2 + 2 \times \Delta x \times 2 + 2^2$$

مربع جمله دوم      دو برابر حاصل ضرب دو جمله      مربع جمله دوم      مربع جمله اول      مربع جمله دوم

برای هر دو عدد مثبت  $a$  و  $b$ ، به کمک مساحت‌های مشخص شده در شکل زیر، درستی اتحاد

$$(a+b)' = a' + \neg ab + b'$$

مقابل را نشان دهد.



$$(a+b)^2 = s_1 + 2s_r + s_r$$

$$= a^r + r a^{r-1} b + b^r$$

۴- مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\text{الف) } (5x-2)' = (5x-2)(5x-2) = 25x^2 - 10x - 10x + 4 = 25x^2 - 20x + 4$$

ب)  $(x - 5x)^2 = (x - 5x)(x - 5x) = (-4x)(-4x) = 16x^2$

$$g) (a-b)' = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ارتباط بین جملات به دست آمده در طرف راست تساوی های بالا و جملات عبارت داده شده

در سمت چپ آنها را بیان کنید.

اتحاد مربع دو جمله‌ای :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

برای هر دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$  داریم :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

## کار در کلاس

۱- مربع دو جمله‌ای‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید.

الف)  $(2x+1)^2 = 4x^2 + 2x + 1$       ب)  $(4a+3b)^2 = 16a^2 + 24ab + 9b^2$

ج)  $(x^2 - \frac{1}{2})^2 = x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$       د)  $(2xy - \frac{1}{2}x^2)^2 = 4x^2y^2 - 2x^3y + \frac{1}{4}x^4$

هـ)  $(\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2 = 2 + 6\sqrt{6} + 27$       و)  $(5 - 2\sqrt{2})^2 = 25 - 20\sqrt{2} + 8 = 33 - 20\sqrt{2}$

۲- جاهای خالی را با توجه به نمونه پُر کنید.

الف)  $(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

مربع جمله دوم      مربع جمله اول      حاصل ضرب جمله اول و دوم      مربع جمله دوم

مربع جمله اول  $= 4a^2 = (2a)^2 \Rightarrow 2a =$  جمله اول

مربع جمله دوم  $= 12ab = 2(2a)(3b) \Rightarrow 3b =$  جمله دوم

مربع جمله اول  $= 4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a+3b)^2$

در نتیجه داریم :

الف)  $(1+b)^2 = 1 + 2b + b^2$       ب)  $(xy - \frac{1}{2})^2 = x^2y^2 - xy + \frac{1}{4}$

ج)  $(x^2 - \frac{1}{x})^2 = x^4 - 2 + \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$       د)  $(4x - 2y)^2 = 16x^2 - 16xy + 4y^2$

## فعالیت

در سال گذشته خاصیت بخشی عمل ضرب نسبت به عمل جمع را در چند جمله‌ای‌ها مطالعه کرده‌اید.

حاصل ضرب  $\rightarrow$   
 $a(b+c) = ab+ac$

اکنون اگر این برابری را مانند زیر به صورت حاصل ضرب دو عبارت بنویسیم، دو جمله‌ای  $ab+ac$  را به حاصل ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده‌ایم:

تجزیه  
 $\xrightarrow{\quad}$   
 $ab+ac=a(b+c)$   
 $\uparrow \quad \uparrow$   
 (ب.م.م.) بزرگ‌ترین مقسوم علیه (عامل) مشترک

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید:

الف)  $8x^2+12x=4x \cdot 2x+4x \cdot 3$

$\uparrow \quad \uparrow$   
 $=4x(2x+3)$   
 (ب.م.م.)  $=4x$

(با توجه به خاصیت پخش)

ب)  $6a^2-18a^2=6a^2(a^2-3)$

ج)  $7x^4-14x^3+21x^2=7x^2(x^2-2x+3)$

د)  $5x^2y-10xy^2+15x^2y=5x^2y(x-2y+3)$

$5xy \cdot x - 5xy \cdot 2y + 5xy \cdot 3x = 5xy(x-2y+3x)$

کاردرکلاس

اگر سه جمله‌ای  $a^2+2ab+b^2$  را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت  $(a+b)^2$  بنویسیم درواقع عبارت را به عامل‌های ضرب تجزیه کرده‌ایم؛ زیرا:

تجزیه  
 $\xrightarrow{\quad}$   
 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

با توجه به نمونه زیر توضیح دهید که چگونه در سه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

الف)  $x^2+6x+9=(x+3)^2=(x+3)(x+3)$

مربع کامل  $(x+3)^2$  مربع کامل  $2(x+3)$

ب)  $x^2-4x+4=(x-2)^2=(x-2)(x-2)$

ج)  $n^2-10n^2+25=(n^2-5)^2=(n^2-5)(n^2-5)$

د)  $18ax^2+24axy+18ay^2=2a(9x^2+12xy+9y^2)=2a(3x+3y)^2=2a(3x+3y)(3x+3y)$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 (ب.م.م.)  $=2a$



سوال ۱

$$① ۲am^2 \times (-1m^3) - \frac{1}{k} m^2 \times (-1m^3) = -۲۰۰m^5 + ۲m^5 = -۹۱m^5$$

$$② \underline{۷a^3} - \underline{۴b^3} + \underline{۵c^3} - \underline{۵a^3} + \underline{۹b^3} + \underline{۱۱c^3} = ۲a^3 + ۵b^3 + ۱۶c^3$$

$$③ x^{2m} - ۲x^m + ۱$$

$$④ x - [y - x - y + ۱] = x + x - ۱ = ۲x - ۱$$

$$h^2 = 9m^2n^2 - m^2n^2 = ۸m^2n^2$$

$$h = m^2n\sqrt{۸}$$

ارتفاع دوزنقه

سوال ۲

$$① \underline{صیغه} = ۳m^2n + ۲m^2n + ۵m^2n + ۳m^2n + ۳m^2n + ۲m^2n = ۱۸m^2n$$

$$\text{مساحت} = ۳m^2n \times ۲m^2n + \frac{m^2n\sqrt{۸}(۳m^2n + ۵m^2n)}{۲} = ۶m^4n^2 + ۴m^4n^2\sqrt{۸}$$

②

ابتدا با استفاده از رابطه فیثاغورس ضلع مثلث را می‌یابیم

$$۲۵x^2y^2 = ۹x^2y^2 + (\text{ضلع})^2$$

$$(\text{ضلع مثلث})^2 = ۲۵x^2y^2 - ۹x^2y^2 = ۱۶x^2y^2 \rightarrow \text{ضلع مثلث} = ۴xy$$

$$\underline{صیغه} = ۳xy + ۲ \times ۴xy + ۴xy + ۵xy = ۲۰xy$$

$$\text{مساحت} = ۳xy \times ۴xy + ۳xy \times ۴xy \times \frac{۱}{۲} = ۴x^2y^2 + ۶x^2y^2 = ۱۰x^2y^2$$

سوال ۳

$$۱) ۲۵y^2 - ۳۰xy + ۹x^2$$

$$۲) ۹a^2 + ۴a + a^2$$

$$۳) ۲۴x^2 - \frac{۱۷}{۳}x + \frac{۱}{۹}$$

$$۴) (۲,۷ + ۳,۴)^2 = ۶^2 = ۳۶$$

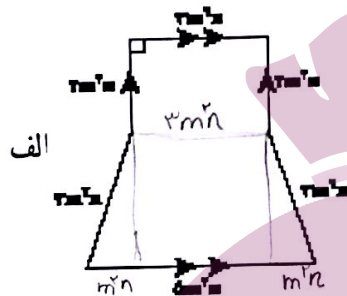
$$\text{طرف دوم} - \text{الطرف اول} = x^2 + ۲xy + y^2 - x^2 + ۲xy - y^2 = ۴xy$$

$$\text{طرف اول} = a^2 + ۲ + \frac{۱}{a^2} - ۲ = a^2 + \frac{۱}{a^2}$$

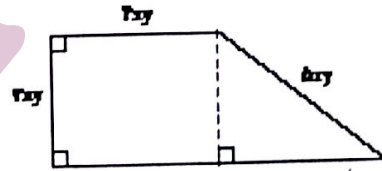
۱- عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

الف)  $(-5m)^2(-2m)^3 - (\frac{1}{4}m)^2(-2m)^3$       ب)  $7a^2 - 4b^2 + 5c^2 - (a^2 - 9b^2 - 11c^2)$   
ج)  $(x^m - 1)(x^m - 1)$       د)  $x - [(y-x) - (y-1)]$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



ب)



۳- طرف دیگر عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف)  $(5y - 3x)^2 =$       ب)  $(-3a^2 - a)^2 =$   
ج)  $(8x - \frac{1}{3})^2 =$       د)  $(\frac{2}{7})^2 + 2(\frac{2}{7})(\frac{3}{7}) + (\frac{3}{7})^2 =$

۴- به کمک اتحاد مربع دو جمله ای، درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف)  $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$       ب)  $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \quad (a \neq 0)$

۵- عبارت های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف)  $2x^2 + 8x^2 + 8x = 2x(x^2 + 2x + 4)$       ب)  $3a^2b - 12ab^2 + a^2b^2 = ab(3a^2 - 12b + ab)$   
ج)  $a(x+1) + b(x+1) = (x+1)(a+b)$       د)  $a^2 - 2a + 1 = a(a^2 - 2a + 1) = a(a-1)^2$   
ه)  $x^2y^2 - 4xy + 4 = (xy-2)^2$       و)  $25x^2 + 30x^2 + 9x^2 = x^2(25x + 30x + 9)$

۶- با تبدیل b به -b در اتحاد  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$$\frac{(a+(-b))^2}{(a-b)^2} = a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ارتفاع  $= 9m^2n^2 - m^2n^2$   
 $= 8m^2n^2$   
ارتفاع  $= \sqrt{8} mn$

در صفحه قبل پاسخ داده شده

## فعالیت

۱- حاصل عبارت زیر را به دو روش انجام داده ایم؛ آنها را کامل کنید.

روش اول درمقدار  $(a+b+c)^2$  :  $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + bc + c^2 =$   
 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

روش دوم :  $((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 =$   
 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

به کمک نتیجه این فعالیت، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$$

۲- با استفاده از ضرب عبارات های جبری، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج

این اتحاد را به صورت کلامی بیان کنید. مربع جمله اول منهای مربع جمله دوم اگر  $a$  و  $b$  مثبت و  $b < a$  باشد به کمک شکل های زیر درستی اتحاد  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  را

نتیجه ب

قسمت ها مشور خورده از شکل ۱

را برداریم و به سمت راست آن

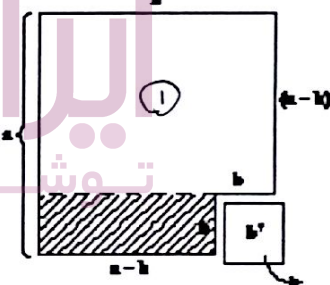
اضافه می کنیم تا شکل ۲ حاصل شود.

مساحت شکل ۲ را بدست می آوریم.

که مساحت هر دو برابر است.



$$s_r = (a-b)(a+b)$$



$$s_1 = a^2 - b^2$$

## کاردر کلاس

۱- تساوی های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید.

$$۱) (1+a)(1-a) = 1 - \frac{a^2}{}$$

$$۳) (t + \frac{3}{t})(t - \frac{3}{t}) = t^2 - ۹$$

$$۲) (2a+5)(2a-5) = 4a^2 - ۲۵$$

$$۴) (a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$



۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورید.

$$۱) (10-x)(x+10) = (10-x)(10+x) = 100 - x^2$$

$$۲) (-y-2z)(-2z+y) = (-2z-y)(-2z+y) = 4z^2 - y^2$$

$$۳) (-7y+t)(t+7y) = (t-7y)(t+7y) = t^2 - 49y^2$$

$$۴) (-4y-2z)(2z-4y) = (-4y-2z)(-4y+2z) = 16y^2 - 4z^2$$

$$۵) (x-2y+5)(x+2y-5) = [x-(2y-5)][x+(2y-5)] = x^2 - (2y-5)^2 = x^2 - (4y^2 - 20y + 25) =$$

$$x^2 - 4y^2 + 20y - 25$$

### فعالیت

اتحاد مزدوج در تجزیه عبارت‌های جبری نیز استفاده می‌شود.

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

با توجه به این تساوی، جای خالی را پر کنید.

$$۱) x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$۲) 4y^2 - \frac{1}{4}z^2 = \left(2y + \frac{1}{2}z\right)\left(2y - \frac{1}{2}z\right)$$

$$۳) (2x+1)^2 - y^2 = [(2x+1) - y][(2x+1) + y]$$

$$۴) 1 - (3a+z)^2 = [1 - (3a+z)][1 + (3a+z)]$$

$$= (1-3a-z)(1+3a+z)$$

$$۵) (2x+1)^2 - (3x+4)^2 = [(2x+1) - (3x+4)][(2x+1) + (3x+4)]$$

$$= (-x-3)(5x+5)$$

$$۶) x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$= (x+y)(x+y)(x-y)$$

### کاردر کلاس

۱- محسن قصد دارد عبارت جبری زیر را تجزیه کند.

$$4x^2 - (7-3y)^2$$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می‌افتد و این عبارت را به کمک این اتحاد به صورت زیر تجزیه می‌کند.

$$(2x-7+3y)(2x+7-3y)$$

$$A = 2m, B = 7 - 3y \Rightarrow (2m - (7 - 3y))(2m + (7 - 3y))$$

به نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، A و B را چگونه انتخاب کرده است؟  
۲- استفاده از اتحادها، می تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را به راحتی امکان پذیر کند.

به کمک اتحادها، تساوی های زیر را کامل کنید.

$$98 \times 102 = (100 - 2) \times (100 + 2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$$

$$497 \times 503 = (500 - 3) \times (500 + 3) = 500^2 - 3^2 = 250000 - 9 = 249991$$

$$(1001)^2 = (1000 + 1)^2 = 1000^2 + 2 \times 1000 + 1 = 1000000 + 2000 + 1 = 1002001$$

### فعالیت

۱- به تساوی های زیر دقت کنید. توضیح دهید عبارت سمت راست چگونه به دست آمده است. از ضرب دو عبارت بین جواب و عبارت سمت چپ چه ارتباطی وجود دارد؟

الف  $(x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$

حاصل ضرب غیر مشترکها  $2 \times 5$  ←  
←  $2+5$  حاصل جمع غیر مشترکها  $5x$  و  $2x$

ب  $(x+9)(x-4) = x^2 + 9x - 4x - 36 = x^2 + 5x - 36$

با توجه به عبارات بالا تساوی زیر را کامل کنید.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + \underline{a \cdot b}$$

اتحاد به دست آمده را اتحاد جمله مشترک می نامند.

۲- با توجه به فعالیت ۱ اگر طرف راست عبارت بالا را داشته باشیم و بخواهیم آن را به

حاصل ضرب دو عبارت تجزیه کنیم، اعداد a و b را چگونه تشخیص دهیم؟

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

الف  $x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$

ب  $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

ج  $y^2 + y - 6 = (y+3)(y-2)$

د  $y^2 - y - 6 = (y+2)(y-3)$

ه  $y^2 + 5y + 6 = (y+2)(y+3)$

۳- تجزیه عبارت  $x^2 + 10x - 24$  را چهار نفر از دانش آموزان به کمک اتحاد جمله مشترک به

چهار صورت زیر انجام داده اند. کدام یک درست و کدام یک نادرست است؛ چرا؟

جواب نفر اول نادرست حاصل جمع  $10x$  غلط بود.  $(x-4)(x+6)$

جواب نفر سوم درست  $(x+12)(x-2)$

جواب نفر دوم نادرست حاصل ضرب  $24$  غلط بود.  $(x+6)(x+4)$

حاصل جمع  $10x$  غلط بود.  $(x+2)(x+12)$  جواب نفر چهارم نادرست

### تمرین

۱- حاصل عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

$$(3x+y)^2 - z^2 = 9x^2 + 6xy + y^2 - z^2$$

د)  $(3x+y-z)(3x+y+z) =$

ه)  $(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4 - 1$

و)  $(x-2)(x+2)(x^2+3) = (x^2-4)(x^2+3) = x^4 - x^2 - 12$

الف)  $(\frac{1}{4} - x)(\frac{1}{4} + x) = \frac{1}{16} - x^2$

ب)  $(5x+4)(5x+3) = 25x^2 + 35x + 12$

ج)  $(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3}) = z^2 - 3$

۲- در قسمت های نقطه چین، با استفاده از اتحادها، عبارت های مناسب بگذارید.

الف)  $(xy-z)(xy+z) = x^2y^2 - z^2$

ج)  $(x+a)(x-b) = x^2 - bx + ax - ab$

ب)  $(\frac{1}{4}y + \sqrt{5})(\frac{1}{4}y - \sqrt{5}) = \frac{1}{16}y^2 - 5$

د)  $(x^2 + \sqrt{5})(x^2 - 5) = x^4 + 2x^2 - 5$

۳- عبارات زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

الف)  $a^2 - 8a + 15 = (a-3)(a-5)$

و)  $x^2 - 13x + 36 = (x-4)(x-9)$

ب)  $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{4})^2$

ز)  $x^2 - 12x + 36 = (x-6)(x-6) = (x-6)^2$

ج)  $x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6)$

ح)  $(x+y)^2 - 9 = (x+y-3)(x+y+3)$

د)  $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

ط)  $bx^2 - 5bx - 50b = b(x^2 - 5x - 50) = b(x-10)(x+5)$

ه)  $4ax^2 - a$

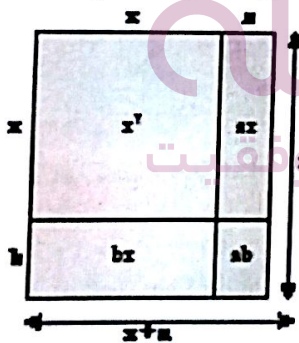
ی)  $x^2 - 5x + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x+1)(x-1)(x-2)(x+2)$

۴- در اتحاد جمله مشترک اگر  $a=b$  باشد، چه اتحادی به دست می آید؟ اگر  $a$  و  $b$  قرینه باشد،

کدام اتحاد به دست می آید؟ در پاسخ بنویسید.

۵- به کمک مساحت ها در شکل روبه رو، اتحاد

جمله مشترک را به دست آورید.



۸۹

$$S = (x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$$

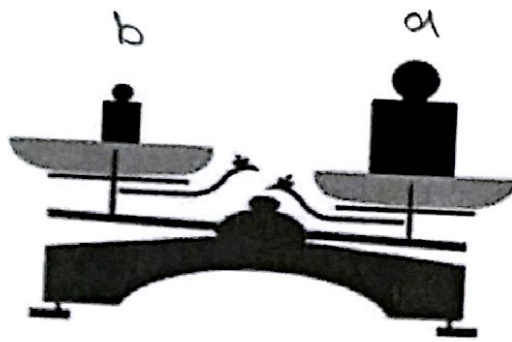
$$= x^2 + x(a+b) + ab$$

$$(n+a)(n+b) \xrightarrow{a=b} (n+a)(n+a) = (n+a)^2$$

$$(n+a)(n+b) \xrightarrow{a=-b} (n+a)(n-a) = n^2 - a^2$$



## فعالیت



روی کفه های ترازو دو وزنه  $a$  و  $b$  کیلوگرمی قرار دارد.  
با توجه به شکل، وزنه  $a$  از وزنه  $b$  سنگین تر است.  
- با توجه به وضعیت ترازو، هر یک از نمادهای  $>$ ،  $<$ ،  $=$  را در جاهای خالی فقط یک بار استفاده و وزنه های  $a$  و  $b$  را با هم مقایسه کنید.



در شکل بالا چنانچه وزنه ای  $p$  کیلوگرمی باشد  
به طوری که  $a = b + p$ ، در این صورت برای اینکه کفه های  
ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنه  $p$  کیلوگرمی را روی  
کدام کفه قرار داد؟ کفه ای که وزنه  $b$  در آن قرار دارد.

