

فصل ۱

راهبردهای حل مسئله

در این فصل ما با استفاده از روش های گوناگون به تشریح یک سری از مسائل ساده ریاضی می پردازیم.

❖ راهبرد الگوسازی

سوال 1: دو عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب آنها 24 و حاصل جمع آنها کمترین مقدار باشد؟

اولین عدد	دومین عدد	حاصل جمع
۱	۲۴	۲۵
۲	۱۲	۱۴
۳	۸	۱۱
۴	۶	۱۰

کوچکترین مقدار حاصل جمع

سوال 2: با انگشتان یک دست به 5 صورت می توان عدد 1 را نشان داد، به چند صورت می توان عدد 2 را نشان داد؟

❖ به جدول داده شده برای این سوال توجه نمایید.

تعداد حالات	انگشت های جفت شده	انگشت ها
۴ حالت	۲ و ۳ و ۴ و ۵	انگشت ۱
۳ حالت	۳ و ۴ و ۵	انگشت ۲
۲ حالت	۴ و ۵	انگشت ۳
۱ حالت	۵	انگشت ۴
-----	قبلا با همه جفت شده	انگشت ۵

به ۱۰ حالت می توان عدد ۲ را با انگشتان یک دست نشان داد.



راه حل میانه: چون در اینجا ارتباط دو به دو بین هر جز داریم پس تعداد حالات برابر است با:

$$۱۰ = \frac{۵ \times ۴}{۲} = \text{تعداد حالات}$$

توشه ای برای موفقیت

. سوال 3: با سه رقم 7 و 2 و 5 تمام عددهای سه رقمی ممکن را بنویسید؟

. حل: ابتدا ما سه جدول را مطابق زیر تشکیل می دهیم ، همانطور که مشاهده می کنیم در هر جدول ابتدا رقم صدگان را یکی از اعداد سوال قرار داده و یکان و دهگان را تغییر می دهیم.

یکان	دهگان	صدگان
۵	۲	۷
۲	۵	۷
۲	۷	۷
۷	۲	۷
۲	۲	۷
۵	۷	۷
۷	۵	۷
۵	۵	۷
۷	۷	۷

یکان	دهگان	صدگان
۵	۷	۲
۷	۵	۲
۵	۲	۲
۲	۵	۲
۵	۵	۲
۷	۲	۲
۲	۷	۲
۲	۲	۲

یکان	دهگان	صدگان
۷	۲	۵
۲	۷	۵
۲	۵	۵
۵	۲	۵
۲	۲	۵
۷	۵	۵
۵	۷	۵
۷	۷	۵
۵	۵	۵

. سوال 4: با سکه های 50 و 100 تومانی به چند حالت می توان 500 تومان درست کرد؟

. حل : ابتدا جدولی را مطابق زیر تشکیل می دهیم و تعداد حالات ممکن را بررسی میکنیم.

تعداد سکه های ۵۰ تومانی	تعداد سکه های ۱۰۰ تومانی
۱۰	۰
۸	۱
۶	۲
۴	۳
۲	۴
۰	۵

به شش حالت می توان با این سکه ها ۵۰۰ تومان را درست کرد.

❖ راهبرد حذف حالت های نامطلوب

. سوال 5: مجموع سن سه نفر 14 سال و حاصل ضرب سن آنها 70 است؟ سن بزرگترین نفر چقدر است؟

مجموع سن ها	نفر سوم	نفر دوم	نفر اول
38 ✗	35	2	1
20 ✗	14	5	1
18 ✗	10	7	1
14 😊	7	5	2

سن بزرگترین نفر 7 سال است.

. سوال 6: 20 دستگاه دوچرخه و سه چرخه در یک پارکینگ وجود دارد. اگر تعداد کل چرخهای آنها 45 عدد باشد، چند دوچرخه و سه چرخه در این پارکینگ وجود دارد؟

تعداد دوچرخه	تعداد سه چرخه	بررسی آزمایش (محاسبه تعداد چرخ ها)
10	10	$10 \times 2 + 10 \times 3 = 50$ ✗
11	9	$11 \times 2 + 9 \times 3 = 49$ ✗
13	7	$13 \times 2 + 7 \times 3 = 47$ ✗
15	5	$15 \times 2 + 5 \times 3 = 45$ 😊

۵ سه چرخه ۱۵ دوچرخه



سوال 7: دو زاویه متمم اند. یکی از این زاویه ها از 3 برابر دیگر 10 درجه بیشتر است ، اندازه هر زاویه را بدست آورید.

بررسی آزمایش (محاسبه متمم بودن)	زاویه دوم	زاویه اول
$10 + 40 = 50$	۴۰	۱۰
$20 + 70 = 90$	۷۰	۲۰



❖ راهبرد زیر مسئله سازی

سوال 8: پس انداز هفتگی محمد 3000 تومان است، او حساب کرد 5 هفته پس انداز او نصف قیمت کیفی است که دوست دارد بخرد. قیمت کیف چقدر است؟

حل : پس انداز 5 هفته برابر است با : $15000 = 5 \times 3000$

اگر عدد بدست آمده در بالا نصف قیمت کیف باشد ، داریم : $30000 = 2 \times 15000$

سوال 9: طول و عرض و عمق یک استخر به ترتیب 12، 6، 3 متر است. می خواهند کف و دیوارهای این استخر را رنگ کنند، اگر برای هر مترمربع 3/0 کیلوگرم رنگ لازم باشد، برای رنگ کردن این استخر چند کیلوگرم رنگ لازم است؟

مساحت کف: $12 \times 6 = 72$ متر مربع

مساحت دیواره های کوچکتر: $2 \times (3 \times 6) = 36$ متر مربع

مساحت دیواره های بزرگتر: $2 \times (3 \times 12) = 72$ متر مربع

مساحت کل: $72 + 36 + 72 = 180$ متر مربع

مقدار کیلوگرم رنگ لازم برای مساحت بدست آمده در بالا: $0.3 \times 180 = 54$ کیلوگرم

سوال 10: در شکل زیر مقیاس خورشید و زمین فرضی است، به صورت تقریبی قطر خورشید چند برابر قطر زمین است؟



سوال 11: با توجه به جمع زیر حاصل را بیابید.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}_{\frac{3}{4}}$$

$$\underbrace{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}}_{\frac{7}{8}}$$

$$\underbrace{\frac{7}{8} + \frac{1}{16}}_{\frac{15}{16}}$$

$$\underbrace{\frac{15}{16} + \dots + \frac{1}{1024}}_{\frac{1023}{1024}}$$

سوال 12: با توجه به شکل های زیر الگوی نشان داده شده را تحلیل کنید.

۳ نقطه → ۳ پاره خط

۴ نقطه → ۶ پاره خط

۵ نقطه → ۱۰ پاره خط

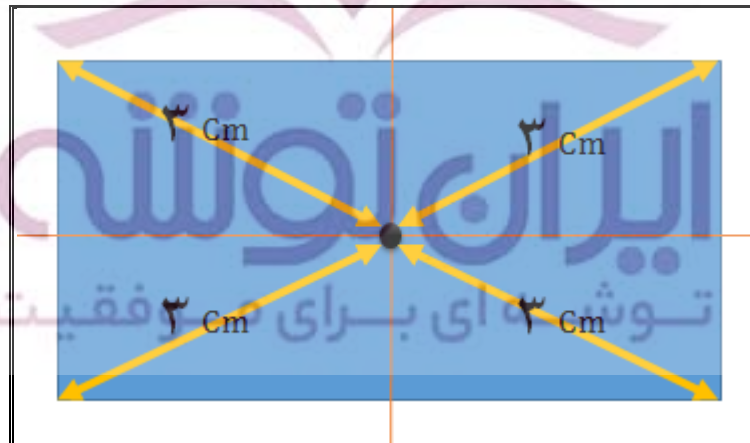
الگو
تعداد نقاط ضرب یک رقم کمتر تقسیم به ۲

سوال 13: فاطمه کتاب داستانی را در 6 ساعت مطالعه کرد و 10 صفحه از آن باقی ماند. اگر این کتاب 100 صفحه داشته باشد، فاطمه به طور متوسط در هر ساعت چند صفحه را مطالعه کرده است؟

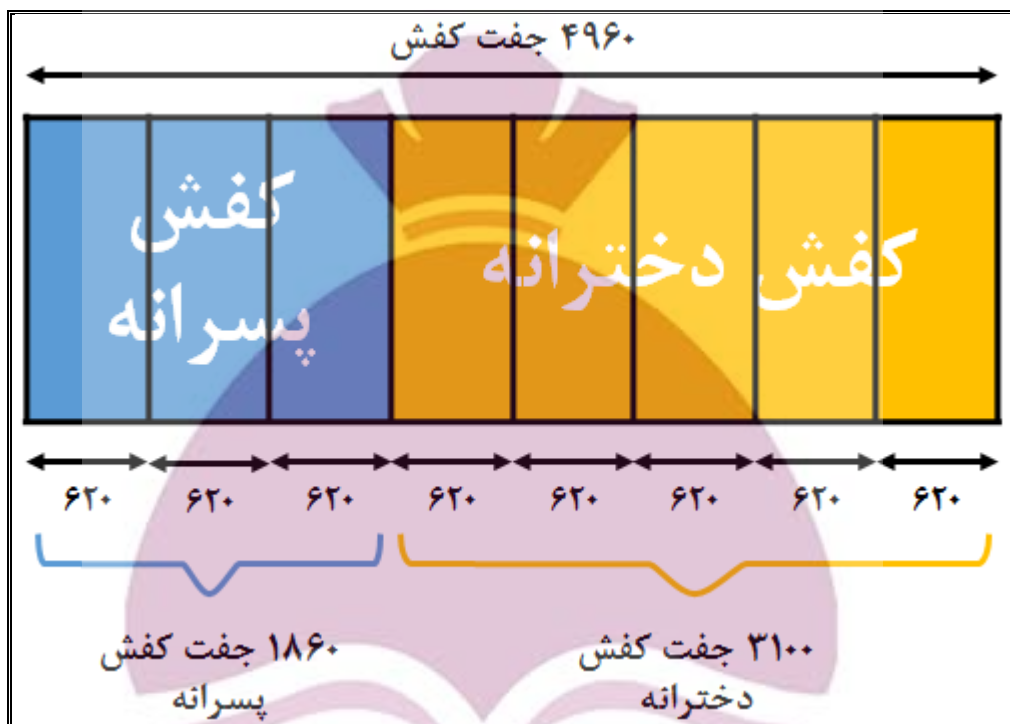
حل: به روش حل این سوال دقت کنید:

$$\begin{aligned} 6 \times \square + 10 &= 100 \\ 6 \times 15 + 10 &= 100 \end{aligned}$$

سوال 14: یک سالن مستطیل شکل است، می خواهند در مکانی از سقف این سالن دریچه کولر قرار دهند، به طوری که از چهار گوشه آن به یک فاصله باشد. محل دریچه را تعیین کنید.
حل: با توجه به شکل زیر، مشاهده می کنیم که محل دریچه در مرکز مستطیل می باشد.



سوال 15: در یک کارگاه تولید کفش 4960 جفت کفش تولید شده است ، 3/8 آن پسرانه و بقیه دخترانه هستند ، اگر قیمت هر جفت کفش پسرانه 27000 تومان و قیمت هر جفت کفش دخترانه 37000 تومان باشد ، درآمد این کارگاه را حساب کنید.



$$\text{درآمد کفش پسرانه} = 1860 \times 27000 = 50,220,000$$

$$\text{درآمد کفش دخترانه} = 3100 \times 34000 = 105,400,000$$

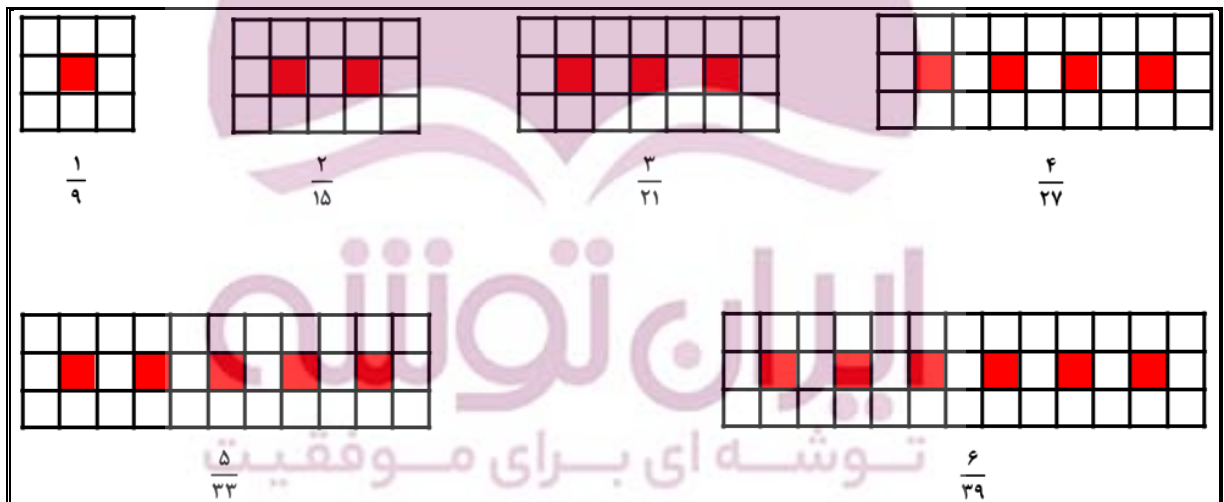
$$\text{درآمد کارگاه} = 50,220,000 + 105,400,000 = 155,620,000$$

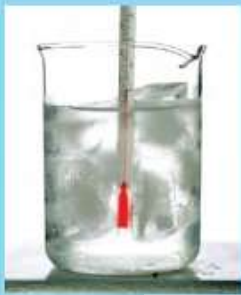
سوال 16: به چند حالت حاصل ضرب دو عدد طبیعی 36 می شود؟

عدد اول	عدد دوم	حاصل جمع
۱	۳۶	۳۷
۲	۱۸	۲۰
۳	۱۲	۱۵
۴	۹	۱۳
۶	۶	۱۲

کمترین مقدار حاصل جمع ←

سوال 17: الگوی زیر تفسیر کنید.



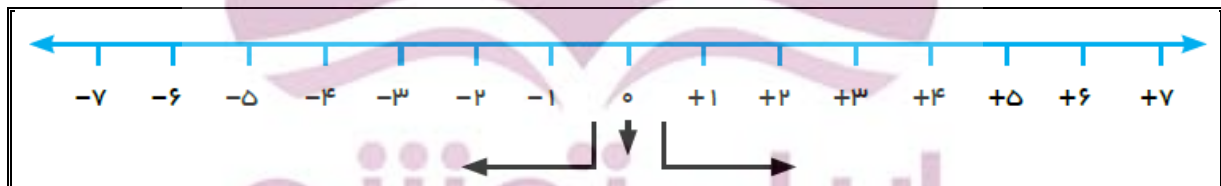


فصل ۲ عددهای صحیح

به اجتماع مجموعه اعداد طبیعی، قرینه اعداد طبیعی و عدد صفر مجموعه اعداد صحیح (عدد های علامت دار) گفته میشود. این مجموعه را با حرف Z نشان می دهند.

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

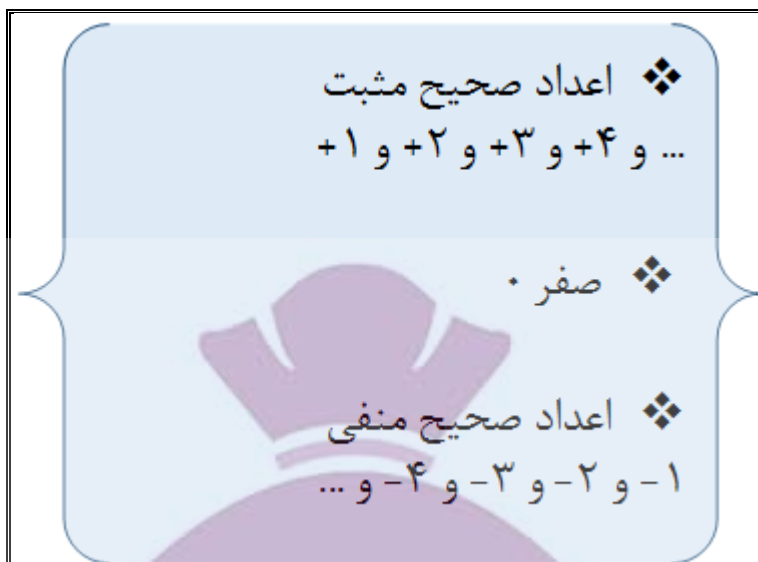
محور مجموعه اعداد صحیح به صورت مقابل می باشد :



از عددهای صحیح علامت دار برای بیان وضعیت دمای هوا (گرما و سرما)، عمق و ارتفاع زمین نسبت به سطح دریا استفاده می شود.



❖ پس نتیجه می گیریم اعداد صحیح علامت دار به سه دسته تقسیم می شوند :



نکته 1: در مجموعه اعداد صحیح کوچکترین و بزرگترین عضو نا مشخص می باشد.

نکته 2: دقت کنید که عدد صفر نه مثبت است و نه منفی. این عدد مبدا محور اعداد صحیح می باشد.

نکته 3: هنگام نوشتن اعداد صحیح مثبت، اغلب علامت عدد را نمی نویسیم. مثلاً به جای نوشتن عدد $(+7)$ می نویسیم (7) و به جای $(+4) + (6+)$ می نویسیم $4 + 6$.

❖ به عنوان مثال :

در مجموعه اعداد صحیح مثبت $\{1, 2, 3, \dots\}$ ، بزرگترین عضو نا مشخص است و کوچکترین عضو آن عدد (1) است.

یا در مجموعه اعداد صحیح منفی $\{1-, 2-, 3-, \dots\}$ ، کوچکترین عضو نا مشخص است و بزرگترین عضو عدد (-1) است.

برای قرینه کردن اعداد صحیح کافی است که پشت عدد مربوطه (سمت چپ عدد) علامت منفی را اضافه نموده، در این صورت علامت عدد مربوطه تغییر می یابد. علامت منفی ((-)) نشان دهنده قرینه است.

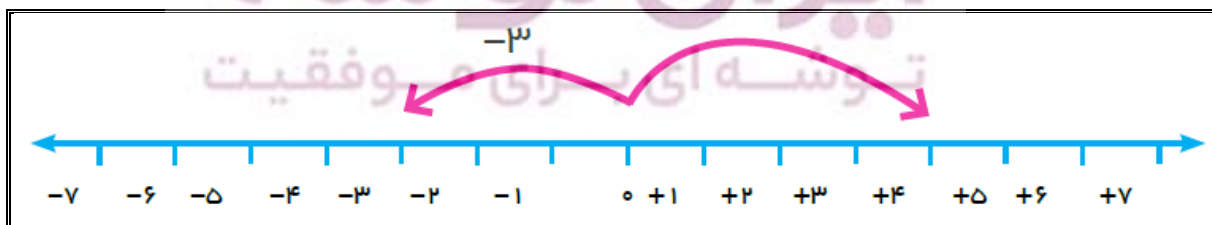
به عنوان مثال : می‌خواهیم قرینه عدد (-7) را بدست آوریم ، برای اینکار علامت منفی $((-))$ را پشت عدد قرار می دهیم ، به صورت روبرو : $-(-7) = +7$

❖ نحوه نمایش عددهای صحیح علامت دار روی محور

برای اینکه بتوانیم عددهای صحیح علامت دار را روی محور نمایش دهیم ، ابتدا روی محور از نقطه صفر (نقطه شروع) کار خود را آغاز میکنیم. به این صورت که اگر عدد مورد نظر ما منفی بود، از نقطه صفر به سمت چپ محور حرکت میکنیم و اگر عدد مورد نظر ما مثبت بود، از نقطه صفر به سمت راست محور حرکت میکنیم.

به عنوان مثال : در شکل زیر برای نمایش عدد (-3) در محور زیر ، با توجه به اینکه عدد ما منفی است ، از نقطه صفر به اندازه 3 واحد به سمت چپ محور حرکت میکنیم.

همچنین برای نمایش عدد $(+4)$ در محور زیر ، با توجه به اینکه عدد ما مثبت است ، از نقطه صفر به اندازه 4 واحد به سمت راست محور حرکت میکنیم.



نکته 4: اگر در روی محور اعداد صحیح نقطه شروع ما از نقطه صفر نبود ، بنابر این در روی محور عملیات جمع و تفریق صورت میگیرد.

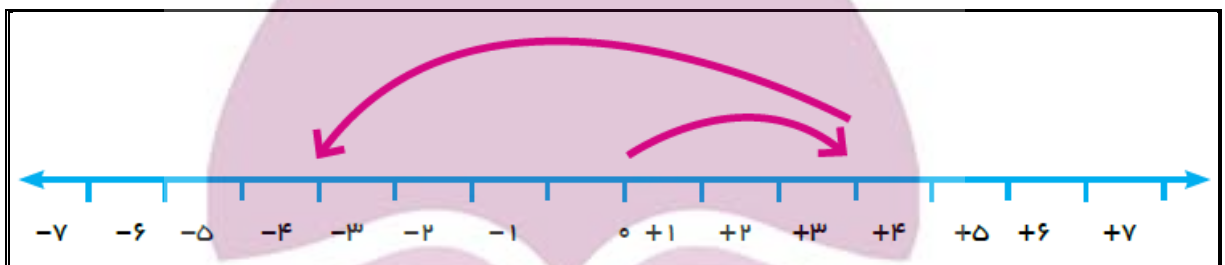
(باز هم اشاره میکنم : اگر به سمت راست محور حرکت کنیم به تعداد واحد های حرکتان عملیات اضافه کردن (زیاد کردن) را داریم و اگر به سمت چپ محور حرکت کنیم به تعداد واحد های حرکتان عملیات کاستن (کم کردن) داریم.)

به عنوان مثال : در شکل زیر ما از نقطه صفر به اندازه 3 واحد به سمت راست حرکت کرده ایم پس ما عدد (+3) را نشان داده ایم. سپس ما از همین نقطه (+3) به اندازه 7 واحد به سمت چپ حرکت کرده ایم و در نقطه (-4) توقف کرده ایم.

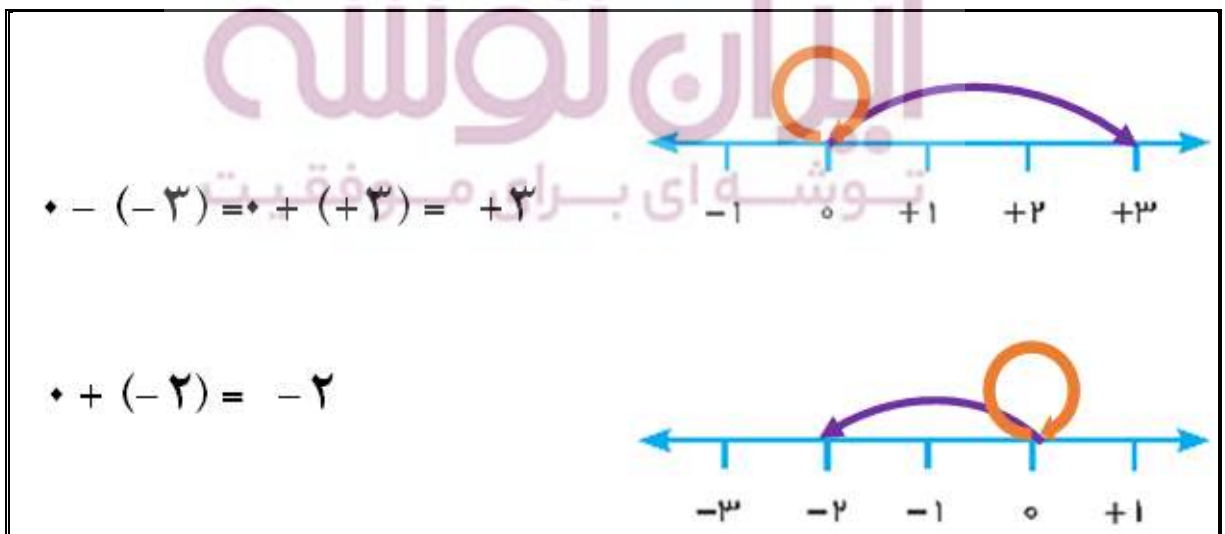
در واقع عدد (+3) را با عدد (-7) جمع نموده و حاصل عدد (-4) شده است.

حال میتوان جمله بالا را به صورت ریاضی نوشت :

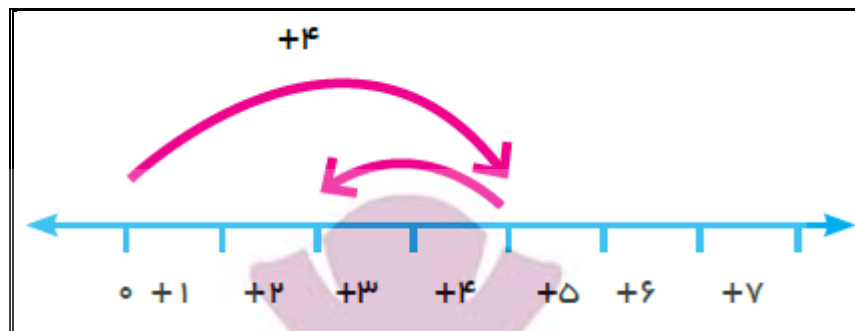
$$(+3) + (-7) = (-4)$$



. نکته 5: جمع هر عدد با صفر ، برابر با خود آن عدد میشود.

