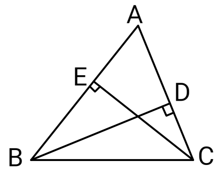

ایران توشه
- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود گام به گام
- دانلود آزمون گاج و قلم چی و سنجش
- دانلود فیلم و مقاله انگیزشی
- کنکور و مشاوره
IranTooshe.Ir
@irantooshe
IranTooshe

فصل ۲: قضیه‌ی تالس، تشابه و کاربردهای آن

درس اول: نسبت و تناسب در هندسه

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۳۰

مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABCرا یک بار با در نظر گرفتن قاعده‌ی AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظر گرفتن قاعده‌ی AB بنویسید.



مساحت $ABC = \frac{1}{2} AC \times BD$

مساحت $ABC = \frac{1}{2} AB \times CE$

عبارت‌های سمت راست هر دو مساوی یک چیز است.

بنابراین: $AC \times BD = AB \times CE$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب هندسی بنویسید؟

بله، به طور مثال: $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD}$

پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید. آیا به یک جواب رسیده‌اید؟ خیر

تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟ با توجه به رابطه‌ی ضرب می‌توانیم نسبت‌های متفاوت بنویسیم.

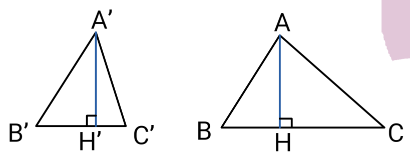
با توجه به فعالیت بالا، جای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

در هر مثلث نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با نسبت ارتفاع وارد بر آنها برابر است.

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۳۱

در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و A'H' در دو مثلث ABC و A'B'C' هم اندازه‌اند (AH=A'H')

با پر کردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجه‌ی زیر را بدست آورید.



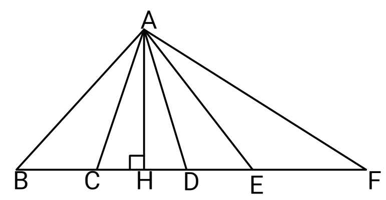
$S_{ABC} = ABC_{\text{مساحت}} = \frac{1}{2} AH \times BC$

$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} A'H' \times B'C'$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times BC}{\frac{1}{2} A'H' \times B'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

کار در کلاس ✍ صفحه ۳۱

در شکل مقابل مثلث‌های ABC ، ACD، ADE و AEF را که در رأس Aمشترک اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A همه‌ی این مثلث ها کدام پاره‌خط است؟



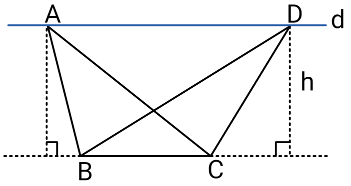
چون از یک نقطه خارج یک خط فقط یک عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

با توجه به نتیجه‌ی فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید:

$\frac{S_{ACE}}{A_{ABF}} = \frac{CE}{BF}$ $\qquad$ $\frac{S_{ACD}}{A_{AEF}} = \frac{DC}{EF}$ $\qquad$ $\frac{S_{ABC}}{A_{ACD}} = \frac{BC}{CD}$

کار در کلاس ✍ صفحه ۳۲

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعده‌ی BC در مثلث‌های DBC و ABC با هم برابر است؟



چون $BC \parallel d$ ، پس فاصله‌ی بین آنها که همان ارتفاع مثلث‌ها است با هم برابر است.

اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟

$$S = \frac{۱}{۲}h.a$$

تمرین درس اول: نسبت و تناسب در هندسه
صفحه ۳۳

۱) اگر $\frac{x}{۲} = \frac{y}{۲} = \frac{z}{۶} = \frac{۳}{۵}$ حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

با توجه به ویژگی (۷) داریم:

$$\frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z}{۶} = \frac{۳}{۵} = \frac{x+y+z+۳}{۲+۳+۶+۵}$$

$$\frac{۳}{۵} = \frac{x+y+z+۳}{۱۶} \Rightarrow x+y+z+۳ = \frac{۴۸}{۵} \Rightarrow x+y+z = \frac{۴۸}{۵} - ۳ = ۶/۶$$

۲) طول پاره‌خطی را به دست آورید که واسطه‌ی هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

$a^۲ = b.c \Rightarrow a^۲ = ۸\times۱۰ \Rightarrow a = \sqrt{۸۰}$ سانتی‌متر

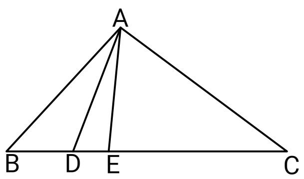
۳) طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌مترند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}$ سانتی‌متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.

مساحت مثلث برابر است با (قاعده×ارتفاع) تقسیم بر ۲ . از طرفی ارتفاع $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}$ سانتی‌متر بر کوچک ترین ضلع وارد شده است. دو ارتفاع دیگر را a و 'a می‌نامیم و داریم:

$$\frac{۸\times a}{۲} = \frac{\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}\times۴}{۲} \Rightarrow ۴a = ۳\sqrt{۱۵} \Rightarrow a = \frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$$

$$\frac{۶\times a'}{۲} = \frac{\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}\times۴}{۲} \Rightarrow ۳a' = ۳\sqrt{۱۵} \Rightarrow a' = \frac{۳\sqrt{۱۵}}{۳} = \sqrt{۱۵}$$

۴) در شکل مقابل مساحت مثلث ACEسه برابر مساحت ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.