هرگاه  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشد به طوری که  $a > b$ ، در این صورت عدد حقیقی  
مثبتی مانند  $p$  هست به طوری که  $a = b + p$ .

با توجه به برابری های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

الف)  $x = y + 4 \Rightarrow x > y$

ج)  $a - 2 = b + 3 \Rightarrow a > b$

ب)  $m + 1 = n + 3 \Rightarrow m > n$

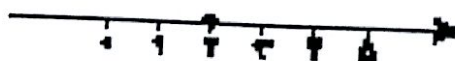
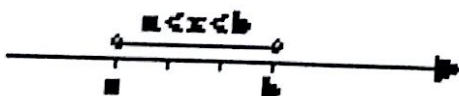
د)  $2m = 3n \quad (m, n > 0) \Rightarrow m > n$

هرگاه  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشد، فقط یکی از حالت های « $a$  بزرگ تر از  $b$ » یا « $a$  کوچک تر از  $b$ »  
یا « $a$  برابر با  $b$ » را خواهیم داشت. چنانچه عدد حقیقی  $a$  منفی نباشد در این صورت  $a > 0$  یا  $a = 0$ ،  
در این حالت می نویسیم  $a \geq 0$  و می خوانیم  $a$  بزرگ تر یا برابر با ۰ است؛ مانند  $2 \geq 0$  یا  $0 \geq 0$ .  
چنانچه  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشد به طوری که  $a$  از  $b$  کمتر نباشد در این صورت  $a > b$  یا  $a = b$   
در این حالت می نویسیم  $a \geq b$ .

برای سه عدد حقیقی  $a$  و  $b$  و  $x$  به طوری که عدد دلخواه  $x$  بین اعداد  $a$  و  $b$  باشد ( $a < b$ )،

می نویسیم  $a < x < b$ .

مانند:  $1 < 2 < 5$

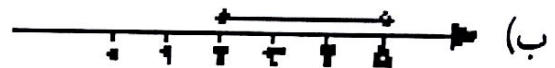


۱- مناظر با هر یک از ناحیه‌های مشخص شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.

$$-3 \leq x \leq 5$$



$$2 \leq x < 5$$



۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر  $a+b > 0$  آنگاه،  $a$  و  $b$  هر دو مثبت هستند.  $\times$

ب) اگر  $ab > 0$  آنگاه،  $a$  و  $b$  هم علامت هستند.  $\checkmark$

ج) اگر  $\frac{ab}{c} < 0$  آنگاه،  $a$  و  $b$  و  $c$  منفی هستند.  $\times$

د) اگر  $a^2b < 0$  آنگاه،  $b$  منفی است.  $\checkmark$

۳- عبارت‌های کلامی را به صورت جبری بنویسید.

• ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگ تر است.  $3x - 1 > 7$

• ۸ از قرینه دو برابر عددی به علاوه ۳ بزرگ تر است.  $8 > -(2x + 3)$

## فعالیت

۱- به دو طرف نابرابری زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟ بله

$$-3 < 1 \xrightarrow{+3} -3 + 3 < 1 + 3 \rightarrow 0 < 4$$

$$-3 < 1 \xrightarrow{-7} -3 - 7 < 1 - 7 \rightarrow -10 < -6$$

$$-3 < -2 \xrightarrow{-100} -3 - 100 < -2 - 100 \rightarrow -103 < -102$$

خاصیت ۱: اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند  $c$  جمع کنیم، نابرابری

همچنان برقرار است؛ یعنی اگر  $a > b$  آنگاه  $a + c > b + c$ .

۲- دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید؛ آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times 3} -21 > -27$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times (-3)} 21 < 27$$



$$-7 > -9 \quad \text{علامت صحیح است}$$

$$\begin{aligned} -7 > -9 &\xrightarrow{\times 0} \\ -7 \times 0 &> -9 \times 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7 < -9 &\xrightarrow{\times (-1)} \\ (-7)(-1) &< (-9)(-1) \end{aligned}$$

خاصیت ۲: اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد مثبتی مانند  $c$  ضرب کنیم، نابرابری همچنان برقرار خواهد بود؛ یعنی اگر  $a > b$  و  $c > 0$  آنگاه  $ac > bc$ .

خاصیت ۳: اگر دو طرف نابرابری  $a > b$  را در عدد منفی  $c$  ( $c < 0$ ) ضرب کنیم، در این صورت داریم  $ac < bc$ .

۳- نابرابری  $2x+1 > 7$  را در نظر بگیرید؛ این نابرابری شامل متغیر  $x$  است و درجه نسبت به  $x$  با ۱ برابر است؛ در این صورت به این نابرابری، نامعادله یک مجهولی درجه اول می‌گوییم. در جدول زیر اندازه‌های داده شده را به جای  $x$  قرار دهید؛ آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟

نامعادله	$x=-1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=7$
$2x+1 > 7$	$2(-1)+1 > 7$ $\downarrow$ $-1 > 7$ نادرست	$2 \times 2 + 1 > 7$ $5 > 7$ نادرست	$2 \times 3 + 1 > 7$ $7 > 7$ نادرست	$2 \times 4 + 1 > 7$ $9 > 7$ درست	$2 \times 7 + 1 > 7$ $15 > 7$ درست

مجموعه مقادیری که به ازای آنها، نامعادله به نابرابری درست تبدیل شود، مجموعه جواب نامعادله است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ جزو مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت‌های نابرابری‌ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.

$$2x+1-1 > 7-1 \rightarrow 2x > 6$$

– دو طرف نامعادله را با ۱- جمع کنید.

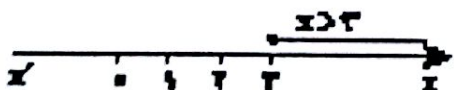
$$2x > 6 \xrightarrow{\div 2} x > 3$$

– با توجه به نابرابری  $x > 3$  متوجه می‌شویم که مجموعه همه عددهای بزرگ‌تر از ۳، مجموعه

جواب این نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با  $D$  نمایش دهیم، خواهیم داشت

$$D = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$$

مقابل نمایش داد.



$$2x+1 > 7 \xrightarrow{+(-1)} 2x > 6 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} x > 3$$



الف  $\frac{ac}{b^2} < 0$

حالت اول  $\rightarrow a > 0, c < 0 \rightarrow \frac{ac}{b^2} < 0$

حالت دوم  $\rightarrow a < 0, c > 0 \rightarrow \frac{ac}{b^2} < 0$

ب  $\frac{a}{bc} > 0$

حالت اول  $a > 0, b < 0, c < 0$

حالت دوم  $a < 0, b < 0, c > 0$

حالت سوم  $a < 0, b > 0, c < 0$

حالت چهارم  $a > 0, b > 0, c > 0$

ج  $ab > 0$

حالت اول  $a > 0, b > 0 \rightarrow \frac{a^2}{bc} > 0$

حالت دوم  $b > 0, c > 0$

حالت سوم  $b < 0, c < 0$

الف  $2x - 4 + 5 < 5 - x \rightarrow 2x - 1 < 5 - x \rightarrow 3x < 6 \rightarrow x < 2$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

ب  $3 - 2x \geq 15 - 4x \rightarrow -2x + 4x \geq 15 - 3 \rightarrow 2x \geq 12 \rightarrow x \geq \frac{12}{2}$

$\Rightarrow x \geq \frac{6}{1}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{6}{1}\}$

ج  $\frac{y-3-4}{4} > \frac{y}{2} \xrightarrow{\text{طرفین در ۴ ضرب}} y-7 > 2y \rightarrow y-2y > 7 \rightarrow -y > 7 \rightarrow y < -7$

$D = \{y \in \mathbb{R} \mid y < -7\}$

$\frac{-1-q}{4} < \frac{1+q}{4} \xrightarrow{\text{طرفین در ۴ ضرب}} -1-q < 1+q \rightarrow -q-q < 1+1 \rightarrow -2q < 2 \rightarrow q > -1$

$-7q \leq 11 \rightarrow q \geq \frac{11}{-7} \rightarrow q \geq -\frac{11}{7}$

$D = \{q \in \mathbb{R} \mid q \geq -\frac{11}{7}\}$

$$\frac{2}{3}x + \frac{14}{3} - \frac{x}{3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{x}{4}$$

$$\frac{5x}{12} + \frac{14}{3} \leq \frac{-2x}{4} + \frac{3}{2} \xrightarrow{-\frac{14}{3} + \frac{2x}{4}} \frac{5x}{12} + \frac{14}{3} - \frac{14}{3} + \frac{2x}{4} \leq \frac{-2x}{4} + \frac{3}{2} - \frac{14}{3} + \frac{2x}{4}$$

$$\frac{9x}{12} \leq \frac{-19}{4} \xrightarrow{\times \frac{12}{9}} \frac{9x}{12} \times \frac{12}{9} \leq \frac{-19}{4} \times \frac{12}{9} \longrightarrow x \leq \frac{-38}{9}$$

کار در کلاس

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{-38}{9}\}$$

مجموعه جواب نامعادله های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف)  $2x + 7 \geq 15 \xrightarrow{+(-7)} 2x + 7 - 7 \geq 15 - 7 \rightarrow 2x \geq 8 \wedge \frac{x}{2} \geq 4 \rightarrow x \geq 4$   
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

ب)  $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} \xrightarrow{\times 6} 6 \times \frac{x}{3} - 6 \times \frac{1}{2} < 6 \times \frac{x-1}{6}$   
 $\rightarrow 2x - 3 < x - 1 \xrightarrow{+(-x)} 2x - 3 + (-x) < x - 1 + (-x)$   
 $\rightarrow x - 3 < -1 \xrightarrow{+3} x < 2 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

د)  $\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} \leq \frac{1}{2}(3-x) + \frac{x}{6}$  دریا

ج)  $3x - 3 \geq 2x + 1 \xrightarrow{+3-2x} 3(x-1) \geq 2x+1$

$3x - 3 + 3 - 2x \geq 2x + 3 - 2x + 1$   
 $x \geq 4$   
 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

تمرین

۱- در جاهای خالی نمادهای < یا > را جایگزین کنید.

الف) اگر  $a - b = 1$  در این صورت  $a \square b$ . ج) اگر  $2(p-1) = 2q-3$  در این صورت  $p \square q$ . \* روش حل

ب) اگر  $u - v = -2$  در این صورت  $u \square v$ . د) اگر  $\frac{a-b}{2} = -3$  در این صورت  $a \square b$ .

۲- علامت عددهای حقیقی  $a, b, c$  را طوری تعیین کنید که نابرابری های زیر برقرار باشد:

در صفحه قبل

الف)  $\frac{ac}{b^2} < 0$  ب)  $\frac{a}{bc} > 0$  ج)  $ab > 0$  د)  $\frac{a^2}{bc} > 0$

۳- مجموعه جواب نامعادله های زیر را به دست آورید.

الف)  $2(x-3) + 5 < 5 - x$  ج)  $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$  در صفحه قبل

ب)  $3 - 2x \geq 5(3 - 2x)$  د)  $-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3}$

۴- اگر  $a' > b'$  آیا همواره می توان نتیجه گرفت،  $a > b$ ؟ نه حذر

۵- اگر  $a, b > 0$  و  $a' > b'$  نشان دهید  $a > b$  (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید). در صفحه بعد

۶- عبارات های کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می شود.  
 ب) مجموع نصف عدد  $a$  و چهار برابر عدد  $b$ ، حداکثر ۶ واحد است.

$$\frac{a}{2} + 4b \leq 6$$

۷- دو نفر با وزن های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند که به منابع غذایی دسترسی ندارند. آنها همراه خود مواد غذایی برده اند که ۴۵۰۰ کیلوکالری دارد. اگر فرض کنیم هر انسان هر روز حداقل به اندازه سه برابر وزن خود کیلوکالری نیاز دارد، آنها حداکثر چند روز می توانند با مواد غذایی خود در جنگل دوام بیاورند؟

مقدار مورد نیاز هر روز  $3 \times 65 + 3 \times 85 = 450$

$$450x \leq 4500$$

$$x \leq 10$$

۵

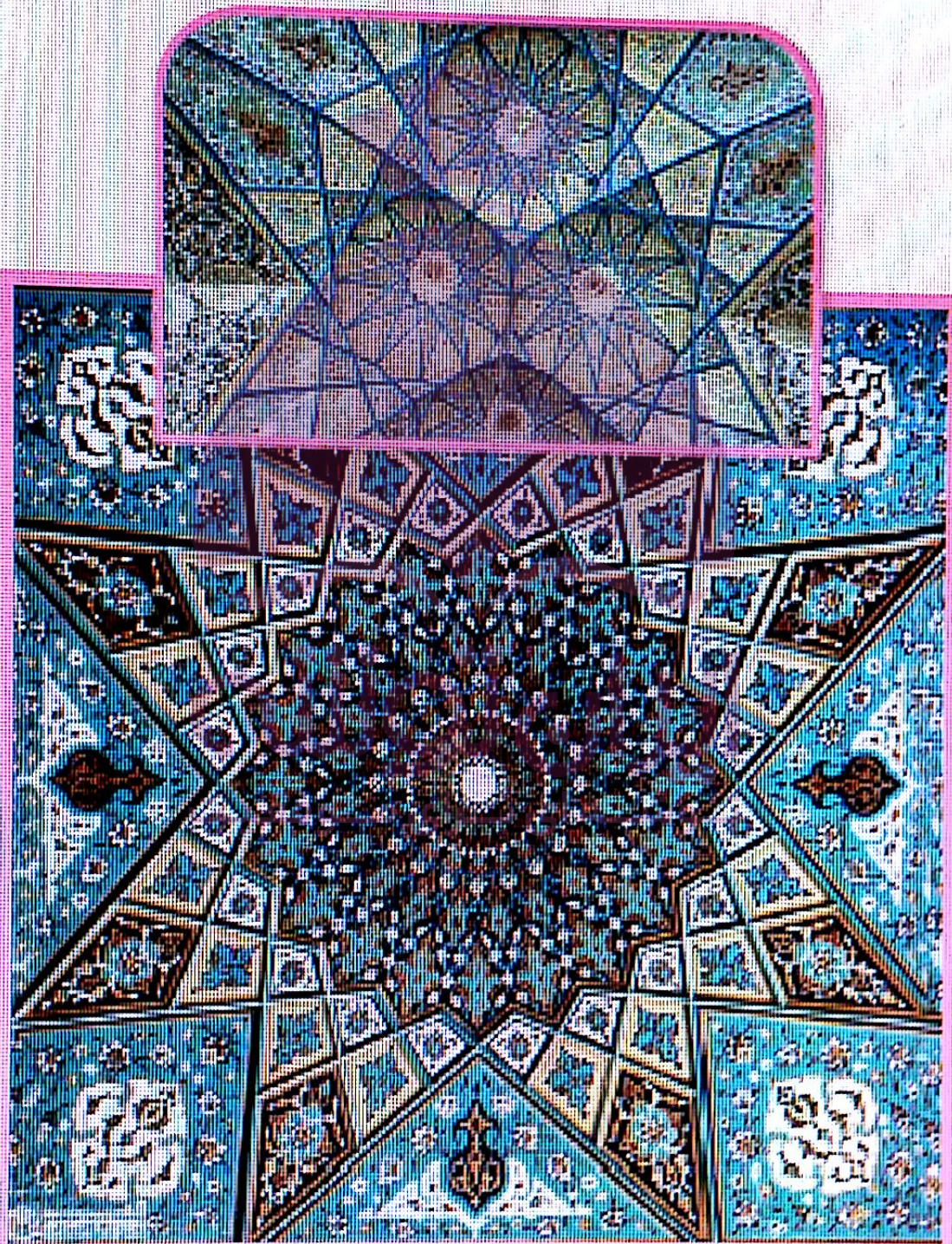
$$\left\{ \begin{array}{l} a, b > 0 \\ a^2 > b^2 \end{array} \right. \rightarrow a^2 - b^2 > 0 \rightarrow (a-b)(a+b) > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-b > 0 \rightarrow a > b \\ a+b > 0 \rightarrow a > -b \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a-b) > 0, a+b > 0 \\ (a-b) < 0, a+b < 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a > b \\ a < -b \end{array} \right.$$

مورد قبول نیست چون  $a, b > 0$  هستند



کاربرد هندسه و خط‌ها در فرش بافی، کاشی کاری، نگارگری، خطاطی، گچ‌بری، کتیبه نویسی، تذهیب و ... غیر قابل انکار، و بسیار حائز اهمیت است. از انواع خط برای ایجاد زاویه‌ها و جداسازی فضاها استفاده‌های فراوان شده است.



بخشی از سقف مسجد و سرای حرم مطهر «بیدالشهداء» امام حسین (ع)



## درس اول: معادله خط

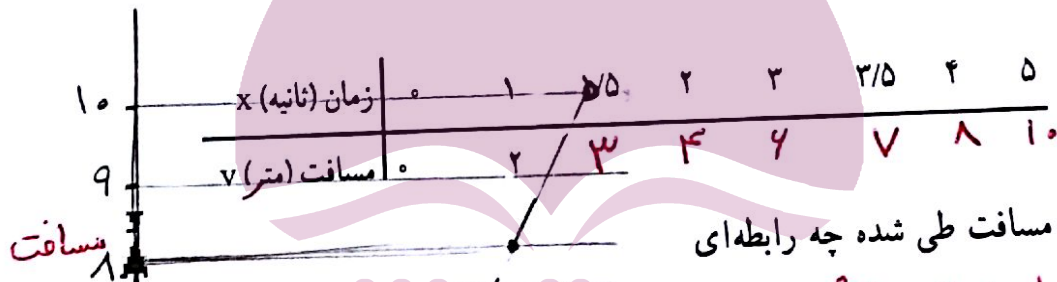


وقتی دوچرخه سواری در حال حرکت است، بین زمان و مسافت طی شده رابطه وجود دارد. بین زمان سوختن شمع و کوتاه شدن آن نیز رابطه ای دیده می شود. در الگوی عددی زیر نیز بین هر جمله و شماره آن رابطه ای هست که به صورت  $n \rightarrow 2n$  نمایش داده شده است:

1	2	3	4	...	n
↓	↓	↓	↓		↓
2	4	6	8	...	2n

## فعالیت

دوچرخه سواری با سرعت ثابت دو متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه دو متر را طی می کند. جدول زیر را کامل کنید.



بین زمان و مسافت طی شده چه رابطه ای هست؟ مسافت دو برابر زمان می باشد.

پس از ۱۰۰ ثانیه چه مسافتی طی شده است؟ ۲۰۰

اگر x ثانیه بگذرد چه مسافتی طی شده است؟ ۲x

زوج عددهایی را که در جدول به دست آوردید

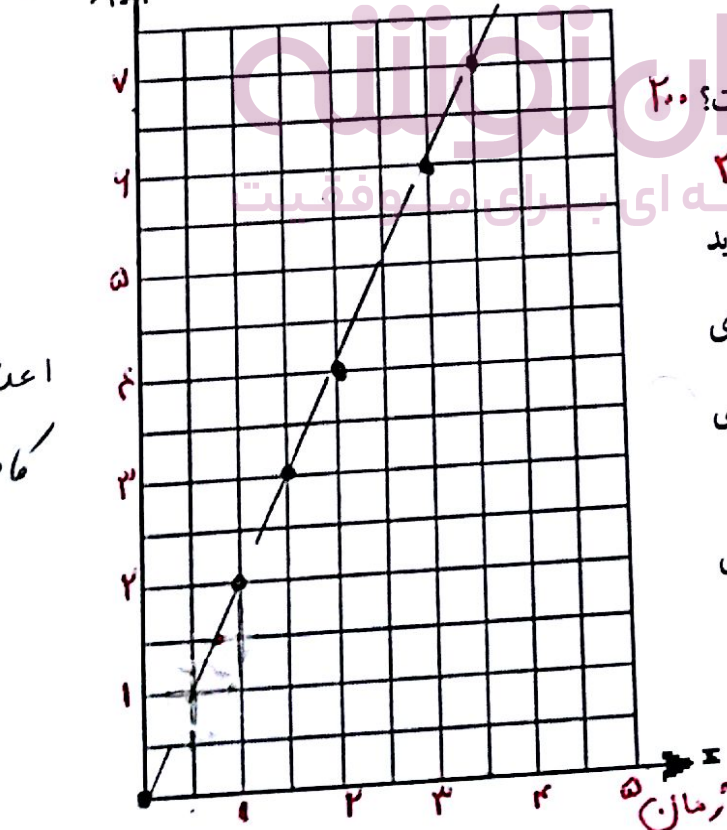
به صورت  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  نشان دهید و نمایش هر نقطه را روی

نمودار مشخص کنید؛ این نقطه ها چه ویژگی مشترکی

دارند؟ در تمام نقاط دو برابر است.