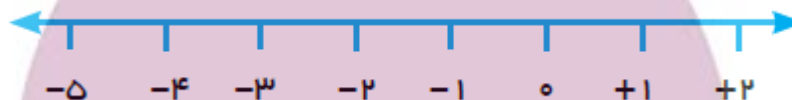


تمرین : با توجه به شکل زیر توضیح دهید چه اتفاقی افتاده ؟ آیا می توانید عملیات جمع و تفریق آن را بنویسید.



تمرین : با توجه به اعداد نوشته و نوع عملیات بین آنها (جمع یا تفریق) ، این جمع و تفریق را روی محور نشان دهید.

$$(-4) + (+6) = ?$$



❖ مقایسه بین اعداد صحیح علامت دار (کدام کوچکتر و کدام بزرگتر؟)

برای مقایسه بین عددهای صحیح علامت دار ، باید به نکات زیر توجه نمود :

- 1- اعداد صحیح مثبت همیشه بزرگتر از اعداد صحیح منفی هستند، به عنوان مثال عدد (+4) بزرگتر از عدد (-6) است.
- 2- عدد صفر همیشه از اعداد صحیح منفی بزرگتر و از اعداد صحیح مثبت کوچکتر می باشد. به عنوان مثال صفر از (-3) بزرگتر است ، یا عدد (+5) از صفر بزرگتر است.
- 3- در مقایسه بین اعداد صحیح هم علامت مثبت بایستی به خود عدد دقت نمود. به عنوان مثال عدد (+7) همیشه بزرگتر از عدد (+3) است.

4- در مقایسه بین اعداد صحیح هم علامت منفی بایستی بیشتر به علامت منفی توجه کرد، به این صورت که عدد (8-) از عدد (9-) بزرگتر است، البته درست است که عدد 9 از 8 بزرگتر است ولی عدد 8 کمتر دروغ گفته است. (اونی که کمتر دروغ بگه آدم بزرگیه!)
تمرین : اعداد صحیح علامت دار زیر را با هم مقایسه کنید.

$4 \bigcirc -8$	$-27 \bigcirc 1$	$0 \bigcirc -14$	$3 \bigcirc 15$	$(-8) \bigcirc (+8)$
$100 \bigcirc -1$	$7 \bigcirc 7$			

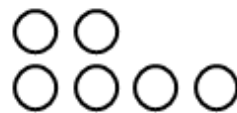
❖ جمع و تفریق اعداد صحیح

برای جمع و تفریق اعداد صحیح بایستی به نکات زیر توجه نمود :

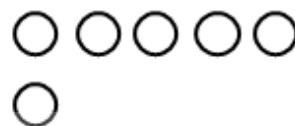
1- اگر دو عدد علامت دار مورد نظر با یکدیگر هم علامت باشند (یا هر دو مثبت و یا هر دو منفی)، آن دو عدد را با همدیگر جمع می کنیم. به عنوان مثال حاصل دو عدد (5+) و (6+) میشود (11+)، یا حاصل دو عدد (4-) و (9-) میشود (13-).
نتیجه 1: اگر هر دو عدد مثبت باشند، حاصل جمع آنها مثل جمع دو عدد طبیعی است.
نتیجه 2: اگر هر دو عدد منفی باشند، حاصل جمع آنها مثل جمع دو عدد طبیعی است.
اما جواب علامت منفی دارد.

2- اگر دو عدد علامت دار مورد نظر با یکدیگر هم علامت نبوندند (یعنی یکی از آنها مثبت و دیگری منفی باشد)، علامت عدد بزرگتر را نوشته و سپس آن دو عدد را از هم کم میکنیم. به عنوان مثال میخواهیم حاصل دو عدد (7-) و (9+) را بدست آوریم، برای این کار علامت عدد بزرگتر را نوشته (یعنی علامت عدد 9 که + (مثبت) است) و سپس دو عدد 9 و 7 را از هم کم میکنیم که میشود 2، در این صورت جواب (2+) است.

$$(+2) + 4 = +2 + 4 = +6$$



$$5 + 1 = +6$$



$$(+3) + (+2) = +3 + 2 = +5$$



$$-3 - 4 = -7$$



$$-4 - (+1) = -4 - 1 = -5$$



$$(-4) + (-2) = -6$$



نتیجه 3: اگر در جمع دو عدد صحیح یکی مثبت و دیگری منفی باشد و بدون در نظر گرفتن علامت ها عدد مثبت بیشتر باشد، برای جواب دو عدد را از هم کم و علامت مثبت را قرار می دهیم.

نتیجه 4: اگر در جمع دو عدد صحیح یکی مثبت و دیگری منفی باشد و بدون در نظر گرفتن علامت ها عدد منفی بیشتر باشد، برای جواب دو عدد را از هم کم و علامت منفی را قرار می دهیم.

$$(+5) + (-8) = -3$$

$$4 + (-6) = -2$$

$$(+5) - (+7) = (+5) + (-7) = -2$$

$$7 - 9 = -2$$



. لطفا به مثال های زیر دقت نمایید.

$$(-15) + (-17) = -(15 + 17) = -32$$

$$120 + (-99) = +(120 - 99) = +21$$

$$(-188) + 150 = -(188 - 150) = -38$$

$$34 + (+16) = +(34 + 16) = +50$$

$$(-16) + (+40) + (-27) = (40 - 16) + (-27) = -(27 - 24) = -3$$

. تمرین : حاصل جمع و تفریق های زیر را بدست آورید.

$$(-25) + (-4) =$$

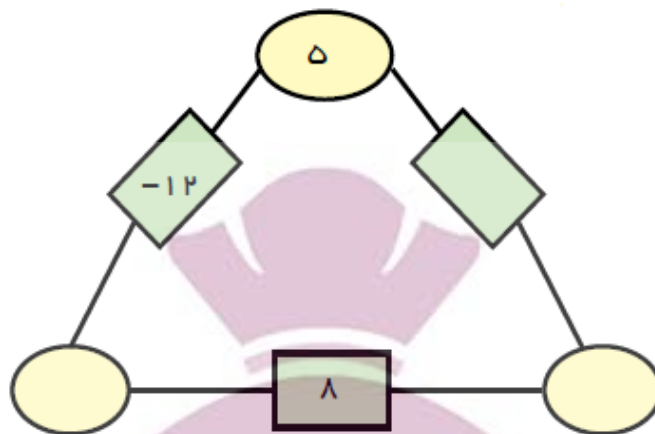
$$80 - 110 =$$

$$(+40) - (-60) + (-34) - 55 =$$

. تمرین : دمای هوای شهر کرد 3 درجه زیر صفر است ، اردبیل 9 درجه از شهر کرد سردتر

است ، دمای هوای اردبیل چند درجه است؟

. تمرین : در مثلث زیر ، عدد روی هر ضلع از مجموع دو راس های مجاور ضلع بدست می آید ، جاهای خالی را کامل کنید.



❖ چند خاصیت مهم از جمع و تفریق اعداد صحیح

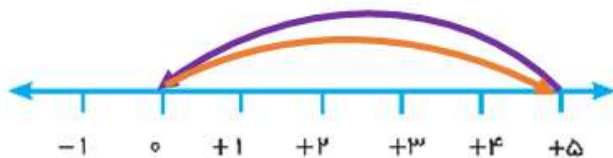
1- جمع اعداد صحیح دارای خاصیت جابجایی (تعویض پذیری) می باشد.

$$(-7) + (+3) = (+3) + (-7) = -4$$

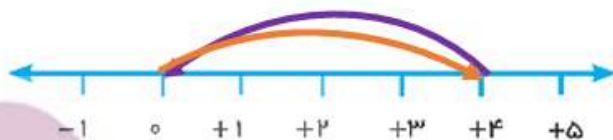
2- حاصل جمع هر عدد صحیح با قرینه اش برابر با صفر است.

$$(-11) + (+11) = 0$$

$$(+5) + (-5) = \blacklozenge$$



$$4 - 4 = 4 + (-4) = \blacklozenge$$



3- قرینه مجموع دو عدد با مجموع قرینه های آن دو عدد مساوی است.

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

4- جمع اعداد صحیح دارای خاصیت شرکت پذیری است.

$$[(-5) + (-7)] + (+11) = (-5) + [(-7) + (+11)] = -1$$

5- جمع و تفریق اعداد دو رقمی و حتی چند رقمی به صورت زیر است : (در کلاس بحث نمایید)

	د	ی
-	۴	۳
+	۵	۱
-	۳	۴

$$-40 + (-3)$$

$$+50 + 1$$

$$-30 + (-4)$$

❖ ضرب اعداد صحیح

برای ضرب دو عدد صحیح همانند ضرب دو عدد طبیعی عمل میکنیم ، با این تفاوت که بایستی علامت حاصل ضرب را نیز مشخص کنیم.

به دو مثال زیر توجه کنید :

$$(-11) \times (+20) = -220 \quad (-13) \times (-9) = +117$$

نکته بسیار مهم : حاصل ضرب دو عدد هم علامت (مثبت در مثبت یا منفی در منفی) همیشه یک عدد مثبت است و حاصل ضرب دو عدد غیر هم علامت (مثبت در منفی یا منفی در مثبت) همیشه یک عدد منفی است.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{منفی} = \text{مثبت} \times \text{منفی} \\ \text{منفی} = \text{منفی} \times \text{مثبت} \end{array} \right.$ حاصل ضرب دو عدد غیر هم علامت	$\left\{ \begin{array}{l} \text{مثبت} = \text{مثبت} \times \text{مثبت} \\ \text{مثبت} = \text{منفی} \times \text{منفی} \end{array} \right.$ حاصل ضرب دو عدد هم علامت
---	---

❖ چند خاصیت مهم از ضرب اعداد صحیح

1- ضرب اعداد صحیح دارای خاصیت جابجایی (تعویض پذیری) است.

$$(-5) \times (+7) = (+7) \times (-5) = -35$$

2- ضرب اعداد صحیح دارای خاصیت شرکت پذیری است.

$$[(-2) \times (+5)] \times (-4) = (-2) \times [(+5) \times (-4)] = +40$$

3- ضرب اعداد صحیح دارای خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به عمل جمع و یا تفریق می باشد.

$$a \times (b \pm c) = ab \pm ac$$

$$\text{الف)} \quad (-5) \times [(-7) + (+4)] = (-5) \times (-7) + (-5) \times (+4) = +15$$

$$\text{ب)} \quad (-3) \times [(-4) - (+7)] = (-3) \times (-4) - (-3) \times (+7) = (+12) - (-21) = 33$$

4- حاصل ضرب هر عدد صحیح در معکوش برابر با مقدار یک است.

$$(-17) \times \left(-\frac{1}{17}\right) = +1$$

5- حاصل ضرب هر عدد صحیح در قرینه معکوش برابر با (-1) است.

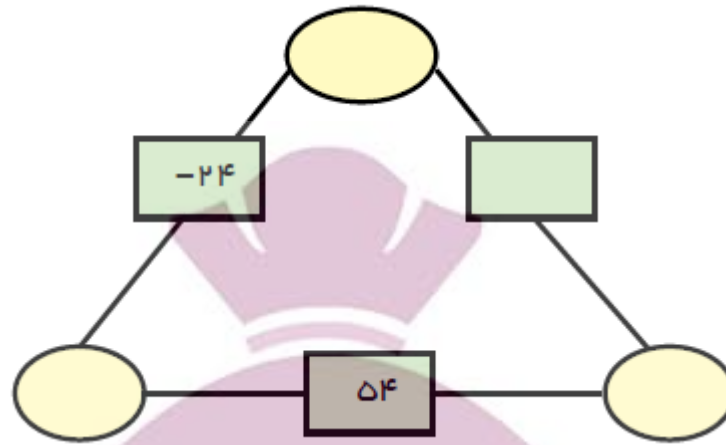
$$(+17) \times \left(-\frac{1}{17}\right) = -1$$

❖ تقسیم اعداد صحیح

در تقسیم اعداد صحیح همانند ضرب اعداد صحیح ابتدا تعیین علامت میکنیم ، سپس صرف نظر از علامت ها دو عدد را بر هم تقسیم میکنیم. به عنوان مثال داریم :

$$(-30) \div (+5) = -6, (-45) \div (-9) = +5$$

. تمرین : حاصل ضرب عدد های روی راس های مثلث ، روی هر ضلع نوشته شده است. جاهای خالی را کامل کنید.



. تمرین : الف) دو عدد پیدا کنید که مجموع آنها $(+4)$ و حاصل ضرب آنها (-12) باشد.

ب) دو عدد پیدا کنید که مجموع آنها (-11) و حاصل ضرب آنها $(+24)$ باشد.

ج) دو عدد پیدا کنید که حاصل ضرب آنها 24 شود و حاصل جمع آنها کمترین مقدار ممکن باشد.

. تمرین : در شهر همدان در یک شبانه روز پاییزی حداقل دما 8 درجه و حداکثر آن 12 درجه می باشد. میانگین دما چند درجه است؟

. تمرین : حاصل عبارت $(6 - 6 \div 3 \times 2 + 1)$ چه مقداری است؟

. تمرین : جاهای خالی در جداول زیر را کامل کنید (جدول اول برای عملیات جمع و تفریق است و جدول دوم برای عملیات ضرب و تقسیم می باشد):

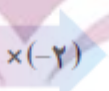
-۸		۴
-۲		۵



-۴

	۳	
۶		-۷
	۴	

		۸
۹		
	۷	۱۲



 $\times (-2)$

-۲۰	-۳۰	
	-۲۲	-۲۶
-۲۸		

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



جبر و معادله

فصل ۳

❖ عبارات جبری، نمادها و قرار دادها

مربعی به ضلع 2 سانتی متر را در نظر بگیرید، میخواهیم محیط این مربع را بدست آوریم، همانطور که می دانیم محیط یک مربع برابر است با مجموع چهار ضلع آن. در واقع داریم:

$$\text{اندازه ی یک ضلع} \times 4 = \text{محیط مربع}$$

پس با توجه به فرمول بالا، مقدار محیط مربع یاد شده (4×2) یعنی 8 سانتی متر می باشد.

باز می خواهیم محیط مربعی به ضلع 5 سانتی متر را بدست آوریم که باز هم با توجه به فرمول بالا داریم: $(4 \times 5 = 20)$

به همین صورت می توان محیط مربعات دیگر را با اندازه اضلاع متفاوت بدست آوریم.

حال می خواهیم محیط مربعی را که اندازه ضلع آن مقدار a هست را بدست آوریم، در این صورت داریم: $(4 a)$

. نکته: محیط یک مربع را با حرف P و مساحت آن را با حرف S

نمایش می دهند.

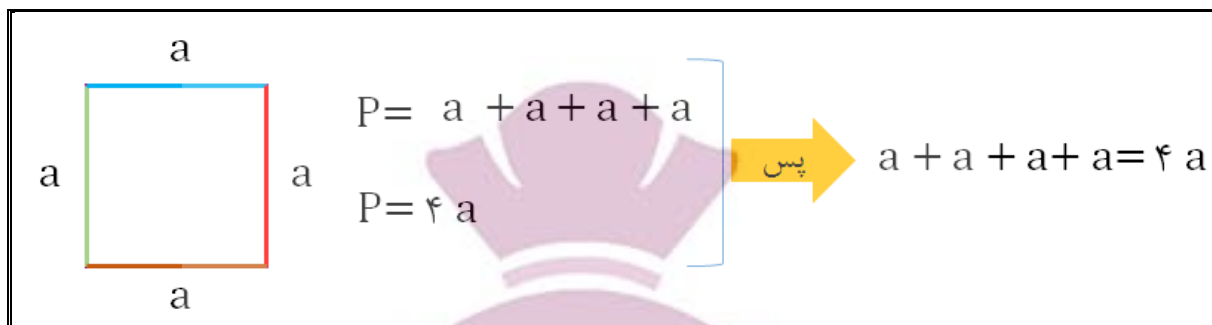


a

❖ نتیجه: پس ما می توانیم محیط مربع (P) و مساحت مربع (S) را بر حسب حرف a تعریف کنیم. پس داریم:

$$(P = 4a), (S = a \times a = a^2)$$

. در دو رابطه نوشته شده در بالا می توانستیم به جای حرف a از حروف دیگری نیز استفاده کنیم.

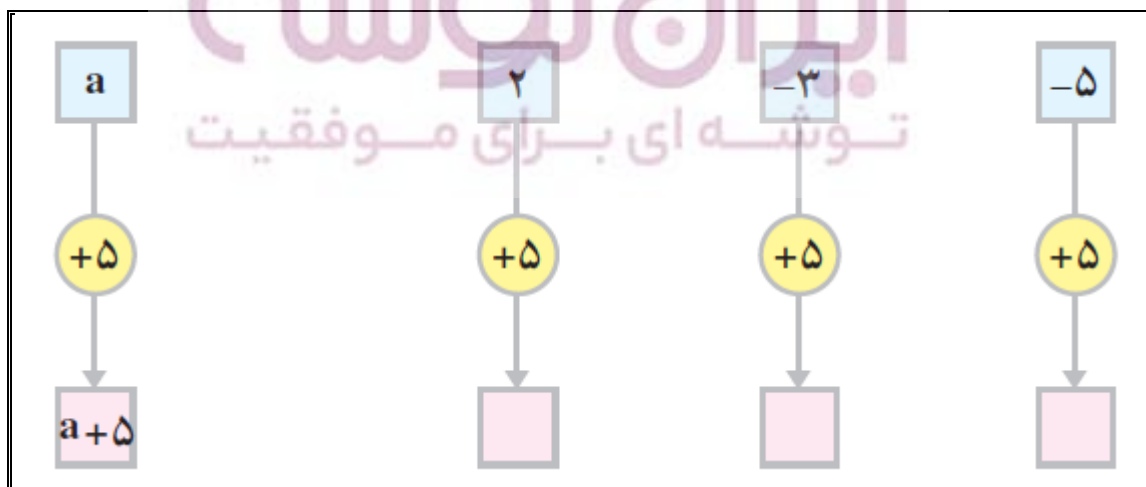


. در واقع به حرف a به دید یک عدد نگاه میشود، به عنوان مثال ما می دانیم که هر عددی که به توان خودش برسد حاصل خود آن عدد است. ما می توانیم این جمله را با حرف a نیز نمایش دهیم:

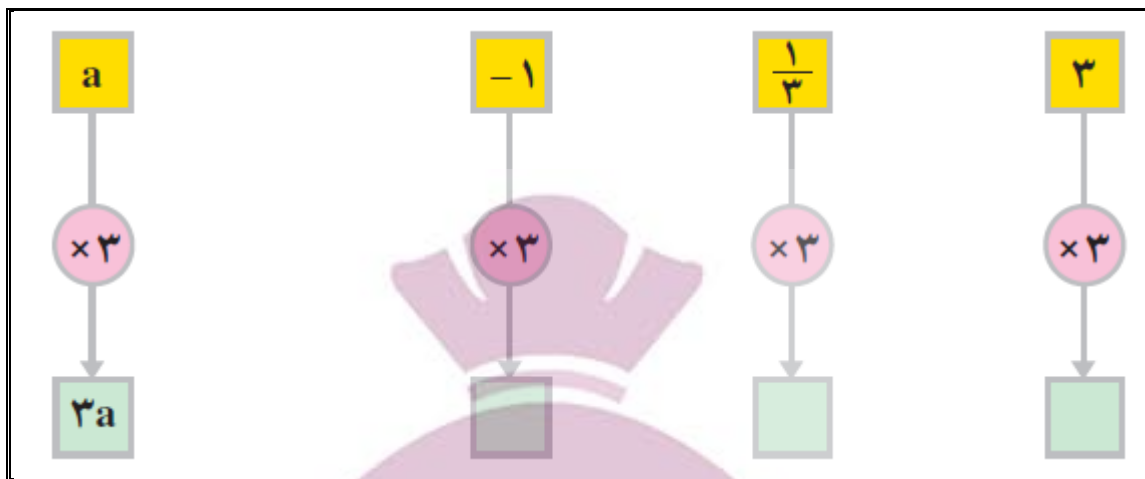
$$a^1 = a$$

. تمرین: عبارت "اندازه حجم یک مکعب برابر است با اندازه آن ضلع از مکعب به توان 3" را با استفاده از حرف a یا هر حرف انگلیسی دیگری بنویسید.

. نمودارهای زیر نشان می دهند که هر عدد داده شده با عدد 5 جمع شده و عدد جدیدی بدست می آید. (با دقت به نمودارها توجه کنید).



نمودارهای زیر نشان می دهند که هر عدد داده شده 3 برابر می شود و عدد جدیدی بدست می آید. (با دقت به نمودارها توجه کنید).



به تساوی های زیر دقت کنید.



$$0/7 + 0/7 + 0/7 + 0/7 + 0/7 = 5 \times 0/7$$



$$(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) =$$

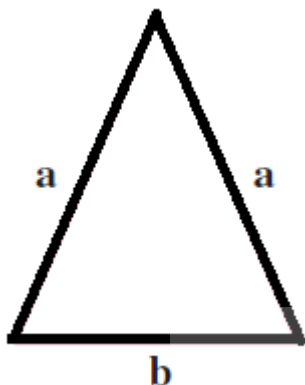
تمرین : با توجه به تساوی ها و شکل های بالا ، تساوی های زیر را کامل کنید. (در کلاس بحث و نتیجه گیری کنید).

$$1/2 + 1/2 + 1/2 = \quad 7 + 7 + 7 + 7 + 7 =$$

$$(-6) + (-6) + (-6) = \quad (-2) + (-2) + (-2) + (-2) =$$

❖ ساده کردن یک عبارت جبری

در مثلث متساوی الساقین زیر ، اندازه ساق را با a نشان می دهیم و قاعده را با b . می خواهیم محیط این مثلث را به صورت یک عبارت جبری بنویسیم.



همانطور که می دانیم محیط یک مثلث برابر است با مجموع سه ضلع آن ، پس با توجه به اینکه محیط هر شکلی را با نماد (P) نمایش می دهیم ، پس داریم :

$$P = a + a + b = 2a + b$$

تمرین : مستطیلی را در نظر بگیرید که طول آن a و مقدار عرض آن b باشد ، محیط آن را به صورت یک عبارت جبری بنویسید.

نتیجه گیری : عبارت $3x + 9d + 5c$ و عباراتی شبیه آن را عبارت جبری می گویند. عبارت های رو به رو هم عبارات جبری هستند ، که قابل ساده شدن می باشند : $+2y-6z-3z-4y$ ، $b-8a-6a+4b$

تمرین : کدام یک از عبارات زیر می توان ساده کرد؟

$$x + 3x$$

$$2x + 3y$$

$$x + 2y + 5x$$

تمرین : عبارت های زیر در صورت امکان ساده کنید.

$$9e + 4d + 2e + 3d =$$

$$1 \cdot a + 5m - 2a + m =$$

$$5a + 2a + 9k - 3a =$$

$$4l + 7k - 4k + 5 =$$

$$8g - 9 - 2g + 8 =$$

$$14h + 5 - 4h - 6 =$$

نکته : در عبارت جبری $3a+5b+4a-3b$ هر کدام از $3a$ ، $5b$ ، $4a$ ، $3b$ را یک جمله می گویند. دو جمله $3a$ و $4a$ را جملات متشابه می گویند ولی دو جمله $5b$ و $3a$ متشابه نیستند. و مسلماً $5b$ و $3b$ متشابه هستند.

برای ساده کردن عبارتی مانند $8x+5y+4x-2y$ فقط جمله های متشابه را به هم در نظر می گیریم و آنها را جمع یا تفریق می کنیم تا عبارت جبری ساده شود.

به مثال زیر توجه نمایید :

$$\begin{array}{c} 12x \\ \hline 8x + 5y + 4x - 2y = 12x + 3y \\ \hline 3y \end{array}$$

. تمرین : دو عبارت جبری زیر را ساده کنید.

$$15x + 10y - 3x - 8y =$$

$$7k - 8a - 5k + 10a =$$

. به نوع ساده کردن عبارت های جبری زیر دقت کنید ، به این نوع روش ساده کردن فاکتور گیری می گویند به این صورت که از عامل مشترک (عبارت مشترک) فاکتور گرفته و بقیه عوامل باقی مانده را در داخل پرانتز می نویسیم.

$$\begin{array}{l} 2a + 6a = (2 + 6) a = 8a \\ 5a - 2a = (5 - 2) a = 3a \end{array}$$

. تمرین : حال با استفاده از روش فاکتورگیری عبارات جبری زیر را ساده کنید.

$$5a - 2b - 5a =$$

$$-7a - 3b + 2a - 4b =$$

$$-5a + 2b + 6a - 14b =$$

$$2a + 3a - 7a + 2b =$$

. تمرین : عبارات جبری زیر را با هر روشی که می توانید (معمولی یا فاکتورگیری) ساده کنید.

$$15a + 7d - 4a + 3d$$

$$3b + 10x + 9b - 7b - 7x$$

$$4a + 3k + 4k - 4a$$

$$8c + 3k + 5k - 8k$$

$$3d + 2e + 4d + 3e - 5d - 4e$$

$$7a + 2a + 12d - 3a + 3x - 2x$$

$$5f + 8f + 4 + 10f - 9$$

$$3a + 7 + 3a - 5a - 10$$

$$4b - 5 - 3b + 2$$

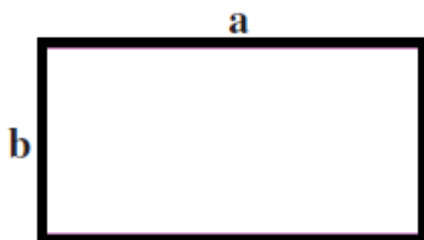
$$3x + 3 - 15 + 4x$$

❖ مقدار عددی یک عبارت جبری

در مستطیل مقابل طول را با a و عرض را با b نشان می دهیم ، بنابراین مساحت این مستطیل برابر

است با : $S = a \times b$ توشه ای برای موفقیت

رابطه بالا را برای تمامی مستطیل ها می توان استفاده کرد.



