
ایران توشه
- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود گام به گام
- دانلود آزمون گاج و قلم چی و سنجش
- دانلود فیلم و مقاله انگلیسی
- کنکور و مشاوره
IranTooshe.Ir
@irantooshe
IranTooshe

درس اول: چند ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها

کار در کلاس — صفحه ۵۵

n نقطه که هیچ سه تای آنها روی یک خط واقع نیستند، مفروض اند. با توجه به استدلالی که در محاسبه‌ی تعداد قطرهای n ضلعی به کار برده‌اید، نشان دهید از هر نقطه به نقاط دیگر $(n-۱)$ پاره‌خط رسم می‌شود. بنابراین، این n نقطه را با $\frac{n(n-۱)}{۲}$ پاره‌خط می توان به هم متصل کرد. چه رابطه‌ای بین این تعداد پاره‌خط و مجموع تعداد قطرها و ضلع‌ها در n ضلعی وجود دارد؟

$\frac{n(n-۱)}{۲}$ در حقیقت حاصل جمع تعداد قطرها و تعداد ضلع‌های یک n ضلعی است، زیرا:

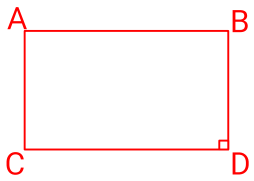
$$n+\frac{n(n-۳)}{۲}=\frac{۲n+n^۲-۳n}{۲}=\frac{n^۲-n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

کار در کلاس — صفحه ۵۶

با توجه به تعریف‌های بالا درستی هر یک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید:

الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

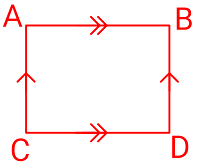
ABDC یک مستطیل است و با توجه به تعریف تمام زاویه‌های آن برابر ۹۰° است.



$$\begin{matrix}\angle A=۹۰^\circ\\ \angle C=۹۰^\circ\end{matrix}\xrightarrow[\text{توازی خطوط}]{\text{طبق عکس قضیه}} AB \parallel CD \quad \text{مورب } AC$$

ب) اگر در متوازی الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟

فرض کنیم ABCD یک متوازی الاضلاع است که AB مقابل به CD است. طبق تعریف این دو ضلع باید موازی باشند. پس:



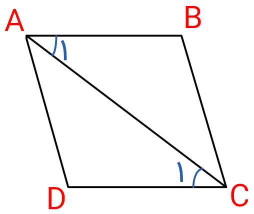
$$AB \parallel CD,\ AC\ \text{مورب} \xrightarrow{\angle A=۹۰^\circ} \angle C=۹۰^\circ \ (۱)$$

همچنین AC و BD مقابل به هم و موازی‌اند. پس:

$$AC \parallel BD,\ CD\ \text{مورب} \Rightarrow \angle D=۹۰^\circ (۲)$$

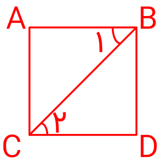
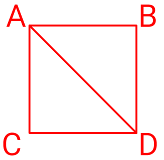
$$(۱),(۲) \Rightarrow \angle B=۹۰^\circ$$

پ) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.



در لوزی ABCD قطر AC را رسم می کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع (ض ض ض) هم نهشت اند. بنابراین دو زاویه‌ی $\angle C_۱$ و $\angle A_۱$ هم اندازه‌اند. در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.

بنابراین، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم اندازه باشند.

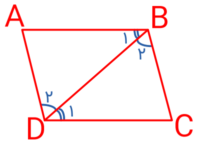
ت) مربع یک متوازی الاضلاع است.

ABDC یک مربع است. مانند استدلال سؤال قبل عمل می‌کنیم. دو مثلث ABC و BCD به حالت (ض ض ض) هم نهشت می‌شوند، در نتیجه $\angle B_1 = \angle C_2$ و از اینجا نتیجه می‌شود $AB \parallel CD$.

برای ادامه کار قطر AD را رسم کرده و ثابت می‌کنیم مثلث‌های ABD و ACD با هم، هم‌نهشت هستند. (بنا به حالت (ض ض ض)) که می‌توان نتیجه گرفت $AC \parallel BD$. ضلع‌های مقابل با هم موازی‌اند. در نتیجه، چهارضلعی مورد نظر متوازی‌الاضلاع است.

فعالیت کلاسی صفحه ۵۶

متوازی الاضلاع ABCD را در نظر بگیرید و قطر BD را رسم کنید. از موازی بودن ضلع‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



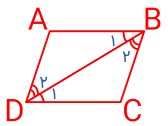
$AB \parallel DC, BD$ مورب $\Rightarrow \angle D_1 = \angle B_1$
$AD \parallel BC, BD$ مورب $\Rightarrow \angle D_2 = \angle B_2$

دو مثلث ABD و CDB به حالت (ز ض ز) هم نهشت‌اند.

در نتیجه، $AD = BC$ و $AB = DC$.

کار در کلاس صفحه ۵۷

در فعالیت ۱ مشاهده کردیم که وقتی در هر متوازی‌الاضلاع ABCD یک قطر مثلاً قطر BD را رسم می‌کنیم. دو مثلث هم نهشت ABD و CDB پدید می‌آیند. حال پرسش این است، اگر در یک چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم کنیم و $\triangle_{ABD}$ و $\triangle_{CDB}$ هم‌نهشت باشند، آیا چهارضلعی ABCD همواره متوازی‌الاضلاع است؟ اگر چنین است، آن را ثابت کنید و اگر نادرست است، مثال نقض بیاورید.

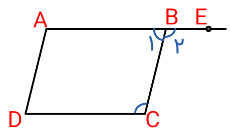


دو مثلث ABD و BDC با هم هم‌نهشت هستند. بنابراین $\angle D_1 = \angle B_1$ و $\angle D_2 = \angle B_2$ می شود با توجه به این برابری و با کمک عکس قضیه‌ی توازی خطوط می‌توان نتیجه گرفت که $AD \parallel BC$ و $AB \parallel DC$ است. هر چهارضلعی که ضلع‌های مقابل آن دو به دو موازی باشند، متوازی‌الاضلاع نام دارد.

فعالیت کلاسی صفحه ۵۷

چهار ضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

در متوازی‌الاضلاع ABCD می‌دانیم $AB \parallel CD$ و BC مورب است، پس $\angle B_2 = \angle C$.



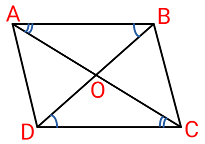
با توجه به شکل، $\angle B_2 = \angle C$ است؛ چرا؟

مکمل هستند.

$\angle B_1$ و $\angle B_2$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ بنابراین $\angle B_1$ و $\angle C$ می‌باشند.

فعالیت کلاسی — صفحه ۵۸

در متوازی‌الاضلاع ABCD، دو قطر AC و BD را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی تلاقی آن دو را O می‌نامیم. $\Delta AOB \cong \Delta COD$. چرا؟



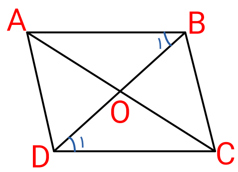
$AC,\ AB \parallel DC$ مورب
$BD,\ AB \parallel DC$ مورب
اضلاع رو به رو در متوازی الاضلاع برابرند.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle C\\ \angle B = \angle D\\ AB = DC\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta AOB \cong \Delta COD$$

بنابراین $OB = OD$ و $OA = OC$. در نتیجه؛ یکدیگر رانصف می‌کنند.

فعالیت کلاسی — صفحه ۵۸

فرض کنید در یک چهارضلعی دو قطر منصف یکدیگر باشند. چگونه نشان می‌دهید این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؟ نقطه تقاطع را O می‌نامیم. $\Delta AOB \cong \Delta OCD$. چرا؟



$$\left.\begin{array}{ll}OB = OD & \text{طبق فرض}\\ OA = OC & \\ \angle O_1 = \angle O_2 & \text{متقابل به رأس}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta AOB \cong \Delta OCD$$

اندازه‌ی $\hat{B}_1$ برابر اندازه‌ی $\angle D_1$ است. در نتیجه، ضلع AB موازی ضلع DC است. دو مثلث دیگر را در نظر بگیرید و به طور مشابه نشان دهید دو ضلع دیگر نیز موازی‌اند.