اگر این نقطه ها را به هم وصل کنیم چه شکلی

به دست می آید؟ خط راست.



اعداد محورها  
کافی نیست

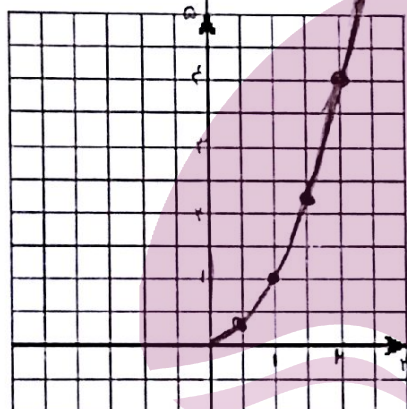
## کارد در کلاس

۱- اگر طول ضلع یک مربع را با  $x$  و محیط آن را با  $y$  نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین  $x$  و  $y$  هست؟ *چرا برابر است؟*

ضلع ( $x$ )	۱	۲	۳	۴	۱۰۰	$x$
محیط ( $y$ )	۴	۸	۱۲	۱۶	۴۰۰	$4x$

$$y = 4x$$

۲- اگر طول ضلع یک مربع را با  $x$  و مساحت مربع را با  $y$  نشان دهیم، بین  $x$  و  $y$  چه رابطه‌ای *ساوی با محور  $x$  است* هست؟ پس از کامل کردن جدول زیر، هر نقطه را روی نمودار پیدا کنید.



ضلع $x$ (سانتیمتر)	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳
مساحت $y$ (سانتیمتر مربع)	۰	۰/۲۵	۱	۰/۲۵	۴	۶/۲۵	۹
نقطه‌ها	$[0,0]$	$[0/۵, 0/۲۵]$	$[1,1]$	$[1/۵, 0/۲۵]$	$[2,4]$	$[2/۵, 6/۲۵]$	$[3,9]$

محورهای مختصات  
نسب با اعداد  
جدول نموده

آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟ *خیر*

## فعالیت

۱- معادله  $y = -x + 10$  چند پاسخ دارد؟ پنج پاسخ آن را به صورت زیر بنویسید:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=10 \\ y=0 \end{cases}$$

توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد. *در هر نقطه با  $x$  به اضافه ۱۰*

آیا تساوی برای  $x=2$  و  $y=5$  برقرار است؟ *خیر*

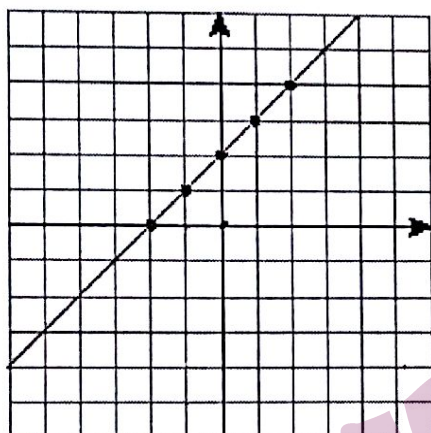
$$5 \neq -2 + 10$$

توضیح دهید چرا این تساوی معادله است و اتحاد نیست؟

*چون به ازای بعضی از مقادیر  $x$  تساوی برقرار است*



۲- در شکل زیر نمودار یک خط داده شده است. جدول زیر را با توجه به نمودار خط کامل کنید.



x (طول نقطه)	۰	۱	-۱	۲	-۲
y (عرض نقطه)	۲	۳	۱	۴	۵
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

عرض با طول را با هم برابر است.

بین طول و عرض نقطه‌ها چه رابطه‌ای هست؟ این رابطه را به صورت یک معادله بنویسید.  
۳- پنج جواب برای هر یک از معادله‌های زیر بنویسید.

$$3x - 4y = 7$$

$$y = 2x - 1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{11}{4} \end{cases} \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{13}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

توضیح دهید که پیدا کردن جواب در معادله سمت راست راحت‌تر و سریع‌تر است یا در معادله سمت چپ. سمت راست.

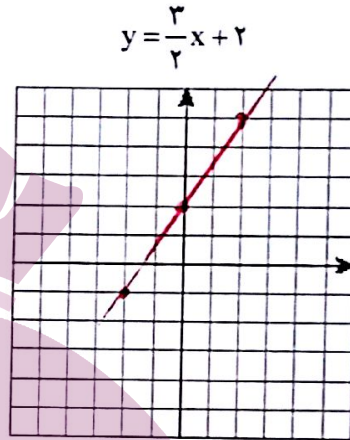
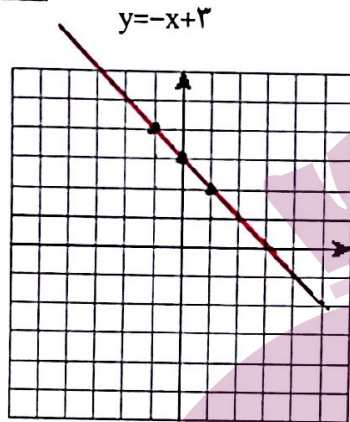
هر معادله به صورت کلی  $y = ax + b$  معادله یک خط است؛ زیرا در صورتی که تمام پاسخ‌های آن معادله را به صورت نقطه روی دستگاه مختصات نمایش دهیم، شکل یک خط به دست می‌آید؛ به همین دلیل می‌گوییم  $x$  و  $y$  با هم رابطه خطی دارند. معادله بالا بیشمار جواب دارد ولی اتحاد نیست.

به عنوان مثال  $x + 2$  معادله یک خط است که در آن  $a = 1$  و  $b = 2$  فرض شده است و نمودار آن را در بالا ملاحظه کردید.

## کار در کلاس

۱- نمودار خط‌های با معادله زیر را رسم کنید.

x	۰	۱	-۱
y	۳	۲	۴
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$



x	۰	۲	-۲
y	۲	۵	-۱
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

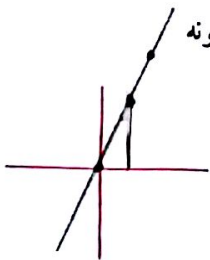
۲- آیا خط  $y = 3x$  از مبدأ مختصات (یعنی نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ) می‌گذرد؟ چرا؟ بلم چون برای  $x = 0$   $y$  هم برابر صفر است.

۳- اگر در معادله  $y = ax$  به جای  $a$  عددهای مختلفی قرار دهیم، بشمار معادله خطی مانند  $y = 3x$ ،  $y = 2x$ ،  $y = -x$  و ... به دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؟ بلم  
 صورت کلی معادله خط‌هایی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند.

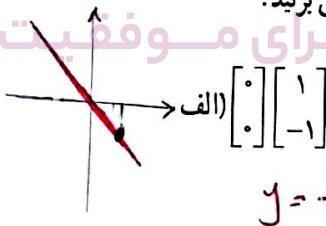
## فعالیت

۱- در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه

با توجه به مختصات هر نقطه معادله خط را حدس بزنید.



$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$   
 $y = 2x$



ب)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$   
 $y = \frac{1}{3}x$

۲- در فعالیت ۱ برای هر مورد مختصات دو نقطه دیگر را روی هر خط به دست آورید.

۹۹  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۳- در قسمت (ب) کدام یک از نقطه‌ها با مختصات  $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 60 \\ 20 \end{bmatrix}$  روی خط قرار دارد؟

## کار در کلاس

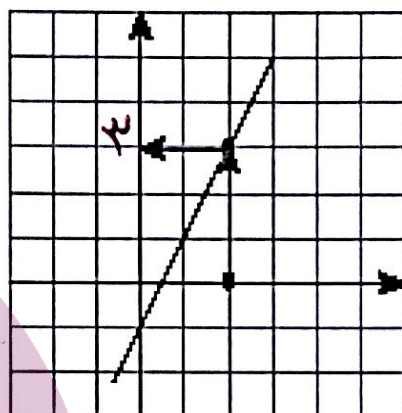
۱- مختصات نقطه‌ای به طول ۲ را روی خط  $y=2x-1$  پیدا کنید.

با استفاده از معادله خط

$$y=2x-1$$

$$y=2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

با استفاده از نمودار خط



$$-3 = -\frac{1}{2}x + 2$$

۲- مختصات نقطه‌ای به عرض ۳ را روی خط  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  پیدا کنید.

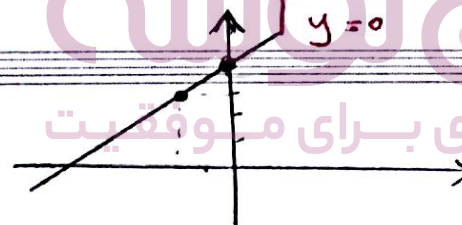
$$-\frac{1}{2}x = -3 - 2 = -5 \rightarrow$$

$$x = 10$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=5 \times 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

۳- مختصات محل برخورد خط  $y=5x+1$  را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$$\begin{cases} 0 = 5x + 1 \rightarrow x = -\frac{1}{5} \\ y = 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & -2 \\ \hline y & 1 & -9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$-1 \neq \frac{1}{2}x^2 + 3 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الف) آیا نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  روی این خط است. خیر

ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

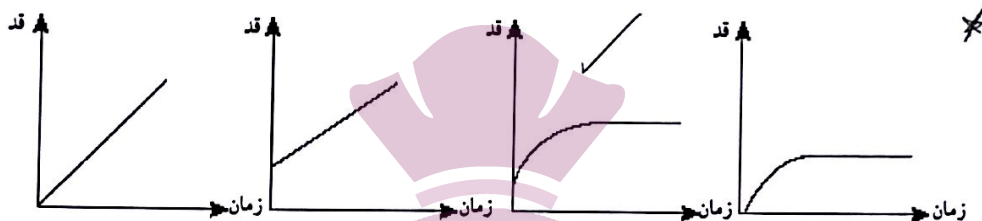
ج) نقطه‌ای از خط به طول ۱- را پیدا کنید.

$$y = \frac{1}{2}x(-1) + 4$$

$$y = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}$$



۲- طول یک فنر ۱۰ سانتیمتر است. وقتی وزنه‌ای به جرم  $x$  به آن وصل شود، طول فنر از رابطه  $y = 0.8x + 10$  پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟  
 ۳- کدام یک از نمودارهای زیر رابطه رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می‌دهد؟  
 با توجه به وضعیت‌های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید؛ برای مثال بگویید محل برخورد نمودار با محور  $y$  به چه معنا است. یعنی زمان تولد را چه رقم هر چه بعد از مدتی قد انسان دیگر ثابت می‌ماند و افزایش ندارد.

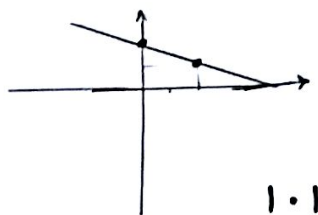


۴- دو نقطه از یک خط داده شده است؛ معادله خط را حدس بزنید.  $y = 2x - 1$   
 الف)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  ب)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  ج)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$   $y = 3x + 1$   
 د)  $y = 3x$

۵- مختصات محل برخورد خط به معادله  $y = -x + 2$  را با محورهای مختصات بیابید.  
 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$   
 ۶- مختصات نقطه‌ای از خط به معادله  $y = -\frac{3}{5}x + 4$  را بیابید که طول آن نقطه ۵ باشد.  
 $y = -\frac{3}{5}x + 4 \Rightarrow 5 + 4 = 1$

۷- خط  $y = -\frac{1}{4}x + 2$  را رسم کنید.  
 آیا نقطه  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  روی این خط قرار دارد؟ نقطه‌ای به طول ۱- از این خط پیدا کنید.  
 نقطه‌ای به عرض ۲- از این خط پیدا کنید.  
 محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$x$	۰	۲
$y$	۲	۱
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



۱۰۱

$$3 = -\frac{1}{4}x(-2) + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$y = -\frac{1}{4}x(-1) + 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$-2 = -\frac{1}{4}x + 2 \rightarrow \frac{1}{4}x = 2 + 2 = 4 \rightarrow x = 16$$

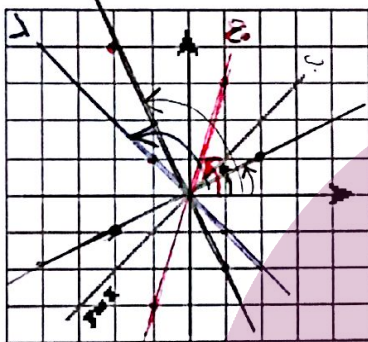
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ

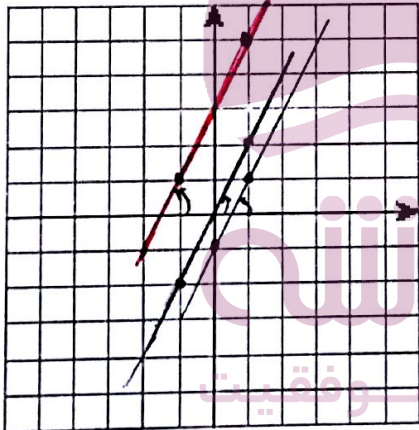
### فعالیت

۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

الف)  $y = \frac{1}{4}x$     ب)  $y = x$     ج)  $y = 2x$     د)  $y = -x$     هـ)  $y = -2x$



در ضریب  $x$  یا زاویه  $\alpha$  تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرد؛ تفاوت آنها در چیست؟ زاویه هر خط را مانند نمونه با قسمت مثبت محور الف طول‌ها مشخص کنید. در خط‌های الف، ب و ج چه رابطه‌ای بین ضریب  $x$  و این زاویه وجود دارد؟ ضریب  $x$  مثبت است. خط‌های د و ه چه نوع زاویه‌ای با جهت مثبت محور  $x$  می‌سازد؟ زاویه  $\alpha$  باز.



۲- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

$y = 2x - 1$  ,  $y = 2x$  ,  $y = 2x + 3$

در معادله این خط‌ها ضریب  $x$  برابر با ۲ است که به آن شیب خط می‌گوییم. تفاوت خط‌ها در چیست؟ زاویه خط‌ها را با محور  $x$  با هم مقایسه کنید؛ چرا این خط‌ها با هم موازی هستند؟ چون شیب‌ها برابر هستند. بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد ثابت معادله چه رابطه‌ای می‌بینید؟ در همان عدد ثابت محور عرض‌ها را قطع کرده

در معادله خط  $y = ax + b$ ، عدد  $a$ ، شیب خط نامیده می‌شود. با تغییر  $a$  زاویه خط با محور طول‌ها تغییر می‌کند. عدد  $b$  نشان‌دهنده محل برخورد خط با محور عرض‌ها است؛ به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می‌گویند.

به عنوان مثال در خط به معادله  $y = -3x + 2$ ، عرض از مبدأ ۲ و شیب خط، -۳ است.

۱- در هر یک از معادله‌های زیر، شیب و عرض را از مبدأ خط مشخص کنید  
 عرض از مبدأ:  $y = 2x - 4$  شیب:  $y = -\frac{2}{3}x$  عرض از مبدأ:  $y = -3x + 1$

۲- معادله خطی بنویسید که:

الف) شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن ۱- باشد.  $y = -2x - 1$

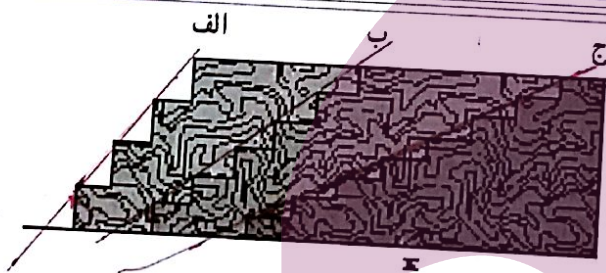
ب) شیب آن  $\frac{1}{4}$  باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند.  $y = \frac{1}{4}x + 3$

ج) با خط  $y = 2x + 1$  موازی باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$  بگذرد.  $y = 2x + 4$

۳- معادله خطی بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  بگذرد.

$y = ax + b \rightarrow y = 2x + b \rightarrow 2 = 2 \times 1 + b \rightarrow b = 0$  معادله خط  $y = 2x$

## فعالیت



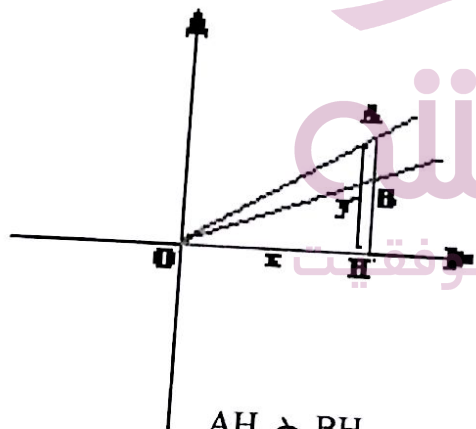
۱- در این تصویر، سه نوع راه پله می‌بینید؛ در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می‌روید یکسان است.

کدام راه پله شیب بیشتری دارد؟ الف

کدام یک، تعداد پله بیشتری دارد؟ ج

بالا رفتن از کدام یک راحت‌تر است؟ ح

۲- در محورهای مختصات مقابل، کدام خط شیب



بیشتری دارد؟ A

نقطه‌های A و B طول ثابتی دارند ولی عرض آنها

متفاوت است.