. تمرین : مساحت مستطیل های زیر را بدست آورید.

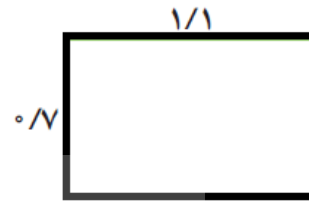
$$a = 4$$

$$b = 3$$

(ج)



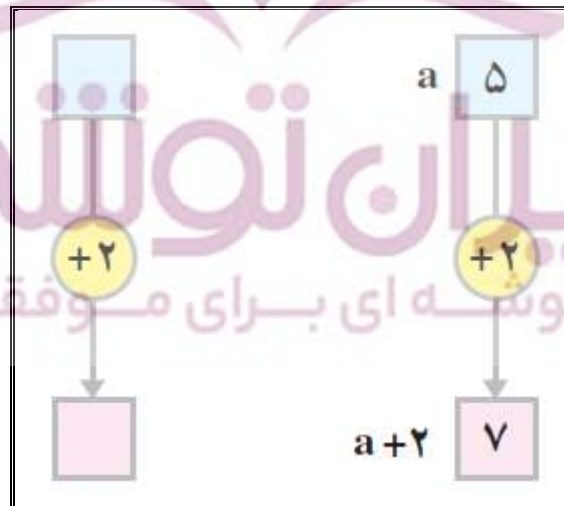
(ب)



(الف)

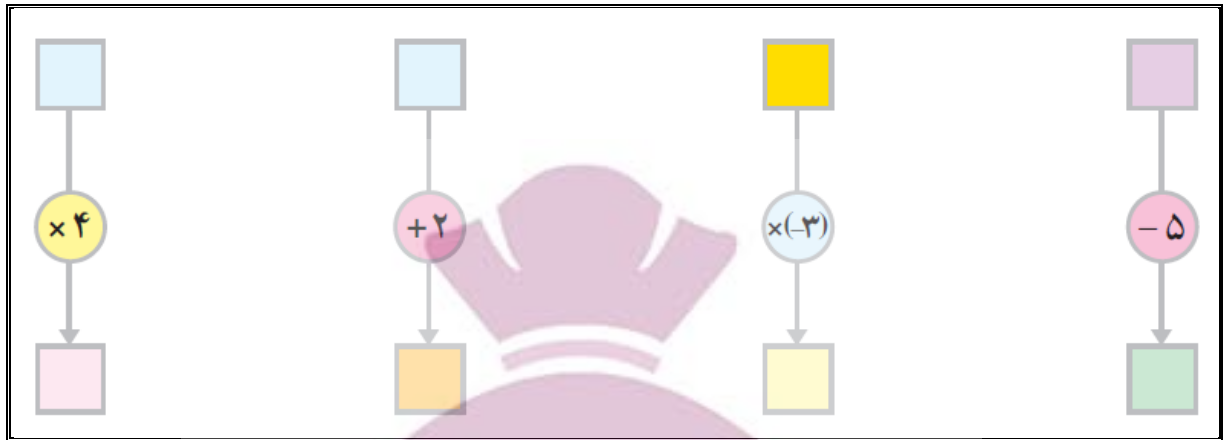
. همانطور که گفتیم یک عبارت جبری می تواند به تعداد بیشماری عبارت عددی تبدیل شود و این در صورتی است که به جای حروف آن عدد ها را قرار دهیم. در تمرین بالا عبارت $a \times b$ به سه عبارت عددی تبدیل شده است.

نمودار عبارت جبری $a+2$ را در زیر مشاهده می کنید.



اگر در این عبارت به جای a عدد 5 را قرار بدهیم حاصل عدد 7 می شود. $(5+2 = 7)$

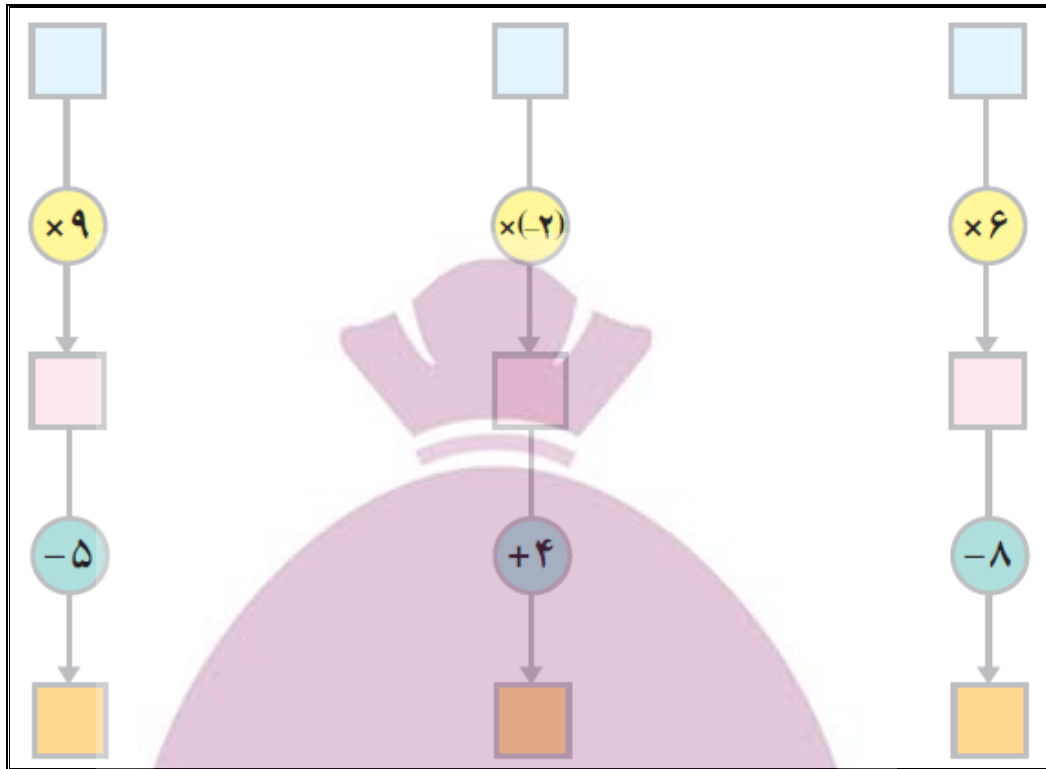
. تمرین : عبارت جبری نظیر هر نمودار را بنویسید.



. تمرین : مقدار عددی هر عبارت جبری را به ازای عدد های داده شده حساب کنید.

<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">a</td> <td style="padding: 5px 10px;">2</td> <td style="padding: 5px 10px;">-5</td> <td style="padding: 5px 10px;">3</td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">$a + 7$</td> <td style="padding: 5px 10px;">9</td> <td style="padding: 5px 10px;"></td> <td style="padding: 5px 10px;"></td> </tr> </table>	a	2	-5	3	$a + 7$	9			<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">b</td> <td style="padding: 5px 10px;">4</td> <td style="padding: 5px 10px;">-3</td> <td style="padding: 5px 10px;">-2</td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">$6b$</td> <td style="padding: 5px 10px;"></td> <td style="padding: 5px 10px;"></td> <td style="padding: 5px 10px;"></td> </tr> </table>	b	4	-3	-2	$6b$			
a	2	-5	3														
$a + 7$	9																
b	4	-3	-2														
$6b$																	
<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">a</td> <td style="padding: 5px 10px;">2</td> <td style="padding: 5px 10px;">-2</td> <td style="padding: 5px 10px;">3</td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">$4a + 1$</td> <td style="padding: 5px 10px;"></td> <td style="padding: 5px 10px;"></td> <td style="padding: 5px 10px;"></td> </tr> </table>	a	2	-2	3	$4a + 1$				<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">a</td> <td style="padding: 5px 10px;">3</td> <td style="padding: 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px;">-3</td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">$-3a + 4$</td> <td style="padding: 5px 10px;"></td> <td style="padding: 5px 10px;"></td> <td style="padding: 5px 10px;"></td> </tr> </table>	a	3	0	-3	$-3a + 4$			
a	2	-2	3														
$4a + 1$																	
a	3	0	-3														
$-3a + 4$																	

. تمرین : عبارت جبری نظیر هر نمودار را بنویسید.



❖ معادله

میخواهیم با استفاده از یک مثلث متساوی الاضلاع و دانستن مقدار محیط آن و نوشتن رابطه محیط آن به صورت عبارت جبری ، طول یا مقدار ضلع این مثلث را بدست آوریم.

اگر فرض کنیم مقدار محیط این مثلث 12 سانتی متر باشد ،
داریم :



محیط مثلث (P) : $3a$

$$3a = 12$$

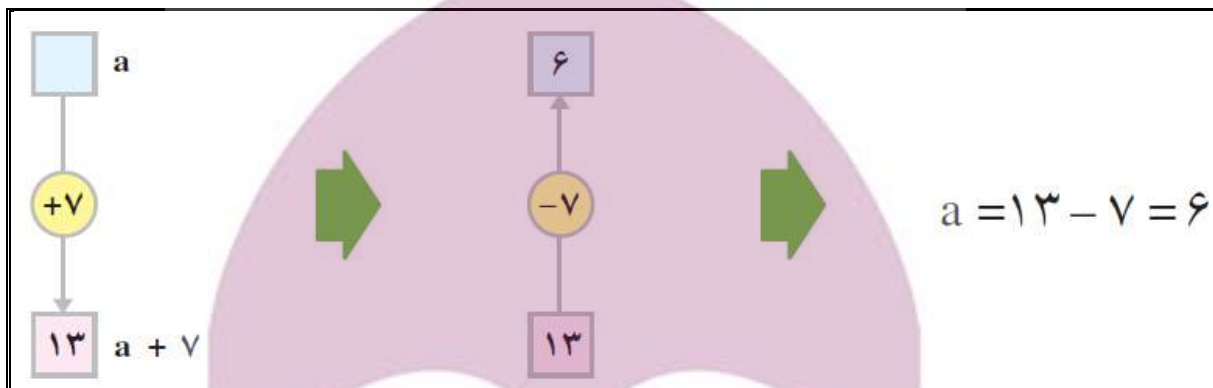
$$a =$$

پس طول ضلع این مثلث 4 سانتی متر می باشد.

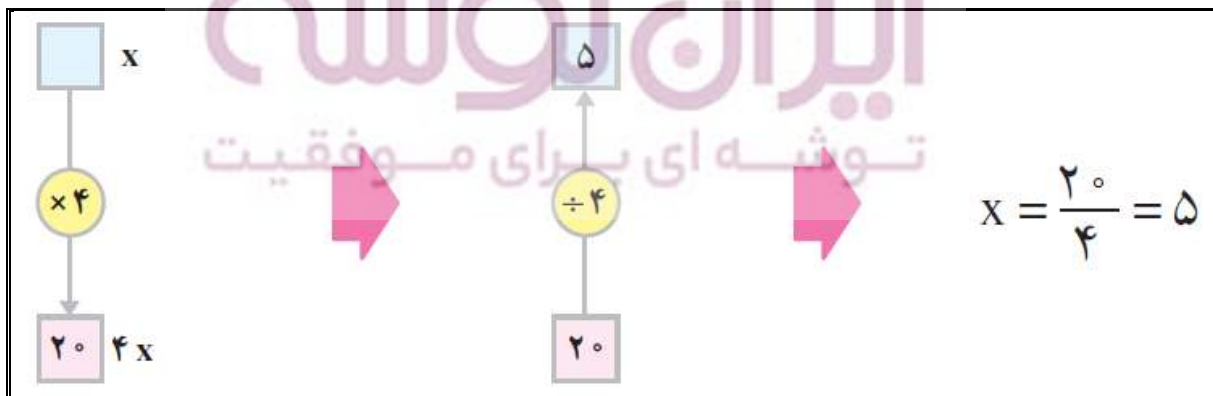
. روشی را که در بالا انجام دادیم ، روش بدست آوردن یک پارامتر مجهول (مانند a) از طریق یک عبارت جبری $(3a)$ بود.

برای توضیح بیشتر به مثال زیر دقت کنید.

عبارت جبری $a+7$ را در نظر بگیرید ، به ازای چه مقداری از a ، مقدار عددی $a+7$ برابر با 13 میشود؟ یعنی a چه عددی باشد تا تساوی $a+7 = 13$ درست و برقرار باشد؟ برای یافتن پاسخ این سوال به نمودارهای زیر توجه کنید :



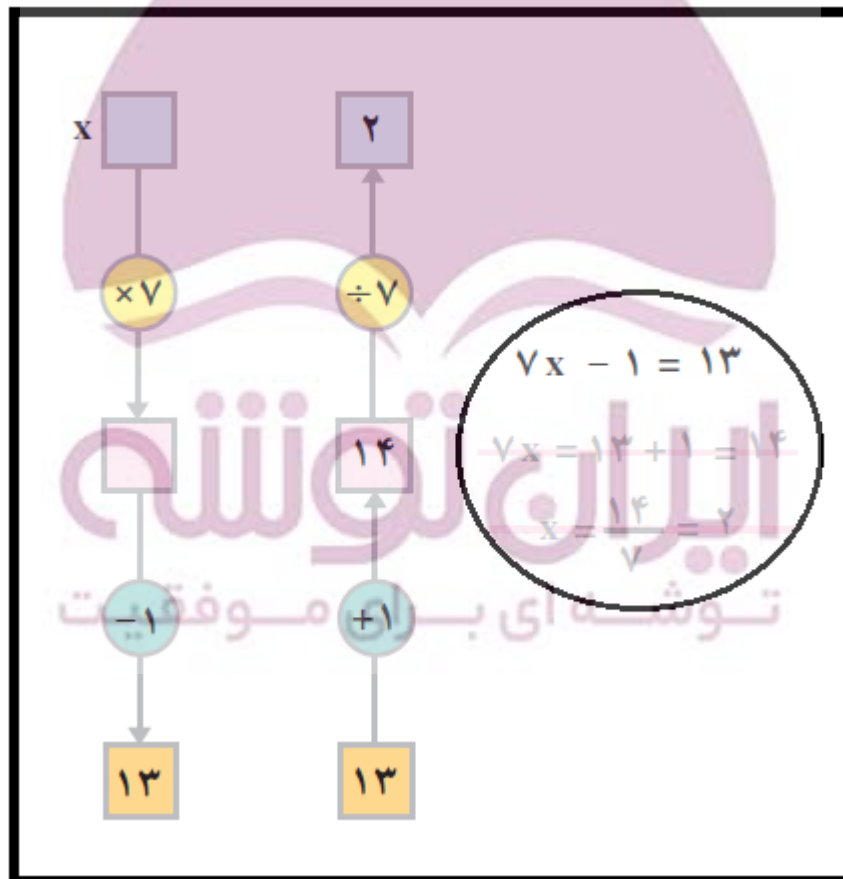
حال عبارت جبری $4x = 20$ را در نظر بگیرید ، میخواهیم بدانیم به ازای چه مقدار از x تساوی یاد شده برقرار است؟ به نمودارهای زیر توجه کنید :



برای حل یک معادله بایستی به نکات زیر توجه کرد :

- 1- ابتدا تمامی اعداد را با در نظر گرفتن علامتشان در یک طرف تساوی آورده و مجهولات و ضرایب مجهولات را در طرف دیگر تساوی می آوریم.
- 2- سپس عملیات جمع و تفریق را در صورتی که مورد نیاز باشد انجام می دهیم تا شکل معادله ساده تر و خلوت تر باشد.
- 3- سپس عدد باقی مانده در یک طرف تساوی را به عدد (ضریب) مجهول تقسیم می کنیم تا مقدار پارامتر مجهولمان بدست آید.

باز هم به مثال زیر توجه نمایید :



. تمرین : معادلات زیر را حل نمایید.

$$4x - 6 = 6$$

$$7b + 3 = 18$$

$$3a + \frac{2}{5} = 1$$

$$4x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

$$5x = 10$$

$$3x - 7 = 13$$

$$\frac{1}{2}x = 4$$

$$15x - 10 = 20$$

$$4x + 5 = 11$$

$$x + 2 = 1$$

$$x + 4 = 5$$

$$3x = 8$$

$$x + \frac{1}{2} = 4$$

$$7x - 2 = 19$$

$$6x + 6 = 12$$

ایران تونلنه
توشه ای برای موفقیت

. مساله : احمد 3000 تومان پول داشت ، او 4 عدد دفتر خرید و 200 تومان پول برایش باقی ماند ، قیمت هر دفتر چقدر بوده است؟

قیمت هر دفتر : X

سپس ، جمله‌های مسئله را به عبارت‌های جبری تبدیل می‌کنیم :

$4 \times X$: احمد 4 دفتر خرید

$4X + 200$: 200 تومان برایش باقی ماند

$4X + 200 = 3000$: احمد 3000 تومان پول داشت

معادله را حل کنید تا مجهول مسئله (X) یا قیمت هر دفتر پیدا شود.

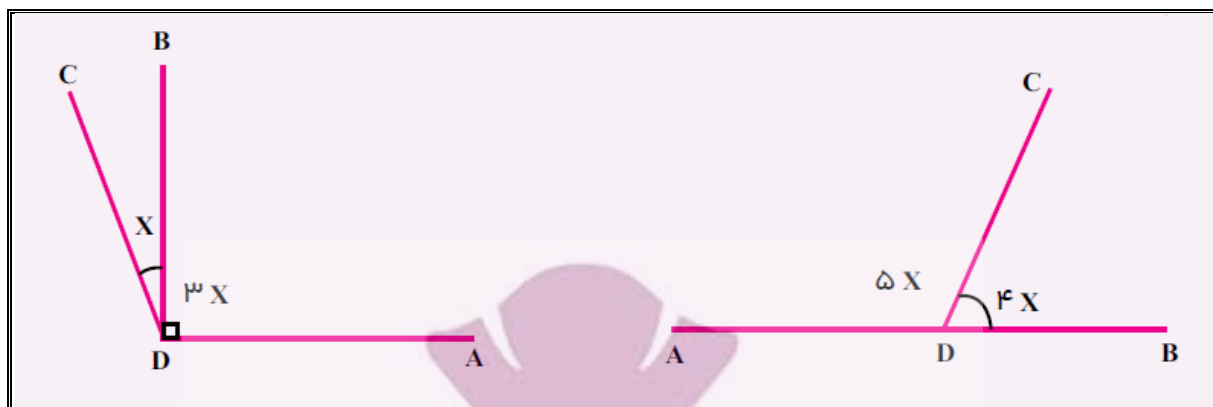
. مساله : حسین و علی با هم 36 جلد کتاب را صحافی کرده اند ، اگر حسین 6 جلد کتاب بیشتر از علی صحافی کرده باشد ، هر کدام چند جلد صحافی کرده اند؟

ایران تونل

تجربیات برای موفقیت

. تمرین : آیا (-2) جواب معادله $6 - 4X = 8$ می باشد؟

. تمرین : با توجه به شکل های زیر اندازه زاویه BCD را پیدا کنید.



ایران تونل
توشه ای برای موفقیت



فصل ۲ هندسه و استدلال

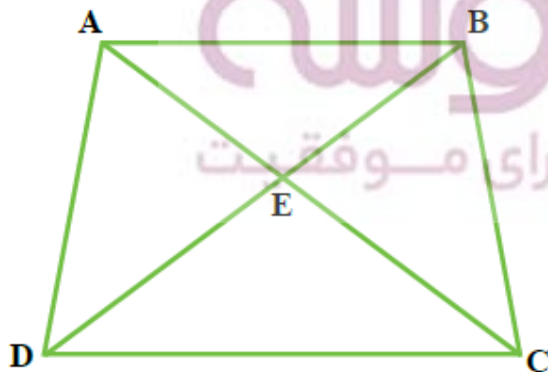
در علم ریاضیات برای نامگذاری شکل ها و خطوط از حروف کوچک و بزرگ انگلیسی استفاده میکنیم.

❖ تساوی بین پاره خط ها

هر گاه در اشکال هندسی اعم از چهار ضلعی ها، مثلث ها و چند ضلعی ها دو یا چند پاره خط از نظر اندازه با یکدیگر برابر باشند، اصطلاحاً بین آن دو یا چند پاره خط ها حالت تساوی برقرار است.

نکته 1: عملیات جمع و تفریق برای پاره خط ها هم، همانند اعداد صادق و انجام شدنی است. (البته با داشتن اندازه هر کدام از پاره خط ها)

به عنوان مثال در شکل رو به رو روابط زیر برقرار است:



$$AE = BE \quad -1$$

$$DE = EC \quad -2$$

$$AD = BC \quad -3$$

$$BE + ED = DE \text{ و } AE + EC = AC \quad -4$$

$$AC - AE = EC \text{ و } BD - BE = ED \quad -5$$

نکته 2: عملیات جمع و تقسیم هم برای پاره خط ها هم ، همانند اعداد صادق و انجام شدنی است. (البته باز هم با داشتن اندازه هر کدام از پاره خط ها)

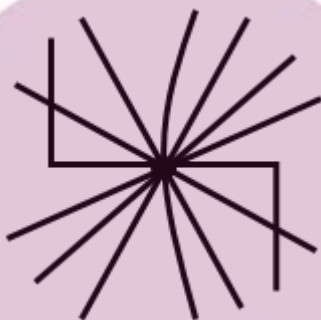
به عنوان مثال در پاره خط رو به رو روابط زیر برقرار است (نقطه M وسط AB است):

$$\frac{AM}{MB} = 1 \quad -2 \quad AB = 2MB \quad -1$$



❖ نکاتی در مورد نقطه و خط

1- از یک نقطه بی نهایت خط می گذرد.



2- از یک نقطه بی نهایت خط راست می گذرد.



3- از دو نقطه بی نهایت خط (از انواع مختلف) می گذرد.



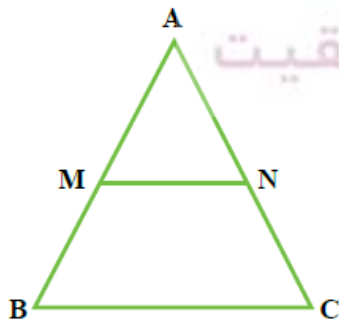
4- از دو نقطه فقط یک خط راست می گذرد.



. تمرین : با توجه به شکل رو به رو ، اندازه گیری هر کدام از پاره خط ها را انجام داده و هر تعداد رابطه درست که بین آنها میبینید را بنویسید.

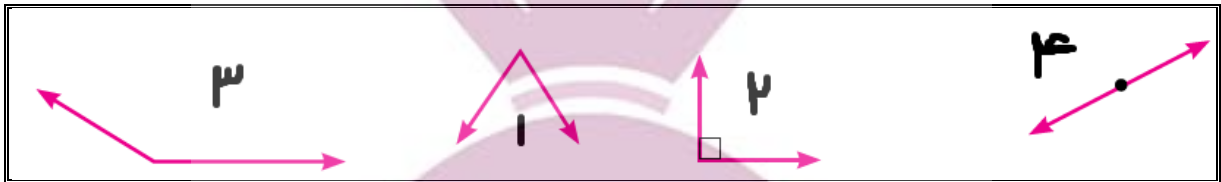


. تمرین : با توجه به شکل رو به رو ، مثلث ABC متساوی الاضلاع می باشد ، نقاط M و N وسط اضلاع خودشان هستند ، آیا مثلث AMN هم متساوی الاضلاع است؟

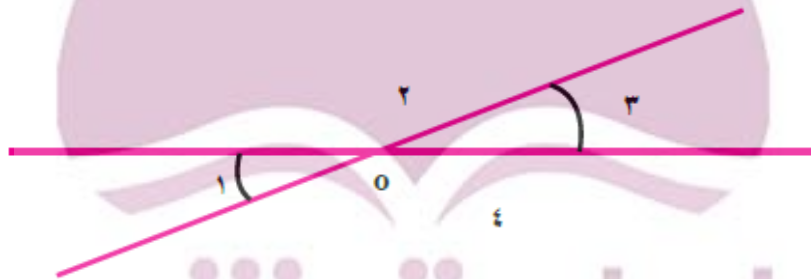


❖ انواع زاویه ها (یاد آوری)

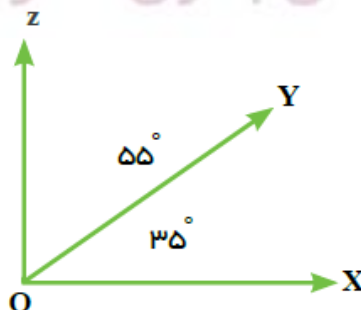
- 1- زاویه حاده (که مقدار آن بین صفر تا 90 درجه است).
- 2- زاویه 90 درجه که به زاویه قائمه هم معروف است.
- 3- زاویه منفرجه (که مقدار آن بین 90 تا 180 است).
- 4- زاویه 180 درجه (یک مانند یک پاره خط صاف است)



- 5- زوایای متقابل به راس، زوایای 1 و 3 باهم و زوایای 2 و 4 باهم متقابل به راس هستند و از نظر اندازه باهم برابرند. (مانند شکل زیر)

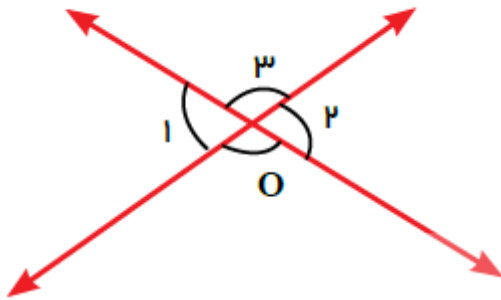


- 6- زاویه متمم: اگر مجموع دو زاویه 90 درجه باشد، آن دو زاویه را زوایای متمم می نامیم. (مانند دو زاویه ZOY و YOX که مجموعشان 90 درجه است)



7- زاویه مکمل : اگر مجموع دو زاویه 180 درجه

باشد ، آن دو زاویه را زوایای مکمل می نامیم.(در واقع آن دو زاویه مکمل و کامل کننده یکدیگر برای رسیدن به مقدار 180 درجه می باشند.) ، مانند شکل روبرو :



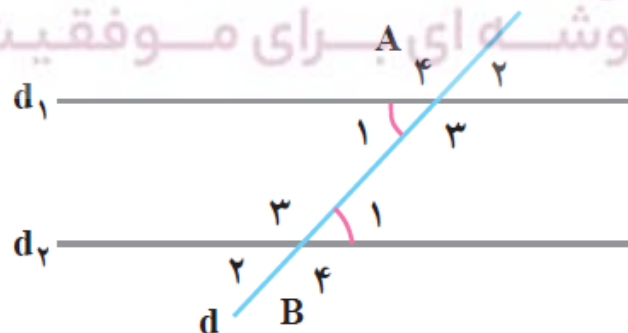
. سوال : راستی در شکل بالا چه زوایایی مکمل یکدیگرند؟

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_4 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

8- اگر دو خط موازی را یک خط موربی قطع کند ، هشت زاویه ایجاد میشود که چهار تای

آن را زوایای حاده و چهار تای آن را زوایای منفرجه تشکیل می دهند. (چهار زاویه حاده با یکدیگر برابرند ، چهار زاویه منفرجه با یکدیگر برابرند.)