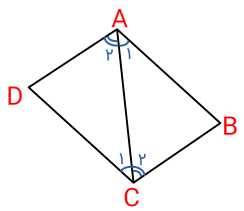
برای انجام این کار ثابت می‌کنیم ΔOAD و ΔOBC با هم متشابه هستند.

$$\left.\begin{array}{l}OB = OD\\ OA = OC\\ \angle O_3 = \angle O_4\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta OBC \cong \Delta OAD \Rightarrow \angle D_2 = \angle B_2 \Rightarrow AD \parallel BC$$

از آنجا که ضلع‌های روبه‌رو موازی هستند، پس ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.

فعالیت کلاسی — صفحه ۵۹

فرض کنید در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و هم اندازه باشند. مثلاً در چهارضلعی ABCD، ضلع‌های AB و CD هم‌اندازه و موازی‌اند. قطر AC را رسم می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l}AB = DC \ \text{طبق فرض}\\ AC \ \text{ضلع مشترک}\\ AB \parallel CD,\ AC\text{مورب}\ \ \angle C_1 = \angle A_1\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta ABC \cong \Delta CDA$$

اندازه‌ی $\angle A_1$ با اندازه‌ی $\angle C_1$ برابر است.

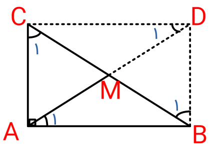
بنابراین، بنابر حالت هم نهشتی (ض ز ض) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

در نتیجه اندازه‌ی $\angle A_2$ برابر اندازه‌ی زاویه‌ی $\angle A_2$ است که از آن نتیجه می‌گیرید ضلع AD موازی ضلع $\angle C_2$ است. بنابراین چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

یعنی:

هر چهار ضلعی که دو ضلع مقابل آن هم اندازه و موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۶۰



ویژگی مهمی در مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویه ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانه‌ی وارد بر وتر است در نظر می‌گیریم.

روی نیم‌خط AM نقطه D را چنان در نظر می‌گیریم که AM=MD.

چرا چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است؟

به راحتی می توان ثابت کرد که $\Delta MDC \cong \Delta MAB$ (بنا بر حالت (ض ز ض)) و در نتیجه $\angle D_1 = \angle A_1$. از اینجا با استفاده از عکس قضیه توازی خطوط نتیجه می‌شود $AB \parallel CD$ ، ۱) و به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد دو مثلث ΔAMC و ΔMDB به حالت (ض ز ض) هم نهشت‌اند و در نتیجه $\angle C_1 = \angle B_1$ پس $CA \parallel DB$) ۲) از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

چرا این چهارضلعی مستطیل است؟

ABCD یک متوازی‌الاضلاع است و ΔABC در رأس A قائمه است، پس زاویه‌ی مقابل به $\angle A$ که $\angle D$ است برابر با $90°$ می‌شود. می‌دانیم در متوازی-الاضلاع زاویه‌های مجاور با هم مکمل هستند. در نتیجه $\angle C = \angle B = 90°$ و متوازی‌الاضلاعی که زاویه‌های آن $90°$ باشد، مستطیل است.

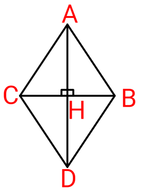
در مورد قطرها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ قطرها منصف یکدیگر و با هم برابر هستند.

اندازه‌ی AM چه رابطه‌ای با اندازه‌ی BC دارد؟ آن را بیان کنید. AM نصف BC است یعنی $AM = \frac{1}{2}BC$.

در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف اندازه‌ی وتر است.

کار در کلاس ✍ صفحه ۶۱

۱) نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.



ABDC متوازی‌الاضلاعی است که قطرهای آن بر هم عمودند. می‌دانیم که AC=BD و AB=DC (خاصیت متوازی‌الاضلاع) از طرفی قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، پس: $AH = HD$, $CH = BH$

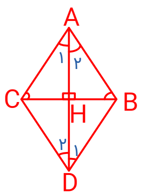
پس مثلث $\Delta AHC \cong \Delta AHB$ (بنا به حالت (ض ز ض)) و از آن نتیجه می‌شود که AC=AB . در نتیجه چهار ضلع با هم برابر است و متوازی‌الاضلاع با ضلع‌های برابر همان لوزی است.

۲) نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویه‌ی آن باشد، لوزی است.

ABDC یک متوازی الاضلاع است که قطر AD نیمساز زاویه‌های D و A است. می خواهیم ثابت کنیم که ABDC یک لوزی است، برای انجام این کار کافی است ثابت شود که چهار ضلع AB و BD و AC و CD با هم برابر هستند.

$$\begin{cases} AB = DC \\ AC = BD \end{cases} \quad (1)$$

چون ABDC یک متوازی‌الاضلاع است پس الزاماً دو مثلث ABD و ADC هم‌نهشت هستند زیرا:



$$\left.\begin{array}{l} AD \quad \text{ضلع مشترک} \\ \angle A_1 = \angle A_2 \quad \text{طبق فرض AD نیمساز} \\ \angle D_1 = \angle D_2 \quad \text{طبق فرض AD نیمساز} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta ADC \cong \Delta ABD \Rightarrow \begin{cases} DC = DB \\ AC = AB \end{cases} \quad (2)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت که AB=DC=DB=AC یعنی ABDC متوازی‌الاضلاعی است که چهارضلعش با هم برابر است پس ABDC یک لوزی است.

اکنون با توجه به ویژگی‌های مستطیل و لوزی نشان دهید در چه صورت مستطیل یا لوزی، مربع است.

مستطیلی که ضلع‌هایش با هم برابر باشد، یک مربع است.

لوزی که زاویه‌های آن قائمه باشد، یک مربع است.

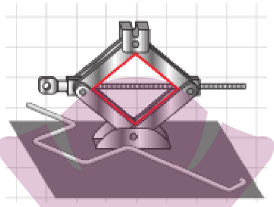
مستطیل و لوزی که قطرهایشان با هم برابر و عمودمنصف باشند، تشکیل مربع می‌دهند.

در شکل یک جک اتومبیل را می‌بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می‌دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع در آید؟

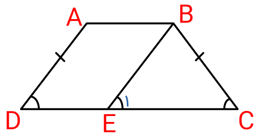
بله، زمانی که فاصله‌ی بین A و B با ارتفاع جک یکسان باشد، شکل مربع است.

اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز با هم اندازه های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، هنگام بسته شدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند، چه مشکلی ایجاد می‌شود؟

موقع بستن جک کاملاً بازوها روی هم قرار نمی گیرند، چون یکی زیاد باز می شود و دیگری کمتر باز می شود و موقع جمع کردن جک جای زیادتری خواهد گرفت.



فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۶۲



ذوزنقه‌ی متساوی الساقین ABCD را که در آن AD=BC است، در نظر می‌گیریم. از رأس B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده‌ی DC را در E قطع کند. در این صورت چهار ضلعی ABED متوازی‌الاضلاع است. زیرا $AB \parallel DE$ و $AD \parallel BE$.

چرا دو زاویه‌ی $\angle D$ و $\angle E_1$ هم اندازه‌اند؟

$AB \parallel BE$, خط مورب $DC \Rightarrow \angle D = \angle E_1$

BC=BE چرا؟

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \text{ طبق فرض مسئله} \\ ABED \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow AD = BE \end{array}\right\} \Rightarrow BC = BE$$

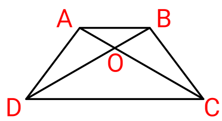
بنابراین اندازه‌ی $\angle E_1$ برابر اندازه‌ی $\angle C$ است.

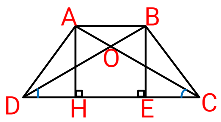
اکنون $\angle C$ و $\angle D$ هم اندازه‌اند. چرا؟

$$\left.\begin{array}{l} \angle D = \angle E_1 \\ \angle E_1 = \angle C \end{array}\right\} \Rightarrow \angle D = \angle C$$

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۶۳

در ذوزنقه‌ی ABCD:





AD=BC . از هم نهشتی کدام دو مثلث نتیجه می‌گیرید AC=BD است؟

از هم نهشتی دو مثلث $\triangle DAC$ و $\triangle DBC$ بنا به حالت (ض ز ض) می‌توان نتیجه گرفت.

اما اثبات عکس آن نیاز به تفکر بیشتر دارد. فرض کنیم DB=AC. آیا می توانید در شکل مقابل دو مثلث هم نهشت پیدا کنید که از آن AD=BC یا مساوی بودن اندازه‌های دو زاویه‌ی مجاور به قاعده نتیجه شود؟

برای انجام این کار باید ابتدا ارتفاع‌ها رسم شود.