کدام یک از دو نسبت زیر بزرگ‌تر است؟ چرا؟

$\frac{AH}{OH} \bigcirc \frac{BH}{OH}$

این دو نسبت چه ارتباطی با شیب خط‌ها دارد؟

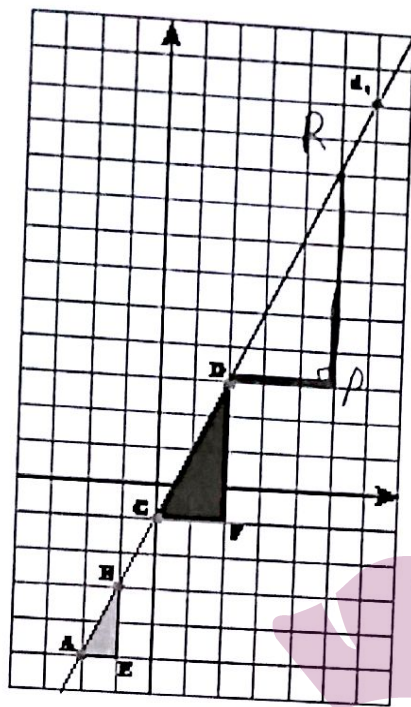
۱۰۳

چون نقطه A بالا تر از نقطه B است

AH بیشتر است مقدار شیب آن خط هم بیشتر است

BH کمتر است مقدار شیب آن هم کمتر است





۳- روی خط  $d_1$  به معادله  $y = 2x - 1$  دو نقطه دلخواه مثل A و B در نظر گرفته ایم. با توجه به مثل قائم الزاویه ایجاد شده، شیب خط را به دست آورده ایم.

$$d_1 \text{ شیب خط} = \frac{EB}{EA} = \frac{2}{1} = 2$$

برای دو نقطه C و D نیز با توجه به مثل رسم شده، شیب خط را پیدا کنید.

$$\frac{FD}{CF} = \frac{2}{1} = 2$$

دو نقطه دلخواه دیگر روی خط در نظر بگیرید و با رسم

یک مثل قائم الزاویه شیب خط را دوباره پیدا کنید.

$$\frac{PR}{DP} = \frac{2}{1} = 2$$

۴- خط  $d_2$  با محور طول، زاویه بزرگ تراز  $90^\circ$  می سازد؛ پس شیب خط، منفی می شود. با توجه به مثل های رسم شده مقدار شیب خط  $d_2$  را پیدا کنید.

$$-\frac{FD}{FC} = -\frac{2}{1} = -2 \quad d_2 \text{ شیب خط} = -\frac{EB}{EA} = -\frac{2}{1} = -2$$

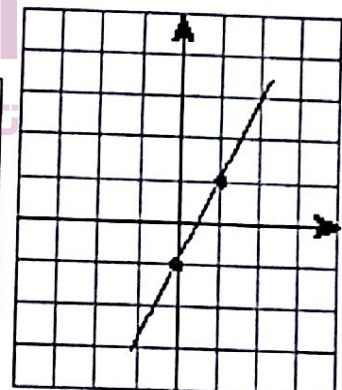
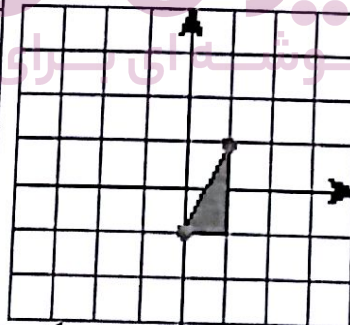
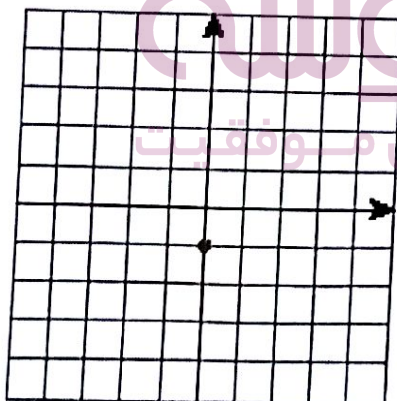
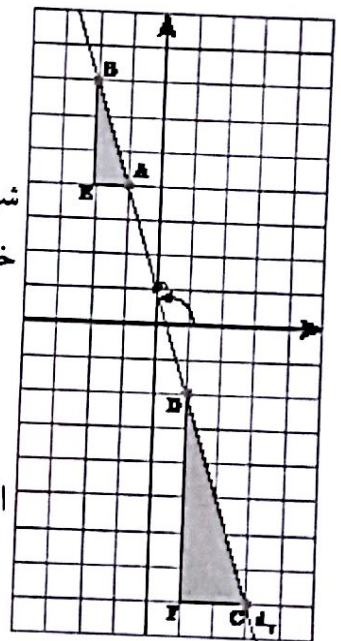
خط  $d_2$  محور عرض ها را در نقطه  $\left[ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right]$  قطع کرده است یا عرض

$$y = -2x + 1$$

از مبدأ آن ۱ است. معادله خط  $d_2$  را بنویسید.

۵- با توجه به این بیان از شیب خط در زیر مراحل رسم معادله خط

$y = 2x - 1$  با روش دیگری مشخص شده است؛ این روش را توضیح دهید.  $y = 2x - 1$  رسم می باشد.



(۱) خط از این نقطه می گذرد. (۲) با توجه به مقدار شیب نقطه دیگر پیدا می شود. (۳) با داشتن دو نقطه خط رسم می شود.

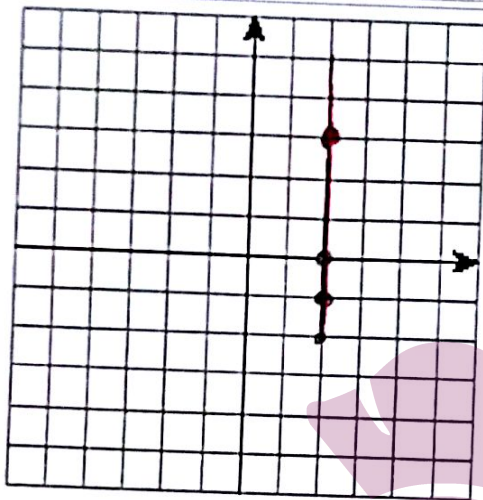
۱۰۴

(۱) عرض از مبدا را مشخص می کند

(۲) شیب خط مشخص می شود و نقطه بدست می آید.

۳- دو نقطه بدست آمده را به هم وصل و مقدار شیب را محاسبه می کنیم.

## فعالیت



۱- نقطه‌های  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  را در دستگاه

مختصات نشان دهید و خطی را رسم کنید که از این دو نقطه می‌گذرد.

روی خط، دو نقطه انتخاب کنید و مختصات

آنها را بنویسید.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

اگر نقطه دیگری روی این خط در نظر بگیریم،

طول آن برابر است با: ۲ خواهد بود.

$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

یک نقطه دلخواه به طول ۲ بنویسید و روی محور مختصات نشان دهید:  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$   
تمام نقطه‌ها به طول ۲ روی خط بالا قرار می‌گیرد و معادله آن به صورت  $x=2$  است.

۲- صورت کلی معادله‌های خطی به صورت  $ax+by=c$  است.

الف) با توجه به مقدارهای نوشته شده، معادله خط را بنویسید: کدام خط از مبدأ می‌گذرد؟ خط دوم چون عرض

$$2x + 3y = 4 \quad a=2, b=3, c=4 \rightarrow \text{از مبدأ آن صفر است.}$$

$$-x + 2y = 0 \quad a=-1, b=2, c=0$$

ب) با توجه به خط‌های داده شده، مقدارهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را پیدا کنید.

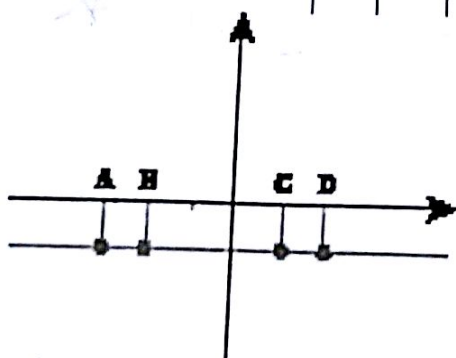
$$-3x + 2y = 2 \rightarrow a=-3, b=2, c=2$$

$$y - 2x = 1 \quad 2x - y = -1 \quad y = 2x + 1 \rightarrow a=2, b=-1, c=1 \quad a=-2, b=1, c=+1$$

ج) برای خط  $x=2$  مقدارهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را بنویسید.

$$ax + by = c \rightarrow x = 2 \quad a=1, b=0, c=2$$

۳- مختصات نقطه‌های مشخص شده را روی خط



$$A = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



این نقطه ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ داریم عرض یک می باشند  
معادله خط رسم شده را بنویسید.  $y = -1$

در فرم کلی معادله های خطی به جای  $a$ ،  $b$  و  $c$  چه عدد هایی قرار دهیم تا معادله خط رسم شده به دست آید؟

$$ax + by = c$$

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 صغیر 1 -1

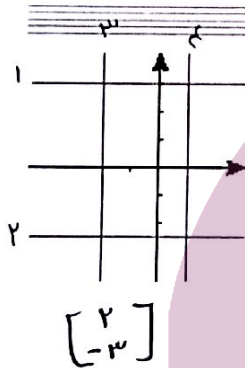
۴- مانند نمونه برای خط های داده شده شیب و عرض از مبدأ را پیدا کنید.



عرض از مبدأ  $\downarrow$  شیب  $\downarrow$

$$\begin{aligned}
 2y - 4x &= 8 \rightarrow 2y = 4x + 8 \rightarrow y = \frac{4}{2}x + \frac{8}{2} \rightarrow y = 2x + 4 \\
 2x - 2y &= 6 \rightarrow -2y = -2x + 6 \rightarrow y = \frac{-2}{-2}x + \frac{6}{-2} \rightarrow y = \frac{1}{1}x - 3 \\
 x + 2y - 9 &= 0 \rightarrow 2y = -x + 9 \rightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{9}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

### کار در کلاس



۱- معادله های خط های رسم شده را در دستگاه مختصات مقابل کنار هر کدام بنویسید.

$1 \rightarrow y = 3$   
 $2 \rightarrow y = -3$   
 $3 \rightarrow x = -2$

۲- از برخورد دو خط  $y = -3$  و  $x = -2$  کدام نقطه به دست می آید؟

۳- معادله خطی بنویسید که موازی محور  $x$  باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  بگذرد.

$$y = 1$$

### تمرین

۱- خط های به معادله  $x = -2$  و  $y = 3$  را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه

بین این دو خط چند درجه است؟  $90^\circ$  درجه

۲- معادله محور طول ها و محور عرض ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه ای است؟

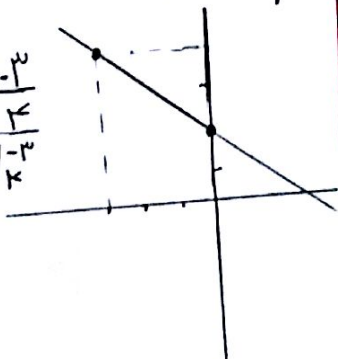
۳- شیب و عرض از مبدأ خط های زیر را پیدا و سپس آن خط ها را رسم کنید.

$$y = 0 \rightarrow \text{محور عرض}$$

$$x = 0 \rightarrow \text{محور طول}$$

$$2y - 2x = 6 \rightarrow y = \frac{2}{2}x + \frac{6}{2} \rightarrow y = x + 3$$

$x$	0	-3
$y$	3	0



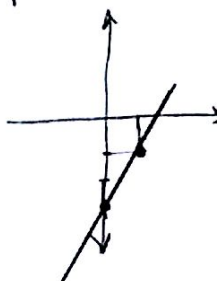
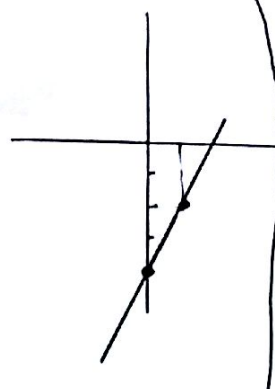
$$\begin{aligned}
 4x - 2y &= 8 \\
 -2y &= -4x + 8 \\
 y &= \frac{-4}{-2}x + \frac{8}{-2} \\
 y &= 2x - 4
 \end{aligned}$$

$x$	0	2
$y$	-4	0

$$2x - y = 3$$

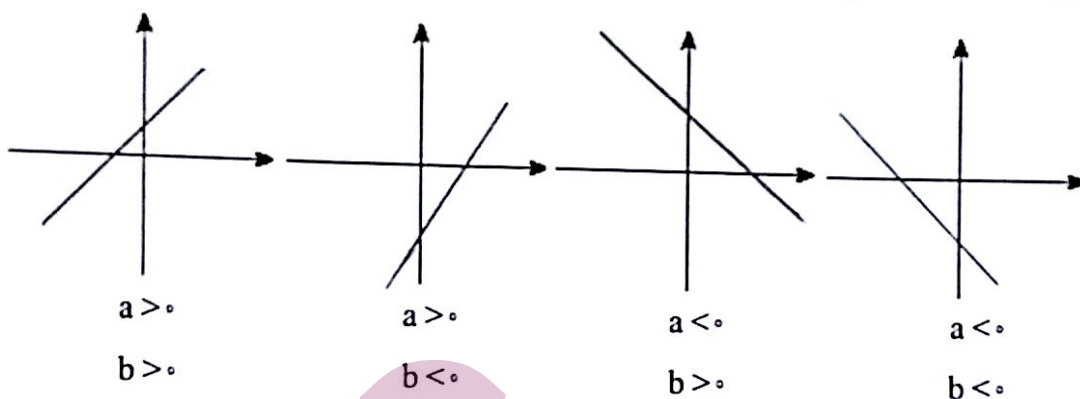
$$\begin{aligned}
 -y &= -2x + 3 \\
 y &= 2x - 3
 \end{aligned}$$

$x$	0	1.5
$y$	-3	0

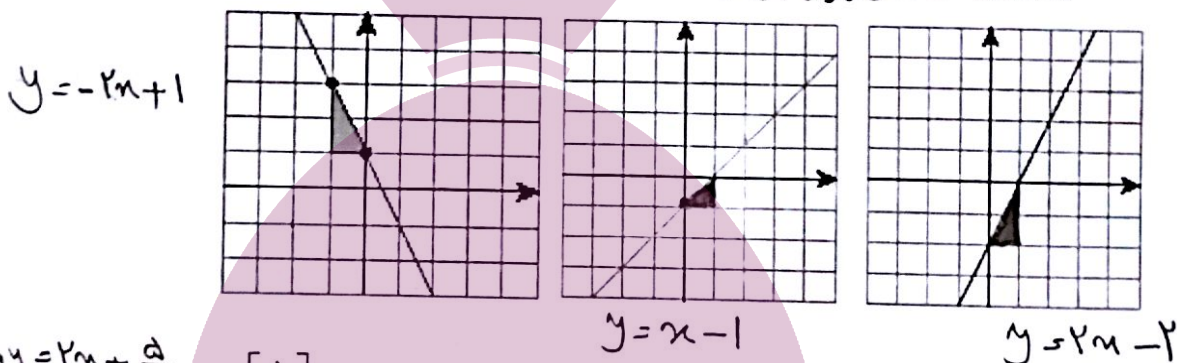




سوال چهارم ۴- خط  $y=ax+b$  را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت های مورد نظر، خط را مانند نمونه در دستگاه مختصات رسم کنید.



۵- معادله خط های زیر را بنویسید.



$$2y = 4x + 5 \rightarrow y = 2x + \frac{5}{2}$$

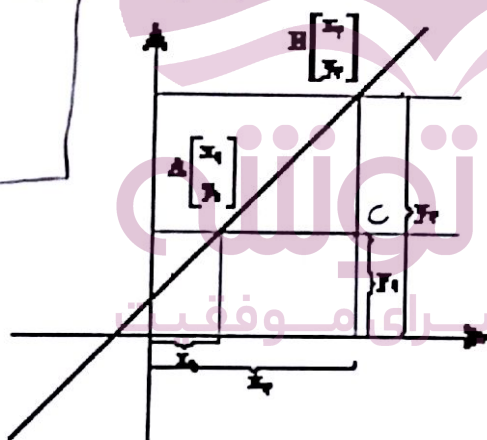
$$y = 2x + b \xrightarrow{1-1} -1 = 2 \times 1 + b$$

$$b = -1 - 2 = -3$$

$$y = 2x - 3$$

۶- معادله خطی بنویسید که با خط  $2y - 4x = 5$  موازی باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  بگذرد.

۷- با توجه به شکل مقابل نشان دهید.



$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{شیب خط} = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۸- دو نقطه از یک خط هستند؛ شیب خط را پیدا کنید و معادله خط را بنویسید.

$$\text{شیب} = \frac{2 - (-1)}{3 - 4} = \frac{3}{-1} = -3$$

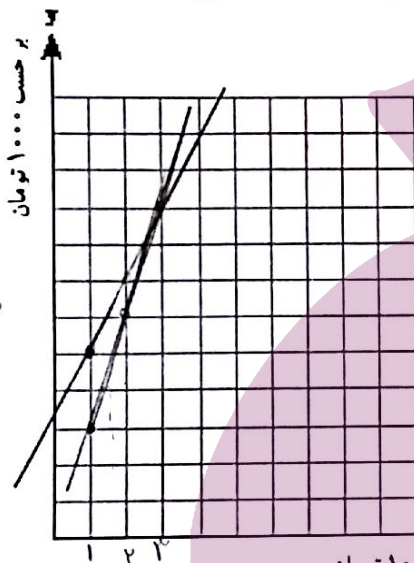
$$1.7 \quad y = -3x + b$$

$$\xrightarrow{1.3} 2 = -3 \times 3 + b \rightarrow 2 + 9 = b \rightarrow b = 11$$

فعالیت

۱- هزینه اشتراک یک خط اینترنت روی تلفن همراه ۳۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است. هزینه کلی  $x$  ساعت استفاده از اینترنت را با  $y$  نشان دهید و رابطه‌ای بین  $y$  و  $x$  بنویسید.

$$y = 2000x + 3000$$



یک نوع دیگر از اشتراک اینترنت بدون مبلغ ثابت است؛ ولی برای هر ساعت استفاده، ۳۰۰۰ تومان هزینه دارد. رابطه‌ای بین هزینه اشتراک ( $y$ ) و  $x$  ساعت استفاده از اینترنت را در این حالت بنویسید.

$$y = 3000x$$

دو خط به معادله‌های فوق را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید. محل برخورد این دو خط چه ویژگی‌ای دارد؟ برای  $1/5$  ساعت استفاده، کدام نوع اشتراک بهتر است؟ بعد از چند ساعت استفاده از اینترنت، اشتراک نوع اول به صرفه خواهد بود؟

برای استفاده ۳ ساعت اینترنت هزینه کل چقدر خواهد بود؟

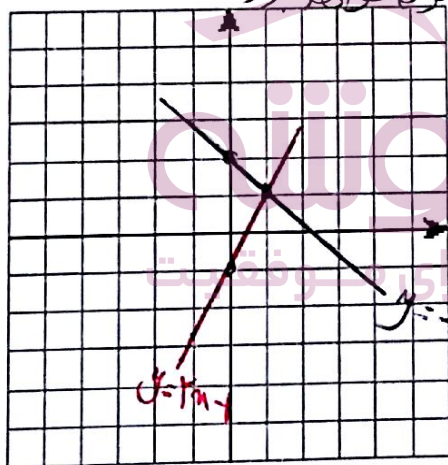
نوع برابری ۹ پس از ۳ ساعت ۲ بعد از ۱ ساعت به صرفه خواهد بود.

۲- معادله  $y = 2x - 1$  چند جواب دارد؟ نمودار آن را رسم کنید. بی‌سار

معادله  $y = -x + 2$  چند جواب دارد؟ بی‌سار

نمودار آن را رسم کنید. توضیح دهید چگونه

یک جواب مشترک برای این دو معادله پیدا می‌کنید.



محل برخورد دو خط جواب

مشترک برای دو معادله است.

## کاردر کلاس

با رسم خط‌ها، دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید؛ یعنی یک جواب مشترک برای دو

معادله پیدا کنید.

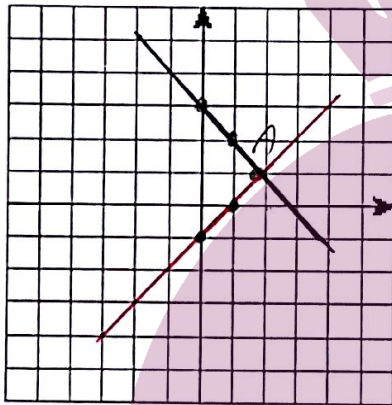
$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x-y=1 \rightarrow y=x-1 \\ x+y=3 \rightarrow y=-x+3 \end{cases}$$

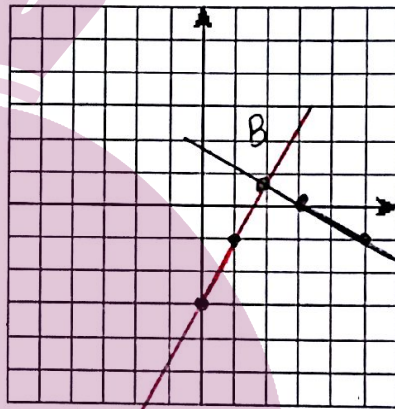
$$\begin{cases} 2x-y=3 \rightarrow y=2x-3 \\ x+2y=3 \rightarrow y=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -3 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 3 & 2 \end{array}$$



$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

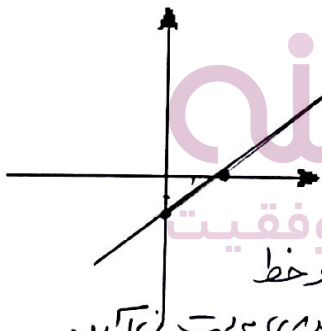


$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 5 & 3 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$

## فعالیت

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}$$



۱- خط  $2x-3y=4$  را رسم کنید. خط به معادله  $4x-6y=8$

که در آن تمام عددهای معادله بالا دو برابر شده است را رسم کنید.