در شکل زیر دو خط d_1 و d_2 با یکدیگر موازی هستند و خط مورب d آنها را قطع کرده است. که روابط $A_1 = A_2 = B_1 = B_2$ و $A_3 = A_4 = B_3 = B_4$ برقرار است.



9- در چند ضلعی های زیر که به چند ضلعی های منتظم معروف هستند ، همه زوایای داخل هر کدام از شکل ها و اضلاعشان با هم برابر می باشند.



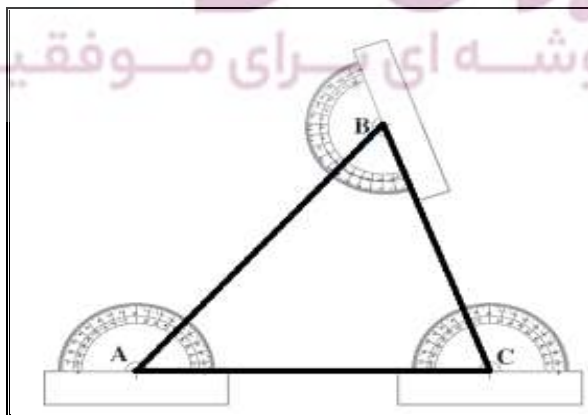
هر یک از شکل های زیر یک چند ضلعی اند.

چند ضلعی هایی که هیچ زاویه بزرگ تر از 180° ندارند، محدب نامیده می شوند.
به چند ضلعی ای که دست کم یک زاویه بزرگ تر از 180° داشته باشد، چند ضلعی مقعر می گویند.
چند ضلعی های مقعر (کاو) و محدب (کوژ) را در شکل زیر مشخص کنید.

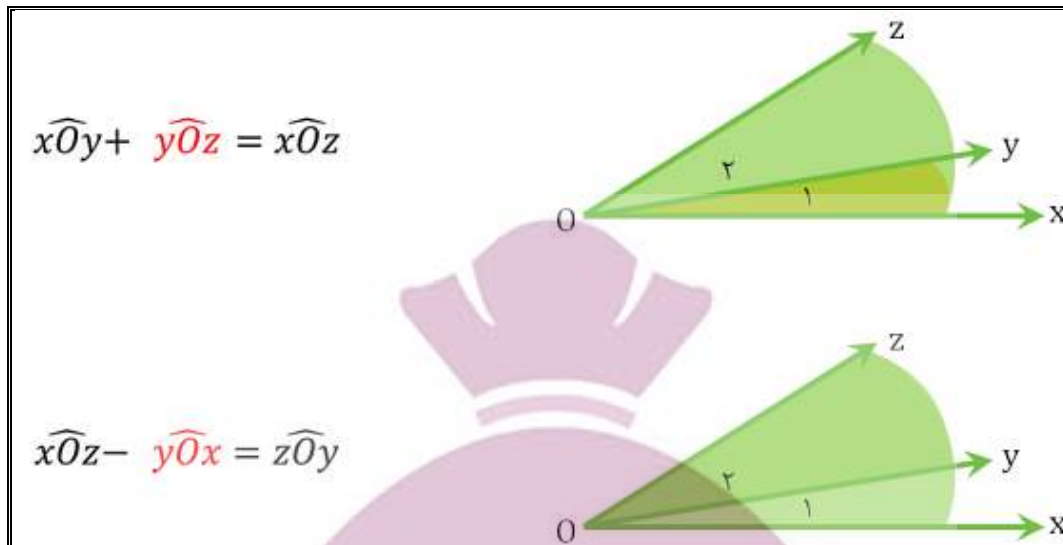


❖ مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر با 180 درجه می باشد.

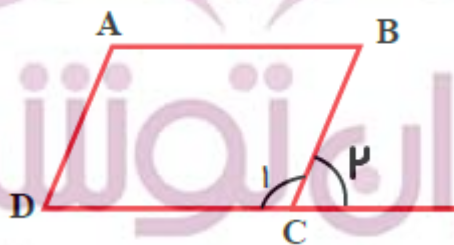
به عنوان مثال ، شکل زیر نشان می دهد که $C = 70$ و $B = 60$ و $A = 50$ می باشد. (مقادیر بر حسب درجه می باشند.) پس $A + B + C = 180$ می باشد.



شکل های زیر طریقه جمع بستن ریاضی زوایا را نشان می دهد :

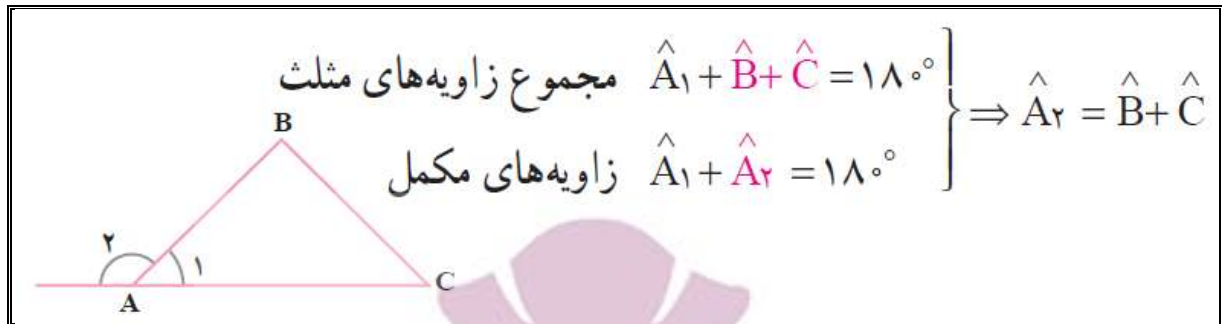


زاویه خارجی : در شکل زیر ضلع DC در خارج از چهار ضلعی ABCD امتداد داده شده است و با ضلع BC تشکیل زاویه ای به نام C_2 را می دهد که به این زاویه ، زاویه خارجی می گویند که مجموع آن با زاویه C_1 برابر با 180 درجه میشود. پس دو زاویه C_1 و C_2 مکمل یکدیگر هستند.

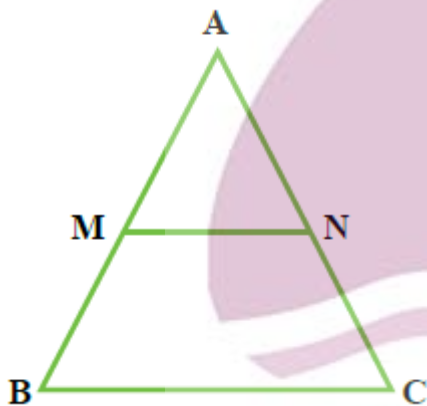


نکته بسیار مهم : به طور کلی در هر مثلث ، اندازه هر زاویه خارجی از مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن بدست می آید.

به عنوان مثال در شکل زیر ، زاویه A_2 از مجموع دو زاویه B و C بدست می آید.



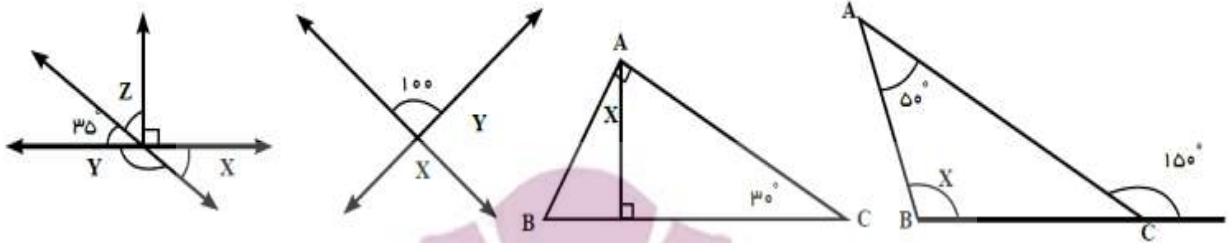
. تمرین : مثلث ABC متساوی الاضلاع است. با توجه به شکل چهار تا از روابط بین زوایای موجود در این مثلث را بنویسید. (نقاط M و N در وسط اضلاع خودشان هستند).



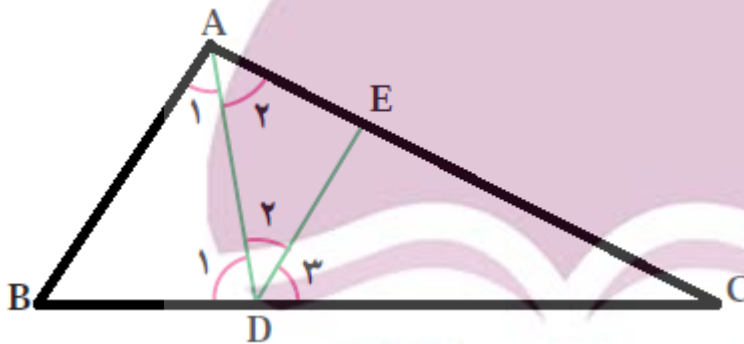
. تمرین : با توجه به مثلث زیر مقادیر زوایای C را بدست آورید.



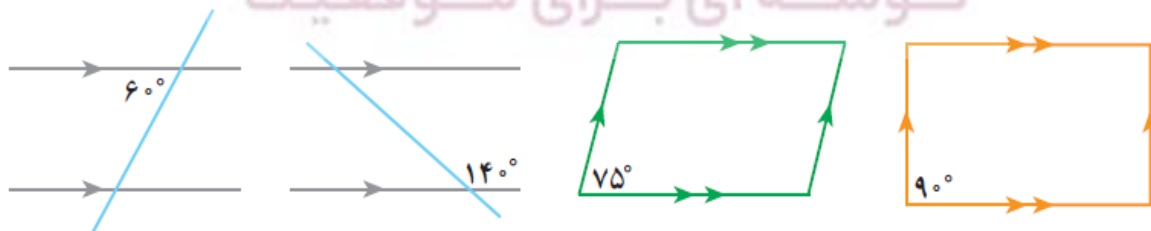
تمرین : اندازه زوایای x و y را در شکل های زیر بیابید.



تمرین : در شکل زیر DE موازی AB است ، کدام زاویه ها با هم برابرند؟



تمرین : در شکل های زیر اندازه هر کدام از زوایا را در داخل شکل خود بنویسید.

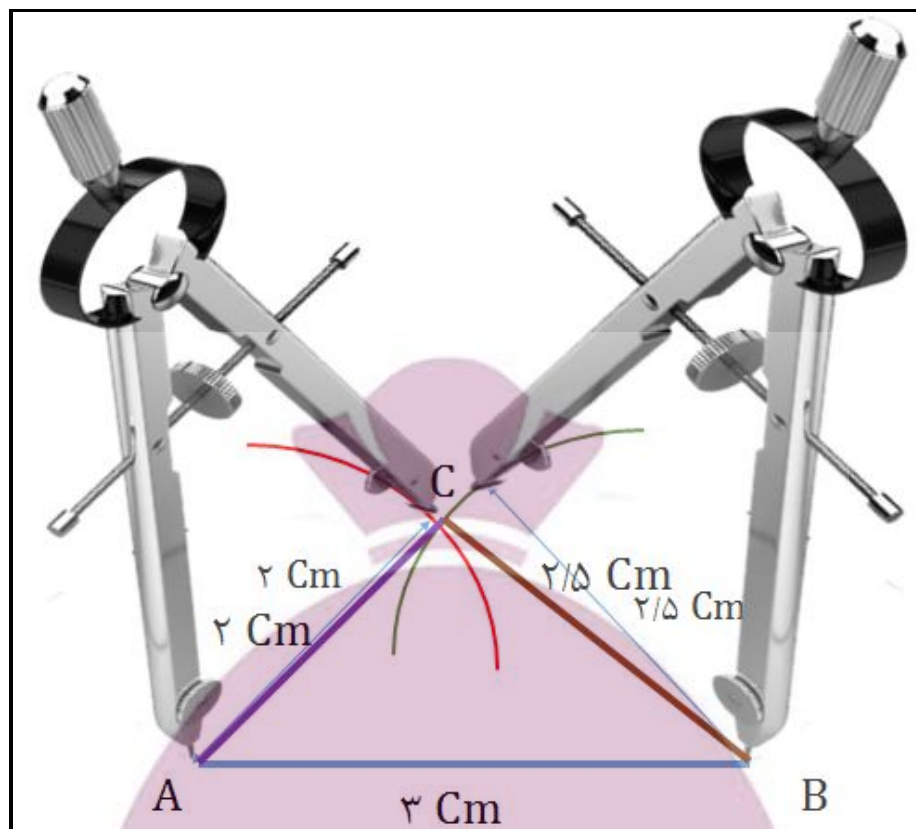


برای ترسیم یک مثلث باید به نکات زیر توجه نمود :

1- با داشتن یک پاره خط و نقاط ابتدا و انتهای آن و داشتن پرگار میتوان یک مثلث را رسم نمود.

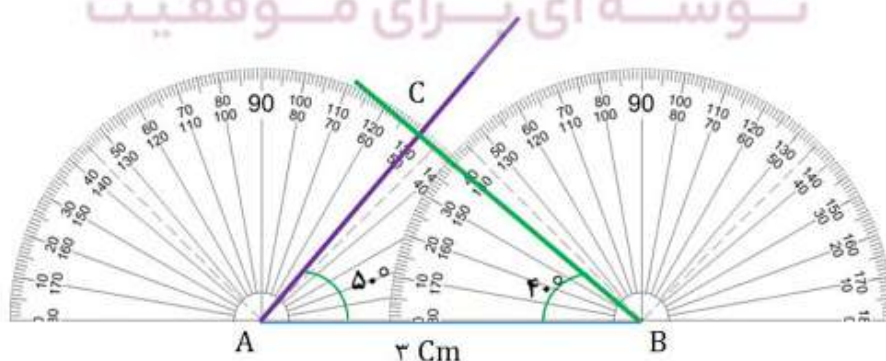
توضیح : بدین صورت که اگر در سوال مورد نظر ، اندازه اضلاع داده شده باشد ، دهانه پرگار را به همان اندازه باز می کنیم و بر روی یکی از نقاط ابتدایی یا انتهایی پاره خط قرار می دهیم و کمانی را رسم نموده و در مرحله بعدی هم همین کار را بر روی نقطه دیگر آن پاره خط انجام می دهیم و محل اتصال دو کمان رسم شده با پرگار را به نقاط ابتدایی و انتهایی پاره خط اولیه وصل می کنیم و مثلث رسم می شود.

به عنوان مثال ، پاره خط AB به طول 3 سانتی متر را در نظر بگیرید ، میخواهیم مثلثی با اضلاع 2، 2.5، 3 سانتی متر را رسم نماییم. مشخص است که یکی از اضلاع را در همین ابتدای امر داریم ($AB = 3$) ، ابتدا دهانه پرگار را به اندازه 2 سانتی متر باز نموده و آن را روی راس A قرار می دهیم و کمانی را رسم می کنیم و سپس دهانه پرگار را به اندازه 2.5 سانتی متر باز نموده و نوک آن را بر روی راس B قرار می دهیم و سپس کمانی را رسم می کنیم و محل اتصال دو کمان را به نقاط ابتدا و انتهای پاره خط یعنی نقاط (A و B) وصل می کنیم و مثلث را رسم می کنیم.



2- ترسیم مثلث با استفاده از اندازه دو زاویه و یک پاره خط

برای این کار ابتدا پاره خط داده شده را رسم نموده و سپس با قرار گیری نقاله روی یکی از نقاط ابتدایی یا انتهایی پاره خط (نقاط A یا B) ، یکی از زوایای داده شده در سوال (40 درجه یا 50 درجه) را جدا نموده و برای زاویه دیگر هم ، همین کار را انجام می دهیم و محل برخورد دو زاویه رسم شده را به نقاط ابتدایی و انتهایی پاره خط وصل نموده و مثلث را رسم می کنیم.

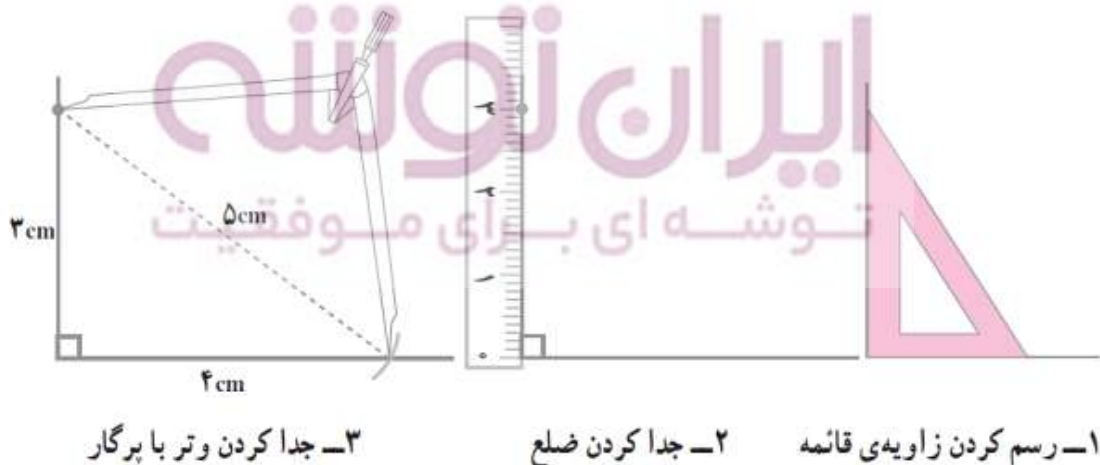


3- ترسیم مثلث قائم الزاویه

توضیح: اگر از یک مثلث قائم الزاویه، اندازه های وتر و یک زاویه تند (حاده) معلوم باشد، می توان آن مثلث را رسم نمود. شکل های زیر مراحل رسم یک مثلث قائم الزاویه را نشان می دهد. مثلث قائم الزاویه ای به اندازه وتر 4 و زاویه تند 40 درجه.



. حال اگر از یک مثلث قائم الزاویه، اندازه های وتر و یک ضلع را به ما بدهند، می توان مثلث را رسم نمود.
 شکل زیر مراحل رسم یک مثلث قائم الزاویه ای را که اندازه وتر آن 5 سانتی متر و یکی از اضلاع قائمه اش 3 سانتی متر است را نشان می دهد.



. تمرین : مثلثی رسم کنید که یک ضلع آن 3 سانتی متر و یکی از زاویه های آن 50 درجه باشد.
چند مثلث می توان رسم کرد؟ دلایل را بررسی کنید.

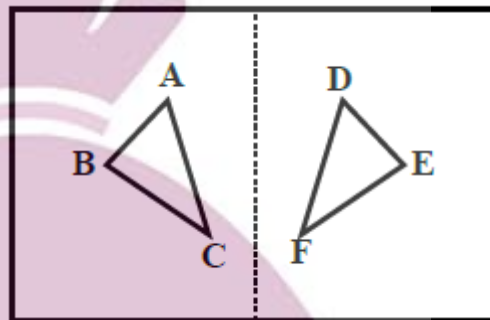
. تمرین : مثلثی رسم کنید که یک ضلع آن $AB = 2$ و یک ضلع دیگر آن $AC = 3$ و زاویه بین این دو ضلع $A = 50$ درجه باشد. (اضلاع بر حسب سانتی متر می باشند).

. تمرین : مثلث ABC را با شرایط زیر رسم کنید.
($AB = 5$ ، $AC = 4$ ، $BC = 2$) ، (توجه داشته باشید که اندازه اضلاع بر حسب سانتی متر می باشد).

هرگاه دو مثلث بر یکدیگر منطبق شوند، آن دو مثلث را همنهشت (قابل انطباق) می‌گوییم.

مانند دو مثلث ABC و DEF که بر هم منطبق هستند و می‌نویسیم:

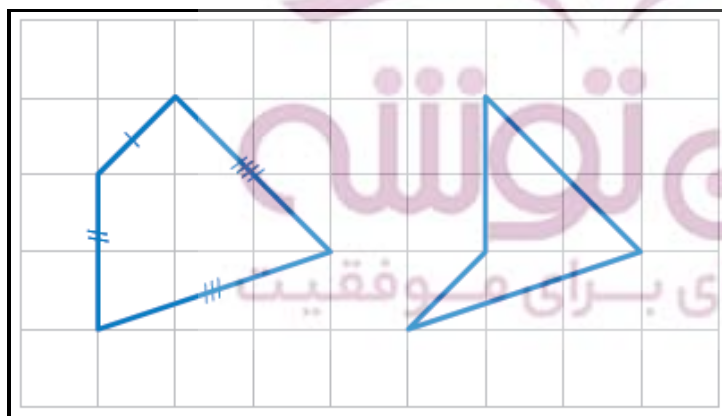
$$\triangle DEF = \triangle ABC$$



– در شکل مقابل ضلع‌های دو چهارضلعی، دو به دو با هم برابرند.

الف) با علامت‌گذاری مناسب تساوی ضلع‌ها را نمایش دهید.

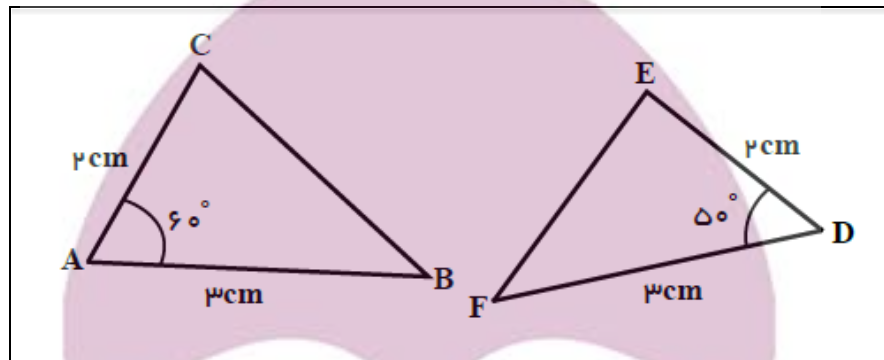
ب) آیا این دو چهارضلعی با هم مساوی‌اند؟



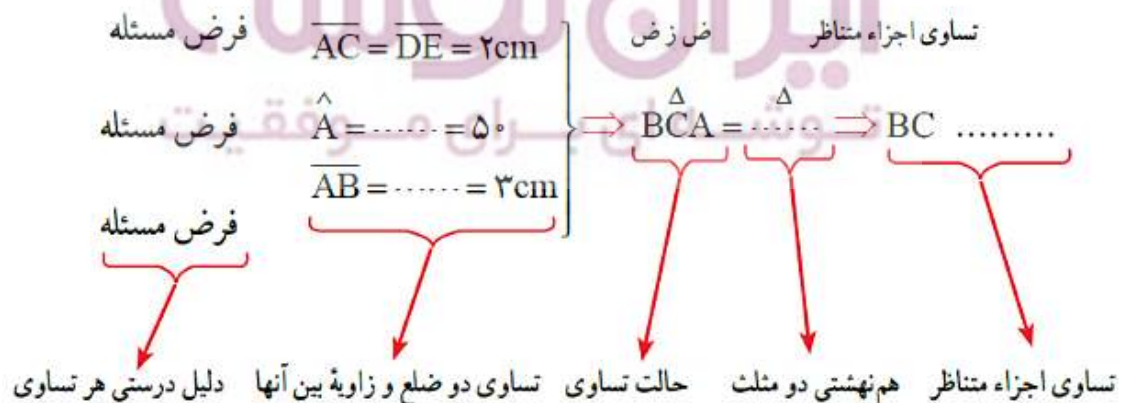
❖ دو مثلث در حالت های زیر با هم مساوی هستند :

2- دو زاویه و ضلع آنها از یک مثلث ، با دو زاویه و ضلع آنها از یک مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند. (ز ض ز)

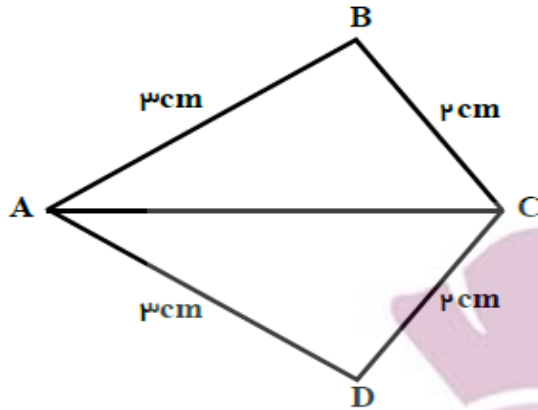
3- سه ضلع از یک مثلث با سه ضلع متناظر از مثلث دیگر با هم مساوی باشند. (ض ض ض)
مثال: اندازه اضلاع دو مثلث در شکل زیر داده شده است، چرا دو مثلث با هم هم‌نهشت هستند؟
چرا $BC = EF$ برقرار است؟



در هندسه برای بیان استدلال به شیوه زیر عمل می کنیم. جاهای خالی را کامل کنید تا استدلال کامل شود.