با کمی دقت مشاهده می کنید چنین دو مثلثی ظاهراً وجود ندارند؛ اما یک ویژگی در مسئله هست که از آن هنوز استفاده نکرده‌ایم. دو قاعده‌ی ذوزنقه موازی‌اند یا رأس‌های A و B از قاعده‌ی CD به یک فاصله اند. با رسم دو ارتفاع AH و BE و هم‌نهشتی دو مثلث $\triangle AHC$ و $\triangle BED$ تساوی اندازه‌های دو زاویه را نتیجه بگیرید، به کمک آنها هم نهشتی دو مثلث $\triangle ADC$ و $\triangle BCD$ نتیجه می‌شود و به حل مسئله منجر خواهد شد.

ابتدا ثابت می‌کنیم که $\triangle BED$ و $\triangle AHC$ با هم هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{r} BE = AH \ \text{چون}\ (AB \parallel DE) \\ DB = AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle AHC \cong \triangle BED \Rightarrow \angle C_1 = \angle D_1$$

حال ثابت می‌کنیم که دو مثلث $\triangle ADC$ و $\triangle BCD$ با هم هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{l} AC = BD \\ DC\ \text{مشترک} \\ \angle D_1 = \angle C_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle BDC \cong \triangle ADC \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} BC = AD \\ \angle C = \angle D \end{array}\right.$$

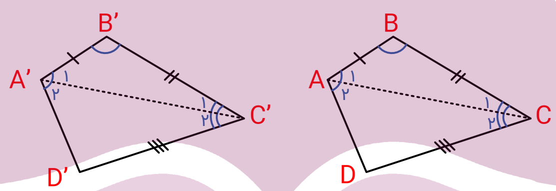
تمرین درس اول: چند ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها صفحه ۶۳

۱) در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟

در ۵ ضلعی‌ها.

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \Rightarrow \cancel{n}(n-3) = 2\cancel{n}\ (n \neq 0) \Rightarrow n-3 = 2 \Rightarrow n = 2+3 = 5$$

۲)در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟



$$\left.\begin{array}{l} \angle B = \angle B' \\ BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AC = A'C' \\ \angle C_1 = \angle C'_1 \xrightarrow[\text{}]{\text{چون } \angle C = \angle C'} \angle C_2 = \angle C'_2 \\ \angle A_1 = \angle A'_1 \end{array}\right.$$

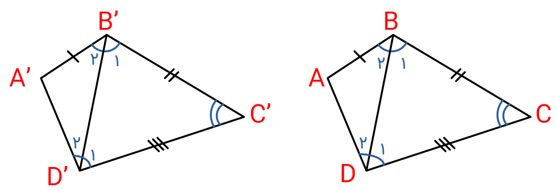
حال ثابت می‌کنیم دو مثلث $\triangle ADC$ و $\triangle A'D'C'$ هم‌نهشت هستند:

$$\left.\begin{array}{l} AC = A'C' \\ DC = D'C' \\ \angle C_2 = \angle C'_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \triangle A'D'C' \cong \triangle ADC \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \angle A_2 = \angle A'_2 \quad (2) \\ AD = A'D'\ \text{برابری ضلع چهارم} \\ \angle D = \angle D' \Rightarrow \text{برابری زاویه} \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \left.\begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A'_1 \\ \angle A_2 = \angle A'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 + \angle A_2 = \angle A'_1 + \angle A'_2 \Rightarrow \angle A = \angle A'$$

اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$ در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

ابتدا از B به D و همچنین از نقطهٔ B' به D' وصل می‌کنیم:



$$\xRightarrow{\text{برابری اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} BD = B'D' \\ \angle B_1 = \angle B'_1 \xRightarrow{\text{چون } \angle B = \angle B'} \angle B_2 = B'_2 \\ \angle D_1 = \angle D'_1 \xRightarrow{\text{چون } \angle D = \angle D'} \angle D_2 = \angle D'_2 \end{array}\right.$$

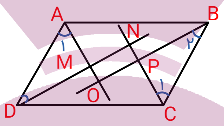
$$\left.\begin{array}{l} BC = B'C' \\ DC = D'C' \\ \angle C = \angle C' \end{array}\right\} \xRightarrow{(\text{ض ز ض})} \triangle ADC \cong \triangle B'D'C'$$

حال دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle A'B'D'$ را در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} \angle B_2 = \angle B'_2 \\ \angle D_2 = \angle B'_2 \\ BD = B'D' \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} \triangle ABD \cong \triangle A'B'D' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \angle A = \angle A' \\ AB = A'B' \\ AD = A'D' \end{array}\right.$$

برابری بقیه‌ی ضلع‌ها با هم و زاویه‌ها با هم اثبات شد.

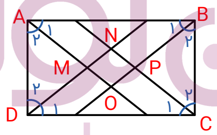
۳) از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است. اگر ABCD مستطیل باشد، نشان دهید چهارضلعی MNPQ مربع است.



چون زاویه‌های روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع با هم برابرند، پس:

$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle C \xRightarrow[\text{نیمسازند}]{CN, AQ} \angle A_1 = \angle C_1 \\ \angle B = \angle D \xRightarrow[\text{نیمسازند}]{DN, BQ} \angle B_2 = \angle D_2 \\ \text{اضلاع رو به رو در متوازی الاضلاع } AD = BC \end{array}\right\} \xRightarrow{(\text{ز ض ز})} \triangle AMD \cong \triangle BPC \xRightarrow{\text{برابر اجزای متناظر}} \angle P = \angle M$$

از طرفی می‌دانیم که $\angle B + \angle C = 180^\circ$ طبق خاصیت متوازی‌الاضلاع، پس حاصل جمع نصف آنها برابر با 90° می‌شود، یعنی $\angle B_2 + \angle C_1 = 90^\circ$. بنابراین $\angle P = \angle M = 90^\circ$. به همین ترتیب در دو مثلث $\triangle AQB$ و $\triangle DNC$ می‌توان ثابت کرد که $\angle N = \angle Q = 90^\circ$. از برابری $\angle N$ و $\angle P$ نتیجه می‌شود که $QP \parallel MN$ و همچنین برابری $\angle P$ و $\angle Q$، داریم $NP \parallel MQ$ ، بنابراین در چهارضلعی MNPQ ضلع ها دو به دو موازی هستند و زاویه‌ها برابر با 90° است، پس این چهارضلعی مستطیل است.



حال فرض کنیم ABCD یک مستطیل است که نیمسازهای آن رسم شده است، می‌خواهیم ثابت کنیم که MNPQ یک مربع است.

از آن‌جا که مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است و با توجه به قسمت قبل می‌دانیم که MNPQ یک مستطیل است، پس تنها کافی است که ثابت کنیم چهار ضلع با هم برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ \angle B_1 = \angle C_1 \\ \angle A_1 = \angle D_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\text{این دو متساوی الساقین هستند.}}{\triangle AQB \cong \triangle DNC} \Rightarrow AQ = BQ \qquad (1)$$

از طرفی چون $\angle A$ و $\angle B$ با هم برابر هستند پس نصف آنها نیز با هم برابر است یعنی $\angle A_2 = \angle B_2$. با همین استدلال می‌توان نوشت که $\angle D_2 = \angle C_2$.

$$\text{ضلع های مستطیل} \left.\begin{array}{l} AD = BC \\ \angle D_2 = \angle C_2 \\ \angle A_2 = \angle B_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{(\text{ز ض ز})} \triangle AMD \cong \triangle BPC \xRightarrow{\text{برابری اجزای متناظر}} AM = BD \quad (2)$$

(دقت شود این دو مثلث متساوی‌الساقین هستند.)

رابطه‌ی (۱) را منهای رابطه‌ی (۲) می‌کنیم.

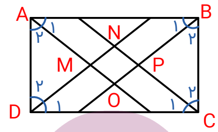
$$AQ - AM = BQ - BD \Rightarrow QM = QP \ (*)$$

از طرفی چون MNPQ یک مستطیل است پس ضلع‌های روبه‌رو با هم دوبه‌دو برابر هستند یعنی:

$$\begin{cases} MQ = NP \\ MN = PQ \end{cases} \quad (**)$$

با مقایسه دو رابطه‌ی (*) و (**) می‌توان نتیجه گرفت که $MQ = MN = PN = PQ$ و این یعنی MNPQ یک مربع است.