می‌دانیم اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند، نسبت مساحت‌های آنها با نسبت قاعده‌ی آنها برابر است.

$$\left.\begin{array}{l} ۱)S_{\overset{\triangle}{ACE}} = ۳S_{\overset{\triangle}{ADE}} \\ ۲)S_{\overset{\triangle}{ACE}} = ۲S_{\overset{\triangle}{ABD}} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADE}} = \frac{۲}{۳}S_{\overset{\triangle}{ABD}} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABD}}} = \frac{۲}{۳} = \frac{DE}{BD}$$

نسبت $\frac{BC}{DE}$:

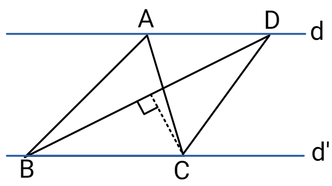
با توجه به شکل می‌توان نوشت که:

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADE} + S_{AEC} \xRightarrow{S_{ACE}=۳S_{ADE}} S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADE} + ۳S_{ADE}$$
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۳}{۲}S_{ADE} + S_{ADE} + ۳S_{ADE}$$
$$S_{ABC} = \frac{۱۱}{۲}S_{ADE}$$

از آنجا که دو مثلث در رأس مشترک‌اند، نسبت مساحت‌های آنها با نسبت قاعده‌ی مقابل به رأس مشترک آنها برابر است. پس:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{BC}{DE} = \frac{۱۱}{۲}$$

۵) در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، $۸cm^۲$ است. اگر $BD = ۶cm$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی C از BD را به دست آورید.



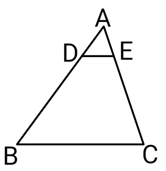
می‌دانیم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{BCD}} = ۸cm^۲$$
$$۸ = \frac{۱}{۲} \times BD \times a \Rightarrow ۸ = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times a \Rightarrow a = \frac{۸}{۳}$$

درس دوم: قضیه‌ی تالس

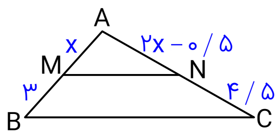
کار در کلاس ✍ صفحه ۳۴

۱) در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $AD = ۱$ و $DB = ۳$ و $AE = ۰/۸$. به کمک قضیه‌ی تالس طول AC را به دست آورید.



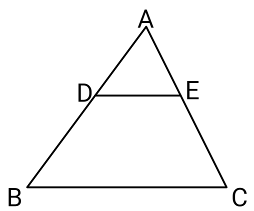
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{۰/۸}{x} \Rightarrow x = \frac{۴ \times ۰/۸}{۱} = ۳/۲$$

۲) در شکل مقابل $MN \parallel BC$؛ به کمک قضیه‌ی تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به دست آورید.



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۲x - ۰/۵}{۴/۵}$$
$$\Rightarrow ۴/۵x = ۶x - ۱/۵ \Rightarrow -۱/۵x = -۱/۵ \Rightarrow x = ۱$$

۳) در شکل مقابل $DE \parallel BC$؛ تناسب قضیه‌ی تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطه‌ی $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ و با تفضیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطه‌ی $\frac{CE}{AC} = \frac{DB}{AB}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها به صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.



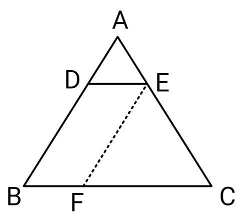
$$۱)\ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$ ترکیب در مخرج

$$۲)\ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AB-AD}{AB} = \frac{AC-AE}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC}$$ تفصیل در صورت

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۳۵

در شکل مقابل $DE \parallel BC$، از نقطه‌ی E، پاره‌خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم. چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟

این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است چون ضلع‌ها دوبه‌دو موازی هستند. برای برابری ضلع‌ها کافی است ثابت کنیم دو مثلث DEF و DBF با هم هم‌نهشت هستند:



$BD \parallel EF$ و DF مورب است $\Rightarrow D_۲ = F_۲$
$DE \parallel BF$ و DF مورب است $\Rightarrow D_۱ = F_۱$
$DF = DF$ ضلع مشترک است.
$\xRightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{DBF} \cong \overset{\triangle}{DFE}$
$DB = EF$

در نتیجه، BFED متوازی الاضلاع است.

با توجه به این موضوع داریم: $DB = EF$, $DE = BF$

در مثلث ABC و با در نظر گرفتن $DE \parallel BC$، قضیه‌ی تالس را بنویسید.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (۱)$$

در مثلث CAB با توجه به $EF \parallel AB$، قضیه‌ی تالس را بنویسید.

$$\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (۲)$$

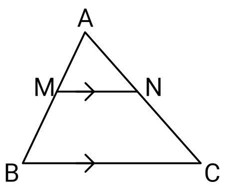
با توجه به روابط (۱) و (۲) و جای‌گذاری DE به جای BF خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

کار در کلاس — صفحه ۳۵

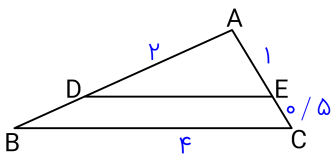
در شکل مقابل، با فرض $MN \parallel BC$، طبق قضیه‌ی تالس داریم: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیه‌ی تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AC - AN} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$$



تمرین درس دوم: قضیه‌ی تالس
صفحه ۳۶

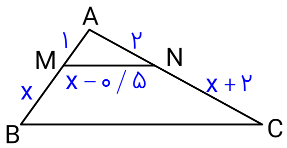
۱) در شکل مقابل $DE \parallel BC$؛ با توجه به اندازه‌ی پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به دست آورید.



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{AB} = \frac{۱}{۱/۵} = \frac{DE}{۴}$$

$$\begin{cases} \frac{۲}{AB} = \frac{۱}{۱/۵} \Rightarrow AB = ۲ \times ۱/۵ = ۳ \\ \frac{۱}{۱/۵} = \frac{DE}{۴} \Rightarrow DE = \frac{۴ \times ۱}{۱/۵} = \frac{۸}{۳} \end{cases}$$

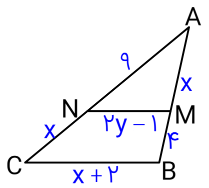
۲) در شکل مقابل، اگر $MN \parallel BC$؛ مقدار x را به دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۲}{x+۲} \Rightarrow x + ۲ = ۲x \Rightarrow x = ۲$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۱/۵}{BC} \Rightarrow BC = ۴/۵$$

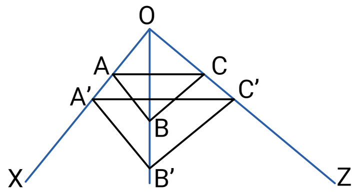
۳) در شکل مقابل $MN \parallel BC$؛ مقادیر x و y را به دست آورید.