تمرین : در شکل زیر چرا دو مثلث همنهشت هستند؟



تمرین : نقطه E وسط پاره خط AB است. چرا دو مثلث قائم الزاویه ADE و BCE با هم مساویند؟

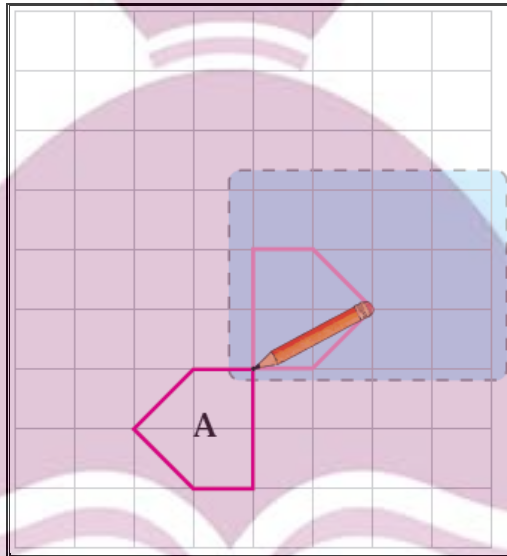


تمرین : چهار ضلعی ABCD یک مستطیل است ، چرا قطرهای مستطیل با هم برابرند؟

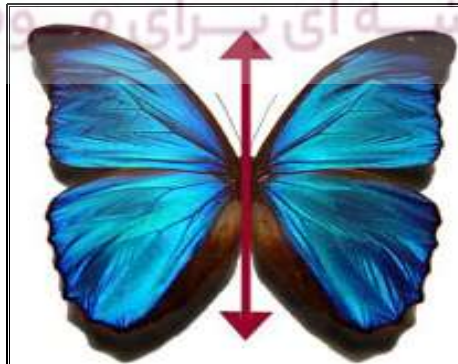


دوران به معنی چرخش ، چرخیدن و دور گردیدن می باشد و در ریاضی گرداندن یک شکل حول یک نقطه یا خط را دوران می نامیم.

اگر کاغذ پوستی را 180° درجه بچرخانید، تصویر شکل A مانند شکل روبه‌رو در صفحه قرار می‌گیرد. این تصویر حاصل دوران 180° درجه‌ای شکل A حول مرکز دوران است.

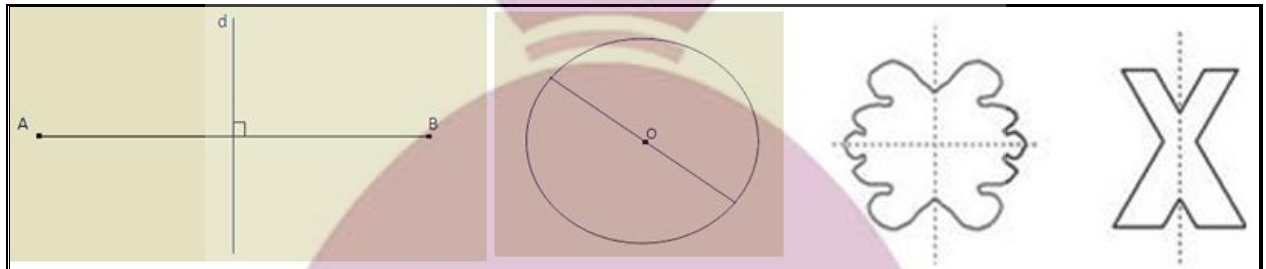


تقارن به معنی قرین شدن با یکدیگر، با هم یار و دوست گردیدن می باشد و در اصطلاح هندسه وجود تقارن نشان دهنده ی وجود قرینه شدن نسبت به یک نقطه یا نسبت به یک خط (محور) می باشد.



اگر با کمی دقت به اطراف خود، به گیاهان، اجسام و موجودات نگاه کنیم متوجه خواهیم شد که شکل بیشتر آن ها متقارن است و همین متقارن بودن زیبایی خاصی به آن ها بخشیده است. وجود تقارن در ساختمان بدن انسان نیز یکی از عامل های اساسی زیبایی است.

محور تقارن یک شکل خطی است که قرینه ی شکل نسبت به این خط بر خود شکل منطبق شود. عمود منصف پاره خط و قطر دایره به ترتیب محور تقارن پاره خط و دایره هستند.

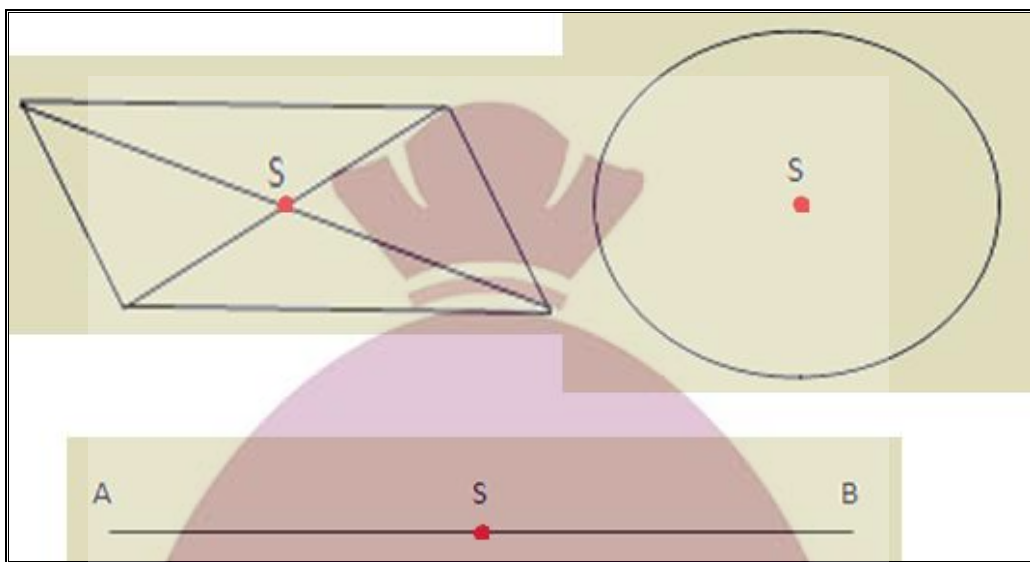


نکته مهم : محور تقارن لزوماً شکل را قطع نمیکند.



مرکز تقارن یک شکل مرکز تقارن یک شکل نقطه ای است که قرینه شکل نسبت به آن نقطه بر خود شکل منطبق باشد.

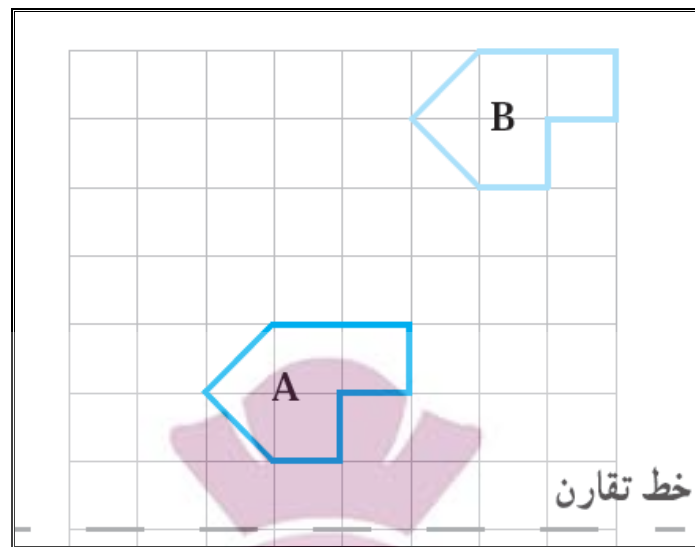
نقاط S مرکز تقارن اشکال هستند



انتقال به معنی جابه جا شدن، از جایی به جای دیگر رفتن، نقل کردن، کوچیدن، کوچ کردن و مردن و در گذشتن می باشد.

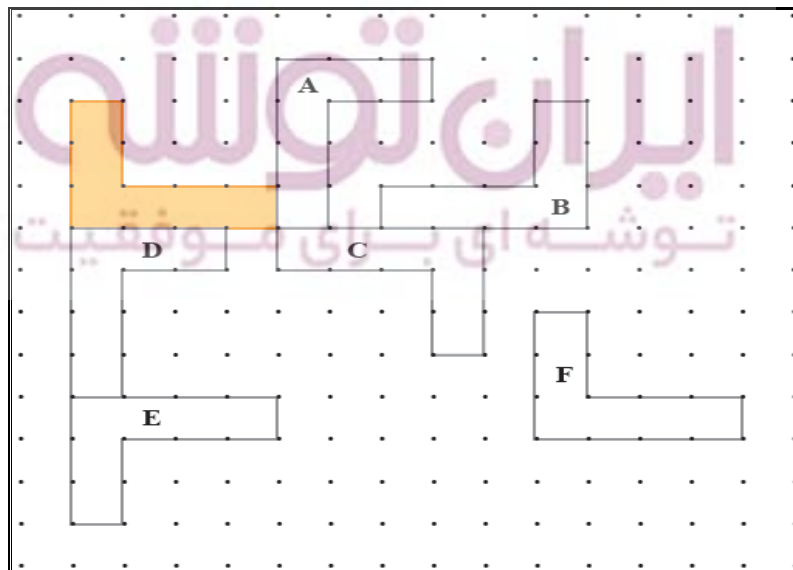
در ریاضی انتقال یعنی تغییر مکان، اندازه و جهت مشخص. برداری که شکل را در مسیر مشخص انتقال می دهد، بردار انتقال می نامند.

یک کاغذ شفاف روی شکل A قرار دهید و این شکل را روی کاغذتان بکشید.
کاغذ شفاف را بدون تغییر جهت روی صفحه حرکت دهید تا تصویر آن روی شکل B قرار بگیرد.
بدین ترتیب تصویر شکل A را روی صفحه انتقال داده‌اید.



وقتی شکلی را روی صفحه انتقال می‌دهیم، تصویر به‌دست آمده مساوی و هم‌جهت شکل اولیه است.
وقتی قرینه شکلی را نسبت به یک خط پیدا می‌کنیم، تصویر به‌دست آمده مساوی آن شکل است؛ اما جهت آن تغییر می‌کند.

- همه شکل‌های مقابل با هم مساوی‌اند.
- الف) کدام شکل‌ها انتقال یافته شکل رنگی هستند؟
- ب) کدام شکل‌ها دوران یافته شکل رنگی هستند؟
- ج) کدام شکل‌ها قرینه شکل رنگی نسبت به یک خط هستند؟





فصل ۵

شمارنده ها و اعداد اول

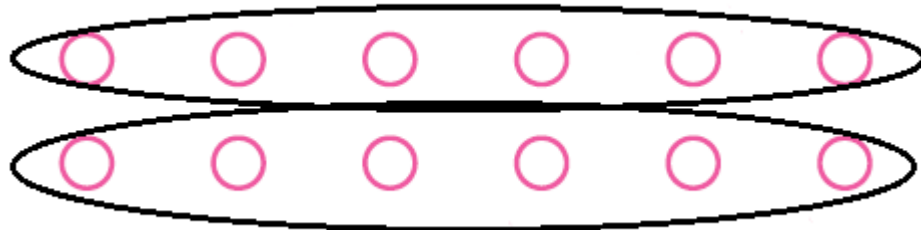
ما در زندگی روزمره خودمان برای شمارش اشیاء و ارقام و... از روش های خاصی استفاده میکنیم. در واقع برای شمارش اشیاء ((دسته بندی)) هایی را انجام می دهیم.

به عنوان مثال در شکل زیر ما 12 تا دایره داریم که این دایره ها به صورت 2 تایی بسته بندی شده اند ، در واقع ما در اینجا خواسته ایم که 12 تا دایره را به صورت دو دو تا شمارش کنیم ، یعنی اگر 12 دایره را به صورت دوتایی شمارش کنیم به 6 بسته دوتایی می رسیم.



نکته 1: به عدد 2 در مثال بالا شمارنده عدد 12 می گویند.

یا می توانیم این 12 تا دایره را به صورت دو بسته شش تایی تقسیم بندی کنیم ، یعنی این دایره ها را به صورت ((شش تا شش تا)) شمارش کنیم. حال در این مثال عدد 6 به عنوان شمارنده 12 شناخته می شود.



سوال : به نظر شما آیا عدد 12 شمارنده های دیگری هم دارد؟ اگر دارد با رسم شکل توضیح دهید.

$10 \div 2 = 5$	یعنی ۱۰ را می توان ۲ تا ۲ تا شمرد
$10 \div 5 = 2$	یعنی ۱۰ را می توان ۵ تا ۵ تا شمرد
$10 \div 1 = 10$	یعنی ۱۰ را می توان ۱۰ تا ۱۰ تا شمرد
$10 \div 10 = 1$	یعنی ۱۰ را می توان یکی یکی شمرد

. تمرین : با توجه به مثال های گفته شده در بالا ، با استفاده از شکل شمارنده های اعداد 15 ، 20 و 9 را مشخص کنید.

نکته 2: اگر عدد مانندی a شمارنده b باشد و b هم شمارنده عدد c باشد، آنگاه a هم شمارنده c است.

به عنوان مثال 2 شمارنده عدد 4 است و 4 شمارنده عدد 12 است، در این صورت 2 هم شمارنده عدد 12 است.

نکته 3: بزرگترین شمارنده هر عدد، خود آن عدد می باشد.

به عنوان مثال عدد 15 دارای شمارنده هایی مانند 3 و 5 می باشد ولی بزرگترین شمارنده آن خودش (یعنی عدد 15) می باشد. (بر اساس مثال دایره ها یعنی یک بسته 15 تایی دایره)

نکته 4: کوچکترین شمارنده هر عددی عدد 1 (یک) می باشد.

به عنوان مثال کوچکترین شمارنده عدد 5، عدد 1 (یک) می باشد. (بر اساس مثال دایره ها یعنی 5 بسته یک دونه ای!)

نکته 5: بعضی از عدد ها فقط دو شمارنده دارند، یکی خود آن عدد و دیگری عدد 1 (یک).

مانند اعداد 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17

نکته بسیار مهم: به اعدادی مانند 2، 5، 7 و امثال اینها که فقط دو شمارنده دارند، اعداد اول می گویند.

❖ مثال: با توجه به شکل زیر عدد 12 را می توانیم به صورت حاصل ضرب دو عدد غیر از یک نوشت، یعنی حاصل ضرب 3 در 4 می شود 12، ولی عدد 17 را نمی توان به صورت حاصل ضرب دو عدد غیر از یک نوشت، یعنی فقط می توان نوشت: $17 = 1 \times 17$



. تمرین : مثال بالا را کامل کنید و مشخص کنید که کدامیک از آنها جزء ((اعداد اول)) هستند.

❖ تجزیه اعداد به حاصل ضرب عوامل اول

برای تجزیه یک عدد به حاصل ضرب عوامل اول ، آن عدد را بر کوچکترین عدد اولی که بر آن بخش پذیر است تقسیم میکنیم ، سپس خارج قسمت تقسیم را بر کوچکترین عدد اولی که بر آن بخش پذیر است تقسیم میکنیم و این عمل را تا جایی ادامه می دهیم که خارج قسمت تقسیم برابر با عدد 1 (یک) شود. در این صورت حاصل ضرب مقسوم علیه ها (اعداد اول بدست آمده) حاصل ضرب عوامل اول مورد نظر است.

البته توضیحات بالا را می توان در دو روش ساده و روش درختی انجام داد.

به مثال های زیر دقت کنید :

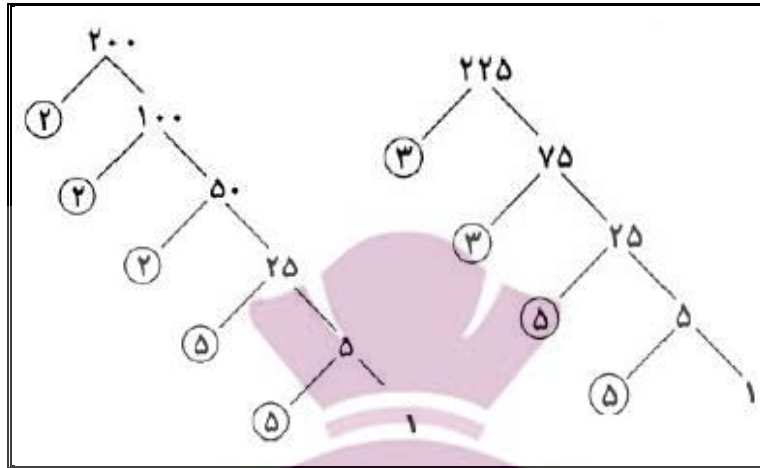
1- روش ساده (تقسیم معمولی)

۲۰۰	۲	۲۲۵	۳
۱۰۰	۲	۷۵	۳
۵۰	۲	۲۵	۵
۲۵	۵	۵	۵
۵	۵	۱	
۱			

$$۲۰۰ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۵ \times ۵ = ۲^3 \times ۵^2$$

$$۲۲۵ = ۵ \times ۵ \times ۳ \times ۳ = ۵^2 \times ۳^2$$

2- روش درختی (تقسیم به صورت درختی)



. تمرین : هر يك از اعداد 420 ، 729 و 1000 را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کنید.

. تمرین : با تجزیه کردن صورت و مخرج هر يك از كسره‌های زیر به عوامل اول ، كسرها را ساده کنید.

ایران توتل
توتل ای بری موفقیت

یاد آوری : به تجزیه کردن كسره‌های زیر دقت کنید.

$$\frac{4}{6} = \frac{\cancel{2} \times 2}{\cancel{2} \times 3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{18}{27} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{9}}{\cancel{3} \times \cancel{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{20}{50} =$$

$$\frac{28}{42} =$$

$$\frac{81}{32} =$$

❖ مقسوم علیه های طبیعی یک عدد : تمامی اعداد طبیعی که عددی مانند a بر آن بخش پذیر است را مقسوم علیه های طبیعی عدد a می گویند.

به عنوان مثال عدد 30 بر مجموعه اعداد نشان داده شده بخش پذیر است.

$$30 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \text{ مقسوم علیه های } 30$$

❖ مضرب طبیعی یک عدد : از ضرب هر عدد طبیعی در اعداد 1، 2، 3، ... مضرب های طبیعی آن عدد بدست می آید.

مانند مجموعه مضرب های طبیعی عدد 5:

$$\{5, 10, 15, 20, \dots\} : \text{مجموعه ی مضرب های عدد 5}$$

... و — و — و — و 6 و 4 و 2 : مضرب های 2

: مضرب های 7

❖ بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (معروف به ب.م.م)

بزرگترین عددی که دو عدد طبیعی a و b بر آن بخش پذیرند ، بزرگترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد گفته می شود.

(ب.م.م) دو عدد a و b را با نماد $(a \text{ و } b)$ نشان می دهیم.

به عنوان مثال دو عدد 42 و 35 را در نظر بگیرید ، این دو عدد بر بزرگترین شمارنده خودشان یعنی عدد 7 بخش پذیر هستند. پس عدد 7 را (ب.م.م) این دو عدد می نامیم. یا دو عدد 16 و 24 را در نظیر بگیرید ، با کمی دقت متوجه می شویم که این دو عدد بر بزرگترین شمارنده خودشان یعنی عدد 8 بخش پذیر هستند. پس عدد 8 (ب.م.م) این دو عدد می باشد.

. تمرین : شمارنده های دو عدد (30 و 24) را نوشته و بزرگترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را بیابید.

. نکته بسیار مهم : (ب.م.م) دو عدد اول همیشه (1) یک است.

. کوچکترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (معروف به ک.م.م)

کوچکترین عدد طبیعی که هم بر عدد طبیعی a و هم بر عدد طبیعی b بخش پذیر می باشد را کوچکترین مقسوم علیه مشترک دو عدد گفته می شود.
(ک.م.م) دو عدد a و b را با نماد $[a \text{ و } b]$ نشان می دهیم.

نکته 6: برای بدست آوردن (ک.م.م) دو عدد ، کافی است که آن دو عدد را در هم ضرب نموده و بر (ب.م.م) شان تقسیم کنیم.

به عنوان مثال دو عدد 35 و 42 را در نظر بگیرید ، برای بدست آوردن (ک.م.م) ، این دو عدد را در هم ضرب نموده $35 \times 42 = 1470$ و بر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان یعنی عدد 7 تقسیم می کنیم و حاصل عدد 210 می شود.

تمرین : (ک.م.م) دو عدد [300 و 150] را بدست آورید.

تمرین : (ب.م.م) و (ک.م.م) های خواسته شده را بدست آورید.

$$[4 \text{ و } 12] = \quad (3 \text{ و } 15) = \quad (7 \text{ و } 5) = \quad (30 \text{ و } 20) =$$

$$(4 \text{ و } 9) = \quad [30 \text{ و } 15] = \quad (19 \text{ و } 38) = \quad [50 \text{ و } 30] =$$

$$[4 \text{ و } 6] = \quad (7 \text{ و } 2 \text{ و } 3) = \quad [7 \text{ و } 2 \text{ و } 3] = \quad [9 \text{ و } 4] =$$



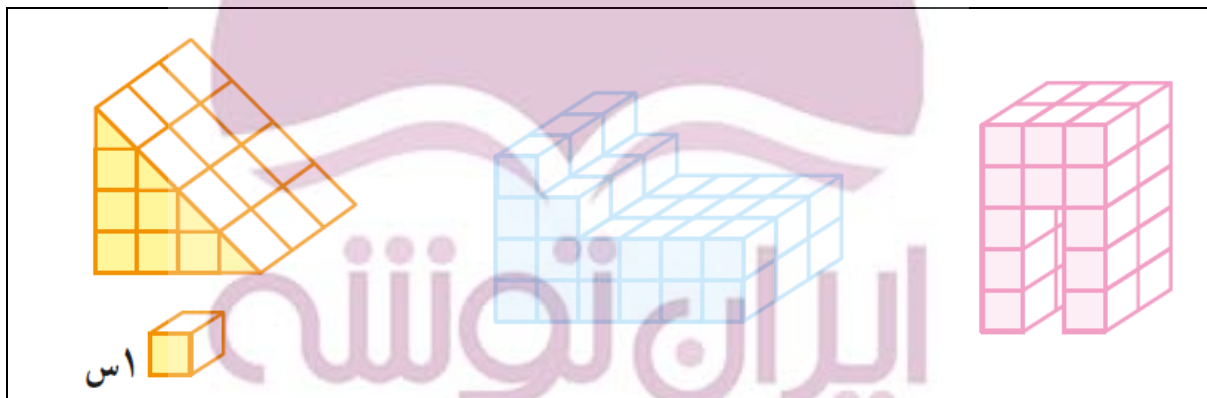
فصل ۶

سطح و حجم

. تعریف حجم

در اصطلاح هندسه گنجایش و ظرفیت جسم و آن مقدار از فضا که جسم آنرا اشغال می کند ،
حجم گفته می شود.

به اشکال زیر دقت نمایید :



نکته 1: حجم مکعبی به ضلع یک سانتی متر ، یک سانتی متر مکعب می باشد.

حجم را می توان به دو دسته هندسی و غیر هندسی تقسیم بندی کرد :

- 1- حجم های هندسی : این نوع از حجم ها دارای شکل های مشخص و تعریف شده ای هستند. حجم های هندسی را می توان به سه دسته تقسیم بندی کرد : منشوری - کروی - هرمی
- 2- حجم های هندسی ترکیبی : برخی از حجم های هندسی ترکیبی از حجم های هندسی (منشوری - کروی - هرمی) هستند.



نکته 2 : حجم های منشوری بین دو صفحه موازی قرار می گیرند.

به دو سطح بالا و پایین آن قاعده و به سطح های اطراف آن وجه ، و به گوشه ها که محل برخورد یال هاست ، رأس می گویند.