۴) در مسئله قبل، اگر اندازه‌های ضلع‌های مستطیلa و b باشند، اندازه‌ی ضلع مربع را بر حسب a و b را محاسبه کنید.



$$AD^2 = AM^2 + MD^2 \xrightarrow{AM=MD}$$
$$b^2 = AM^2 + AM^2 \Rightarrow AM^2 = \frac{b^2}{2} \Rightarrow AM = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

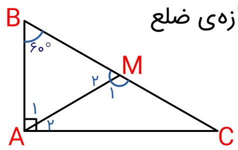
هم چنین مثلث ΔAQB نیز قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس:

$$AB^2 = AQ^2 + BQ^2 \xrightarrow{AQ=BQ} AB^2 = 2AQ^2 \Rightarrow a^2 = 2AQ^2 \Rightarrow AQ = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱) و (۲) داریم:

$$AQ - AM = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow MQ = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

۵) مثلث قائم‌الزاویه‌ی ΔABC را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازه‌ی $\angle C$ برابر 30° است، در نظر می‌گیریم. میانه ی وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMC و AMB چگونه مثلث هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{BC}{2}$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازه‌ی یک زاویه 30° باشد، اندازه‌ی ضلع مقابل آن نصف اندازه‌ی وتر است.



سپس با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث نشان دهید، $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$.

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه‌ی ۶۰ درجه باشد، اندازه‌ی ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ اندازه‌ی وتر است.

$$AM = \frac{1}{2}BC \xrightarrow{BM=MC} AM = BM = MC$$

پس در مثلث ΔAMC ، AM=MC بوده و بنابراین متساوی الساقین است. در مثلث ABM، AM=MB که می‌توان نوشت $\angle A_1 = \angle B = 60^\circ$. با توجه به این که اندازه‌ی $\angle A_1$ و $\angle B$ برابر با 60° است اندازه‌ی $\angle M_2$ نیز برابر با 60° است.

یعنی مثلث ABM مثلث متساوی الاضلاع است، پس:

$$AB = AM = BM = \frac{1}{2}BC$$

یعنث ضلع مقابل به زاویه‌ی 30° در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است.

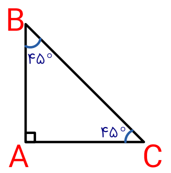
با توجه به رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2$$
$$\xrightarrow{AB=\frac{1}{2}BC} AC^2 = BC^2 - (\frac{1}{2}BC)^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - \frac{1}{4}BC^2$$
$$\Rightarrow AC^2 = \frac{3}{4}BC^2 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$$

در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 60° برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.

اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازه‌ی یک زاویه‌ی آن $۴۵°$ باشد و نشان دهید که اندازه‌ی هر ضلع زاویه‌ی قائمه در آن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ اندازه‌ی وتر است.

این مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. بنابراین AB=BC. رابطه‌ی فیثاغورث را می‌نویسیم:

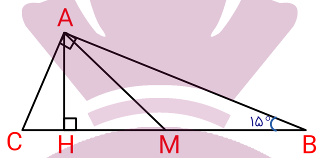


$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow AC^۲ = AB^۲ + AB^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = \frac{AC^۲}{۲} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{۲}}$$

کسر را گویا می‌کنیم: $AB = \frac{\sqrt{۲}}{۲} AC$

۶) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، اندازه‌ی زاویه‌ی B برابر $۱۵°$ است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه ی ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازه‌ی وتر است.



$AM = \frac{۱}{۲} BC \qquad (۱)$

AM میانه‌ی وارد بر وتر است، بنابراین:

در مثلث ABC واضح است که اندازه‌ی زاویه‌ی C برابر با $۷۵°$ است. AH عمود وارد بر BC را رسم می‌کنیم. در مثلث ΔAHC با توجه به اینکه $\angle H = ۹۰°$ و $\angle C = ۷۵°$ بنابراین:

$\angle A_۱ = ۱۵° \qquad (۲)$

در مثلث ΔAMB، AM=MB که می‌توان نتیجه گرفت:

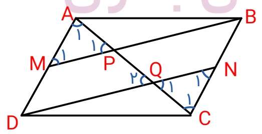
$\angle A_۳ = \angle B = ۱۵° \qquad (۳)$

$\angle A_۱ + \angle A_۲ + \angle A_۳ = ۹۰° \Rightarrow \angle A_۲ = ۶۰° \xrightarrow{\Delta AHM} \angle M_۱ = ۳۰° \qquad (۴)$

با توجه به رابطه‌ی (۴) (ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰ درجه، نصف وتر است.)

$AH = \frac{۱}{۲} AM \xrightarrow{(۱)} AH = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} BC = \frac{۱}{۴} BC \Rightarrow AH = \frac{۱}{۴} BC$

۷) در متوازی‌الاضلاع ABCD، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.



از هم نهشتی دو مثلث ADC وACB بنا به حالت (ض ض ض) نتیجه می‌گیریم که (۱) $\angle A_۱ = \angle C_۱$. همین‌طور می‌توان ثابت کرد دو مثلث MAB و NDC بنا به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند. بنابراین (۲) $\angle N_۱ = \angle M_۱$. حال ثابت می‌کنیم دو مثلث ΔQNC و ΔPAM با هم، هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{r} AM = NC \text{ نصف ضلع های روبه رو در متوازی الاضلاع} \\ \angle A_۱ = \angle C_۱ \text{ طبق (۱)} \\ \angle N_۱ = \angle M_۱ \text{ طبق (۲)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \Delta PAM \cong \Delta QNC \xrightarrow{\text{برابری اجزای متناظر}} AP = QC, \angle P_۱ = \angle Q_۱ \; (*)$$

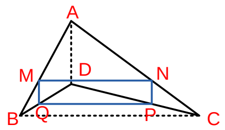
از آنجا که $\angle Q_۱$ و $\angle Q_۲$ متقابل به رأس هستند می‌توان نوشت $\angle P_۱ = \angle Q_۲$. با در نظر گرفتن خط AC به عنوان خط مورب و برابری دو زاویه‌ی $P_۱$ و $Q_۲$ می‌توان نتیجه گرفت که $MB \parallel DN$.

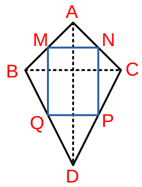
با توجه به قضیه‌ی تالس، درمثلث ADQ می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PQ} \xrightarrow{AM=MD} \frac{AP}{PQ} = ۱ \Rightarrow AP = PQ \qquad (۱)$$

با مقایسه‌ی رابطه (۱) و (*) می‌توانیم بنویسیم: AP=PQ=QC

۸) ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.





چون بیان شده است هر چهارضلعی، برای چهارضلعی های محدب و مقعر اثبات را انجام می‌دهیم. در چهارضلعی ABDC، نقاط M و N و P و Q به ترتیب نقاط وسط ضلع‌های AB، AC، CD و BD هستند. همچنین قطرها را رسم می‌کنیم. در مثلث $\triangle ABC$ چون نسبت ایجاد شده روی AC و AB با هم برابر است، طبق عکس تالس (۱) $MN \parallel BC$؛ همچنین در مثلث BCD چون نسبت‌های ایجاد شده روی ضلع‌های DC و DB با هم برابرند، پس طبق عکس تالس: (۲) $QP \parallel BC$ ، با توجه به (۱) و (۲) و این نکته که « دو خط موازی با یک خط با هم موازی‌اند». نتیجه می‌گیریم که $QP \parallel MN$. با همین روش از مثلث ADC نتیجه می‌گیریم که $NP \parallel AD$ و بعد از مثلث ABD نتیجه می‌شود که $MQ \parallel AD$. در نتیجه $MQ \parallel NP$. بنابراین چهارضلعی MNPQ یک متوازی‌الاضلاع است.

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

اگر قطرها بر هم عمود باشد، متوازی‌الاضلاع به دست آمده لوزی است و اگر قطرها با هم برابر باشند، متوازی‌الاضلاع مستطیل است.

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟

با توجه به قضیه تالس می‌توانیم تناسب‌های زیر را بنویسیم. در مثلث ABD داریم:

$$MQ \parallel AD \Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{AD} \xRightarrow[BM = \frac{1}{2}BA]{\text{M وسط AB}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}BA}{BA} = \frac{MQ}{AD} \Rightarrow \frac{MQ}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow MQ = \frac{1}{2}AD \xRightarrow[MQ = NP]{\text{MNPQ متوازی الاضلاع است}} NP = \frac{1}{2}AD$$

در مثلث BCD داریم:

$$QP \parallel BC \xRightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{DQ}{DB} = \frac{QP}{BC} \xrightarrow[DQ=\frac{1}{2}DB]{\text{Q وسط BD است}} \frac{\frac{1}{2}DB}{DB} = \frac{QP}{BC} \Rightarrow \frac{QP}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow QP = \frac{1}{2}BC \xrightarrow{QP=MN} MN = \frac{1}{2}BC$$

$$\text{محیط چهارضلعی MNPQ} = MN + NP + PQ + QM = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD = BC + AD$$

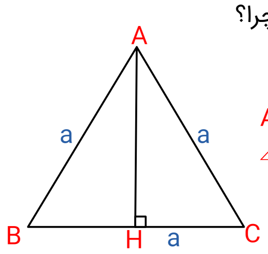
نتیجه می‌شود محیط متوازی‌الاضلاع با حاصل جمع قطرها برابر است.