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{x}{x+۴} = \frac{۹}{۹+x} \Rightarrow ۹x + x^۲ = ۹x + ۳۶ \Rightarrow x = ۶$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۶}{۱۰} = \frac{۲y-۱}{۸} \Rightarrow ۱۰y - ۵ = ۲۴ \Rightarrow ۱۰y = ۲۴ - ۵ \Rightarrow y = \frac{۱۹}{۱۰} = ۱/۹$$

۴) در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیه‌ی تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$



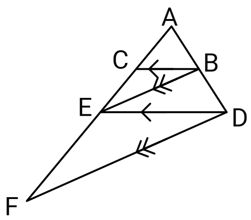
در دو مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{OA'B'}$ داریم: (۱) $\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}$

همچنین در دو مثلث $\overset{\triangle}{OBC}$ و $\overset{\triangle}{OB'C'}$ داریم: (۲) $\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{OC}{OC'}=\frac{OA}{OA'}$، حالا طبق عکس قضیه‌ی تالس در مثلث $OA'C'$ داریم:

$AC \parallel A'C'$

۵) در شکل مقابل می‌دانیم $DE \parallel BC$ و $BE \parallel DF$، به کمک قضیه‌ی تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسه‌ی تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید:
$AE^2 = AC.AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است.)



در مثلث AED می‌دانیم BC با ED موازی است، طبق قضیه‌ی تالس داریم:

(۱) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

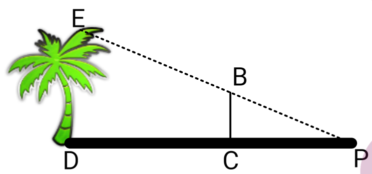
در مثلث ADF می‌دانیم BE با DF موازی است. طبق قضیه‌ی تالس داریم:

(۲) $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AF}$

$(1), (2) \Rightarrow \frac{AC}{AE}=\frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^2 = AC.AF$

۶) یکی از کاربردهای قضیه ی تالس از زمان های دور تا کنون، محاسبه‌ی فاصله های غیر قابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایه ی درخت را روی زمین اندازه می گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایه‌ی آن روی امتداد سایه ی درخت قرار گیرد و نوک سایه‌ی شاخص نیز بر نوک سایه‌ی درخت منطبق شود؛ به طور مثال اگر طول سایه‌ی درخت ۶۰ متر، طول سایه‌ی شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟

ابتدا نقاط را نامگذاری می‌کنیم. با به کار بردن قضیه‌ی تالس می‌توانیم طول درخت را بیابیم.طبق فرض داریم:

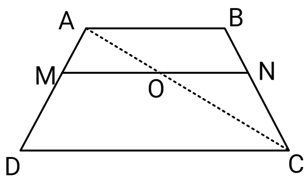


با توجه به قضیه‌ی تالس از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$DP = 60$
$PC = 3$
$BC = 1$
$DE = ?$

$\frac{PC}{DP}=\frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{3}{60}=\frac{1}{DE} \Rightarrow DE = \frac{1\times 60}{3} \Rightarrow DE = 20$

۷) در ذوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ثابت کنید: $\frac{BN}{NC}=\frac{AM}{MC}$ (قضیه تالس در ذوزنقه). (راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



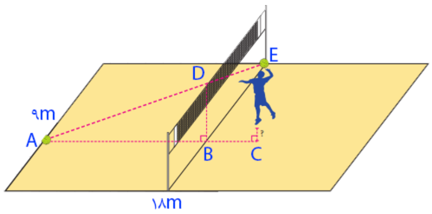
ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم. در مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ داریم: $(MO \parallel DC)$ (۱) $\frac{AM}{MD}=\frac{AO}{OC}$

در مثلث CBA داریم: $(ON \parallel AB)$ (۲) $\frac{BN}{NC}=\frac{OA}{OC}$

از (۱) و (۲) داریم: $\frac{BN}{NC}=\frac{AM}{MD}$

۸) ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹×۹ تفکیک می شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲/۴۳ متر روی خط وسط نصب شده است. در یک لحظه یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصله ی دو متری تور، به هوا می پرد و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری

بالای سرش است با ضربه ی آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟



$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CE}\Rightarrow\frac{۹}{۱۱}=\frac{۲/۴۳}{CE}\Rightarrow CF=\frac{۱۱\times ۲/۴۳}{۹}=۲/۹۷$$

CE حاصل جمع میزان پرش+قد بازیکن و فاصله‌ی توپ از بازیکن است.

یعنی داریم:

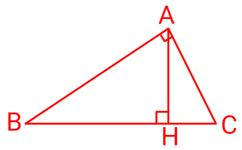
میزان پرش بازیکن: $۲/۹۷=x+۱/۸+۰/۳\Rightarrow x=۰/۸۷$

درس سوم: تشابه مثلث‌ها

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۴۱

۱) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($A=۹۰°$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. آیا می‌توانید دو زاویه‌ی هم اندازه را در دو مثلث ABH و ABC نام ببرید؟

$\hat{H}=A=۹۰°$ و $\hat{B}=\hat{B}$



به همین ترتیب دو زاویه‌ی هم اندازه از دو مثلث ACH و ABC را نام ببرید. بنابراین می‌توانیم بگوییم:

$\hat{H}=A=۹۰°$ و $\hat{B}=\hat{B}$

$\Delta ABH\sim\Delta ABC\ ,\ \Delta ACH\sim\Delta ABC$

چرا مثلث‌های ABH و ACH، خودشان با هم متشابه‌اند؟

با توجه به قسمت (۱) داریم: $A_۱=C$

و با توجه به قسمت (۲) داریم: $A_۲=B$

$H_۱=H_۲=۹۰°$

می‌توان نتیجه گرفت که: $\overset{\Delta}{ACH}\sim\overset{\Delta}{ABH}$

۲) نسبت تشابه دو مثلث ABH و ABC را بنویسید:

$$\frac{AH}{AC}=\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}\Rightarrow AB^۲=BH\times BC$$

۳) نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABC را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AC واسطه‌ی هندسی BC و CH است.

$$\frac{AB}{AH}=\frac{AC}{HC}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow AC^۲=BC.CH$$

۴) نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AH واسطه‌ی هندسی بین BH و CH است.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{AH}=\frac{AH}{HC}\Rightarrow AH^۲=CH.BH$$

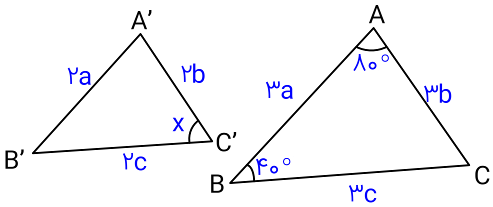
۵) از روابط ۲ و ۳ داریم: (قضیه فیثاغورس)

$$AB^۲+AC^۲=BC\times BH+BC\times HC=BC(BH+HC)=BC.BC=BC^۲$$

تمرین درس سوم: تشابه مثلث‌ها

صفحه ۴۲

۱) در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر y ، x را مشخص کنید:

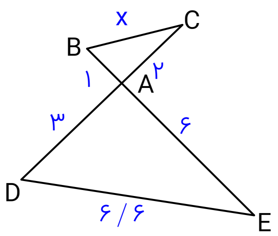


$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{2b}{3b} = \frac{2}{3} \quad (1)$$
$$\frac{B'C'}{B'C'} = \frac{2c}{3c} = \frac{2}{3} \quad (2)$$
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3} \quad (3)$$

از روابط مقابل نتیجه می‌گیریم دو مثلث ABC و A'B'C' به حالت تناسب سه ضلع متشابه‌اند.

و داریم:

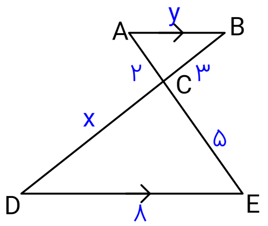
$$\begin{cases} A = A' \Rightarrow A = 80^\circ \\ \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \hat{B}' = 40^\circ \\ C = C' \Rightarrow C = C' = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} \frac{AB}{AD} = \frac{1}{3} \\ \frac{AC}{AE} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array}\right., \ A_1 = A_2 \Bigg\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADE}$$

با تناسب بین دو ضلع و برابری زاویه‌ی بین آنها دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{6/6} \to x = \frac{6/6 \times 1}{3} = 2/2$$

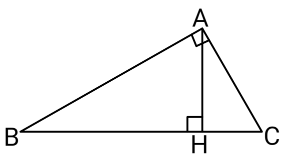


$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DE, \text{ مورب } DB \Rightarrow \hat{D} = \hat{B} \\ AB \parallel DE, \text{ مورب } AE \Rightarrow A = \hat{E} \\ \text{متقابل به رأس } C_1 = C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DCE}$$

با حالت برابری ۳ زاویه دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{15}{2} = 7/5$$
$$\frac{y}{8} = \frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{16}{5} = 3/2$$

۲) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(A = 90^\circ)$، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



$$1)\overbrace{BH = 9\ ,\ CH = 4}^{BC=13}\ ,\ AH = ?\ ,\ AB = ?\ ,\ AC = ?$$

$$AH^2 = BH.CH \Rightarrow AH^2 = 9 \times 4 = 36 \Rightarrow AH = 6$$
$$AB^2 = BC.BH \Rightarrow AB^2 = 13 \times 9 \Rightarrow AB = 3\sqrt{13}$$
$$AC^2 = (BC)^2 - (AB^2) \Rightarrow AC^2 = (13)^2 - (3\sqrt{13})^2$$
$$\Rightarrow AC^2 = 13 \times 13 - 9 \times 13 = 4 \times 13 \Rightarrow AC = 2\sqrt{13}$$

$$2)\ AB = 10, BC = 12, AC = ?, AH = ?$$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC^2 = (12)^2 - (10)^2$$
$$AC^2 = 144 - 100 = 44 \Rightarrow AC = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$
$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 12 = 10 \times 2\sqrt{11} \Rightarrow AH = \frac{10 \times 2\sqrt{11}}{12} = \frac{5}{3}\sqrt{11}$$

$$3)\ AB = 8\ ,\ AC = 6\ ,\ BH = ?\ ,\ CH = ?$$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow BC^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow BC = 10$

$AB^2 = BC.BH$

$(6)^2 = 10 \times BH \Rightarrow BH = 3/6$

$AC^2 = BC.CH \Rightarrow 8^2 = 10 \times CH \Rightarrow CH = 6/4$

$4)\ AB = 8\ ,\ AH = 4\ ,\ BC = ?\ ,\ AC = ?$

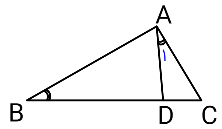
$BH^2 = (AB)^2 - (AH)^2 \Rightarrow BH^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 \Rightarrow BH = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$AB^2 = BC.BH \Rightarrow 8^2 = BC.4\sqrt{3} \Rightarrow BC = \frac{64}{4\sqrt{3}} \Rightarrow BC = \frac{16}{3}\sqrt{3}$

$AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC^2 = (\frac{16}{3}\sqrt{3})^2 - 8^2 = \frac{(16)^2}{3} - 8^2$

$\Rightarrow AC^2 = \frac{4 \times 8^2 - 3 \times 8^2}{3} = \frac{8^2}{3} \Rightarrow AC = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

۳) در شکل روبه‌رو $\angle B = \angle A_1$ و AC=۴ و BD=۶، طول BC را به دست آورید.



$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \hat{E} \\ C = C \end{array}\right\} \Rightarrow D_1 = A \Rightarrow \overset{\triangle}{ADC} \sim \overset{\triangle}{ADC}$$

تناسب روبه‌رو را داریم:

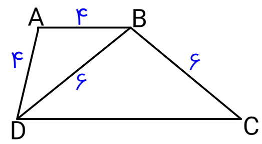
$$\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = C = D_2 = B_1 \Rightarrow \hat{B}_2 = A$$

$$AC^2 = BC.DC \underset{DC=x-4}{\overset{BC=x}{\Rightarrow}} 4^2 = x.(x-6) \Rightarrow 16 = x^2 - 6x$$

$$x^2 - 6x - 160 = 0 (x-8)(x+2) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow BC = 8$$

۲- غیر قابل قبول است و جواب صحیح ۸ می‌باشد.

۴) در شکل روبه‌رو ABCDذوزنقه است. طول قاعده‌ی CD را به دست آورید.



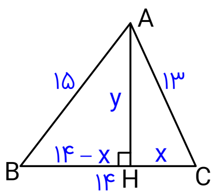
$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC, DB \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ DBC_{\text{متساوی الساقین}} \Rightarrow \hat{D}_1 = C \\ ABD_{\text{متساوی الساقین}} \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{B}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = C = \hat{D}_2 = B_1 \Rightarrow \hat{B}_2 = A$$

$$\left.\begin{array}{l} A = \hat{B}_2 \\ \frac{BD}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{BC}{AD} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{BDC}$$

پس داریم:

$$\frac{DC}{BD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$

۵) در شکل مقابل مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



$$\overset{\triangle}{ABH} : y^2 + (14 - x)^2 = 15^2 \Rightarrow y^2 = 15^2 - (14 - x)^2 \quad (1)$$

$$\overset{\triangle}{ACH} : y^2 + x^2 = 13^2 \Rightarrow y^2 = 13^2 - x^2 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$۱۵^۲-(۱۴-x)^۲=۱۳^۲-x^۲$$
$$۲۲۵-۱۹۶+۲۸x-x^۲=۱۶۹-x^۲$$
$$۲۸x=۱۶۹-۲۹\Rightarrow ۲۸x=۱۴۰$$
$$x=\frac{۱۴۰}{۲۸}=۵$$

با جایگذاری مقدار x در رابطهی ۲ داریم:

$$y^۲=۱۳^۲-۵^۲\Rightarrow y^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴\Rightarrow y=۱۲$$

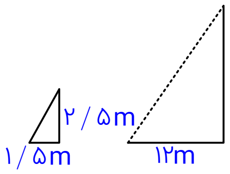
مساحت مثلث برابر است با:

$$\frac{۱۲\times ۱۴}{۲}=۸۴$$

۶) در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش‌آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی را ارائه کنند. در اینجا روش‌های دو دانش‌آموز را می‌بینید. با توجه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.

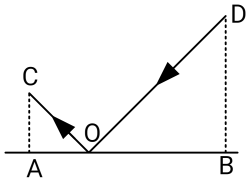
الف) روش ترانه: ترانه یک چوب ۲/۵ متری را به صورت عمودی روی زمین در جایی محکم کرد. طول سایه ی چوب در آن زمان ۱/۵ متر بود. هم زمان طول سایه‌ی درخت ۱۲ متر بود. از اینجا چگونه او توانست ارتفاع درخت را اندازه بگیرد؟ ارتفاع این درخت چند متر است؟

با تشکیل دو مثلث متشابه و کاربرد قضیه‌ی تالس می‌تواند ارتفاع درخت را اندازه بگیرد.



$$\frac{x}{۲/۵}=\frac{۱۲}{۱/۵}\Rightarrow x=\frac{۱۲\times ۲/۵}{۱/۵}\Rightarrow x=۲۰m$$

ب) روش شهرزاد: شهرزاد آینه‌ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می‌توان یک نقطه در نظر گرفت (نقطه‌ی O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار داد؛ سپس روی این خط آنقدر به جلو و عقب حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. باتوجه به آنچه از خواص آینه‌ها و انعکاس نور می‌دانید، بگویید چگونه می‌توان با داشتن طول‌های AO و BO روی زمین و اندازهٔ قد شهرزاد (فاصله چشم او تا زمین)، ارتفاع درخت را به دست آورد. اگر قد شهرزاد ۱۶۰ سانتی‌متر و فاصله‌ی پای او از آینه ۲/۵ متر و فاصله‌ی آینه از پای درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



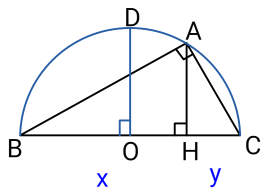
با توجه به ویژگی آینه‌ی تخت، زاویه‌ی بازتاب نور برابر با زاویه‌ی تابش آن است. در نتیجه، $O_۱=O_۲$. از طرفی زاویه‌های B و A برابر ۹۰ درجه هستند. با توجه به اینکه مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است، نتیجه می‌شود:

$$C=۱۸۰°-(A+O_۱)=۱۸۰°-(\hat{B}+O_۲)=\hat{D}$$

پس دو مثلث OAC و OBD به حالت برابری سه زاویه متشابه‌اند. پس می‌توان با تناسب زیر ارتفاع درخت را به دست آورد:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{AC}{DB}\Rightarrow\frac{۲/۵}{۲۰}=\frac{۱/۶}{x}\Rightarrow x=\frac{۲۰\times ۱/۶}{۲/۵}=۱۲/۸m$$

۷) در شکل مقابل نیم‌دایره‌ای به قطر BC و به مرکز O رسم شده و نقطه‌ی دلخواه A روی محیط نیم‌دایره است.



الف) چرا زاویه‌ی A قائمه است؟

زاویه‌ی محاطی مقابل به قطر برابر با ۹۰ درجه است.

ب) برای نقطه‌ی A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شده و OD شعاع دایره است. اندازه‌های AH و OD را با هم مقایسه کنید.

OD بزرگتر از AH است. $OD>AH$

پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید و در قسمت (ب) جایگذاری کنید.

$$\left.\begin{array}{ll} OD=OB=\frac{x+y}{۲} & \text{چون هر دو شعاع هستند، با هم برابرند.} \\ AH^۲=x.y\Rightarrow AH=\sqrt{x.y} & \text{رابطه طول} \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{x+y}{۲}>\sqrt{x.y}$$

ت) آیا می‌توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ؟ چرا؟

بله، برقرار است.

ابتدا طرفین را در ۲ ضرب کرده و به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \overset{\times 2}{\Rightarrow} a+1 \geq 2\sqrt{ab}$$
$$\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$
$$\Rightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 0$$

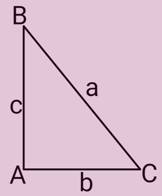
۸) با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویه‌ی A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

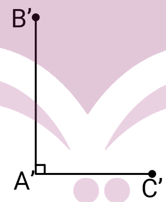
اگر در مثلثی مربع یک ضلع با حاصل جمع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم الزاویه است، یعنی اگر در مثلث به طول اضلاع a و b و c یکی از رابطه‌های زیر برقرار باشد: $c^2 = a^2 + b^2$ OR $b^2 = a^2 + c^2$ OR $a^2 = b^2 = c^2$ آنگاه مثلث قائم الزاویه است.

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه‌ی طول‌های اضلاع آن برقرار است.



۲) پاره‌خطهای $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابله به گونه‌ای در نظر بگیرید که $A' = 90°$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$.



۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه‌ی پاره‌خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

$$(B'C')^2 = (A'B')^2 + (A'C')^2 \underset{A'C'=b}{\overset{A'B'=C}{\Rightarrow}} (B'C')^2 = c^2 + b^2$$
$$\overset{c^2+b^2=a^2}{\Rightarrow} (B'C')^2 = C^2 = (BC)^2 \rightarrow B'C' = BC$$

۴) توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و نتیجه بگیرید $A' = 90°$.

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ HBC = B'C' \end{array}\right\} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow A = A' = 90°$$

طبق فرض مسئله ($AB = A'B'$)، از قسمت ۳ استفاده کردیم ($HBC = B'C'$). (ض ض ض)

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه‌ی دو شرطی بیان نمایید.

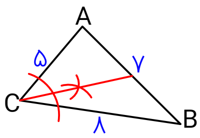
مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع با حاصل جمع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد.

درس چهارم: کاربردهایی از قضیه‌ی تالس و تشابه مثلث‌ها

کار در کلاس ✍ صفحه ٤٦

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه‌ی C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را که این نیمساز روی AB جدا می‌کند به دست آورید.

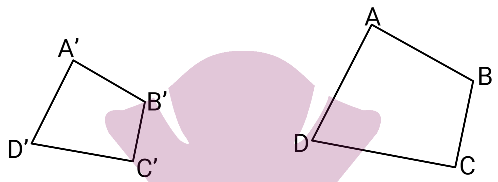
ابتدا نیمساز زاویه‌ی C را با توجه به روشی که در فصل اول خواندیم، رسم می‌کنیم و محل برخورد نیمساز C با AB را D می‌نامیم. بنابراین داریم:



$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$$

کار در کلاس ✍ صفحه ۴۸

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و ABCD مفروض‌اند.



۱) اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

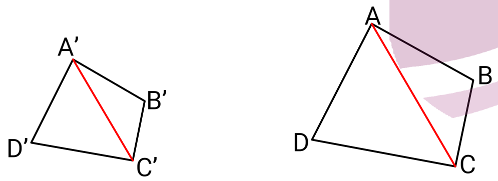
چون با هم متشابه هستند، پس رابطه‌ی زیر را داریم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'D'}{AD}=\frac{D'C'}{DC}=k \xRightarrow[\text{ویژگی های تناسب}]{\text{با استفاده از}} =\frac{A'B'+B'C'+A'D'+D'C'}{AB+BC+AD+DC}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{محیط چهارضلعی } ABCD}{\text{محیط چهارضلعی } A'B'C'D'}=K$$

۲) قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید:

$$\Delta_{ACD}\sim\Delta_{A'C'D'} \quad , \quad \Delta_{ABC}\sim\Delta_{A'B'C'}$$



دو مثلث به حالت تناسب دو ضلع و برابری زاویه‌ی بین آنها متشابه‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} \text{طبق قسمت۱} \quad \frac{A'D'}{AD}=\frac{D'C'}{DC} \\ \text{(چون این دو چهارضلعی متشابه اند)}\ \hat{D}=\hat{D'} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACD\sim\Delta A'C'D'$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC} \\ \hat{B}=\hat{B'} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$

به طور مشابه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه اند.

نسبت تشابه‌ها چیست؟

نسبت تشابه همان k می‌شود، چون طبق فرض داریم: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=k$

۳) جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}}=k^۲ \ ,\ \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^۲ \ ,\Rightarrow \frac{S_{A'C'D'}+S_{A'B'C'}}{S_{ACD}+S_{ABC}}=k^۲ \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=k^۲$$

کار در کلاس ✍ صفحه ۴۸

۱) اندازه‌ی محیط های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۰ و ۱۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۱۵ واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\text{مساحت مثلث کوچک}} = \left(\frac{۱۸}{۱۰}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۱۵}{x} = \left(\frac{۱۸}{۱۰}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۱۵}{x} = \frac{۸۱}{۲۵} \Rightarrow x = \frac{۱۵ \times ۲۵}{۸۱} \simeq ۴/۶۳$$

۲) نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه، $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط یکی از آنها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

چون نسبت مساحت‌ها برابر با $\frac{۴}{۹}$ است، پس نسبت تشابه برابر با $\frac{۲}{۳}$ است. می‌توان نسبت را به دو صورت نوشت، چون مشخص نشده است که محیط پنج ضلعی بزرگ‌تر برابر ۱۲ است یا پنج ضلعی کوچک‌تر!

$$\frac{۲}{۳} = \frac{۱۲}{x} \Rightarrow x = \frac{۱۲ \times ۳}{۲} = ۱۸ \quad \text{OR} \quad \frac{۲}{۳} = \frac{x}{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۲ \times ۱۲}{۳} = ۸$$

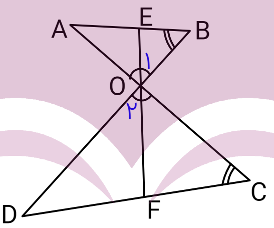
محیط پنج‌ضلعی دیگر ۱۸ یا ۸ است.

۳) اندازه‌های اضلاع یک هفت ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت ضلعی چند برابر می‌شود؟

چون زاویه‌ها عوض نشده است. پس دو شکل با هم متشابه هستند و نسبت تشابه برابر ۳ است. بنابراین نسبت مساحت‌ها ۹ می‌شود. (از آنجا که اگر نسبت تشابه k باشد، نسبت مساحت $K^۲$ می‌شود.)

فعالیت کلاسی ✍ صفحه ۴۹

در شکل روبه‌رو $EF = ۱۰cm$ نیمساز دو زاویه‌ی متقابل به رأس O است و $\angle C = \angle B$.



الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

$$\left.\begin{array}{ll} \angle O_۱ = \angle O_۲ & \text{متقابل به رأس اند} \\ \angle B = \angle C & \text{طبق فرض} \\ \angle A = \angle D & \text{۱۸۰ درجه بودن مجموع زاویه های داخلی مثلث} \end{array}\right\} \Rightarrow OAB \sim OCD$$

ب) اگر $\frac{OB}{OC} = \frac{۲}{۳}$ نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟

طبق قضیه می‌دانیم اگر نسبت تشابه دو مثلث برابر با k باشد، نسبت بین نیمسازها هم برابر با k است.

$$\frac{OE}{OF} = \frac{۲}{۳}$$

ج) طول‌های OE و OF را به دست آورید.

$$\frac{OE}{OF} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{OE}{\underbrace{OE + OF}_{EF=۱۰}} = \frac{۲}{۳+۲}$$

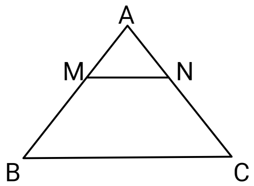
$$\Rightarrow \frac{OE}{۱۰} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow OE = \frac{۱۰ \times ۲}{۵} = ۴cm \Rightarrow OF = ۱۰ - ۴ = ۶cm$$

تمرین درس چهارم: کاربردهایی از قضیه‌ی تالس و تشابه مثلث‌ها
صفحه ۴۹

۱) طول‌های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.

$$\frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۱۲}{x}=\frac{۱۰}{y}\quad \left.\begin{array}{l}\frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۱۲}{x}\Rightarrow x=\frac{۱۰\times ۱۲}{۱۵}=۸\\ \frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۱۰}{y}\Rightarrow y=\frac{۱۰\times ۱۰}{۱۵}\simeq ۶/۶\end{array}\right\}\Rightarrow ۸+۶/۶+۱۰=۲۴/۶$$

۲) در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$ است و مساحت ذوزنقه‌ی MNCB هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.

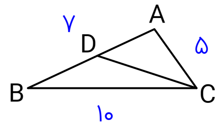


$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{MNCB}}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{MNCB}+S_{AMN}}=\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{۱}{۹}$$

نسبت تشابه برابر است با $\sqrt{\frac{۱}{۹}}=\frac{۱}{۳}$. در نتیجه:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \frac{AM}{AB-AM}=\frac{۱}{۳-۱}\Rightarrow \frac{AM}{BM}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{BM}{AM}=\frac{۲}{۱}$$

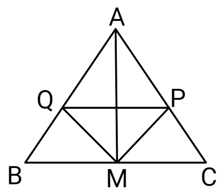
۳) در مثلث ABC، $AB=۷$ و $AC=۵$ و $BC=۱۰$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه‌ی C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به دست آورید.



$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow \frac{۵}{۱۰}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow \frac{۱}{۲+۱}=\frac{AD}{\underbrace{AD+BD}_{۷}}\Rightarrow AD=\frac{۷}{۳}$$

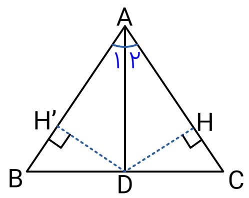
$$DB=۷-\frac{۷}{۳}=\frac{۱۴}{۳}$$

۴) در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



$$\left.\begin{array}{l}\text{در مثلث AMB}\Longrightarrow \frac{AM}{BM}=\frac{AQ}{BQ}\\ \text{در مثلث AMC}\Longrightarrow \frac{AM}{MC}=\frac{AP}{PC}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{چون } BM=MC}\frac{AQ}{BQ}=\frac{AP}{PC}\xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}}PQ \parallel BC$$

۵) در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویه‌ی A است و عمودهای DH و DH′ نیز رسم شده‌اند.



الف) باتوجه به نتیجه‌ی (۲) از درس اول، نسبت‌های دو مثلث ABD و ACD را بنویسید.

دو مثلث ABD و ADC در رأس A مشترک‌اند و قاعده‌های مقابل به این رأس روی یک خط راست هستند، پس نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه‌های قاعده‌های آنهاست:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{DC}\quad (۱)$$

ب) چرا DH=DH′؟ با توجه به این موضوع و نتیجه‌ی (۱) از درس اول بار دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث را بنویسید.

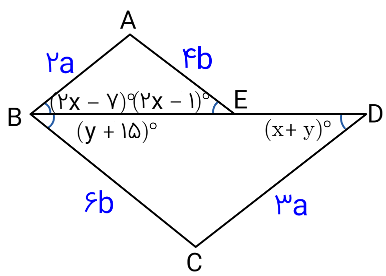
چون دو مثلث قائم‌الزاویه ADH و ADH′ به حالت (وتر و یک زاویه‌ی تند) هم نهشت هستند، پس نتیجه می‌شود DH=DH′. چون دو ارتفاع با هم برابرند، پس:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB}{AC}\quad (۲)$$

ج) از نتایج فوق چگونه می‌توانید درستی قضیه‌ی نیمسازها را نتیجه بگیرید؟

با توجه به روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$ که همان قضیه‌ی نیمسازها است.

۶) در شکل روبه‌رو می‌دانیم BE=۲DE است. اولاً x و y را به دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.



$$BE=۲DE\Rightarrow \frac{BE}{DB}=\frac{۲}{۳}\quad \text{AND}\quad \frac{AB}{DC}=\frac{۲a}{۳a}\quad \text{AND}\quad \frac{AE}{BC}=\frac{۴b}{۶b}=\frac{۲}{۳}\quad (۱)$$

اندازه‌ی اضلاع مثلث ها با هم متناسب‌اند، در نتیجه مثلث‌های ABE و BCD متشابه‌اند و زاویه‌هایشان با هم برابر است.

$\angle A = \angle C$ AND $\angle D = \angle ABE$ AND $\angle E = \angle CBD$

بنابراین می‌توان نوشت:

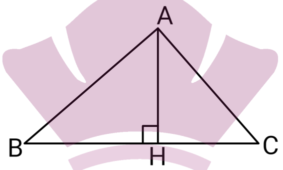
$$\angle D = \angle ABE \Rightarrow (x+y)^\circ = (۲x-۷)^\circ \Rightarrow y = x-۷ \qquad (۱)$$
$$\angle E = \angle CBD \Rightarrow (۲x-۱)^\circ = (y+۱۵)^\circ \Rightarrow y = ۲x-۱۶ \qquad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$۲x-۱۶ = x-۷ \Rightarrow x = ۹ \,,\; y = ۲$$

با توجه به (۱) نسبت تشابه $\overset{\triangle}{BCD}$ به $\overset{\triangle}{BAE}$ برابر $\frac{۳}{۲}$ است، در نتیجه نسبت مساحت‌ها برابر است با $(\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۹}{۴}$

۷) در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\angle A = ۹۰^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\Delta_{ABH} \sim \Delta_{ABC} \sim \Delta_{ACH}$ است. با توجه به این موضوع:



الف) ثابت کنید:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^۲ \;,\; \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^۲$$

$$\Delta ABH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{BH}{AC} \Rightarrow \text{نسبت مساحت دو مثلث} = (\frac{AB}{BC})^۲$$

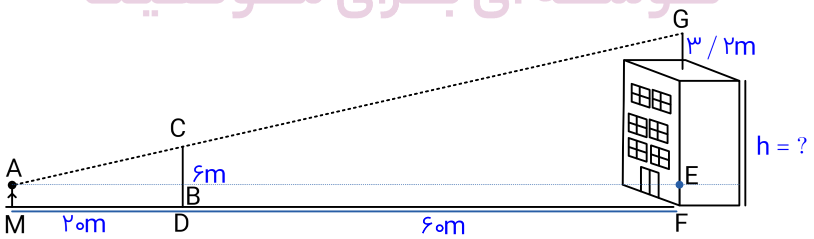
$$\Delta ACH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \text{نسبت مساحت دو مثلث} = (\frac{AC}{BC})^۲$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامه‌ی کار، درستی قضیه‌ی فیثاغورس را نتیجه گیری کنید.

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = ۱$$

$$\frac{AB^۲}{BC^۲} + \frac{AC^۲}{BC^۲} = \frac{AB^۲ + AC^۲}{BC^۲} \Rightarrow \text{طبق رابطه بالا} \; \frac{AB^۲ + AC^۲}{BC^۲} = ۱ \Rightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

۸) مطابق شکل، روی یک ساختمان یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است. در فاصله‌ی ۶۰ متری ساختمان یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله ۲۰ متری می ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بینند. اگر بدانیم فاصله‌ی چشمان ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید. (از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیه‌ی تالس کمک بگیرید.)



با توجه به راهنمای مسئله خط راست را رسم می‌کنیم و نقاط را نامگذاری می‌کنیم، چون AE را موازی MF رسم کردیم، پس اندازه‌های زیر را داریم:

$$BD = ۱/۶ \Rightarrow BC = ۶ - ۱/۶ = ۴/۴ \qquad , \qquad EF = ۱/۶$$

در مثلث AEG دو خط BC و EG موازیند، پس برای داریم:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EG} \Rightarrow \frac{۲۰}{۸۰} = \frac{۴/۴}{x} \Rightarrow x = \frac{۸۰ \times ۴/۴}{۲۰} = ۱۷/۶$$

$$\text{بلندی ساختمان} = (۱۷/۶ - ۳/۲) + ۱/۶ = ۱۶$$

۹) در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقه‌ی فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی ثبت و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها ۳۵ mm و فاصله‌ی درون دوربین تا عدسی، ۴/۲cm و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، ۶m باشد، اندازه‌ی واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟

از آنجا که AB || CD است می‌توان به راحتی اثبات کرد که AOB ≃ OCD . بنا به حالت (ز ز ز) بنابراین می‌توانیم تناسب زیر را داشته باشیم:

$$\frac{AB}{OC}=\frac{OC}{OF}\Rightarrow\frac{۰/۰۳۵}{۰/۰۴۲}=\frac{x}{۶}\Rightarrow x=\frac{۱۶\times ۰/۰۳۵}{۰/۰۴۲}=۵m$$