تعداد وجه های جانبی : ۴

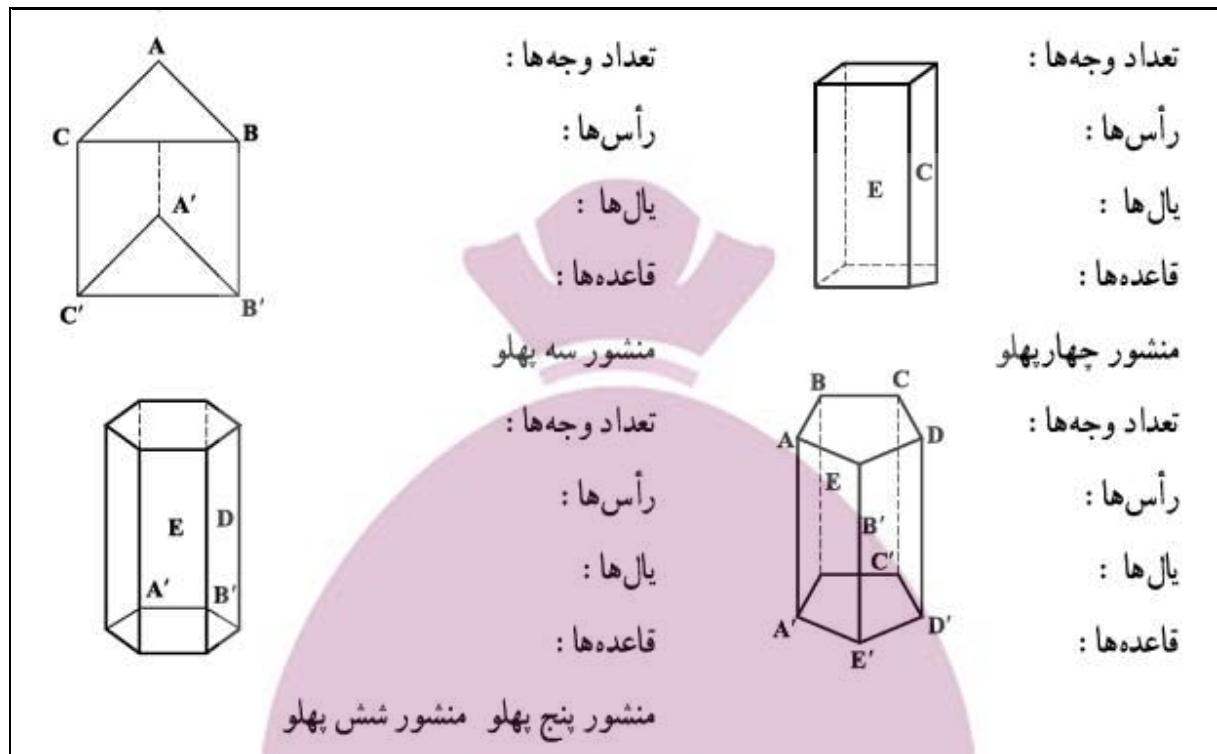
رأس ها : ۸

یال ها : ۱۲

قاعده ها : ۲

یال : محل برخورد دو سطح

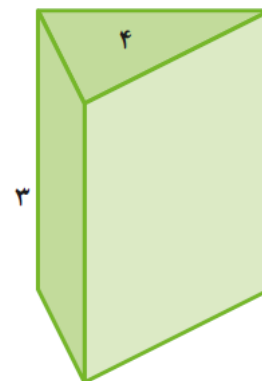
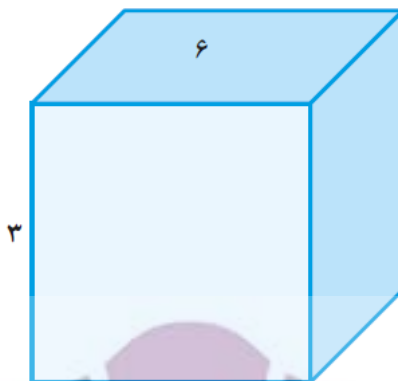
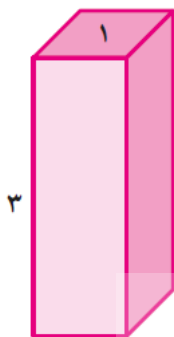
تمرین: هر يك از منشورهای صفحه بعد چند وجه دارد، یال ها، راس و قاعده ها را نام ببرید.



به اشكال زیر دقت کنید، شكل های زیر جزء حجم های منشوری هستند كه مشخصات قاعده و ارتفاع یال ها داده شده است، برای بدست آوردن مقدار حجم این نوع از احجام، مساحت قاعده را در ارتفاع شكل (ارتفاع یال) ضرب می کنیم.

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم احجام منشوری}$$

تمرین: حجم هر يك از اشكال داده شده را بدست آورید.



برای مثال در تمرین بالا می خواهیم حجم شکلی را که قاعده آن مثلث است را بدست آوریم ،
به این صورت که ابتدا مساحت قاعده یعنی مساحت مثلث را در ارتفاع عدد (3) ضرب می کنیم.
در واقع داریم :

$$4\text{Cm}^2 = \text{مساحت قاعده (مساحت مثلث)}$$

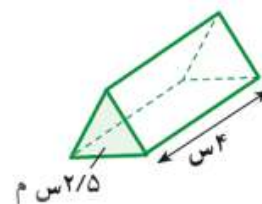
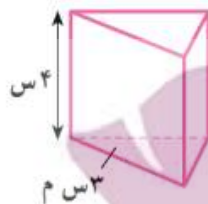
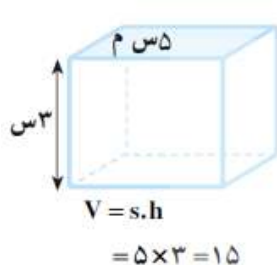
$$3\text{Cm} = \text{ارتفاع (ارتفاع یال)}$$

$$3\text{Cm} \times 4\text{cm}^2 = \text{حجم شکل منشوری}$$

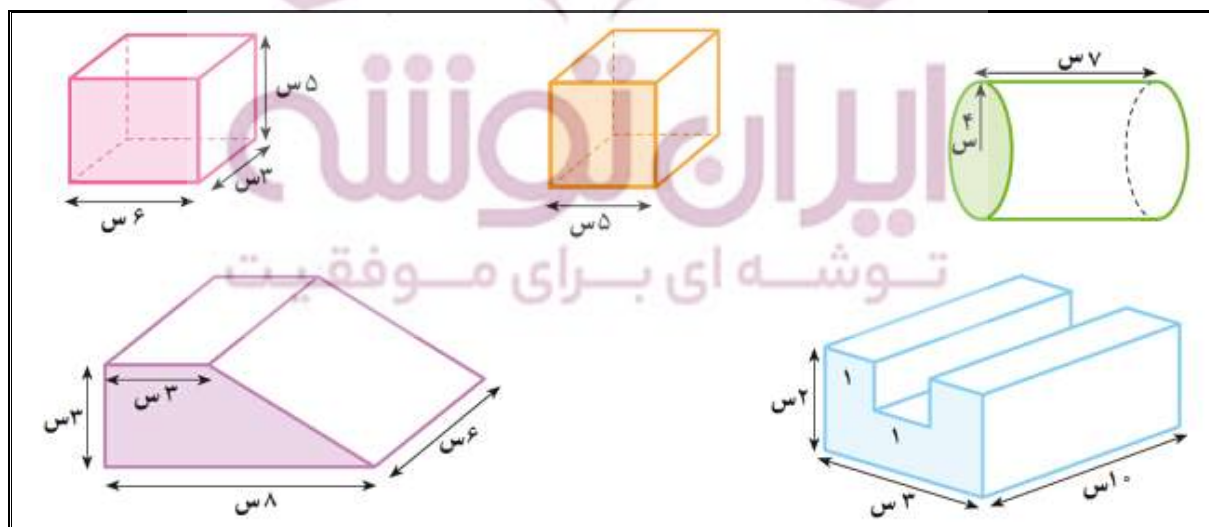
ایران توننده
توشه ای برای موفقیت

. تمرین : حجم اشکل زیر را بدست آورید :

(مساحت را با S و ارتفاع را با h و حجم را با V نشان می دهیم.)



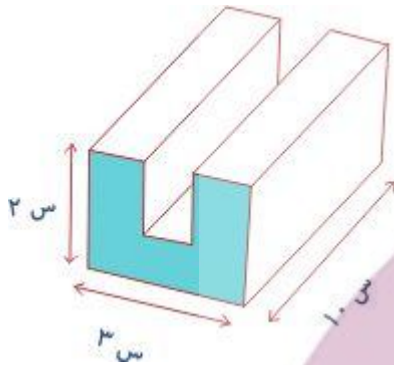
. تمرین : ابتدا مساحت قاعده و سپس حجم هر یک از اشکال را بدست آورید.



. به مثال زیر توجه کنید ، میخواهیم حجم چنین شکلی را بدست آوریم :

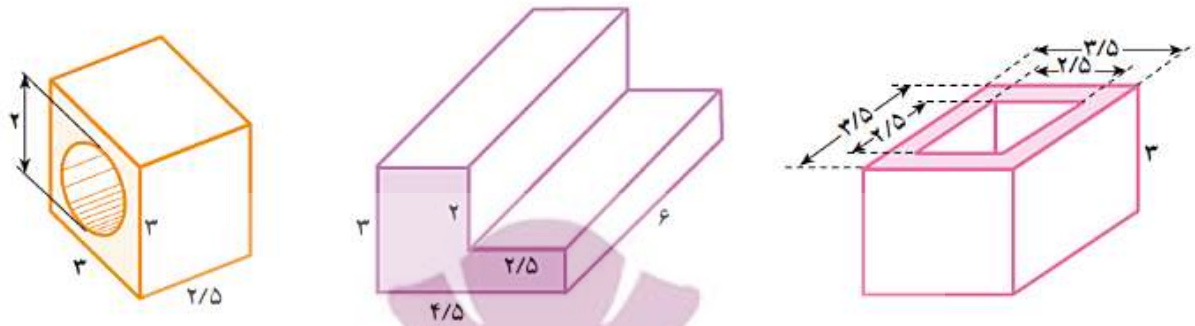
مساحت مربع - مساحت مستطیل = مساحت قاعده

$$(2 \times 3) - (1 \times 1) = 5 \times 10 = 50 \quad (\text{سانتیمتر مکعب})$$

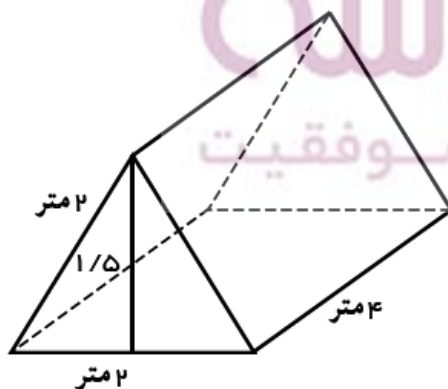


ایران تونله
توشه ای برای موفقیت

. تمرین : حجم هر يك از اشكال زیر را بدست آورید.



. تمرین : يك چادر مسافرتی مطابق شكل زیر برای اسكان مسافران استفاده می شود ، حجم اين چادر را بدست آورید.



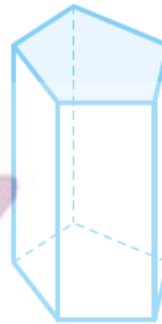
ابتدا مروری بر انواع شکل های منشور می کنیم. به اشکال زیر توجه کنید.



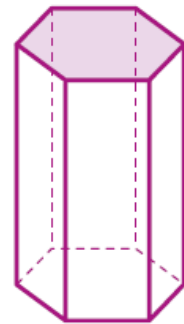
منشور ۳ پهلو



منشور ۴ پهلو



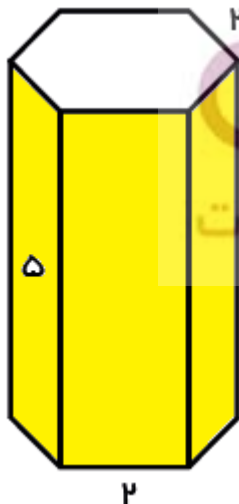
منشور ۵ پهلو



منشور ۶ پهلو

نکته 3: در یک منشور با جمع کردن مساحت پهلوها می توان اندازه مساحت سطح جانبی را بدست آورد. با جمع کردن مساحت سطح جانبی با مساحت دو قاعده منشور، اندازه سطح کل منشور بدست می آید.

به عنوان مثال با توجه به شکل منشور زیر می خواهیم مقدار مساحت جانبی آن را بدست آوریم، پس داریم:



مساحت جانبی در منشور رو به رو همان قسمت های رنگ شده می باشد

(6 مستطیل رنگ شده) که مساحت هر کدام از مستطیل ها (5×2)

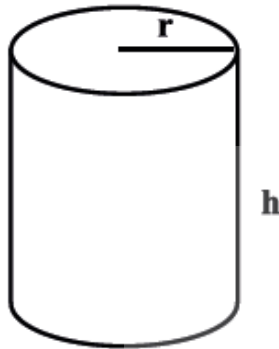
است. در این صورت مساحت جانبی این منشور مقدار $6 \times (5 \times 2)$ است.

. حال اگر مساحت دو قاعده این منشور را که دو شش ضلعی است با

مقدار مساحت جانبی یعنی $6 \times (5 \times 2)$ جمع کنیم، مقدار مساحت کل

بدست می آید.

. تمرین : در مورد حجم و مقدار مساحت جانبی استوانه زیر که مشخصات آن در شکل داده شده است در کلاس بحث کنید.



❖ مسائلی در مورد حجم

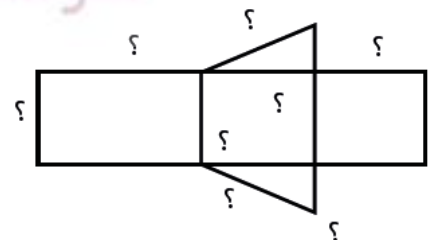
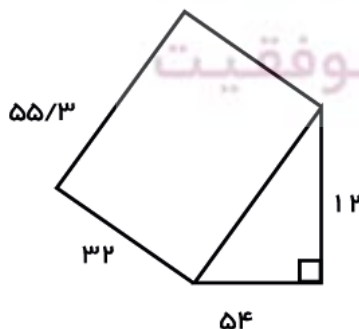
1- یک مخزن نفت به شکل استوانه ای است که شعاع قاعده آن 3 متر و ارتفاع آن 5 متر است ، می خواهیم بدنه خارجی و سقف آن را رنگ بزنیم. اگر هزینه رنگ کردن هر متر مربع 3000 تومان باشد ، برای رنگ کردن این مخزن چقدر باید هزینه کرد؟

2- چاهی به عمق 12 متر را حفر کرده اند ، شعاع دهانه این چاه 0.4 متر است. خاک این چاه را در زمینی به شکل مستطیل به ابعاد 5 و 4 متر به طور یکنواخت پهن کرده اند. ارتفاع این خاک چه مقدار است؟

3- حوضی است به شکل مکعب مستطیل و ابعاد آن 4، 3 و 1.5 متر است. این حوض خالی است و می خواهند آن را با شیر آبی که در هر دقیقه 60 لیتر آب از آن وارد حوض می شود، پر کنند، چند ساعت طول می کشد تا حوض پر شود؟ (هر متر مکعب، هزار لیتر است.)

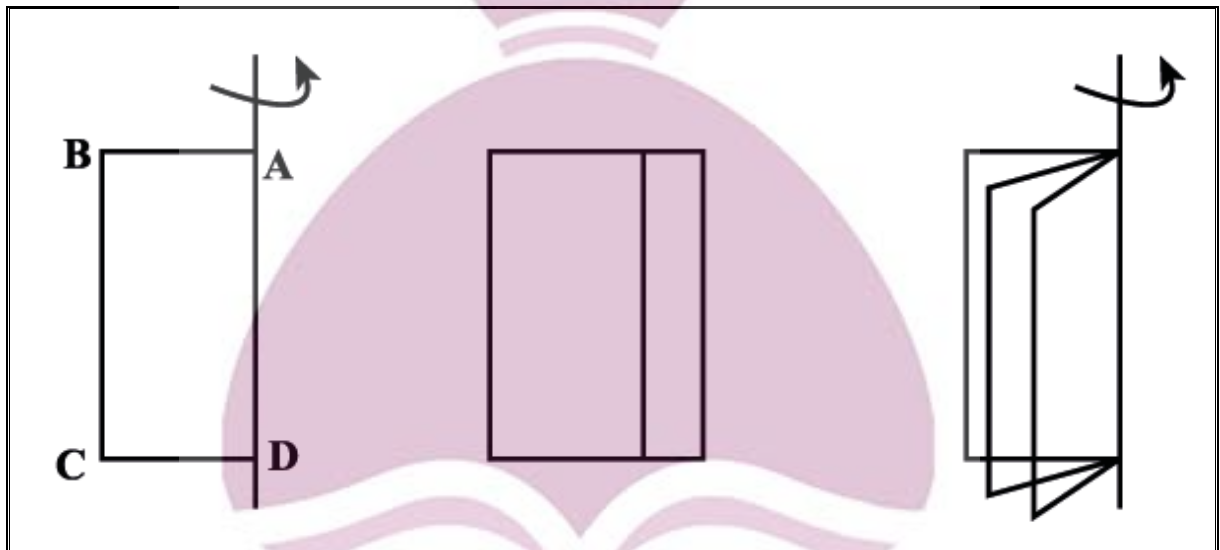
4- ستونی است به شکل یک منشور شش پهلوی که هر ضلع قاعده آن 0.2 متر و ارتفاع آن 5 متر است، می خواهند به بدنه آن کاشی بچسبانند، برای این کار چند متر مربع کاشی نیاز است؟

. تمرین : با توجه به حجم منشور و ابعاد آن، اندازه ضلع های گسترده آن را بنویسید.



با توجه به شکل های زیر همانطور که ملاحظه می کنید با حرکت یک سطح در فضا حجم ساخته می شود.

این حرکت ممکن است حول یک محور (خط یا پاره خط و...) انجام شود.

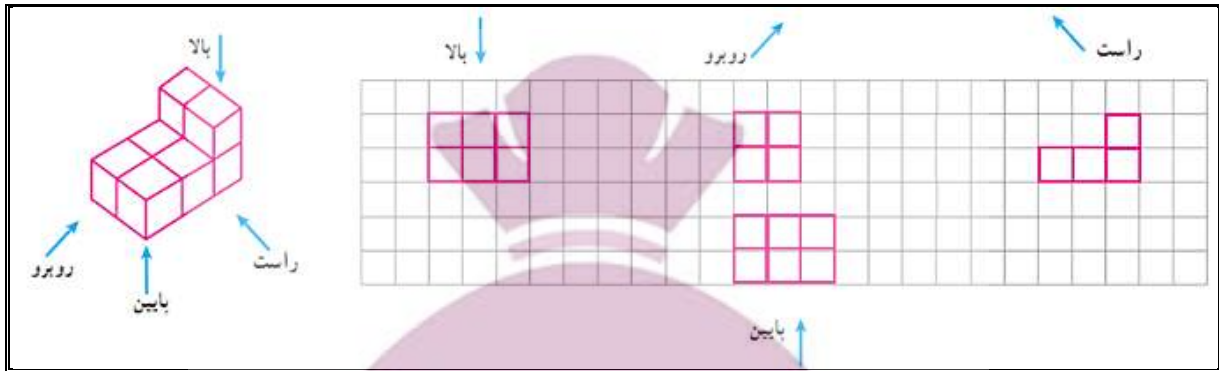


برای شکل های دیگر نیز می توان همین کار را انجام داد.

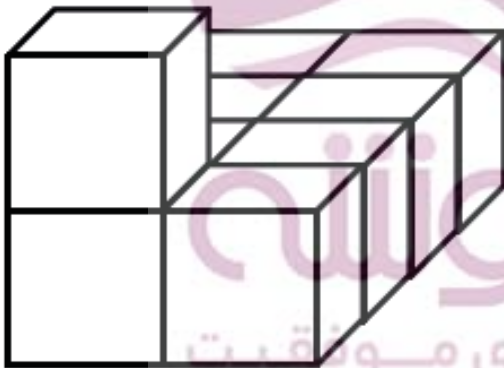


به صورت تقریبی شکل بالا را پس از چرخش رسم کنید.

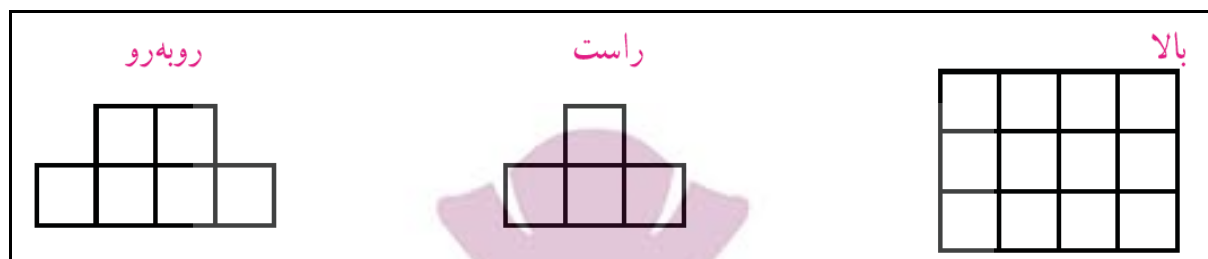
. به شکل های زیر توجه نمایید ، نظر خودتان را در مورد این اشکال بگویید.



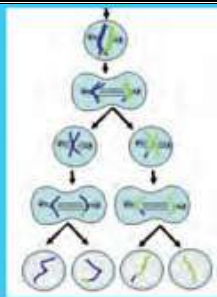
. تمرین : حجم زیر را از نمای بالا ، راست و رو به رو رسم کنید.



تمرین : اگر یک حجم از بالا ، سمت راست و رو به رو به صورت زیر دیده شود ، آن حجم را رسم کنید.



ایران تونله
توشه ای برای موفقیت



توان و جذر

فصل ۷

. یک کاغذ مستطیل شکل را از وسط تا می کنیم ، اکنون دو قطعه کاغذ روی هم قرار گرفته است. کاغذ را دوباره تا می کنیم و اکنون چهار قطعه کاغذ روی هم قرار می گیرند. اگر کاغذ را یکبار دیگر (مرتبه سوم) تا کنیم ، چند قطعه کاغذ روی هم قرار می گیرند؟

به الگوها و شکل های زیر توجه کنید :

تعداد تا	۱	۲	۳	۴
تعداد قسمت ها	۲	2×2	$2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2$

اگر تا زدن را تا هشت بار (مرتبه هشتم) انجام دهیم ، چند کاغذ روی هم قرار می گیرند؟

چه راهی برای خلاصه کردن عبارت های بالا پیشنهاد می کنید؟

همانطور که مشاهده می کنید ، اگر تا کردن کاغذ ها را به همین صورت ادامه بدهیم ، به الگوی

زیر می رسم :

$$\overbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}^{n \text{ بار}}$$

. نتیجه : عباراتی مانند $2\ 2\ 2\ 2\ 2$ را در ریاضیات به صورت 2^5 می نویسیم و آن را چنین می خوانیم : (2 به توان 5) که عدد 2 را پایه و عدد 5 را توان می نامیم.

اعدادی نظیر 2^5 را اعداد توان دار می نامیم.

درست شبیه همان کاری که در ساده کردن و خلاصه کردن جمع انجام می دادیم :

$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 5$$

n مرتبه

$$x + x + x + \dots + x = n \times x$$

. نتیجه : پس در حالت کلی در مورد عبارات توان دار داریم :

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

n مرتبه

$$x \times x \times x \times \dots \times x = x^n$$

. تمرین : با توجه به نمونه داده شده ، طرف دیگر هر تساوی را بنویسید.

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 \quad \left(\frac{5}{3}\right)^4 =$$

$$(-2) \times (-2) \times (-2) =$$

$$(-3)^2 =$$

$$\left(-\frac{2}{7}\right)^5 =$$

$$\left(\frac{5+7}{9}\right) \times \left(\frac{5+7}{9}\right) =$$

نکته 1: برای انجام چهار عمل اصلی روی اعداد توان دار ، ابتدا بایستی مقدار هر عدد توان دار را محاسبه نموده و سپس عملیات مورد نظر را انجام دهیم : (مانند دو مثال زیر)

$$5^3 - 2^7 = 125 - 128 = -3$$

$$10^2 \div 3^3 = 100 \div 27 = \frac{100}{27}$$

1- حاصل هر عدد به توان یک برابر با خود آن عدد است.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}, (-5)^1 = -5$$

2- عدد یک به هر توانی برسد ، حاصل برابر با یک است.

$$1^{100} = 1, 1^1 = 1$$

3- هر عدد (به غیر از عدد صفر) که به توان صفر برسد ، حاصل برابر با یک است.

$$(-7)^0 = 1, (1000)^0 = 1$$

4- با معکوس کردن پایه هر عدد توان دار ، توان آن قرینه می شود.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

5- حاصل هر عدد منفی به توان زوج ، برابر با عددی مثبت است.

$$(-5)^2 = +25$$

6- حاصل هر عدد منفی به توان فرد ، برابر با عددی منفی است.

$$(-5)^3 = -125$$

7- اگر کسر کوچکتر از واحدی به توان بزرگتر برسد ، حاصل آن کوچکتر می شود :

$$\left(\frac{1}{5}\right)^7 < \left(\frac{1}{5}\right)^3 < \left(\frac{1}{5}\right)^1 < \left(\frac{1}{5}\right)^0 < \left(\frac{1}{5}\right)^{-5}$$

8- به توان دوم هر عددی ، مجذور یا مربع آن عدد گفته می شود.

$$(-7)^2 = 49 = \text{مجذور } (-7)$$

9- به توان سوم هر عددی ، مکعب آن عدد گفته می شود.

$$(-7)^3 = -343 = \text{مکعب } (-7)$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ضرب و تقسیم اعداد توان دار

در ضرب اعداد توان دار بایستی به نکات زیر توجه کرد :

1- در ضرب اعداد توان دار اگر پایه ها با یکدیگر برابر باشند ، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

$$a^x \times a^y = a^{x+y}, (-7)^4 \times (-7)^{-12} = (-7)^{-8}$$

2- در ضرب اعداد توان دار اگر پایه ها با هم برابر نباشند (توان ها با هم برابر باشند) ، یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^x \times b^x = (a \times b)^x, (-3)^9 \times (+0.2)^9 = (-0.6)^9$$

در تقسیم اعداد توان دار بایستی به نکات زیر توجه کرد :

1- در تقسیم اعداد توان دار ، اگر پایه ها با یکدیگر برابر باشند ، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از یکدیگر کم می کنیم.

$$a^x \div a^y = a^{x-y}, 4^3 \div 4^{10} = 4^{3-10} = 4^{-7} = \left(\frac{1}{4}\right)^7$$

2- در تقسیم اعداد توان دار ، اگر پایه ها با هم برابر نباشند (توان ها با هم برابر باشند) ،

یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

$$a^x \div b^x = (a \div b)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$(-3)^7 \div 15^7 = (-3 \div 15)^7 = \left(-\frac{3}{15}\right)^7 = \left(-\frac{1}{5}\right)^7$$

. مقایسه اعداد توان دار با پایه های مساوی

با فرض اینکه a عددی مثبت است و m و n اعداد صحیح هستند و m بزرگتر از n باشد ،
داریم :

اگر $a > 1$ باشد، آنگاه $a^m > a^n$ است. مثال: $7^{11} > 7^5$, $5^{-3} > 5^{-10}$

اگر $a = 1$ باشد، آنگاه $a^m = a^n$ است. مثال: $1^{11} = 1^5$, $1^0 = 1^{-20}$

اگر $a < 1$ باشد، آنگاه $a^m < a^n$ است. مثال: $\left(\frac{1}{3}\right)^7 < \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{5}{9}\right)^{-3} < \left(\frac{5}{9}\right)^{-4}$

. مقایسه اعداد توان دار با توان های مساوی

با فرض اینکه n عددی صحیح و a و b اعدادی گویا باشند و a بزرگتر از b باشد، داریم :

نکته: اگر $n > 0$ باشد آنگاه $a^n > b^n$ است. مثال: $(\frac{3}{5})^{\frac{1}{2}} > (\frac{3}{7})^{\frac{1}{2}}$, $(\frac{3}{5})^4 > (\frac{3}{7})^4$

نکته: اگر $n = 0$ باشد، آنگاه $a^n = b^n = 1$ است. مثال: $(\frac{3}{5})^0 = (\frac{3}{7})^0 = 1$

نکته: اگر $n < 0$ باشد، آنگاه $a^n < b^n$ است. مثال: $(\frac{3}{5})^{-3} < (\frac{3}{7})^{-3}$ زیرا $(\frac{5}{3})^3 < (\frac{7}{3})^3$ است.