درس دوم: مساحت و کاربردهای آن

کار در کلاس صفحه ۶۵

فرض کنیم اندازه‌ی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است، چرا؟

ثابت می‌کنیم ΔAHB و ΔAHC با هم همنهشت هستند.



$$\left.\begin{array}{l} AB = AC = a \\ \angle B = \angle C = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \Delta ABH \cong \Delta ACH$$

در نتیجه اجزای متناظرشان برابرند از جمله: BH=CH و این یعنی AH میانه است.

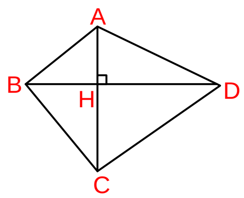
به کمک قضیه‌ی فیثاغورث نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$.

$$AH^۲ = a^۲ - (\frac{۱}{۲}a)^۲ = a^۲ - \frac{۱}{۴}a^۲ = \frac{۳}{۴}a^۲ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S = \frac{۱}{۲}(AH.BC) \rightarrow S = \frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a.a) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

فعالیت کلاسی صفحه ۶۵

در چهارضلعی ABCD دو قطر AC و DB بر هم عموداند.



$$S_{ACB} = \frac{۱}{۲}AH.BD$$

$$S_{DBC} = \frac{۱}{۲}HC.BD$$

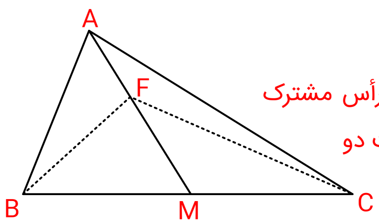
با جمع این دو مساحت داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}BD(AH+HC) = \frac{۱}{۲}BC.AC$$

بنابراین، در هر چهارضلعی که دو قطر آن به هم عمود باشد، مساحت برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر.

کار در کلاس صفحه ۶۶

نشان دهید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.



باید اثبات کنیم که دو مثلث ΔABM و ΔAMC هم مساحت هستند. قبلاً بیان شد که اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعده‌های روبه روی این رأس بر روی یک خط راست قرار گیرند، نسبت مساحت این دو مثلث برابر نسبت دو قاعده است؛ یعنی $\frac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = \frac{MB}{MC}$ و از آنجا که M وسط BC است و BM=MC داریم:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = ۱ \Rightarrow S_{ABM} = S_{AMC}$$

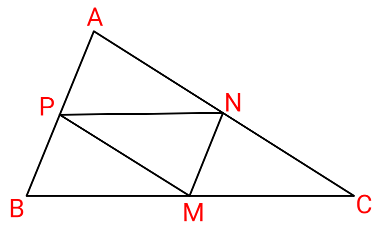
اگر F هر نقطه‌ای روی میانه‌ی AM به جز نقطه‌ی M باشد، آیا: $S_{FBM} = S_{FMC}$ ؟ چرا؟

بله، برقرار است. چون دو مثلث ایجاد شده در رأس ایجاد شده در رأس F مشترک هستند، بنابراین $\frac{S_{FMC}}{S_{FBM}} = \frac{MC}{MB}$ و از آنجا که MB=MC می‌توان نتیجه گرفت که:

$$S_{FBM} = S_{FMC}$$

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۶۶

M و N و P وسط‌های سه ضلع مثلث ABCمطابق شکل‌اند.



پاره‌خط PN موازی ضلع BC است و پاره‌خط PM موازی ضلع AC است؛ چرا؟

از آنجا که P و N به ترتیب وسط AB و AC هستند، پس:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AN}{NC}\xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}}PN\parallel BC$$

با همین استدلال داریم:

$$\frac{BP}{PA}=\frac{BM}{MC}\xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}}PM\parallel AC$$

بنابراین چهارضلعی PNCM متوازی‌الاضلاع است، در نتیجه $\triangle MNP\cong\triangle NMC$ ، چرا؟

$$\left.\begin{array}{ll}MN=MN & \text{مشترک}\\ PN=MC & \text{ضلع های مقابل در متوازی الاضلاع}\\ PM=NC & \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ض ض)}}\triangle MNP\cong\triangle NMC\qquad(***)$$

به همین ترتیب برای بقیه‌ی مثلث‌ها نیز می‌توان نشان داد که دو به دو هم نهشت‌اند.

$$\triangle APN\cong\triangle MNP\cong\triangle BPM$$

اثبات:

PNMB یک متوازی‌الاضلاع است، زیرا:

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AP}{PB}\xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}}PN\parallel BC\Rightarrow PN\parallel BM\quad(۱)$$

$$\frac{NC}{AN}=\frac{MC}{MB}\xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}}NM\parallel AB\Rightarrow NM\parallel BD\quad(۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که چهارضلعی PNMB چون ضلع‌های روبه‌رویش دوبه دو با هم موازی هستند پس متوازی الاضلاع است. حال ثابت می‌شود که $\triangle PBM\cong\triangle PNM$.

$$\left.\begin{array}{ll}PM & \text{مشترک}\\ BP=MN & \text{ضلع های مقابل در متوازی الاضلاع}\\ PN=BM & \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ض ض)}}\triangle PBM\cong\triangle PNM\quad(**)$$

در ادامه‌ی کار ثابت می‌شود که ANMP یک متوازی‌الاضلاع است چون:

$$\text{قسمت های قبل}\quad\text{نتایج}\left\{\begin{array}{l}MN\parallel AB\Rightarrow MN\parallel AP\\ PM\parallel AC\Rightarrow PM\parallel AN\end{array}\right.\Rightarrow\ \text{ANMP متوازی الاضلاع}$$

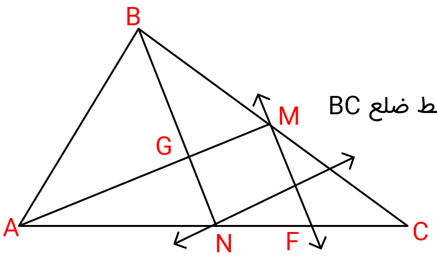
پس دو مثلث (*) $APN\cong PNM$ بنا به حالت (ض ض ض)

با مقایسه‌ی رابطه‌ی * و ** و *** داریم:

$$\triangle APN\cong\triangle BPM\cong\triangle MNP$$

فعالیت کلاسی — صفحه ۶۷

در این فعالیت ویژگی مهمی از سه میانه‌ی مثلث را ثابت می‌کنید.



دو میانه‌ی AM و BN از $\triangle ABC$ را رسم می‌کنیم. یکدیگر را در نقطه‌ی G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانه‌ی BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. چرا F وسط NC است؟

MF موازی BN است. طبق قضیه‌ی تالس $\frac{CM}{MB}=\frac{CF}{FN}$ و از آنجا که M نقطه‌ی وسط C و B است. پس $CM=MB$، در نتیجه $\frac{CF}{FN}=۱$ و این یعنی $CF=FN$. پس F هم نقطه وسط پاره خط NC می‌شود.

N وسط ضلع AC است؛ بنابراین، $AF=۳NF$. چرا؟

$$\left.\begin{array}{l} AN=NC \\ NC=۲FC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AN=۲FC \ (۱) \\ NF=FC \ (۲) \end{array}\right\} \xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{array}{l} AN+NF=۲FC+FC \\ AF=۳FC \Rightarrow AF=۳NF \end{array}$$

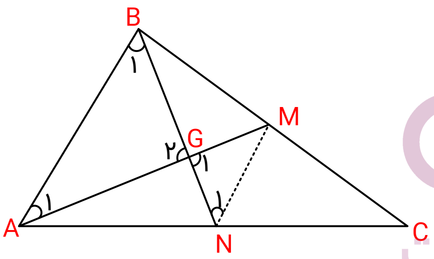
در نتیجه، $AM=۳GM$. چرا؟

مثلث $\triangle AMF$ را در نظر گرفته و از آنجا که $MF \parallel GN$ است به تناسب $\frac{GM}{AM}=\frac{NF}{AF}$ می‌رسیم. حالا با توجه رابطه‌ی $AF=۳NF$ داریم:

$$\frac{GM}{AM}=\frac{NF}{۳NF}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow AM=۳GM$$

بنابراین، $GM=\frac{۱}{۳}AM$ و $AG=\frac{۲}{۳}AM$ و G بین A و M است. در نتیجه G تنها نقطه‌ای روی نیم خط AM است که $AG=\frac{۲}{۳}AM$. مشابه آن ثابت می‌شود $BG=\frac{۲}{۳}BN$. پس برای هر دو میانه‌ی دلخواه نقطه‌ی G با این ویژگی به دست می‌آید در نتیجه هر سه میانه در G همرس‌اند.