الف) آیا خط جدیدی به دست آمد؟ خیر

ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر تمام ضرایب‌های عددی یک معادله

خط را در یک عدد ضرب کنیم دو خط برهم منطبق خواهند بود و خط

ج) آیا می‌توان گفت این دستگاه معادله خطی بی‌شمار جواب خواهد داشت؟ نه آید.

دارد؟ چرا؟ بله. چون دو خط برهم منطبق شده و بی‌شمار

نقطه مشترک خواهند داشت.

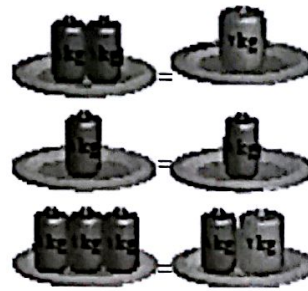


۲- به مثال های زیر توجه کنید :

$$\begin{array}{l} 2=2 \\ 5=5 \\ 7=7 \end{array} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{array}{l} x=x \\ 2x=2x \\ 3x=3x \end{array} \quad \text{ب)}$$

ج)



از این مثال چه نتیجه ای می گیرید؟ اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم، باز یک تساوی خواهیم داشت.

۳- با توجه به نتیجه هایی که از سوال های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله های

زیر حل شده است. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است:

با جمع طرفین یکی از

$$\begin{array}{l} x-y=1 \\ x+y=3 \end{array} \quad \text{الف)}$$

$$2x=4$$

$$x=2 \text{ و } x+y=3$$

$$2+y=3 \rightarrow y=1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2 \times \begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-2y=6 \\ x+2y=4 \end{cases}$$

$$5x=10$$

$$x=2 \text{ و } x+2y=4$$

$$2+2y=4$$

$$2y=2 \rightarrow y=1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ جواب دستگاه}$$

با ضرب عدد در طرفین تساوی یکی از ضرایب عددی می شود و با جمع طرفین یکی از مجهولات حذف می شود و مانند قسمت الف حل می شود.

یکی از راه های حل کردن دستگاه معادله های خطی، حذف کردن  $x$  یا  $y$  است تا

به یک معادله یک مجهولی برسیم؛ نام این روش، حذفی است.

کارد در کلاس

دستگاه های معادله های خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x-y= \\ 4x+2y=6 \end{cases} \quad \text{۱) طرف دوم مشخص نیست}$$

$$\begin{cases} -2(3x-5y=1) \\ 2(2x+3y=7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x+10y=-2 \\ 4x+9y=14 \end{cases}$$

$$19y=19$$

$$y=\frac{19}{19}=1$$

$$3x-5 \times 1=1$$

$$3x=5+1=6$$

$$x=\frac{6}{3}=2$$

$$\begin{cases} -1(3x+2y=50) \\ 2(2x+2y=35) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x-2y=-50 \\ 4x+4y=70 \end{cases}$$

$$-x=-15 \rightarrow x=15$$

$$3 \times 15 + 2y = 50$$

$$2y = 50 - 45 = 5$$

$$y = \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 5 \\ \hline 2 \end{array}$$

۱- دستگاه معادله های خطی زیر را به روش دیگری نیز می توان حل کرد.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{1}$$

(راهنمایی: هدف این است که به یک معادله یک مجهولی برسیم؛ بنابراین مقدار  $y$  را از معادله

پایین در معادله بالا قرار دهید تا یک معادله یک مجهولی به دست آید؛ نام این روش، جایگزینی است).

$$2x - 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 5 \rightarrow 2x - x + 2 = 5 \rightarrow x = 5 - 2 = 3$$

نقشه بالا

۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتیمتر کمتر است. اگر محیط مستطیل

۲۴ سانتیمتر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش آموز حل شده است. روش های هر کدام را توضیح دهید و کامل کنید.

روش ۱:

روش جایگزینی حل مسئله  
طول مستطیل و  $x$ : عرض مستطیل  $2x - 3$

$$محیط = 2(x + 2x - 3) = 24$$

$$3x - 3 = 12 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5 \quad \text{و} \quad \text{طول} = 2 \times 5 - 3 = 7$$

روش ۲:

$y$ : طول مستطیل و  $x$ : عرض مستطیل

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + y) = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y - 2y = 3 - 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -3y = -21 \end{cases} \rightarrow y = 7$$

با نوشتن دو معادله خطی و حل دستگاه های

معادله های خطی به روش حذفی محاسبه می شود

$$y = 2x - 3 \rightarrow 7 = 2x - 3 \rightarrow 2x = 7 + 3 \rightarrow x = 5$$

روش ۳:  
 $y$ : طول مستطیل و  $x$ : عرض مستطیل

$$y = 2x - 3$$

$$2(x + y) = 24 \rightarrow 2(x + 2x - 3) = 24$$

بین روش های اول و سوم چه شباهتی هست؟

هر دو از روش جایگزینی استفاده کرده اند

پاسخ ص ۱۱۲

سوال ۵

بیشتر مرغ در ۶۰٪

$$\begin{cases} -2x + y = 20 \\ 4x + 2y = 54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = -40 \\ 4x + 2y = 54 \end{cases}$$

$$\underline{2x = 14}$$

$$x = 7$$

$$x + y = 20$$

$$y = 20 - 7 = 13$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 6y = 14 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

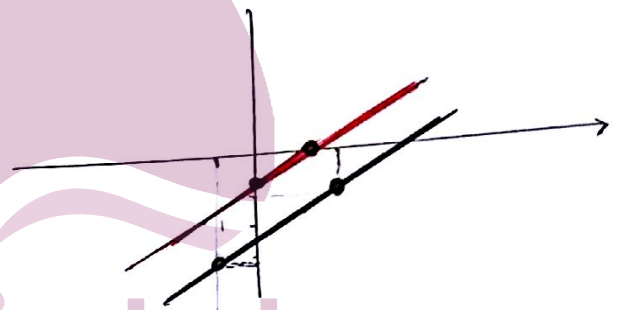
سوال ۶ معادله جواب ندارد.

$$2x - 3y = 7$$

x	-1	2
y	-3	-1
	-1	2
	-3	-1

$$4x - 6y = 5$$

x	0	5/4
y	-5/6	0
	0	5/4
	-5/6	0



دو خط باهم موازیند و محل برخورد ندارند

$$2x - 3y = 7 \rightarrow -3y = -2x + 7 \rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

$$4x - 6y = 5 \rightarrow -6y = -4x + 5 \rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$$

تیب خطها برابرند پس خطوط موازیند و هیچگاه تقاطع نمی کنند

در نتیجه معادله جواب ندارد



$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ x = 2 \end{cases}$$

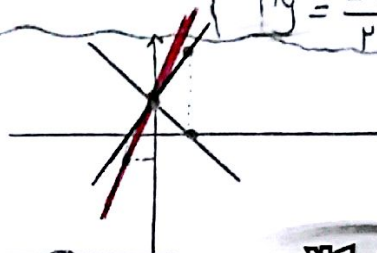
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y = 4 - x \end{cases} \Rightarrow y = 2$$

$$\begin{cases} 2x - 7y - 2 = 0 \rightarrow 2x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{2} \\ x + y - 1 = 0 \rightarrow \frac{9}{2} + y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 - \frac{9}{2} \\ y = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1x + 1 \\ y = 2x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$$



سوال ۴

هر سه خط یک جواب مشترک دارند

### کار در کلاس

دستگاه‌های زیر را به روش جایگزینی حل کنید.

$$-y = 15 - 14 - 1 \rightarrow y = -1$$

$$\begin{cases} x - 2y = 7 \rightarrow x = 2y + 7 \\ 2x - 7y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2(-1) + 7 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \rightarrow y = 2x - 6 \\ 2x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2(5) - 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 4y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 18 \\ x = \frac{18}{5} \end{cases}$$

$$x = \frac{18}{5}$$

$$y = \frac{18}{5}$$

$$\begin{cases} 2(x - y) + 3y = 4 \rightarrow 2x - 2y + 3y = 4 \\ 3x - 2(2x - y) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 4x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

در باب ۸

دو عدد توانان را با یک جواب برای x و y طوری تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$2x - 7y - 2 = 0 \quad x + y - 1 = 0 \quad x + y = 1$$

در باب ۸

و ۲ حواله بود

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \rightarrow 1 - y = 1 \rightarrow y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + b \\ 0 = -\frac{2}{3}x + b \end{cases} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

۴- در معادله  $y = ax + 1$  اگر به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، معادله خط‌های زیادی به دست می‌آید. به ازای  $a = 1$  و  $a = 2$  و  $a = -1$  این خط‌ها را رسم کنید؛ این خطوط چه ویژگی مشترکی دارند؟

۵- در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. پاهای آنها ۵۶ عدد است. در این مزرعه، چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد)

پاسخ در صفحه قبل

۶- دستگاه معادله خطی زیر را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

آیا این دستگاه جواب دارد؟

شیب هر دو خط را به دست آورید. توضیح دهید چرا نقطه مشترکی به عنوان جواب معادله به دست نمی‌آید.

۷- مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل دستگاه معادلات به دست آورید.

$$x = \text{سن علی}$$

$$y = \text{سن پدر}$$

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ y - x = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x = 70 - 48 = 22 \end{cases}$$

سن علی

$$2y = 94$$

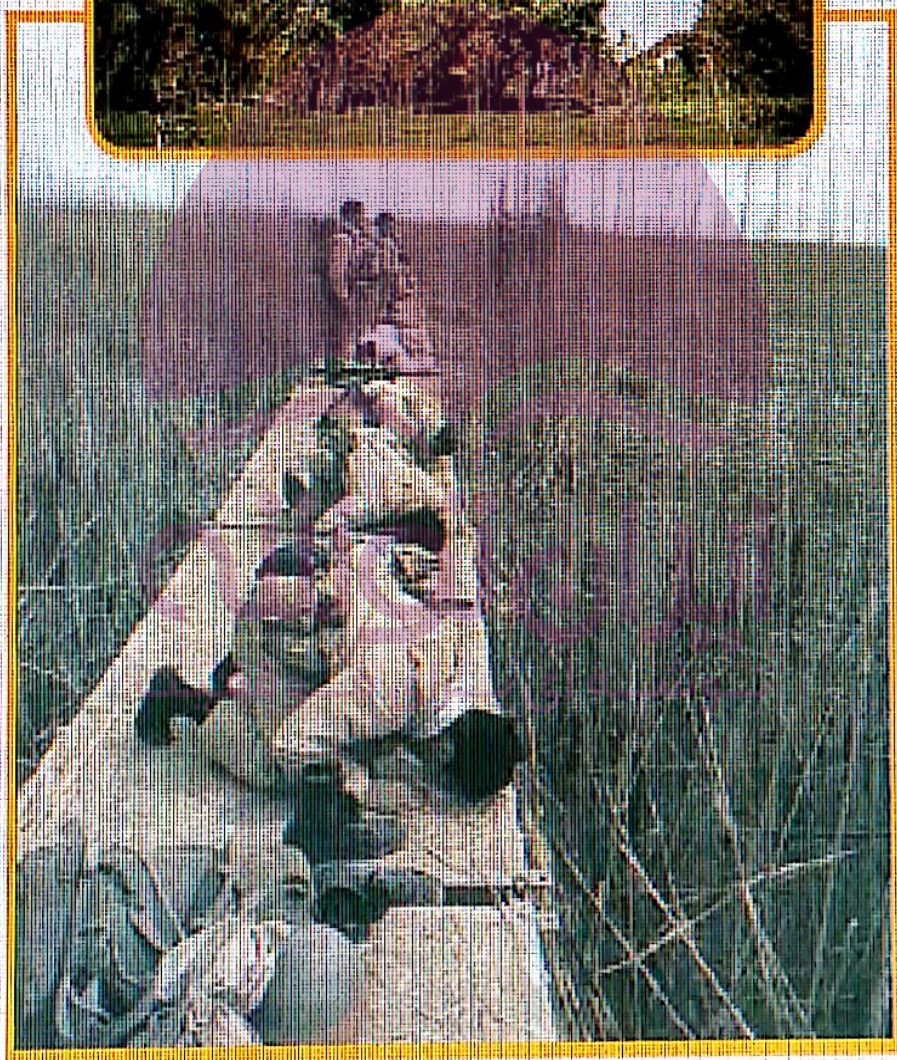
$$y = 48$$

سن پدر





# عبارت های گویا



پل ها نقش اساسی در زندگی انسان دارند. انواع مختلفی از پل ها وجود دارند و در موارد زیادی نیروهای وارد بر آنها از فرمول های پیچیده است. می آیند که باریک عبارت گویا بیان می شوند. مثلاً در مورد پل های عابر پیاده بار محاسباتی از دستور  $\frac{150}{L+150} \times 2$  به دست می آیند که در آن  $L$  طول بار گذارین شده بر حسب متر است.



مسئله

طول مستطیلی ۴ سانتیمتر از عرض آن بیشتر است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل  $\frac{2}{3}$  باشد، طول و عرض آن را به دست آورید.

اگر  $x$  را عرض مستطیل در نظر بگیریم، طول آن  $x+4$  است و نسبت عرض به طول را می‌توان با  $\frac{x}{x+4}$  نمایش داد؛ بنابراین:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2x + 8 \Rightarrow x = 8 \quad \text{عرض} \quad \text{طول} = 12$$

عبارت  $\frac{x}{x+4}$  را، که نسبت دو چندجمله‌ای است، عبارت گویا می‌نامیم.

به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند.

عبارت‌های گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ به طور مثال سرعت متوسط اتومبیلی که مسیری را با سرعت  $v_1$  طی کرده و سپس از همان مسیر با سرعت  $v_2$  بازگشته است از رابطه  $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$  به دست می‌آید که عبارت گویای جبری است. برخی از مثال‌های دیگر از این قرار است:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2} \quad \text{میانگین حسابی دو عدد } a \text{ و } b \quad \frac{v^2}{2k} = 122 \quad \text{محاسبه جرم یک جسم با سرعت } v \text{ و انرژی جنبشی } k$$

با توجه به تعریف بالا عبارت‌های زیر گویا هستند:

$$\frac{2x-5}{5x^2-2x^2+1} \text{ و } \frac{x+5}{x-1} \text{ و } \frac{-a}{4} \text{ و } \frac{2}{5} \text{ و } \frac{x-3}{4} \text{ و } \frac{x}{y} \text{ و } \frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{9xy}$$

$$\frac{1}{x} \text{ و } \frac{10}{x+2} \text{ و } \frac{3x+\sqrt{7}}{x^2} \text{ و } \frac{xy^2}{(x-y)^2} \text{ و } \frac{x^2}{1} \text{ و } \frac{-a}{b} \text{ و } x^2+2x-7$$

اما عبارت‌های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$$\sqrt{xy} \text{ و } \frac{\sqrt{x}}{x+y} \text{ و } |x-y| \text{ و } \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

چون چندجمله‌ای نیستند



## کار در کلاس

کدام یک از عبارت‌های زیر گویا است؟

$$\frac{\sqrt{y}}{x-1} \quad \frac{x+6}{3} \quad \frac{ah}{2} \quad \frac{\sqrt{3+x}}{5} \quad \frac{\sqrt{2x}}{25} \quad \frac{|x|+|y|}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{y}+1}{x^2} \quad \frac{x-5}{\sqrt{3}+1} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \frac{mn+n^2}{5-n} \quad 14 \quad \frac{3-a}{2+x}$$

## فعالیت

مقدار عددی عبارت  $\frac{x+5}{x-3}$  را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر به دست آورید :

x	-2	7	$\frac{1}{2}$	0	-1	-5
$\frac{x+5}{x-3}$	$\frac{-2+5}{-2-3} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$	$\frac{7+5}{7-3} = \frac{12}{4} = 3$	$\frac{\frac{1}{2}+5}{\frac{1}{2}-3} = \frac{\frac{11}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{11}{5}$	$\frac{0+5}{0-3} = -\frac{5}{3}$	$\frac{-1+5}{-1-3} = \frac{4}{-4} = -1$	$\frac{-5+5}{-5-3} = \frac{0}{-8} = 0$

به ازای  $x=3$  مخرج عبارت گویای  $\frac{x+5}{x-3}$  مساوی صفر می‌شود و همان‌گونه که از قبل می‌دانید  $\frac{8}{8} = 1$  به عنوان عدد تعریف نمی‌شود.

برای تعیین همه مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می‌شود، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به ازای آنها مخرج کسر صفر می‌شود؛ به عبارت دیگر این مقادیر را نمی‌توان به جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

مثال : عبارت گویای  $\frac{7x^2+1}{(x-1)(x+2)}$  به ازای چه مقادیری از  $x$  تعریف نشده است؟

حل : چه مقادیری مخرج کسر را صفر می‌کند؟

برای یافتن این عددها، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ یعنی :

$$(x-1)(x+2)=0$$

از طرفی وقتی حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها صفر است؛ لذا :

$$\begin{cases} (x-1)=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{یا} \\ (x+2)=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

بنابراین عبارت گویای فوق به ازای  $x=1$  و  $x=-2$  تعریف نشده است.

## کار در کلاس

هر یک از عبارت های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

عصا کاظمی

الف)  $\frac{8x+5}{2}$

ب)  $\frac{y+x}{x}$

$x=0$

ج)  $\frac{2b+1}{2b-1}$   $2b-1=0 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

د)  $\frac{3x}{x^2+4}$

ه)  $\frac{x}{x^2-1}$

$x^2-1=0$   
 $x=1$   
 $x=-1$

و)  $\frac{a+5}{a^2-5a+6}$

$a^2-5a+6=0$   
 $(a-2)(a-3)=0$   
 $a=2$  یا  $a=3$

ساده کردن یک عبارت گویا

کسر  $\frac{36}{48}$  با کسرهای  $\frac{9}{12}$ ،  $\frac{6}{8}$ ،  $\frac{18}{24}$  و  $\frac{3}{4}$  مساوی است. بین این کسرها  $\frac{3}{4}$  کسری است که

دیگر قابل ساده شدن نیست؛ در واقع:

$$\frac{36}{48} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{3}{4}$$

در ساده کردن هر عدد گویا می توان صورت و مخرج را به عددی غیر صفر تقسیم کرد؛ یعنی

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای  $\frac{AC}{BC}$  داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0 \text{ و } C \neq 0 \text{ و } C \text{ چند جمله ای هستند})$$

## فعالیت

توضیح دهید که هر یک از عبارت های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف)  $\frac{4x^2y^3}{10y^4x^2y^3} = \frac{2}{5}$

ب)  $\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3} = \frac{(x+3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+3}{x+1}$

۱۱۶

از تجزیه صورت و مخرج استفاده می شود

دوین عبارت مشترک به هم ساده می شود

از ب.م.م. صورت و مخرج استفاده می شود

نویسنده  
دانشگاه

$$ج) \frac{y^2-9}{3y+9} = \frac{(y+3)(y-3)}{3(y+3)} = \frac{y-3}{3}$$

$$د) \frac{14ab^2}{2 \cdot a^2b^2} = \frac{2b^2 \cdot 7a}{2a \cdot b^2} = \frac{7b^2}{a} \quad ه) \frac{b-5}{5-b} = \frac{b-5}{-(b-5)} = -1$$

فضا کاغذ

### کاردر کلاس

۱- عبارت های گویای زیر را ساده کنید :

$$\frac{(m-4)(m+4)}{-(m-4)} = -(m+4) \quad الف) \frac{m^2-16}{4-m}$$

$$ب) \frac{6m+18}{7m+21} = \frac{6(m+3)}{7(m+3)} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{(a+2)(a-7)}{(a+2)(a-1)} = \frac{a-7}{a-1} \quad ج) \frac{a^2-5a-14}{a^2+a-2}$$

$$د) \frac{x^2-y^2}{y-x} = \frac{(x-y)(x+y)}{-(y-x)} = \frac{(x-y)(x+y)}{-(x-y)} = -(x+y)$$

۲- عبارت  $\frac{a+ax}{a}$  به دو شکل ساده شده ؛ کدام درست و کدام نادرست است ؟

الف) نادرست  $\frac{a+ax}{x} = a+x$

ب) درست  $\frac{a+ax}{a} = \frac{a(1+x)}{a} = 1+x$

### تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را به دست آورید که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است.