. تمرین: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$2^4 \times 3^4 =$$

$$(\frac{2}{3})^6 \times (\frac{3}{4})^6 =$$

$$(\frac{1}{2})^5 \times 3^5 =$$

$$(-2)^9 \times (-1)^9 =$$

$$(-2)^5 \times 3^5 =$$

$$x^2 \times y^2 =$$

$$5^2 \times 5^4 =$$

$$(-2)^4 \times (-2)^2 =$$

$$(-4)^1 \times (-4)^5 =$$

$$7^2 \times 7 =$$

$$(\frac{1}{2})^5 \times \frac{1}{5^2} =$$

$$1/5^4 \times (\frac{3}{2})^4 =$$

. تمرین: کدام یک درست و کدام یک نادرست می باشد؟

$$(3+2)^0 = 2^0 + 3^0$$

$$(2\frac{1}{2})^0 > (-\frac{1}{2})^2$$

$$(-\frac{2}{3})^0 + (\frac{1}{3})^0 > 1$$

$$4 + 2^0 = 6$$

$$2^0 + 3^0 + 5^0 = 1$$

$$4^0 < (-2)^2$$

. تمرین : حاصل هر يك از عبارات زیر را به صورت عدد توان دار بنویسید.

$$4^5 \times 4^3$$

$$5^2 \times 5^3$$

$$(0/4)^6 \times (0/4)^4$$

$$7^6 \div 7^4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$(0/3)^7 \div (0/3)^5$$

$$5^9 \times 7^9$$

$$9^7 \times 6^7$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{15}{2}\right)^3$$

$$8^4 \div 5^4$$

$$3^6 \div 4^6$$

$$5^3 \div 10^3$$

. جذر

می دانیم که به توان دوم هر عددی مجذور آن عدد گفته می شود ، عکس مجذور کردن را جذر گیری می گویند.
به طور مثال جذر 49 عدد (+7) می باشد زیرا مجذور عدد (+7) عدد 49 است.

در ریاضیات برای محاسبه جذر حسابی (ریشه مثبت) یک عدد ، از نمادی به نام رادیکال ($\sqrt{\quad}$) استفاده می شود.

در واقع رادیکال یک عدد ، (ریشه دوم) آن عدد را می دهد.
یعنی عدد (+7) ریشه دوم عدد 49 می باشد.

به مثال های زیر توجه کنید :

$$\sqrt{0.06} \approx 0.24 \text{ و } \sqrt{49} = 7, \sqrt{25} = 5$$

برای محاسبه جذر اعداد توان دار می توان از روش زیر استفاده کرد :

$$(a > 0) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

نکته 1 : در عبارت نوشته شده بالا ، m را توان و n را فرجه رادیکال می نامیم.

نکته بسیار مهم : هر عددی که زیر رادیکال قرار می گیرد بایستی مثبت باشد نه منفی.

نکته 2 : اگر در بالای رادیکال مقدار فرجه را ننوشته بودند ، همیشه مقدار فرجه را عدد 2 در نظر می گیریم.

نکته 3 : جذر حاصل ضرب چند عدد نا منفی برابر با حاصل ضرب جذر آن اعداد می باشد.

$$\sqrt{a \times b \times c \times \dots} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \dots$$

به مثال های زیر توجه نمایید :

$$\text{الف) } \sqrt{25 \times 81} = 5 \times 9 = 45$$

$$\text{ب) } \sqrt{0.16} = \sqrt{0.1 \times 16} = 0.1 \times 4 = 0.4$$

. تمرین : حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$\sqrt{4 \times 36} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{9 \times 81} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{49 \times 4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{100 \times 16} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{\frac{25}{64}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{\frac{121 \times 9}{100}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

. جذر تقریبی

می خواهیم بدانیم که جذر عدد 28 بین چه مقادیری است؟ برای این کار ابتدا باید گفت عدد 28 بین کدام یک از اعدادی است که جذر کامل دارند؟

همانطور که می دانیم عدد 28 بین اعداد 25 و 36 است. (اعداد 25 و 36 دارای جذر کامل هستند).

پس جذر عدد 28 بین جذر اعداد 25 و 36 است ، یعنی بین $\sqrt{25}$ و $\sqrt{36}$ است.

به جدول زیر دقت نمایید :

عدد	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴
مجزور	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶

. تمرین : $\sqrt{58}$ بین کدام دو عدد است؟

. تمرین : ریشه دوم عدد 30 بین کدام دو عدد است؟

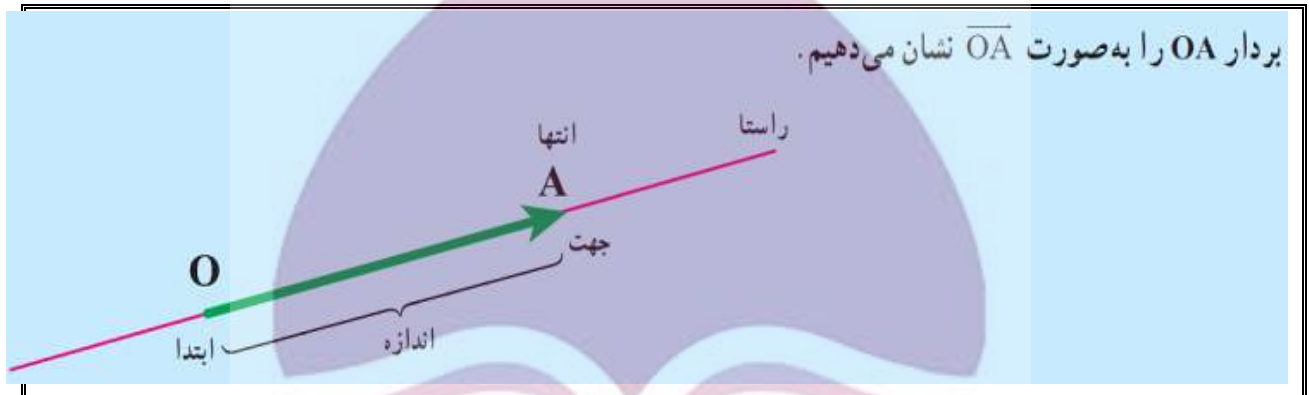
. تمرین : ریشه دوم عدد 40 را اگر با مقدار (+1) جمع کنیم ، بین کدام دو عدد قرار می گیرد؟



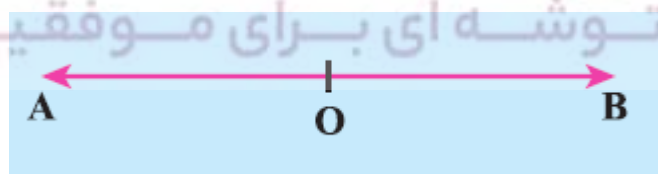


فصل ۸ بردار و مختصات

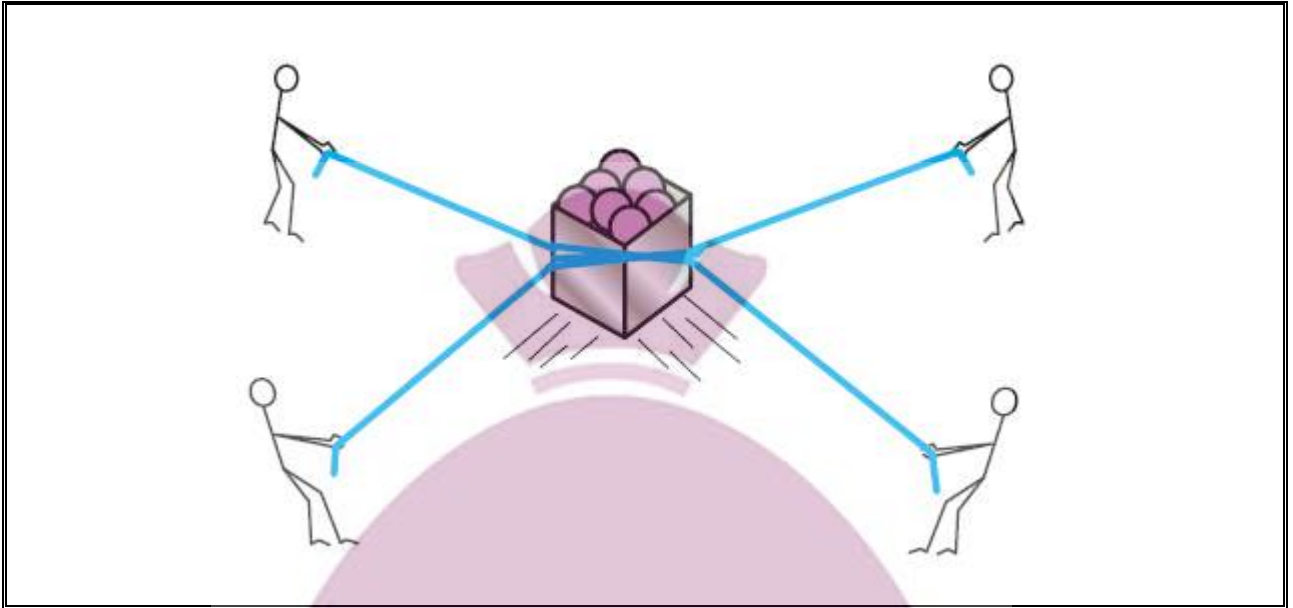
در ریاضیات به پاره خط جهت دار بردار می گوئیم ، مانند شکل زیر :



. تعریف : دو بردار را که از نظر اندازه با یکدیگر برابر و هم راستا بوده ولی جهتشان بر عکس یکدیگر است ، بردارهای قرینه می گویند.

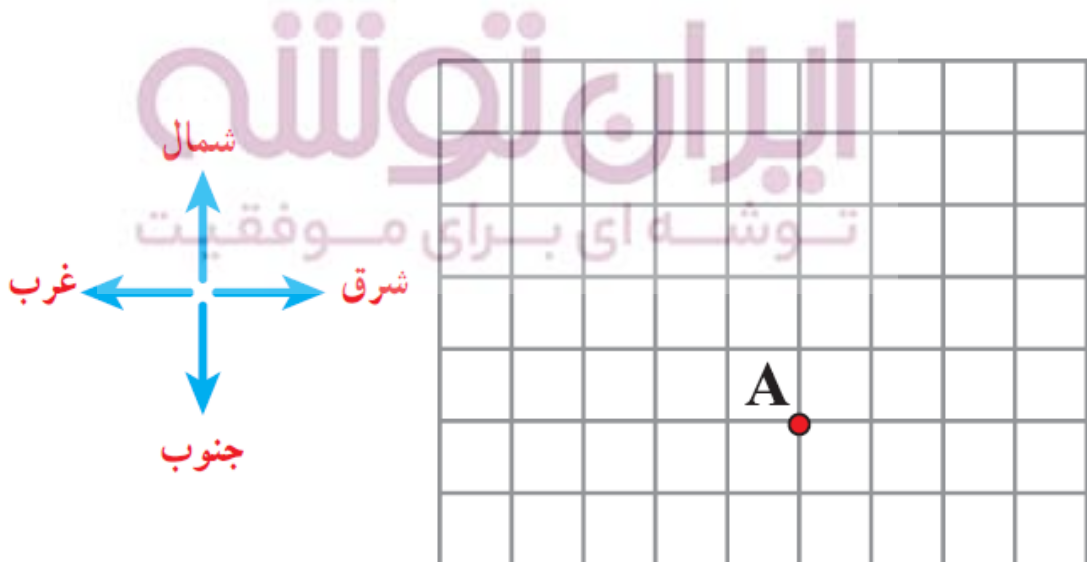


. تمرین : در تصویر زیر چهار شخص ، هر یک به طور جداگانه در حال کشیدن یک جعبه هستند
، نیرو هایی که به این جعبه وارد می شود را با بردار نشان دهید.



. کار در کلاس : با توجه به 4 جهت نشان داده شده (شمال ، جنوب ، غرب ، شرق) ، می خواهیم
از نقطه A به صورت زیر حرکت کنیم :

از نقطه A ، 3 واحد به سمت شرق ، 2 واحد به سمت شمال ، 4 واحد به غرب و 3 واحد به سمت
جنوب حرکت کنید ، موقعیت جدید نقطه A را مشخص کنید.



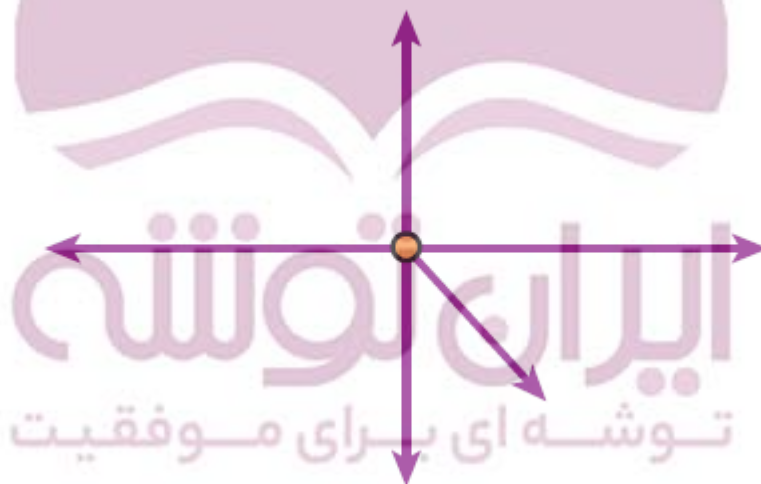
. مثال : بردار AB ، (-3) است ، یعنی به اندازه 3 واحد در جهت منفی حرکت کرده ایم ، ابتدای این بردار $(+1)$ و انتهای آن (-2) است. به محور زیر دقت کنید :



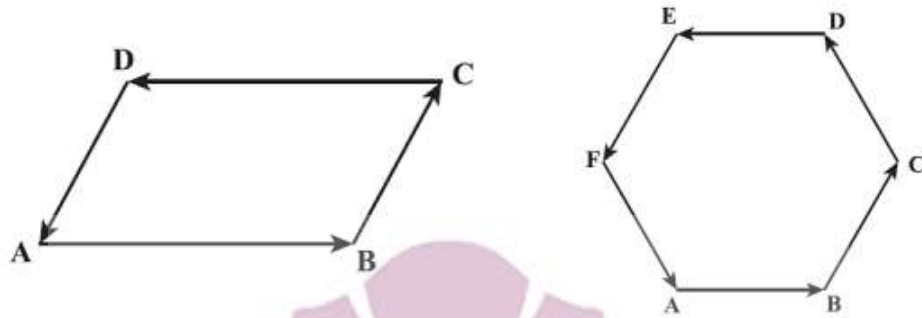
. مثال : همانطور که در محور زیر نمایان است ، سه بردار هم اندازه داریم که هم راستا و هم جهت هستند و به یک اندازه (به اندازه 3 واحد) در جهت مثبت محور حرکت می کنند.



بحث در کلاس : با توجه به بردارهای نشان داده شده در شکل ، با دلیل و منطق توضیح دهید که جسم به چه سمتی حرکت می کند؟



. تمرین : در شکل های زیر بردار های قرینه را با اسم مشخص کنید.



. مختصات

برای آسان تر شدن استفاده از نقشه ، می توان صفحه نقشه را با خطوط افقی و عمودی خانه بندی کرد. هر یک از خطوط افقی و عمودی با یک عدد مشخص می شوند . به این ترتیب ، هر نقطه از صفحه نقشه را می توان با دو عدد مربوط به ستون و ردیف آن نقطه مشخص کرد ، مثلاً در نقشه زیر ، استان تهران با دو نقطه (30) روی محور افقی و (50) روی محور عمودی مشخص می شود.



عدد (30) را طول این محل و عدد (50) را عرض این محل می نامیم.

حال اگر بخواهیم این دو عدد را (که تشکیل یک نقطه از نقشه می دهند) به صورت ریاضی تعریف کنیم، از واژه نقطه مختصات استفاده می کنیم. در واقع طول و عرض هر محل را به صورت رو به رو می نویسیم:

[طول
عرض]

پس مختصات تهران در نقشه بالا را می توان به صورت $\begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix}$ نوشت.

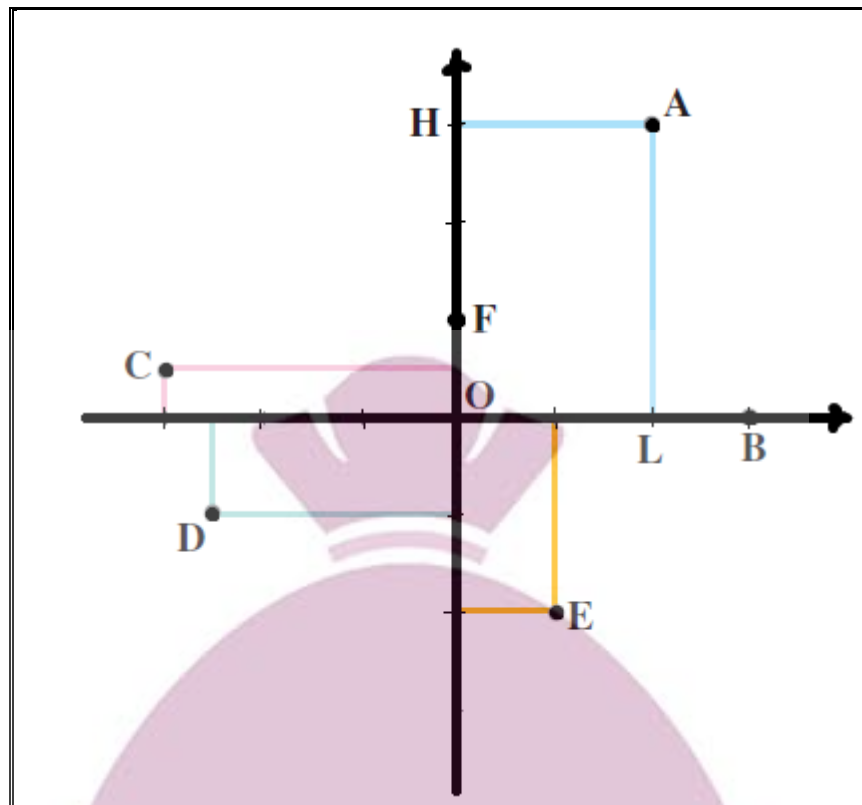
. تمرین: با توجه به نقشه بالا مختصات شهرهای یزد، اصفهان و کرمانشاه را بدست آورید.

برای مشخص کردن کردن نقاط صفحه می توانیم از محورهای مختصات استفاده کنیم.

با توجه به محور مختصات رسم شده، نقطه O محل تلاقی دو محور افقی (محور طول یا X) و عمودی (محور عرض یا Y) است که به این نقطه O، مبدا مختصات گفته می شود.

به عنوان مثال اگر بخواهیم نقطه ای مانند A را در روی این محور مختصات مشخص کنیم باید از A به موازات محور افقی و محور عمودی خطوطی را رسم کنیم تا محور را در نقاط L و H قطع کند. روی محور طول، L نقطه نمایش (+2) است و روی محور عرض، H نقطه نمایش (+3) است.

در واقع طول نقطه A، (+2) است و عرض نقطه A، (+3) است.



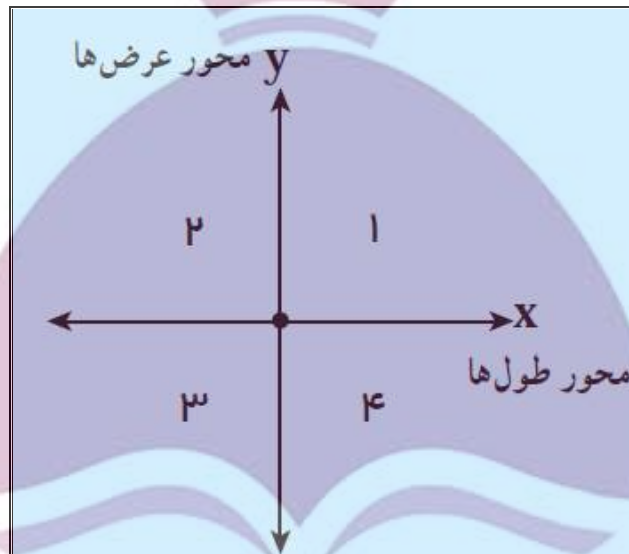
بنابراین، مختصات A، $\begin{bmatrix} +2 \\ +3 \end{bmatrix}$ است: $A = \begin{bmatrix} +2 \\ +3 \end{bmatrix}$

. تمرین : با توجه به محور مختصات رسم شده در توضیحات بالا ، جدول زیر را کامل کنید.

F	E	D	C	B	طول x
					عرض y
					مختصات
					$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

به شکل محور مختصات زیر توجه کنید ، همانطور که مشاهده می کنید ، قسمت هایی از این محور مختصات با اعداد 1 ، 2 ، 3 و 4 نام گذاری شده اند. در واقع :

- 1- به ناحیه شماره 1 ، ناحیه اول یا ربع اول گفته می شود.
- 2- به ناحیه شماره 2 ، ناحیه دوم یا ربع دوم گفته می شود.
- 3- به ناحیه شماره 3 ، ناحیه سوم یا ربع سوم گفته می شود.
- 4- به ناحیه شماره 4 ، ناحیه چهارم یا ربع چهارم گفته می شود.



نکاتی در مورد محور مختصات (شکل بالا) :

- 1- هر نقطه که در ناحیه ی اول قرار گیرد ، طول و عرض مثبت است.
- 2- هر نقطه که در ناحیه ی دوم قرار گیرد ، طول منفی و عرض مثبت است.
- 3- هر نقطه ای که در ناحیه ی سوم قرار گیرد ، طول و عرض منفی است.
- 4- هر نقطه ای که در ناحیه ی چهارم قرار گیرد طول مثبت و عرض منفی است.
- 5- هر نقطه ای که روی محور طول قرار گیرد ، عرض صفر است.
- 6- هر نقطه ای که روی محور عرض قرار گیرد ، طول صفر است.

. تمرین : مختصات هر یک از نقاط داده شده را توسط محور های مختصات رسم کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 6/2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -3/7 \\ -2 \end{bmatrix}$$



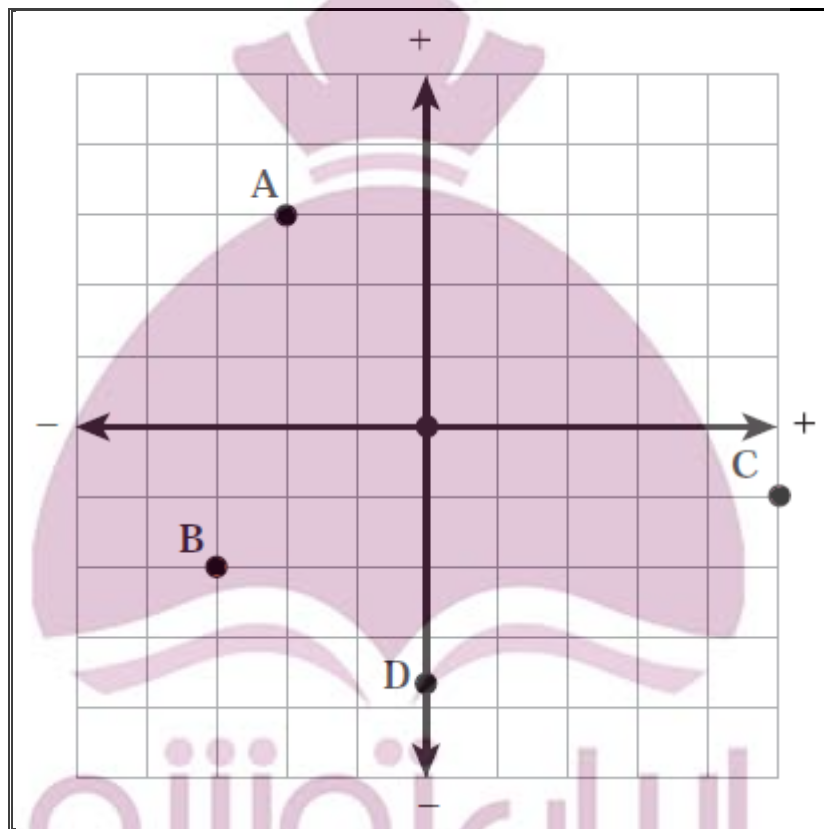
. تمرین : مختصات نقاط نشان داده شده در شکل زیر را بنویسید و مختصات نقاط داده شده زیر را در شکل بیابید.

$$E = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

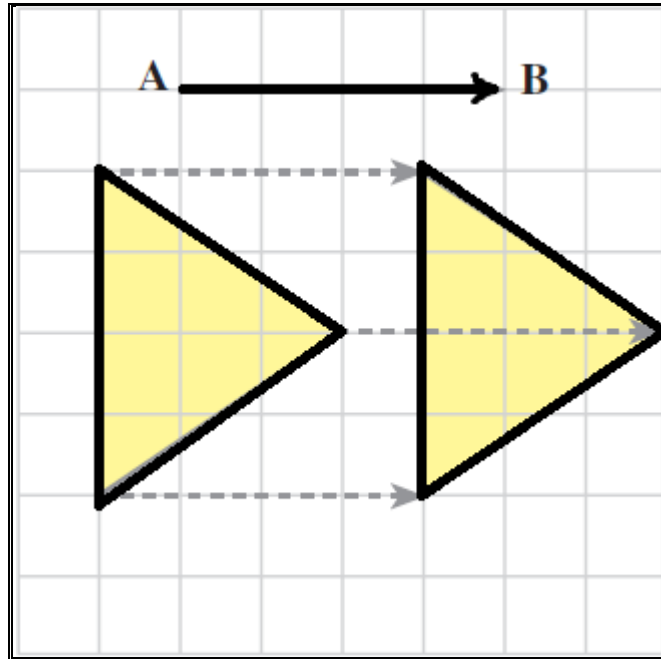
$$G = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

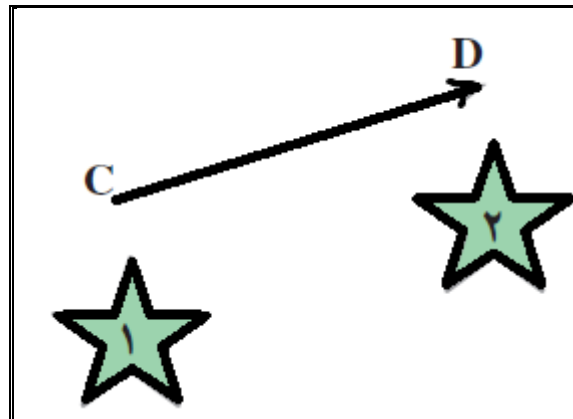


. بردار انتقال

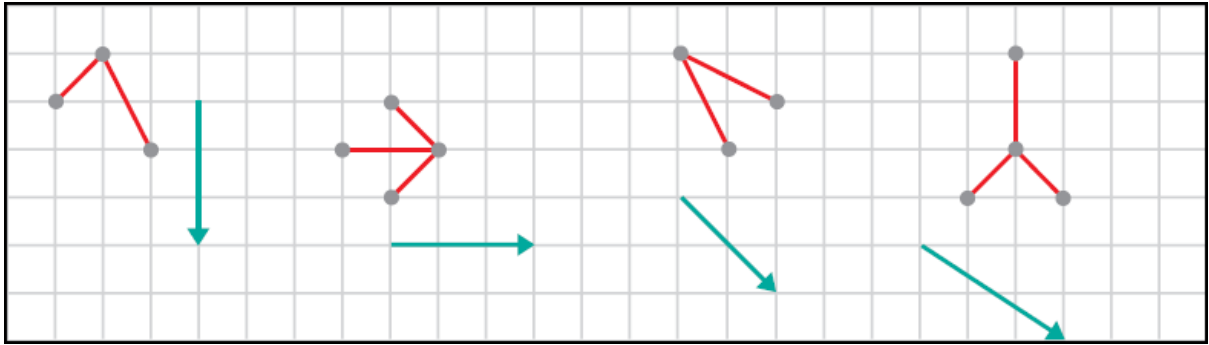
در شکل زیر مثلث سمت چپ به سمت راست انتقال یافته است ، این تغییر مکان یک ((انتقال)) است ، انتقال یعنی تغییر مکان، اندازه و جهت مشخص. برداری که شکل را در مسیر مشخص انتقال می دهد، بردار انتقال می نامند. در این شکل بردار $\overrightarrow{AB}$ این انتقال را مشخص می کند و بردار انتقال نامیده می شود.



در این شکل ، اگر ستاره (1) با بردار $\vec{CD}$ انتقال داده شود ، بر ستاره (2) منطبق می شود.

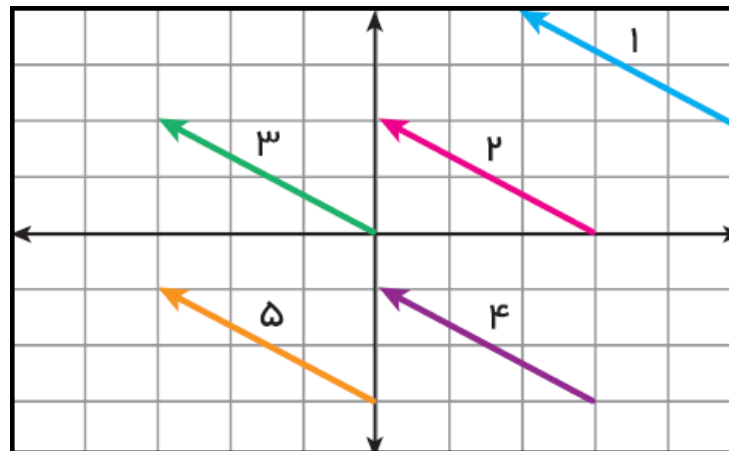


. تمرین : هر شکل را با بردار انتقال مربوط انتقال دهید.



. نکته بسیار مهم : با مشخص بودن مختصات ابتدا ، مختصات بردار و مختصات انتهای یک بردار میتوان یک جمع متناظری برای بردار نوشت و به کمک این جمع و معلوم بودن دو مختصات می توان مختصات قسمت سوم (قسمت نامعلوم) را پیدا نمود.

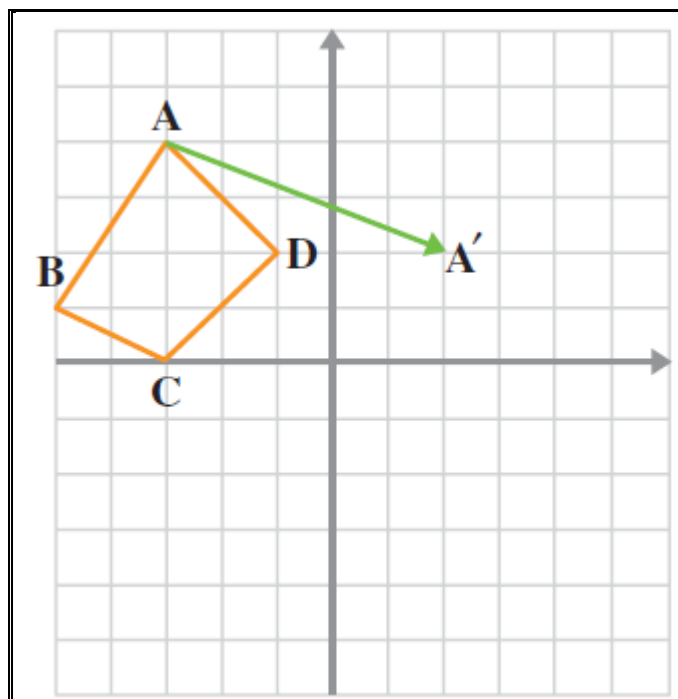
. بحث و تمرین در کلاس : با توجه به شکل زیر چه رابطه ای بین ابتدا ، انتها و مختصات بردار وجود دارد؟ جدول را کامل کنید.



بردار	۱	۲	۳	۴	۵
مختصات ابتدا					
مختصات بردار					
مختصات انتها					

. تمرین : با استفاده از شکل زیر تساوی های زیر را کامل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



. در تمرین بالا چهار ضلعی ABCD را با بردار انتقال AA' انتقال دهید و چهار ضلعی بدست آمده را $A'B'C'D'$ بنامید. مختصات بردار انتقال و مختصات نقاط جدید را که در زیر آمده است، بیابید.

$$\vec{AA'} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}, D' = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

. به رابطه نوشته شده زیر بین مختصات نقاط توجه کنید، همانطور که مشاهده می کنید مختصات ابتدای بردار با مختصات بردار (که همان بردار انتقال است) جمع شده و مختصات انتهای بردار بدست آمده است.

انتهای بردار مختصات بردار ابتدای بردار $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{,} \quad \begin{bmatrix} -2 + x = 3 \\ 1 + y = -4 \end{bmatrix}$
--

برای جمع کردن نقاط مختصاتی بایستی مقادیر طول ها را با هم (X ها با هم جمع شوند) و مقادیر عرض ها را با هم (Y ها با هم جمع شوند) جمع کرد.

. سوال : آیا می توانید مقدار X و Y را در بالا بدست آورید؟

. تمرین : با توجه به مختصات نوشته شده در زیر ، مختصات نقاط جدید را بدست آورید.

$$\begin{array}{ccc} \text{بردار انتقال} & & \\ \left[\begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array} \right] & \xrightarrow{\left[\begin{array}{c} 5 \\ -4 \end{array} \right]} & \\ \left[\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right] & & \left[\begin{array}{c} -1 \\ 3 \end{array} \right] \\ A = & & B = \\ \left[\begin{array}{c} -2 \\ -2 \end{array} \right] & & C = \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A' = \left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right] & B' = \left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right] \\ C' = \left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right] \end{array}$$

. تمرین : حاصل جمع های زیر را بدست آورید.

$$\left[\begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} -4 \\ 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} -7 \\ +8 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \\ -12 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} -3 \\ 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \\ -4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right]$$

. تمرین : تساوی های زیر را کامل کنید.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



فصل ۹

آمار و احتمال

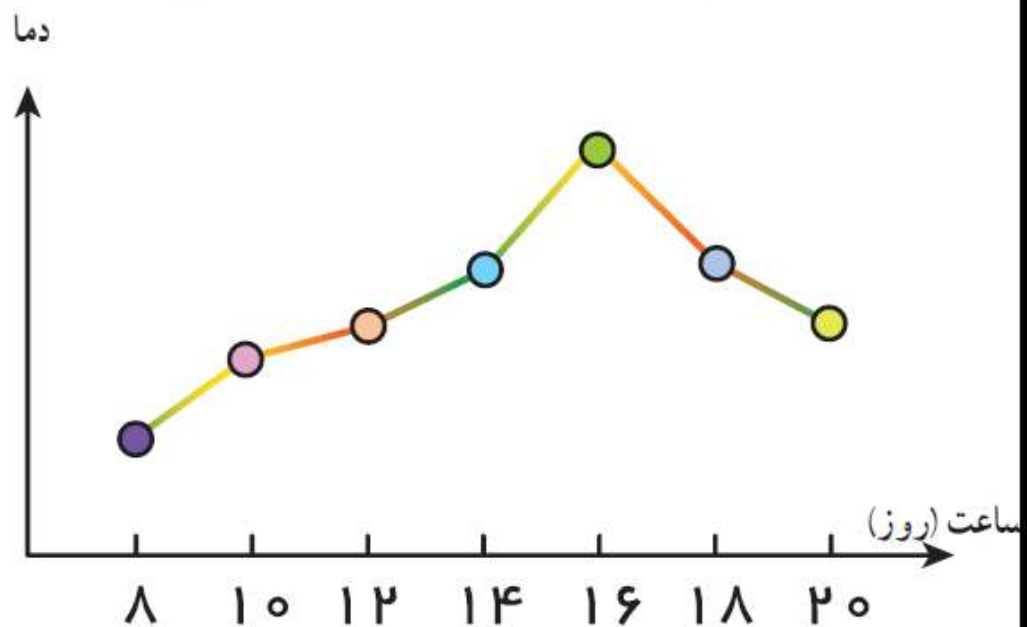
. علم آمار ، علم جمع آوری ، سازماندهی ، تفسیر و تحلیل اطلاعات (داده ها) است. پس از جمع آوری داده ها و اطلاعات و تفسیر و تحلیلشان ، نمودارهایی رسم می شود که به کمک آنها نتایج را به صورت آماری تفسیر می کنند.

در زیر ، 4 مورد از پر کاربرد ترین نمودارهای آماری را مشاهده می کنید.

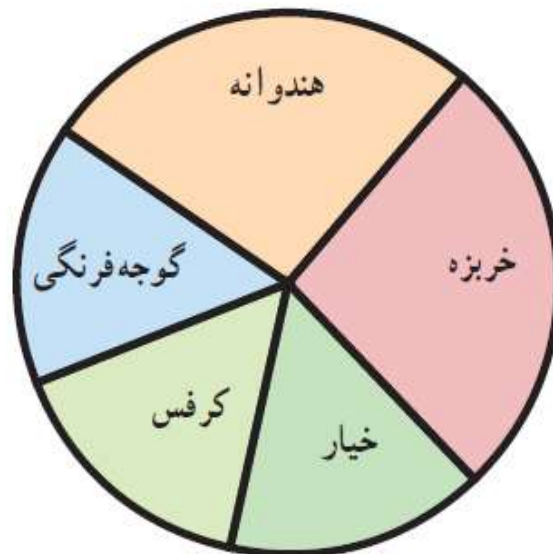
نمودار خط شکسته برای نمایش تغییرات کاربرد دارد؛ بنابراین در موضوع هایی که تغییرات اهمیت دارد، از این نمودار استفاده می شود. برای نمونه تغییرات در بازارهای مالی، قیمت طلا، نفت، سهام و... را با این نمودار نشان می دهند. گاهی وقت ها به جای داده های واقعی از مقدار تقریبی آنها استفاده می کنیم. در برنامه ریزی های کلان به عددهای واقعی و دقیق نیاز نداریم. برای مثال مقدار تولید گندم یک استان را به صورت چند هزار تن بیان می کنند؛ یعنی مقدار کمتر از ۱۰۰۰ تن یا یک میلیون کیلوگرم در این بررسی اهمیت ندارد.

بعضی از داده ها و اطلاعات جمع آوری شده نشان می دهد که یک مقدار مشخص به چه نسبتی به بخش های کوچک تر تقسیم شده است. در این موارد می توان تقسیم شدن را روی یک شکل مثل دایره نشان داد و سهم هر بخش را روی دایره مشخص کرد. در **نمودار دایره ای** به طور معمول نسبت و سهم هر بخش را به صورت درصد محاسبه کرده؛ و سپس روی نمودار نمایش می دهند.

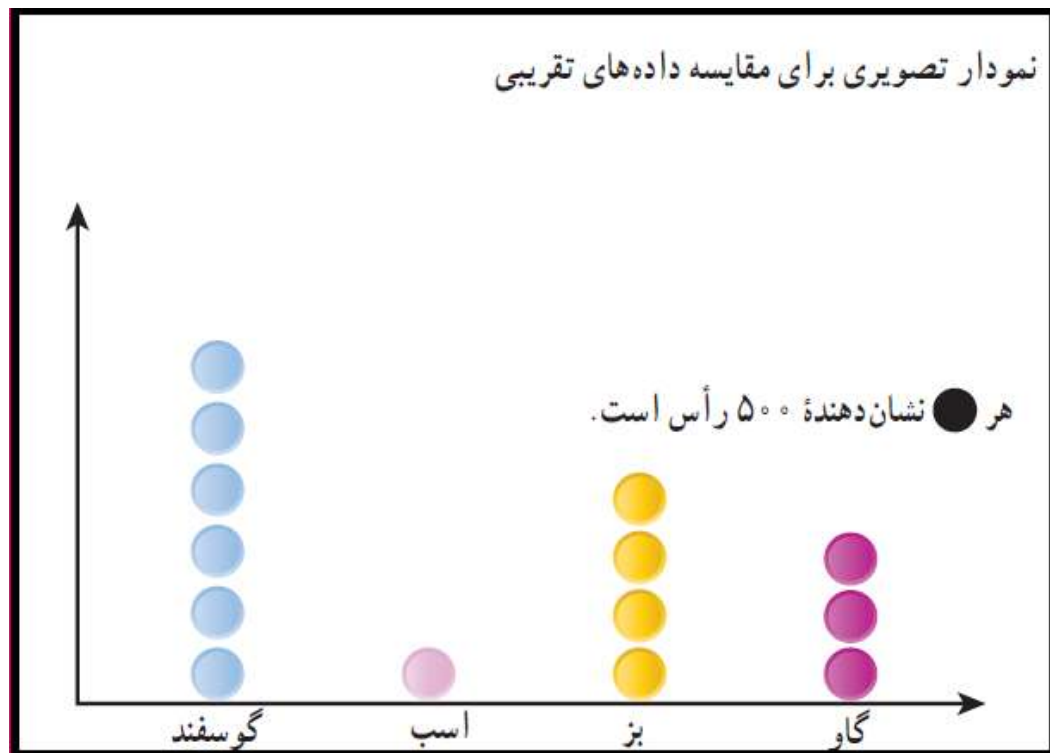
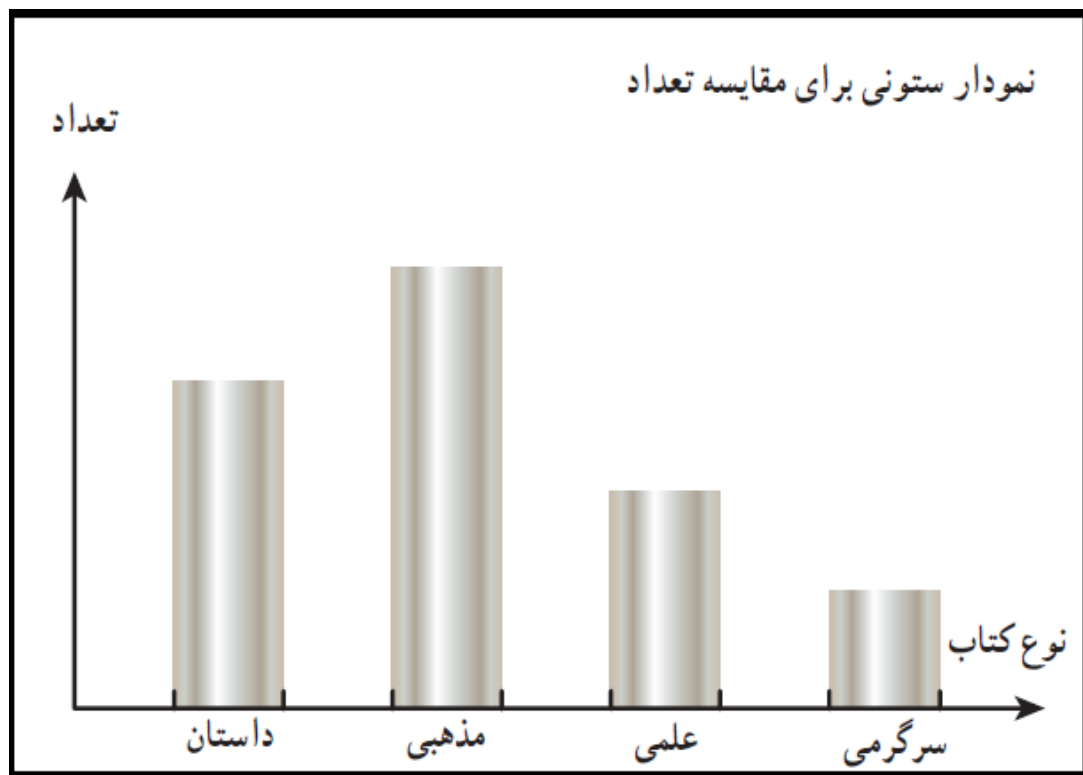
نمودار خط شکسته برای نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص



نمودار دایره‌ای برای نشان دادن تعداد داده‌ها نسبت به کل



سطح زیر کشت کشاورزی یک مزرعه



نکته 1: اگر تعداد داده ها زیاد باشد ، بررسی و تفسیر آنها مشکل و وقت گیر می شود ، به همین خاطر در اکثر کارهای آماری داده ها را دسته بندی می کنند و سازماندهی جدیدی متناسب با موضوع آماری انجام می شود ، همچنین تفسیر و تحلیل نتایج نیز با دقت بیشتری انجام می شود.

❖ نکاتی در مورد داده ها و اطلاعات آماری

- 1- در اکثر داده های آماری ، همیشه یک مقدار حداکثر و یک مقدار حداقل داریم (در واقع یک داده ی بیشترین و یک داده ی کمترین داریم.)
- 2- فاصله بین بیشترین داده و کمترین داده را دامنه تغییرات می نامند.

- 3- اگر مجموع کل داده ها را بر تعدادشان تقسیم کنیم ، میانگین داده ها بدست می آید :

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد داده ها}} = \bar{X} = \frac{S}{n}$$

- 4- به تعداد داده های موجود در هر دسته فراوانی گفته می شود.

❖ توجه : برای حل مثال های مربوط این بخش به کتاب درسی مراجعه کنید و در حل آنها از استاد خود راهنمایی بگیرید و در کلاس بحث و تبادل نظر نمایید.

علم احتمال اولین بار از بازی های شانس به وجود آمد .

در بازی های شانس ، برد و باخت اهمیت فراوان دارد و حدس زدن مطرح می شود.

واژه احتمال را در صحبت های روزمره ی اشخاص زیاد شنیده اید . به طور مثال یکی از دوستانتان به شما می گوید: به احتمال 99٪ می آیم . چه قدر منتظر او هستید ؟ حتما خیلی زیاد و یا به این جمله اعتقاد دارید هر چه دانش آموز بیشتر درس بخواند ، احتمال قبول شدن او بیش تر است. یعنی احتمال کم و زیاد می شود ، پس احتمال را می توان اندازه گرفت.

احتمال شامل دو پدیده می شود :

1- پدیده قطعی

آزمایش یا پدیده ای که قبل از رخداد نتیجه اش معلوم باشد مثلا تویی را در سراسیمبی رها می کنیم حتما توپ به سمت پایین حرکت می کند.

2- پدیده تصادفی

آزمایش یا پدیده ای که قبل از انجام آزمایش یا مشاهده نتیجه اش معلوم نباشد مثلا قبل از پرتاب یک سکه نمی توان با اطمینان گفت رو یا پشت ظاهر می شود.
به عنوان مثال : اگر یک کیسه شامل 5 مهره با شماره های 1 تا 5 باشد و بخواهیم یک مهره را به صورت شانسی و قرعه کشی بیرون بیاوریم فضای نمونه (1-2-3-4-5) است.

نکته 5: در احتمال فقط پدیده های تصادفی را مطالعه خواهیم کرد.

پیشامد : به مواردی که ممکن است در یک مسئله احتمال اتفاق بیفتد .(در پرتاب سکه)
پیشامد مطلوب قسمتی از فضای نمونه که ما تمایل داریم اتفاق بیفتد.

مثال: در یک روز ابری می خواهیم برای گردش و تفریح بیرون برویم . می دانیم شاید باران بیارد و شاید بارن نبارد . به عبارت دیگر فضای نمونه (باران می بارد ، باران نمیبارد) است ولی بی شک ما بیشتر تمایل داریم باران نبارد . به نباریدن باران پیشامدگوییم .



. نکات مربوط به احتمال :

- ▶ همیشه مجموع احتمال برابر یک می شود.
- ▶ همیشه مقدار احتمال بین 1 و 0 می شود.
- ▶ هیچ عددی وجود ندارد که احتمال آن بزرگتر از یک باشد.

. احتمال غیر ممکن :

اگر احتمال یک پیشامد برابر صفر باشد آن پیشامد را غیر ممکن گویند.

مثال: در پرتاب یک تاس مطلوب است احتمال این که عدد 7 ظاهر شود. (یا پرواز سنگ)

نکته: می دانیم تاس تا عدد 6 دارد. پس احتمال ظاهر شدن عدد 7 صفر است.

پس ظاهر شدن عدد 7 غیر ممکن است.

. به نکته زیر توجه کنید :

در ریاضی احتمال اتفاق افتادن یک پیشامد برابر است با نسبت تعداد اتفاق افتادن آن پیشامد به

تعداد تمام حالت های ممکن برای اتفاق افتادن آن پیشامد. احتمال اتفاق افتادن پیشامد a را با

P_a ، تعداد حالت های ممکن بر اتفاق افتادن پیشامد a را با $n(a)$ و تعداد پیشامد های ممکن را با

$n(s)$ نمایش می دهیم ، پس داریم :

$$P_a = \frac{n(a)}{n(s)}$$

وقتی یک سکه را می اندازیم، دو حالت **هم شانس** ممکن است اتفاق بیفتد، یا سکه رو می آید یا پشت و چون در یک حالت از این دو حالت ممکن، سکه رو می آید؛ پس احتمال رو آمدن سکه $\frac{1}{2}$ است.

به این ترتیب برای بیان اندازه **شانس** رخ دادن یک اتفاق، از یک عدد استفاده کرده ایم که **احتمال** رخ دادن آن اتفاق نامیده می شود.

برای اینکه احتمال رخ دادن یک اتفاق را به دست آوریم، ابتدا همه حالت های ممکن را می یابیم، سپس حالت های مورد نظر را از میان حالت های ممکن پیدا می کنیم. احتمال رخ دادن اتفاق مورد نظر برابر است با نسبت تعداد حالت های مورد نظر به تعداد حالت های ممکن؛ بنابراین:

$$\text{احتمال رخ دادن یک اتفاق} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب برای رخ دادن آن}}{\text{تعداد حالت های ممکن برای رخ دادن آن}}$$

. تمرین : در هر کدام از کیسه های مقابل فقط یک مهره سیاه است و بقیه سفید هستند ، اگر از هر کیسه یک مهره سیاه برداشته شود ، احتمال اینکه سیاه باشد در کدام کیسه بیشتر است؟