به روش دیگر، می‌توانید از M به N وصل کنید و از تشابه دو مثلث GMN و GAB استفاده کنید؛ چون $AB=۲MN$ و $BG=۲GN$. اکنون می‌توانید مانند روش قبلی ادامه دهید.



چون M و N به ترتیب وسط BC و AC هستند، طبق عکس قضیه‌ی تالس $MN \parallel AB$

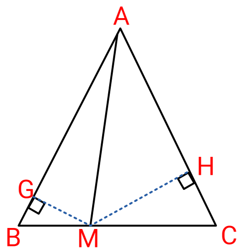
$$\left.\begin{array}{l} \hat{G}_۱=\hat{G}_۲ \ \text{متقابل به رأس} \\ MN \parallel AB,\ BN \ \text{مورب}\ \hat{N}_۱=\hat{B}_۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle GMN \sim \triangle GBA$$

و از طرفی می‌دانیم $\frac{۱}{۲}=\frac{CM}{BC}=\frac{MN}{AB}$ در نتیجه داریم:

$BG=۲GN,\ AG=۲GM$

بنابراین $GM=\frac{۱}{۳}AM$ و $AG=\frac{۲}{۳}AM$، A و G بین A و M است. در نتیجه G تنها نقطه‌ای روی نیم‌خط AM است که $AG=\frac{۲}{۳}AM$ است و متشابه آن ثابت می‌شود $BG=\frac{۲}{۳}BN$. پس برای هر دو میانه‌ی دلخواه نقطه‌ی G با این ویژگی به دست می‌آید. در نتیجه هر سه میانه در G همرس‌اند.

فعالیت کلاسی — صفحه ۶۸



در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB=AC$ است؛ نقطه‌ی دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C در نظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMC} و S_{AMB} را بنویسید.

$$S_{AMB}=\frac{۱}{۲}AB.MG$$

$$S_{AMC}=\frac{۱}{۲}AC.MH$$

مساحت مثلث $\triangle ABC$ را نیز وقتی پاره‌خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید. چه رابطه‌ای بین این مساحت ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC.BH'$ (ارتفاع وارد بر AC BH')

$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB.CH''$ (ارتفاع وارد بر AB CH'')

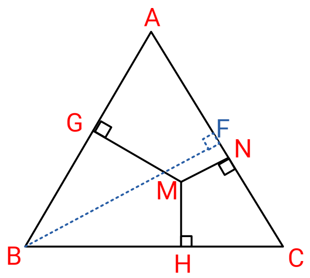
رابطه‌ی بین مساحت‌ها:

$$S_{ABC}=S_{AMB}+S_{AMC}\Rightarrow \frac{۱}{۲}AC.BH'=\frac{۱}{۲}AB.MG+\frac{۱}{۲}AC.MH\xrightarrow{AB=AC}$$
$$AC.BH'=AC(MG+MH)\Rightarrow BH'=MG+MH$$

در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که AB=AC است، مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده BC از دو ضلع دیگر برابر ارتفاع وارد شده بر ساق‌های مثلث است.

به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC ، قدر مطلق تفاضل فاصله های هر نقطه روی امتدادهای قاعده‌ی BC از خط های شامل دو ساق برابر اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق است.

فعالیت کلاسی — صفحه ۶۸



نقطه‌ی دلخواه M را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازه‌ی a در نظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید.

مساحت‌های سه مثلث MAC، MBC و MAB را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت $\triangle ABC$ چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$S_{MAC}=\frac{۱}{۲}MN.AC=\frac{۱}{۲}a.MN$$
$$S_{MBC}=\frac{۱}{۲}MH.BC=\frac{۱}{۲}a.MH$$
$$S_{MBA}=\frac{۱}{۲}MG.AB=\frac{۱}{۲}a.MG$$

حاصل جمع این سه مساحت برابر با مساحت ABC است. یعنی داریم:

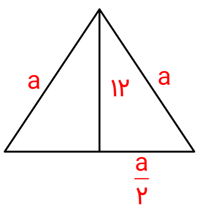
$$S_{MAC}+S_{MBC}+S_{MBA}=S_{ABC}\Rightarrow \frac{۱}{۲}a(MN+MH+MG)=\frac{۱}{۲}a.BF$$

$MH+MN+MG=BF$ ارتفاع ها با هم برابر هستند $(BN=AH=CG)$

مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.

اگر در یک مثلث متساوی‌الاضلاع فاصله‌های نقطه M درون مثلث از سه ضلع برابر ۲ و ۴ و ۶ باشد، اندازه‌ی ضلع‌مثلث را محاسبه کنید.

طبق نتیجه‌ی فوق ارتفاع این مثلث برابر است با ۱۲ و از آنجا که در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع همان میانه است، پس داریم:



$$a^۲=(\frac{a}{۲})^۲+(۱۲)^۲$$
$$a^۲-\frac{a^۲}{۴}=۱۴۴$$
$$\frac{۳a^۲}{۴}=۱۴۴\Rightarrow a^۲=\frac{۱۴۴\times ۴}{۳}=۱۹۲$$
$$a=\sqrt{۱۹۲}=۸\sqrt{۳}$$

فعالیت کلاسی — صفحه ۶۹

۱) یک چند ضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه‌ی مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

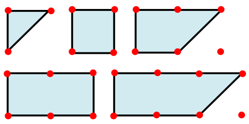
حداقل ۳ نقطه می‌تواند داشته باشد، چون حداقل تعداد ضلع‌های یک چند ضلعی ۳ تا است.

۲) یک چند ضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه‌ی درونی می‌تواند داشته باشد؟

حداقل صفر، یعنی شامل هیچ نقطه‌ی درونی نباشد.

۳) در تمام چند ضلعی‌های شبکه‌ای زیر تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای صفر است، یعنی i=۰ و تعداد نقاط مرزی، $b = ۳,۴,۵,...$.
جدول زیر را با محاسبه‌ی مساحت چند ضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.

i=۰ ,b=۳,۴,۵

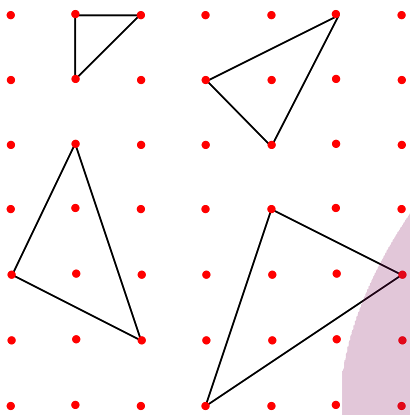


تعداد نقطه مرزی i	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$	۳

چه رابطه‌ای بین مساحت و تعداد نقاط مرزی وجود دارد؟

رابطه‌ی روبه‌رو را می‌توان نتیجه گرفت: $S = \frac{b}{۲} - ۱ + ۰$

۴) اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه داشته و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای b=۳ باشند. با توجه به شکل‌ها جدول زیر را کامل کنید. (نتیجه‌گیری $S = \frac{b}{۲} - ۱ + ۰$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده‌اید را در نظر داشته باشید.)



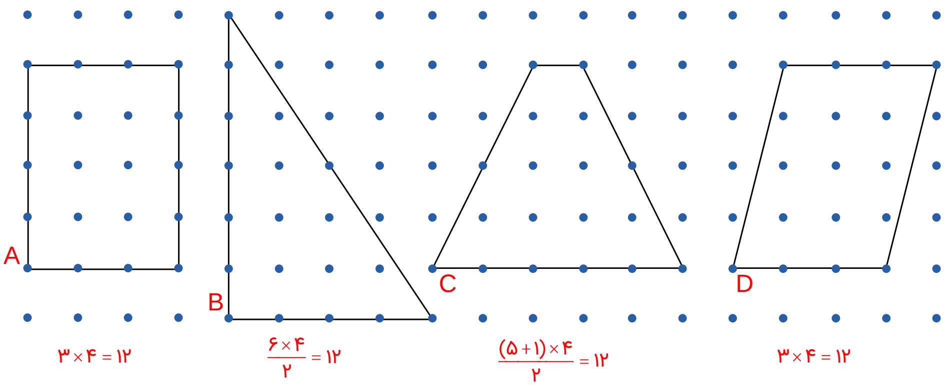
تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{۲} - ۱$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
S	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	$\frac{۹}{۲}$	$\frac{۱۱}{۲}$

با تکمیل جدول بالا و مقایسه ی اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هرچند ضلعی شبکه ای چه ارتباطی با تعداد نقاط مرزی و درونی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب ظاهر می‌شوند.