$3a, b \neq 0$  الف)  $\frac{5x}{3ab^2}$

ب)  $\frac{2y}{y(2y-6)}$   $\begin{cases} y=0 \\ 2y-6=0 \\ y=3 \end{cases}$

ج)  $\frac{2p}{p^2-p-12}$   $\begin{cases} p^2-p-12=0 \\ (p-4)(p+3)=0 \\ p=4 \text{ یا } p=-3 \end{cases}$

د)  $\frac{2x+5}{x}$   $\begin{cases} 2x+5=0 \\ x=-\frac{5}{2} \end{cases}$

ه)  $\frac{x^2-1}{x+5}$   $\begin{cases} x^2-1=0 \\ x+5=0 \end{cases}$

و)  $\frac{a+3}{2a+1}$   $2a+1=0 \rightarrow a=-\frac{1}{2}$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید :

$$\frac{-(m-3)}{(m-2)(m-2)} = \frac{-1}{m-2} \quad الف) \frac{3-x}{x^2-5x+6}$$

$$ب) \frac{4x^2+8x}{12x+24}$$

$$ج) \frac{24x^2}{12x^2-6x}$$

$$د) \frac{y^2-2y^2-3y}{y^2+y}$$

$$ه) \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$و) \frac{16x^2-9y^2}{8x-6y}$$

ب)  $\frac{4x(x+2)}{12(x+2)} = \frac{x}{3}$

ج)  $\frac{4x^2}{4x(2x-1)} = \frac{x}{2x-1}$

د)  $\frac{y(y^2-2y-3)}{y(y+1)} = \frac{y^2-2y-3}{y+1} = \frac{(y+1)(y-3)}{y+1} = y-3$

ه)  $\frac{(1-t^2)(1+t^2)}{(1+t^2)} = 1-t^2$

و)  $\frac{(4x-3y)(4x+3y)}{2(4x-3y)} = \frac{4x+3y}{2}$



$$\text{ز) } \frac{6a^2b^2}{2ab^4} = \frac{3a}{b^2} \quad \text{ح) } \frac{-2a-8}{a^2+2a-8} = \frac{-2(a+4)}{(a+4)(a-2)} = \frac{-2}{a-2}$$

۲- عبارت‌هایی را که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است، معلوم کنید.

$$\text{الف) } \frac{2y+3}{2y-3} \quad \text{ب) } \frac{2y-3}{3-2y} = \frac{-(3-2y)}{3-2y} = -1$$

$$\text{ج) } \frac{2y+3}{3+2y} = \frac{3+2y}{3+2y} = 1 \quad \text{د) } \frac{2y+3}{-2y-3} = \frac{2y+3}{-(2y+3)} = -1$$

سوال خرد غریب - هر یک از عبارت‌های داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

- ۱ → ۹  
۲ → ۷  
۳ → ۱۰  
۴ → ۶  
۵ → ۸

۱) $\frac{a-2}{a+5}$	۲) $\frac{a+2}{a-5}$	۳) $\frac{a-2}{a-5}$	۴) $\frac{a+2}{a+5}$	۵) $\frac{2-a}{a+5}$
۶) $\frac{-a-2}{-a-5}$	۷) $\frac{-a-2}{5-a}$	۸) $\frac{a-2}{-a-5}$	۹) $\frac{2-a}{-a-5}$	۱۰) $\frac{-a+2}{-a+5}$

۵- در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

الف)  $\frac{1-z}{z} = \frac{(1-z)(z+1)}{z^2+z}$  ب)  $\frac{3x}{x-3} = \frac{3x(x+2)}{(x-3)(x+2)}$

ج)  $\frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5} (3y+2)$  د)  $\frac{(x-5)((n-2)(n+1))}{(x-2)(x-5)} = x+1$

۶- از عبارت‌های زیر، هر کدام را که با عبارت  $\frac{z(x+y)}{t}$  برابر است، مشخص کنید.

الف)  $\frac{z}{t}(x+y)$  ب)  $\frac{zx+y}{t}$  ج)  $\frac{1}{t} \times z(x+y)$  ✓

د)  $z \times \frac{x+y}{t}$  ه)  $\frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$  ✓ و)  $\frac{zx}{t} + y$

## ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا

عبارت‌های گویا را همانند عددهای گویا می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. در مورد عددهای گویا قوانین زیر را داریم:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

(b, d ≠ 0)                      (b, c, d ≠ 0)

در ضمن در مورد عبارات گویا هم هر جا که امکان داشته باشد، می‌توان عبارت را ساده کرد.

### فعالیت

توضیح دهید که هر یک از ضرب‌ها و یا تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل و حاصل عبارت را ساده کنید.

الف)  $\frac{1}{8}xy^3 \times \frac{1}{6}z^3 = \frac{1}{48}xyz^3$

ب)  $\frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{x^2-2x-15} = \frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{(x+3)(x-5)} = \frac{x}{x-5}$

ج)  $\frac{x-6}{x^2-12x+36} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12} = \frac{x-6}{(x-4)(x-4)} \times \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+4}$

د)  $\frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^2} = \frac{4x^2}{3xy} \times \frac{y^2}{8x} = \frac{y}{6}$

هـ)  $\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \div \frac{a^2+3a+2}{a-4} = \frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \times \frac{a-4}{a^2+3a+2} = \frac{(a-5)(a+1)}{a(a-4)} \times \frac{a-4}{(a+1)(a+2)} = \frac{a-5}{a(a+2)}$

$= \frac{(a+1)(a-5)}{a(a-4)} \times \frac{a-4}{(a+1)(a+2)} = \frac{a-5}{a(a+2)}$

## کار در کلاس

نصف کافیت

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\frac{(a+2)(a-2)x(a+3)}{(a+3)(a-2)(a+2)}$$

الف)  $\frac{a^2 - a - 6}{a+3} \times \frac{a+3}{a^2 - 4} = \frac{a-3}{a-2}$

ب)  $\frac{a^2b + ab^2}{a} \times \frac{3ab}{(a+b)^2} = \frac{ab(a+b) \times 3ab}{(a+b)(a+b)} = \frac{3ab^2}{(a+b)}$

$$\frac{(a+1)(a+2)}{a+2} \times \frac{a+5}{a+1}$$

ج)  $\frac{x^2 + 3x + 2}{x+2} \div \frac{x+1}{x+5} = \frac{x+5}{1}$

د)  $\frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^2} = \frac{4x^2}{3xy} \times \frac{y^2}{8x} = \frac{y}{6x}$

جمع و تفریق عبارت های گویا

جمع و تفریق عبارت های گویا مشابه جمع و تفریق عددهای گویا است؛ در مورد عددهای گویا داریم:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad (b \neq 0)$$

و  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad (b, d \neq 0)$

به طریق مشابه می توان دو عبارت گویا را جمع یا تفریق کرد.

## فعالیت

توضیح دهید که هر یک از محاسبات زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل، و مانند نمونه یک جمع و تفریق عددی مشابه آن ارائه کنید.

الف)  $\frac{3x+7}{x+2} + \frac{2x-3}{x+2} = \frac{3x+7+2x-3}{x+2} = \frac{5x+4}{x+2}$

ب)  $\frac{3x+7}{x+2} - \frac{2x-3}{x+2} = \frac{3x+7-(2x-3)}{x+2} = \frac{x+10}{x+2}$

ج)  $\frac{a^2-20}{a^2-4} + \frac{a-2}{a+2} = \frac{a^2-20+(a-2)^2}{a^2-4} =$

$$= \frac{a^2-20+a^2-4a+4}{a^2-4} = \frac{2a^2-4a-16}{a^2-4} = \frac{2(a^2-2a-8)}{a^2-4}$$

$$= \frac{2(a-4)(a+2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{2(a-4)}{a-2}$$

د)  $\frac{a+1}{a} - \frac{3a+2}{a(a+2)} = \frac{(a+1)(a+2)-(3a+2)}{a(a+2)} = \frac{a^2+3a+2-3a-2}{a(a+2)} = \frac{a^2}{a(a+2)}$

$$= \frac{a}{a+2}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{7}{10} - \frac{9 \times 7}{5 \times 10} = \frac{7}{10} - \frac{18}{10} = -\frac{11}{10}$$

$$\frac{12 \times 1}{3 \times 4 \times 12} = \frac{1-1}{12} = \frac{0}{12}$$



$$\text{الف)} \frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{x-y} = \frac{x^2 - y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y$$

$$\text{ج)} \frac{2x^2 - 14 - (x+4)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2 - 14 - x^2 - 2x + 8}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 - 2x - 6}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-4}{x-2}$$

$$\text{د)} \frac{\sqrt{x+21} + x^2 - 2x}{(x-2)(x+1)(x+3)} = \frac{x^2 + 5x + 21}{(x-2)(x+1)(x+3)} \quad *$$

### کاردر کلاس

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید. اصلاً فضای کافی برای پاسخ دادن نداد.

$$\text{الف)} \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x}$$

$$\text{ب)} \frac{6}{x} + \frac{4}{-x} = \frac{6}{x} - \frac{4}{x} = \frac{2}{x}$$

$$\text{ج)} \frac{2x^2 - 16}{x^2 - 4} - \frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x^2 - 16}{x^2 - 4} - \frac{x}{x+2} = \frac{2x^2 - 16 - x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2 - 16 - x^2 - 2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 - 2x - 16}{(x-2)(x+2)}$$

$$\text{د)} \frac{2}{3y(x-y)} + \frac{x+1}{x(x-y)^2} = \frac{2x(x-y) + 3y(x+1)}{3xy(x-y)^2} = \frac{2x^2 - 2xy + 3xy + 3y}{3xy(x-y)^2} = \frac{2x^2 + xy + 3y}{3xy(x-y)^2}$$

### ساده کردن عبارت های مرکب

هنگام ساده کردن هر عبارت گویای مرکب، همانند کسره های مرکب می توان صورت و مخرج را جداگانه ساده و سپس آنها را برهم تقسیم کرد و یا از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب (و غیر صفر) ضرب کرد.

### فعالیت

توضیح دهید که هر یک از روش های ارائه شده برای ساده کردن کسر مرکب با روش دیگر چه تفاوتی دارد؛ هر جا لازم است حل را کامل کنید. ( $x \neq 0$ )

مخرج و مخرج در عبارتی مناسب و غیر صفر ضرب شود

ابتدا صورت و مخرج را مخرج مشترک گرفته سپس ساده شود

$$\text{الف)} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\text{ب)} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \div \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\text{ب) } \frac{-x^2 - y^2}{(x+y)(x-y)} \times \frac{(x+y)(x-y)}{x^2 + y^2} = \frac{-(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = -1$$

به خارج مشترک هر دو ضرب ۵۱

۲) ابتدا خارج مشترک سری هر دو ام از صورت و خارج پس تبدیل به ضرب و ساده شدن

الف)  $\frac{\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}} = \frac{a(a+1)(\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1})}{a(a+1)(\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a})} = \frac{2(a+1) - 3a}{2a - 3(a+1)} = \frac{2a + 2 - 3a}{2a - 3a - 3} = \frac{2 - a}{-a - 3} = \frac{a-2}{a+3}$

ب)  $\frac{\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}} = \frac{2(a+1) - 3a}{a(a+1)} \div \frac{2a - 3(a+1)}{a(a+1)} = \frac{2a + 2 - 3a}{a(a+1)} \times \frac{a(a+1)}{2a - 3a - 3} = \frac{-a+2}{-a-3} = \frac{a-2}{a+3}$

$a \neq 0$  و  $a \neq -1$

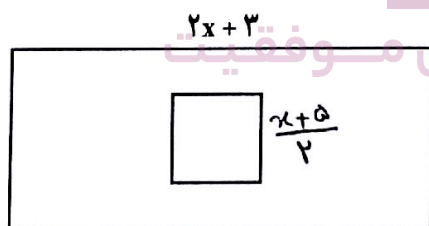
### کاردر کلاس

حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید.

الف)  $\frac{\frac{n}{1} - \frac{n^2}{n-m}}{1 + \frac{m^2}{n^2 - m^2}} = \frac{\frac{n(n-m) - n^2}{n-m}}{\frac{n^2 - m^2 + m^2}{n^2 - m^2}} = \frac{n^2 - mn - n^2}{n-m} \div \frac{n^2}{n^2 - m^2} = \frac{-mn}{n-m} \times \frac{(n-m)(n+m)}{n^2} = \frac{-m(n+m)}{n}$

ب)  $\frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} = \frac{\frac{y(x-y) - x(x+y)}{(x+y)(x-y)}}{\frac{x(x-y) + y(x+y)}{(x+y)(x-y)}} = \frac{xy - y^2 - x^2 - xy}{(x+y)(x-y)} \div \frac{x^2 - xy + xy + y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{-x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1$

### فعالیت



طول ضلع مربع در داخل مستطیل،

نصف عرض مستطیل است. اگر نسبت

مساحت مربع به مساحت مستطیل  $\frac{5}{26}$

باشد، طول و عرض مستطیل را به دست

آورید.

حل را کامل کنید و توضیح دهید که چگونه به کمک ساده کردن عبارت گویای به دست آمده و

حل معادله، پاسخ به دست می آید.

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{x+5}{2}$$

$$\text{مساحت مربع} = \left(\frac{x+5}{2}\right)^2$$

۱۲۲

\* علامت پرانتز باید شامل خارج هم باشد.

$$\text{مساحت مربع} = \frac{(x+5)^2}{2^2} = \frac{5}{2^6} \quad \text{و} \quad \text{مساحت مستطیل} = (2x+3)(x+5)$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{2^6(2x+3)(x+5)} = \frac{5}{2^6} \Rightarrow \frac{x+5}{2x+6} = \frac{5}{12} \Rightarrow 12x+60 = 10x+30 \Rightarrow 2x = -30 \Rightarrow x = -15$$

$$\Rightarrow 7x = 35 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{طول} = 2 \times 5 + 3 = 13$$

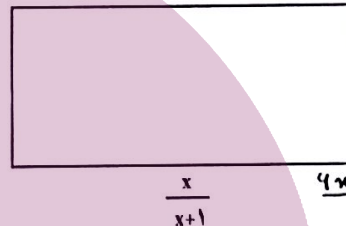
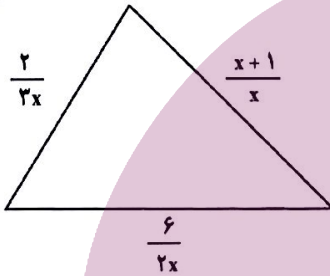
$$\text{عرض} = 5 + 5 - 10 = 0$$

$$\frac{2(x^2 + 5x + 3)}{(x+2)(x+1)}$$

### کار در کلاس

۱- محیط هر شکل را بر حسب x به دست آورید و آن را ساده کنید. (x > 0)

$$\frac{x+1}{x} + \frac{2}{3x} + \frac{4}{x^2} = \frac{3x^2 + 2x + 4}{3x^2}$$



$$\frac{2}{x+2} \times \frac{4}{x} + \frac{2}{x} \times \frac{x}{x+1} = \frac{2}{x+2} \times \frac{4}{x} + \frac{2x}{x(x+1)} = \frac{8}{x(x+2)} + \frac{2}{x+1} = \frac{8(x+1) + 2x(x+2)}{x(x+2)(x+1)} = \frac{8x+8+2x^2+4x}{x(x+2)(x+1)} = \frac{2x^2+12x+8}{x(x+2)(x+1)}$$

۲- مساحت مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.



$$(x-2) \left( \frac{x^2-x-2}{x+1} \right) = \frac{(x-2)(x^2-x-2)}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1)(x-2)}{x+1} = (x-2)^2$$

### تمرین

$$-(m+v)(m-1)$$

۱- ضرب و تقسیم های زیر را انجام دهید.

ب)  $\frac{m^2-49}{m+1} \div \frac{v-m}{m^2-1} = \frac{(m-7)(m+7)}{(m+1)} \times \frac{(m-1)(m+1)}{-(m-7)} = -(m+7)$

د)  $\frac{1-c^2}{b^2} \times \frac{b^2}{1-2c+c^2} = \frac{(1-c)(1+c)}{b(1-c)(1-c)} = \frac{1+c}{b(1-c)}$

الف)  $\frac{a^2-16}{a+4} \times \frac{a+2}{a^2-8a+16} = \frac{a+2}{a-4}$

ج)  $\frac{x^2-4x+4}{4x^2y-8xy} \div \frac{x^2+x-6}{6x^2+18} = \frac{(x-2)^2}{4xy(x-2)} \times \frac{6x^2+18}{(x+3)(x-2)} = \frac{3(x+3)}{2xy(x-2)}$

ع)  $\frac{(x-2)(x-2)}{2xy(x-2)} \times \frac{3(x+3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{3(x+3)}{2xy(x-2)}$



$$\text{الف)} \frac{x(x^2-y^2)-y(x-y)^2}{(x^2+y^2)(x-y)} = \frac{x(m-y)(m+y)-y(m-y)^2}{(x^2+y^2)(m-y)(m+y)} = \frac{(x-y)[x(m+y)-y(m-y)]}{(x^2+y^2)(m-y)(m+y)} = \frac{x^2+xy-xy+y^2}{(x^2+y^2)(m+y)}$$

$$= \frac{1}{m+y} \quad \text{ج)} \frac{(a^2-b^2)(a+b)-(a^2-b^2)}{a^2-b^2} = \frac{a^2+a^2b-b^2a-b^2-a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2b-b^2a}{a^2-b^2} = \frac{ab(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$$

۲- جمع و تفریق های زیر را انجام دهید.

$$\frac{xy-9m}{xy(a-b)}$$

$$\text{الف در ۱)} \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^2-y^2}$$

$$\text{ب)} \frac{x+y}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay} = \frac{x+y}{x(a-b)} - \frac{y+9}{y(a-b)} = \frac{xy+vy-xy-9x}{xy(a-b)}$$

$$\text{ج در ۱)} \frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}$$

$$\text{د)} \frac{2+x^2-2x}{2+x} - 2-x = \frac{x^2-2m+2-2-2m-2m-a^2}{2+m} = \frac{-2m}{2+m}$$

۳- فقط یکی از عبارت های گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$$\frac{a^2+5}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2+3}{3} \quad \text{و} \quad \frac{a^2+b^2}{a^2} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{a^2-5a}{a}} = \frac{a(a-5)}{a} = a-5$$

۴- از میان عبارت های زیر، هر کدام را که مساوی عبارت  $\frac{x}{y}$  است، معلوم کنید.

$$\text{الف)} \frac{x+3}{y+3} \quad \text{ب)} \frac{3-x}{3-y} \quad \text{ج)} \frac{x^2x}{3y} \quad \text{د)} \frac{x^2}{y^2} \quad \text{ه)} \frac{a^2x}{a^2y}$$

۵- عبارت  $\frac{-x+3}{x+5}$  با کدام یک از عبارت های زیر برابر است؟

$$\text{الف)} -\frac{x+3}{x+5} \quad \text{ب)} \sqrt{\frac{x-3}{x+5}} \quad \text{ج)} \frac{x-3}{x+5} \quad \text{د)} \frac{3-x}{x+5}$$

۶- کدام یک از عبارت های زیر به درستی ساده شده است؟

$$\text{الف)} \frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5 \quad \text{ب)} \frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$$

۷- اگر  $A=a^2-b^2$  و  $B=a^2+b^2$  و  $C=2ab$ ، حاصل عبارت  $\frac{A^2-B^2}{C^2}$  را به دست آورید.

$$\frac{A^2-B^2}{C^2} = \frac{(A-B)(A+B)}{C^2} = \frac{(a^2-b^2-a^2-b^2)(a^2-b^2+a^2+b^2)}{(2ab)^2} = \frac{-2b^2 \times 2a^2}{4a^2b^2} = -1$$

عرض =  $x$   
طول =  $2x-1$

$$\frac{\text{محیط}}{\text{مساحت}} = \frac{2(x+2x-1)}{x(2x-1)} = \frac{2(3x-1)}{x(2x-1)}$$

سوال 9 ←

۸- کدام یک از تساوی های زیر، درست و کدام یک نادرست است. موارد نادرست را اصلاح

کنید. (همه عبارت های جبری تعریف شده فرض می شود.)

الف)  $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab} \rightarrow \frac{a^2-b^2}{ab}$  ب)  $\frac{x^{12}}{x^{20}} = x^8 \rightarrow x^{-8} = \frac{1}{x^8}$

ج)  $\frac{a}{5} - \frac{v-b}{5} = \frac{a-v-b}{5} \rightarrow \frac{a-v+b}{5}$  د)  $\frac{a-b}{b-a} = 1 \rightarrow \frac{a-b}{-(a-b)} = -1$

ه)  $\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b} \rightarrow \frac{-1}{b-a}$  و)  $\frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b$

ز)  $\frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{a+b}{1+d} \rightarrow \frac{a+b}{1+d}$  ح)  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{b}$

الف ۱۵

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این

مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید. با

۱۰- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

$$\frac{-a(a-1)}{(a-1)(a+1)} \div \frac{a-a(a+1)}{(a+1)}$$

$$\frac{-a}{a+1} \times \frac{a+1}{a-a^2-a} = \frac{-a}{-a^2} = \frac{a-a^2}{-a^2} = \frac{a-a^2}{a^2} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{2x^2(x-1) + (x+1) - 2(x^2-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2 - 2x + x + 1 - 2x^2 + 2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-x+3}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + x + 1 - 2x^2 + 2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-x+3}{(x+1)(x-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y} &= \frac{x+y-2x+2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{-x+3y}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{-(x-3y)}{(x-y)(x+y)} \end{aligned}$$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که :

الف) حاصل ضرب آنها  $\frac{a-2}{a+7}$  شود.

ب) حاصل جمع آنها  $\frac{a-2}{a+7}$  شود.

۱۲- طول مستطیل مقابل را بر حسب  $x$  به دست آورید.

$$\Lambda = x^2 - 4$$

$$\frac{x^2 - x - 12}{x-4} = \frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)} = x+3$$

طول مستطیل =  $\frac{\text{مساحت}}{\text{عرض}} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x-3$

۱۲۵

## ۱- تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

- برای تقسیم دو یک جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن توان‌ها استفاده می‌کنیم.

مثال 
$$\frac{14x^5y}{2x^2y^2} = \frac{7x^3}{y} \quad \text{و} \quad \frac{-18a^2xz^4}{27x^6z} = \frac{-2a^2z^3}{3x^5}$$

## ۲- تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای

اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  اعدادی صحیح و  $d$  عددی صحیح و غیر صفر باشد، داریم:

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

به طور مشابه برای تقسیم چند جمله‌ای  $12x^3 - 18x + 2$  بر  $6$  به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{12x^3 - 18x + 2}{6} = \frac{12x^3}{6} - \frac{18x}{6} + \frac{2}{6} = 2x^3 - 3x + \frac{1}{3}$$

### فعالیت

توضیح دهید که هر یک از تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است؛ جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف)  $\frac{2a^4 + 5a^3 - 8a}{4a^2} = \frac{2a^4}{4a^2} + \frac{5a^3}{4a^2} - \frac{8a}{4a^2} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{4}a - \frac{2}{a}$

ب)  $\frac{14x^3yz - 6xy + 3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{14x^3yz}{2x^2y^2z} - \frac{6xy}{2x^2y^2z} + \frac{3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z}$   

$$= \frac{7x}{y} - \frac{3}{xy^2} + \frac{3z}{2}$$

ج)  $(8y^3 - 4y^2 + 12y) \div (-4y^2) = \frac{8y^3 - 4y^2 + 12y}{-4y^2} =$   

$$= \frac{8y^3}{-4y^2} - \frac{4y^2}{-4y^2} + \frac{12y}{-4y^2} = -2y + 1 - \frac{3}{y}$$



تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف)  $\frac{-21a^4b^2c}{28ab^6} = -\frac{3a^3c}{4b^4}$

ب)  $\frac{24x^6y - 2z + 3xyz}{x^2z} = \frac{24x^4y}{z} - \frac{2}{x^2} + \frac{3y}{x}$

۳- تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای  
اگر تقسیم مقابل را در نظر بگیریم:  $\begin{array}{r} 8 \overline{) 26} \\ \underline{24} \\ 2 \end{array}$   
عدد ۲۶ را مقسوم، ۸ را مقسوم علیه، ۳ را خارج قسمت و ۲ را باقی مانده می‌نامیم. رابطه‌های تقسیم بالا به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 3 \times 8 + 2 = 26 \\ 2 < 8 \end{cases}$$

مثال: چند جمله‌ای  $2x^2 - 7x - 15$  را بر چند جمله‌ای  $x - 5$  تقسیم کنید.

چند جمله‌ای  $2x^2 - 7x - 15$  را مقسوم و  $x - 5$  را مقسوم علیه می‌نامیم. در اولین گام باید مقسوم و مقسوم علیه را بر حسب توان‌های نزولی متغیر موجود (در اینجا  $x$ ) مرتب کرد. در مثال ما چند جمله‌ای‌های مورد نظر مرتب شده هستند.

اکنون اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم؛ یعنی:  $\frac{2x^2}{x} = 2x$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ \underline{+ 2x^2 - 10x} \quad \quad 2x \end{array}$$

حاصل ضرب  $2x$  در  $x - 5$  را به دست می‌آوریم و آن را از عبارت مقسوم کم می‌کنیم:

$$2x^2 - 7x - 15 - (2x^2 - 10x) = 2x^2 - 7x - 15 - 2x^2 + 10x = 3x - 15$$

برای آسان‌تر شدن، می‌توانیم پس از محاسبه حاصل ضرب  $2x$  در  $x - 5$ ، در کادر بالا علامت عبارت حاصل را قرینه کنیم و محاسبه را انجام دهیم؛ یعنی:

داخل کادر

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 7x - 15 & x - 5 \\ + 2x^2 - 10x & 2x \\ \hline & 3x - 15 \end{array}$$

اکنون دوباره  $2x - 15$  را بر  $x - 5$  تقسیم و مراحل قبل را تکرار می‌کنیم؛ یعنی اولین جمله عبارت  $2x - 15$  را بر اولین جمله  $x - 5$  تقسیم می‌کنیم. توجه داریم که این چند جمله‌ای‌ها نیز باید بر حسب توان‌های نزولی مرتب شده باشند؛ داریم:  $\frac{2x}{x} = 2$  این تقسیم‌ها را تا زمانی ادامه می‌دهیم که یا باقیمانده صفر شود یا درجه چند جمله‌ای باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 7x - 15 & x - 5 \\ \pm 2x^2 \pm 10x & 2x + 3 \\ \hline & 3x - 15 \\ & \pm 3x \pm 15 \\ \hline & 0 \end{array}$$

وقتی باقیمانده صفر باشد، می‌گوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

## فعالیت

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و مراحل کار را توضیح دهید. جاهای خالی را بر و حل را کامل کنید.

الف) 
$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 3x^2 + x + 7 & x^2 - 2 \\ \pm 4x^3 & 4x - 3 \\ \hline & -3x^2 + 9x + 7 \\ & \pm 3x^2 \pm 6x \\ \hline & 3x + 7 \\ & 3x + 6 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\frac{4x^3}{x^2} = 4x$$

درجه چند جمله‌ای از درجه مقسوم علیه کمتر شده

باقیمانده این تقسیم چیست؟

$$4x + 1$$

ب) 
$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x - 24 & x - 8 \\ + x^2 - 8x & x + 3 \\ \hline & 3x - 24 \\ & \pm 3x - 24 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{x} = x$$

$$\frac{3x}{x} = 3$$

باقیمانده صفر است

تمريض ۱۲۹ سوال۔



$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4V & x - 2 \\ \hline +x^2 - 4x^2 & x^2 + 2x + 2 \\ \hline 2x^2 - 4V & \\ 2x^2 - 4x^2 & \\ \hline 4x^2 - 4V & \\ -4x^2 + 8x & \\ \hline 8x - 4V & \\ -8x + 16 & \\ \hline -16 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x^2 - x^2 + x^2 - x + 1 \mid x^2 \\
 \underline{-x^2 + x^2} \\
 -x^2 - x^2 + x^2 - x + 1 \\
 \underline{+x^2 - x^2} \\
 x^2 + x^2 - x + 1 \\
 \underline{-x^2 + x^2} \\
 -x^2 - x + 1 \\
 \underline{-x^2 - x} \\
 +x + 1 \\
 \underline{+x + 1} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{>} \quad 3y^2 - 10y - 2 \quad | \quad 3y - 2 \\ \underline{-3y^2 + 7y} \phantom{-2} \quad \quad y - 2 \\ \underline{-4y + 14} \phantom{-2} \quad \quad -4y + 14 \\ \underline{-4y + 14} \phantom{-2} \quad \quad -4y + 14 \\ \underline{-4y + 14} \phantom{-2} \quad \quad -4y + 14 \\ \underline{-4y + 14} \phantom{-2} \quad \quad -4y + 14 \end{array}$$

$$\frac{-x^4 - x^2 + x + 0}{-x^4 - x^3 - x^2 - x - 1} = \frac{x^2 + x + 0}{x^3 + x^2 + 0}$$

$$\frac{+n}{-} = \frac{-n}{+}$$

$$+ x^r + x^r + d$$

~~$x^w - x^y$~~

234

1  
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000 1001 1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032 1033 1034 1035 1036 1037 1038 1039 1040

$$\frac{1}{3 \times 2}$$

~~3~~

✓

$$\text{رابطہ } (-n+1)(-n^5 - n^4 - n^3 - n^2 - n - 1) + 1$$

سوال ۳  $x(m+1) = x^r + \varepsilon u$

$$\text{عرض} = \frac{\text{حجم}}{\text{طول یا ارتفاع}}$$

$$\frac{2x^3 + 12x^2 + 21x}{2x + 1} \mid \frac{x^3 + 5x}{2x + 1}$$

$$\frac{-\gamma_m^* + \lambda^*}{\lambda^*}$$

$$\frac{Vx + x \wedge x}{x}$$

$$\frac{-V'' + \gamma \wedge \omega}{-}$$

فردی ۲

$$\begin{array}{l} Y_0 x' + Y_1 x' - 10x \\ Y_0 x + 10x' \end{array}$$

$$\frac{-10x \pm 10x}{\Delta x^2 - 10x + 1}$$

$$-1x^2 + 4x$$

$$\begin{aligned} & -14m + a \\ & = 14x + 1c \end{aligned}$$

$$\frac{+11}{+} \div \frac{+}{+} = +11$$

$$Y_{n+V} \text{ ۱۲۳۴}$$

✓  $a_{11} = 0$  خواص دور

$$C_1 = -12$$



الف 
$$\begin{array}{r} 4x^3 - 19x^2 + 14x - 4 \mid -x + 2 \\ \underline{-4x^3 + 12x^2} \phantom{-4} \\ -7x^2 + 14x - 4 \\ \underline{+7x^2 + 14x} \phantom{-4} \\ 2x - 4 \\ \underline{-2x + 4} \\ 0 \end{array}$$

ب 
$$\begin{array}{r} -x^3 + 8x - 12 \mid x + 4 \\ \underline{+x^3 + 4x^2 - 21} \\ 4x^2 + 8x - 12 \\ \underline{-4x^2 + 34x} \\ -28x - 12 \\ \underline{+28x + 112} \\ 100 \end{array}$$

۲- تقسیم زیر را انجام دهید و رابطه تقسیم را بنویسید. حل را کامل کنید.

الف 
$$\begin{array}{r} 10x^3 - 3x^2 + 2x - 19 \mid -3 + 2x^2 \\ \underline{+3x^2 - 9x} \\ 10x^3 - 3x^2 + 2x - 19 \\ \underline{+10x^3 - 15x^2} \\ 12x^2 + 2x - 19 \\ \underline{+12x^2 - 18} \\ 2x - 1 \end{array}$$

رابطه های تقسیم:  

$$(5x^2 + 9)(2x^2 - 3) + 2x - 1$$

$$= 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19$$

و درجه چند جمله ای  $2x - 1$  از  $2x^2 - 3$  کمتر است.

### کار در کلاس

تقسیم های زیر را انجام دهید.

الف 
$$6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \mid 2 - x$$

ب 
$$-x^3 - 12 + 8x \mid x + 6$$

### تمرین

۱- تقسیم های زیر را انجام دهید.

الف 
$$\frac{-2x^2y^2z^2}{18xz^5} = \frac{-x^2y^2z^2}{9}$$

ب 
$$\frac{2a^3x^2 - a^2y^2 + 15xy}{-5y^2} = -\frac{2a^3x^2}{5y^2} + \frac{a^2y^2}{5y^2} - \frac{15xy}{5y^2}$$

ج 
$$(x^2 - 27) \div (x - 2)$$

د 
$$(3y^2 - 10y - 24) \div (3y - 4)$$

ه 
$$2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \mid x + 3$$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط

تقسیم نشان دهید. 
$$-3x^4 + 4x^6 + x^2 + 5 \mid 1 - x$$

۳- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر با  $2x^2 + 15x^2 + 28x$  است. اگر ارتفاع این

جعبه  $x$  و طول آن  $x + 4$  باشد، عرض آن را به دست آورید.

۴- اگر چند جمله ای  $20x^2 + 23x^2 - 10x + a$  بر  $4x + 3$  بخش پذیر باشد،  $a$  را به دست آورید.

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت  $2x^2 - 9x + 9$  را بر هر یک از عبارت های زیر به دست آورید.

$2x + 3$  و  $2x - 3$  و  $x - 3$  و  $x + 3$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \mid x + 3 \\ \underline{2x^2 + 6x} \\ -15x + 9 \\ \underline{+15x + 45} \\ 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \mid x - 3 \\ \underline{2x^2 - 6x} \\ -3x + 9 \\ \underline{+3x - 9} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \mid x - 3 \\ \underline{2x^2 - 6x} \\ -3x + 9 \\ \underline{+3x - 9} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \mid x - 4 \\ \underline{2x^2 - 8x} \\ -x + 9 \\ \underline{+x - 4} \\ 5 \end{array}$$



# حجم و مساحت



گنبد آفراس پامی تاریخی از سده چهارم هجری است که در شهر گنبد گوروس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمام آجری جهان به شعاع می‌رود. این برج استوانه‌ای که گنبدی مخروطی شکل روی آن قرار گرفته است ۱۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل منشور روی بدنه استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شط در این فصل با حجم‌های استوانه، مخروط و منشور آشنا می‌شوید.

## درس اول: حجم و مساحت کره

در سال‌های قبل با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شد: منشوری، کروی و هرمی.



کره زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کروی است. چند نمونه دیگر از حجم‌های کروی را نام ببرید. پرتقال - هندوانه - گردو

### فعالیت

۱- به تعریف دایره به عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.

با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.



ایران تونش

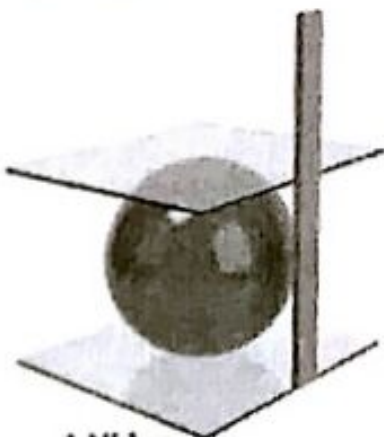
تونش‌ای برای رونق

کره مجموعه نقاطی از فضا است که مرکز آن نقطه از فاصله ثابت به این اندازه هستند. به این اندازه شعاع کره می‌گوییم.

۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت، راه محاسبه حجم کره را پیدا کنیم.

• یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.

• مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی، قطر کره را اندازه بگیرید.







• مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید به طوری که نوب کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن معاس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره  $R$  باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب  $R$  نشان دهید.

$$2R = \text{عطره: ارتفاع استوانه}$$

$$R = \text{شعاع: شعاع قاعده استوانه} \quad V = \pi R^2 \times h = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$$

• نوب را از استوانه خارج کنید و بادقت آن را بپیرد تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را در داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را بادقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود با دو نیم کره، فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.



الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟  $\frac{4}{3}$  برابر

ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟  $\frac{8}{3}$  برابر یا  $\frac{4}{3}$

ج) بنابراین حجم کره  $\frac{2}{3}$  برابر حجم استوانه است.

د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد، دستور محاسبه حجم کره به شعاع  $R$  را به دست آورید.

حجم کره‌ای به شعاع  $R$  از دستور  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  به دست می‌آید.

ایران نوشته

کار در کلاس

توشه ای برای موفقیت

$$R = 5, h = 10$$

$$\text{الف } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 125 = \frac{500}{3}\pi$$

$$\text{ب) } V = S \times h = \pi \times 5^2 \times 2 \times 5 = 250\pi$$

$$\text{ج) } V_{\text{فضای بین کره و استوانه}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = 250\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{250}{3}\pi$$

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتیمتر محاط شده است.  
الف) حجم کره را به دست آورید.  
ب) حجم استوانه را به دست آورید.  
ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.  
۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را به دست آورید.

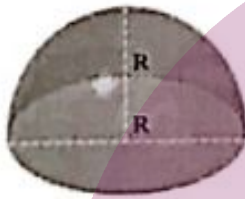
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi \times 10^3 = \frac{2000}{3}\pi$$



۱- مانند شکل مقابل، نیم کره ای را که از نصف کردن توب پلاستیکی به دست آورده‌اید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دوبار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره ها قرار گیرد و آن را بیوشانید.

این دو دایره کاغذی را هرطور که دوست دارید برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حدامکان، کاغذها روی هم قرار نگیرد و سطح نیم کره نیز دیده نشود!

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بیوشانید؟ بله در مورد مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفتگو کنید. در بعضی ها ها کاغذ چروک می شود.



۲- ثابت می شود که مساحت رویه یک نیم کره به شعاع  $R$ ، دو برابر مساحت دایره ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).

الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با:  $2\pi R^2$   
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع  $R$  برابر است با:  $4\pi R^2$

مساحت یک کره به شعاع  $R$  برابر است با:  $S = 4\pi R^2$

## کار در کلاس



۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع  $10$  سانتیمتر را پیدا کنید.  $2\pi R^2 = 2\pi \times 10^2 = 200\pi$

۲- می خواهیم یک نیم کره جوی توپر به شعاع  $10$  سانتیمتر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.  $S = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 3 \times \pi \times 10^2 = 300\pi$

بین محاسبه مساحت کل نیم کره جوی توپر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟

در مساحت نیوکره جوی توپر برابر مساحت دایره هر یک  $133$  ولی در مساحت عرق چین  $2$  برابر مساحت دایره محاسب می شود.

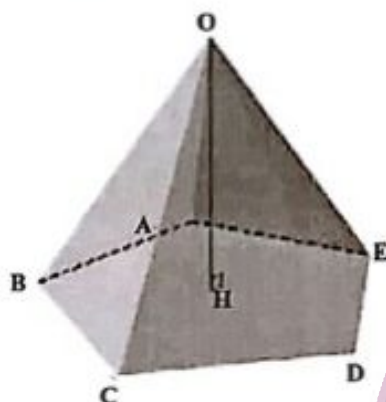








یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. سه نمونه دیگر از شکل‌های هرمی را نام ببرید. چادر، عرشا، پالت سیر، پاستوریزه سوس، کوه‌ها، درختان کاج.



هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم، یک چند ضلعی است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی، سطح‌هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس، یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی می‌گویند. در هرم مقابل نام رأس:  $O$ ، تعداد وجه‌ها:  $4$ ...

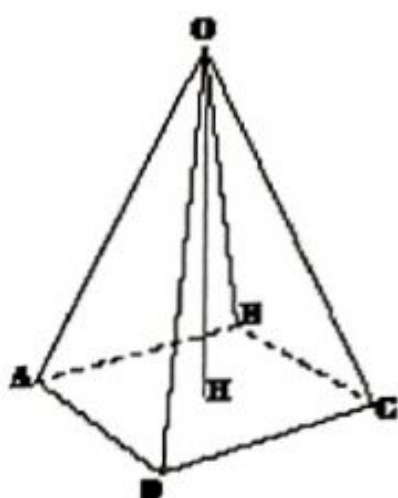
شکل وجه‌ها:  $ABCD$ ، شکل قاعده:  $ABCD$ ، نام قاعده:  $ABCD$ .

به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در شکل،  $OH$  بر قاعده  $ABCD$  عمود است و ارتفاع هرم است. معمولاً برای نام‌گذاری هرم از رأس شروع می‌کنیم؛ به عنوان مثال هرم بالا به صورت  $OABCD$  خوانده می‌شود.

## ایران توشه

### فعالیت

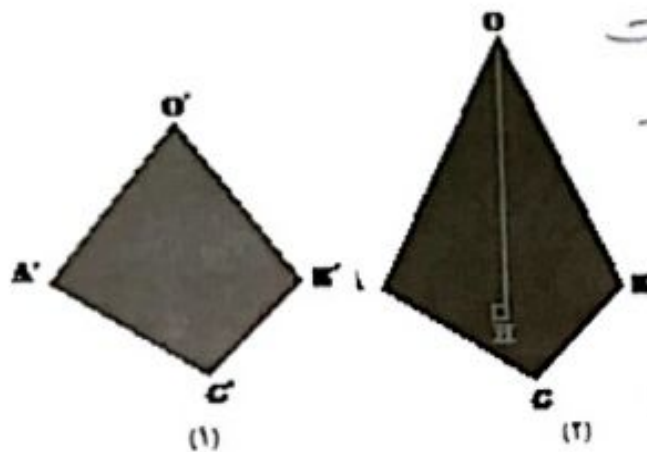
### توشه‌ای برای موفقیت



۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشد، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل: نام رأس:  $O$ ، ارتفاع:  $OH$ ، شکل قاعده:  $ABCD$ ، وجه‌های جانبی:  $ABO, BCO, CDO, DAO$ ، تعداد وجه‌ها:  $5$ ...

درج

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در



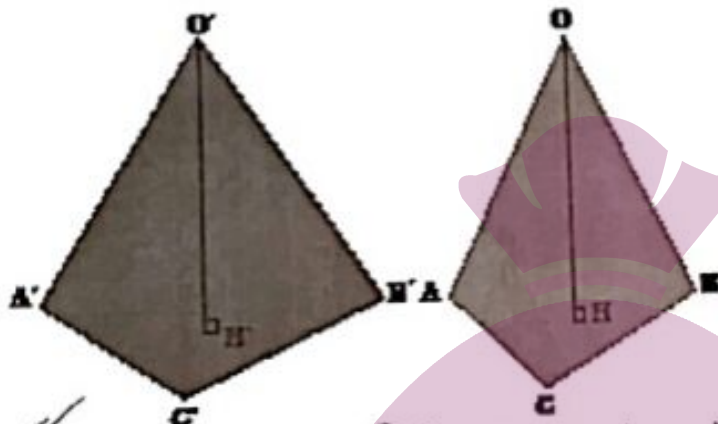
نمک های (1) و (2) مثلث های قاعده هم نه

هند

$$O'H' < OH \Rightarrow V' < V$$

در شکل های (3) و (4) ارتفاع ها برابر است

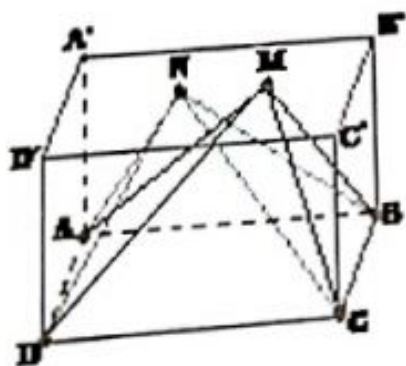
$$S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' < V$$



ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقداری وابسته است؟ به مساحت قاعده و ارتفاع بستن دارد.  
ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقداری استفاده می کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه حدسی می زنید؟ از قاعده و ارتفاع مثلث - به قاعده و ارتفاع مثلث و ارتفاع هرم  
د) اگر دو هرم دارای قاعده های با مساحت مساوی و ارتفاع های مساوی باشند، درباره حجم های آنها چه می توانید بگویند؟ حجم ها برابر می شوند.

اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم های آنها با هم برابر است.

کار در کلاس



در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل (A'B'C'D') است. چرا هرم های MABCD و NABCD دارای حجم های یکسان است؟ به این ترتیب چند هرم می توان ساخت که با هرم های بالا حجم یکسان داشته باشند؟

۱۳۶

- چون دارای قاعده و ارتفاع برابر می باشند.

بسیار هرم که با تغییر نقطه های M و N می توان حجم های متفاوت ساخت.



۱- چهار ضلعی ABED، چه نوع چهار ضلعی است؟ چرا مثلث های ABD و BDE هم مساحتند؟ عنوان دو مثلث هم مساحت

مساحت دایره‌های برابر است.  $CBED$  و  $CBAD$  دارای حجم‌های برابر است. چون تمامی هکس‌ها و مکعب‌های  $ABDE$  و  $ABCD$  و  $BDE$  و  $ABD$

۲- جزأ مثلث های DEF و ABC هم مساحتند چون دو قاعده مشترک و یک هم برآیند.

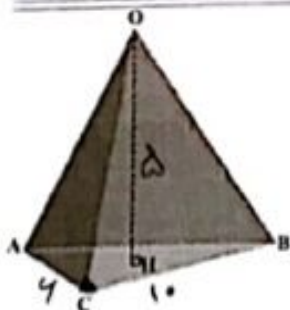
۲- جرایم های CDEF و DABC دارای حجم های برابر است. محور قائمه مضاعف نم.

۵- با توجه به پاسخ سوال های ۲ و ۴ چه نتیجه ای می گیریم؟ پس مربعهای  $CBED$ ،  $CBAD$  و  $CDEF$  دارای

حجم هر هرم با مساحت قاعده  $S$  و ارتفاع  $h$  برابر است با:

$$\cancel{V} = \frac{1}{r} Sh = \pi R h$$

## کارد در کلاس



137

در شکل مقابل هرم  $OABC$  دارای قاعده  $ABC$  است که در

أن  $AC = 6\text{ cm}$  و  $BC = 10\text{ cm}$  وزاوية  $\hat{ACB} = 90^\circ$  و  $OH$  ارتفاع

هرم مساوی 5cm است. با کامل کردن عبارت‌های زیر حجم هرم را به دست آورید.



$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{4 \times 10}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times 20 \times 5 = \frac{100}{3} \text{ cm}^3$$

## فعالیت

در شکل زیر، هرم منتظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰ cm و M وسط BC است.

۱- پاره خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟ عمود منصف BC

۲- مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ قائم الزامی

۳- اگر طول ضلع قاعده، ۱۲ cm باشد به کمک قضیه فیثاغورس  $OM^2 = OB^2 - MB^2$   
در مثلث OBM طول OM را حساب کنید.  $OM = 8 \text{ cm}$

۴- مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟ قائم الزامی

۵- به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را

به دست آورید.  $OH = 2\sqrt{7}$

۶- حجم هرم OABCD را به دست آورید.

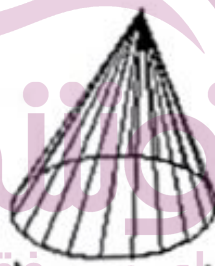
هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک

چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم،

نش ضلعی منتظم و ... . جال تعداد ضلع‌های این

چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه

شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ دایره - مخروط



مخروط، شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره

و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

از اینجا نتیجه می شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطه زیر به دست می آید:

$$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

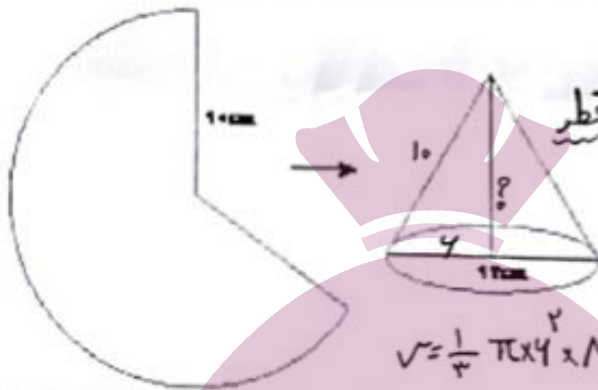


### کار در کلاس

$$h^2 = 10^2 - 4^2$$

$$h^2 = 100 - 16 = 84$$

$$h = \sqrt{84}$$



علی با قسمتی از دایره به شعاع ۱۰ cm مخروطی به قطر قاعده ۱۲ cm ساخته است. حجم مخروط را به دست آورید.

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times \sqrt{84} = 94 \pi \text{ cm}^3$$

### تمرین

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۵ و ۶ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۰ سانتیمتر باشد.

$$V = \frac{1}{3} \times 5 \times 6 \times 10 = 100 \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{1}{3} S h$$

۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴ cm باشد و وجه های جانبی آن مثلث های متساوی الساقینی به ساق های ۸ cm باشد.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 12$$

$$V = 48 \pi$$

ظرف مخروطی



۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴ cm و به ارتفاع ۱۲ cm را از آب پر می کنیم و در لیوانی استوانه ای شکل، که شعاع قاعده آن ۶ cm است، خالی می کنیم. آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می آید؟

$$V = S h = 4 \pi h$$

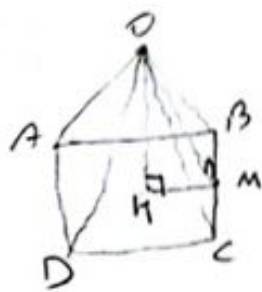
$$48 \pi = 4 \pi h$$

$$h = \frac{48}{4} = 12 \text{ cm}$$

$$4 = \frac{48}{12}$$

۱۳۹

۲



$$OM^2 = OB^2 - BM^2$$

$$OM^2 = 1^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$OM = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$OH^2 = OM^2 - MH^2$$

$$OH^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$OH = \frac{1}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} S h =$$

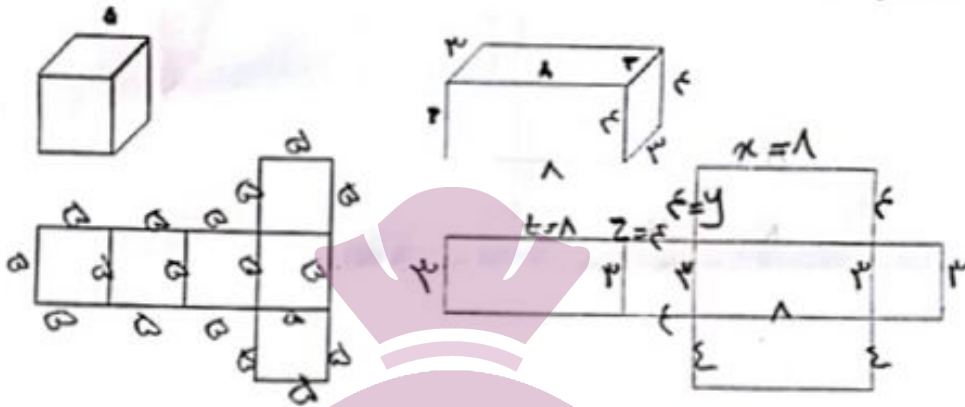
$$V = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{16}{3} \text{ cm}^3$$

### فعالیت

۱- با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گسترده هر کدام

مشخص کنید.



۲- مساحت گسترده هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

$$S = 4 \times 4 = 16$$

$$h^2 = 1^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$$

$$h = \sqrt{0} = 0$$

$$S = 4 \times 2 \sqrt{15} \times 4$$

$$= 14\sqrt{15}$$

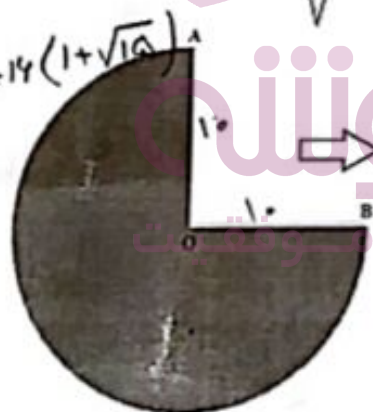
$$S_{\text{کل}} = 16 + 14\sqrt{15} = 14(1 + \sqrt{15})$$



$$h^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$$

$$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$S = \frac{5\sqrt{3} \times 10}{2} = 25\sqrt{3}$$



۲-  $\frac{3}{4}$  دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را برداشته‌ایم؛ با کمک آن یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟ چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید. با هم برابرند

$$P = 2R\pi = 2\pi \times 10 = 20\pi$$

$$P_{\text{مخروط}} = 5\pi$$

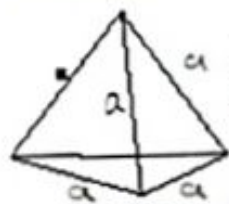
$$5\pi = 2\pi R$$

$$R = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$20\pi \div 4 = 5\pi$$

$$\text{طول کمان AB} = 5\pi$$





۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید که طول همه یال های آن 'a' است.  
 $OH = OB - BH$

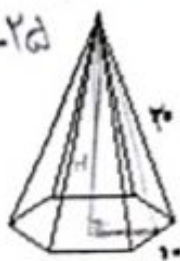


$$OH^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$OH = a\sqrt{3}, S = \frac{a\sqrt{3} \times 2a}{2} = a^2\sqrt{3}$$

$$h^2 = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375$$

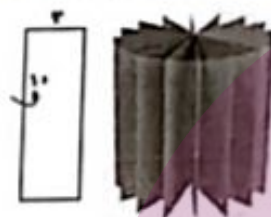
$$h = \sqrt{375}$$



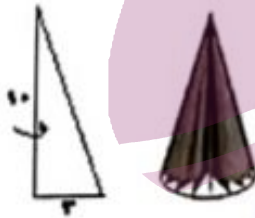
۲- با توجه به اندازه ضلع قاعده شش ضلعی منتظم و اندازه یال هرم، مساحت جانبی هرم را پیدا کنید.

$$= \frac{6 \times \sqrt{375} \times 10}{2} = 30\sqrt{375} \approx 580,9$$

### فعالیت

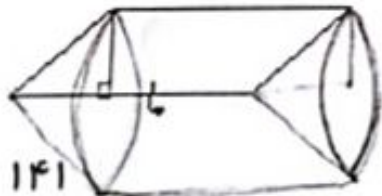


۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می آید؟ استوانه  
 شعاع قاعده شکل حاصل : ..... ارتفاع شکل حاصل : .....  
 حجم شکل حاصل را پیدا کنید.



۲- اگر مثلث قائم الزاویه را حول ضلع مشخص شده در شکل، دوران دهیم، چه شکلی به دست می آید؟ حجم آن را پیدا کنید.  
 شعاع قاعده شکل حاصل : ..... ارتفاع شکل حاصل : .....  
 .....  
 $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi 3^2 \times 4 = 36\pi$

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل را توصیف کنید.



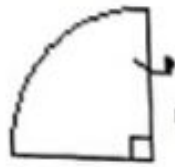
کره حاصل می شود



شکل لدا درست می شود

### توشه ای برای موفقیت

استوانه که در سمت راست آن مخروطی خالی شده و در سمت چپ به همان اندازه مخروط اضافه شده



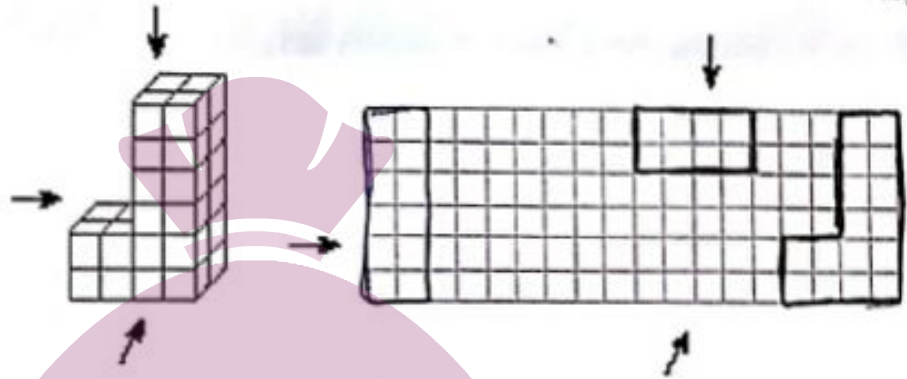
حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع 5cm را حول شعاع آن پیدا کنید  
 شماره حاصل می شود  

$$\frac{4}{3} \pi R^2 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{3} \pi \times 5^2$$

$$= \frac{250 \cdot \pi}{3}$$

فعالیت

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت های مشخص شده را رسم کنید.



۲- اگر هر کدام از هرم های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می شود؟

الف) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی (ب) هرم منتظم با قاعده مربع (ج) هرم منتظم با قاعده مثلث مثلث مساوی  
 الف شش ضلعی



۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟  
 دایره - اگر دو نیم کره مساوی تقسیم شود



۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟

از نیم کره با کمانه انداز ۱۵۰° آن برداشته شده

۱۴۲ %  $\frac{1}{8} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4}$  از کره می باشد.

## کار در کلاس



یک اسفنج مکعب شکل به ضلع  $a$  را مانند شکل مقابل بریده ایم. سطح بریده شده به چه شکلی متصل است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.

$$x^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$x = a\sqrt{2}$$

$$a = \text{عرض متصل}$$

## تمرین

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

① مکعب به ضلع  $a$   
کره به شعاع  $a$

② استوانه به ارتفاع و شعاع قاعده  $a$

③ استوانه به ارتفاع و قطر قاعده  $a$

$$\frac{a}{2}$$

$$S = \pi a \times a = \pi a^2$$

$$S = 2 \times \pi \times \frac{a}{2} = \pi a$$

$$V = \frac{\pi a^3}{6}$$

$$S = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$



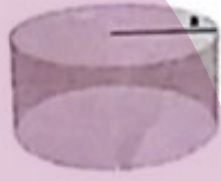
$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$



$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$



$$V = \pi a^3$$

$$S = 3\pi a^2$$



شکل سوم استوانه

$$S = 2\pi a \times a = 2\pi a^2$$

$$S = 2\pi a^2$$

$$S = 2\pi a^2 + 2\pi a^2$$

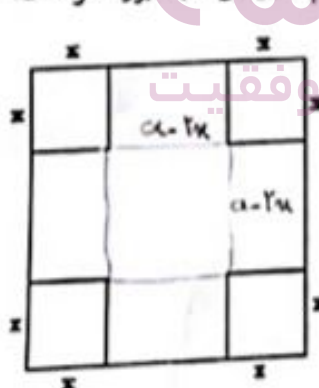
$$\frac{V}{S} = \frac{a^3}{4a^2} = \frac{a}{4}$$

$$\frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$$

$$\frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\pi a^3}{\frac{3}{2}\pi a^2} = \frac{a}{3}$$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح  $(\frac{V}{S})$  را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟



۱۴۳



$$a - 2x = 4x$$

$$a = 4x + 2x = 6x$$

۵۰۰ با ۶ برابر ۱۰۰



# ایران توشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی

- دانلود گام به گام

- دانلود آزمون گاج و قلم چی و سنجش

- دانلود فیلم و مقاله انگلیزی

- کنکور و مشاوره

 IranTooshe.Ir

 @irantooshe

 IranTooshe