با توجه به جدول بالا می‌توان گفت که برای به دست آوردن مساحت می‌توان از رابطه‌ی روبه‌رو استفاده کرد: $S = \frac{b}{۲} - ۱ + i$

کار در کلاس صفحه ۷۱

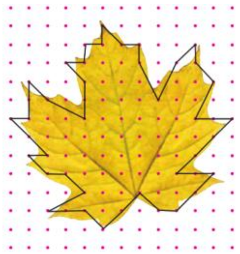
۱) چند ضلعی‌های A، B، C و D را در شکل های زیر در نظر بگیرید. ابتدا به روش های هندسی که از قبل می‌دانید، مساحت آنها را محاسبه کنید؛ سپس با تعیین تعداد نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و فرمول پیک را در آنها تحقیق کنید.



چند ضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزیb	۱۴	۱۲	۱۰	۸
تعداد نقاط درونیi	۶	۷	۸	۹
مساحت	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

کار در کلاس — صفحه ۷۱

اگر فاصله‌ی نقطه‌های شبکه‌ای یک سانتی متر باشد، یک برگ درخت را روی یک صفحه ی شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن را به طور تقریبی محاسبه کنید.واضح است که با کوچک‌تر کردن واحد می‌توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.



$b = ۴۴ \qquad i = ۴۵$

$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i \Rightarrow S = \frac{۴۴}{۲} - ۱ + ۴۵$

$S = ۲۱ + ۴۵ = ۶۶$

تمرین درس دوم: مساحت و کاربردهای آن — صفحه ۷۲

۱) در یک لوزی اندازه‌ی هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازهای دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

A را بزرگ‌ترین قطر در نظر می‌گیریم. بنابراین a=۳b از طرفی در لوزی داریم: (بنا به رابطه‌ی فیثاغورس)

$(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ = (۲\sqrt{۱۰})^۲$

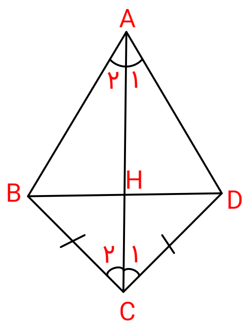
$(\frac{۳b}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ = ۴۰ \Rightarrow \frac{۱۰b^۲}{۴} = ۴۰ \Rightarrow b^۲ = \frac{۴ \times ۴۰}{۱۰}$

$b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b = \sqrt{۱۶} = ۴$

$a = ۱۲$

$\frac{a.b}{۲} = \frac{۴ \times ۱۲}{۲} = \frac{۴۸}{۲} = ۲۴$

۲) در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل AB=AD و BC=CD است. آیا قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودواند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.



$\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ BC = BD \\ AC \text{ مشترک} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A_۱ = A_۲ \\ C_۱ = C_۲ \end{array}\right. \Rightarrow$ قطر AC نیمساز زوایای A و C هم هست.

حال ثابت می‌کنیم دو مثلث AHD و AHB با هم، هم‌نهشت هستند.

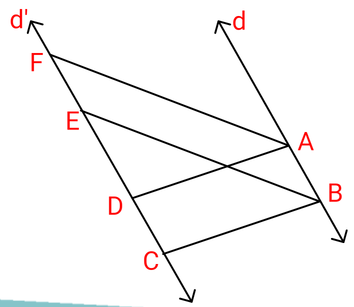
$\left.\begin{array}{l} AH \text{ مشترک} \\ AB = AD \\ A_۱ = A_۲ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{AHB} \cong \overset{\Delta}{AHD} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} H_۱ = H_۲ \\ BH = HD \end{array}\right. \Rightarrow$ قطر AB در کایت ABCD عمود منصف قطر دیگر (BD) است.

از طرفی $H_۱ + H_۲ = ۱۸۰^\circ \Leftarrow$ می‌توان نتیجه گرفت که $H_۱ = H_۲ = ۹۰^\circ$

بنابراین دو قطر بر هم عمود هستند.

نصف حاصل ضرب دو قطر برابر مساحت است. $\frac{۶ \times ۸}{۲} = ۲۴$

۳) در شکل دو خط d و d′ موازی‌اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی‌الاضلاع اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر Sباشد مساحت دیگری بر حسب S چقدر است؟



باید ثابت کنیم که $\overset{\Delta}{ADF} \cong \overset{\Delta}{BCE}$ و از آنجا نتیجه بگیریم که هم مساحت هستند. ابتدا ثابت می‌کنیم که $\angle A_۲ = \angle B_۲$ است.

$AD \parallel BC,$ مورب $d \Rightarrow \angle A = \angle B \qquad (۱)$

$FA \parallel EB,$ مورب $d \Rightarrow \angle A_۱ = \angle B_۱ \qquad (۲)$

رابطه‌ی (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم:

$$\angle A-\angle A_1=\angle B-\angle B_1 \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} \angle A_2=\angle B_2$$

حال به ادامه‌ی اثبات می‌پردازیم:

$$\left.\begin{array}{l} CD=AB \quad \text{ضلع های روبه رو در متوازی الاضلاع } ABCD \\ AF=BE \quad \text{ضلع های روبه رو در متوازی الاضلاع } ABEF \\ \angle A_2=\angle B_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{FAD}\cong\overset{\triangle}{EBC}\to S_{\overset{\triangle}{FAD}}=S_{\overset{\triangle}{EBC}}$$

از طرفین مساحت مثلث $\overset{\triangle}{OED}$ را کم کرده، در نتیجه خواهیم داشت:

$$S_{\overset{\triangle}{FAD}}-S_{OED}=S_{\overset{\triangle}{EBC}}-S_{OED}$$

و به طرفین مساحت $\overset{\triangle}{AOB}$ را اضافه می‌کنیم:

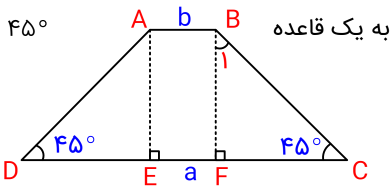
$$S_{\overset{\triangle}{FAD}}-S_{\overset{\triangle}{OED}}+S_{\overset{\triangle}{AOB}}=S_{\overset{\triangle}{EBC}}-S_{\overset{\triangle}{OED}}+S_{\overset{\triangle}{AOB}}$$

با توجه به شکل داریم:

$$S_{ABEF}=S_{ABDC}$$

بنابراین اگر یک طرف برابر S باشد، طرف دیگر نیز همان مقدارS است.

۴) در ذوزنقه‌ی شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده b و a و اندازه‌های دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده $45°$ است. مساحت ذوزنقه را بر حسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.



این ذوزنقه متساوی‌الساقین است. یعنی AD=BC.

ابتدا ارتفاع‌ها را رسم می‌کنیم. چهارضلعی حاصل، یعنی ABEF یک مستطیل است.

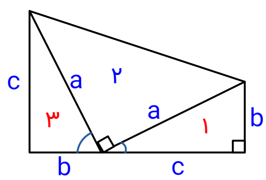
بنابراین AB=EF=b پس از طرف $\overset{\triangle}{AED}\cong\overset{\triangle}{BFC}$ (بنا به حالت وتر و یک ضلع). $\Leftarrow FC=DE$. با توجه به شکل مشخص است که:

$$DE+\overset{b}{EF}+FC=a\Rightarrow DE+FC=a-b\Rightarrow DE=FC=\frac{a-b}{2}$$

$\overset{\triangle}{BFC}$ یک مثلث متساوی‌الساقین است. (زیرا $\hat{C}=45°\Rightarrow \hat{B}_1=45°$) داریم $BF=FC=\frac{a-b}{2}$ که همان ارتفاع است. بنا بر فرمول مساحت در ذوزنقه:

$$\frac{(a+b)\times(\frac{a-b}{2})}{2}=\frac{(a+b)(a-b)}{4}=\frac{a^2-b^2}{4}$$

۵) مساحت ذوزنقه‌ی مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$\frac{\overset{\text{مجموع دو قاعده}}{\overbrace{(b+c)}}\overset{\text{ارتفاع}}{\overbrace{(b+c)}}}{2}=\frac{1}{2}(b+c)^2$$

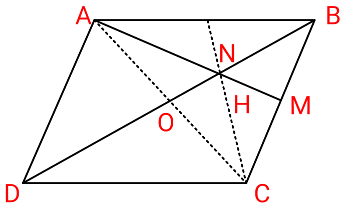
مساحت ذوزنقه از روش دوم: حاصل جمع ۳ مساحت مثلث‌ها

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \frac{b.c}{2} \\ (2)\ \frac{a.a}{2} \\ (3)\ \frac{b.c}{2} \end{array}\right\}\frac{1}{2}(2bc+a^2)\ \ **$$

رابطه‌ی * و ** را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{2}(b+c)^2=\frac{1}{2}(2bc+a^2)$$
$$b^2+2bc+c^2=2bc+a^2$$
$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2$$

که همان رابطه‌ی فیثاغورس است.



۶) در متوازی الاضلاع $ABCD$، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید: $S_{BMN}=\frac{1}{12}S_{ABCD}$

ابتدا قطر AC را رسم می کنیم و محل برخورد آن را با قطر BD، O می‌نامیم. می‌دانیم که در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف‌هم‌اند. پس O نیز وسط AC و BO میانه وارد بر ضلع AC در مثلث ABC است. پس نقطه‌ی H محل برخورد میانه‌هاست.

C را به N وصل کرده و امتداد می‌دهیم. می‌دانیم که با رسم میانه‌ها در یک مثلث هم مساحت به وجود می‌آید. یعنی:

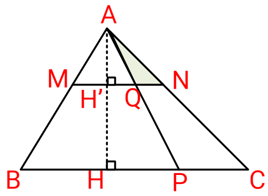
$$(1)\ S_{NBM}=\frac{1}{6}S_{ABC}$$

از طرفی قطر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث هم نهشت تقسیم می‌کند، پس داریم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABDC}\qquad (2)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱) و (۲) داریم:

$$S_{NBM}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}S_{ABDC}\right)=\frac{1}{12}S_{ABDC}$$



۷) در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$. همچنین $\frac{PC}{PB}=\frac{1}{3}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

ابتدا ارتفاع وارد بر BC را رسم می‌کنیم و آن را HA می‌نامیم.

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}\ ,\ \frac{PC}{PB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{PC}{PB+PC}=\frac{1}{3+1}\Rightarrow\frac{PC}{BC}=\frac{1}{4}$$

از آنجا که $MN \parallel BC$ داریم:

$$\triangle AMN\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}\ (1)\Rightarrow\frac{AH'}{AH}=\frac{1}{3}$$
$$\triangle AQN\sim\triangle APC\Rightarrow\frac{AQ}{AP}=\frac{QN}{PC}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}\ (2)$$

$$\frac{S_{AQN}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\times AH'\times QN}{\frac{1}{2}\times AH\times BC}=\frac{AH'}{AH}\times\frac{QN}{BC}\xrightarrow{\frac{AH'}{AH}=\frac{1}{3}}\frac{1}{3}\times\frac{QN}{BC}\xrightarrow{QN=\frac{1}{3}PC\ (2)}\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{3}PC}{BC}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{PC}{BC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{36}$$
$$\frac{MQ}{MN}=\frac{3}{4}\Rightarrow MQ=\frac{3}{4}MN\xrightarrow{\frac{MN}{BC}=\frac{1}{3}}MQ=\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{3}BC\right)\Rightarrow MQ=\frac{1}{4}BC$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$S_{MAPB}=S_{ABP}-S_{AMQ} \qquad (۱)$$

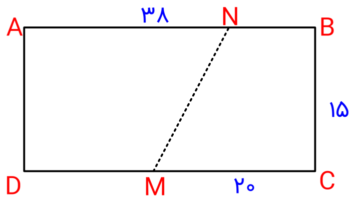
$$S_{ABP}=\frac{BP\times AH}{۲}=\frac{\frac{۳}{۴}BC\times AH}{۲}=\frac{۳}{۴}\times(\frac{BC\times AH}{۲})=\frac{۳}{۴}S_{ABC} \qquad (۲)$$

$$S_{AMQ}=\frac{MQ\times AH'}{۲}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۴}BC\times\frac{۱}{۳}AH)=\frac{۱}{۱۲}(\frac{۱}{۲}BC\times AH)=\frac{۱}{۱۲}S_{ABC} \qquad (۳)$$

مقادیر (۲) و (۳) را در رابطه‌ی (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$S_{MQPB}=\frac{۳}{۴}S_{ABC}-\frac{۱}{۱۲}S_{ABC}=\frac{۸}{۱۲}S_{ABC}\Rightarrow\frac{S_{MQPB}}{S_{ABC}}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$$

۸) زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور مساوی در آن شریک اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطه‌ی M که MC=۲۰ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دوقطعه ی با مساحت های مساوی بین آن دو تقسیم شود.



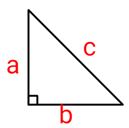
کل مساحت زمین برابر با $۳۸\times۱۵=۵۷۰$ است که الزاماً باید به هر شخص ۲۸۵ برسد، یعنی باید مساحت NBCM برابر با ۲۸۵ شود.

NBCM یک ذوزنقه است پس داریم:

$$\frac{(NB+۲۰)\times۱۵}{۲}=۲۸۵\Rightarrow(NB+۲۰)\times۱۵=۵۷۰\Rightarrow NB+۲۰=۳۸\Rightarrow NB=۱۸$$

البته با توجه به شکل و بدون محاسبه نیز می توان حدس زد، چون دو شکل باید هم مساحت باشند و ارتفاع یکی است. پس کافی بود قاعده‌ها برابر باشند، یعنی DM=NB.

۹) سه چند ضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چند ضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه است.



$$c^۲=a^۲+b^۲\xrightarrow{\div c^۲}۱=(\frac{a}{c})^۲+(\frac{b}{c})^۲ \qquad (۱)$$

چندضلعی ساخته شده بر روی ضلع cبا چند ضلعی ساخته شده بر روی ضلع aمتشابه است و نسبت تشابه آنها برابر است با:

$$\frac{S_a}{S_c}=(\frac{a}{c})^۲ \qquad (۲) \quad \Leftarrow\frac{a}{c}$$

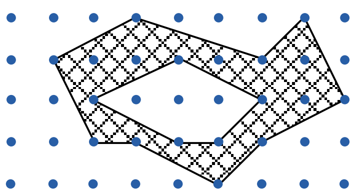
به همین ترتیب

$$(۳)\frac{S_b}{S_c}=(\frac{b}{۲})^۲\Leftarrow\frac{b}{۲}$$

با جایگذاری (۲) و (۳) در شماره ۱ داریم:

$$۱=\frac{S_a}{S_c}+\frac{S_b}{S_c}\xrightarrow{\times S_c}S_c=S_a+S_b$$

۱۰) با توجه به مساحت چند ضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه زده را محاسبه کنید.



	شکل بیرونی	شکل داخلی
تعداد نقاط مرزی	b=۹	۵
تعداد نقاط درونی	m=۱۳	۳

$$S=\frac{۹}{۲}-۱+۱۳=۱۶/۵$$ بیرون

داخلی $S=\frac{۵}{۲}-۱+۳=۴/۵$

سایه‌زده $S=۱۶/۵-۴/۵=۱۲$

۱۱) یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحد‌اند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

مساحت مستطیل به طول و عرض m و n برابر است با: $m\times n$

محاسبه مساحت با روش دوم: باتوجه به مفروضات مسئله داریم:

نقاط مرزی $b=۲(m+n) \quad (۱)$

نقاط درونی $i=(n-۱)(m-۱) \quad (۲)$

$$S=\frac{b}{۲}-۱+i\xrightarrow{(۲),(۱)}S=\frac{۲(m+n)}{۲}-۱+[(m-۱)(n-۱)]$$
$$=(m+n)-۱+(mn-m-n+۱)=m.n$$

هر دو با هم برابر است.

دقت شود که اگر m واحد باشد، تعداد نقاط مرزی m+۱می‌شود و همین‌طور برای n واحد نقاط مرزی n+۱ واحد است.

برای تعداد نقاط درونی داریم:

$(m+۱)-۲=m-۱$

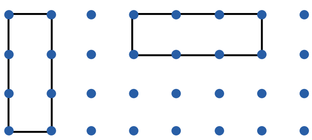
نقاط روی مرز ۲ واحد کم می شود.

۱۲) مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چند ضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

$S=۳\Rightarrow\frac{b}{۲}-۱+i=۳\Rightarrow\frac{b}{۲}+i=۴$

i	۳	۲	۱	۰	۴
b	۲	۴	۶	۸	۰

نقاط مرزی با بیشترین تعداد:



برای نقاط درون به تعداد ۴: