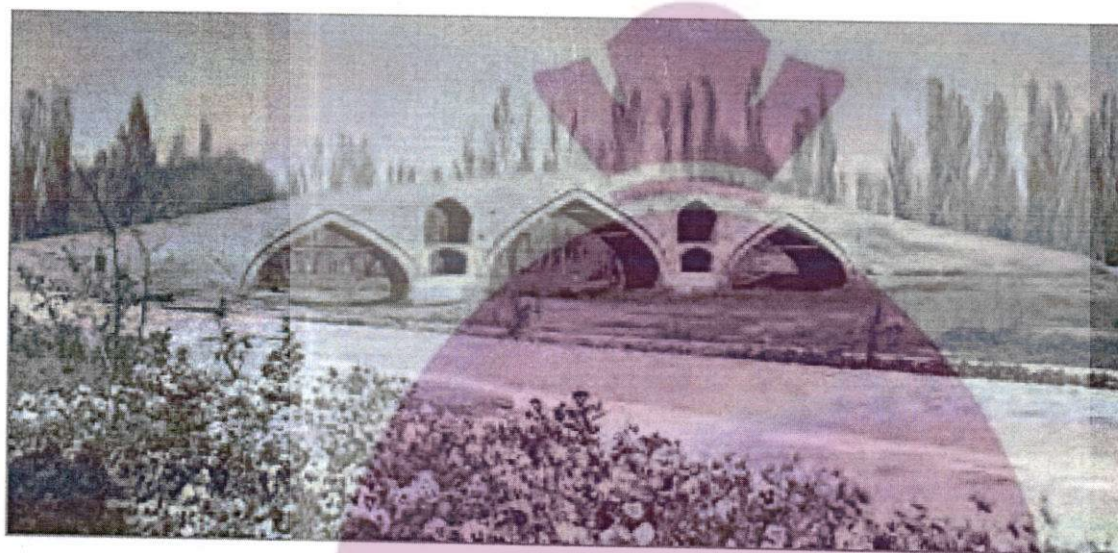




منحنی مسیر حرکت بسیاری از اشیاء را به کمک یک معادله درجه دوم می‌توان نمایش داد. بادقت در محیط پیرامون خود، پدیده‌هایی را بباید که با توابع درجه ۲ مرتبط باشند.

هندسه تحلیلی

درس اول

درس دوم

درس سوم

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

درس اول

هندسه تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادله خط

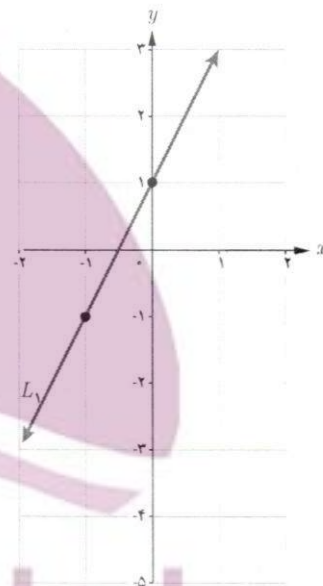
در بسیاری از پدیده‌های جهان، رابطه خطی بین متغیرها به چشم می‌خورد. بنابراین مطالعه تابع‌های خطی اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در سال‌های قبل با مطالبی در این زمینه آشنا شدیم. در این فصل نکات دیگری را در این باره، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کار در کلاس

۱ می‌دانیم از هر دو نقطه متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند؛ بنابراین:

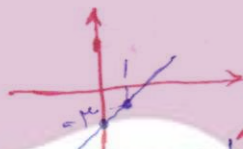
الف) با داشتن مختصات P ، نقطه از یک خط باید بتوان معادله آن را به دست آورد.
ب) با داشتن معادله یک خط می‌توان با مشخص کردن P ، نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.

۲ نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه مختصات مشخص شده، رسم کنید:



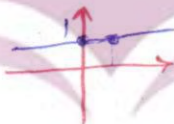
الف) $L_1: y = 2x + 1$

x	-1	0
y	-1	1



ب) $L_2: y = 2x - 3$

x	0	1
y	-3	-1



پ) $L_3: y = 1$

x	0	1
y	1	1

ت) $L_4: x = -2$

x	-2	-2
y	0	1



ث) $L_5: x + 2y = 2$

x	0	2
y	1	0

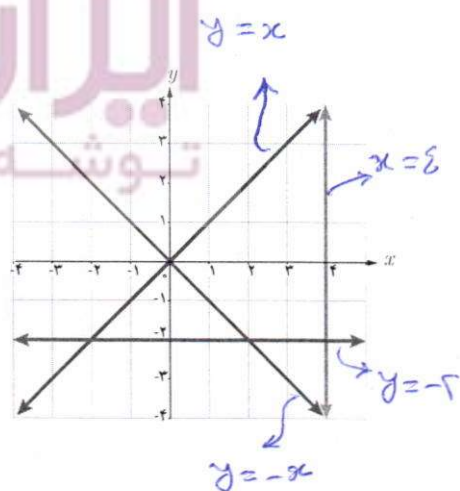


۳ معادله هر یک از خط‌های نمایش داده شده روی شکل را بنویسید.

۴ الف) توجه داریم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطه غیر هم‌طول A و B برابر است با

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای شیب‌ها برابر باشند.



۵ الف) از پایه نهم به خاطر داریم که هرگاه خط L محور y ها را در نقطه‌ای با عرض h قطع کند، آن گاه h ، **عرض از مبدأ** خط L نامیده می‌شود.

ب) در سؤال ۲، شیب و عرض از مبدأ هریک از پنج خط ذکر شده را بنویسید. در این سؤال کدام دو خط با هم موازی اند؟

۶ الف) خط با شیب m و عرض از مبدأ h معادله‌ای به صورت $y = mx + h$ دارد.

ب) می‌خواهیم معادله خط L ، گذرا از دو نقطه $A(0, 7)$ و $B(3, 1)$ را بنویسیم. برای این کار، ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 7}{3 - 0} = -2$$

شیب خط

$$\text{معادله خط: } y = -2x + h$$

$$B(3, 1): 1 = -2(3) + h \Rightarrow h = 7$$

البته اگر به مختصات نقطه $A(0, 7)$ از خط L دقت کنیم، بدون محاسبه متوجه می‌شویم که عرض از مبدأ این خط $h = 7$ است. پس:

$$\text{معادله خط } L: y = -2x + 7$$

پ) معادله خط گذرنده از نقطه $P(2, -1)$ را بنویسید؛ به طوری که با خط $y = 3x - 4$ موازی باشد.

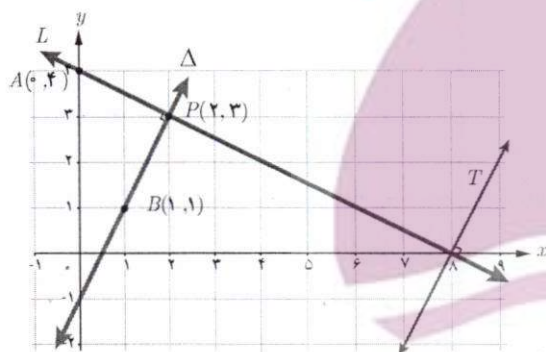
$$m = 3$$

$$y = mx + h \Rightarrow y = 3x + h$$

$$P(2, -1) \rightarrow h = -7 \Rightarrow y = 3x - 7$$

معادله خط مطلوب

فعالیت



۱ دو خط L و Δ را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. به شیب‌های این دو خط توجه می‌کنیم:

$$m = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{3 - 4}{2 - 0} = -\frac{1}{2}$$

شیب خط L گذرا از نقاط A و P

$$m' = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = 2$$

شیب خط Δ گذرا از نقاط B و P

۲ حاصل ضرب شیب‌های دو خط را به دست می‌آوریم: $mm' = \left(-\frac{1}{2}\right)(2) = -1$. می‌بینیم که شیب‌ها، قرینه معکوس یکدیگرند.

۳ اگر خط دلخواه دیگری مثل T عمود بر L را در نظر بگیریم، این خط حتماً با خط Δ موازی است؛ پس شیب خط T برابر عدد 2 خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت شیب هر خط عمود بر L برابر قرینه معکوس شیب خط L خواهد بود. این مطلب در حالت کلی درست است؛ یعنی:

دو خط غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آنها برابر (-1) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط m و m' باشد، آنگاه شرط عمود بودن آنها آن است که $mm' = -1$. به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد.

۱- راه‌های اثبات مختلفی برای این مطلب وجود دارد که یکی از آنها به کمک قضیه فیثاغورس است.

کار در کلاس

۱ در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت

به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود؟)

الف) $L: y = 5x - 2$ $m = 5$ $T: y = \frac{-1}{5}x + 3$ $m' = -\frac{1}{5} \rightarrow L \perp T$

ب) $L: y = \frac{1}{3}x + 7$ $m = \frac{1}{3}$ $T: x - 2y = 1$ $m' = \frac{1}{2} \rightarrow L \parallel T$

پ) $L: 2x - 3y + 3 = 0$ $m = \frac{2}{3}$ $T: 3x + 2y = 0$ $m' = -\frac{3}{2} \rightarrow L \perp T$

ت) $L: x = 1$ $m = 0$ $T: y = -3$ $m' = 0 \rightarrow L \perp T$

ث) $L: y = 3x + 1$ $m = 3$ $T: x = 3y - 1$ $m' = \frac{1}{3}$

۲ خط L به معادله $2y - 3x = 1$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادله $y = mx + 5$ را در نظر بگیرید.

الف) m ، را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

ب) به ازای چه مقداری از m ، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

۳ مربع $ABCD$ در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است، به طوری که $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور آن هستند.

الف) شیب ضلع AB را بنویسید. $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{10 - 5} = \frac{3}{5}$

ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادله این ضلع را بنویسید.

$AD \perp AB \rightarrow m_{AD} = -\frac{5}{3}$ $y = -\frac{5}{3}x + \frac{28}{3}$

ب) اگر بدانیم نقطه $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

AD معادله $y = -\frac{5}{3}(x - 5) + 1$

CD معادله $y = \frac{3}{5}(x - 7) + 9$

$\rightarrow -\frac{5}{3}(x - 5) + 1 = \frac{3}{5}(x - 7) + 9 \rightarrow -34x = -68 \rightarrow x = 2$

$y = \frac{3}{5}(x - 7) + 9$
 $\rightarrow y = 6$

ت) مربع را به طور کامل رسم کنید.

$D(2, 6)$

فاصله دو نقطه

فعالیت

شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف) فاصله دو نقطه A و B که برابر طول پاره خط AB است، برابر ۵ است. چه رابطه‌ای بین

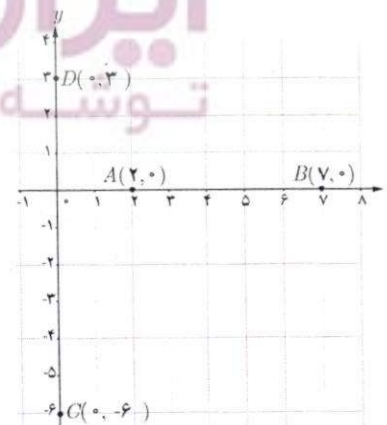
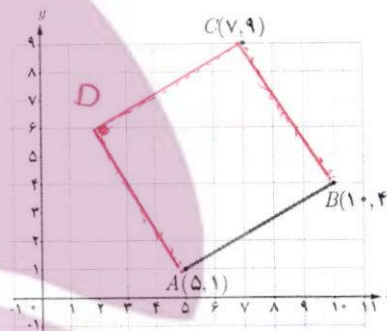
$AB = |x_B - x_A| = 5$

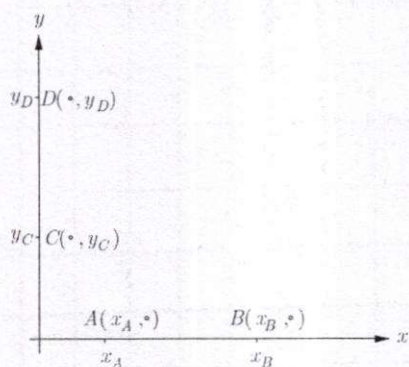
این عدد با x_B و x_A وجود دارد؟
ب) فاصله دو نقطه C و D را برحسب عرض آنها بیان کنید.

$CD = |y_D - y_C| = |-7 - 3| = 10$



بالا دست سزا امامزاده اسماعیل (ع) قم





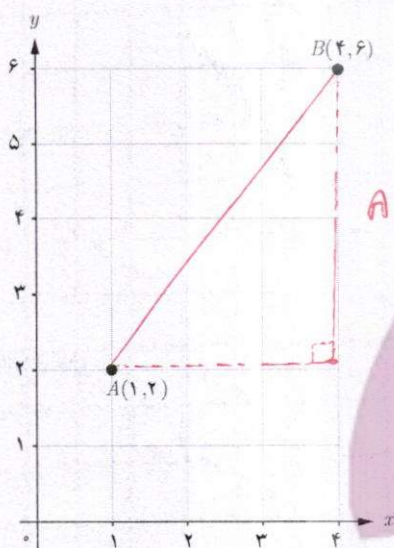
پ) در شکل مقابل، فاصله نقاط A و B را بر حسب طول آنها و فاصله دو نقطه C و D را بر حسب عرض آنها به دست آورید.

$$AB = |x_B - x_A|$$

$$CD = |y_D - y_C|$$

در حالت کلی می توان گفت :

- ۱- اگر A و B دو نقطه هم عرض در صفحه باشند، آن گاه $AB = |x_A - x_B|$
- ۲- اگر C و D دو نقطه هم طول در صفحه باشند، آن گاه $CD = |y_C - y_D|$



$$AB = 5 \text{ cm}$$

۱ در شکل مقابل فاصله دو نقطه A و B را با خط کش به دست آورید.

۲ بدون استفاده از خط کش، طول پاره خط AB را به دست آورید. برای این کار از چه

رابطه ای استفاده می کنید؟
به کمک رابطه فیثاغورس در مثلث مقابل

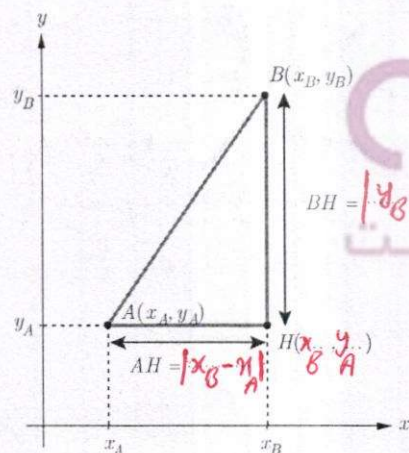
$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

۳ در شکل مقابل :

الف) مختصات نقطه H را بنویسید.

ب) طول پاره خط های AH و BH را مشخص کنید و روی شکل بنویسید.

پ) طول AB را به کمک قضیه فیثاغورس به دست آورید.



$$BH = |y_B - y_A|$$

$$AH = |x_B - x_A|$$

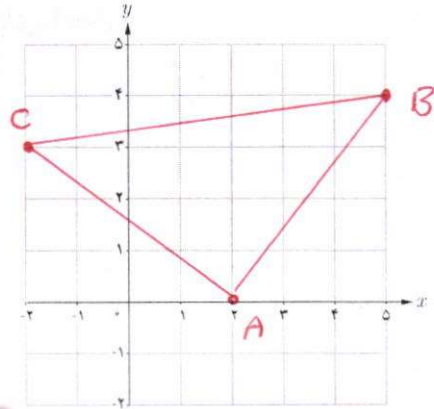
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

یا توجه به فعالیت قبل می توان گفت :

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \text{ با } A(x_A, y_A) \text{ و } B(x_B, y_B) \text{ برابر است}$$

کار در کلاس

۱ نقاط $A(2,0)$ ، $B(5,4)$ و $C(-2,3)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه مختصات مشخص کنید.



الف) محیط مثلث ABC را با محاسبه طول اضلاع آن به دست آورید.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$AC = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$P = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$$

ب) ABC چه نوع مثلثی است؟ $5^2 + 5^2 = (5\sqrt{2})^2 \rightarrow 50 = 50$

پ) به دو روش نشان دهید ABC یک مثلث قائم الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

$$S = \frac{1}{2}(5)(5) = \frac{25}{2} \quad m_{AC} \cdot m_{AB} = -1$$

۲ در یکی از جاده‌های کشور تصادفی رخ داده است. پایگاه‌های امداد هوایی که به محل تصادف نقشه مرکز امداد به صورت $P(50, 30)$ است. پایگاه‌های امداد هوایی که به محل تصادف نزدیک‌اند، در نقاط $A(10, -20)$ و $B(80, 90)$ واقع‌اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگرد امداد به محل حادثه پیشنهاد می‌کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند).



$$PA = \sqrt{(50-10)^2 + (30+20)^2} = 10\sqrt{61} \quad PB = \sqrt{(50-80)^2 + (30-90)^2} = 10\sqrt{65}$$

الف) فاصله نقطه $N(-6, 8)$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

ب) فاصله نقطه $E(x_E, y_E)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

$$NO = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$$

$$EO = \sqrt{(x_E - 0)^2 + (y_E - 0)^2} = \sqrt{x_E^2 + y_E^2}$$

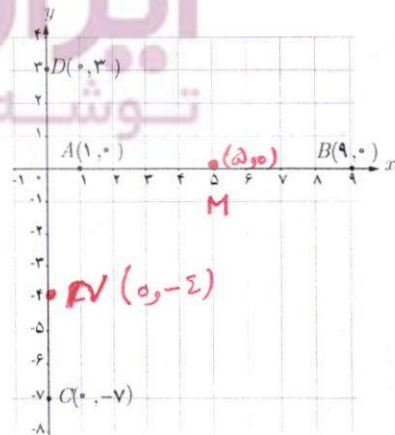
مختصات نقطه وسط پاره خط

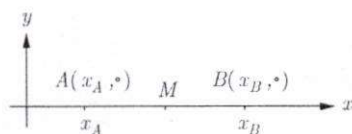
فعالیت

این شکل را در نظر بگیرید.

الف) نقطه وسط پاره خط AB را M بنامید. M را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

ب) نقطه وسط پاره خط CD را N بنامید و N را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.



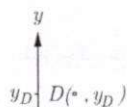


ب) مطابق شکل، A و B دو نقطه دلخواه روی محور x ها هستند. اگر M وسط AB باشد، طول نقطه M را به دست آورید.

$$AB \text{ وسط } M \Rightarrow AM = MB$$

$$\Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$\Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$



ت) در شکل مقابل، C و D دو نقطه دلخواه روی محور y ها هستند. اگر N وسط CD باشد، عرض نقطه N را بیابید.

$$CD \text{ وسط } N \Rightarrow CN = ND$$

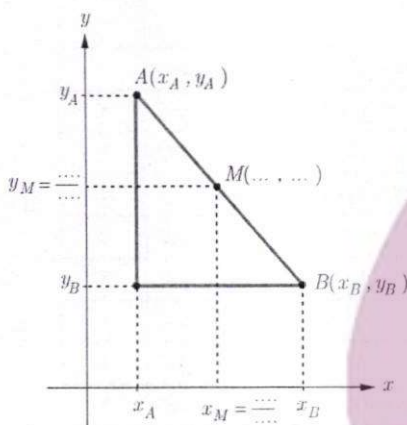
$$\Rightarrow y_N = \frac{y_C + y_D}{2}$$

$$\Rightarrow y_N - y_C = y_D - y_N$$

$$\Rightarrow 2y_N = y_C + y_D$$

ث) اگر A و B دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند و M نقطه وسط AB ، آنگاه با توجه به شکل مقابل می توان نشان داد:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \text{ عبارت است از مختصات نقطه وسط پاره خط } AB$$



کار در کلاس

۱) مثلث با رأس های $A(1, 9)$ ، $B(3, 1)$ و $C(7, 11)$ را در نظر بگیرید و آن را در دستگاه مختصات مقابل مشخص کنید.

الف) مختصات M ، نقطه وسط ضلع BC را مشخص کنید.

ب) طول میانه AM را محاسبه کنید.

پ) معادله میانه AM را به دست آورید.

$$m_{AM} = \frac{9-6}{1-5} = -\frac{3}{4} \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{29}{4} \quad \text{معادله } AM$$

۲) الف) نقطه $N(5, -4)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه A و $B(7, -2)$ است. مختصات نقطه A را بیابید.

ب) قرینه نقطه $C(1, 2)$ نسبت به نقطه $M(-1, 4)$ را به دست آورید.

پ) قرینه نقطه $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات را به دست آورید.

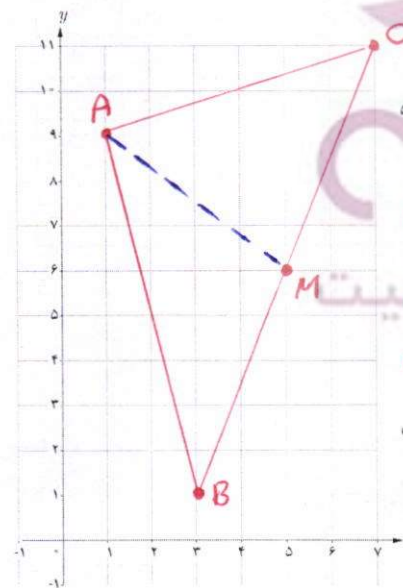
ب) قرینه نقطه $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات را به دست آورید.

$$P'(-\alpha, -\beta)$$

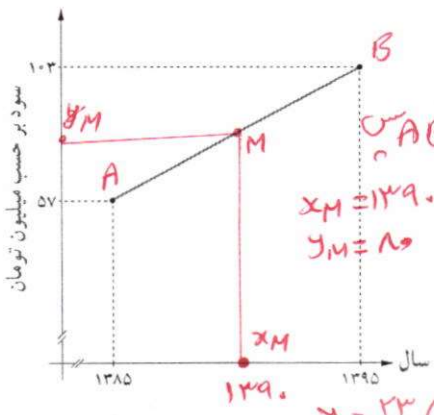
$$x_M = \frac{x_C + x_D}{2} \rightarrow -1 = \frac{1 + x_D}{2} \rightarrow x_D = -3$$

$$y_M = \frac{y_C + y_D}{2} \rightarrow 4 = \frac{2 + y_D}{2} \rightarrow y_D = 6$$

$$\therefore D(-3, 6)$$



نقطه D را قرینه ی نقطه C نسبت به نقطه M می بینیم



۲ سود سالانه یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. به کمک رابطه نقطه وسط پاره خط، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) میانگین سود سالانه این شرکت در دهه مورد نظر چقدر بوده است؟
 ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ) اگر سود سالانه در طول یک دهه آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

ب کمک معادله خط AB

$$m_{AB} = \frac{103 - 57}{1395 - 1385} = \frac{46}{10} = \frac{23}{5}$$

$$y = \frac{23}{5}(x - 1385) + 57$$

فاصله نقطه از خط Δ $x = 1405$ $y = 129$ $x = 1390$ $y = 80$

اگر A نقطه ای خارج خط L باشد، فاصله نقطه A تا خط L برابر است با طول پاره خطی که از A عمود بر L رسم می شود. در اینجا می خواهیم با داشتن مختصات نقطه A و معادله خط L این فاصله را محاسبه کنیم.

مثال: فاصله نقطه $A(7, 5)$ را از خط L به معادله $4x + 3y = 18$ به دست آورید.

حل: چون شیب خط L برابر $-\frac{4}{3}$ است، پس هر خط عمود بر آن دارای شیب $\frac{3}{4}$ خواهد بود. معادله خط Δ گذرنده از A و عمود بر L را می نویسیم.

$$\Delta: y = \frac{3}{4}x + h$$

$$\text{روی } \Delta \text{ است } A(7, 5): 5 = \frac{3}{4}(7) + h \Rightarrow h = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta \text{ معادله: } y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta: 3x - 4y = 1$$

اگر معادله دو خط L و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطه P ، محل برخورد دو خط به دست می آید.

$$\begin{cases} L: 4x + 3y = 18 \\ \Delta: 3x - 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 2 \Rightarrow P(3, 2)$$

طول پاره خط AP جواب مسئله است.

$$AP = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(7 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

با به کارگیری مراحل حل این مثال در حالت کلی می توان ثابت کرد^۱:

فاصله نقطه $A(x, y)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

حال مثال قبل را به کمک این رابطه حل می کنیم؛ یعنی فاصله $A(7, 5)$ را از خط به معادله $4x + 3y - 18 = 0$ به دست می آوریم:

$$d = \frac{|4(7) + 3(5) - 18|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|25|}{5} = 5$$

۱- ارائه اثبات این فرمول در کلاس، مورد نظر نمی باشد.

۱ فاصله نقطه $P(7, -4)$ را از هر یک از خطوط با معادله های زیر به دست آورید :

الف) $L: 2x + y = 5$ ب) $T: x = 5$ ج) $\Delta: y = 0$

۲ خط $L: 3x - 4y = 0$ بر دایره ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید. (راهنمایی : خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است).

تمرین

۱ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

$L: 2x - y = 1$ $T: y = 2x - 3$ $\Delta: x + 2y = 0$

۲ دو نقطه $A(14, 3)$ و $B(10, -13)$ را در نظر بگیرید. فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به دست آورید.

۳ نشان دهید مثلث با رأس های $A(1, 2)$ ، $B(2, 5)$ و $C(4, 1)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.

۴ دو انتهای یکی از قطرهای دایره ای نقاط $A(2, -2)$ و $B(6, 4)$ هستند.

الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه $C(7, 3)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۵ نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-1, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند.

مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرهای منصف یکدیگرند، آیا می توانید راه حل کوتاه تری برای مسئله ارائه کنید؟)

۶ یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین محکم

شده است؛ به طوری که فاصله هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا پای میله. مختصات نقطه D را به دست آورید.

۷ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس

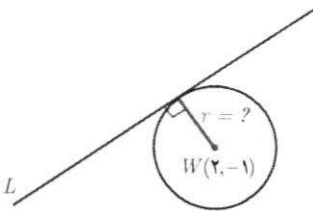
این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

۸ الف) نشان دهید دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ با

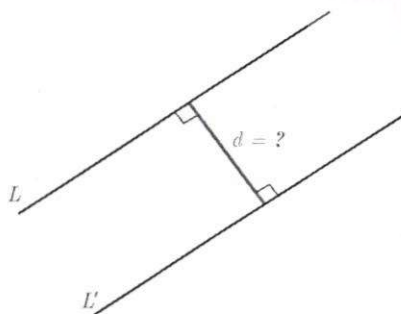
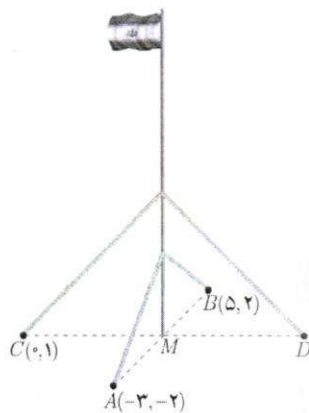
یکدیگر موازی اند.

ب) فاصله این دو خط را محاسبه کنید. (راهنمایی : یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در

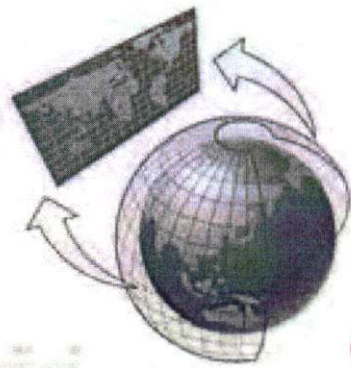
نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید).



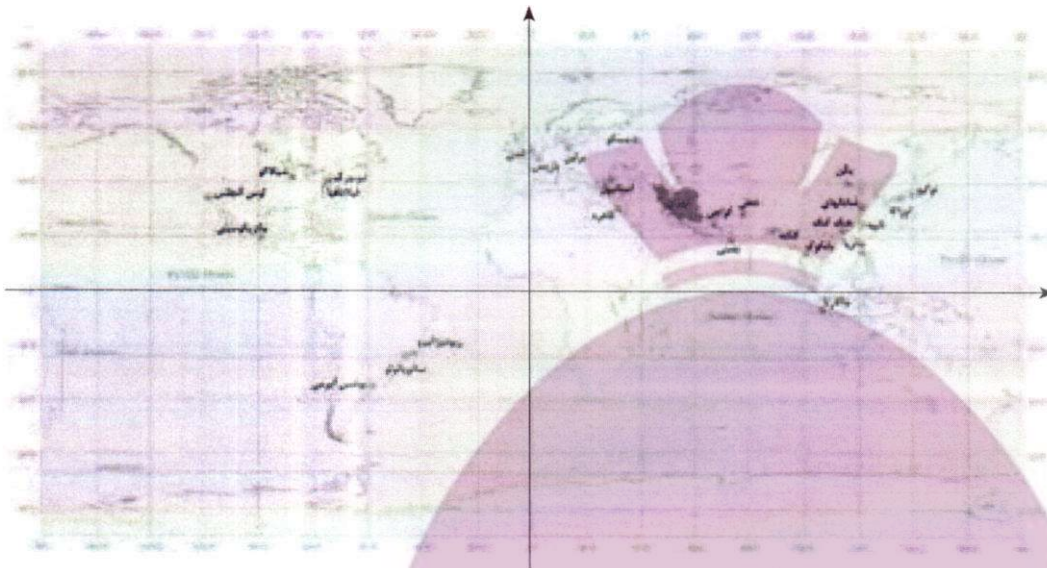
کاربرد



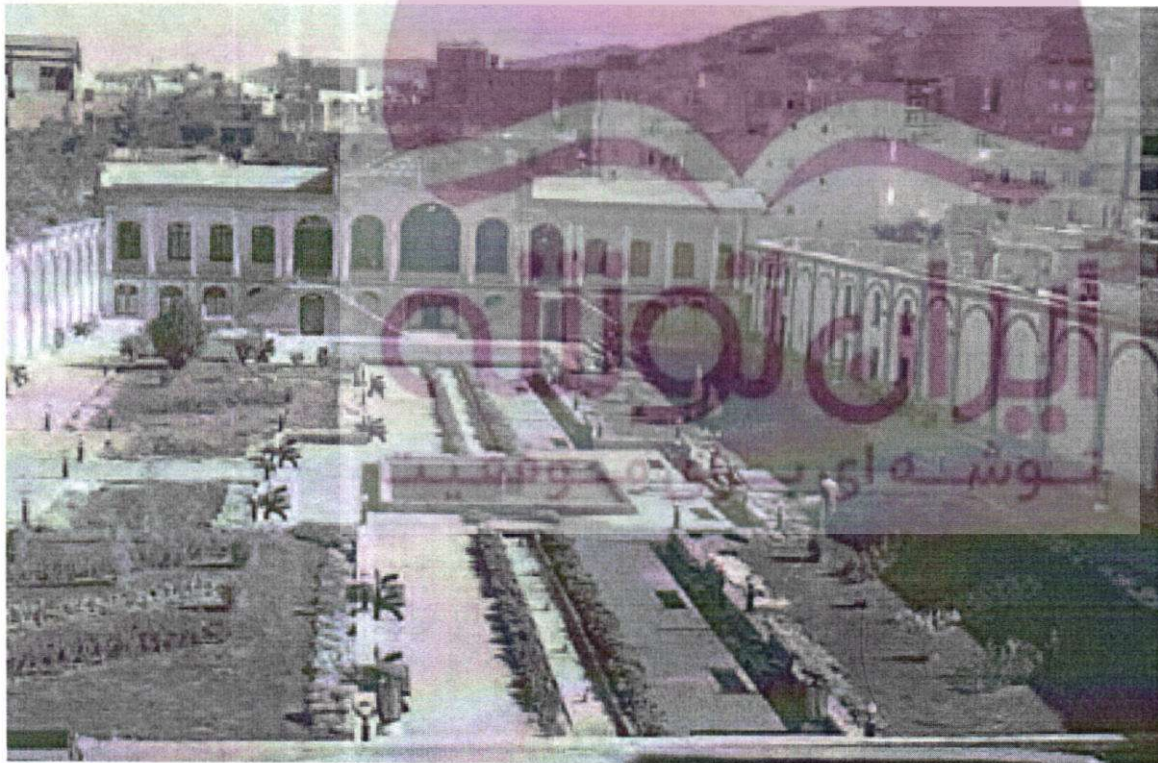
۹ طول جغرافیایی تبریز تقریباً 46° درجه شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود 38° درجه شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به‌طور خلاصه، به صورت $(46, 38)$ نشان دهیم. این اطلاعات دربارهٔ چابهار به صورت $(61, 25)$ است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر 110 کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ تقریبی این دو شهر.



حل می‌شود



آیا تاکنون به رابطهٔ طول و عرض جغرافیایی با دستگاه مختصات فکر کرده‌اید؟ در دستگاه مختصات مقابل، کدام محور نظیر طول جغرافیایی است؟



موزه قاجار تبریز

حل کاردر کلاس صفحه ی ۹ (ریاضی ۲)

$$P(۷, -۴) : ۱$$

(الف)

$$L: ۲x + y = ۵ \rightarrow ۲x + y - ۵ = ۰$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(۲)(۷) + (۱)(-۴) + (-۵)|}{\sqrt{(۲)^2 + (۱)^2}} = \frac{|۱۴ - ۴ - ۵|}{\sqrt{۴ + ۱}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

(ب)

$$T: x = ۵ \rightarrow x + ۰y - ۵ = ۰$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(۱)(۷) + (۰)(-۴) + (-۵)|}{\sqrt{(۱)^2 + (۰)^2}} = \frac{|۷ - ۵|}{\sqrt{۱}} = ۲$$

(پ)

$$\Delta: y = ۰ \rightarrow ۰x + y - ۰ = ۰$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(۰)(۷) + (۱)(-۴) + (۰)|}{\sqrt{(۰)^2 + (۱)^2}} = \frac{|-۴|}{\sqrt{۱}} = ۴$$

۲: خط مماس بر دایره، در نقطه ی تماس بر شعاع دایره عمود است. لذا برای تعیین اندازه ی شعاع دایره کافی است، فاصله ی مرکز دایره را تا خط مماس به دست آوریم.

$$L: ۳x - ۴y = ۰ \rightarrow ۳x - ۴y + ۰ = ۰$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(۳)(۲) + (-۴)(-۱) + (۰)|}{\sqrt{(۳)^2 + (-۴)^2}} = \frac{|۶ + ۴|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۲۵}} = ۲$$

حل تمرین های صفحه ی ۹ و ۱۰ (ریاضی ۲)

۱:

$$\begin{cases} L: 2x - y = 1 \rightarrow m_L = 2 \\ T: y = 2x - 3 \rightarrow m_T = 2 \\ \Delta: x + 2y = 0 \rightarrow m_\Delta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

لذا با توجه به شیب ها واضح است که دو خط $L \parallel T$ و $L \perp \Delta$ و $T \perp \Delta$

۲:

$$AB \text{ مختصات نقطه ی وسط } M\left(\frac{14+10}{2}, \frac{3+(-13)}{2}\right) \rightarrow M(12, -5)$$

$$MO = \sqrt{(12-0)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

۳: ابتدا اندازه های سه ضلع مثلث را تعیین می کنیم.

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

چون $AB = AC$ مثلث متساوی الساقین است و چون $BC^2 = AB^2 + AC^2$ مثلث قائم الزویه است.

لذا این مثلث متساوی الساقین قائم الزویه است.

۴: اندازه ی شعاع هر دایره نصف اندازه ی قطر آن است.

$$d = AB = \sqrt{(6-2)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$$

$$r = \frac{d}{2} = \sqrt{13}$$

مرکز هر دایره ، وسط قطره های آن است. لذا می توان مختصات مرکز را نیز به صورت زیر به دست آورد.

$$O\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) \rightarrow O(4, 1)$$

نقطه‌ی C وقتی می‌تواند روی دایره باشد که $CO = r$ باشد.

$$CO = \sqrt{(7-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

لذا این نقطه روی دایره واقع است.

روش اول :

۵:

$$m_{AB} = \frac{0-3}{-1-2} = 1$$

$$AD \text{ معادله‌ی } y = -(x-2) + 3 = -x + 5$$

$$CD \text{ معادله‌ی } y = 1(x-1) + (-2) = x-3$$

$$\rightarrow -x + 5 = x - 3 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = (x-1)-2 \rightarrow y = 1$$

روش دوم : ابتدا مختصات نقطه‌ی وسط قطر AC را تعیین می‌کنیم.

$$O\left(\frac{2+1}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) \rightarrow O\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

این نقطه وسط قطر BD نیز می‌باشد.

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{-1 + x_D}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow x_D = 4 \\ \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{0 + y_D}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow y_D = 1 \end{cases}$$

روش سوم : در هر مستطیل ، و به طور کل در متوازی الاضلاع چون قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند. لذا :

می‌توان نوشت:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow 2 + 1 = -1 + x_D \rightarrow x_D = 4$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow 3 + (-2) = 0 + y_D \rightarrow y_D = 1$$

$$\rightarrow D(4, 1)$$

۶: چون فاصله‌ی هر نقطه تا میله برابر با فاصله‌ی نقطه‌ی مقابل تا میله ، لذا چهارضلعی $ACBD$ متوازی

الاضلاع است . لذا با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$x_A + x_B = x_C + x_D \rightarrow -3 + 5 = 0 + x_D \rightarrow x_D = 2$$

$$y_A + y_B = y_C + y_D \rightarrow (-2) + 2 = 1 + y_D \rightarrow y_D = -1$$

$$\rightarrow D(2, -1)$$

۷: چون مختصات نقطه‌ی $A(3, 0)$ در معادله‌ی $y = 2x - 1$ صدق نمی‌کند. لذا این نقطه روی خط واقع

نیست. در نتیجه فاصله‌ی این نقطه تا خط برابر ضلع مربع می‌باشد.

$$L: y = 2x - 1 \rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(2)(3) + (-1)(0) + (-1)|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|6 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

پس مساحت این مربع به صورت زیر است.

$$S = d^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$$

:۸

$$5x - 12y + 8 = 0 \rightarrow m_1 = \frac{-5}{-12} = \frac{5}{12}$$

$$-10x + 24y + 10 = 0 \rightarrow m_2 = \frac{-(-10)}{24} = \frac{5}{12}$$

چون دو خط داده شده، شیب های مساوی دارند، لذا موازیند. برای تعیین فاصله ی این دو خط، کافی است، یک نقطه ی دلخواه منطبق بر یکی از این دو خط را در نظر گرفته و سپس فاصله ی آن را تا خط دیگر به دست آوریم.

$$5x - 12y + 8 = 0 \xrightarrow{y=-1} 5x + 12 + 8 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow P(-4, -1)$$

$$-10x + 24y + 10 = 0 \rightarrow m_2 = \frac{-(-10)}{24} = \frac{5}{12}$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(-10)(-4) + (24)(-1) + (10)|}{\sqrt{(-10)^2 + (24)^2}} = \frac{|40 - 24 + 10|}{\sqrt{100 + 576}} = \frac{26}{\sqrt{676}} = \frac{26}{26} = 1$$

:۹

$$AB = \sqrt{(61 - 46)^2 + (25 - 38)^2} = \sqrt{225 + 169} = \sqrt{394} = 19/85$$

$$\text{مسافت واقعی} \quad 110 \times 19/85 = 2183/5$$

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در پایه دهم روش‌های مختلفی را برای حل معادله درجه ۲ آموختیم. یکی از دلایل اهمیت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادله درجه دوم اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس سوم به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل دسته خاصی از معادله‌ها آشنا می‌شویم که یک شیوه کارآمد برای حل انواع معادله است.

مثال: معادله مقابل را حل کنید.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

حل: با وجود آنکه این معادله از نوع درجه ۴ است، می‌توان آن را به روش معادله درجه دوم حل کرد. برای این کار به جای عبارت x^2 ، متغیر (مجهول) جدیدی مثل u قرار می‌دهیم. به این کار تغییر متغیر می‌گوییم.

$$x^2 = u \Rightarrow u^2 - 10u + 9 = 0$$

این معادله را به روش کلی و همچنین به روش تجزیه حل می‌کنیم:

(روش تجزیه)

$$(u-1)(u-9)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ u=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

(روش کلی)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-10)^2 - 4(1)(9) = 64$$

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ u=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

ایران تونل

کار در کلاس

معادله‌های مقابل را حل کنید. موفقیت

الف) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

ب) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

کار در کلاس

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲

گاهی به جای مقدار دقیق ریشه‌های یک معادله درجه ۲، تنها مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد که در این صورت بدون حل

حل کاردکلاس صفحه ی ۱۱ (ریاضی ۲)

$$\text{الف) } 2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{x^2=t} 2t^2 - 7t - 4 = 0 \rightarrow (2t+1)(t-4) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2t+1=0 \rightarrow t=-\frac{1}{2} \rightarrow x^2=-\frac{1}{2} & \text{غ م} \\ t-4=0 \rightarrow t=4 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2 & \text{م} \end{cases}$$

معادله فقط دو ریشه ی حقیقی دارد.

$$\text{ب) } x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 + 3t + 2 = 0 \rightarrow (t+1)(t+2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} t+1=0 \rightarrow t=-1 \rightarrow x^2=-1 & \text{غ م} \\ t+2=0 \rightarrow t=-2 \rightarrow x^2=-2 & \text{غ م} \end{cases}$$

معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

معادله می توان این مقادیر را به دست آورد. معمولاً مجموع دو ریشه را با S و حاصل ضرب آنها را با P نمایش می دهیم! یعنی اگر α و β ریشه های معادله باشند: $\alpha + \beta = S$ و $\alpha\beta = P$.

فعالیت

$$(۱) ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

می دانیم که معادله درجه دوم در حالت کلی به صورت مقابل است:

۱) می خواهیم بررسی کنیم که چگونه می توان بدون حل این معادله درباره وجود و تعداد جواب های حقیقی آن اظهار نظر کرد.

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

مثبت

الف) در این معادله اگر ضرایب a و c هم علامت نباشند، درباره علامت Δ چه می توان گفت؟

ب) اگر a و c هم علامت نباشند، آنگاه معادله (۱) دارای $\Delta < 0$ ریشه حقیقی متمایز است.

$$3x^2 + 5x - 1 = 0$$

۲) معادله مقابل را در نظر می گیریم:

$$\Delta = 5^2 - 4(3)(-1) = 25 + 12 = 37 > 0$$

الف) توضیح دهید که چرا این معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

ب) آیا بین ضرایب معادله و مجموع ریشه ها (S) رابطه ای وجود دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، معادله را حل می کنیم:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 25 + 12 = 37 \\ \alpha &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{37}}{6} \\ \beta &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{37}}{6} \\ S = \alpha + \beta &= \frac{-5 + \sqrt{37}}{6} + \frac{-5 - \sqrt{37}}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$S = -\frac{b}{a}$$

ملاحظه می شود که:

ب) درستی نتیجه فوق را در معادله زیر هم بررسی می کنیم:

$$3x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(3x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$S = \alpha + \beta = 0 + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} = -\frac{b}{a}$$

ت) درستی نتیجه بالا را در حالت کلی ثابت می کنیم. فرض کنیم برای معادله (۱)، مقدار Δ مثبت باشد. پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز

مثل α و β دارد:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \beta &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

S - حرف اول Sum به معنای مجموع و P حرف اول Product به معنای حاصل ضرب است.

با توجه به این فعالیت می توان گفت :

اگر α و β ریشه های معادله $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) باشند، آنگاه :

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}$$

کار در کلاس

$a = -2 \quad b = 1 \quad c = 5$

در معادله $-2x^2+x+5=0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را به دست آورید.

ریشه ها
مجموع $S = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

حاصل ضرب
ریشه ها $P = \frac{c}{a} = \frac{5}{-2}$

تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از S و P

گاهی برای حل یک مسئله، لازم است برای آن معادله ای بنویسیم و سپس آن معادله را حل کنیم. در برخی موارد، این معادله درجه ۲ خواهد بود. مثلاً می خواهیم با مجموع و حاصل ضرب دو عدد، معادله درجه دومی بسازیم که آن دو عدد ریشه های معادله باشند. برای این کار فرض می کنیم آن دو عدد (ریشه های معادله)، α و β باشند. معادله مورد نظر را می توان به شکل زیر نوشت :

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Rightarrow x^2-Sx+P=0$$

بنابراین نشان دادیم که :

معادله درجه دومی که مجموع ریشه های آن S و حاصل ضرب ریشه های آن P باشد، به صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

کار در کلاس

۱ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها $1/5-$ و حاصل ضربشان -7 باشد.

۲ آیا مستطیلی با محیط 11 cm و مساحت 6 cm^2 وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.

حل : اگر ابعاد مستطیل را α و β بنامیم، داریم :

$$محیط = 11 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 11 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{11}{2} \Rightarrow \beta = \frac{11}{2} - \alpha$$

$$مساحت = 6 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 6 \Rightarrow \alpha(\frac{11}{2} - \alpha) = 6$$



الف) معادله بالا را ساده کنید و از حل آن α و β را به دست آورید.

ب) با استفاده از S و P و تشکیل یک معادله درجه دوم، این مسئله را حل کنید.

۳ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ باشند.

حل کاردکلاس صفحه ی ۱۳ (ریاضی ۲)

۱: کافی است که ابتدا یک معادله ی درجه ی دوم تشکیل دهیم و سپس ریشه های آن را تعیین کنیم.

$$S = -\frac{3}{2} \quad \text{و} \quad P = -7$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - 7 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$\rightarrow (x-2)(2x+7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

:۲

(الف)

$$\alpha(\frac{11}{2} - \alpha) = 6 \rightarrow 2\alpha^2 - 11\alpha + 12 = 0 \rightarrow (\alpha - 4)(2\alpha - 3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \xrightarrow{\beta = \frac{11}{2} - \alpha} \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha = \frac{3}{2} \xrightarrow{\beta = \frac{11}{2} - \alpha} \beta = 4 \end{cases}$$

لذا طول این مستطیل ۴ و عرض آن $\frac{3}{2}$ می باشد.

(ب)

$$2(\alpha + \beta) = 11 \rightarrow \alpha + \beta = \frac{11}{2} \quad \text{و} \quad \alpha\beta = 6$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \frac{11}{2}x - 6 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 11x - 12 = 0$$

$$\rightarrow (x-4)(2x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=4 \rightarrow \alpha=4 \xrightarrow{\beta = \frac{11}{2} - \alpha} \beta = \frac{3}{2} \\ x=\frac{3}{2} \rightarrow \alpha=\frac{3}{2} \xrightarrow{\beta = \frac{11}{2} - \alpha} \beta = 4 \end{cases}$$

:۳

$$S = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3 \quad \text{و} \quad P = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{9-5}{4} = 1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

ماکزیم و مینیم سهمی

سهمی با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر می‌گیریم. از سال گذشته می‌دانیم که طول رأس این سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ است.

الف) اگر $a > 0$ ، آنگاه دهانه سهمی رو به بالاست و به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ کمترین (مینیم) مقدار سهمی به دست می‌آید.

ب) اگر $a < 0$ ، آنگاه دهانه سهمی رو به پایین است و به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ بیشترین (ماکزیم) مقدار سهمی حاصل می‌شود.

مثال: ماکزیم یا مینیم تابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: چون $a = -1$ منفی است، پس دهانه سهمی رو به پایین است و این سهمی ماکزیم دارد. این تابع به ازای $x = -\frac{b}{2a} = 1$ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که برابر است با $f(1) = 4$.

تذکر: همچنان که در شکل دیده می‌شود، در این مثال نقطه $(1, 4)$ رأس سهمی و نقطه ماکزیم آن است. در این حالت منظور از مقدار ماکزیم سهمی، عرض این نقطه، یعنی ۴ است.

مثال: یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره $4m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

حل: با توجه به شکل داریم: $3x + 2y = 4 \Rightarrow y = 2 - \frac{3}{2}x$ محیط پنجره

از آنجا که مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ است (چرا؟)، می‌توان نوشت:

$$S = x \cdot y + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

به جای y معادل آن را بر حسب x قرار می‌دهیم.

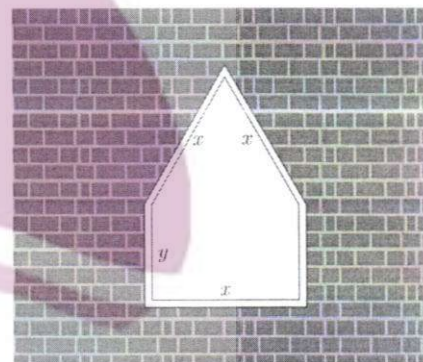
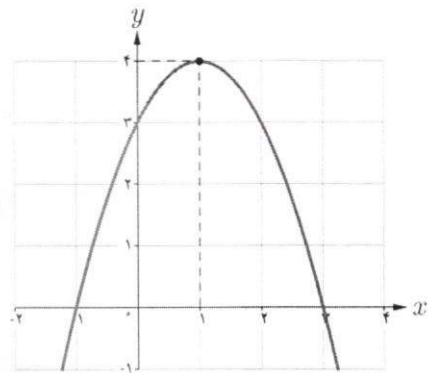
$$S = x(2 - \frac{3}{2}x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$S = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 2x$$

این تابع دارای ماکزیم است (چرا؟) و بیشترین مقدار آن به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ حاصل می‌شود.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{\frac{6-\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{6-\sqrt{3}} \approx 0.94(m)$$

$$y = 2 - \frac{3}{2}x = 2 - \frac{3}{2}(0.94) \approx 0.59(m)$$



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



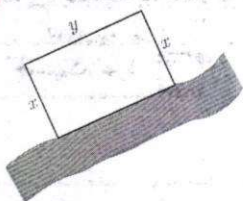
رودخانه قزل اوزن

۱ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند. سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

الف) $g(x) = -(x+1)^2 + 3$

ب) $h(x) = x^2 - 4x + 9$

۲ قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.



صفرهای تابع درجه ۲

همان گونه که می‌دانیم، نمودار هر تابع درجه دوم، یک سهمی است. به عنوان مثال فرض کنیم فوتبالیستی تویی را با زاویه ۴۵° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه 20 m/s شوت کند. معادله مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطه $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است.

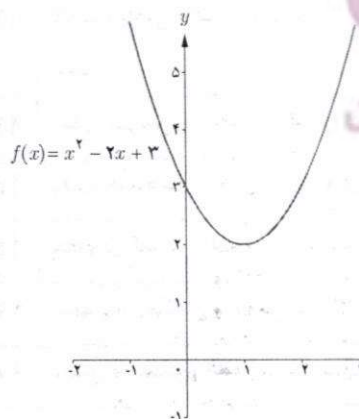
$$x_c = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-\frac{1}{40})} = 20$$

$$y_{\text{Max}} = -\frac{1}{40}(20)^2 + 20 = 10 \text{ m}$$

الف) حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.
ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟
برای آنکه طول نقاط برخورد نمودار این تابع با محور x ها را به دست آوریم، باید قرار دهیم $y=0$.

$$y=0 \Rightarrow x\left(-\frac{1}{40}x+1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=40 \end{cases}$$

این نقاط را روی نمودار نشان دهید و توضیح دهید که این اعداد از نظر فیزیکی چه معنایی می‌دهند؟ **در ابتدا و انتها ارتفاع توپ صفر می‌شود.**



نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور x ها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادله $f(x)=0$ هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.

همچنین عرض نقطه برخورد نمودار هر تابع مثل f با محور y ها، همان $f(0)$ است. به عبارت دیگر در تابع درجه ۲ با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، عدد ثابت c نشان‌دهنده محل برخورد نمودار آن با محور y هاست. به عنوان مثال، به شکل مقابل توجه کنید.

حل کاردر کلاس صفحه ی ۱۵ (ریاضی ۲)

: ۱

$$\text{الف) } g(x) = -(x+1)^2 + 3 \rightarrow g(x) = -x^2 - 2x + 2$$

سهمی رو به پایین و نقطه ی ماکزیمم دارد. $a = -1 < 0 \rightarrow$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1 \rightarrow y_{\max} = g(-1) = -(-1+1)^2 + 3 = 3$$

$$\text{ب) } h(x) = x^2 - 4x + 9$$

سهمی رو به بالا و نقطه ی مینیمم دارد. $a = 1 > 0 \rightarrow$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2 \rightarrow y_{\min} = h(2) = (2)^2 - 4(2) + 9 = 5$$

: ۲

$$2x + y = 100 \rightarrow y = 100 - 2x$$

$$\text{مساحت } S = x \times y = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$$

سهمی رو به پایین و نقطه ی ماکزیمم دارد. $a = -2 < 0 \rightarrow$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(100)}{2(-2)} = 25 \rightarrow y = 100 - 2(25) = 50$$

$$\rightarrow S_{\max} = -2(25)^2 + 100(25) = -1250 + 2500 = 1250 \text{ m}^2$$

مثال: معادله سهمی مقابل را بنویسید.

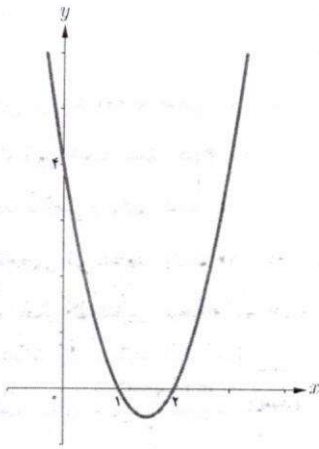
حل: با توجه به شکل دیده می شود که نمودار تابع، محور افقی را در نقاطی با طول های ۱ و ۲ قطع کرده است. پس ضابطه آن به صورت زیر است:

$$y = a(x-1)(x-2)$$

با توجه به نمودار، مقدار a را به دست می آوریم.

$$نقطه (0, 4) \text{ روی سهمی است} \Rightarrow 4 = a(0-1)(0-2) \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow y = 2(x-1)(x-2) \Rightarrow y = 2x^2 - 6x + 4$$



کارد کلاس

۱ همچنان که از سال قبل می دانیم، تعداد صفرهای تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ را به کمک علامت Δ می توان تشخیص داد. همچنین رو به بالا بودن یا رو به پایین بودن دهانه سهمی از روی علامت a مشخص می شود. جدول زیر را کامل کنید.

Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
a			
$a > 0$			
$a < 0$			

۲ درباره تابع درجه دوم f ، برای تشخیص علامت ریشه های احتمالی معادله $f(x) = 0$ می توانیم از علامت S و P کمک بگیریم. در هر یک از موارد زیر، مانند قسمت الف عمل کنید.

الف) $y = x^2 + 6x + 5$

معادله $y = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد $\Rightarrow \Delta = 16 > 0$

ریشه ها هم علامت اند $\Rightarrow P = \frac{c}{a} = 5 > 0$

هر دو ریشه منفی اند $\Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -6 < 0$

ب) $y = x^2 + 4x - 5$

معادله دو ریشه حقیقی دارد. $\Delta = 16 - 4(1)(-5) = 36$

ریشه ها مختلف علامت هستند. $P = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$

ریشه ی منفی و ریشه ی مثبت دارد. $S = -\frac{b}{a} = -4$

ب) $y = 3x^2 - 7x + 1$

ت) $y = -x^2 + 2x - 1$

معادله دو ریشه حقیقی دارد. $\Delta = (-7)^2 - 4(3)(1) = 49 - 12 = 37 > 0$

معادله ریشه ی مثبت و منفی دارد. $\Delta = (2)^2 - 4(-1)(-1) = 4 - 4 = 0$

ریشه ها هم علامت هستند. $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$

در این جدول محور ها رسم نشده است. $P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{-1} = +1$

هر دو ریشه مثبت هستند. $S = -\frac{b}{a} = \frac{7}{3}$

$S = -\frac{2}{-1} = 2$

۳ هرگاه نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن علامت ضرایب a ، b و c را مشخص کنیم. به عنوان مثال نمودار تابع f از مجموعه توابع داده شده زیر را در نظر می‌گیریم:

— دهانه سهمی رو به بالا است؛ پس a مثبت است.

— نمودار تابع f محور y را در قسمت منفی ها قطع کرده است؛ پس c منفی است.

— رأس سهمی در ربع چهارم قرار گرفته که در آن مقادیر x مثبت اند؛ پس:

$$\frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow b < 0$$

توجه داریم که باتوجه به نمودار، مجموع دو ریشه عددی مثبت است (چرا؟) و از این مطلب هم می‌توان منفی بودن علامت b را نتیجه گرفت.

خلاصه این اطلاعات در جدول بعد آمده است. جدول را کامل کنید.



ویژگی	تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a		+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-
b		-	+	+	-	+	+	+	+	+	-	-	+
c		-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+
تعداد ریشه‌ها	دو	۲	۲	۲	۲	۲	۱	۱	دو	۲	۱	فاقد ریشه	۱
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت	+	+	+	+	+	+	+	یکی منفی یکی صفر	+	-	ریشه ندارد	۰

۱ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 8x + 8 = 0$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۲ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1 - \sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{2}$ باشد.

۳ مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه‌های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

۴ راکتی که به طور عمودی روبه بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله آن به صورت مقابل است.

$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

الف) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟
ب) ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

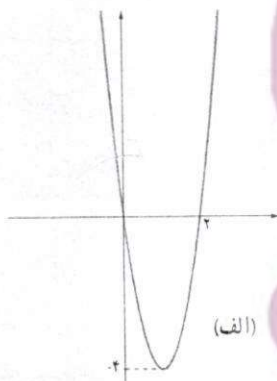
پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی‌گردد؟

۵ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم 1500 متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:

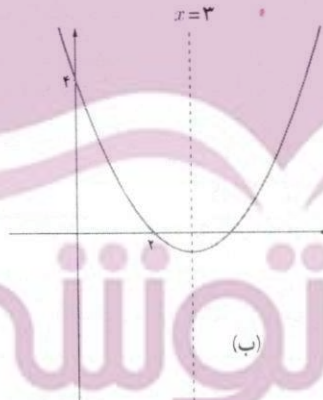
الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

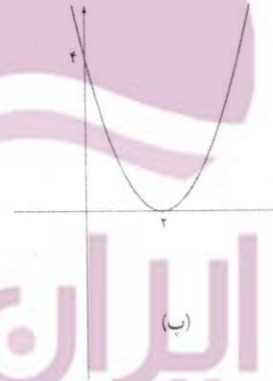
۶ معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.



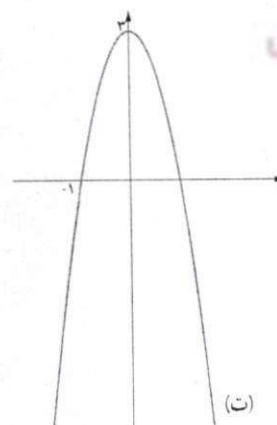
(الف)



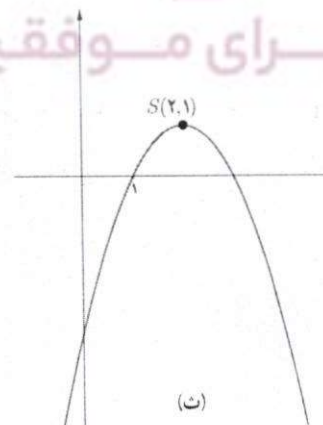
(ب)



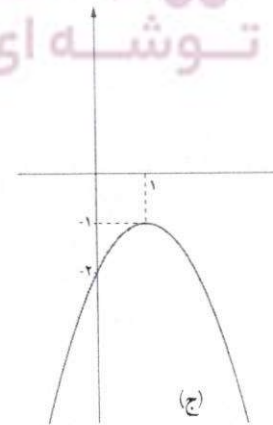
(ب)



(ت)



(ث)



(ج)

حل تمرین صفحه ی ۱۸ (ریاضی ۲)

: ۱

$$\text{الف) } x^4 - 8x^2 + 8 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 8t + 8 = 0$$

$$\Delta = 64 - 32 = 32 \rightarrow \begin{cases} t = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{2} = 4 + 2\sqrt{2} \\ t = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rightarrow x^2 = 4 + 2\sqrt{2} \rightarrow x = \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \\ \rightarrow x^2 = 4 - 2\sqrt{2} \rightarrow x = \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \end{cases}$$

معادله چهار ریشه ی حقیقی دارد.

$$\text{ب) } 4x^6 + 1 = 5x^3 \rightarrow 4x^6 - 5x^3 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{x^3=t} 4t^2 - 5t + 1 = 0 \rightarrow (t-1)(4t-1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} t=1 \rightarrow x^3=1 \rightarrow x=1 \\ t=\frac{1}{4} \rightarrow x^3=\frac{1}{4} \rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

معادله دو ریشه ی حقیقی دارد.

: ۲

$$S = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \quad \text{و} \quad P = (1 + \sqrt{2}) \times (1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

: ۳

$$\text{الف) } f(x) = -2x^2 + 8x - 5$$

سهمی رو به پایین و نقطه ی ماکزیمم دارد. $a = -2 < 0 \rightarrow$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(8)}{2(-2)} = 2 \rightarrow y_{\max} = f(2) = -(2)^2 + 8(2) - 5 = 7$$

$$\text{ب) } g(x) = 3x^2 + 6x + 5$$

سهمی رو به بالا و نقطه ی مینیمم دارد. $a = 3 > 0 \rightarrow$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(6)}{2(3)} = -1 \rightarrow y_{\min} = g(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 2$$

: ۴

$$h(t) = 100t - 5t^2, \quad t \geq 0$$

الف: معادله‌ی حرکت راکت سهمی است. در این سهمی $a = -5 < 0$ لذا سهمی روبه پایین و دارای نقطه‌ی

ماکزیمم است. زمانی راکت به بالاترین ارتفاع خود می‌رسد که $t = \frac{-b}{2a}$ (طول نقطه ماکزیمم) باشد.

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-5)} = 10 \text{ s}$$

ب: ارتفاع نقطه‌ی اوج راکت، همان عرض نقطه‌ی ماکزیمم است.

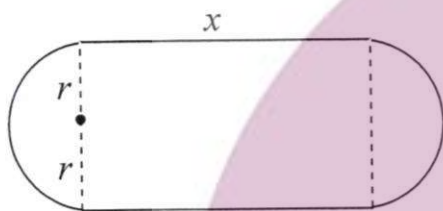
$$y_{\max} = h(10) = 100(10) - 5(10)^2 = 1000 - 500 = 500$$

پ: کافی است معادله‌ی $h(t) = 0$ را حل کنیم.

$$100t - 5t^2 = 0 \rightarrow t(100 - 5t) = 0 \rightarrow t = 0, \quad t = 20$$

پس از ۲۰ ثانیه راکت به زمین باز می‌گردد.

: ۵



$$x + x + 2\pi r = 1500 \rightarrow x + \pi r = 750 \rightarrow x = 750 - \pi r$$

الف:

$$S = x(2r) \rightarrow S = (750 - \pi r)(2r) = 1500r - 2\pi r^2$$

چون $a = -2\pi < 0$ لذا سهمی رو به پایین بوده و دارای نقطه‌ی max است.

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-1500}{2(-2\pi)} = \frac{375}{\pi} \xrightarrow{\pi \approx 3} r = 125 \text{ m}$$

$$\rightarrow S_{\max} = 1500(125) - 2(3)(125)^2 = 187500 - 93750 = 93750 \text{ m}^2$$

ب:

$$S = x(2r) + \pi r^2 \rightarrow S = (750 - \pi r)(2r) + \pi r^2 = 1500r - \pi r^2$$

چون $a = -\pi < 0$ لذا سهمی رو به پایین بوده و دارای نقطه‌ی max است.

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-1500}{2(-\pi)} = \frac{750}{\pi} \xrightarrow{\pi \approx 3} r = 250 \text{ m}$$

$$\rightarrow S_{\max} = 1500(250) - (3)(250)^2 = 375000 - 187500 = 187500 \text{ m}^2$$

: ۶

$$y = ax^2 + bx + c \text{ معادله ی سهمی}$$

الف :

$$(0,0) \rightarrow 0 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 0$$

$$(2,0) \rightarrow 0 = 4a + 2b + 0 \rightarrow 2a + b = 0$$

سهمی متقارن است. لذا طول رأس سهمی برابر $x_0 = \frac{0+2}{2} = 1$. پس با توجه به شکل مشخص است که

نقطه ی $(1, -4)$ رأس سهمی است. در نتیجه

$$(1, -4) \rightarrow -4 = a + b + 0 \rightarrow a + b = -4$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = -4 \end{cases} \rightarrow a = 4, \quad b = -8$$

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y = 4x^2 - 8x \text{ معادله ی سهمی}$$

ب :

$$(0,4) \rightarrow 4 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 4$$

$$(2,0) \rightarrow 0 = 4a + 2b + 4 \rightarrow 2a + b = -2$$

پس با توجه به شکل مشخص است که نقطه ی $x = 3$ طول رأس سهمی است. در نتیجه

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow 3 = \frac{-b}{2a} \rightarrow 6a + b = 0$$

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \rightarrow a = \frac{1}{2}, \quad b = -3$$

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \text{ معادله ی سهمی}$$

پ :

$$(0,4) \rightarrow 4 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 4$$

$$(2,0) \rightarrow 0 = 4a + 2b + 4 \rightarrow 2a + b = -2$$

پس با توجه به شکل مشخص است که نقطه ی $x = 2$ طول رأس سهمی است. در نتیجه

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow 2 = \frac{-b}{2a} \rightarrow 4a + b = 0$$

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \rightarrow a = 1, \quad b = -4$$

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y = x^2 - 4x + 4 \text{ معادله ی سهمی}$$

ت :

$$(0, 3) \rightarrow 3 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 3$$

$$(-1, 0) \rightarrow 0 = a - b + 3 \rightarrow a - b = -3$$

پس با توجه به شکل مشخص است که نقطه‌ی $x = 0$ طول رأس سهمی است. در نتیجه

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow 0 = \frac{-b}{2a} \rightarrow b = 0$$

$$a - b = -3 \xrightarrow{b=0} a = -3$$

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y = -3x^2 + 3$$

ث :

$$(1, 0) \rightarrow 0 = a + b + c$$

$$S(2, 1) \rightarrow 1 = 4a + 2b + c$$

$$\times (-1) \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a - b - c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \rightarrow 3a + b = 1$$

پس با توجه به شکل مشخص است که نقطه‌ی $x = 2$ طول رأس سهمی است. در نتیجه

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow 2 = \frac{-b}{2a} \rightarrow 4a + b = 0$$

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \rightarrow a = -1, b = 4$$

$$a + b + c = 0 \xrightarrow{a=-1, b=4} -1 + 4 + c = 0 \rightarrow c = -3$$

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y = -x^2 + 4x - 3$$

ج :

$$(0, -2) \rightarrow -2 = 0 + 0 + c \rightarrow c = -2$$

$$(1, -1) \rightarrow -1 = a + b - 2 \rightarrow a + b = 1$$

پس با توجه به شکل مشخص است که نقطه‌ی $x = 1$ طول رأس سهمی است. در نتیجه

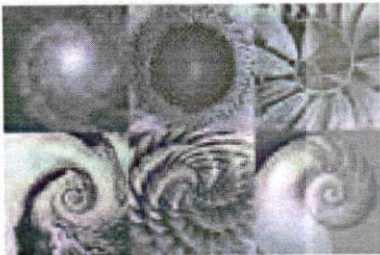
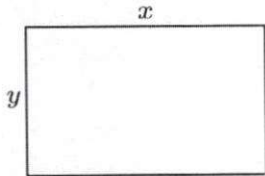
$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow 1 = \frac{-b}{2a} \rightarrow 2a + b = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \rightarrow a = -1, b = 2$$

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y = -x^2 + 2x - 2$$

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

معادلات گویا



در برخی از اجزای بدن انسان، در بعضی گیاهان و همچنین در باره‌ای از بناها و آثار هنری رد پای عدد طلایی مشاهده می‌شود. تحقیقی در این زمینه انجام دهید و گزارش آن را در کلاس ارائه کنید.



ارگ تاریخی بم



صفحه‌ای از کتاب ریاضی دوم دبستان

مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند داشته باشیم: $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$. نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلایی می‌گویند. مثال: عرض مستطیل را $y=1$ در نظر می‌گیریم تا مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنیم:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

با ضرب دو طرف این معادله در x می‌توان آن را از حالت کسری خارج کرد (یا به طور معادل در اینجا حاصل ضرب طرفین را مساوی حاصل ضرب وسطین قرار می‌دهیم):

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به عدد طلایی معروف است که مقدار تقریبی آن $1/618$ می‌باشد؛ این عدد از دوران باستان مورد توجه بوده است.

از کلاس اول ابتدایی که با معادلاتی به شکل $\square + 2 = 5$ مواجه شدیم، تقریباً همیشه درگیر حل معادله بوده‌ایم! گاهی به معادلاتی مانند $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ برمی‌خوریم که در آنها مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چند جمله‌ای) قرار دارد. چنین معادلاتی را معادلات گویا می‌نامیم. همان‌طور که دیدیم:

برای حل یک معادله گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب‌های به دست آمده نباید مخرج کسرهای صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادله اولیه صدق کنند.

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x} \quad (1)$$

۱ معادله مقابل را حل کنید.

الف) ابتدا در صورت امکان مخرج کسرها را به حاصل ضرب عامل های اول تجزیه می کنیم:

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} \quad (2)$$

ب) در مخرج ها سه نوع عامل اول متمایز وجود دارد x ، $(x+1)$ و $(x-1)$ که بزرگ ترین توان هر کدام از آنها برابر ۱ است؛ پس کم م مخرج ها عبارت است از $x(x-1)(x+1)$

پ) طرفین معادله (۲) را در $x(x-1)(x+1)$ ضرب می کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود.

$$x(x-1)(x+1) \left[\frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)} \right] = x(x-1)(x+1) \left[\frac{2-x}{x(x-1)} \right] \Rightarrow 2x^2 + 2x(x-1) = (x+1)(2-x)$$

ت) پس از ساده کردن، معادله $5x^2 - 3x - 2 = 0$ حاصل می شود.

ث) برای معادله درجه دوم اخیر، مقدار Δ را به دست آورید و معادله را حل کنید. آیا هر دو جواب به دست آمده مورد قبول اند؟ چرا؟

مخرج را صفر کند. $\rightarrow$ $x=1$ و $x=-\frac{2}{5}$
 $(x-1)(5x+2)=0$

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین المللی امام خمینی (ره) متصل می کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه ها طی می کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت متوسط قطار 10 km/h کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبه طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

نشان دهیم $t = \frac{70}{v}$
 زمان برگشت $t = \frac{70}{v-10}$



الف) توضیح دهید، چرا زمان رفت از رابطه $\frac{60}{v}$ به دست می آید؟

ب) عبارتی بر حسب v بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد.

پ) توضیح دهید که چرا معادله $\frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{2}$ برقرار است.

ت) طرفین این معادله را در کم م مخرج ها ضرب کنید تا به یک معادله درجه دوم تبدیل شود.

ث) از حل معادله حاصل، سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن زمان رفت و زمان برگشت قطار را به دست آورید.

$$2v(v-10) \times \frac{60}{v-10} = 2v(v-10) \times \left(\frac{70}{v} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\rightarrow 120/v = 120/v - 1200 + v^2 - 10v$$

$$v^2 - 10v - 1200 = 0 \quad (v-40)(v+30) = 0 \quad v = 40 \text{ km/h}$$

۱) معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به دست آمده مورد قبول هستند؟

الف) $\frac{3}{x^2} - 12 = 0$

ب) $\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$

پ) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$

۲) دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می‌کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفته اول به صورت زیر بود:

$$\frac{36}{5} = 7 \frac{1}{5}$$

او از هفته ششم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شد. می‌خواهیم بدانیم از هفته ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمره ۹ گرفته است. برای حل مسئله می‌توان به روش زیر عمل کرد:

الف) اگر تعداد آزمون‌ها از هفته ششم به بعد برابر n باشد، مجموع امتیازات او در این مدت $9n$ خواهد شد. عبارتی کسری بر حسب n بنویسید که نشان‌دهنده میانگین امتیاز تمام آزمون‌های ریاضی هفتگی آرمان باشد.

$$\frac{9n + \dots}{5 + \dots}$$

ب) کسر مربوط به قسمت الف را برابر ۸ قرار دهید و n را بیابید. سپس جواب به دست آمده را امتحان کنید.

مثال: اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟
حل: ماشین سریع‌تر را A و دیگری را B می‌نامیم. فرض کنیم t مدت زمانی باشد که ماشین A به تنهایی قادر است کل کار را انجام دهد. جدول زیر را کامل کنید.

ماشین	زمان انجام کل کار	مقداری از کار که در ۱ ساعت قابل انجام است.
A	t	$\frac{1}{t}$
B	$2t$	$\frac{1}{2t}$
A و B با هم	4	$\frac{1}{4}$

با توجه به جدول، معادله زیر را می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{2t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{6}{3} = 2$$

زمان ماشین A

$$\Rightarrow 2t = 4$$

زمان ماشین B

حل تمرین صفحه ی ۲۱ (ریاضی ۲)

: ۱

$$\text{الف)} \quad \frac{3}{x^2} - 12 = 0 \rightarrow \frac{3}{x^2} = 12 \rightarrow 12x^2 = 3 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2 + 2k}$$

$$\text{مخرج ها} \quad \begin{cases} A = k \\ B = k + 2 \\ C = k(k + 2) \end{cases} \xrightarrow{\text{ک م م}} k(k + 2)$$

$$k(k + 2) \times \left(\frac{2}{k} - \frac{3k}{k + 2} \right) = k(k + 2) \times \left(\frac{k}{k(k + 2)} \right)$$

$$\rightarrow 2k + 4 - 3k^2 = k \rightarrow 2k^2 - k - 4 = 0 \rightarrow (k + 1)(2k - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = \frac{4}{2} \end{cases}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2} \rightarrow \frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{-12}{x^2-9}$$

$$\text{مخرج ها} \quad \begin{cases} A = x \\ B = x - 3 \\ C = (x - 3)(x + 3) \end{cases} \xrightarrow{\text{ک م م}} x(x - 3)(x + 3)$$

$$(x(x - 3)(x + 3)) \times \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} \right) = (x(x - 3)(x + 3)) \times \left(\frac{-12}{x^2 - 9} \right)$$

$$\rightarrow 3(x - 3)(x + 3) - 2x(x + 3) = -12x \rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$\rightarrow (x + 9)(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ x = 3 \text{ غ} \end{cases}$$

۲: ابتدا الگوی زیر را تشکیل می دهیم.

شماره ی آزمون	۱	۲	۳	۴	۵	۶		؟
امتیاز کسب شده	۳۶					۹		۹
میانگین	۷/۲					۹		

گیریم که آرمان در بعد از هفته ی پنجم در n آزمون شرکت کرده باشد. پس تعداد کل آزمون های آرمان برابر $n + ۵$ می شود. از طرفی کل امتیاز های کسب شده توسط او برابر $۹n + ۳۶$ خواهد شد. لذا میانگین

کل امتیاز های آرمان می شود، $\frac{۹n + ۳۶}{۵ + n}$ که طبق مسئله برابر ۸ است. پس داریم.

$$\frac{۹n + ۳۶}{۵ + n} = ۸ \rightarrow ۹n + ۳۶ = ۴۰ + ۸n \rightarrow n = ۴$$

یعنی آرمان بعد از هفته ی پنجم فقط در ۴ آزمون شرکت کرده است.

آزمون جواب :

$$۷۲ = ۳۶ + ۹(۴) = \text{تعداد کل امتیاز ها}$$

$$۹ = ۵ + ۴ = ۵ + n = \text{تعداد کل آزمون ها}$$

$$۸ = ۷۲ \div ۹ = \text{میانگین کل امتیاز ها}$$

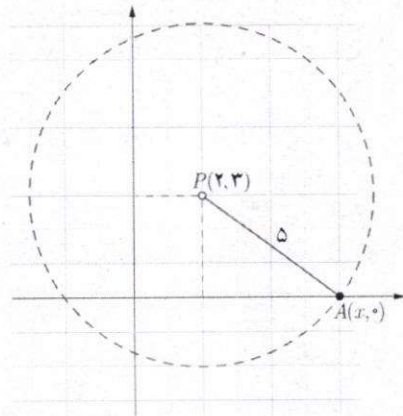
که با داده های مسئله ، همخوانی دارد، لذا راه حل درست است.

ایران توننده
توشه ای برای موفقیت

معادلات رادیکالی

فرض کنید بخواهیم نقطه‌ای را روی محور x ‌ها بیابیم که فاصله آن از نقطه $P(2, 3)$ برابر ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟ **دو جواب**

برای این کار فرض می‌کنیم مختصات نقطه مورد نظر به صورت $A(x, 0)$ باشد. مقدار x را به دست می‌آوریم.



$$AP = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (0 - 3)^2}$$

$$AP = 5 \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + 9} = 5 \quad (3)$$

معادلاتی مانند (۳) که در آن عبارت رادیکالی شامل مجهول وجود دارد، یک معادله رادیکالی نامیده می‌شود.^۱

برای حل یک معادله رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادله اولیه صدق می‌کنند.

برای حل معادله (۳) در بالا، اگر طرفین تساوی را به توان دو برسانیم، خواهیم داشت:

$$(x - 2)^2 + 9 = 25$$

$$(x - 2)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} (x - 2) = 4 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A(6, 0) \\ (x - 2) = -4 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow B(-2, 0) \end{cases}$$

تذکر: عبارت رادیکالی معادله (۳) همواره با معناست؛ چون در آن، حاصل زیر رادیکال همواره مثبت است. در این حالت می‌گوییم دامنه متغیر برابر $\mathbb{R}$ است و می‌توانیم بنویسیم $D = (-\infty, +\infty)$.

مثال: در معادله $2\sqrt{x} = \sqrt{3x - 3}$ ، دامنه متغیر به صورت $D = [1, +\infty)$ است (چرا؟). با به توان رساندن دو طرف معادله داریم:

$$4x = 3x - 3 \Rightarrow x = -3 \quad (\text{غیر قابل قبول})$$

چون جواب به دست آمده خارج از دامنه متغیر است، قابل قبول نیست. شایان ذکر است که جواب‌های درون دامنه نیز به شرطی مورد قبول اند که در معادله اصلی صدق کنند.

۱- در این کتاب، تنها معادلات رادیکالی با فرجه ۲ مورد بحث قرار می‌گیرند.

۱ معادلات زیر را مانند نمونه حل کنید. آیا تمام جواب‌های حاصل، قابل قبول اند؟

الف) $2\sqrt{2t-1}-t=1$

ب) $2x=1-\sqrt{2-x}$

$$2\sqrt{2t-1}=t+1$$

$$\sqrt{2-x}=1-2x$$

$$\Rightarrow 4(2t-1)=(t+1)^2$$

$$\Rightarrow 2-x=1+4x^2-4x$$

$$\Rightarrow t^2-6t+5=0$$

$$\Rightarrow 4x^2-3x-1=0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=5 \end{cases}$$

$$\Delta=25, x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2(4)} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

غیر قابل قبول $x=1$

پ) $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+1$

ت) $\frac{1}{\sqrt{u-3}}-\frac{2}{\sqrt{u}}=0$

ث) $2+\sqrt{2x^2-5x+2}=x$

۲ بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی اند؟

الف) $\sqrt{t}+2=0$

ب) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}+1=0$

پ) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$

۱ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=5$

ب) $\frac{10}{r}-\frac{15}{2}=\frac{20}{3r}-5$

پ) $\frac{2x}{x-3}+\frac{x+1}{x+4}=\frac{x-1}{x-3}$

ت) $\sqrt{t+4}=3$

ث) $k=\sqrt{6k-8}$

ج) $x+\sqrt{x}=6$

ح) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$

ح) $\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟



قلعه بهستان — مادنشان زنجان

۲ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه

در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به طوری که $t = \sqrt{1 - \frac{h}{50}}$.

این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۵ معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

۲۴

ایران توننه
توشه‌ای برای موفقیت

نویسنده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

حل کار در کلاس ۲۳ (ریاضی ۲)

khuzmath1394@chmail.ir

: ۱

پ) $\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1 \rightarrow (\sqrt{x+7})^2 = (\sqrt{x} + 1)^2 \rightarrow x+7 = x+2\sqrt{x}+1$

غ ق $x = -3$, $x = 3 \rightarrow x+7 = x+2\sqrt{x}+1 \rightarrow 2\sqrt{x} = 6 \rightarrow \sqrt{x} = 3 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3$

ت) $\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{u-3}} = \frac{2}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u-3} = \sqrt{u} \rightarrow 4(u-3) = u$

$\rightarrow 4u - 12 = u \rightarrow 3u = 12 \rightarrow u = 4$

ث) $2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x \rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2$

$\rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

غ ق $x = -1$, $x = 2$

: ۲

الف) عبارت $\sqrt{t}$ نامنفی است. لذا $\sqrt{t} + 2 = 0$ نمی تواند برابر صفر شود. پس معادله ی $\sqrt{t} + 2 = 0$ ریشه ی حقیقی ندارد.

ب) عبارت های $\sqrt{x-2}$ و $\sqrt{2x+3}$ نامنفی هستند. پس $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$ نمی توان صفر شود. پس معادله ی $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$ فاقد ریشه ی حقیقی است.

پ)

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1 \\ x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \end{cases}$$

چون اشتراک دامنه ها ، تهی است. لذا هیچ عدد حقیقی نمی تواند ریشه ی این معادله باشد.

حل تمرین صفحه ی ۲۱ (ریاضی ۲)

: ۱

$$\text{الف) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5 \xrightarrow{\text{م.م.ک} = x(x-2)} x(x-2) \times \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} \right) = x(x-2) \times 5$$

$$\rightarrow x-2+x = 5x^2 - 10x \rightarrow 5x^2 - 12x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 144 - 40 = 104} \begin{cases} x = \frac{12 + 2\sqrt{26}}{10} = \frac{6 + \sqrt{26}}{5} \\ x = \frac{12 - 2\sqrt{26}}{10} = \frac{6 - \sqrt{26}}{5} \end{cases}$$

$$\text{ب) } \frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5 \xrightarrow{\times 6r} 30 - 45r = 40 - 30r \rightarrow 5r = -10 \rightarrow r = -2$$

$$\text{پ) } \frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3}$$

$$\xrightarrow{\text{م.م.ک} = (x-3)(x+4)} (x-3)(x+4) \times \left(\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} \right) = (x-3)(x+4) \times \frac{x-1}{x-3}$$

$$\rightarrow 2x(x+4) + (x+1)(x+4) = (x+4)(x-1)$$

$$\rightarrow 2x^2 + 8x + x^2 + 4x + x + 4 = x^2 - x + 4x - 4$$

$$\rightarrow 2x^2 + 10x + 8 = 0 \rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \rightarrow (x+1)(x+4) = 0$$

$$\rightarrow x = -1, \quad x = -4 \quad \text{غ ق}$$

$$\text{ت) } \sqrt{t+4} = 3 \rightarrow t+4 = 9 \rightarrow t = 5$$

$$\text{ث) } k = \sqrt{6k-8} \rightarrow k^2 = 6k-8 \rightarrow k^2 - 6k + 8 = 0 \rightarrow (k-2)(k-4) = 0$$

$$\rightarrow k = 2, \quad k = 4$$

$$\text{ج) } x + \sqrt{x} = 6 \rightarrow \sqrt{x} = 6 - x \rightarrow x = 36 - 12x + x^2 \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$\rightarrow (x-4)(x-9) = 0 \rightarrow x = 4, \quad x = 9 \quad \text{غ ق}$$

$$\text{چ) } \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1 \rightarrow (\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5})^2 = (1)^2$$

$$\rightarrow x+1 - 2\sqrt{x+1} \times \sqrt{2x-5} + 2x-5 = 1$$

$$\rightarrow -2\sqrt{x+1} \times \sqrt{2x-5} = -3x+5 \rightarrow (-2\sqrt{x+1} \times \sqrt{2x-5})^2 = (-3x+5)^2$$

$$\rightarrow 4(x+1)(2x-5) = 9x^2 - 30x + 25$$

$$\rightarrow 4(x+1)(2x-5) = 9x^2 - 30x + 25 \rightarrow 8x^2 - 12x - 20 = 9x^2 - 30x + 25$$

$$\rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \rightarrow (x-15)(x-3) = 0 \rightarrow x=3, \quad x=15 \text{ غ}$$

$$\text{ج) } \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2 \rightarrow (\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}})^2 = (2)^2 \rightarrow m + 2 + \frac{1}{m} = 4$$

$$\rightarrow m + 2 + \frac{1}{m} = 4 \rightarrow m + \frac{1}{m} = 2 \rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow m = 1$$

: ۲

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{120} = \frac{1}{80} \xrightarrow{\times 240 \cdot r} 240 + 2r = 3r \rightarrow r = 240 \text{ min}$$

: ۳

$$t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{t=2} 2 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \rightarrow 4 = 10 - \frac{h}{5} \rightarrow -6 = -\frac{h}{5} \rightarrow h = 30 \text{ m}$$

: ۴

الف :

$$\sqrt{x} - x = \frac{1}{2}x \rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2}x \rightarrow x = \frac{9}{4}x^2 \rightarrow \frac{9}{4}x^2 - x = 0 \rightarrow x(\frac{9}{4}x - 1) = 0$$

$$\rightarrow x=0, \quad x=\frac{4}{9} \text{ غ}$$

ب :

$$x - \sqrt{x} = \frac{1}{2}x \rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}x \rightarrow x = \frac{1}{4}x^2 \rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x = 0 \rightarrow x(\frac{1}{4}x - 1) = 0$$

$$\rightarrow x=0, \quad x=4$$

۵ : معادله های رادیکالی متعددی می توان نوشت که ریشه های آنها $x=1$ باشد. برای مثال :

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 3$$

حل فصل ۲ ریاضی (۲) پایه یازدهم

به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

هندسه

۲

فصل



سی و سه پل، اهواز

انسان از بدو تولد ناگزیر به آشنایی با فضای هندسی و شکل های هندسی است و هندسه در طول تاریخ مشکل گشای او در جهت حل مسائل محیط پیرامونی اش بوده است. ساخت پل ها نمونه ای بارز از کارایی هندسه در زندگی روزمره انسان است.

ترسیم های هندسی

استدلال و قضیه نالس

تشابه مثلث ها

درس اول

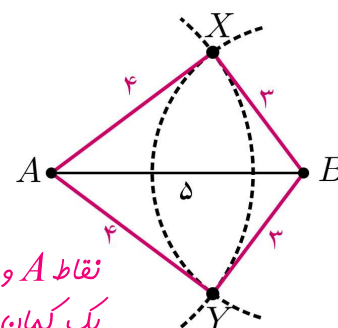
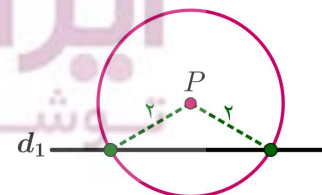
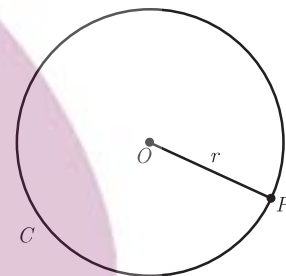
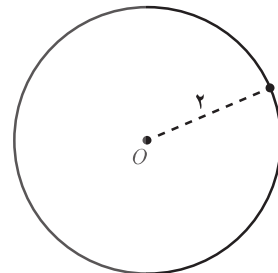
درس دوم

درس سوم

سوال ۳) در دایره $C(O, r)$ هر نقطه که فاصله آن از نقطه O کمتر از r باشد درون دایره قرار دارد و هر نقطه که درون دایره قرار داشته باشد فاصله آن از نقطه O کمتر از r است.
در دایره $C(O, r)$ هر نقطه که فاصله آن از نقطه O بیشتر از r باشد بیرون دایره قرار دارد و هر نقطه که بیرون دایره قرار داشته باشد فاصله آن از نقطه O بیشتر از r است.

درس اول

ترسیم‌های هندسی



انسان از دیرباز برای حل بسیاری از مسائل خود از ترسیم‌های هندسی کمک گرفته است. فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم مساحت تقسیم نماییم. چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟
یک میانه زمین مثلث شکل را رسم کنید زمین به دو قسمت با مساحت مساوی تقسیم می‌شود.

فعالیت

۱) یک نقطه ثابت در صفحه، مانند O را در نظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصله ثابت ۲ سانتی متر از آن هستند در نظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟ دایره ای به شعاع ۲ سانتی متر

۲) یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر بکشید و یک نقطه دلخواه روی آن در نظر بگیرید. فاصله این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟ دو سانتی متر است

نتیجه: دایره $C(O, r)$ (بخوانید دایره C به مرکز O و به شعاع r) را در نظر بگیرید. هر نقطه که از نقطه O به فاصله r باشد... دایره قرار دارد و هر نقطه که... دایره قرار دارد از نقطه O به فاصله r است.

۳) مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک بار برای نقاط داخل دایره و یک بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به دست آورید.

۴) خطی مانند d در نظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از خط d هستند مشخص کنید. این نقاط چه شکلی یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟ دو خط موازی فاصله d به

فاصله ۲ سانتی متر از خط d

۵) نقطه P به فاصله ۱ سانتی متر از خط d_1 قرار دارد.

الف) تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

۶) نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی متر کمانی دیگر رسم کنید

$$\triangle AXB: \overline{AB} = 5, \overline{AX} = 4, \overline{BX} = 3$$

$$\triangle AYB: \overline{AB} = 5, \overline{AY} = 4, \overline{BY} = 3$$

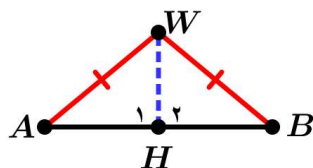
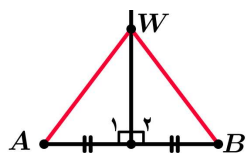
تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.

الف) اندازه اضلاع مثلث‌های AXB و AYB را مشخص کنید.

ب) توضیح دهید که چگونه می‌توانید مثلی به طول ضلع‌های داده شده ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.

نقاط A و B را به فاصله ۷ سانتی متر از هم در نظر می‌گیریم. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی متر یک کمان رسم می‌کنیم و سپس به مرکز B و به شعاع ۵ سانتی متر کمانی دیگر رسم می‌کنیم دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند C و D قطع می‌کنند. دو مثلث ACB و ADB پدید می‌آید

$$\begin{aligned} AH &= BH \\ WH &= WH \Rightarrow \triangle AHW \cong \triangle BHW \Rightarrow AW = BW \\ \hat{H}_1 &= \hat{H}_2 = 90^\circ \end{aligned}$$



برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن

۱- در شکل مقابل پاره خط AB و عمود منصف آن مشخص شده‌اند. نقطه‌ای دلخواه مانند W روی عمود منصف AB در نظر بگیرید و نشان دهید W از دوسر AB به یک فاصله است.

نتیجه ۱: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

۲- پاره خط AB و نقطه W مانند شکل مقابل به گونه‌ای قرار دارند که W از دوسر AB به یک فاصله است (یعنی $AW = BW$). نشان دهید W روی عمود منصف AB قرار دارد. راهنمایی: (از W به A و B و به وسط AB وصل کنید و با استفاده از هم‌نهستی مثلث‌ها نشان دهید W روی عمود منصف AB قرار دارد.) **نقطه وسط AB را H می‌نامیم**

$$\begin{aligned} AW &= BW \\ AH &= BH \Rightarrow \triangle AHW \cong \triangle BHW \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ WH &= WH \\ \hat{H}_1 &= \hat{H}_2, \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{aligned}$$

نتیجه ۲: هر نقطه که از دوسر یک پاره خط به فاصله یکسان باشد، **روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد**

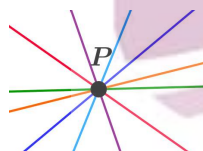
توجه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد از دوسر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دوسر آن پاره خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

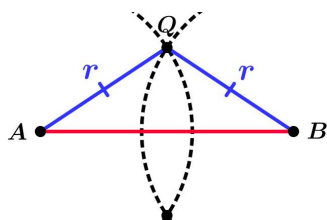
فعالیت



۱- نقطه P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید رسم کنید که از نقطه P عبور نمایند؟ **بیشمار خط می‌توان رسم کرد**

۲- دو نقطه A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه A و B عبور نمایند؟ **فقط یک خط عبور می‌کند**

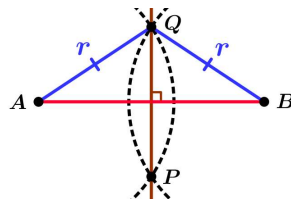
۳- به نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟ **حداقل دو نقطه از خط باید مشخص شود**



۲- آیا نقاط P و Q متعلق به عمود منصف AB هستند؟ چرا؟ **بله - چون از دو سر پاره خط AB به یک فاصله هستند**

۳- آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمود منصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟ **بله - چون برای رسم هر خط دو نقطه لازم است**

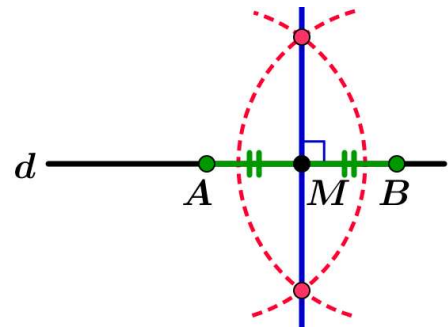
۴- حال عمود منصف AB را رسم کنید.



۱- به مرکز M و شعاع دلخواه r دایره ای رسم می کنیم مثل برقرار فط d و دایره A و B می نامیم . در نتیجه داریم $AM=MB=r$

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای روی آن

خط d و نقطه M روی آن مانند شکل مشخص شده اند. می خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.



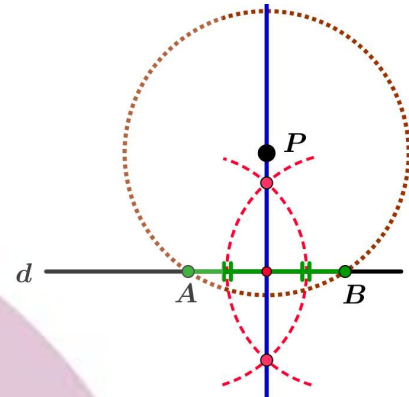
۱- به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید که $AM=MB$ باشد.

۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید. توضیح رسم عمود منصف در صفحه قبل داده شده است

۳- عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود ... و از نقطه M می گذرد.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطه P مانند شکل داده شده اند. می خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد.



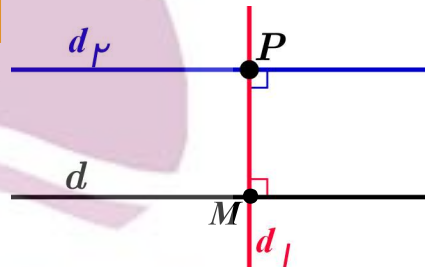
۱- به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d به گونه ای بیابید که از نقطه P به یک فاصله باشند. یک دایره به مرکز P و شعاع بیشتر از فاصله نقطه P از خط d می زنیم نقاط برقرار این دایره و

۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید. فط d همان A و B هستند

۳- آیا عمود منصف پاره خط AB از نقطه P می گذرد؟ چرا؟ دو سر پاره فط به یک فاصله است عمود منصف پاره خط AB بر خط d عمود ... و از نقطه P می گذرد.

رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطه P مانند شکل مقابل داده شده اند. می خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و با خط d موازی باشد.



۱- خط d_1 را به گونه ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲- خط d_2 را به گونه ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳- خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب در نظر بگیرید)

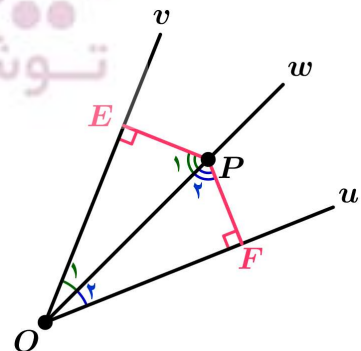
این دو فط موازی هستند. $(d \parallel d_2)$ - فرض می کنیم فط d_1 مورب است و دو فط d و d_1 را در نقاط M و P قطع می کند. تمام زوایه های ایبار شده توسط این فط مورب برابر ۹۰ درجه است چون $d \perp d_1$ و $d \perp d_2$ پس طبق عکس قضیه فطوط موازی و فط مورب این دو فط با هم موازیند

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

۱- در شکل مقابل نیم خط Ow نیمساز زاویه vOu است. فرض کنید P یک نقطه دلخواه روی Ow باشد. ثابت کنید فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه vOu یکسان است. (یعنی اگر از

نقطه P عمودهایی بر Ov و Ou رسم کنیم، طول آنها با هم برابر است.)

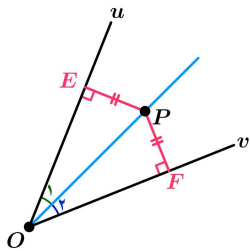
چون نیمساز OP زاویه O است پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و داریم $\hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$



نتیجه ۱: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه فاصله یکسان دارد

$$\begin{cases} \hat{O}_1 + \hat{P}_1 + \hat{E} = 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{P}_2 + \hat{F} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{P}_1 + \hat{E} = \hat{O}_2 + \hat{P}_2 + \hat{F} \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{P}_2$$

$$\begin{cases} OP = OP \\ \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \Rightarrow \triangle OPE \cong \triangle OPF \Rightarrow EP = FP$$



بنا به حالت وتر و یک ضلع
زاویه قائمه

$$\begin{cases} OP = OP \\ EP = FP \\ \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle OEP \cong \triangle OFP \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow$$

۲- در شکل مقابل فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه uOv یکسان است. نشان دهید که نقطه

P روی نیمساز زاویه قرار دارد.

راهنمایی: پاره خط OP را و دو عمود از نقطه P بر Ov و Ou رسم کنید و با استفاده از (هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویه uOv است).

نتیجه ۲: هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، روی

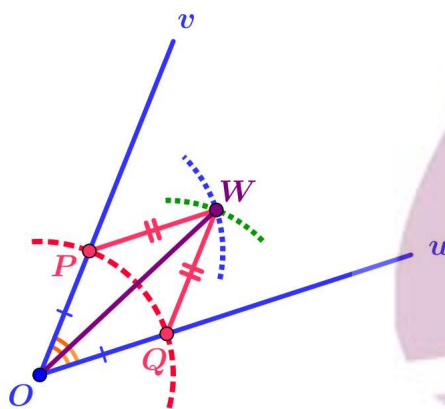
نیمساز آن زاویه است

توجه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



۳- رسم نیمساز یک زاویه

الف) زاویه uOv را در نظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم خط‌های Ov و Ou را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.

طول پاره خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟ $OP = OQ = r_1$

ب) دهانه پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره خط PQ باز کنید و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند.

طول پاره خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند؟ $PW = QW = r_2$

پ) پاره خط‌های WP ، WO و WQ را رسم کنید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ $OP = OQ$ ، $PW = QW$ ، $OW = OW$

نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ پس بنا به حالت برابری سه ضلع دو مثلث OPW و OQW هم‌نهشت هستند

اندازه زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ با هم برابرند زیرا دو مثلث هم‌نهشت هستند

پاره خط OW نیمساز زاویه uOv است.

جواب تمام تمرینات در صفحات بعد

تمرین

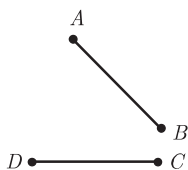
۱ الف) دو پاره خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه A

و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه D و C نیز به یک فاصله باشد.

ب) نقطه مورد نظر در قسمت الف) را O می‌نامیم. اگر نقطه O روی عمود منصف پاره خط

BC باشد و دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$

نسبت به دایره G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



جواب تمام تمرینات در صفحات بعد

۲ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمود منصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۳ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۴ فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلثی متساوی الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی متر باشد.

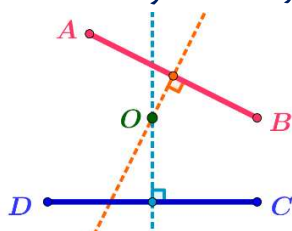
پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت الف) را داشته باشد و مساحت آن 8 cm^2 باشد.

d

• A

تمرین ۱:

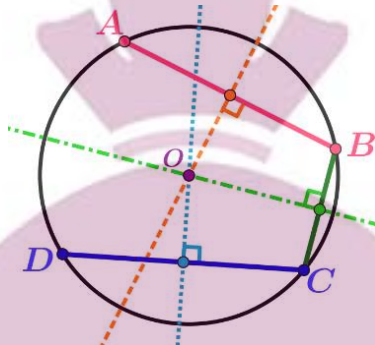
(الف) نقطه ی مورد نظر محل برخورد عمود منصف های دو پاره خط AB و CD است.



(ب) چهار نقطه A, B, C, D روی دایره G قرار خواهند داشت. زیرا: چون O روی عمود منصف AB است پس: $OA = OB$ (۱)

چون O روی عمود منصف CD است پس: $OC = OD$ (۲) چون O روی عمود منصف BC است پس: $OC = OB$ (۳)

پس طبق روابط (۱)، (۲)، (۳) خواهیم داشت: $OA = OB = OC = OD$ و چون شعاع دایره برابر OA است پس حتماً ۴ نقطه روی دایره G قرار خواهند داشت.



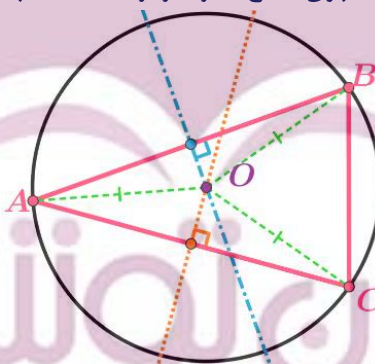
نقشه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مصلحان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

تمرین ۲: چون O روی عمود منصف AB است پس: $OA = OB$ (۱) چون O روی عمود منصف AC است پس: $OC = OA$ (۲)

پس طبق روابط (۱)، (۲) خواهیم داشت: $OA = OB = OC$ چون شعاع دایره برابر OA است پس حتماً سه نقطه روی دایره قرار خواهند داشت.

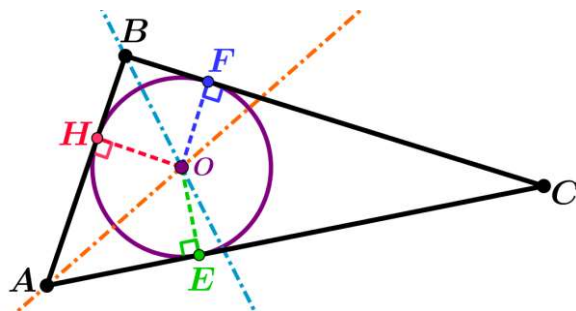


تمرین ۳:

چون O روی نیمساز زاویه A است پس: $OH = OE$ (۱) چون O روی نیمساز زاویه B است پس: $OH = OF$ (۲)

پس طبق روابط (۱)، (۲) خواهیم داشت: $OH = OE = OF$ چون شعاع دایره برابر OH است پس حتماً نقاط E, F روی دایره قرار خواهند داشت.

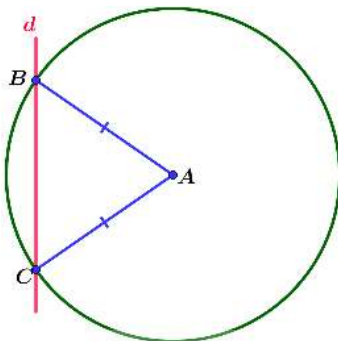
در نتیجه اضلاع مثلث ABC مماس بر دایره هستند.



تمرین ۴:

الف) دایره ای به مرکز A و شعاع r (بیشتر از ۴ باشد) می زنیم محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس های مثلث است زیرا:

$$AC = AB = r$$

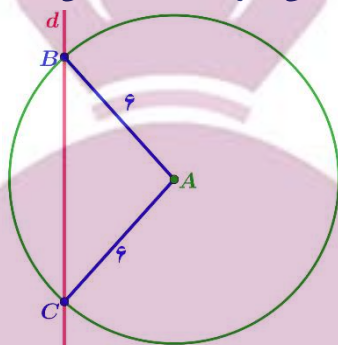


نهیہ کنندہ:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن ملمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

ب) دایره ای به مرکز A و شعاع $r = 6$ می زنیم محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس های مثلث است زیرا: $AC = AB = 6$

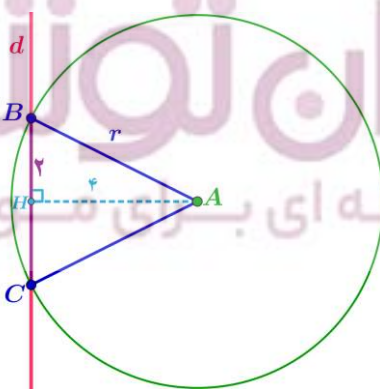


پ) چون فاصله عمودی نقطه A از خط d برابر ۴ است و این فاصله همان ارتفاع مثلث است، اگر بخواهیم مساحت این مثلث ۸ سانتی متر مربع باشد باید قاعده آن ۴ سانتی متر باشد یعنی فاصله دو نقطه B و C روی خط d برابر ۴ باشد. در نتیجه طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 \Rightarrow r^2 = (4)^2 + (2)^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow r = \sqrt{20}$$

بنابراین اگر دایره ای به شعاع $\sqrt{20}$ بزنیم و محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس های مثلث است زیرا: $AC = AB = \sqrt{20}$ این

همان مثلثی است که مساحت آن ۸ می شود. $S_{ABC} = \frac{1}{2}(4)(4) = 8$



نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید. می‌دانیم که هر دو نسبت مساوی یک تناسب تشکیل می‌دهند.

می‌دانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دوطرف یک تساوی جمع و یا تفریق کنیم، تساوی دوباره برقرار خواهد بود. همچنین اگر دوطرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم یا به یک مقدار غیرصفر تقسیم نماییم، تساوی برقرار می‌ماند. با توجه به این مطلب هریک از خواص زیر را به راحتی می‌توان ثابت کرد.

کار در کلاس

۱) با فرض اینکه تمام مخارج مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\times bd} \frac{a}{\cancel{b}} \times \cancel{bd} = \frac{c}{\cancel{d}} \times \cancel{bd} \Rightarrow ad = bc$ (طرفین وسطین)

ب) $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $ad = bc \xrightarrow{+bd} \frac{a}{\cancel{b}} \times \cancel{bd} = \frac{bc}{\cancel{d}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (تبدیل حاصل ضرب به تناسب)

پ) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\times \frac{bd}{ac}} \frac{a}{\cancel{b}} \times \cancel{bd} = \frac{c}{\cancel{d}} \times \cancel{bd} \Rightarrow \frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (معکوس کردن تناسب)

ت) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{cases}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\times \frac{d}{a}} \frac{a}{\cancel{b}} \times \frac{d}{\cancel{a}} = \frac{c}{\cancel{d}} \times \frac{d}{\cancel{a}} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ (تعویض جای طرفین با وسطین)

ث) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \\ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \end{cases}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{+1} \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ترکیب (نسبت در صورت یا مخارج)

راهنمایی: در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را

معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید.

ج) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \\ \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \end{cases}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{-1} \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ تفصیل (نسبت در صورت یا مخارج)

۳۱ ج) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} - 1 = \frac{d}{c} - 1 \Rightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c} \Rightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$

راه دوم قسمت دوم ث) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1 \Rightarrow \frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

راهنمایی: در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده، سپس از دو طرف عدد ۱ را کم کنید.

۲ با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل کنید.

$$\text{الف)} \quad \frac{5}{14} = \frac{15}{42} \Rightarrow 5 \times \frac{42}{14} = 15 \times \frac{14}{42}$$

$$\text{ب)} \quad 3 \times 40 = 12 \times 10 \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{12}{40}$$

$$\text{پ)} \quad \frac{7}{10} = \frac{21}{30} \Rightarrow \frac{10}{7} = \frac{30}{21}$$

$$\text{ت)} \quad \frac{6}{11} = \frac{18}{33} \Rightarrow \frac{6}{18} = \frac{11}{33}, \quad \frac{33}{11} = \frac{18}{6}$$

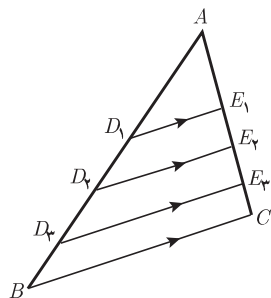
$$\text{ث)} \quad \frac{4}{14} = \frac{10}{35} \Rightarrow \frac{18}{14} = \frac{10+35}{35}, \quad \frac{4}{18} = \frac{35}{10+35}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{5}{12} = \frac{10}{24} \Rightarrow \frac{-7}{12} = \frac{-14}{24}, \quad \frac{5}{-7} = \frac{10}{-14}$$



سد باغکل — شهرستان خوانسار — استان اصفهان

استدلال، قضیه تالس و تعمیم آن



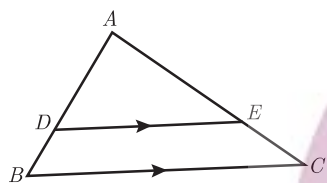
در شکل مقابل داریم: $D_1E_1 \parallel BC$ و $D_2E_2 \parallel BC$ و $D_3E_3 \parallel BC$. این اطلاعات را می‌توان به این صورت نشان داد: $D_iE_i \parallel BC$ برای $1 \leq i \leq 3$

— اندازه پاره‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرها جایگزین کنید و نسبت‌های برابر در ستون‌های متمایز را مشخص نمایید. **اندازه‌ها به میلیمتر است**

$$\frac{AD_1}{D_1B} = \frac{12}{24} \longleftrightarrow \frac{AE_1}{E_1C} = \frac{10}{20}$$

$$\frac{AD_2}{D_2B} = \frac{25}{15} \longleftrightarrow \frac{AE_2}{E_2C} = \frac{21}{9}$$

$$\frac{AD_3}{D_3B} = \frac{34}{8} \longleftrightarrow \frac{AE_3}{E_3C} = \frac{15}{4}$$



— اگر پاره خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌ها با هم برابر باشند؟

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟ **بله**

در سال‌های قبل دیدید که نمی‌توان به درست بودن نتیجه‌ای که بر اساس مشاهده چند مورد به دست آمده باشد، مطمئن بود.

این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی «از جزء به کل می‌رسیم»، استدلال استقرایی نامیده می‌شود.

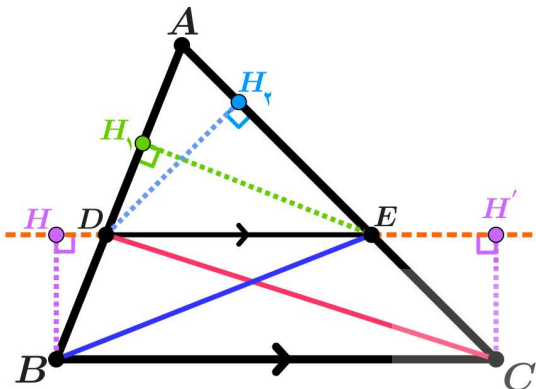
استدلال استنتاجی، استدلالی است که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

در ریاضیاتی که تاکنون خوانده‌اید، با مواردی از استدلال‌های استنتاجی مواجه شده‌اید. در ادامه با استدلال استنتاجی، نتیجه‌ای را که با استدلال استقرایی به دست آوردیم، ثابت خواهیم کرد.

$$\left. \begin{array}{l} BH \perp DE \\ CH' \perp DE \end{array} \right\} \Rightarrow BH \parallel CH' \quad , \quad \left. \begin{array}{l} BH \parallel CH' \\ BC \parallel HH' \end{array} \right\} \Rightarrow BHHC \text{ چهارضلع متوازی الاضلاع} \Rightarrow BH = CH' \quad (1)$$

فعالیت

فرض کنید مانند شکل مقابل پاره خط DE موازی ضلع BC باشد.



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

می‌خواهیم نشان دهیم: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$
از نقاط B و C برآمدن پاره خط DE عمود منتهی‌الیه عمود را به ترتیب H و H' می‌نامیم و چون $HH' \parallel BC$ است پس $* HH' \parallel BC$

۱ از نقطه D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم

$$S_{DEC} = \frac{1}{2} DE \times CH' \quad (1) \quad S_{DEB} = \frac{1}{2} DE \times BH \quad (2)$$

برابری؟ چرا؟ پس مساحت‌های برابرند. $S_{DEB} = \frac{1}{2} DE \times CH'$
۲ از نقطه E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را H_1 بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را H_2 بنامید.

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2} EH_1 \times AD}{\frac{1}{2} EH_1 \times DB} = \frac{AD}{DB}$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{1}{2} DH_2 \times AE}{\frac{1}{2} DH_2 \times EC} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}$$

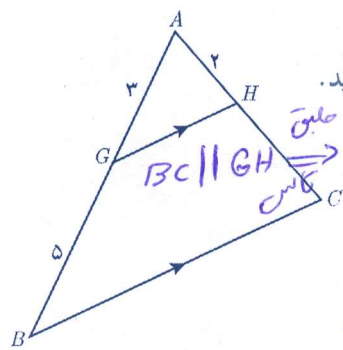
$$S_{DEB} = S_{DEC} \quad \text{چرا؟ زیرا } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (3) \text{ و } (4) \text{ نتیجه می‌شود}$$

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند، قضیه نامیده می‌شوند.

نتیجه بالا قضیه‌ای از تالس است. همان‌گونه که مشاهده کردید، رابطه بین طول‌های پاره‌خط‌هایی را که توسط خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، بر دو ضلع دیگر آن مثلث به وجود می‌آید، بیان می‌کند.

کار در کلاس

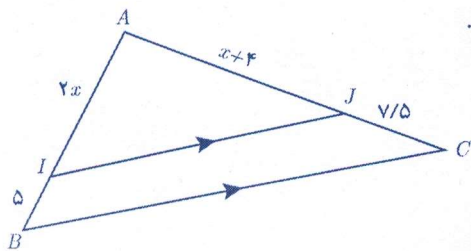
۱ در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی اند. اندازه پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.



$$\frac{AG}{GB} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{2}{HC} \Rightarrow HC = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$$

$$AC = AH + HC = 2 + \frac{10}{3} = \frac{6+10}{3} = \frac{16}{3}$$

۱- فیلسوف و ریاضی‌دان که حدود ۶۲۳ سال قبل از میلاد در نواحی غرب ترکیه امروزی به دنیا آمد. اثبات بسیاری از قضایای مهم هندسی را به او نسبت داده‌اند.



۲ با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازه پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.

$$IJ \parallel BC \Rightarrow \frac{AI}{IB} = \frac{AJ}{JC} \Rightarrow \frac{2x}{5} = \frac{x+4}{7/5} \Rightarrow$$

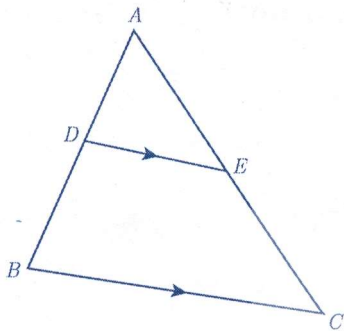
$$15x = 5x + 20 \Rightarrow 15x - 5x = 20 \Rightarrow 10x = 20$$

$$\Rightarrow x = \frac{20}{10} \Rightarrow x = 2$$

$$AJ = (8) + 4 = 4, \quad AI = 2(2) = 4$$

تعمیم قضیه تالس

فعالیت



۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.

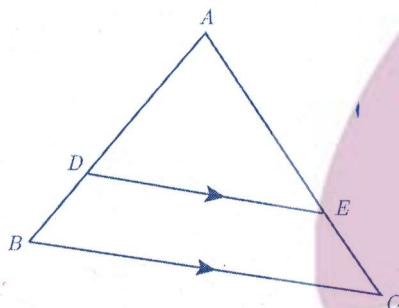
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

(الف) تناسب قضیه تالس را بنویسید.

(ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

(پ) به کمک تفصیل نسبت در صورت از تناسب به دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

توجه کنید که تناسب‌های به دست آمده در (ب) و (پ) صورت‌های دیگر قضیه تالس اند.

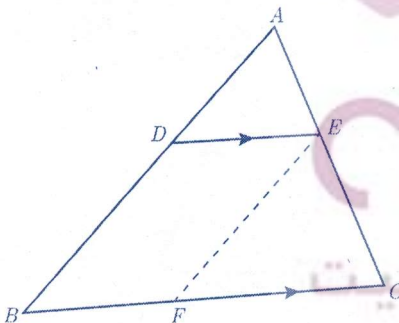


۲ در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسب قضیه تالس را

بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را

از قضیه تالس نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{DB}{DA} = \frac{EC}{AE}, \frac{BD}{BA} = \frac{CE}{CA}, \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \\ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \end{cases}$$



الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی اند. با توجه به قضیه تالس داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

(ب) پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم: $\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC}$

(پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$

(ت) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ موازی الاضلاع چون $BD \parallel EF$ ، $DE \parallel BF$

$$BF = DE$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

پاره‌خط BF با کدام پاره‌خط برابر است؟

(ث) با توجه به قسمت‌های (ب) و (پ) داریم:

این رابطه تعمیم قضیه تالس است.

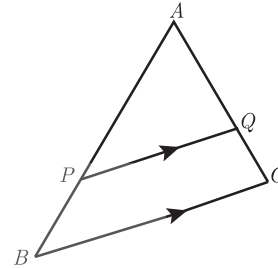
$$BE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD-AB}{AB} = \frac{AE-AC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow$$

کار در کلاس

در شکل پاره خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{PQ}{BC}$ **نادرست** ب) $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$ **درست**
 پ) $\frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AQ} = \frac{PQ}{BC}$ **نادرست** ت) $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC} = \frac{PQ}{BC}$ **نادرست**
 ث) $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC}$ **درست** ج) $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$ **درست**



اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

در مثال‌های زیر قضیه و عکس آن آمده است.

مثال ۱:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهاش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۲:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

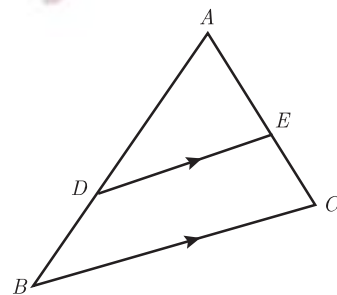
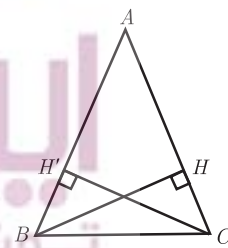
فرض: $AB=AC$

حکم: $BH=CH'$

عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH=CH'$

حکم: $AB=AC$



مثال ۳: در قضیه تالس فرض و حکم به صورت زیر است.

فرض: $DE \parallel BC$

حکم: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

با توجه به آنچه گفته شد، فرض و حکم عکس قضیه تالس را بنویسید.

$$\text{فرض} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

حکم : $DE \parallel BC$

به عبارت دیگر عکس قضیه تالس می گوید هرگاه پاره خط DE مانند شکل پاره خط های AB و AC را به گونه ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ، در این صورت پاره خط DE موازی پاره خط BC است. به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟ کمی بعد به بررسی این مسئله خواهیم پرداخت.

معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه جا می شود و قسمت هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم در عکس آن ثابت باشند؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC هم در خود قضیه و هم در عکس آن جزء مفروضات است.

برهان خلف

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می شود، برهان غیر مستقیم یا ~~برهان خلف~~ است. ~~در برهان خلف~~ به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجه غیر ممکن می رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می شود.

مسئله $A \Rightarrow B$ (حکم) $\Rightarrow$ (فرض) مسئله

~~غیر مستقیم~~
اثبات به روش ~~برهان خلف~~ :



پس نتیجه می گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می رسیم که هیچ کدام نمی تواند اتفاق بیفتد.

مثال : اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آن گاه n نیز عددی فرد است.

حل :

با استفاده از برهان خلف فرض کنیم مسئله نادرست باشد؛ یعنی n عددی فرد نباشد؛ بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می توان

نوشت $n=2k$ به طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

بنابراین $n^2=4k^2=2(2k^2)$ که عددی زوج است و با فرض مسئله در تناقض است؛ لذا از ابتدا n نمی توانست عددی زوج باشد.

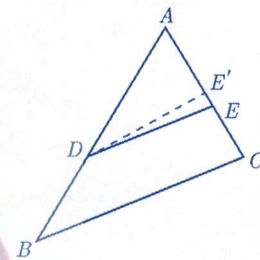
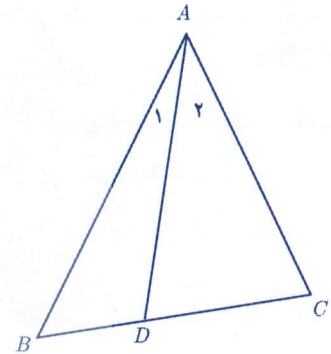
مثال: فرض کنیم AD نیمساز زاویه A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ باشد، آن گاه $AB \neq AC$.

حل:

با استفاده از برهان خلف فرض می کنیم حکم نادرست باشد.

$$\begin{cases} AB=AC \\ AD=AD \\ \hat{A}=\hat{A} \end{cases}$$

بنابراین داریم $AB=AC$ (فرض خلف) در این صورت خواهیم داشت $ABD \cong ACD$ (چرا؟). از این هم نهشتی نتیجه خواهد شد $BD=DC$ است، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB=AC$ نادرست بوده است، بنابراین $AB \neq AC$ است. حال می خواهیم با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیه تالس را ثابت کنیم.



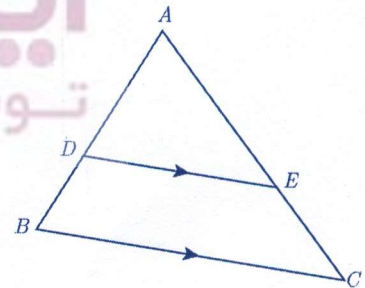
عکس قضیه تالس: مانند شکل مقابل در مثلث ABC ، اگر $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ ، آن گاه $DE \parallel BC$.

اثبات: با استفاده از برهان خلف فرض می کنیم حکم مسئله غلط باشد؛ یعنی $DE \not\parallel BC$. لذا از نقطه D خطی موازی BC رسم می کنیم تا AC را در نقطه ای مانند E' قطع کند. طبق قضیه تالس داریم $\frac{AE'}{E'C} = \frac{AD}{DB}$ و از مقایسه با فرض مسئله خواهیم داشت $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$. حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم $\frac{AE}{AC} = \frac{AE'}{AC}$ و در نتیجه $AE = AE'$. این یعنی نقطه E بر E' منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است، زیرا $DE \not\parallel BC$ و $DE' \parallel BC$ است. بنابراین از ابتدا فرض غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی تواند غلط باشد، یعنی $DE \parallel BC$ است.

قضیه های دو شرطی

همان گونه که دیدیم، قضیه تالس و عکس آن هر دو درست اند؛ بنابراین برای مثلی مانند $\triangle ABC$ در شکل مقابل می توان هر دوی آنها را به صورت زیر بیان کرد:

اگر $DE \parallel BC$ ، آن گاه $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ و برعکس.



چنین قضیه هایی را قضیه های دو شرطی می نامیم. قضیه های دو شرطی را با نماد $\Leftrightarrow$

۱- این نماد نشان دهنده آن است که هر کدام از طرفین می توانند طرف دیگر را نتیجه دهند؛ لذا با هر دو طرف درست اند و یا هر دو طرف نادرست اند.

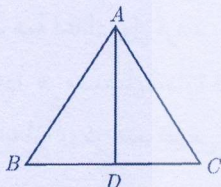
(که اگر و تنها اگر خوانده می شود) بیان کرد؛ به طور مثال قضیه فوق و عکس آن را می توان به صورت زیر بیان کرد:

فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

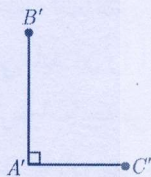
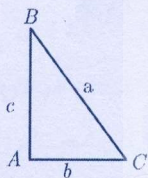
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow DE \parallel BC$$

در ادامه مثال هایی از قضایای دو شرطی ملاحظه خواهید کرد.

مثال: در یک مثلث دو ضلع برابرند؛ اگر و تنها اگر زاویه های روبه رو به آنها باهم برابر باشند.



مثال: در مثلث متساوی الاضلاع یک پاره خط نیمساز است؛ اگر و تنها اگر میانه باشد.



الف) اگر در مثلث ABC ، $AB=c$ ، $AC=b$ ، $BC=a$ ، $a^2 = b^2 + c^2$ باشد.

آنگاه مثلث ABC در رأس A قائمه است.

با توجه به قضیه فیثاغورس اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC قائم باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱- فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه اضلاع آن برقرار است.

۲- پاره خط های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$ است.

۳- با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

۴- توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان کنید.

$$(A'B')^2 + (A'C')^2 = (B'C')^2 \Rightarrow \begin{matrix} AB=A'B' \\ AC=A'C' \end{matrix}$$

$$\begin{cases} AB=A'B' \\ AC=A'C' \\ BC=B'C' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$$

مثال نقض ج) در مثلث ABC ، $AB=c$ ، $AC=b$ ، $BC=a$ ، $a^2 = b^2 + c^2$ است اگر و تنها اگر مثلث ABC در رأس A قائم باشد.

نوع دیگری از استدلال که در پایه های قبل نیز تا حدودی با آن آشنا شده اید، استدلال با مثال نقض است. اگر فردی ادعا کند که «همه اعداد فرد، اول اند»، این یک حکم کلی درباره تمام اعداد فرد است و ارائه عدد ۹ به عنوان عددی که فرد و غیر اول است، برای رد این ادعا کافی است. به چنین مثالی که برای رد یک حکم کلی استفاده می شود، مثال نقض می گوئیم. به عنوان مثالی دیگر؛ فرض کنیم فردی ادعا کند که «هیچ فرد ایرانی ای تا به حال مدال

فیلدز^۱ نگرفته است». در این صورت شما برای رد ادعای او چه می‌توانید بگویید؟ اگر شما حتی یک فرد ایرانی را که مدال فیلدز گرفته است، برای او مثال بزنید، در این صورت ادعای او باطل شده است و در واقع شما با استفاده از یک مثال نقض، ادعای او را باطل کرده‌اید.

با دقت در ادعای مطرح شده خواهیم دید که کلمه «هیچ» در این حکم باعث می‌شود که این ادعا یک حکم کلی برای تمام اعضای یک مجموعه (که در اینجا مجموعه افراد ایرانی است) باشد. بنابراین در این مورد نیز آوردن یک مثال نقض کافی است تا آن حکم رد شود و به عبارتی غلط بودن آن حکم اثبات گردد.

در ادامه نمونه‌هایی از حکم‌های کلی آمده‌اند.

(الف) همه اعداد اول فردند. (حکم کلی درباره تمام اعداد اول)

(ب) «در هر مستطیل اندازه قطر‌ها باهم برابر است.» (حکم کلی درباره تمام مستطیل‌ها)

(پ) «به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

نادرست است

درباره درستی یا نادرستی حکم «الف» چه حدسی می‌زنید؟ چگونه می‌توانید حدس خود را ثابت کنید؟ **مثال نقض: عدد ۲ اول زوج است** می‌دانیم که ۲ یک عدد اول و زوج است. بنابراین حکم کلی «الف» با ارائه همین مثال نقض رد می‌شود. درباره درستی یا نادرستی حکم‌های «ب» و «پ» چه حدس‌هایی می‌زنید؟ آیا می‌توانید برای آنها مثال نقض بیاورید و آنها را باطل کنید؟ اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض ارائه کنیم، درباره درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در این حالت درستی حکم را باید پذیرفت؟

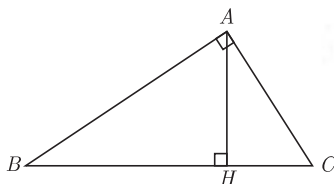
برای قسمت (ب) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش این حکم کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید آن را اثبات کنیم».

برای مثال نقض اگر جای n عدد ۴۱ یا هر مضرب ۴۱ را

درباره گزینه (پ) چه می‌توان گفت؟ **قرار دهیم. فوایم داشت $41 \times 41 = 1681$ پس دیگر عبارت عدد اول نیست** اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی بر ما مشخص نباشد و برای رد آن، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم، نمی‌توان درباره درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

تمرین

۱ در شکل مقابل مثلث قائم الزاویه ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به دست آورید.



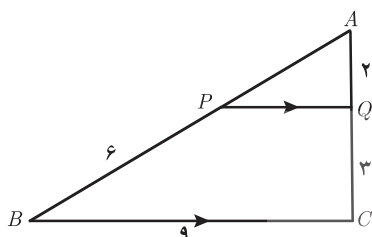
۱- مدال یا نشان فیلدز (Fields medal) جایزه‌ای است که به ابتکار ریاضی‌دان کانادایی جان چارلز فیلدز هر چهار سال یک‌بار به ریاضی‌دانان جوان (کمتر از چهل سال) که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند تعلق می‌گیرد. از آنجا که در رشته ریاضی جایزه نوبل اهدا نمی‌شود، این جایزه را «نوبل ریاضیات» می‌خوانند. در سال ۲۰۱۴ نشان فیلدز به ریاضی‌دان ایرانی خانم مریم میرزاخانی تعلق گرفت. گفتنی است که میرزاخانی اولین زنی در دنیاست که موفق به گرفتن این نشان شده است. البته با تأسف تمام موقع تدوین کتاب خبر درگذشت ایشان، جهان علم و جامعه ایرانی را سخت متاثر ساخت، روانش شاد

حل تمرینات در صفحات بعدی

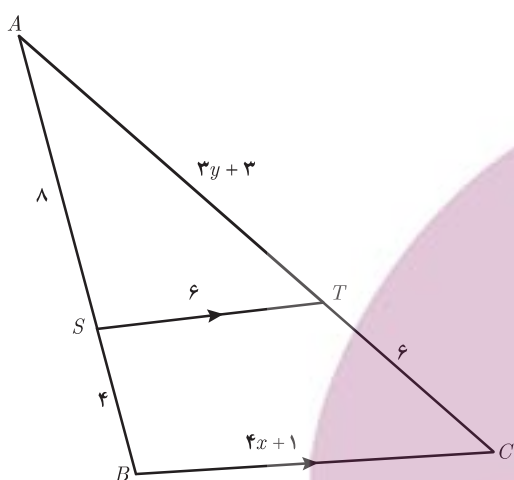
۲ در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به دست آورید.

الف) $\frac{a}{10+a} = \frac{b}{8+b}$ ب) $\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b}$

۳ ثابت کنید در هر مثلث پاره خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.



۴ در شکل مقابل $PQ \parallel BC$ است. طول پاره خط‌های AP و PQ را به دست آورید.



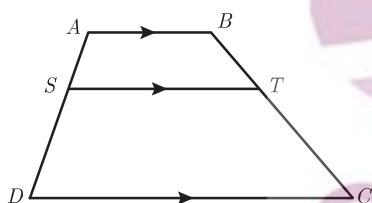
۵ در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x و y را به دست آورید.

تپه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مطلقان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

۶ در دوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید: $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$ (راهنمایی: یکی از قطر‌ها را رسم کنید.)



۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر».

(راهنمایی: شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)

۸ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

۹ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اولی بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

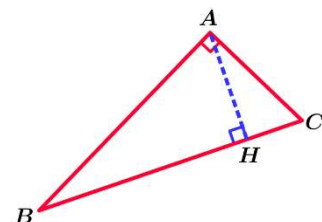
ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

پ) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

ت) در هر مثلث میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق‌اند.

تمرین ۱:

$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AB \times AC \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} AH \times BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow AB \times AC = AH \times BC$$



تمرین ۲:

الف) $\frac{a}{10+a} = \frac{b}{8+b} \Rightarrow 8a + 10b = 10b + 8b \Rightarrow 8a = 10b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{8} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{4}$

ب) $\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b} \Rightarrow 21a + 70 + 10b = 30b + 70 + 14a \Rightarrow 21a - 14a = 30b - 10b \Rightarrow 7a = 10b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{7}$

تمرین ۳: مثلث ABC را چنان در نظر می گیریم که M وسط ضلع AB و N وسط ضلع AC باشد. در نتیجه داریم:

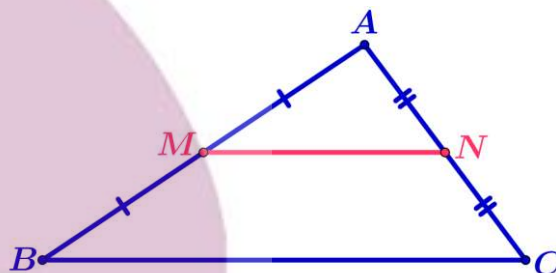
$$AN = NC = \frac{AC}{2}, \quad AM = MB = \frac{AB}{2}$$

$$\frac{AM}{MB} = 1, \quad \frac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC \quad \text{طبق عکس قضیه تالس}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$MN \parallel BC \quad \text{طبق نتیجه قضیه تالس} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad (2)$$

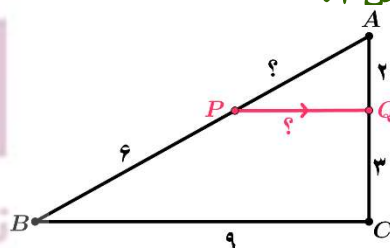
$$\text{طبق روابط (۱) و (۲):} \quad \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2} BC$$



تمرین ۴:

$$PQ \parallel BC \quad \text{طبق قضیه تالس} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow AP = \frac{6 \times 2}{3} \Rightarrow AP = 4$$

$$PQ \parallel BC \quad \text{طبق قضیه تالس} \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{2}{2+3} = \frac{PQ}{9} \Rightarrow PQ = \frac{9 \times 2}{5} \Rightarrow PQ = \frac{18}{5}$$



تمرین ۵:

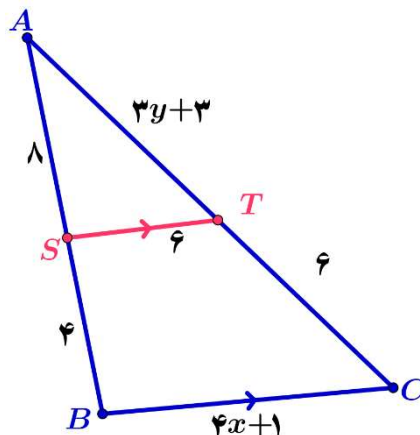
$$ST \parallel BC \quad \text{طبق قضیه تالس} \Rightarrow \frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{ST}{BC}$$

$$\frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{3y+3}{3y+9} \Rightarrow 24y + 72 = 36y = 36$$

$$\Rightarrow 36y - 24y = 72 - 36 \Rightarrow y = \frac{36}{12} \Rightarrow y = 3$$

$$\frac{AS}{AB} = \frac{ST}{BC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{6}{4x+1} \Rightarrow 32x + 8 = 72$$

$$\Rightarrow 32x = 72 - 8 \Rightarrow 32x = 64 \Rightarrow x = \frac{64}{32} \Rightarrow x = 2$$



تمرین ۶:

قطر AC را رسم می کنیم نقطه برخورد قطر AC با خط ST را M می نامیم.

$$\triangle ADC : SM \parallel DC \Rightarrow \text{طبق قضیه تالس} \Rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{AM}{MC} \quad (۱)$$

$$\triangle CAB : AB \parallel MT \Rightarrow \text{طبق قضیه تالس} \Rightarrow \frac{MC}{AM} = \frac{CT}{TB} \Rightarrow \text{عکس تناسب} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{TB}{CT} \quad (۲)$$

$$\text{طبق روابط (۱) و (۲)} \Rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{TB}{CT}$$

تمرین ۷:

الف) اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل برابر باشند آنگاه در این صورت اضلاع روبه رو موازی هستند.

پ) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل مکمل باشند آنگاه در این صورت رأس های آن چهارضلعی روی یک دایره هستند.

ت) اگر در یک مثلث دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه ارتفاع متناظر به ضلع بزرگتر کوچکتر از ارتفاع متناظر به ضلع کوچکتر است.

تمرین ۸:

(فرض خلف) فرض می کنیم از نقطه P خارج خط d دو خط L و L' بر d عمود هستند.

پس هر دو خط L و L' ، خط d را در دو نقطه A و B قطع می کنند. و چون عمود هستند لذا داریم:

$$\hat{A} = 90^\circ, \quad \hat{B} = 90^\circ$$

$$\triangle ABP : \hat{A} + \hat{B} + \hat{P} = 90^\circ + 90^\circ + \hat{P} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{P} = 180^\circ + \hat{P} \xrightarrow{\hat{P} > 0} \hat{A} + \hat{B} + \hat{P} > 180^\circ$$

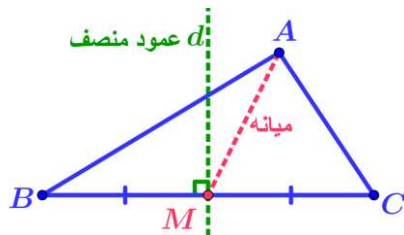
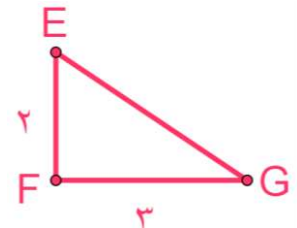
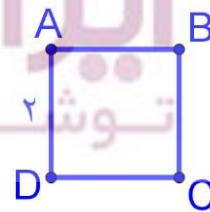
این متناقض با این است که مجموع زاویه های داخلی 180° است. پس فرض غلط است.

تمرین ۹:

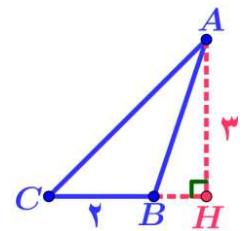
الف) ۲۱۱ عدد اول است و از ۱۲۷ بزرگتر است.

$$S_{\triangle EFG} < S_{\square ABCD}$$

$$\Leftarrow S_{\square ABCD} = 2 \times 2 = 4 \quad \text{و} \quad S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$



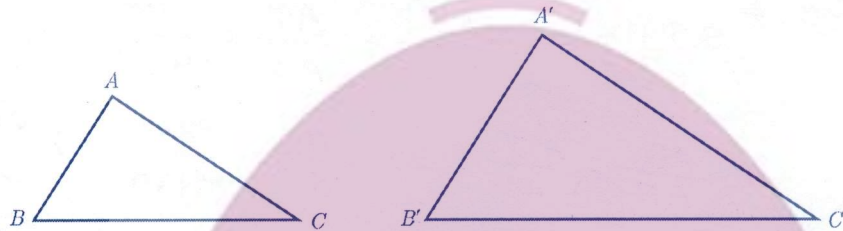
(ت)



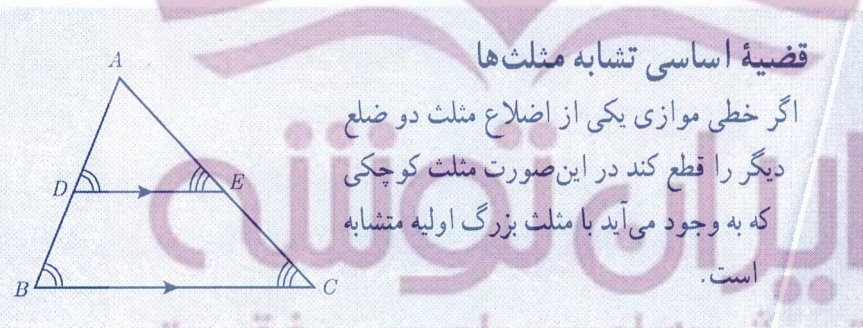
(پ)

در پایه نهم با مفهوم تشابه آشنا شدید. با توجه به مفهوم تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ هرگاه زوایای متناظر باهم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد؛ یعنی

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \text{ و } \hat{B} = \hat{B}' \text{ و } \hat{C} = \hat{C}' \\ \text{و} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



در این صورت نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم. مثلاً اگر $\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3}$ باشد، می‌گوییم مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت تشابه $\frac{2}{3}$ ، متشابه است. در این صورت مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{3}{2}$ ، متشابه خواهد بود.



قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

$$\begin{aligned} DE \parallel BC, AC &\Rightarrow \hat{E} = \hat{C} \\ DE \parallel BC, AB &\Rightarrow \hat{D} = \hat{B} \end{aligned}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

اثبات:

۱- داریم $\hat{E} = \hat{C}$ و $\hat{D} = \hat{B}$ (چرا؟)

بنابراین زوایای دو مثلث نظیر به نظیر باهم برابرند.

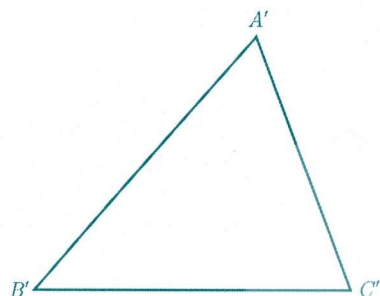
۲- با توجه به قضیه تالس داریم:

۳- با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم:

با استفاده از قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیه بعد را که حالت‌های تشابه دو مثلث را بیان می‌کنند، اثبات کرد. از آنجا که اثبات این قضیه‌ها مدنظر نیست، در ادامه تنها صورت آنها بیان شده است.

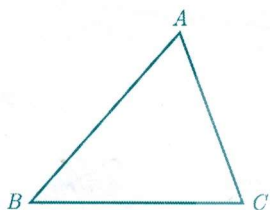
قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{A} = \hat{A}' \text{ و } \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C')$$



قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \right)$$



قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

کار در کلاس

۱ در شکل مقابل $BC \parallel DE$.

اندازه پاره خط‌های CA و DE را به دست آورید.

$$BC \parallel DE \Rightarrow \hat{E} = \hat{C} \text{ (مقابل در بالا)} \text{ و } \hat{A} = \hat{A} \text{ (مقابل در پایین)}$$

$$BC \parallel DE \Rightarrow \hat{B} = \hat{D} \text{ (مقابل در بالا)} \text{ و } \hat{A} = \hat{A} \text{ (مقابل در پایین)}$$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$
شکل متشابه

۲ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های MNP و ABC متشابه‌اند.

حل:

الف) $MN \parallel BC$ و $NP \parallel AB$ و $MP \parallel AC$ چرا؟

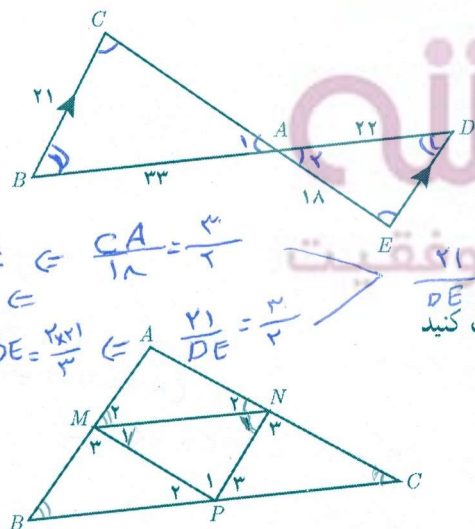
ب) بنابراین $\hat{N} = \hat{P} = \hat{B}$ و $\hat{M} = \hat{P} = \hat{C}$ (چرا؟)

از ب) درباره مثلث‌های مورد نظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ (پ) دو مثلث MNP و ABC متشابه‌اند.

الف) چون M وسط AB است پس داریم: $AM = MB \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow MN \parallel BC$ طبق عکس قضیه تالس

چون P وسط BC است پس داریم: $BP = PC \Rightarrow \frac{CN}{AN} = \frac{CP}{BP} = 1 \Rightarrow NP \parallel AB$ طبق عکس قضیه تالس

چون N وسط AC است پس داریم: $AN = NC \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{BP}{PC} = 1 \Rightarrow MP \parallel AC$ طبق عکس قضیه تالس



$$CA = \frac{3 \times 11}{2} \Leftrightarrow \frac{CA}{18} = \frac{3}{2}$$

$$CA = 27 \Leftrightarrow DE = 14 \Leftrightarrow DE = \frac{2 \times 11}{3} \Leftrightarrow \frac{DE}{18} = \frac{2}{3}$$

۳ اگر سه مثلث ABC و $A'B'C'$ و $A''B''C''$ به گونه‌ای باشند که $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

و $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ ، درباره دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

با هم متشابه‌اند - چون هر دو باید مثلث متشابه‌اند.

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

فعالیت

فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.

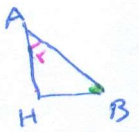
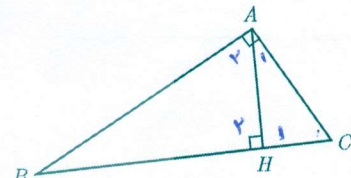
۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHC \quad \leftarrow \quad \begin{matrix} \hat{A} = \hat{A}_1 = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{matrix}$$

۲ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \quad \leftarrow \quad \begin{matrix} \hat{A} = \hat{A}_2 = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B} \end{matrix}$$

۳ از (۱) و (۲) درباره مثلث‌های AHC و AHB چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ متشابه‌اند.



نتیجه: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

$$\triangle ABC \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow AC^2 = HC \times BC$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow AB^2 = HB \times BC$$

$$\triangle AHB \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB \times HC$$

۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطه فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 =$$

۸ مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید.

$$AB \times AC = AH \times BC$$

$$AB^2 + AC^2 = HB \times BC + HC \times BC = BC (HB + HC) \Rightarrow$$

$$AB^2 + AC^2 = BC \times BC \Rightarrow$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

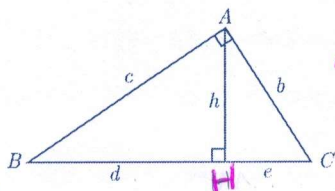
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$$

$$AB \times AC = AH \times BC$$

در مثلث قائم الزاویه مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



$$AH^2 = BH \times HC$$

$$h^2 = d \times e$$

$$e = ?$$

$$d = 7$$

$$h = 5$$

۱

$$25 = 7e \Rightarrow e = \frac{25}{7}$$

$$c = ?$$

$$b = ?$$

$$e = 3$$

$$d = 5$$

۲

$$\Rightarrow h^2 = d \times e \Rightarrow h^2 = 15$$

$$AB^2 = BC \times BH \Rightarrow c^2 = 15 \times 5 \Rightarrow c = \sqrt{75}$$

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow h^2 = d \times e$$

$$BC = d + e \quad BC = 5 + 3 = 8$$

$$AC^2 = BC \times CH \Rightarrow b^2 = 8 \times 3 \Rightarrow b = \sqrt{24}$$

$$BC^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow BC^2 = 25 + 24$$

$$BC^2 = 49 \Rightarrow BC = 7$$

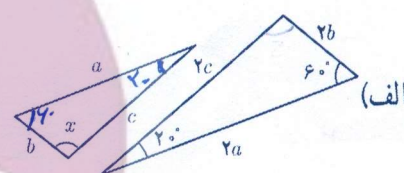
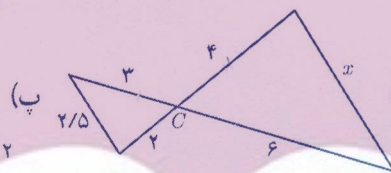
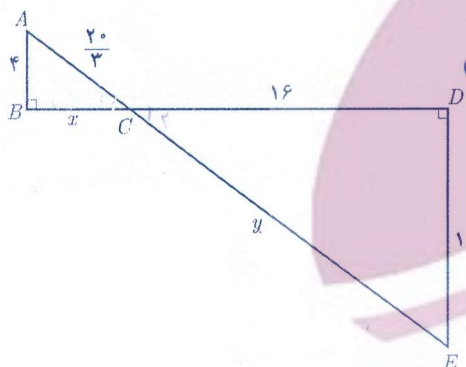
$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow 15 \times 3 = h \times 8$$

$$h = \frac{45}{8} \Rightarrow h = 5.625$$

تمرین

پاسخ تمرینات در صفحات بعدی

در هر قسمت تشابه مثلث ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.



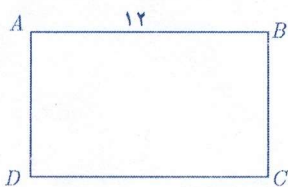
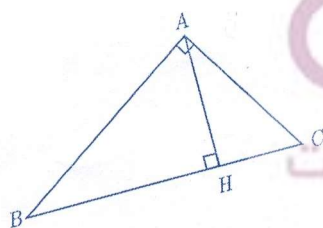
در مثلث قائم الزاویه روبه رو در هر حالت، اندازه پاره خط خواسته شده را به دست آورید.

الف) $AC = ?$ و $AB = ?$ و $AH = ?$ و $BH = 9$ و $BC = 10$

ب) $AB = ?$ و $AH = ?$ و $BC = ?$ و $CH = 2$ و $AC = 5$

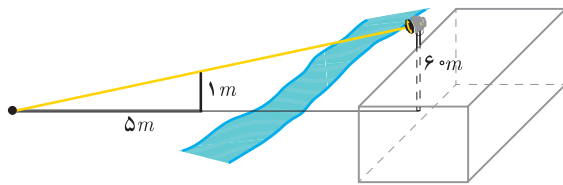
پ) $AH = ?$ و $BC = ?$ و $AC = 6$ و $AB = 8$

ت) $AC = ?$ و $BC = ?$ و $BH = ?$ و $AH = 6$ و $AB = 12$

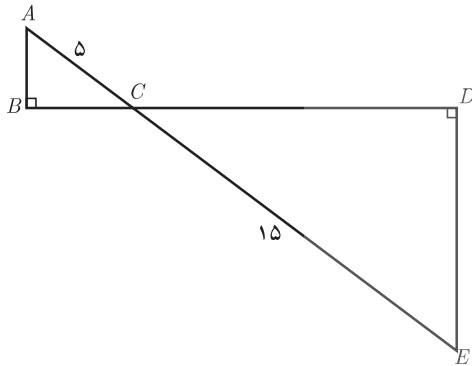


۳) شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطه A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازه عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازه عرض مستطیل را محاسبه کنید.

حل تمرینات در صفحات بعدی



۴ بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟



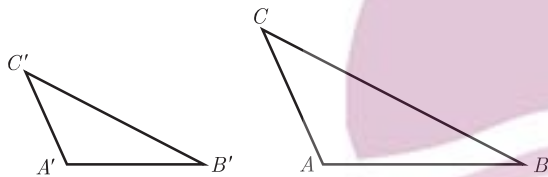
۵ در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را به دست آورید.

۶ دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید؛ به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$ باشد. حال ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید. الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.

ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به دست آورید.

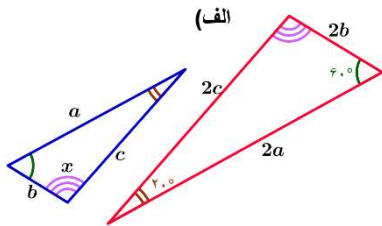
پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را محاسبه کنید.

ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به دست آورید.



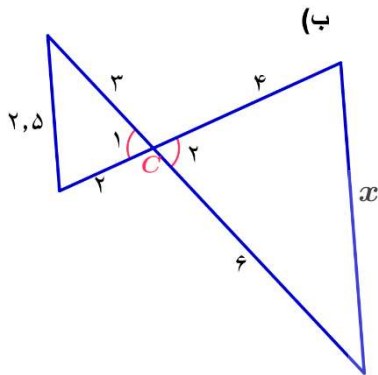
ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

تمرین ۱:



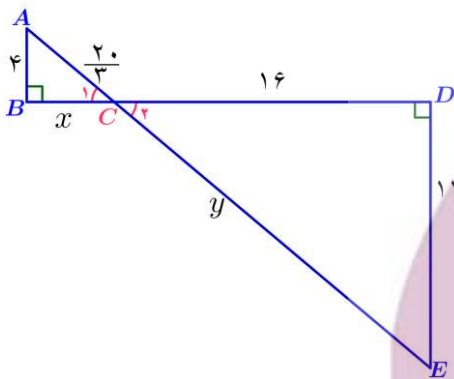
(الف) چون $\frac{2a}{a} = \frac{2b}{b} = \frac{2c}{c} = 2$ پس سه ضلع متناسب هستند در نتیجه دو مثلث متشابه اند بنابراین زاویه های متناظر آنها برابر است پس:

$$x + 60^\circ + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 60^\circ - 20^\circ \Rightarrow x = 100^\circ$$



(ب) چون $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = 2$ پس بنا به حالت تناسب دو ضلع و برابری زاویه بین این دو ضلع این دو مثلث متشابه اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. پس داریم:

$$2 = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{x}{2/5} \Rightarrow \frac{x}{2/5} = 2 \Rightarrow x = 5$$



(پ) چون $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ پس بنا به حالت برابری دو زاویه این دو مثلث متشابه اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. لذا داریم:

$$\frac{16}{x} = \frac{12}{4} \Rightarrow x = \frac{16 \times 4}{12} \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$

$$\frac{12}{4} = \frac{y}{20/3} \Rightarrow y = \frac{12 \times 20/3}{4} \Rightarrow y = \frac{12 \times 20}{4 \times 3} \Rightarrow y = 20$$

تمرین ۲:

(الف)

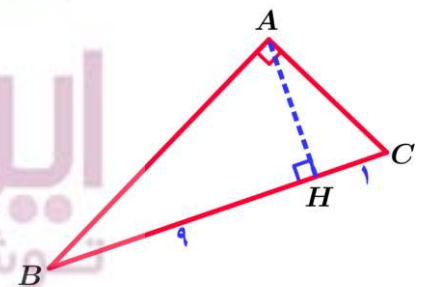
$$AC = ? , AB = ? , AH = ? , BH = 9 , BC = 10$$

$$BH + HC = BC \Rightarrow 9 + HC = 10 \Rightarrow HC = 10 - 9 \Rightarrow HC = 1$$

$$(AH)^2 = BH \times HC \Rightarrow (AH)^2 = 9 \times 1 \Rightarrow (AH)^2 = 9 \Rightarrow AH = 3$$

$$(AB)^2 = BH \times BC \Rightarrow (AB)^2 = 9 \times 10 \Rightarrow (AB)^2 = 90 \Rightarrow AB = \sqrt{90}$$

$$(AC)^2 = HC \times BC \Rightarrow (AC)^2 = 1 \times 10 \Rightarrow (AC)^2 = 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$$



(ب)

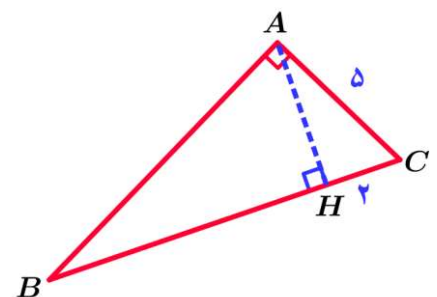
$$AB = ? , AH = ? , BC = ? , CH = 2 , AC = 5$$

$$(AC)^2 = HC \times BC \Rightarrow (5)^2 = 2 \times BC \Rightarrow BC = \frac{25}{2}$$

$$BH + HC = BC \Rightarrow BH + 2 = \frac{25}{2} \Rightarrow BH = \frac{25}{2} - 2 \Rightarrow BH = \frac{21}{2}$$

$$(AH)^2 = BH \times HC \Rightarrow (AH)^2 = \frac{21}{2} \times 2 \Rightarrow (AH)^2 = 21 \Rightarrow AH = \sqrt{21}$$

$$(AB)^2 = BH \times BC \Rightarrow (AB)^2 = \frac{21}{2} \times \frac{25}{2} \Rightarrow (AB)^2 = \frac{21 \times 25}{4} \Rightarrow AB = \frac{5\sqrt{21}}{2}$$

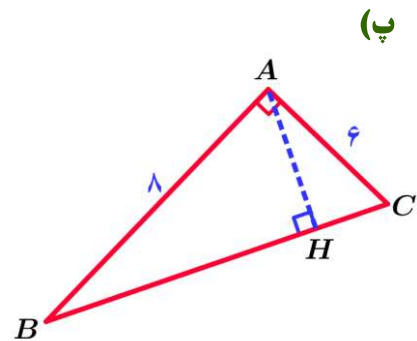


$$AH=? , BC=? , AC=6 , AB=8$$

$$(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 \Rightarrow (BC)^2 = (6)^2 + (8)^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

$$(AB)^2 = BH \times BC \Rightarrow (8)^2 = BH \times 10 \Rightarrow BH = \frac{64}{10}$$

$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow 8 \times 6 = AH \times 10 \Rightarrow AH = \frac{48}{10}$$



$$AC=? , BC=? , BH=? , AH=6 , AB=12$$

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 \Rightarrow (12)^2 = (6)^2 + (BH)^2 \Rightarrow (BH)^2 = 144 - 36 = 108$$

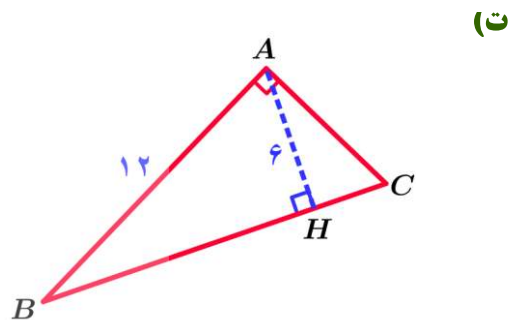
$$\Rightarrow BH = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

$$(AB)^2 = BH \times BC \Rightarrow (12)^2 = 6\sqrt{3} \times BC \Rightarrow BC = \frac{144}{6\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$BC = \frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 8\sqrt{3}$$

$$BH + HC = BC \Rightarrow 6\sqrt{3} + HC = 8\sqrt{3} \Rightarrow HC = 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \Rightarrow HC = 2\sqrt{3}$$

$$(AC)^2 = HC \times BC \Rightarrow (AC)^2 = 2\sqrt{3} \times 8\sqrt{3} \Rightarrow AC = 48 \Rightarrow AC = \sqrt{48} \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$



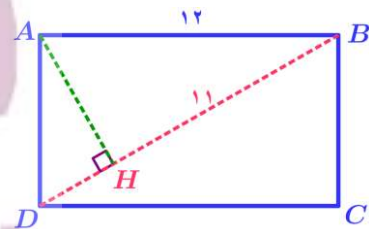
$$AD=? , BD=? , AH=? , BH=11 , AB=12$$

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 \Rightarrow (12)^2 = (AH)^2 + (11)^2 \Rightarrow (AH)^2 = 144 - 121 = 23 \Rightarrow AH = \sqrt{23}$$

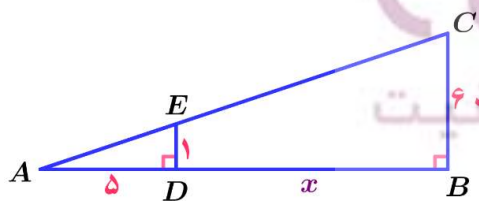
$$(AH)^2 = BH \times HD \Rightarrow (\sqrt{23})^2 = 11 \times HD \Rightarrow HD = \frac{23}{11}$$

$$BD = BH + HD \Rightarrow BD = 11 + \frac{23}{11} = \frac{121 + 23}{11} = \frac{144}{11}$$

$$(AD)^2 = HD \times BD \Rightarrow (AD)^2 = \frac{23}{11} \times \frac{144}{11} \Rightarrow (AD)^2 = \frac{23 \times 144}{121} \Rightarrow AD = \frac{12}{11} \sqrt{23}$$



تمرین ۳:



$$AD=5 , BC=60 , DE=1 , \hat{B}=90^\circ , \hat{D}=90^\circ , BD=x , AB=?$$

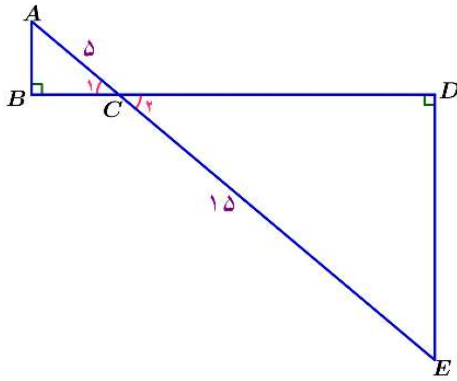
$$AB = AD + BD \Rightarrow AB = 5 + x$$

چون $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$ و زاویه $\hat{A}$ مشترک پس بنا به حالت برابری دو زاویه

این دو مثلث ABC و ADE متشابه اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. لذا داریم:

$$\frac{5}{x+5} = \frac{1}{60} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{12}{4} \Rightarrow x+5=300 \Rightarrow AB=300$$

تمرین ۵:



$$AC = 5, CE = 15, \frac{P_{ABC}}{P_{EDC}} = ?, \frac{S_{ABC}}{S_{EDC}} = ?, \hat{B} = 90^\circ, \hat{D} = 90^\circ$$

$$AB = AD + BD \Rightarrow AB = 5 + x$$

چون $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$ پس بنا به حالت برابری دو زاویه

این دو مثلث ABC و EDC متشابه اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. لذا داریم:

$$\frac{ED}{AB} = \frac{15}{5} \Rightarrow \frac{ED}{AB} = 3, \quad \frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{EC}{AC} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{ED}{AB} = 3 \Rightarrow ED = 3AB \\ \frac{DC}{BC} = 3 \Rightarrow DC = 3BC \\ \frac{EC}{AC} = 3 \Rightarrow EC = 3AC \end{cases}$$

$$\frac{P_{EDC}}{P_{ABC}} = \frac{ED + DC + EC}{AB + BC + AC} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}} = \frac{3AB + 3BC + 3AC}{AB + BC + AC} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}} = \frac{3(AB + BC + AC)}{AB + BC + AC} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}} = 3$$

$$\frac{S_{EDC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} ED \times DC}{\frac{1}{2} AB \times BC} \Rightarrow \frac{S_{EDC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} (3AB) \times (3BC)}{\frac{1}{2} AB \times BC} \Rightarrow \frac{S_{EDC}}{S_{ABC}} = 9$$

تمرین ۶: چون دو مثلث AHB و $A'H'B'$ متشابه اند. پس داریم:

$$\hat{C} = \hat{C}' \text{ و } \hat{B} = \hat{B}' \text{ و } \hat{A} = \hat{A}' \text{ و } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = K$$

(الف) چون $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ پس بنا به حالت برابری دو زاویه این

دو مثلث AHB و $A'H'B'$ متشابه اند.

(ب) دو مثلث AHB و $A'H'B'$ متشابه اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. لذا داریم:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AH}{A'H'} = \frac{BH}{B'H'}, \quad \frac{AB}{A'B'} = K \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = K$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AH}{\frac{1}{2} B'C' \times A'H'} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{AH}{A'H'} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = K^2$$

(پ)

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = K \Rightarrow AB = K A'B', \quad BC = K B'C', \quad AC = K A'C'$$

(ت)

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{AB + BC + AC}{A'B' + B'C' + A'C'} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{K A'B' + K B'C' + K A'C'}{A'B' + B'C' + A'C'} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{K(A'B' + B'C' + A'C')}{A'B' + B'C' + A'C'} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = K$$



بندر سیراف، شهر باستانی استان بوشهر یکی از مکان‌های تاریخی و از نقاط دیدنی ایران است که زمانی دارای رونق چشمگیری بوده و در آن زمان با سیصد هزار نفر جمعیت، روابط تجاری زیادی با روم و یونان (در اروپا) و ماداگاسکار (در آفریقا)، هند و چین (در آسیا) داشته است. با این همه زمین لرزه شدیدی در قرن چهارم هجری قمری ویران شدن کامل این بندر را در پی داشت.

آشنایی با برخی از انواع توابع

وارون یک تابع و تابع یک به یک

اعمال جبری روی توابع

درس اول

درس دوم

درس سوم

نویسنده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن دبیران ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

درس اول

آشنایی با برخی از انواع توابع

در سال گذشته با مفهوم تابع آشنا شدیم. به دستور یا قانون بیانگر تابع، ضابطه آن تابع گفته می‌شود. برای مشخص کردن یک تابع، باید دامنه تابع و ضابطه آن را داشته باشیم. بنا به قرارداد، اگر ضابطه تابعی داده شده باشد، اما دامنه آن صریحاً گفته نشده باشد، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که آن تابع در آن قابل تعریف است، به عنوان دامنه در نظر گرفته می‌شود.

توابع گویا

فعالیت

حسین در پایه یازدهم درس می‌خواند. او در روستای کوچکی زندگی می‌کند که در چند کیلومتری یکی از جاده‌های پرتردد ایران قرار دارد. مردم این روستا تا چند سال پیش به کشاورزی و باغداری مشغول بودند، اما چند سالی است که به دلیل کم‌آبی، کشاورزی رونقی ندارد و در نتیجه مردم این روستا درآمد کافی ندارند. حسین تصمیم گرفت این وضع را تغییر دهد. برای این منظور با خود اندیشید که باید فضای روستا را زیباتر کند و با تبلیغاتی مناسب، بخشی از افرادی که قصد گردشگری دارند و معمولاً از جاده اصلی کنار روستا می‌گذرند را به روستای خود جلب کند. او با خود فکر کرد این گردشگران بابت پذیرایی محلی و تجربه خوشایند یک زندگی روستایی، هزینه خواهند پرداخت و به این ترتیب چرخه اقتصادی مردم روستا پر رونق خواهد شد.

پس از چند هفته تحقیق و پرس و جو، حسین به این نتیجه رسید که برای شروع کار به حدوداً ده میلیون تومان نیاز دارد که البته او به تنهایی این پول را نداشت. برای همین تصمیم گرفت ابتکار خود را با دیگران مطرح کند و از آنها هم برای این کار مفید یاری بخواهد. به این ترتیب افراد روستا می‌توانستند با سرمایه‌گذاری به نسبت مساوی در راه‌اندازی این کار اقتصادی سهیم شوند.

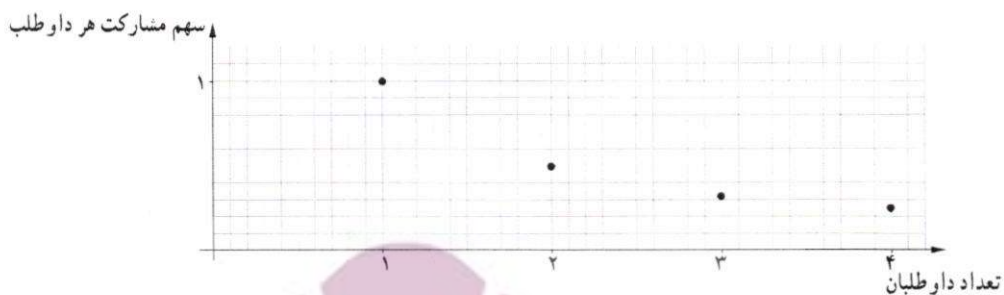
۱ الف) اگر حسین تنها شخص شرکت کننده در این طرح بود، او به تنهایی می‌بایست $\frac{1}{1}$ از ده میلیون تومان را بپردازد، اما اگر یک داوطلب دیگر هم پیدا می‌شد، هر کدام باید $\frac{1}{2}$ از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$

ب) اگر تعداد داوطلبانی که می‌خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند، n نفر باشد، سهم مشارکت هر نفر چقدر خواهد شد؟ $\frac{1}{n}$

پ) رابطه بین تعداد افراد داوطلب و سهم مشارکت آنها یک تابع است. ضابطه این تابع چیست؟ $x \in \mathbb{N}$
 $f(x) = \frac{1}{x}$

۲ در شکل زیر، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. با انتخاب گزینه مناسب در عبارت زیر، تعیین کنید که این نمودار چه چیزی را نشان می‌دهد؟
 «با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب ☒ کاهش ☐ افزایش می‌یابد».

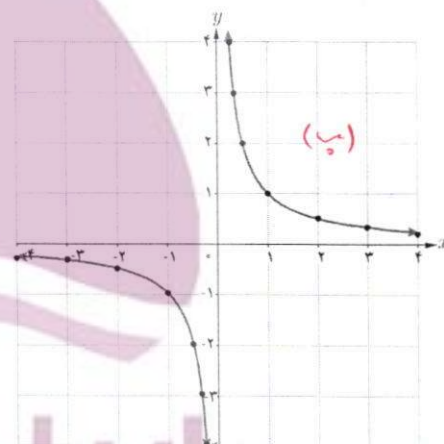
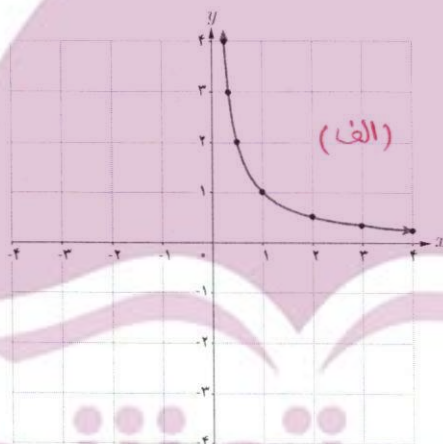


فعالیت

در نمودارهای زیر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ با دو دامنه متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها مربوط به کدام دامنه است؟

الف) $D_f = (0, +\infty)$

ب) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$



خواندنی

هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی رودخانه‌ای با تابع با ضابطه $p(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $p(x)$ هزینه پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) با یک میلیارد تومان چه درصدی از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی خواهد شد؟

ب) چرا هیچ‌گاه ۱۰۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

x	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰
$p(x)$					

هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ ، $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ و همچنین توابع زیر نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

$$f(x) = \frac{x}{x+5}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{x-10}$$

$$f(x) = \sqrt{5}x$$

$$f(x) = 2$$

کار در کلاس

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد» اوست. به این منظور، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق هر بازیکن را به همه پرتاب‌های آزاد حساب می‌کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن موفق است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همه پرتاب‌های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطه تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$$f(x) = x + 0.7 \quad f(x) = \frac{x}{0.7 + x} \quad f(x) = \frac{7 + x}{10 + x} \quad \checkmark$$

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟ **بله، یک تابع گویا است.**

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپی دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟

$$f(x) = \frac{7+x}{10+x} \rightarrow \frac{7+x}{10+x} = \frac{80}{100} \rightarrow \frac{7+x}{10+x} = \frac{4}{5} \rightarrow 5(7+x) = 4(10+x) \rightarrow 35+5x = 40+4x \rightarrow x=5$$

دامنه توابع گویا

از سال‌های گذشته می‌دانیم مخارج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد؛ بنابراین عدد صفر در دامنه تابع با ضابطه $y = \frac{1}{x}$ نیست. به طور کلی اعدادی که مخارج کسر مربوط به ضابطه یک تابع گویا را صفر کنند، عضو دامنه آن تابع نیستند. به عنوان مثال، دامنه تابع گویای با ضابطه $f(x) = \frac{5}{x-2}$ برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ است.

کار در کلاس

دامنه هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{x+5} \quad D_f = \mathbb{R} - \{-5\} \quad g(x) = \frac{3}{x-4} \quad D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

تساوی دو تابع

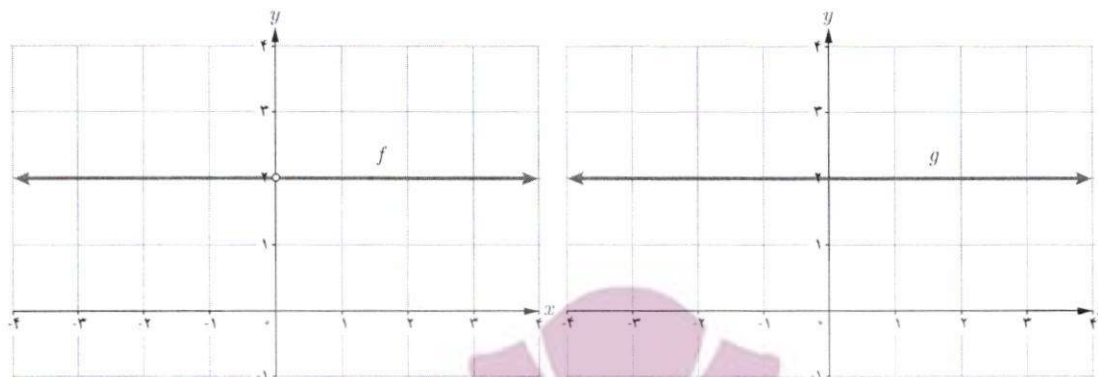
دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

بنابراین در صورت رسم نمودارهای دو تابع مساوی در یک دستگاه مختصات، باید نمودارهای آنها دقیقاً بر هم منطبق شوند.

به نمودار دو تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x}{x}$ و $g(x) = 2$ دقت کنید.



می‌بینیم که نمودارهای این دو تابع کاملاً بر هم منطبق نیستند. در واقع با اینکه ضابطه دو تابع شبیه هم هستند و در صورت ساده شدن x ، ضابطه‌های دو تابع برابر می‌شوند ولی دامنه دو تابع با هم متفاوت‌اند، زیرا داریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

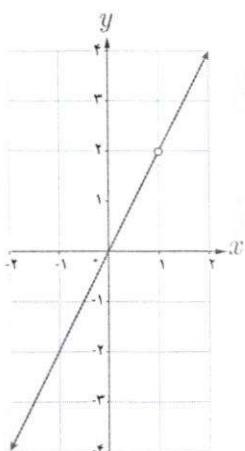
در نتیجه این دو تابع با هم برابر نیستند.

تذکر: همواره دامنه تابع را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می‌کنیم.

کار در کلاس

۱ آیا دو تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2}{x}$ و $g(x) = x$ با هم برابرند؟ چرا؟
 $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
 $D_g = \mathbb{R}$

۲ نمودار مقابل مربوط به کدام یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



(الف) $D_g = \mathbb{R}$ $g(x) = 2x$

(ب) $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ $g(x) = 2x$

(پ) $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ $g(x) = 2x$

(ت) $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ $g(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$

(ث) $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ $g(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x - 2}$

$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

$f(0) = 0$

$f(2) = 4$

$f(-2) = -4$

توابع «ب» و «ت»

توابع رادیکالی

کار در کلاس

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر S تندی جابه‌جایی یک سونامی بر حسب کیلومتر بر ساعت باشد، می‌توان آن را از رابطه $S = 356\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است.

الف) جدول زیر را کامل کنید. ($\sqrt{3} \approx 1/7$, $\sqrt{2} \approx 1/4$)

d	۱	۲	۳	۴
$S = 356\sqrt{d}$	۳۵۶	۴۹۸/۴	۶۰۵٫۲	۷۱۲

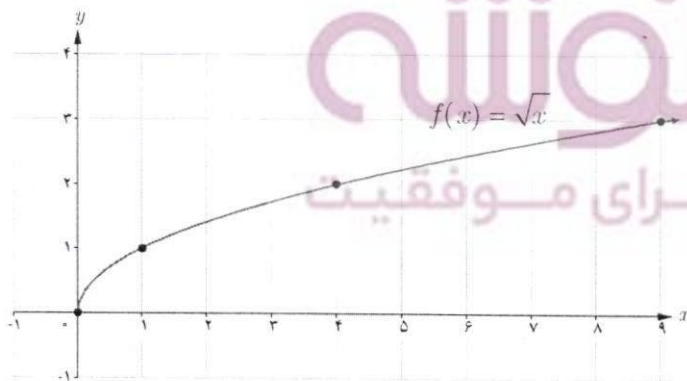
ب) عبارت زیر را کامل کنید.

چون هر عدد، تنها **یک** ... ریشه دوم مثبت دارد، پس رابطه سونامی یک تابع **است**.

پ) کدام یک از اعداد ۵- و ۵ عضو دامنه تابع سونامی است؟ **۵**

مطالعه توابع رادیکالی مانند $S = 356\sqrt{d}$ به دلیل نقش کاربردی آنهاست. در این کتاب با برخی از توابع رادیکالی آشنا می‌شویم. همان‌طور که هنگام کار با تابع رادیکالی سونامی دیدید، دامنه این نوع توابع ممکن است همه اعداد حقیقی نباشد.

ساده‌ترین تابع رادیکالی تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ است. دامنه این تابع مجموعه همه اعداد حقیقی نامنفی و نمودار آن به صورت زیر است.



تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مصلحان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

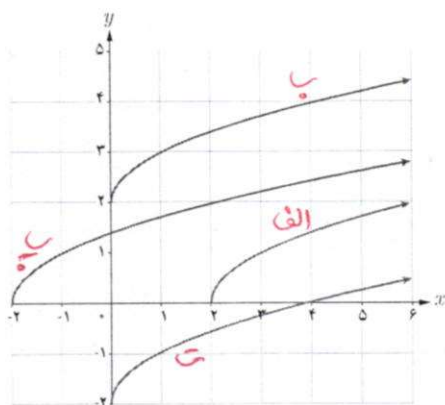
خواندنی

سونامی (آبلرزه) به لرزش شدید آب دریا گفته می‌شود. این اتفاق ممکن است در بی زمین‌لرزه‌های زیر دریا، لغزیدن صخره، انفجار آشفشانی و یا هر حادثه دیگری که انرژی زیادی در دریا آزاد می‌کند، رخ دهد. آبی که به لرزه درآمده است، به شکل موج‌های عظیم به کرانه‌ها می‌رسد و ویرانی به بار می‌آورد. سونامی زمانی شروع می‌شود که حجم عظیمی از آب، به سرعت مرتفع شود. تندی موج‌های سونامی بسته به محل رویداد، ممکن است به بیش از ۸۰۰ کیلومتر در ساعت برسد!

یکی از بزرگ‌ترین سونامی‌ها در سال ۱۳۸۳ در نزدیکی سوماترای اندونزی روی داد و باعث ویرانی عظیمی شد و حدود ۲۰۰ هزار نفر را به کام مرگ کشانید.



در کتاب‌های تاریخ ادعا شده است که قسمت بزرگی از بندر باستانی سیراف ناگهان بر اثر زمین‌لرزه‌ای به زیر آب رفته است. پاسخ دقیق این سوال را که «آیا یک سونامی سیراف را ویران کرده و به زیر آب برده است؟» باید با کمک پژوهش‌های باستان‌شناسی و زمین‌شناسی یافت. با توجه به اینکه میانگین عمق خلیج فارس حدود ۵۰ متر است، نظر شما چیست؟



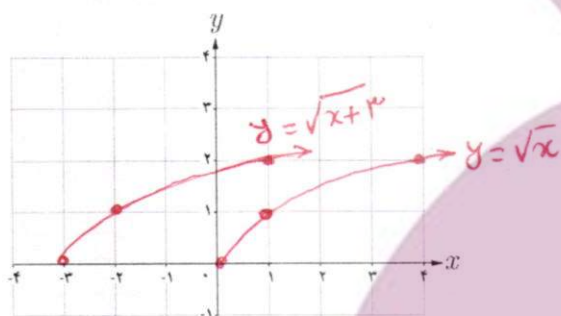
۱ در شکل مقابل با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر رسم شده است. مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است. سپس دامنه آنها را تعیین کنید.

الف) $g(x) = \sqrt{x-2}$ $D_g = [2, +\infty)$ ب) $h(x) = \sqrt{x+2}$ $D_h = [-2, +\infty)$
 پ) $k(x) = \sqrt{x+2}$ $D_k = [-2, +\infty)$ ت) $l(x) = \sqrt{x-2}$ $D_l = [2, +\infty)$

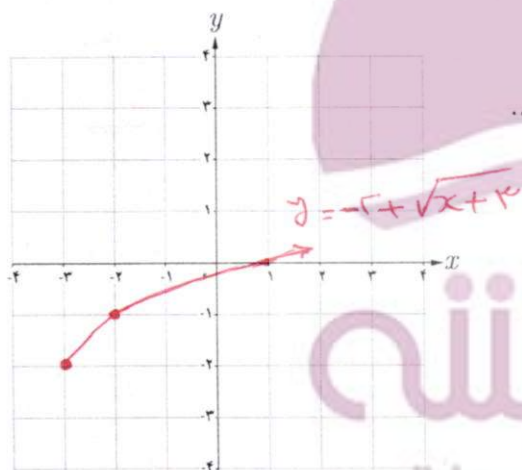
۲ می‌خواهیم نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنیم.

الف) (مرحله اول) نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x}$ در صفحه قبل را در نظر بگیرید.

ب) (مرحله دوم) حال، نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x+3}$ را رسم کنید.

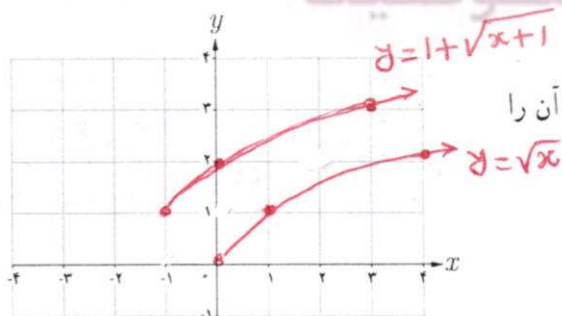


پ) (مرحله سوم) در پایان، نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنید.



ایران توننده
 توننده برای موفقیت

۳ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ را رسم کنید؛ سپس دامنه آن را بیابید.



نهیة کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

فعالیت

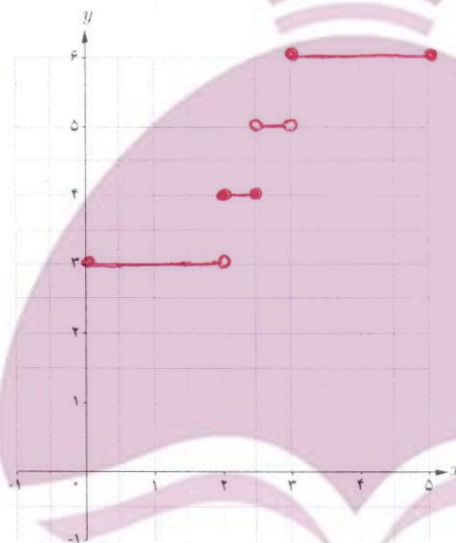
هزینه پارکینگ خودرو

در یک پارکینگ، هزینه پارک خودرو به این صورت محاسبه می‌شود:
الف) ضابطه تابع هزینه پارکینگ خودرو چیست؟

هزینه (هزار تومان)	زمان	
۳	تا کمتر از ۲ ساعت	از هنگام ورود
۴	تا ۲/۵ ساعت	از ۲ ساعت
۵	تا کمتر از ۳ ساعت	از بیشتر از ۲/۵ ساعت
۶	تا ۵ ساعت	از ۳ ساعت

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 2.5 \\ 5 & 2.5 < x < 3 \\ 6 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

(ب) نمودار این تابع را رسم کنید.

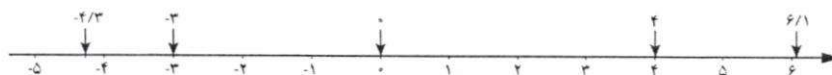


به توابعی مانند تابع هزینه پارکینگ، توابع پله‌ای می‌گویند. توابع پله‌ای در تجارت یا خرید و فروش نقش تعیین کننده‌ای دارند. مشهورترین تابع پله‌ای، تابع جزء صحیح است.

تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیر صحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد. ضابطه این تابع به صورت $f(x) = [x]$ نشان داده می‌شود.

برای مثال داریم:

$$[-4/3] = -5 \quad [0] = 0 \quad [6/1] = 6 \quad [4] = 4 \quad [-3] = -3$$



خواندنی

برای قیمت‌گذاری یک محصول تولیدی خاص، قیمت مواد اولیه تعیین‌کننده است؛ اما بالا و پایین رفتن‌های جزئی قیمت مواد اولیه، قیمت یک محصول را تغییر نمی‌دهد. بنابراین به اعداد بازه‌ای از قیمت‌های مواد اولیه، تنها یک قیمت نهایی محصول را نسبت می‌دهند. به این ترتیب، تابع مورد نظر یک تابع پله‌ای است.

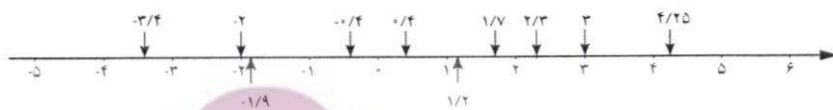
خواندنی

با مراجعه به وب‌گاه رسمی سامانه محاسبه نرخ مرسولات پستی شرکت ملی پست (<http://parcelprice.post.ir>) می‌توانید دو شهر را انتخاب کنید. سپس تابع پله‌ای هزینه ارسال یک بسته را برحسب وزن - قیمت مشاهده کنید.

همان‌طور که در مثال دیدیم، جزء صحیح هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

کار در کلاس

۱ با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته شده را به دست آورید.



$$\begin{aligned} [-3/4] &= -1 & [-2] &= -2 & [-1/9] &= -1 & [0/4] &= 0 & [-0/4] &= -1 \\ [4/25] &= 1 & [3] &= 3 & [2/3] &= 2 & [1/7] &= 1 & [1/2] &= 1 \end{aligned}$$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left[\frac{41}{37} \right] = 1 \quad \left[-\frac{13}{51} \right] = -1$$

فعالیت

۱ اگر $[x] = 2$ ، آنگاه x برابر چه اعدادی می‌تواند باشد؟ مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید.

$$[x] = 2 \iff 2 \leq x < 3 \quad \text{بازه } [2, 3)$$

۲ برای رسم نمودار یک تابع جزء صحیح باید توجه کنیم که اعداد هر بازه‌ای از دامنه، به چه عددی نسبت داده می‌شود. برای مثال اگر $0 \leq x < 1$ ، آنگاه $[x] = 0$ ؛ پس مقدار تابع $f(x) = [x]$ برای همه اعداد عضو بازه $[0, 1)$ برابر صفر می‌شود. در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ رسم شده است. نمودار این تابع را در بازه $[-4, 4]$ تکمیل کنید.

۳ الف) به دلخواه نقطه‌ای مانند a را روی محور اعداد داده شده مشخص کنید.

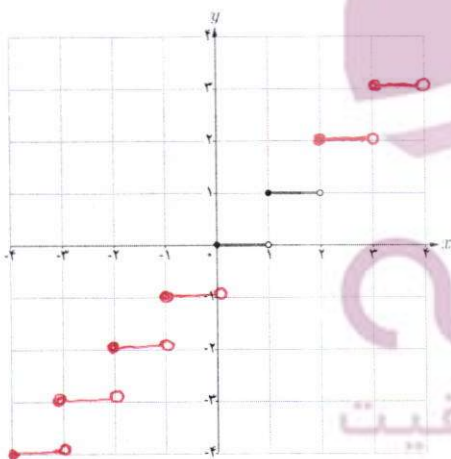
ب) نقطه $a + 3$ را روی این محور مشخص کنید.

پ) نقاط $[a]$ و $[a + 3]$ را روی محور مشخص کنید.

ت) چه رابطه‌ای بین $[a]$ و $[a + 3]$ برقرار است؟

ث) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

«اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a + n] = [a] + n$ »



$$\begin{aligned} a &\downarrow & a+3 &\downarrow \\ [a] &= 1 & [a+3] &= 4 \end{aligned}$$

$$[a+3] = [a] + 3$$

۱ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ و با دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$ را رسم کنید.

۲ دامنه تابع گویای با ضابطه $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ را به دست آورید.

۳ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$ ب $f(x) = x-2$, $g(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

۴ تابعی گویا بنویسید که دامنه اش برابر $\mathbb{R} - \{-1\}$ شود. پاسخ خود را با جواب دوستانان مقایسه کنید.

۵ نمودار تابع با ضابطه $g(x) = -3 + \sqrt{x-4}$ را رسم کنید.

۶ حاصل عبارت های مقابل را حساب کنید.

$$[300/4002]$$

$$[-103/003]$$

$$[-2309/54]$$

۷ تابع پله ای روبه رو را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \in [1, 5] \\ 2 & x \in (6, 7] \end{cases}$$

۸ تابع با ضابطه $f(x) = [x] + 2$ و دامنه $D_f = [-3, 3]$ را رسم کنید.

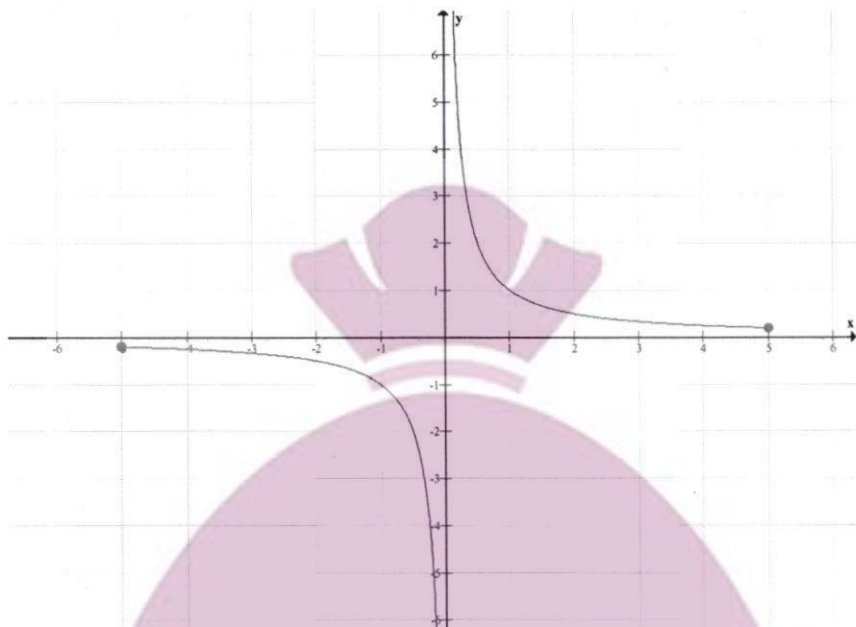
خواندنی

تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ به طور تقریبی
قد متوسط کودکان^۱ را برحسب
سالی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان
می دهد. در این تابع x نشان دهنده
ماه های پس از تولد است.
قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریباً
چقدر است؟
در چه سنی قد متوسط یک کودک
تقریباً یک متر می شود؟

۱- کودکان حاضر در تصویر، فرزندان نهادهای مدافع حرم هستند.

حل تمرین صفحه ی ۵۶ (ریاضی ۲)

۱ : با انتخاب چند نقطه در دامنه ی تعیین شده، می توان نمودار را رسم نمود.



۲ :

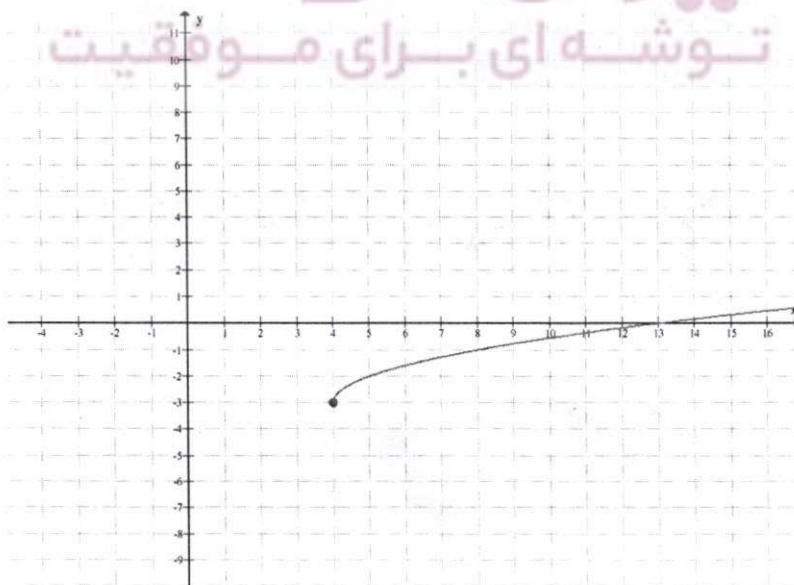
$$x - 3 = 0 \rightarrow D_f = R - \{3\}$$

۳ : الف : دو تابع داده شده ، مساویند. (دو شرط تعریف توابع مساوی را دارند.)

ب : دو تابع داده شده، دامنه های مساوی ندارند، لذا مساوی نیستند.

۴ : سؤال، جواب های متعدد دارد. مثلاً $f(x) = \frac{2}{x+1}$

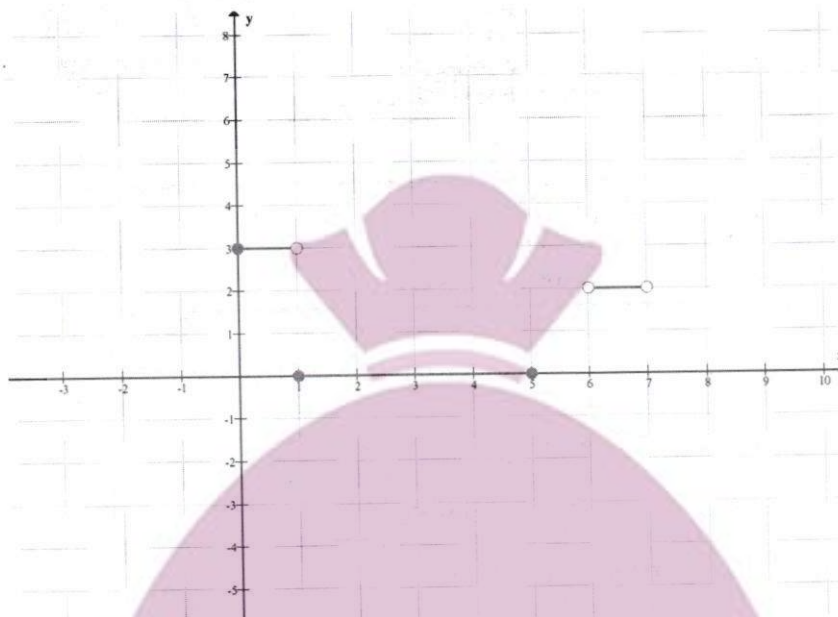
۵ : به کمک انتقال نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ می توان نمودار این تابع را رسم کرد.



:۶

$$[300/4002]=300 \text{ و } [-103/003]=-104 \text{ و } [-2309/54]=-2310$$

:۷



:۸

$$x \in [-3, -2) \xrightarrow{[x]=-3} y = -3 + 2 = -1$$

$$x \in [-2, -1) \xrightarrow{[x]=-2} y = -2 + 2 = 0$$

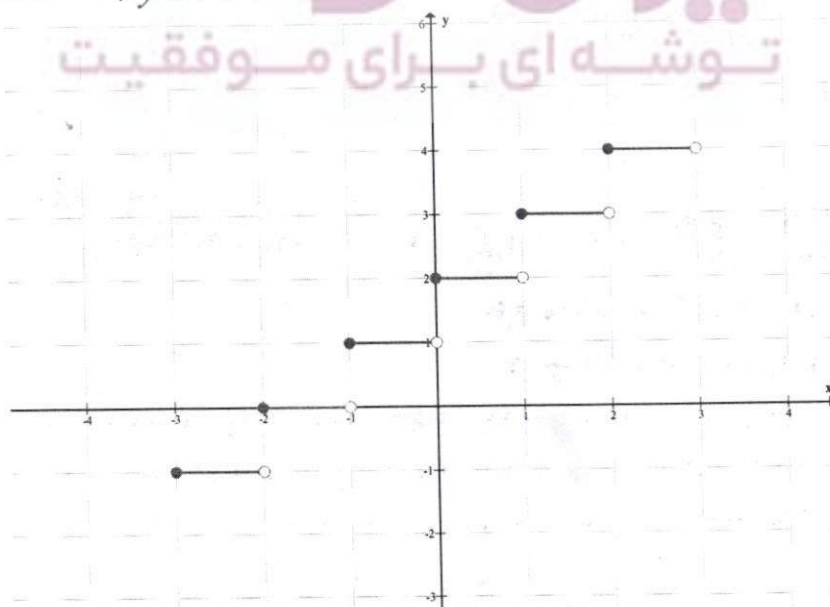
$$x \in [-1, 0) \xrightarrow{[x]=-1} y = -1 + 2 = 1$$

$$x \in [0, 1) \xrightarrow{[x]=0} y = 0 + 2 = 2$$

$$x \in [1, 2) \xrightarrow{[x]=1} y = 1 + 2 = 3$$

$$x \in [2, 3) \xrightarrow{[x]=2} y = 2 + 2 = 4$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



الف) هر مایل تقریباً $\frac{1}{6}$ کیلومتر است. تعیین کنید که هر یک از جملات سمت راست مربوط به کدام یک از رابطه‌های سمت چپ است.

$$f(x) = \frac{8}{5}x \quad \longleftrightarrow \quad \text{این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است.}$$

$$g(x) = \frac{5}{8}x \quad \longleftrightarrow \quad \text{این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است.}$$



ب) تندی 30° مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟
 $f(30) = \frac{8}{5} \times 30 = 48 \text{ km/h}$
 هر تابع با ضابطه $y=f(x)$ بیان می‌کند که متغیر y چه ارتباطی با متغیر x دارد و چگونه می‌توان با در دست داشتن مقدار x ، مقدار y را به دست آورد. اما گاهی مهم است که بدانیم چگونه می‌توان از مقدار y به مقدار x رسید. تبدیل یکای اندازه‌گیری نمونه‌ای ساده از این حالت است.

به خاطر دارید که یک تابع را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد.

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a, b) می‌توان زوج مرتب (b, a) را به دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همه زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطه جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

برای مثال وارون تابع $f = \{(6, 4), (5, 3), (2, 1)\}$ برابر با $f^{-1} = \{(4, 6), (3, 5), (1, 2)\}$ است.

وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$$s = \{(4, 1), (1, 4), (3, 3), (2, 5)\}$$

$$s^{-1} = \{(1, 4), (4, 1), (3, 3), (5, 2)\}$$

$$t = \{(5, 1), (1, 4), (4, 3), (2, 3)\}$$

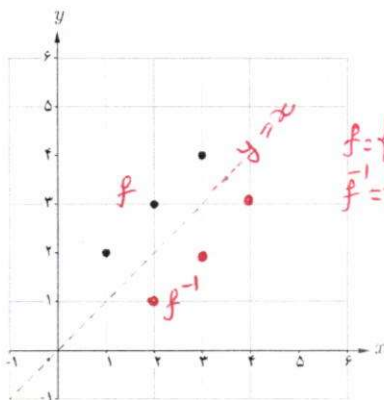
$$t^{-1} = \{(1, 5), (4, 1), (3, 4), (3, 2)\}$$

$$u = \{(2, 3), (5, 2), (4, 1), (3, 4)\}$$

$$u^{-1} = \{(3, 2), (2, 5), (1, 4), (4, 3)\}$$

خواندنی

سال‌هاست که ریاضی‌دانان، با کمک داده‌های آماری جمعیت، تلاش می‌کنند به تابع تخمین جمعیت دست یابند و در این زمینه به نتایجی هم رسیده‌اند. این تابع نشان می‌دهد که مثلاً در سال 1420 جمعیت ایران چه تعداد خواهد بود. با این همه، در عمل معمولاً وارون این تابع نیز اهمیت دارد؛ به عنوان مثال مهم است که مشخص کنیم در چه سالی جمعیت ایران به 100 میلیون نفر خواهد رسید. در فصل پنجم با نمونه‌ای از توابع تخمین جمعیت آشنا خواهید شد.



۱ در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع f رسم شده است.

الف) تابع f را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید. $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

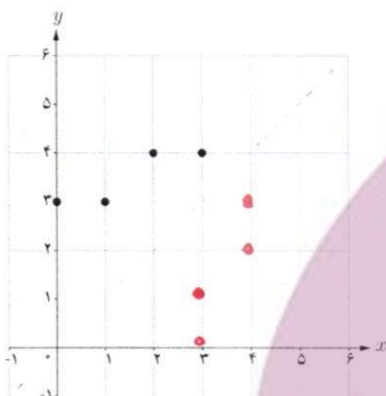
ب) تابع f^{-1} را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید. $f^{-1} = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$

پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

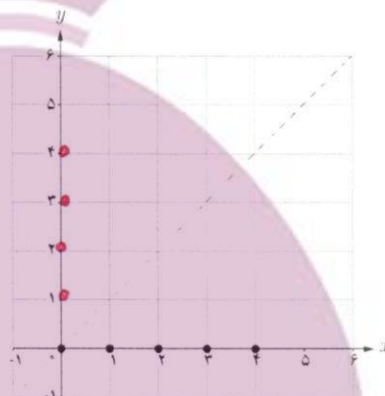
ت) نمودار f و f^{-1} چه ارتباطی با هم دارند؟

«نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$... قرینه یکدیگرند».

۲ الف) در هر مورد بیان کنید چرا نمودار داده شده معرف یک تابع وارون آن را رسم کنید.
 هر خط موازی محور عرضها نمودار آن را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.



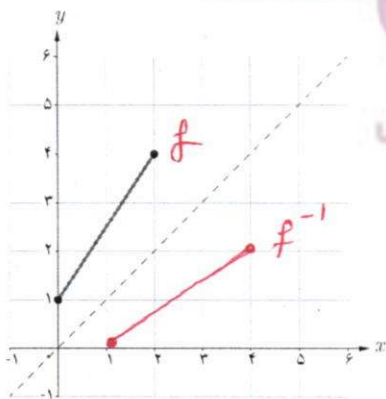
f تابع است.
 f^{-1} تابع است.



f تابع است.
 f^{-1} تابع است.

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

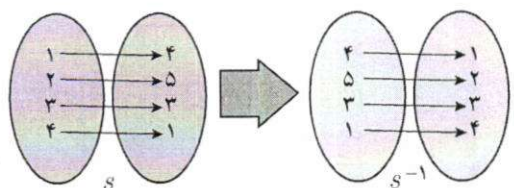
برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه نمودار آن تابع را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.



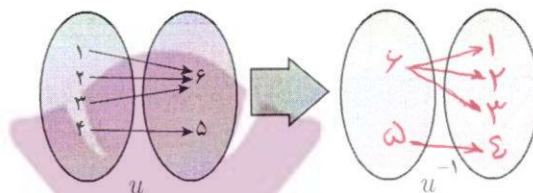
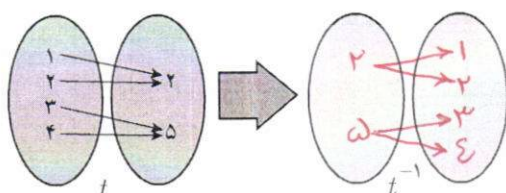
۳ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

$$(2,4) \rightsquigarrow (4,2)$$

$$(0,1) \rightsquigarrow (1,0)$$



۱ الف) به نمونه داده شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به دست آورید.



ب) در جدول مقابل گزینه‌های درست را انتخاب کنید.

☒ بله	☐ خیر	s^{-1} یک تابع است.
☒ بله	☐ خیر	t^{-1} یک تابع است.
☒ بله	☐ خیر	u^{-1} یک تابع است.

پ) عبارت زیر را کامل کنید.

وارون تابع f ، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه‌های $\dots$ تکراری وجود نداشته باشد.

به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می‌گوییم.

تذکر: وارون هر تابع یک به یک، خود یک تابع است.

ت) تابع $f = \{(1, 2), (-2, 4), (2, -1), (-1, 2)\}$ را در نظر بگیرید. بدون محاسبه f^{-1} ، تعیین کنید که این تابع یک به یک است یا خیر؟

۲ نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.

الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی

مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی

مربوط به گروه خونی است.

ب) آیا f و g هر دو تابع اند؟

پ) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می‌توان

گفت؟

ت) کدام یک از دو تابع f و g یک به یک هستند؟

ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

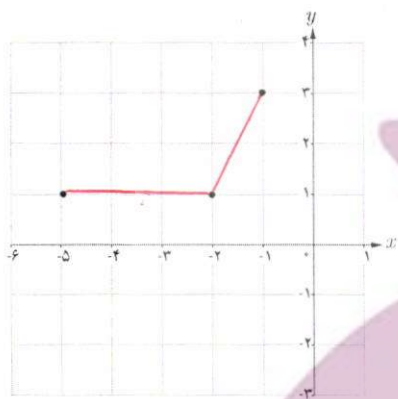
با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین نمی‌شود.

با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین می‌شود.

هر شخص گروه خونی مشابه دیگر
می‌تواند داشته باشد ولی
اثر انگشت وی مختص او
است.

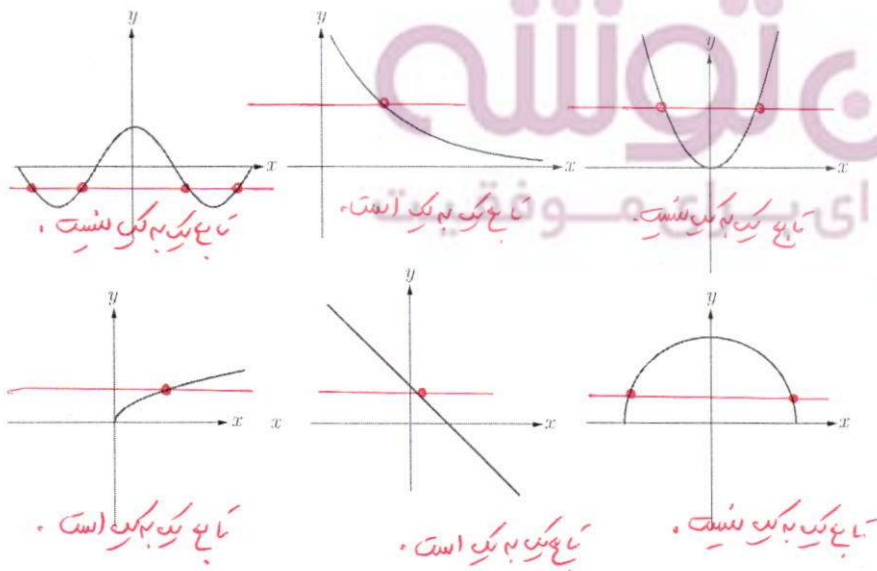
فعالیت

- ۱ در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نموداری رسم کنید که تابع باشد.
- (الف) آیا تابعی که رسم کرده‌اید یک به یک است؟ **خیر**
- (ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می‌توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک به یک است یا خیر؟



اگر هر خط موازی محور **طول** ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن گاه آن تابع یک به یک است.

۲ کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟



خواندنی

قرن‌ها پیش رشیدالدین فضل‌الله همدانی، طبیب و مورخ برجسته ایرانی در کتاب جامع التواریخ به رسم چینی‌ها در شناسایی افراد از طریق اثر انگشت اشاره کرده و توضیح داده بود که «شواهد و تجربیات نشان می‌دهد که اثر انگشت هیچ دو نفری کاملاً یکسان نیست». در آن زمان در ایران نیز از اثر انگشت شست برای مهر کردن اسناد استفاده می‌کردند. در اوایل قرن بیستم، غربی‌ها نیز با الهام گرفتن از شرقی‌ها برای شناسایی در تحقیقات جنایی از اثر انگشت بهره گرفتند. امروزه تشخیص اثر انگشت به عنوان یکی از دقیق‌ترین و سریع‌ترین روش بیومتریک در حفظ امنیت سیستم‌های کنترل دسترسی و همچنین در ساعت‌های حضور و غیاب، کاربرد بسیاری دارد.

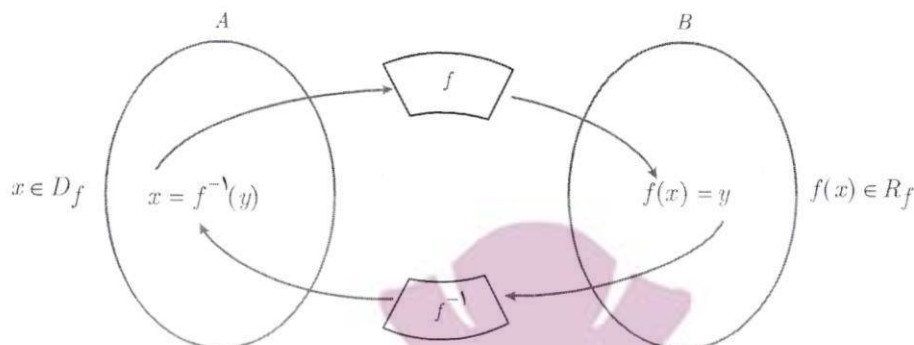


گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می دهد. (R_f نماد برد تابع f است).

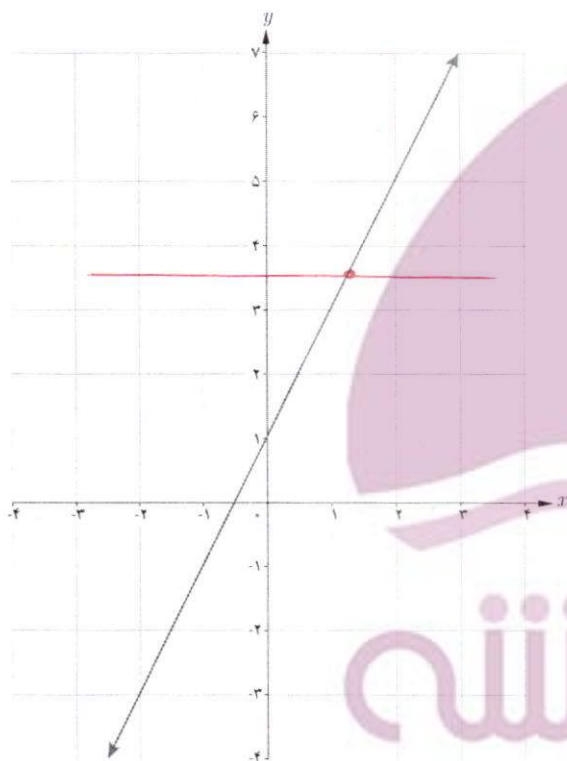


فعالیت

تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می گیریم.

الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

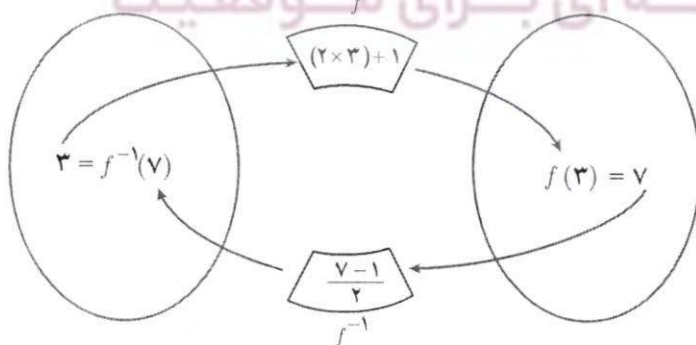
هر خط موازی محور طولها نمودار آنرا در بیش از یک نقطه قطع نمی کند.



ب) نمودار زیر را توضیح دهید:

$$(3, 7) \in f \quad \text{و} \quad (7, 3) \in f^{-1}$$

به عبارت دیگر $f(3) = 7$ و $f^{-1}(7) = 3$

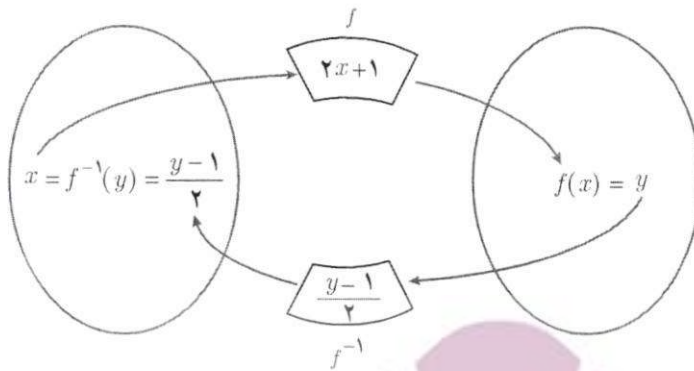


$$x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{+1} 2x + 1$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$x \xrightarrow{-1} x - 1 \xrightarrow{\div 2} \frac{x - 1}{2}$$

پ) در حالت کلی برای هر عضو دامنه تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ ، داریم:



ت) بنابراین می توان نوشت:

$$f(x) = 2x + 1 \quad (x \in D_f)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2} \quad (y \in R_f)$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه f^{-1} همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای f^{-1} به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

به طور کلی:

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f ، در معادله $y = f(x)$ ، x را بر حسب y محاسبه می کنیم. سپس با جابه جا کردن y و x ، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

وارون تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ ، چنین محاسبه می شود:

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x = y - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

کارد در کلاس

۱) هر تابع خطی غیر ثابت یک به یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = x + 5$

زیرا یک به یک است.

$$f^{-1}(x) = x - 5$$

ب) $g(x) = 4x$

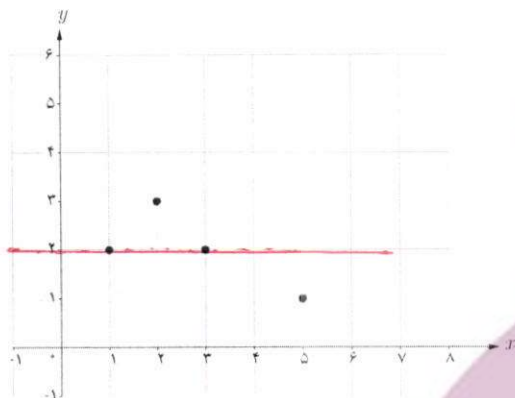
$g^{-1}(x) = \frac{x}{4}$

پ) $u(x) = 2x + 3$

$u^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

ت) $v(x) = \frac{2}{3}x - 4$

$v^{-1}(x) = \frac{3}{2}(x+4)$



۲ الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک به یک نیست؟

خط $y=2$ نمودار را در دو نقطه قطع می کند.

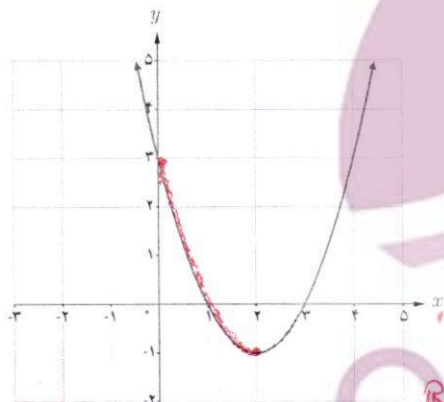
ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید.

مسئله چند جواب دارد؟ مسئله در جواب دارد.

یا نقطه $(3, 2)$ را حذف کنید یا $(1, 2)$

در هر حالت تابع یک به یک به دست می آید.

کار در کلاس



الف) به نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 4x + 3$ در شکل مقابل، دقت کنید.

با محدود کردن دامنه این تابع روی کدام بازه های زیر می توان یک تابع یک به یک ساخت؟

☐ $[1, 4]$

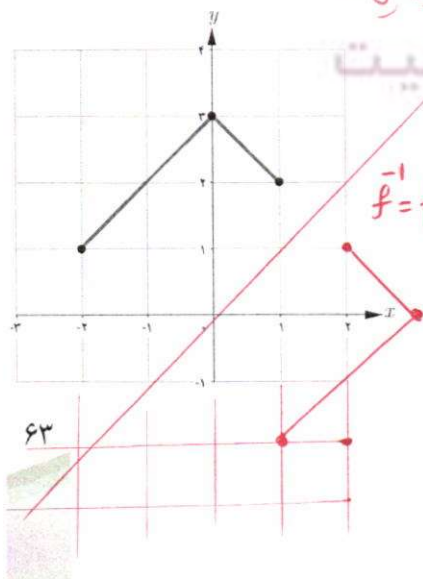
☒ $[0, 2]$

ب) آیا هر تابع درجه ۲، تابعی یک به یک است؟ چرا؟ هر تابع درجه ۲ با دامنه $\mathbb{R}$

یک سهمی است و هر خط موازی محور طولها، تواند نمودار آنرا در دو نقطه قطع کند. یعنی

یک به یک نیست.

تمرین



۱ وارون تابع $f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2)\}$ را به دست آورید.

$f^{-1} = \{(3, 2), (1, -2), (2, -1)\}$

۲ نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.

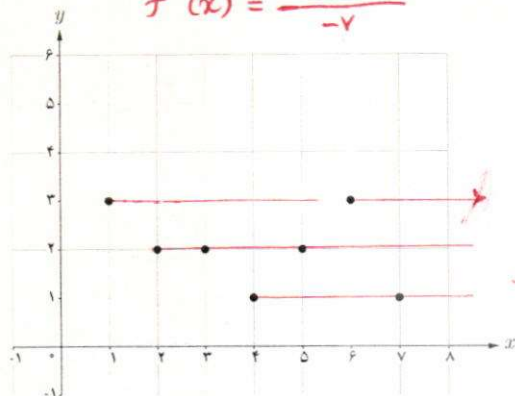
تابع یک به یک نیست $\rightarrow f$

۲ ضابطه وارون هر یک از توابع با ضابطه های زیر را بیابید. $f^{-1}(x) = \frac{5}{3}(x-4)$

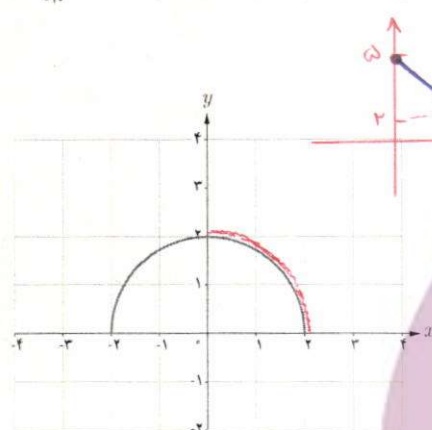
ب) $f(x) = \frac{-7x+3}{5}$
 $f^{-1}(x) = \frac{5x-3}{-7}$

الف) $f(x) = 5x-2$
 $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$

۴ می خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک به یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه می تواند باقی بماند؟



۱ نقطه حذف
 ۲ نقطه حذف
 ۳ نقطه حذف

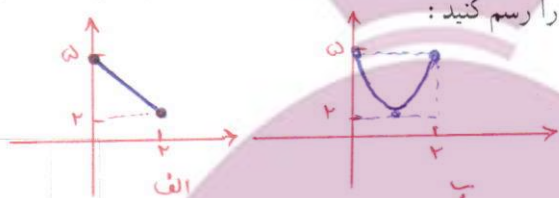


نمودار در بازه $[0, 2]$ تابع یک به یک می شود.

۵ نمودار تابعی با دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ را رسم کنید:

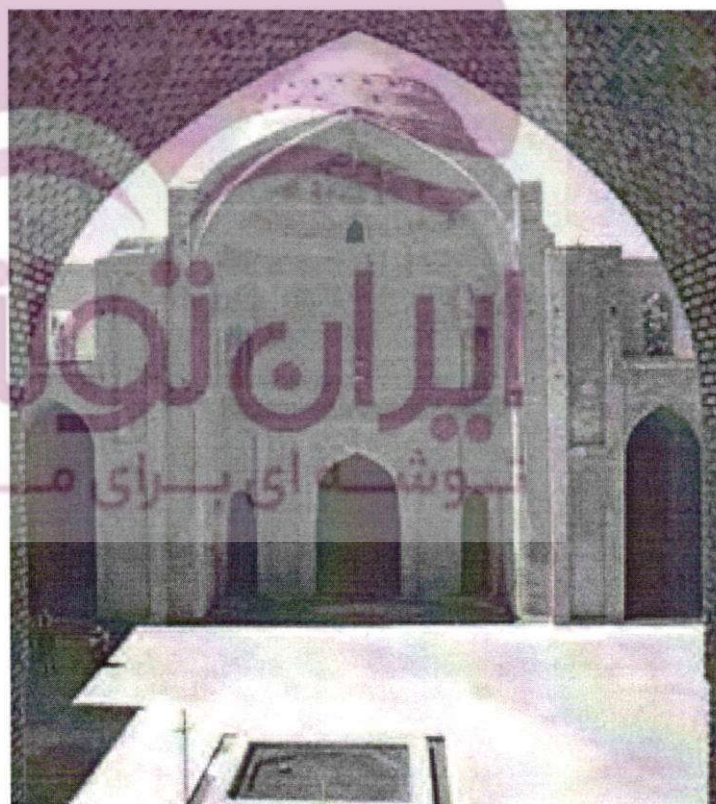
الف) به شرطی که این تابع یک به یک باشد.

ب) به شرطی که این تابع یک به یک نباشد.



۶ با حذف بخشی از نمودار نیم دایره داده شده، نمودار یک تابع یک به یک را

مشخص کنید.



اگر f و g به ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

نام عمل	تعریف ضابطه	تعریف دامنه
جمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
ضرب *	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

فعالیت

اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x - 2$ ، آنگاه مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم آنها $\left(\frac{f}{g}\right)$ را به دست آورید و دامنه هر یک را مشخص کنید.
حل:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x - 1) + (x - 2) = 3x - 3$$

$$(f-g)(x) = (2x - 1) - (x - 2) = x + 1$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x - 1) \cdot (x - 2) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

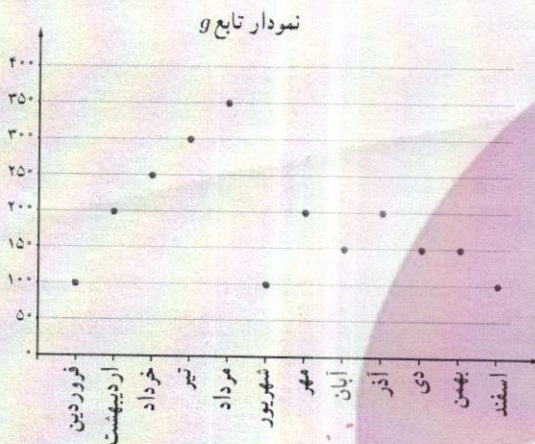
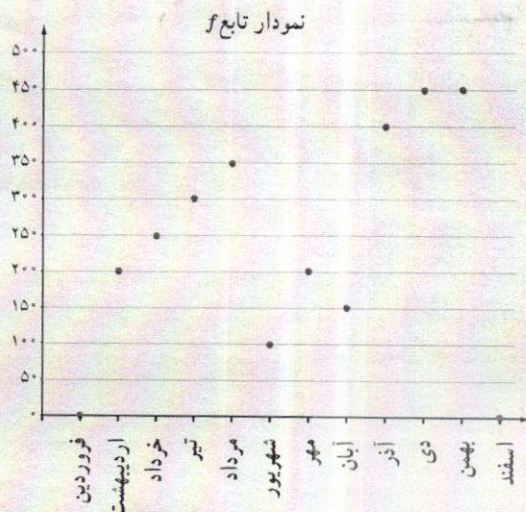
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-1}{x-2}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{x \mid x - 2 = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

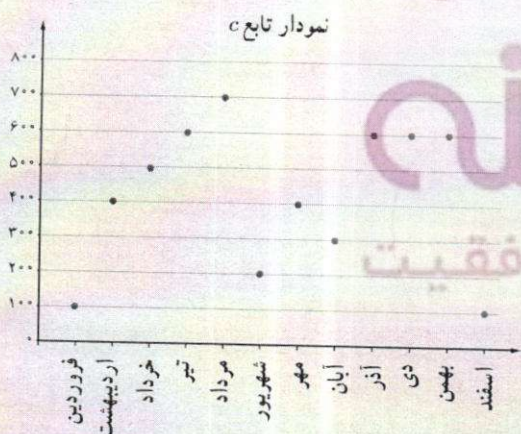
* ضرب دو تابع f و g را با نمادهای $f \times g$ و یا fg هم نشان می‌دهند.

خواندنی

علی در یک کارگاه خانگی، محصولات دست‌دوز چرمی تولید می‌کند. او بخشی از مواد و لوازم مورد نیاز خود را از فروشگاه چرم و بخشی را از فروشگاه ابزار و یراق خریداری می‌کند. وی پس از تولید محصولات هنری، آنها را در بازارچه‌های کارآفرینی به فروش می‌رساند. نمودارهای زیر مقدار خرید او را در یک سال نشان می‌دهد. نمودار تابع f نشان می‌دهد که در هر ماه سال گذشته، چند هزار تومان چرم خریداری شده است؛ برای مثال با توجه به شکل، $f(\text{تیر}) = 300$. پس این هنرمند در چهارمین ماه سال، ۳۰۰ هزار تومان چرم خریده است.



نمودار تابع g نشان می‌دهد که این هنرمند در هر ماه سال گذشته چند هزار تومان ابزار و یراق خریده است.



پس در واقع هزینه‌ای که علی در کارگاه خود دارد، شامل دو بخش است؛ هزینه چرم و هزینه ابزار و یراق. به زبان ساده، «هزینه» او شامل قیمت همه مواد و لوازم خریداری شده است. در شکل روبه‌رو نمودار تابع هزینه خرید علی در سال گذشته رسم شده است. این تابع را با c نشان می‌دهیم.

الف) بر روی شکل، درستی مقدارهای تابع c را برای ماه‌های فصل زمستان بررسی کنید.

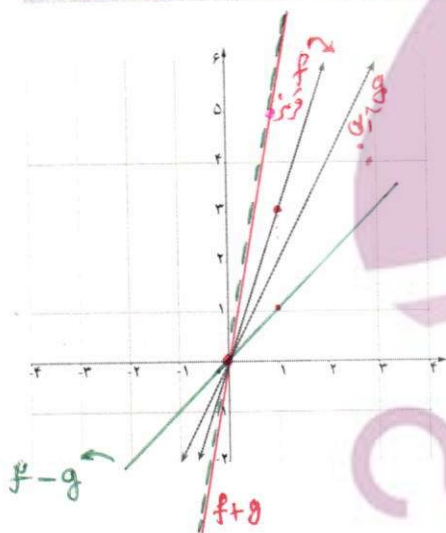
ب) آیا برای هر x در دامنه تابع c ، $c(x) = f(x) + g(x)$ درست است؟ همچنان که می‌بینید برای به‌دست آوردن مقادیر تابع c ، مقادیر دو تابع f و g را با هم جمع می‌کنیم.

۱ برای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 + 3x + 1$ و $g(x) = x - 3$ جدول داده شده را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = x^2 + 4x - 2$	$\mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x) = x^2 + 2x + 4$	$\mathbb{R}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = x^3 - 8x - 3$	$\mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 3}$	$\mathbb{R} - \{3\}$

۲ برای دو تابع با ضابطه‌های $u(x) = \sqrt{x} + 1$ و $v(x) = x - 1$ جدول داده شده را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$u+v$	$(u+v)(x) = \sqrt{x} + x$	$[0, +\infty)$
$u-v$	$(u-v)(x) = \sqrt{x} - x + 2$	$[0, +\infty)$
$u \cdot v$	$(u \cdot v)(x) = x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - 1$	$[0, +\infty)$
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$	$[0, +\infty) - \{1\}$



مطابق شکل، دو تابع f و g به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند. الف) ضابطه دو تابع f و g را به دست آورید.

$$g(x) = 2x$$

$$f(x) = 3x$$

ب) ضابطه دو تابع $f+g$ و $f-g$ را به دست آورید.

$$(f+g)(x) = 3x + 2x = 5x \quad (f-g)(x) = 3x - 2x = x$$

ایران تونش

ب) با تکمیل جدول مقابل، نمودارهای توابع $f+g$ و $f-g$ را با رنگ‌های مختلف رسم کنید.

ت) آیا جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است؟ در مورد تفریق آنها چه می‌توان گفت؟

x	۰	۱
$f(x)$	۰	۳
$g(x)$	۰	۲
$(f+g)(x)$	۰	۵
$(f-g)(x)$	۰	۱

$$f(x) = ax + b$$

$$g(x) = cx + d$$

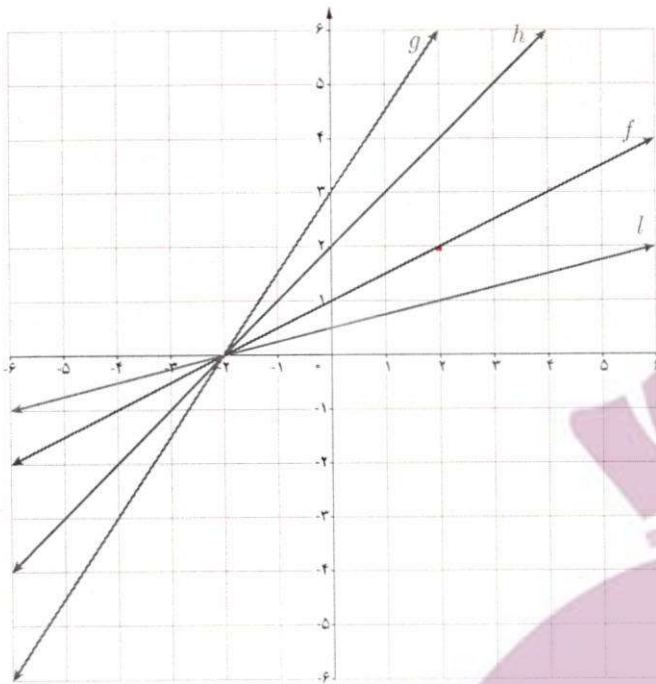
توابع خطی

$$(f+g)(x) = (a+c)x + (b+d)$$

$$(f-g)(x) = (a-c)x + (b-d)$$

تابع خطی

تابع خطی



با توجه به شکل دیده می‌شود که $l(x) = \frac{1}{3}f(x)$. جاهای خالی را پر کنید.

$$g(x) = \dots \cdot f(x)$$

$$h(x) = \dots \cdot f(x)$$

ابتدا جدول شکل می‌دهیم.

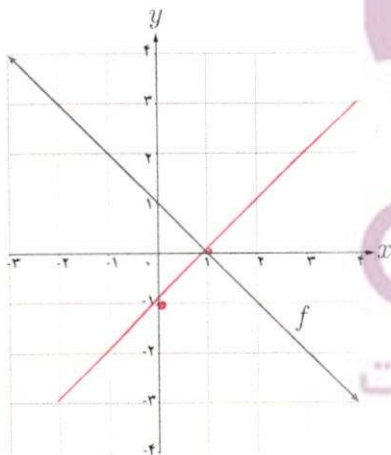
x	0	2	-6	-2
f(x)	1	2	-2	0
g(x)	3	6	-6	0
h(x)	2	4	-4	0
L(x)	$\frac{1}{3}$	1	-1	0

$$g(x) = 3f(x)$$

$$h(x) = 2f(x)$$

با توجه به نمودار فوق ملاحظه می‌شود که :

اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

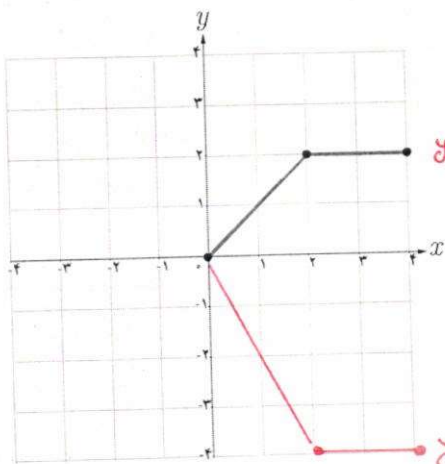


۱ با توجه به نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ را رسم کنید.

۲ عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ کافی است قرینه نمودار تابع ضابطه $y = f(x)$ را نسبت به محور y طولها رسم کنیم.

۳ در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع با ضابطه $y = -2f(x)$ را رسم کنید.



x	0	2	4
$f(x)$	0	2	2
$-2f(x)$	0	-4	-4

تمرین

۱ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -|x|$

ب) $h(x) = -|x-3|$

پ) $l(x) = 2|x-2|$

۲ در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

$f(x) = x^2 - 4$

ب) $g(x) = x + 2$

$f(x) = |x|$

الف) $g(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{x-2}{x+5}$

ت) $g(x) = x^2 + 3x - 1$

$f(x) = \sqrt{x}$

ب) $g(x) = -\sqrt{x}$

ث) $f = \{(2,5), (3,4), (0,-2)\}$ $g = \{(-1,2), (0,3), (2,4), (3,0)\}$

۳ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

ب) $t(x) = -3\sqrt{x}$

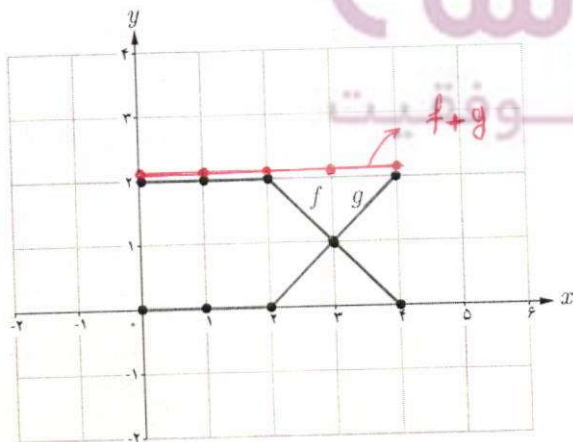
ب) $s(x) = -\sqrt{x-2}$

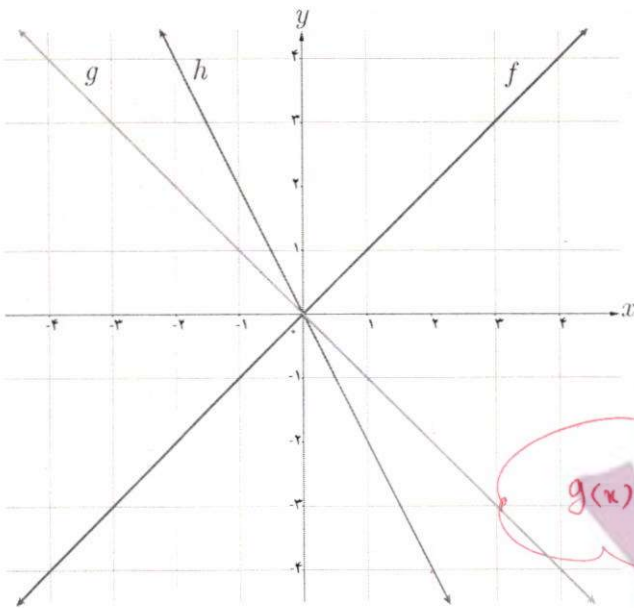
الف) $r(x) = 2\sqrt{x}$

ث) $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$

ت) $u(x) = 1 - \sqrt{x}$

۴ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.





۵ با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام یک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟

x	۰	۱	۲	-۱
$f(x)$	۰	۱	۲	-۱
$g(x)$	۰	-۱	-۲	۱
$h(x)$	۰	-۲	-۴	۲

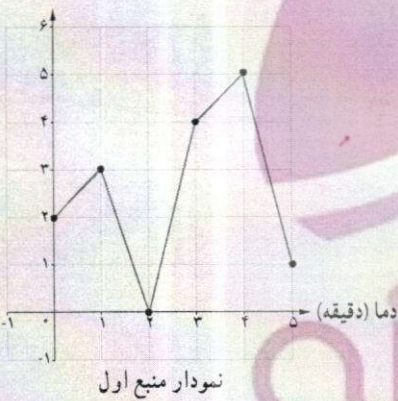
$$g(x) = f(x) + h(x)$$

با توجه به جدول

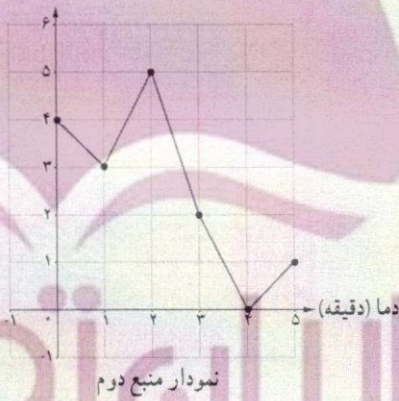
خواندنی

یک اجاق دارای دو منبع گرمایی قابل تنظیم است که می‌توانند هم‌زمان، به‌طور مستقل و جدا از هم گرما تولید کنند. نمودار دمایی که این دو منبع گرمایی تولید می‌کنند، به‌صورت زیر است. این نمودارها نشان می‌دهد که در عرض ۵ دقیقه، چگونه مقدار دما افزایش و یا کاهش می‌یابد. با توجه به نمودارهای زیر بیشترین و کمترین دمایی که در این اجاق تولید می‌شود چه مقدار است؟

درجه گرمایی



درجه گرمایی

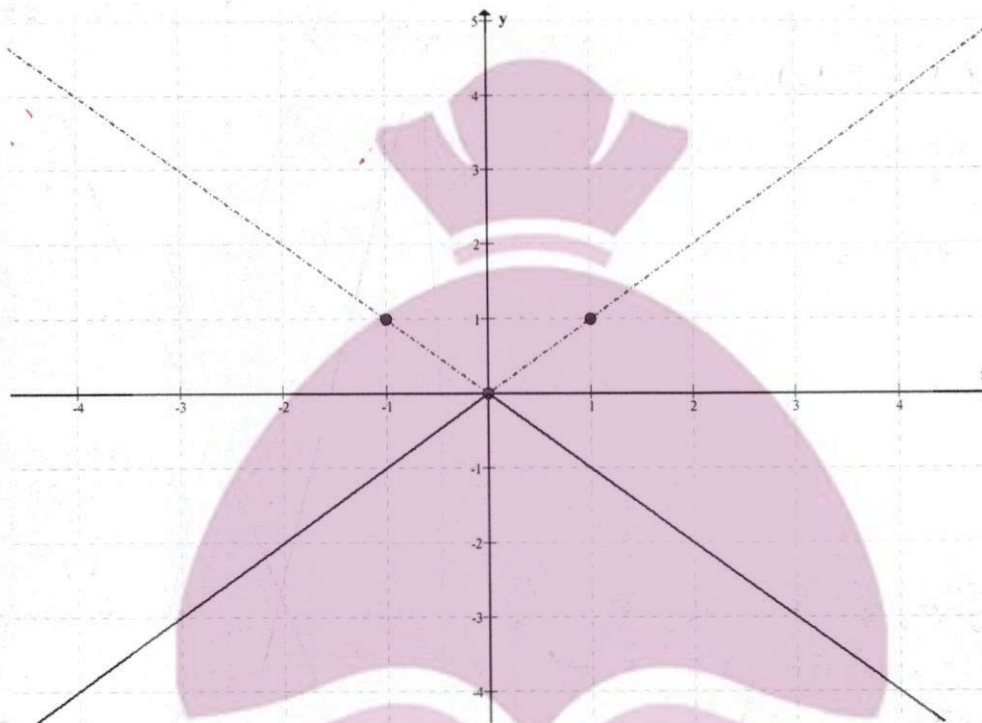


ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

حل تمرین های صفحه ی ۶۹ (ریاضی ۲)

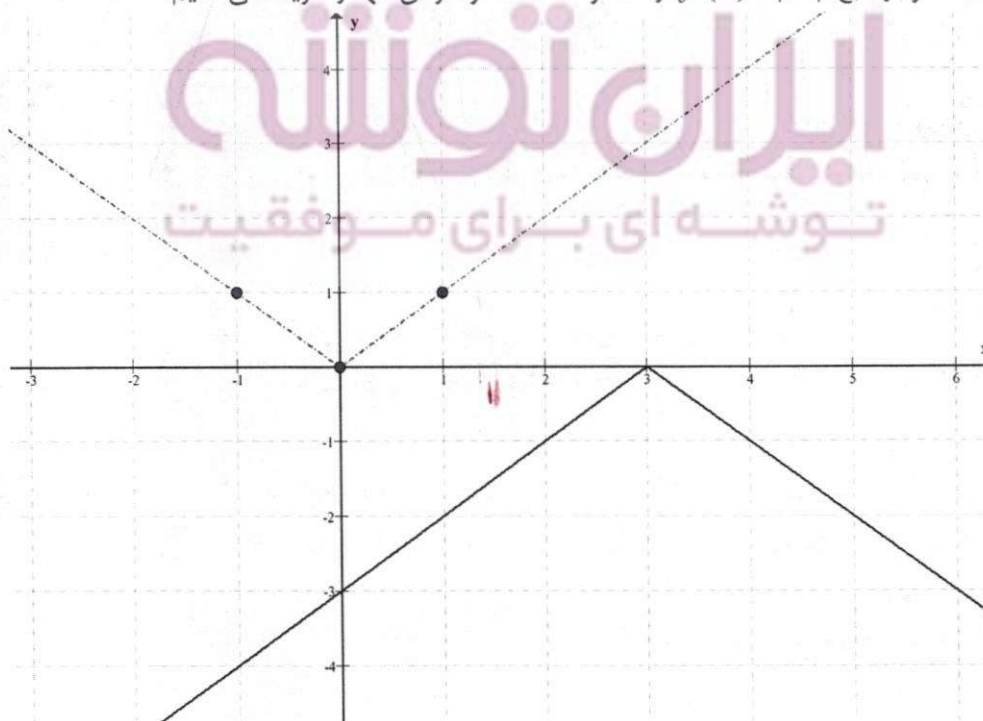
۱: ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x|$ را رسم می کنیم. سپس به کمک آن نمودار هر تابع را رسم می نماییم.
الف) $g(x) = -|x|$

عرض تمام نقاط تابع $f(x) = |x|$ را قرینه می کنیم.



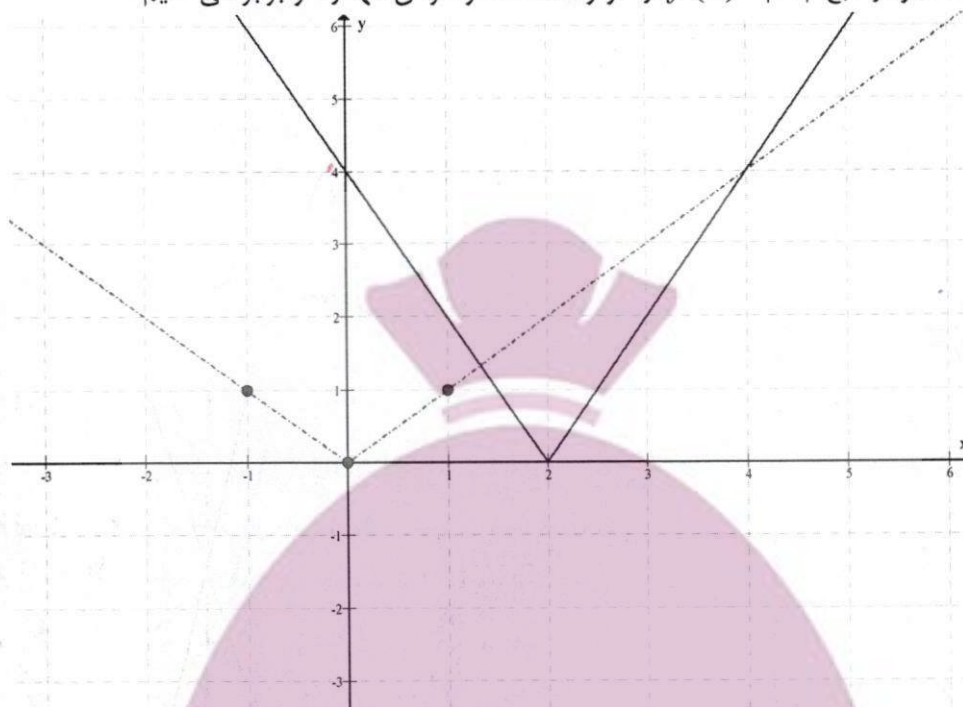
ب) $g(x) = -|x - 3|$

طول نقاط نمودار تابع $f(x) = |x|$ را سه واحد اضافه و عرض آنها را قرینه می کنیم.



پ) $g(x) = 2|x - 2|$

طول نقاط نمودار تابع $f(x) = |x|$ را دو واحد اضافه و عرض آنها را دو برابر می کنیم.



:۲

(الف)

عمل	ضابطه	دامنه
جمع	$(f + g)(x) = x + \frac{1}{x}$	$R - \{0\}$
تفریق	$(f - g)(x) = x - \frac{1}{x}$	$R - \{0\}$
ضرب	$(f \times g)(x) = x \times \frac{1}{x} = \frac{ x }{x}$	$R - \{0\}$
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{ x }{\frac{1}{x}} = x x $	$R - \{0\}$

(ب)

عمل	ضابطه	دامنه
جمع	$(f + g)(x) = (x^2 - 4) + (x + 2) = x^2 + x - 2$	R
تفریق	$(f - g)(x) = (x^2 - 4) - (x + 2) = x^2 - x - 6$	R
ضرب	$(f \times g)(x) = (x^2 - 4) \times (x + 2) = x^3 - 2x^2 - 4x - 8$	R
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = x - 2$	$R - \{-2\}$

(پ)

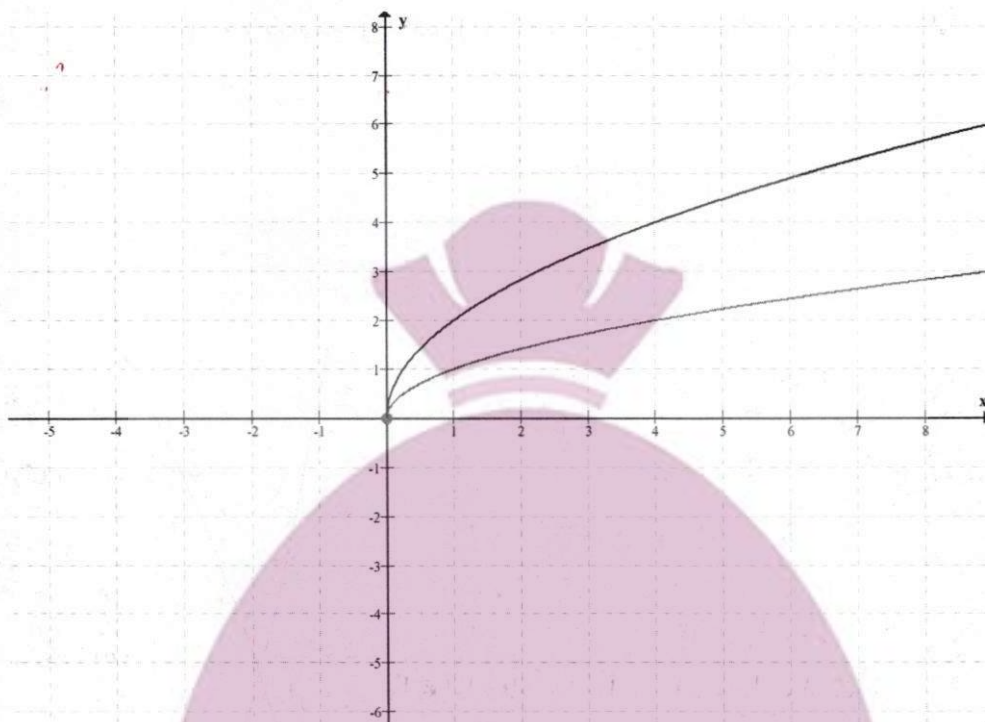
عمل	ضابطه	دامنه
جمع	$(f + g)(x) = \sqrt{x} + (-\sqrt{x}) = 0$	$[0, +\infty)$
تفریق	$(f - g)(x) = \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$	$[0, +\infty)$
ضرب	$(f \times g)(x) = \sqrt{x} + (-\sqrt{x}) = -x$	$[0, +\infty)$
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = -1$	$(0, +\infty)$

(ت)

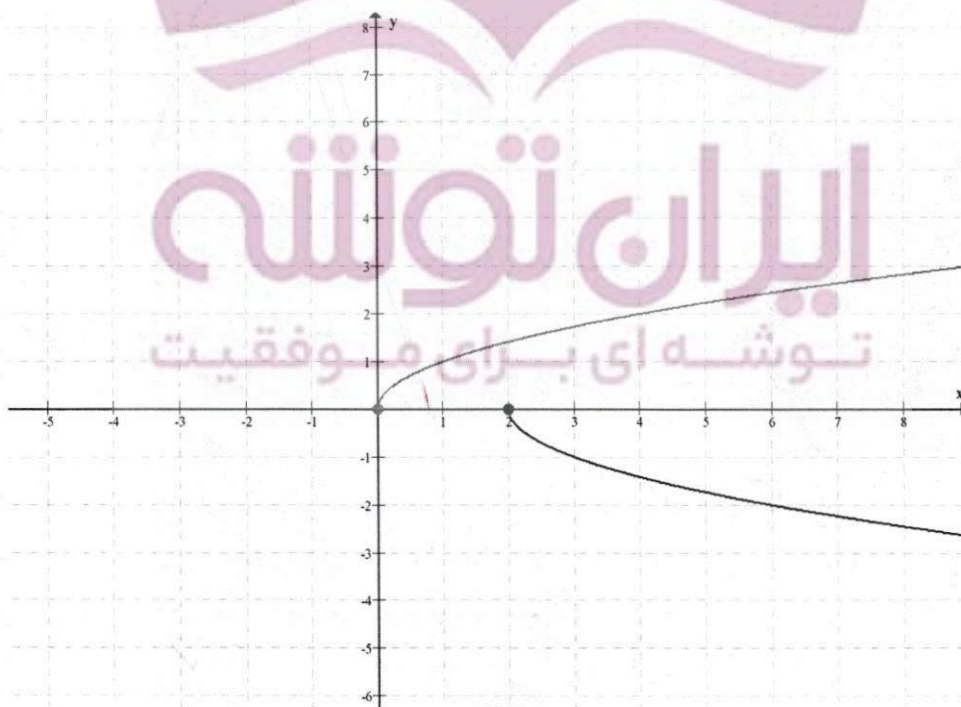
عمل	ضابطه	دامنه
جمع	$(f + g)(x) = (\frac{x-2}{x+5}) + (x^2 + 3x - 10)$	$R - \{-5\}$
تفریق	$(f - g)(x) = (\frac{x-2}{x+5}) - (x^2 + 3x - 10)$	$R - \{-5\}$
ضرب	$(f \times g)(x) = (\frac{x-2}{x+5}) \times (x^2 + 3x - 10)$	$R - \{-5\}$
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{\frac{x-2}{x+5}}{x^2 + 3x - 10} = \frac{x-2}{(x+5)(x^2 + 3x - 10)}$	$R - \{2, -5\}$

:۲

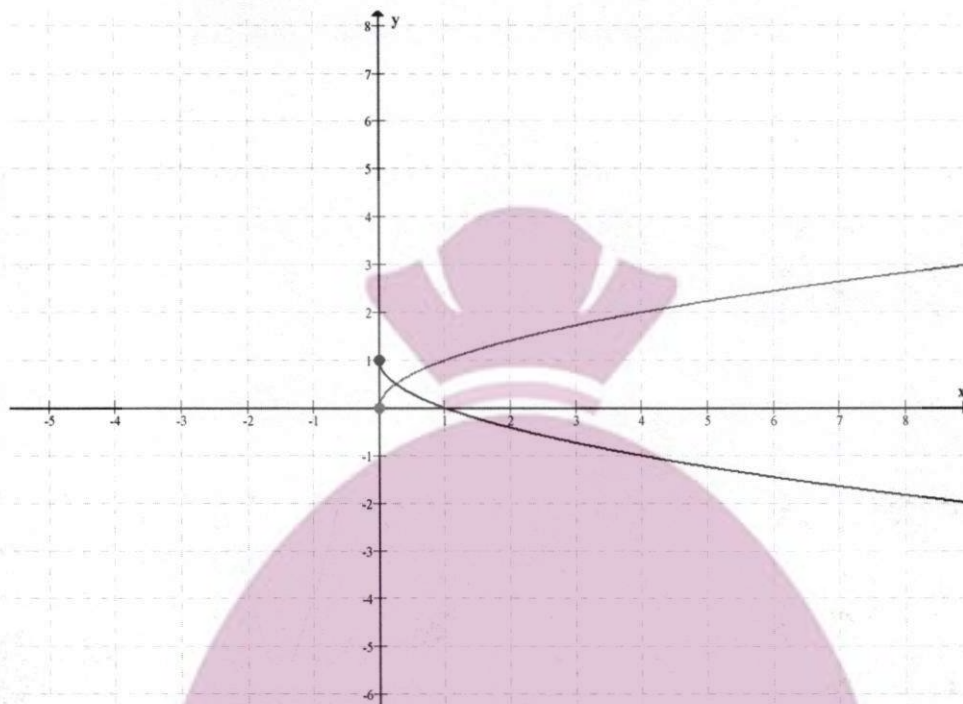
الف) $r(x) = 2\sqrt{x}$



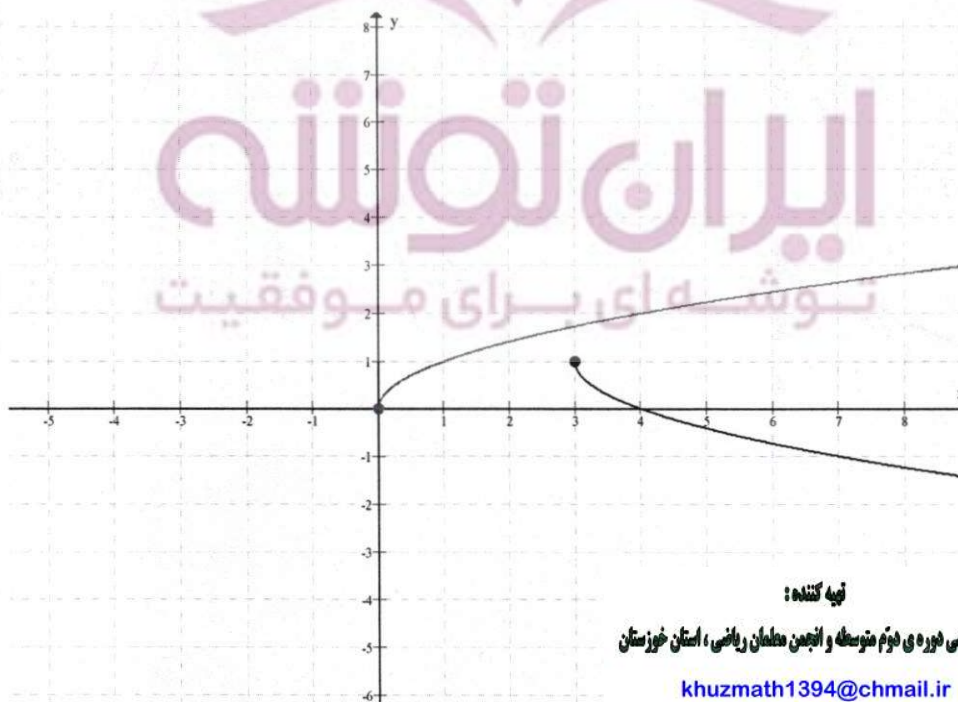
ب) $s(x) = -2\sqrt{x-2}$



ت) $u(x) = 1 - \sqrt{x}$



ت) $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$



تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

۷۹، ۵

۴

مثلثات

فصل



کرمان، کلوت شهداد

ماهواره امید اولین ماهواره ساخت ایران است که در بهمن ماه ۱۳۸۷ در مدار فضا قرار گرفت. در شکل بالا این ماهواره در h کیلومتری سطح زمین قرار دارد و در مدار خودش حول خط استوا حرکت می‌کند. اگر زاویه بین مرکز زمین (نقطه O) تا ماهواره S و دورست‌ترین نقطه قابل دید روی کره زمین (نقطه p) تا این ماهواره باشد و شعاع تقریبی کره زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد آنگاه

$$\cos \alpha = \frac{۶۴۰۰}{۶۴۰۰ + h} \quad \text{و}$$

$$\widehat{PA} = ۶۴۰۰ \times \hat{\alpha} \quad (\text{بر حسب رادیان})$$

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

توابع مثلثاتی

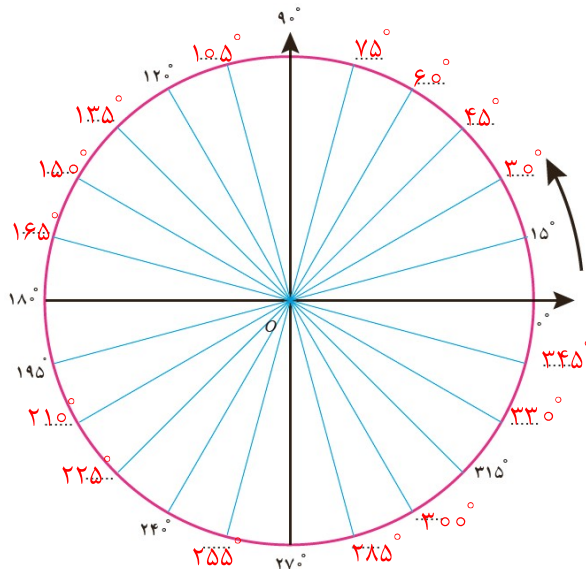
درس اول

درس دوم

درس سوم

یادآوری

- اگر محیط دایره‌ای را به 360° کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی هر کدام از این کمان‌ها 1° درجه است. اندازه هر کمان با زاویه مرکزی روبه‌روی آن کمان برحسب درجه برابر است.
- دایره مثلثاتی دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، جهت مثلثاتی می‌گوییم. معمولاً مرکز این دایره مبدأ مختصات است.

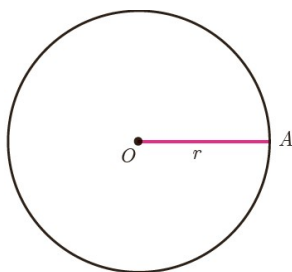


شکل مقابل یک دایره مثلثاتی را نمایش می‌دهد که به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. در جاهای خالی زاویه مناسب را روی شکل مشخص کنید.

برای اندازه‌گیری زاویه، واحد دیگری وجود دارد که در ادامه با آن آشنا می‌شوید.

در فعالیت زیر رابطه بین اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی یک کمان و طول ک

فعالیت



۱ یک شیء دایره‌ای شکل انتخاب کنید و نخ‌ی را دور آن بپیچید و سپس باز کنید؛ طول نخ را با خط کش اندازه بگیرید. طول این نخ چه کمیتی از دایره را مشخص می‌کند؟ با استفاده از این مقدار شعاع دایره را به دست آورید.

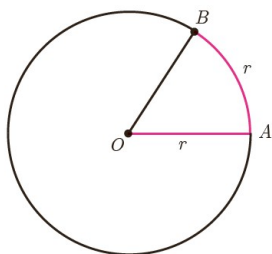
طول نخ اندازه محیط دایره را مشخص می‌کند. اگر فرض کنیم اندازه محیط دایره عددی مانند

p شده باشد، بنا براین شعاع به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$p = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{p}{2\pi}$$

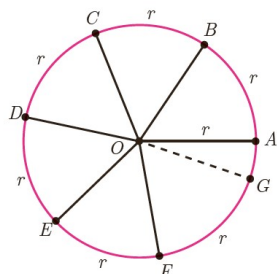
در این قسمت اگر فرض کنیم که $p = 44 \text{ cm}$ برای محاسبه شعاع با فرض $\pi = 3/14$ داریم:

$$44 = 2 \times 3/14 \times r \Rightarrow r = \frac{44}{6/28} \Rightarrow r \approx 7$$



۲ قطعه نخ‌ی را به اندازه شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطه A روی محیط آن دایره قرار دهید تا نقطه B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه $\widehat{AOB}$ را با نقاله اندازه‌گیری کنید. این زاویه تقریباً چند درجه است؟

این زاویه تقریباً برابر با 57° است.



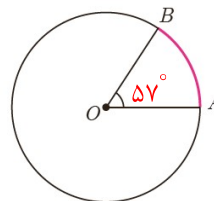
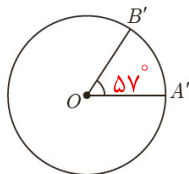
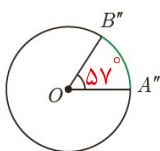
۳ دوباره این قطعه نخ را از نقطه B روی محیط دایره قرار دهید تا نقطه C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط D, E, F, G روی محیط دایره به دست آیند (شکل مقابل). در این حالت $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOF}$ و $\widehat{FOG}$ با زاویه $\widehat{AOB}$ برابر و هر یک تقریباً 57° درجه است. آیا دو نقطه G و A برهم منطبق می‌شوند؟ خیر این دو نقطه بر هم منطبق نمی‌شوند.

نکته: $\widehat{GOA} = 18^\circ$

به این ترتیب ۶ زاویه مرکزی حاصل می‌شود که طول کمان روبه‌روی هر یک از آنها با شعاع... دایره برابر است. به هر یک از این زاویه‌ها یک رادیان می‌گوییم.

۱ رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

در تمام دایره‌های زیر اندازه زاویه مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازه زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.

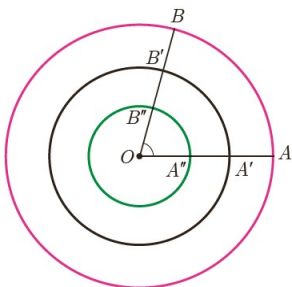


به عبارت دیگر اگر اندازه $\widehat{AOB}$ ، ۱ رادیان باشد، در شکل مقابل داریم:

$$OA = \widehat{AB}$$

$$OA' = \widehat{A'B'}$$

$$OA'' = \widehat{A''B''}$$

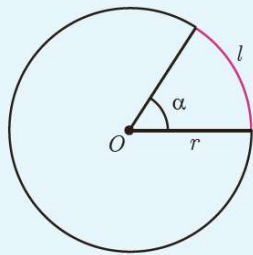


۴ جدول زیر را کامل کنید.

شکل	شکل	شکل	شکل	شکل	شکل	شکل
$6r$	$5r$	$4r$	$3r$	$2r$	$\frac{3}{2}r$	r
۶ رادیان	۵ رادیان	۴ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	$\frac{3}{2}$ رادیان	۱ رادیان
طول کمان AB_i $1 \leq i \leq 7$						
اندازه زاویه $\angle AOB_i$ $1 \leq i \leq 7$						

همان طور که می‌بینید در هر ستون با تقسیم طول کمان به شعاع دایره (r)، اندازه زاویه مرکزی مربوط به آن بر حسب رادیان به دست می‌آید. با توجه به جدول صفحه قبل می‌توان گفت :

$$\text{طول کمان روبه روی زاویه} = \frac{\text{اندازه زاویه بر حسب رادیان}}{\text{شعاع دایره}}$$



اگر l طول کمان روبه روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازه زاویه بر حسب رادیان باشد، آنگاه رابطه بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

در رابطه بالا l و r هم واحدند.

کار در کلاس

با استفاده از رابطه بالا جدول زیر را کامل کنید :

l	۵ سانتی متر	۵۰۰ سانتی متر = ۵ متر	۰/۷۵ متر ۷۵ سانتی متر	۲۰۰ سانتی متر = ۲ متر	۹۰ سانتی متر	۵۰ متر	۱۰ متر	۴۰۰ سانتی متر
r	۵ سانتی متر	۵ متر	۰/۵ متر	۱ متر	۳۰ سانتی متر	۱۰ متر	۱ متر	۲۰ سانتی متر
α	۱ رادیان	۱ رادیان	۱/۵ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۵ رادیان	۱۰ رادیان	۲۰ رادیان

$$r = 5 \text{ cm}, \alpha = 1 \text{ رادیان}, l = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 1 = \frac{l}{5} \Rightarrow l = 5 \text{ cm}$$

$$r = 5 \text{ m}, l = 500 \text{ cm} \Rightarrow l = 5 \text{ m}, \alpha = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{5} \Rightarrow \alpha = 1 \text{ رادیان}$$

$$r = 0/5 \text{ m}, \alpha = 1/5 \text{ رادیان}, l = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 1 = \frac{l}{0/5} \Rightarrow l = 0/75 \text{ m}$$

$$r = 1 \text{ m}, l = 200 \text{ cm} \Rightarrow l = 2 \text{ m}, \alpha = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{1} \Rightarrow \alpha = 2 \text{ رادیان}$$

$$l = 90 \text{ cm}, \alpha = 3 \text{ رادیان}, r = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 3 = \frac{90}{r} \Rightarrow r = 30 \text{ cm}$$

$$r = 10 \text{ m}, l = 50 \text{ m}, \alpha = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{50}{10} \Rightarrow \alpha = 5 \text{ رادیان}$$

$$l = 10 \text{ m}, \alpha = 10 \text{ رادیان}, r = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 10 = \frac{10}{r} \Rightarrow r = 1 \text{ m}$$

$$r = 20 \text{ cm}, \alpha = 20 \text{ رادیان}, l = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 20 = \frac{l}{20} \Rightarrow l = 400 \text{ cm}$$

یادآوری

می‌دانیم نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می‌دهند و به آن عدد پی می‌گویند. مقدار تقریبی این عدد $3/14$ است. حال جدول زیر را کامل کنید :

π رادیان	$3/14$ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱ رادیان	5° رادیان	زاویه برحسب رادیان
دقیقاً 18°	تقریباً 179°	تقریباً 171°	تقریباً 114°	تقریباً 57°	تقریباً $28/5^\circ$	زاویه برحسب درجه

$$57^\circ \times 3/14 = 179^\circ, \quad 57^\circ \times 3 = 171^\circ, \quad 57^\circ \times 2 = 114^\circ, \quad 57^\circ \times 5/28 = 28/5^\circ$$

بنابراین، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان نیم دایره برابر است با 18° درجه یا π رادیان. به عبارت دیگر اندازه زاویه نیم صفحه برابر است با π رادیان. در نتیجه :

$$\frac{\pi}{18^\circ} \text{ رادیان} = \text{یک درجه}$$

به این ترتیب :

$$\begin{aligned} \pi \text{ رادیان} &= 18^\circ \\ \div 2 &\rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ رادیان} = 9^\circ \\ \div 3 &\rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ رادیان} = 6^\circ \\ \div 4 &\rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ رادیان} = 45^\circ \\ \div 6 &\rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ رادیان} = 30^\circ \end{aligned}$$

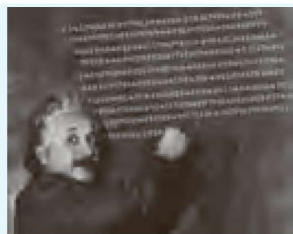
کار در کلاس

۱ مطابق نمونه هریک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید :

$$\begin{aligned} 36^\circ &\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \frac{\pi}{5} \text{ رادیان} \\ 6^\circ &\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \frac{\pi}{30} \text{ رادیان} \\ 18^\circ &\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \frac{\pi}{10} \text{ رادیان} \\ 3^\circ &\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \frac{\pi}{60} \text{ رادیان} \\ 45^\circ &\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \frac{\pi}{4} \text{ رادیان} \\ 9^\circ &\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \frac{\pi}{20} \text{ رادیان} \end{aligned}$$

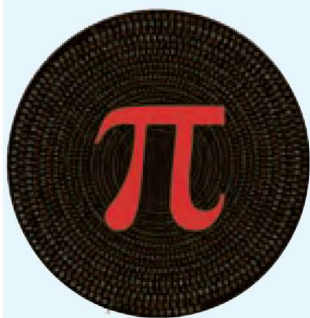
اگر D اندازه زاویه α برحسب درجه و R اندازه زاویه α برحسب رادیان باشد، آنگاه

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$



خواندنی

روز چهاردهم مارس به عنوان روز جهانی عدد پی نام‌گذاری شده است؛ زیرا اولین سه رقم این عدد تاریخ ۱۴ مارس را به صورت ۳/۱۴ نشان می‌دهد. این تاریخ مصادف با سالروز تولد آلبرت انیشتین نیز است. تاکنون حدود ۱۳ تریلیون رقم بعد از ممیز عدد پی محاسبه شده است. باتوجه به اصم بودن این عدد و بی‌قاعده بودن ارقام اعشاری آن امکان یافتن هر نوع عددی از جمله تاریخ تولد، شماره حساب بانکی، شماره تلفن و نظایر آنها در بین ارقام آن وجود دارد. مثلاً تاریخ تولد مرحوم پروفیسور محمود حسابی ۳ اسفند ۱۲۸۱ است که می‌توان آن را به صورت نمایش ۶ رقمی ۸۱۱۲۰۳ نوشت. از طریق سامانه mypiday.com می‌توان این را در بین ارقام اعشاری عدد پی یافت. شکل زیر ارقام عدد پی را تا رسیدن به این نمایش نشان می‌دهد. حال شما از طریق این سامانه تاریخ تولد خودتان را در بین ارقام عدد پی بیابید.

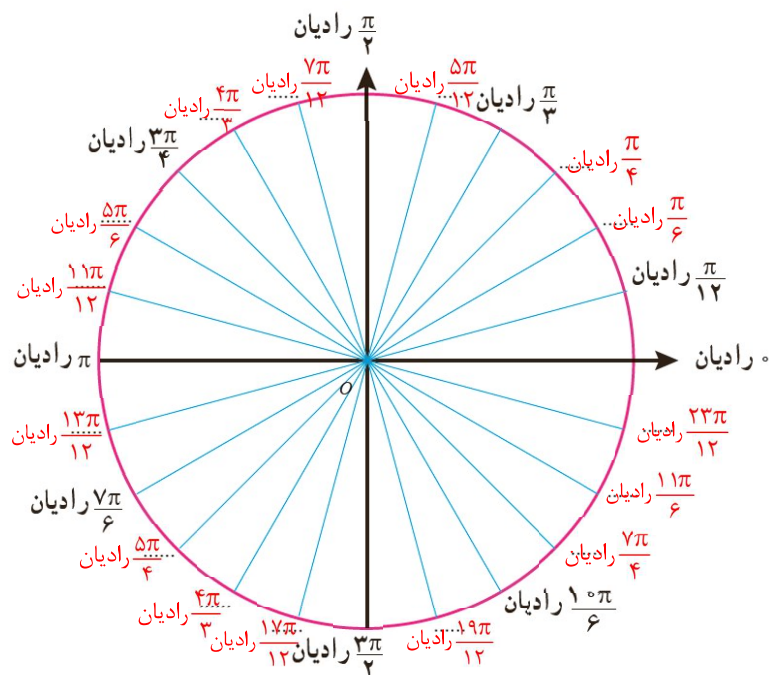


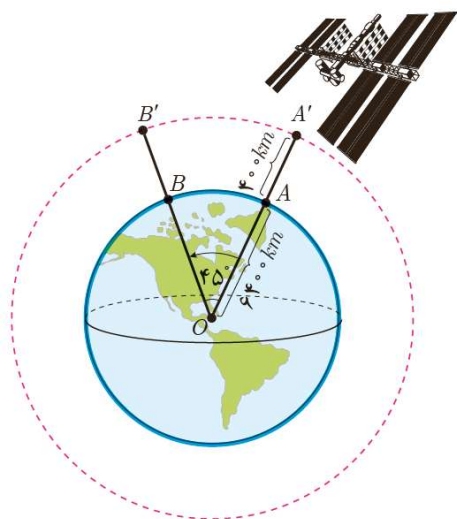
۲ حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید :

D (درجه)	5°	$25/71^\circ$	24°	72°	12°	225°
R (رادیان)	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$

$$\frac{D}{18^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{18^\circ} = \frac{\frac{\pi}{7} \text{ رادیان}}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow D = \frac{18^\circ}{7} \Rightarrow D \approx 25/71^\circ \\ \frac{24^\circ}{18^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{15} \text{ رادیان} \\ \frac{D}{18^\circ} = \frac{\frac{2\pi}{5} \text{ رادیان}}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow D = \frac{2 \times 18^\circ}{5} \Rightarrow D = 72^\circ \\ \frac{12^\circ}{18^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3} \text{ رادیان} \\ \frac{D}{18^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{4} \text{ رادیان}}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow D = \frac{5 \times 18^\circ}{4} \Rightarrow D = 225^\circ \end{array} \right.$$

۳ در شکل زیر در هریک از جاهای خالی زاویه مناسب را برحسب رادیان مشخص کنید.





ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصله تقریبی 400 کیلومتری بالای سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه A تا نقطه B که با مرکز زمین زاویه 45° می‌سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کره زمین را 6400 کیلومتر فرض کنید.

۱) ابتدا زاویه مرکزی 45° را به رادیان تبدیل کنید.

$$\text{رادیان } \hat{AOB} = \alpha = 45^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

۲) شعاع مدار دایره‌ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با $r = 6800 \text{ km}$

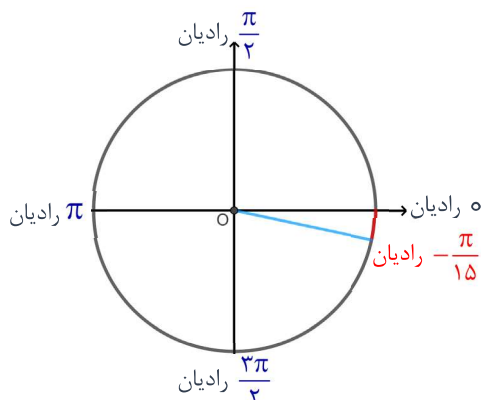
$$r = 6400 + 400 = 6800 \text{ km}$$

۳) طول کمان روبه‌روی $\hat{A'OB'}$ با فرض $\pi \approx 3.14$ و با استفاده از رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ به طور تقریبی برابر است با:

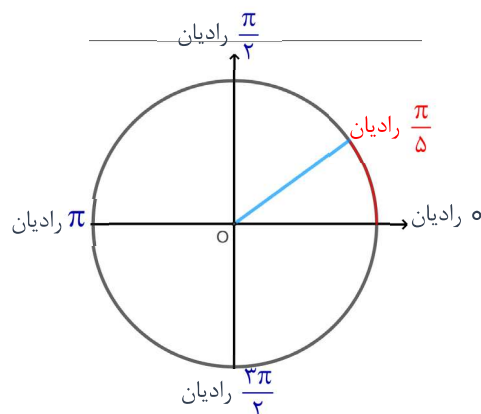
$$\text{طول کمان } A'B' = l = \frac{\pi}{4} \times 6800 \Rightarrow l = \frac{3.14}{4} \times 6800 \approx 5338 \text{ km}$$

۱) هریک از زاویه‌های 12° ، 36° ، 72° ، 105° و 315° را به رادیان تبدیل کنید و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

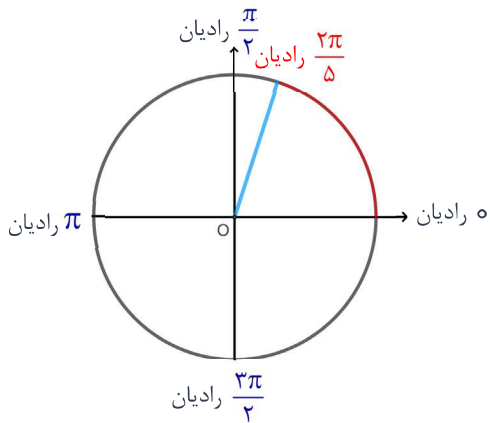
$$-12^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180} \text{ رادیان}} -\frac{\pi}{15} \text{ رادیان}$$



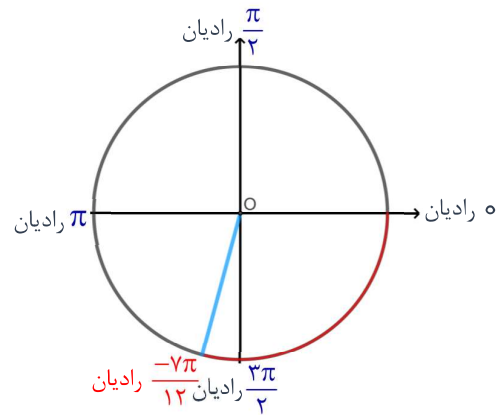
$$36^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180} \text{ رادیان}} \frac{\pi}{5} \text{ رادیان}$$



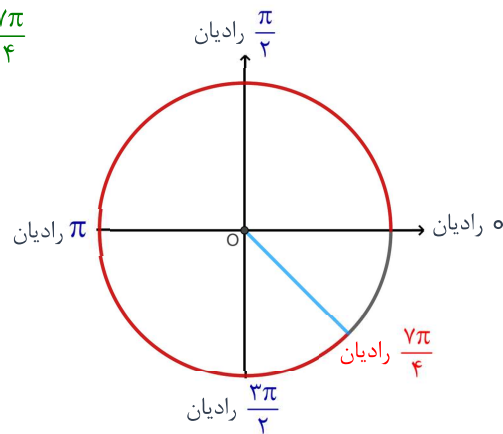
$$72^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ رادیان}} \frac{2\pi}{5} \text{ رادیان}$$



$$-105^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ رادیان}} -\frac{7\pi}{12} \text{ رادیان}$$

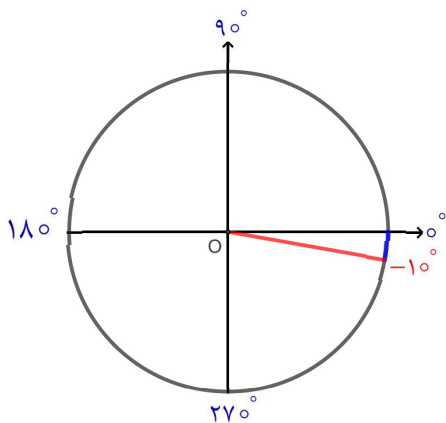


$$315^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ رادیان}} \frac{7\pi}{4} \text{ رادیان}$$

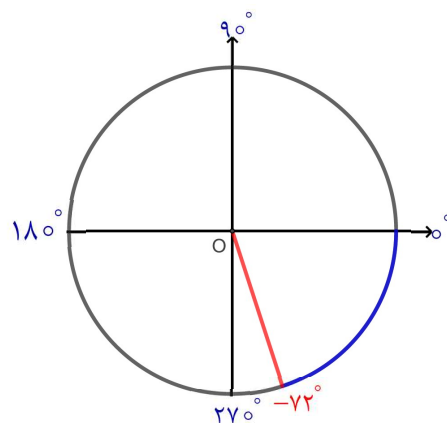


۲ هریک از زاویه‌های $\frac{-\pi}{18}$ رادیان، $\frac{-2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{3\pi}{4}$ رادیان، $\frac{7\pi}{8}$ رادیان، $\frac{6\pi}{5}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به‌طور تقریبی روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

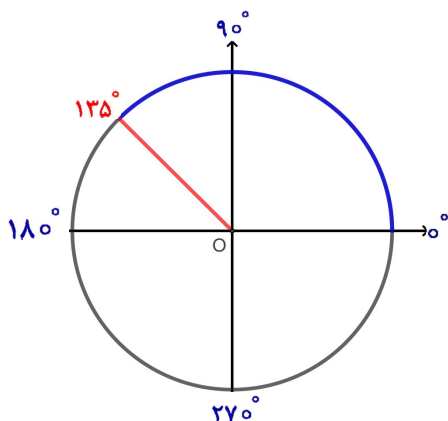
$$\frac{-\pi}{18} \text{ رادیان} \xrightarrow{\pi=180^\circ} \frac{-180^\circ}{18} = -10^\circ$$



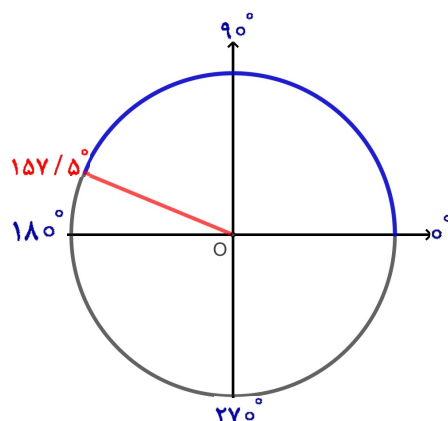
$$\frac{-2\pi}{5} \text{ رادیان} \xrightarrow{\pi=180^\circ} \frac{-360^\circ}{5} = -72^\circ$$



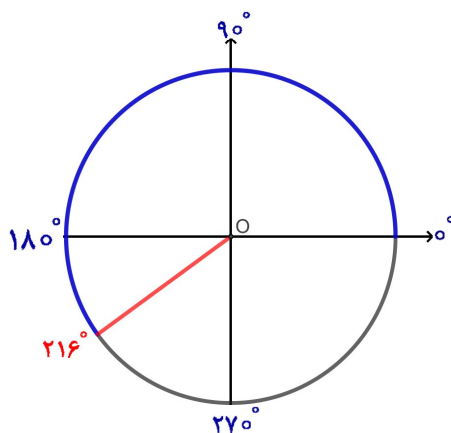
$$\text{رادیان } \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi=180^\circ} \frac{54^\circ}{4} = 13.5^\circ$$



$$\text{رادیان } \frac{7\pi}{8} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi=180^\circ} \frac{126^\circ}{8} = 15.75^\circ$$



$$\text{رادیان } \frac{6\pi}{5} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi=180^\circ} \frac{108^\circ}{5} = 21.6^\circ$$



۳ زاویه D بر حسب درجه برابر با $\frac{\pi}{4}$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

$$\text{رادیان } \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi=180^\circ} \frac{18^\circ}{4} = 4.5^\circ$$

راه اول :

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{4} \text{ رادیان}}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow D = \frac{18^\circ}{4} \Rightarrow D = 4.5^\circ$$

راه دوم :

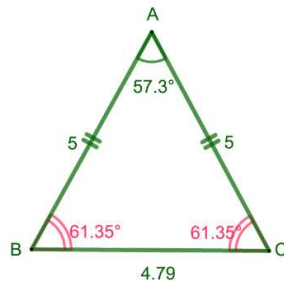
۴ دایره‌ای به شعاع 10 سانتی‌متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول 8 سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 0.8 \text{ رادیان}$$

نکته : l و r هم واحد هستند و α بر حسب رادیان به دست می‌آید.

۵) درستی یا نادرستی هریک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچک تر از اندازه هریک از ساق های آن است.



همانطور که قبلاً دیده ایم ۱ رادیان تقریباً برابر با $57/3^\circ$ درجه است. بنا براین با توجه به اینکه مثلث متساوی الساقین است؛ بنا براین اندازه هریک از دو زاویه مجاور به ساق را می توان به

دست آورد: $\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 57/3^\circ}{2} = 61/35^\circ$ همچنین می دانیم در هر مثلث ضلع روبه رو

به زاویه بزرگ تر، بزرگ تر از ضلع روبه رو به زاویه کوچک تر است پس طول قاعده کوچک تر از طول ساق ها خواهد بود. پس عبارت فوق درست است.

ب) در دایره ای به شعاع ۱ سانتی متر طول کمان روبه روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با $3/14$ سانتی متر است.

این عبارت درست است زیرا: $\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\alpha \Rightarrow l = 1 \times \pi = \pi \approx 3/14 \text{ cm}$

پ) انتهای کمان زاویه $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد.

این عبارت نادرست است زیرا:

راه اول: زیرا $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$ بنا براین انتهای کمان این زاویه در ربع سوم قرار دارد؛ زیرا بیش تر از π رادیان است.

راه دوم: انتهای کمان زاویه 216° در ربع سوم است. $\frac{6\pi}{5} \xrightarrow{\pi=180^\circ \text{ رادیان}} \frac{108^\circ}{5} = 216^\circ$

ت) زاویه های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان، $\frac{\pi}{9}$ رادیان، $\frac{7\pi}{36}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می دهند.

این عبارت نادرست است زیرا:

راه اول: می دانیم که مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° است پس:

$$\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\pi=180^\circ \text{ رادیان}} \frac{36^\circ}{3} = 12^\circ \quad \frac{7\pi}{36} \xrightarrow{\pi=180^\circ \text{ رادیان}} \frac{126^\circ}{36} = 35^\circ \quad \frac{\pi}{9} \xrightarrow{\pi=180^\circ \text{ رادیان}} \frac{18^\circ}{9} = 2^\circ$$

$$12^\circ + 2^\circ + 35^\circ = 49^\circ < 180^\circ$$

راه دوم: می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° است پس:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \xrightarrow{\pi=180^\circ \text{ رادیان}} \frac{630^\circ}{36} = 175^\circ < 180^\circ$$

راه سوم: می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° یا همان π رادیان است پس:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} < \pi$$

حال شما مقدار تقریبی زاویه‌های زیر را مشابه نمونه با ماشین حساب به دست آورید.

$$0.5 \text{ رادیان} \approx \dots 28/6^\circ \dots$$

$$\frac{4}{5} \text{ رادیان} \approx \dots 45/8^\circ \dots$$

$$2 \text{ رادیان} \approx \dots 114/6^\circ \dots$$

$$3 \text{ رادیان} \approx \dots 171/9^\circ \dots$$

$$\frac{3}{14} \text{ رادیان} \approx \dots 179/9^\circ \dots$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ رادیان} \approx \dots 60^\circ \dots$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ رادیان} \approx \dots 45^\circ \dots$$

$$\pi \text{ رادیان} \approx \dots 180^\circ \dots$$

خواندنی

یک زاویه برحسب رادیان را با استفاده از ماشین حساب می‌توان به طور تقریبی برحسب درجه محاسبه کرد. در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه‌ای با نماد π وجود دارد. مثلاً برای محاسبه ۱ رادیان کافی است حاصل $1 \times \frac{180}{\pi}$ را به دست آوریم که تقریباً برابر با $57/3^\circ$ است.

$$0.5 \times \frac{180}{\pi} \approx 28/6^\circ, \quad \frac{4}{5} \times \frac{180}{\pi} \approx 45/8^\circ, \quad 2 \times \frac{180}{\pi} \approx 114/6^\circ$$

$$3 \times \frac{180}{\pi} \approx 171/9^\circ, \quad \frac{3}{14} \times \frac{180}{\pi} \approx 179/9^\circ, \quad \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} \approx 60^\circ$$

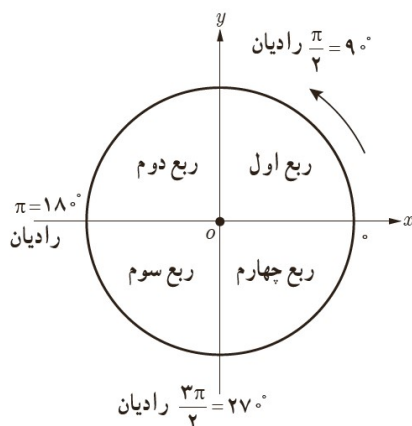
$$\frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} \approx 45^\circ, \quad \pi \times \frac{180}{\pi} \approx 180^\circ$$

درس دوم | روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

درس دوم

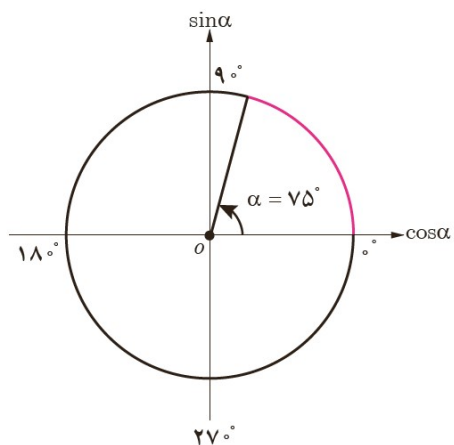
روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

در شکل مقابل، یک دایره مثلثاتی با چهار ربع آن مشخص شده است. جدول زیر علامت چهار نسبت مثلثاتی در هر ربع را نشان می‌دهد.

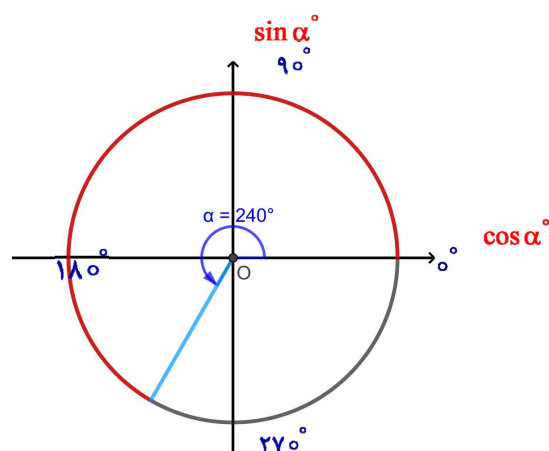
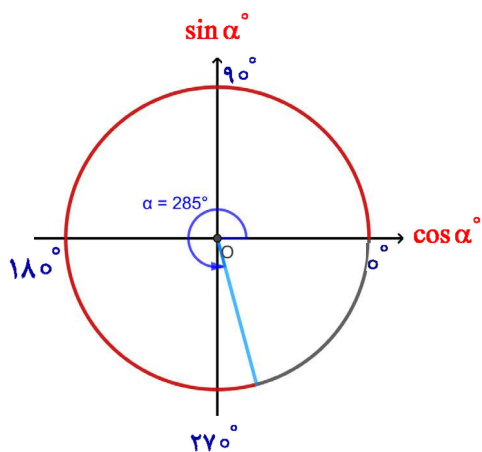
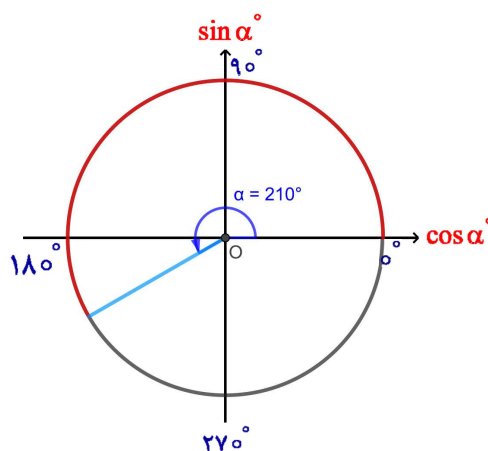
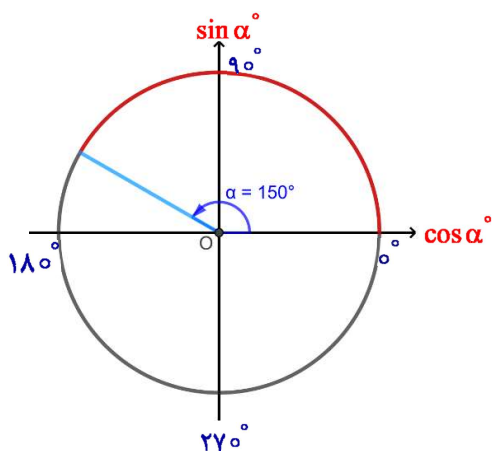


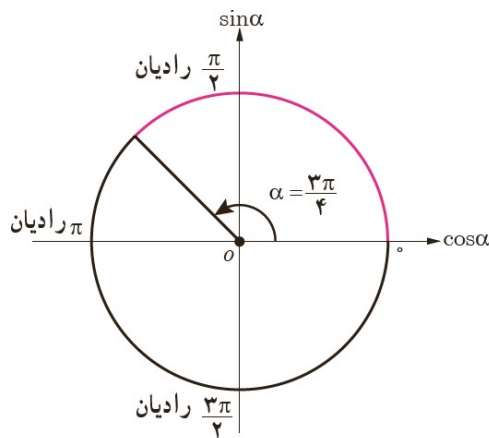
ربع نسبت مثلثاتی	اول $0^\circ < \alpha < \frac{\pi}{2}$	دوم $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	سوم $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	چهارم $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

۱ جداول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.



علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه روی α	زاویه α
$\tan \alpha > 0$	ربع اول	75°
$\sin \alpha > 0$	ربع دوم	150°
$\cos \alpha < 0$	ربع سوم	210°
$\cot \alpha > 0$	ربع سوم	240°
$\tan \alpha < 0$	ربع چهارم	285°





علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه روی α	زاویه α
$\cos \alpha < 0$	ربع دوم	$\frac{3\pi}{4}$ رادیان
$\sin \alpha > 0$	ربع دوم	$\frac{4\pi}{5}$ رادیان
$\tan \alpha < 0$	ربع چهارم	$\frac{5\pi}{3}$ رادیان
$\cos \alpha > 0$	ربع اول	$\frac{5\pi}{12}$ رادیان
$\cot \alpha > 0$	ربع سوم	$\frac{5\pi}{4}$ رادیان

بنابرین $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ بنا براین $\frac{3\pi}{4}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{4}$ رادیان از $\frac{\pi}{2}$ رادیان بیش تر است پس در ربع دوم قرار دارد.

بنابرین $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ بنا براین $\frac{4\pi}{5}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{5}$ رادیان از π رادیان کم تر است پس در ربع دوم قرار دارد.

بنابرین $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ بنا براین $\frac{5\pi}{3}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{3}$ رادیان از 2π رادیان کم تر است پس در ربع چهارم قرار دارد.

بنابرین $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ بنا براین $\frac{5\pi}{12}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{12}$ رادیان از $\frac{\pi}{2}$ رادیان کم تر است پس در ربع اول قرار دارد.

بنابرین $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$ بنا براین $\frac{5\pi}{4}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{4}$ رادیان از π رادیان بیش تر است پس در ربع سوم قرار دارد.

❷ اگر $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ و انتهای کمان روبه روی به زاویه α در ربع سوم باشد، محاسبات زیر را کامل کنید :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} \longrightarrow \cot \alpha = 2\sqrt{2}$$

۳ اگر $\cot \alpha = -2$ و $\cos \alpha > 0$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

حل: چون $\cos \alpha > 0$ و $\cot \alpha < 0$ لذا انتهای کمان α در ربع چهارم واقع است. بنابراین:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = \dots 5 \dots \longrightarrow \sin^2 \alpha = \dots \frac{1}{5} \dots \longrightarrow \sin \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \dots \frac{4}{5} \dots \longrightarrow \cos \alpha = \dots \frac{2}{\sqrt{5}} \dots$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \longrightarrow \tan \alpha = \dots \frac{-1}{2} \dots$$

کار در کلاس

۱ اگر $\cos x = \frac{-4}{5}$ و $\sin x > 0$ ، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویه x را بیابید.

حل: چون $\cos x < 0$ و $\sin x > 0$ لذا انتهای کمان x در ربع دوم واقع است. بنا بر این:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \longrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} \longrightarrow \sin^2 x = \frac{9}{25} \longrightarrow \sin x = \frac{3}{5}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \tan x = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} \longrightarrow \tan x = \frac{-3}{4}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \longrightarrow \cot x = \frac{-4}{3}$$

۲ جدول زیر را کامل کنید.

زاویه α نسبت	رادیان 0°	رادیان $30^\circ = \frac{\pi}{6}$	رادیان $45^\circ = \frac{\pi}{4}$	رادیان $60^\circ = \frac{\pi}{3}$	رادیان $90^\circ = \frac{\pi}{2}$	رادیان $180^\circ = \pi$	رادیان $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	رادیان $360^\circ = 2\pi$
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۳ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\cot \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{3} \times \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}$

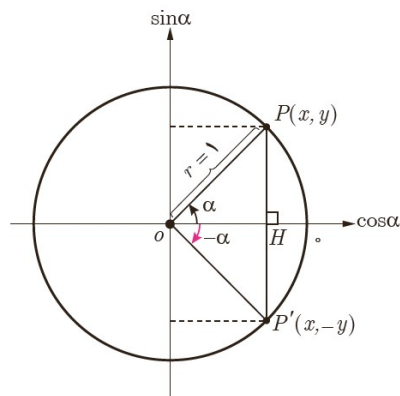
ب) $\frac{\tan^2(\frac{\pi}{6}) + \sin^2(\frac{\pi}{4})}{\cot^2(\frac{\pi}{6}) - \cos^2(\frac{\pi}{3})} + \underbrace{\cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ}_{=1} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} + 1 = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} + 1 = \frac{10}{9} + 1 = \frac{19}{9}$

در ادامه می‌خواهیم بینیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، متمم و مکمل با هم چه ارتباطی دارند.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فعالیت

دو زاویه α و $-\alpha$ را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل مقابل، $\alpha = 3^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه -3° در $\triangle OP'H$ عبارت‌اند از:



قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات $(x, -y)$ است.

$$\sin(-3^\circ) = \frac{-y}{r} = -\sin 3^\circ = \frac{-1}{2}$$

$$\cos(-3^\circ) = \frac{x}{r} = \cos(3^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-3^\circ) = \frac{-y}{x} = -\tan(3^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot(-3^\circ) = \frac{x}{-y} = -\cot(3^\circ) = -\sqrt{3}$$

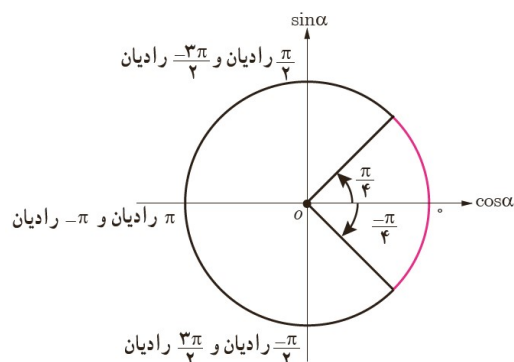
در حالت کلی:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$



۱ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\frac{\pi}{4}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

۲ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot\left(\frac{-\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{الف) } \frac{\cos(-9^\circ) + \sin(-27^\circ)}{\sin(-18^\circ) - \cos(-36^\circ)} = \frac{\cos 9^\circ - \sin 27^\circ}{-\sin 18^\circ - \cos 36^\circ} = \frac{0 - (-1)}{0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

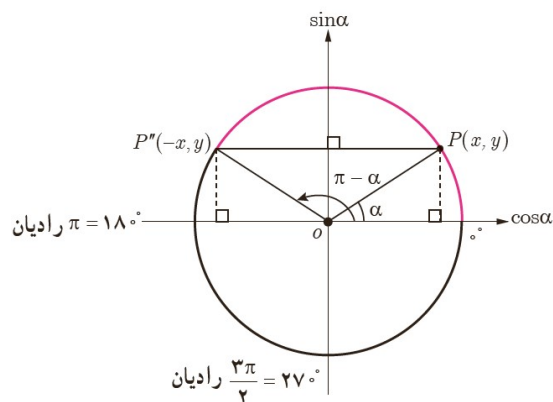
$$\text{ب) } \cot\left(\frac{-\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } \cos(-45^\circ) \times \cos(-6^\circ) + \sin(-45^\circ) \times \sin(-6^\circ) &= \cos(45^\circ) \times \cos(6^\circ) + (-\sin(45^\circ)) \times (-\sin(6^\circ)) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

فعالیت

دو زاویه α و β را مکمل گوئیم؛ هرگاه مجموع آنها 180° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویه 3° و 15° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویه $\frac{\pi}{3}$ رادیان و $\frac{2\pi}{3}$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایره مثلثاتی زیر اگر $\alpha = 3^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'' و انتهای کمان زاویه 15° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 15° عبارت‌اند از:



$$\sin 15^\circ = \sin(18^\circ - 3^\circ) = y = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(18^\circ - 3^\circ) = -x = -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\tan 3^\circ$$

$$\cot 15^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} = -\cot 3^\circ$$

قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x, y)$ است.

در حالت کلی :

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

کار در کلاس

۱ مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید :

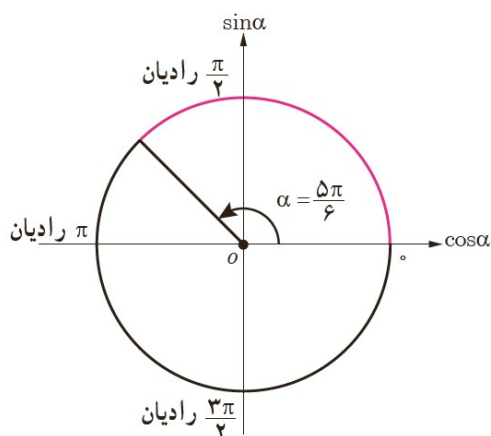
الف) 75° مکمل زاویه 75° ، زاویه 105° است. $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

ب) -25° مکمل زاویه -25° ، زاویه 205° است. $180^\circ - (-25^\circ) = 205^\circ$

پ) رادیان $\frac{\pi}{12}$ مکمل زاویه $\frac{\pi}{12}$ رادیان، زاویه $\frac{11\pi}{12}$ رادیان است. $\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$

ت) رادیان $-\frac{\pi}{4}$ مکمل زاویه $-\frac{\pi}{4}$ رادیان، زاویه $\frac{5\pi}{4}$ رادیان است. $\pi - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{5\pi}{4}$

۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{5\pi}{6}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.



$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{5\pi}{6} = \cot(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan \frac{2\pi}{3} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 12^\circ = \sin (18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot (-12^\circ) = -\cot (12^\circ) = -\cot (18^\circ - 6^\circ) = -(-\cot 6^\circ) = \sqrt{3}$$

$$\cos (135^\circ) = \cos (180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

نسبت‌های مثلثاتی زاویه 21° را به دست آورید.

انتهای کمان زاویه 21° در ربع سوم واقع است. در ضمن $21^\circ = 18^\circ + 3^\circ$ ، یعنی اختلاف دو زاویه 21° و 3° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha = 3^\circ$ آنگاه با

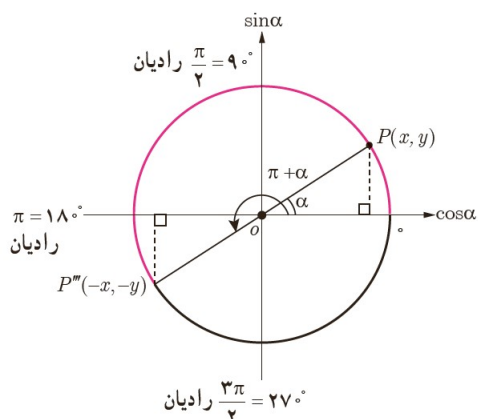
توجه به مختصات نقطه P''' ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 21° عبارت‌اند از:

$$\sin 21^\circ = \sin (180^\circ + 3^\circ) = -y = -\sin 3^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 21^\circ = \cos (180^\circ + 3^\circ) = -x = -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 21^\circ = \frac{\sin 21^\circ}{\cos 21^\circ} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 3^\circ$$

$$\cot 21^\circ = \frac{1}{\tan 21^\circ} = \sqrt{3} = \cot 3^\circ$$



قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ای به مختصات $(-x, -y)$ است.

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

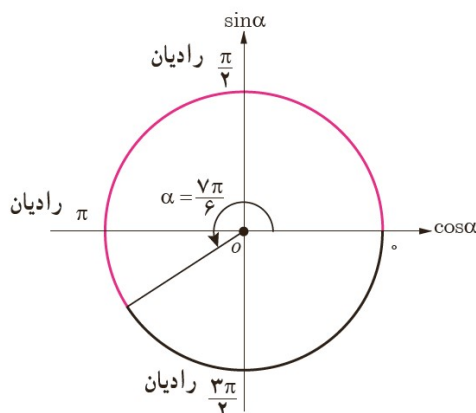
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

کار در کلاس

سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{7\pi}{6}$ رادیان را مطابق نمونه مشخص کنید.



$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{7\pi}{6} = \tan(\pi + \frac{\pi}{6}) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{7\pi}{6} = \cot(\pi + \frac{\pi}{6}) = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه بیابید.

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

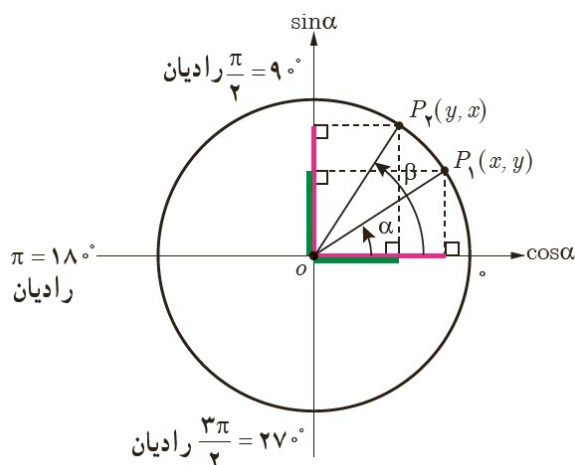
$$\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1 \dots \dots \dots$$

$$\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \dots \dots \dots$$

$$\sin\left(\frac{-7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -(-\sin(\frac{\pi}{6})) = \frac{1}{2}$$

$$\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \dots \dots \dots$$

دو زاویه α و β را متمم گوئیم؛ هرگاه مجموع آنها 90° یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان شود. مثلاً دو زاویه $\alpha = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ در دایره مثلثاتی مقابل متمم یکدیگرند. در این حالت:



$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

زاویه‌ای معرفی کنید که با متمم خودش برابر باشد. برای چنین زاویه‌ای داریم:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

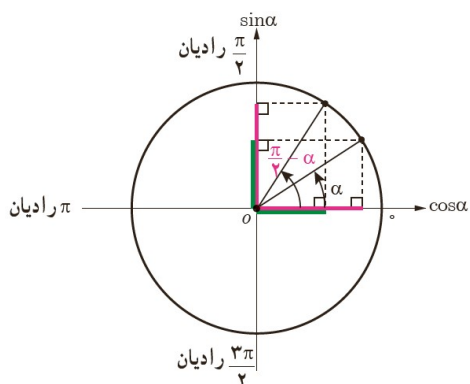
$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

همچنین زاویه 0° و $\frac{\pi}{2}$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین:

$$\sin \frac{\pi}{2} = \cos 0^\circ = 1$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = \cot 0^\circ = \text{تعریف نشده}$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

در حالت کلی:

به عبارت دیگر: اگر دو زاویه α و β متمم باشند (رادیان $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$) آنگاه سینوس کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. به بیان دیگر:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta$$

$$\cos \alpha = \sin \beta, \quad \cot \alpha = \tan \beta$$

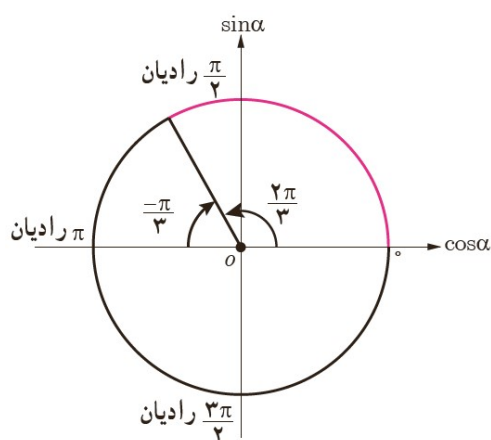
نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان را به دست آورید.

چون انتهای کمان زاویه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان در ربع دوم واقع است، به دو روش می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آن را یافت.

روش اول - زاویه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان و $\frac{\pi}{3}$ رادیان مکمل یکدیگرند؛ یعنی $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$. بنابراین:



$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{2\pi}{3} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

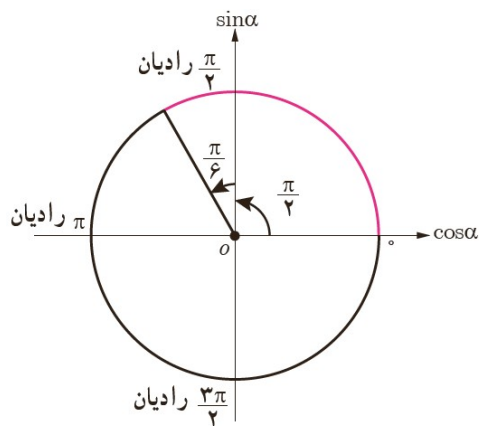
$$\cot \frac{2\pi}{3} = \cot \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

روش دوم - اختلاف دو زاویه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان و $\frac{\pi}{6}$ رادیان برابر با $\frac{\pi}{3}$ رادیان است؛ یعنی

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

بنابراین با توجه به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع دوم:

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{2\pi}{3} = \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\cot \frac{2\pi}{3} = \cot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

یا به عبارتی $\frac{2\pi}{3} + (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2}$ پس $\frac{2\pi}{3}$ رادیان و $-\frac{\pi}{6}$ متمم هم هستند. با توجه قانون نسبت های مثلثاتی برای دو زاویه متمم داریم :

$$\begin{cases} \sin \frac{2\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} \\ \cos \frac{2\pi}{3} = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} \end{cases}, \quad \begin{cases} \tan \frac{2\pi}{3} = \cot(-\frac{\pi}{6}) = -\cot \frac{\pi}{6} \\ \cot \frac{2\pi}{3} = \tan(-\frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

ازطرفی با توجه به تساوی $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ به جای $\frac{2\pi}{3}$ رادیان مقدار مساوی آن یعنی $(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})$ رادیان را قرار دهیم .

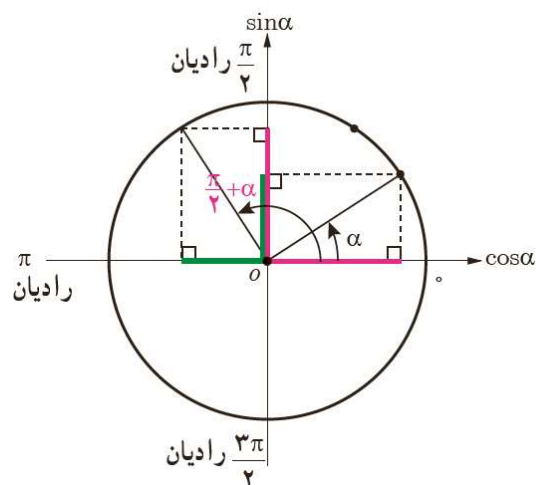
در حالت کلی :

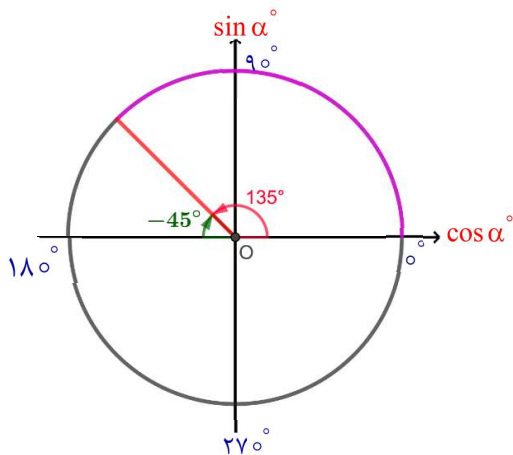
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$





نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را به دو روش به دست آورید.

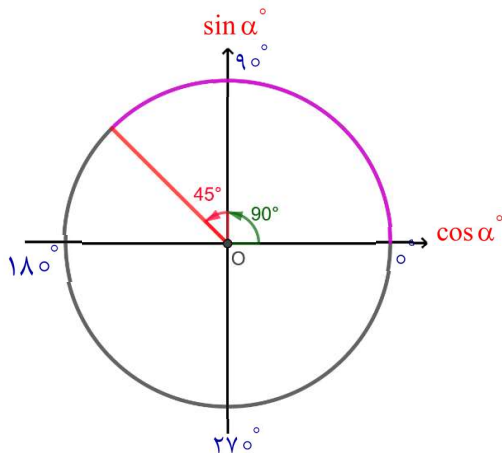
راه اول :

$$\sin ۱۳۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos ۱۳۵^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cos ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = \cot(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$



راه دوم :

$$\sin ۱۳۵^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos ۱۳۵^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

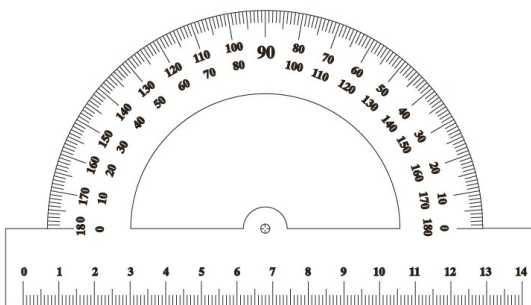
$$\tan ۱۳۵^\circ = \tan(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = \cot(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

به کمک نقاله سؤالات زیر را پاسخ دهید :

۱ سینوس کدام دو زاویه برابر است؟

(مثلاً $\sin ۱^\circ = \sin ۱۷^\circ$)



می دانیم زاویه های مکمل دارای سینوس های برابر هستند.

بنا براین داریم :

$$\sin ۲^\circ = \sin ۱۶^\circ, \sin ۳^\circ = \sin ۱۵^\circ$$

$$\sin ۴^\circ = \sin ۱۴^\circ, \sin ۵^\circ = \sin ۱۳^\circ$$

$$\sin ۶^\circ = \sin ۱۲^\circ, \sin ۷^\circ = \sin ۱۱^\circ$$

$$\sin ۸^\circ = \sin ۱۰^\circ$$

۲ اختلاف کدام دو زاویه $\frac{\pi}{4}$ رادیان $= ۹۰^\circ$ می شود؟
نسبت های مثلثاتی یک نمونه را به دست آورید.

به عنوان مثلا می توانیم ۱۲۰° و ۳۰° یا ۱۳۵° و ۴۵° یا ۱۵۰° و ۶۰° اشاره کنیم.

به عنوان مثال می توانیم نسبت های مثلثاتی زاویه ۱۵۰° را به کمک نسبت های مثلثاتی ۶۰° به دست آوریم:

$$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = \cos ۶۰^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\sin ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan ۱۵۰^\circ = \tan(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\cot ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot ۱۵۰^\circ = \cot(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\tan ۶۰^\circ = -\sqrt{3}$$

۳ آیا دو زاویه می توان یافت که دارای کسینوس یکسان باشند؟ چرا؟

خیر نمی توان یافت با توجه به روابطی که برای زوایا مکمل، متمم و دو زاویه که اختلاف آن ها ۹۰° ($\frac{\pi}{2}$) باشد، کسینوس ها برابر نیستند.

۴ نسبت های مثلثاتی زاویه ۱۸۰° را از روی مکمل آن بیابید.

مکمل زاویه ۱۸۰° زاویه ۰° است. بنا براین داریم:

$$\sin ۱۸۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۱۸۰^\circ) = \sin ۰^\circ = ۰$$

$$\cos ۱۸۰^\circ = -\cos ۰^\circ = -۱$$

$$\tan ۱۸۰^\circ = -\tan ۰^\circ = ۰$$

$$\cot ۱۸۰^\circ = -\cot ۰^\circ = \text{تعریف نشده}$$

۵ نسبت های مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را از روی مکمل آن بیابید.

$$\sin ۱۸۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۱۳۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos ۱۳۵^\circ = -\cos ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان (مضارب زوج π رادیان)

فعالیت

یادآوری می‌کنیم برای رسم زاویه در دایره مثلثاتی نقطه A در شکل مقابل مبدأ حرکت است. برخی از زوایا از یک دور کامل دایره مثلثاتی یعنی 360° بزرگ‌ترند مانند زاویه 405° .

برای رسم چنین زاویه‌ای ابتدا در جهت مثلثاتی یک دور کامل را طی می‌کنیم؛ سپس ادامه زاویه را که به اندازه 45° است رسم می‌کنیم. در این حالت دو زاویه 405° و 45° را هم انتها می‌نامیم.

دو زاویه α و β را هم انتها گوئیم؛ هرگاه اضلاع انتهایی آنها بر هم منطبق شود (شکل مقابل). اگر دو زاویه هم انتها باشند، اختلاف آنها مضرب زوجی از π رادیان یا 180° است. مثلاً زاویه‌های 405° و 45° هم انتها هستند؛ زیرا $405^\circ - 45^\circ = 360^\circ$ (شکل سمت راست) در این حالت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 405° و 45° یکسان‌اند. چون انتهای کمان زاویه 45° در ربع اول است، بنابراین:

$$\sin 405^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^\circ = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

حال همین بررسی را روی زاویه $\frac{5\pi}{3}$ رادیان انجام دهید؛ چون $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ بنابراین

دو زاویه $\frac{5\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$ رادیان هم انتها هستند (شکل سمت راست).

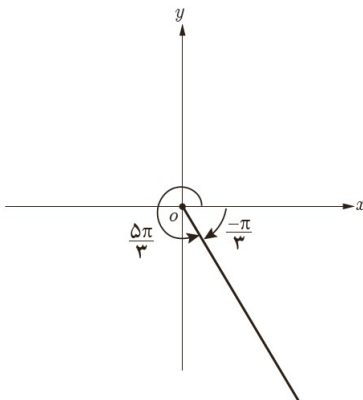
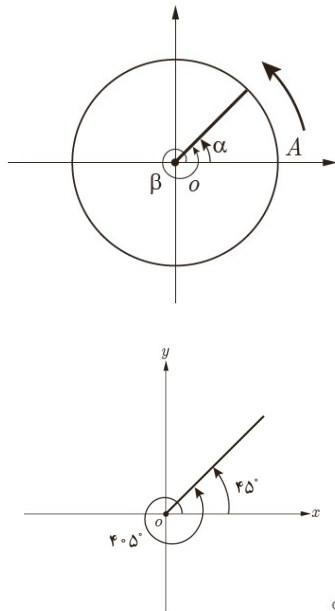
چون انتهای کمان زاویه $\frac{5\pi}{3}$ رادیان در ربع چهارم است؛ بنابراین:

$$\sin \frac{5\pi}{3} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{3} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$$

$$\cot \frac{5\pi}{3} = \cot(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cot(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



در حالت کلی برای هر عدد صحیح k ،

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

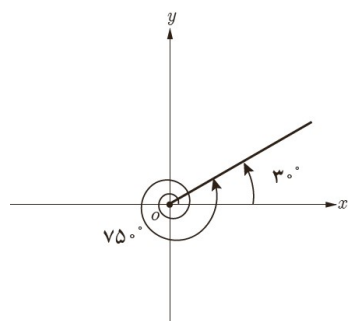
$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

کار در کلاس



مطابق نمونه هر یک از نسبت های مثلثاتی زاویه های زیر را مشخص کنید. (شکل سمت راست)

$$\sin 75^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-315^\circ) = -\tan(315^\circ) = -\tan(36^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$1 \quad \cos 3^\circ = \cos(36^\circ - 6^\circ) = \cos 6^\circ = \frac{1}{2}$$

$$2 \quad \sin 42^\circ = \sin(36^\circ + 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3 \quad \tan(-225^\circ) = -\tan(225^\circ) = -\tan(36^\circ - 135^\circ) = -(-\tan 135^\circ) = \tan 135^\circ = \tan(18^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = 1$$

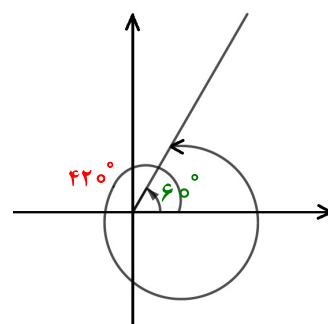
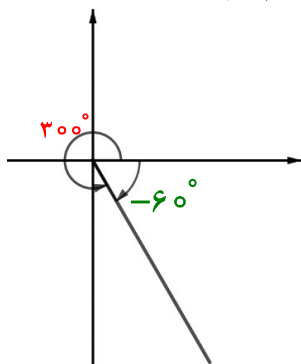
$$4 \quad \cot(-33^\circ) = -\cot(33^\circ) = -\cot(36^\circ - 3^\circ) = -(-\cot 3^\circ) = \cot 3^\circ = \sqrt{3}$$

$$5 \quad \sin \frac{11\pi}{4} = \sin(2\pi + \frac{3\pi}{4}) = \sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

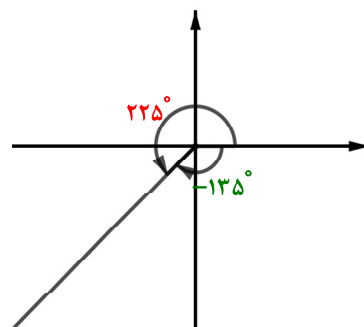
$$6 \quad \cos(-\frac{7\pi}{4}) = \cos(\frac{7\pi}{4}) = \cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

دو زاویه 30° و -6° هم انتها هستند.

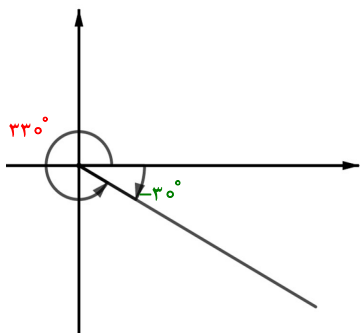
دو زاویه 42° و 6° هم انتها هستند.



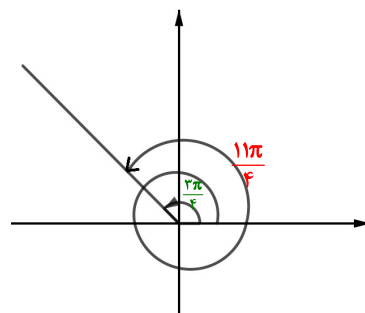
دو زاویه ۲۲۵° و ۱۳۵° هم انتها هستند.



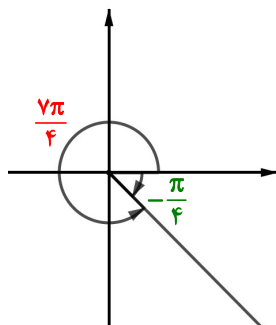
دو زاویه ۳۳° و -۳° هم انتها هستند.



دو زاویه $\frac{۱۱\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ هم انتها هستند.



دو زاویه $\frac{۷\pi}{۴}$ و $-\frac{\pi}{۴}$ هم انتها هستند.



تمرین

۱) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید :

الف) $\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲^\circ = \tan(۱۸^\circ - ۴۵^\circ) + \cot(۱۸^\circ - ۶^\circ) = -\tan ۴۵^\circ + (-\cot ۶^\circ) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{۳}$

ب) $\cos(-۲۱^\circ) + \cot(۲۴^\circ) = \cos ۲۱^\circ + \cot(۲۴^\circ) = \cos(۱۸^\circ + ۳^\circ) + \cot(۱۸^\circ + ۶^\circ)$
 $= -\cos ۳^\circ + \cot ۶^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{۲} + \frac{\sqrt{3}}{۳}$

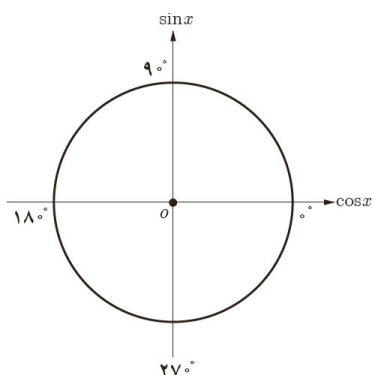
پ) $\sin ۶۳^\circ + \tan(-۵۴^\circ) = \sin ۶۳^\circ - \tan ۵۴^\circ = \sin(۲ \times ۳۶^\circ - ۹^\circ) - \tan(۳۶^\circ + ۱۸^\circ)$
 $= -\sin ۹^\circ - \tan ۱۸^\circ = -1 + 0 = -1$

ت) $\cos(-۷۲^\circ) + \cot(-۶^\circ) + \tan ۷۲^\circ - \tan(-۶^\circ) =$
 $= \cos ۷۲^\circ - \cot ۶^\circ + \tan ۷۲^\circ + \tan ۶^\circ$
 $= \cos(۲ \times ۳۶^\circ + 0) - \cot(۲ \times ۳۶^\circ - ۱۲^\circ) + \tan(۲ \times ۳۶^\circ + 0) + \tan(۲ \times ۳۶^\circ - ۱۲^\circ)$
 $= \cos^\circ - (-\cot ۱۲^\circ) + \tan^\circ - \tan ۱۲^\circ = \cos^\circ + \cot(۱۸^\circ - ۶^\circ) + \tan^\circ - \tan(۱۸^\circ - ۶^\circ)$
 $= \cos^\circ - \cot ۶^\circ + \tan^\circ + \tan ۶^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{۳} + 0 + \sqrt{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{۳} + \sqrt{3}$

$$\text{ث) } \sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right) = \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(8\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } \frac{\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} &= \frac{\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{-\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} = \frac{-4 - \sqrt{6}}{10} \end{aligned}$$

۲ جدول زیر را کامل کنید :



زاویه x نسبت	12°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	330°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

۳ بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 84^\circ = \sin 6^\circ$

$$\sin 84^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 12^\circ) = \sin 12^\circ = \sin(18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ$$

ب) $\cos(-324^\circ) = \cos 36^\circ$

$$\cos(-324^\circ) = \cos 324^\circ = \cos(36^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ$$

پ) $\tan(-100^\circ) = \tan 8^\circ$

$$\tan(-100^\circ) = -\tan 100^\circ = -\tan(3 \times 36^\circ - 8^\circ) = -(-\tan 8^\circ) = \tan 8^\circ$$

ت) $\sin 875^\circ = \sin 155^\circ$

$$\sin 875^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 155^\circ) = \sin 155^\circ$$

راه حل دیگر این است که نشان دهیم این زوایا هم انتها هستند. همانطور که ملاحظه می شود اختلاف هر دو زاویه ارائه شده

$$875^\circ - 155^\circ = 720^\circ = 2 \times 360^\circ$$

در هر قسمت مضربی از 2π رادیان یا 360° است :

۴ در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویه مناسب قرار دهید :

الف) $\sin x = \cos (2^\circ + x)$

با توجه به رابطه‌ی نوشته شده باید زوایا متمم هم باشند پس داریم :

$$x + 2^\circ + x = 90^\circ \Rightarrow x = 35^\circ$$

ب) $\tan(x + \frac{\pi}{18}) = \cot(\frac{2\pi}{9} + x)$

با توجه به رابطه‌ی نوشته شده باید زوایا متمم هم باشند پس داریم :

$$x + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} + x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{9}$$

آیا برای زاویه x تنها یک مقدار می‌توان یافت؟ جواب خود را با جواب‌های دوستان خود مقایسه کنید.

با توجه به نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم، می‌توانیم زوایای فوق را به دست آوریم اما برای یکتایی پاسخ ارائه شده می‌توانیم توضیح دهیم که می‌توان زوایای بسیاری یافت که در تساوی‌های فوق صدق کنند کافی است مضارب 2π رادیان یا 360° را به این زوایا اضافه کنیم مثلاً: برای قسمت (الف) $x = 395^\circ$ یا برای قسمت (ب) $x = \frac{19\pi}{9}$ نیز قابل قبول هستند.



توابعی نظیر تابع سینوس با ضابطه $y = \sin x$ و تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی‌اند که در این درس با نمودار آنها آشنا می‌شوید.

رسم تابع سینوس

فعالیت

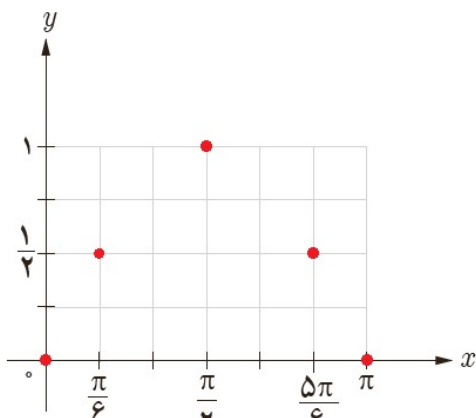
۱ جدول روبه‌رو را کامل کنید.

مجموعه زوج‌های مرتب حاصل در جدول مقابل یک تابع به صورت زیر مشخص می‌کند.

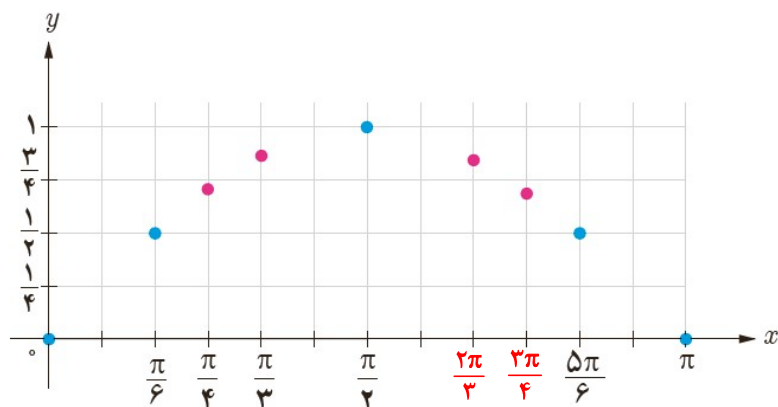
$$f = \left\{ (0, 0), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), (\pi, 0) \right\}$$

x	$y = \sin x$	مختصات نقطه
0	0	$(0, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$
$\frac{\pi}{4}$	1	$(\frac{\pi}{4}, 1)$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2})$
π	0	$(\pi, 0)$

۲ نقاط حاصل در جدول را در شکل زیر مشخص کنید.



۳ با افزودن نقاط $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ، $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ، $(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ و $(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ به جدول بالا، شکل زیر به دست می‌آید.
(با فرض $\sqrt{2} \approx 1/4$ و $\sqrt{3} \approx 1/7$)

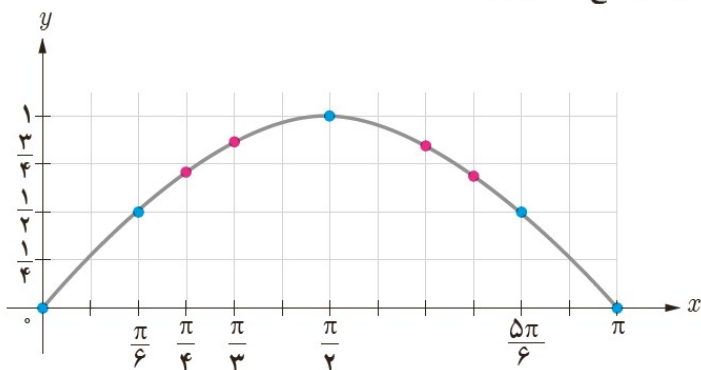


۴ نقاط حاصل در شکل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل

مقابل به دست بیاید. با افزودن تعداد نقاط جدول فوق در بازه $[0, \pi]$ این

شکل به طور دقیق‌تری به دست می‌آید. شکل حاصل نمودار تابع سینوس

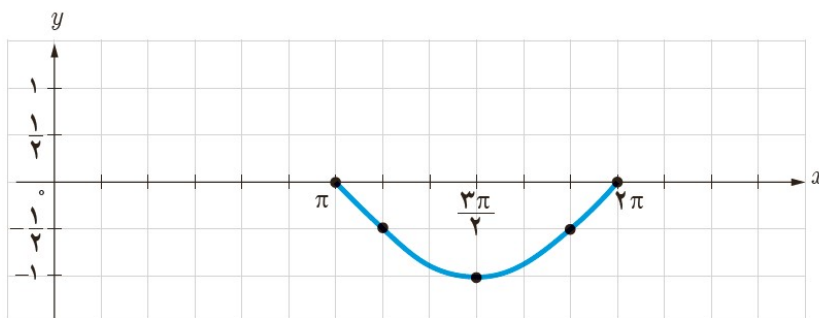
با ضابطه $y = \sin x$ را در این بازه مشخص می‌کند.



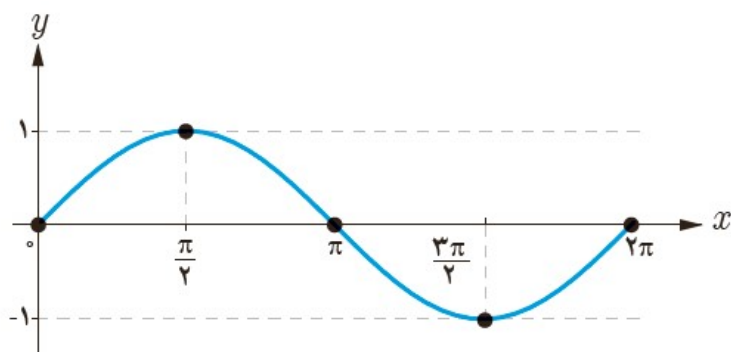
۵ مراحل صفحه قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازه $[\pi, 2\pi]$ انجام دهید.

برای این کار ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس نقاط به دست آمده در جدول را در صفحه مختصات مطابق شکل زیر مشخص و آنها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید.

x	$y = \sin x$	مختصات نقطه
π	۰	$(\pi, 0)$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2})$
$\frac{3\pi}{2}$	-۱	$(\frac{3\pi}{2}, -1)$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2})$
2π	۰...	$(2\pi, 0)$



۶ با توجه به شکل های فوق، نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. حال با توجه به این شکل جدول زیر را درباره مقدار این تابع در هر بازه تکمیل کنید.



$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می یابد.	مقدار تابع از ۱ به ۰ کاهش می یابد.	مقدار تابع از ۰ به -۱ کاهش می یابد.	مقدار تابع از -۱ به ۰ افزایش می یابد.
مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.	مقدار تابع در ربع دوم مثبت است.	مقدار تابع در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع در ربع چهارم منفی است.

۷ با توجه به رابطه $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، که در درس قبل آشنا شدید می توان گفت :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با اضافه کردن 2π رادیان به کمان آن تغییری نمی کند بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه های $[0, 2\pi]$ و $[2\pi, 4\pi]$ یکسان است.

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با کم کردن 2π رادیان از کمان آن تغییری نمی‌کند.

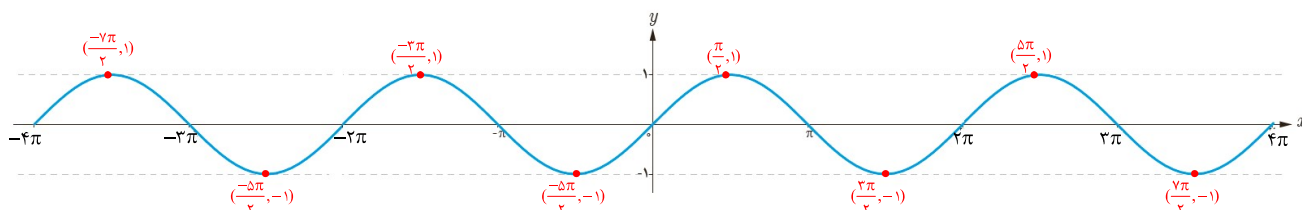
در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[0, 2\pi]$ و $[-2\pi, 0]$ یکسان است.

در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند،

نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[2k\pi, (2k+2)\pi]$ و $[-2k\pi, -2(k+1)\pi]$ یکسان است. به این ترتیب منحنی این تابع که در

بازه $[0, 2\pi]$ رسم شده در بازه‌های $[2\pi, 4\pi]$ ، $[4\pi, 6\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ ، $[-4\pi, -2\pi]$ تکرار می‌شود.

در شکل زیر نمودار تابع سینوس در ۲ تکرار رسم شده است. این نمودار را برای ۴ تکرار کامل کنید.



۸ با توجه به شکل بالا جاهای خالی را درباره ویژگی‌های تابع سینوس با ضابطه $y = \sin x$ کامل کنید.

الف) دامنه تابع سینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1, 1]$ است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x = k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ برابر با **صفر** است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با **۱** است که در نقاطی به طول‌های $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = \frac{5\pi}{2}$

و در حالت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آید. $x = \frac{-7\pi}{2}$ ، $x = \frac{-3\pi}{2}$

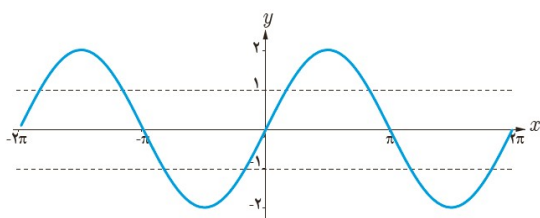
ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با **-۱** است که در نقاطی به طول‌های $x = \frac{3\pi}{2}$ ، $x = \frac{7\pi}{2}$

و در حالت کلی $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آید. $x = \frac{-5\pi}{2}$ ، $x = \frac{-\pi}{2}$

کار در کلاس

هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱ $y = 2 \sin x$



(الف)

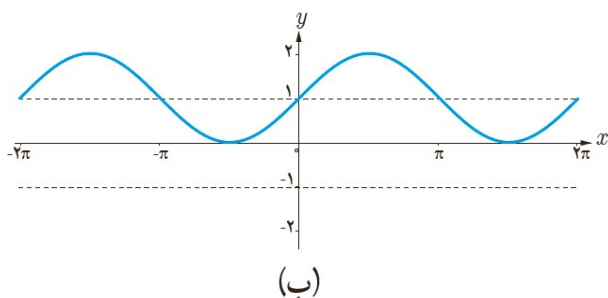
برای رسم نمودار این تابع در بازه $[0, 2\pi]$ چون برد تابع بازه $[-2, 2]$ است،

کافی است نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را روی این بازه انبساط دهیم.

نمودار حاصل در بازه $[-2\pi, 0]$ نیز تکرار می‌شود. و شکل مقابل به دست

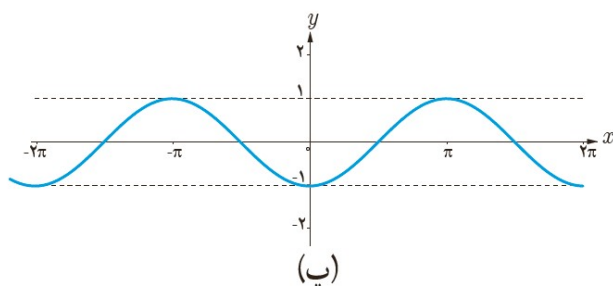
می‌آید.

۲ $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$



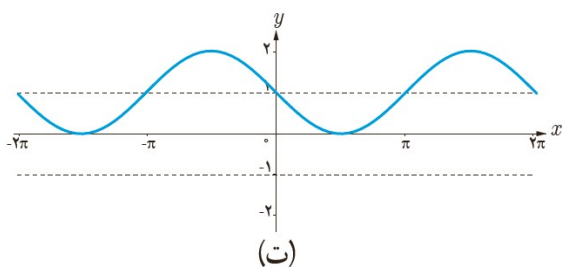
برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت روی محور عمودی انتقال دهیم. به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.

۳ $y = \sin x + 1$



برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ واحد در جهت مثبت روی محور افقی انتقال دهیم. به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.

۴ $y = -\sin x + 1$



برای رسم نمودار این تابع ابتدا نمودار تابع با ضابطه $y = -\sin x$ را با قرینه کردن نمودار تابع سینوس نسبت به محور x ها رسم نموده و سپس نمودار حاصل را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور عمودی انتقال می دهیم به این ترتیب شکل مقابل به دست می آید.

رسم تابع کسینوس

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

به این ترتیب مجموعه زوج های مرتب زیر به دست می آید.

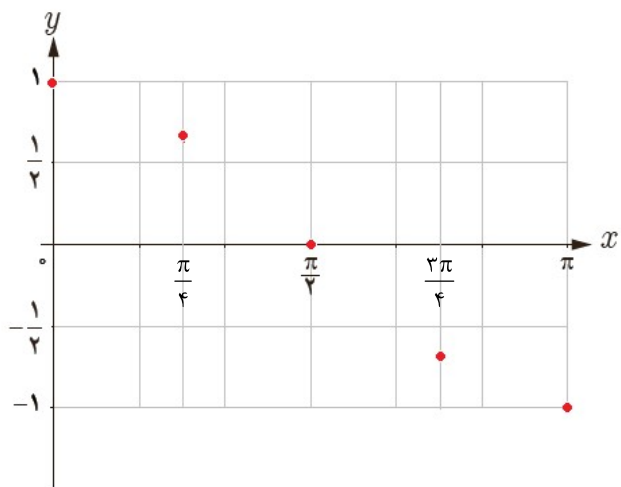
$$f = \{(\circ, 1), (\frac{\pi}{4}, \circ/\sqrt{2}), (\frac{\pi}{2}, \circ/\circ), (\frac{3\pi}{4}, -\circ/\sqrt{2}), (\pi, -1), (\frac{5\pi}{4}, \circ/\sqrt{2}), (\frac{3\pi}{2}, \circ/\circ), (\frac{7\pi}{4}, -\circ/\sqrt{2}), (2\pi, 1)\}$$

آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می کند؟

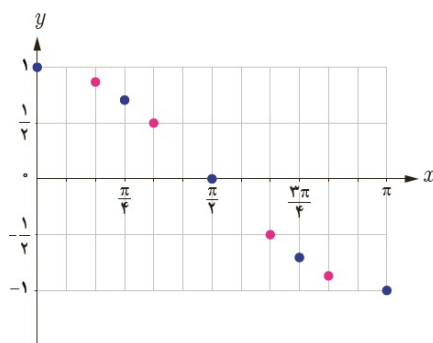
بله یک تابع را مشخص می کند.

x	$y = \cos x$	مختصات نقطه
$\circ$	۱	$(\circ, 1)$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \circ/\sqrt{2}$	$(\frac{\pi}{4}, \circ/\sqrt{2})$
$\frac{\pi}{2}$	$\circ$	$(\frac{\pi}{2}, \circ)$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -\circ/\sqrt{2}$	$(\frac{3\pi}{4}, -\circ/\sqrt{2})$
π	-1	$(\pi, -1)$

۲ نقاط جدول بالا را در این شکل مشخص کنید.



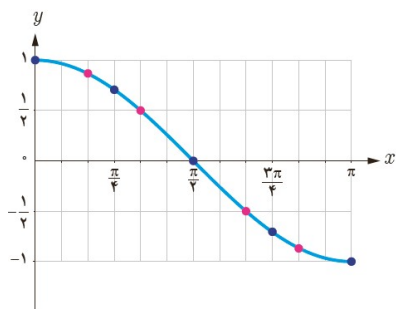
۳ نقاط به طول‌های $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ را به جدول بالا اضافه کنید تا شکل زیر به دست آید. ($\sqrt{3} \approx 1.7$).



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$y = \cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

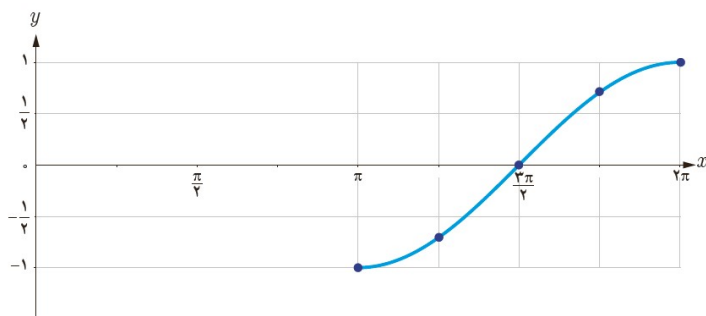
۴ نقاط شکل صفحه قبل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به دست آید.

این شکل نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ را در بازه $[0, \pi]$ مشخص می‌کند.



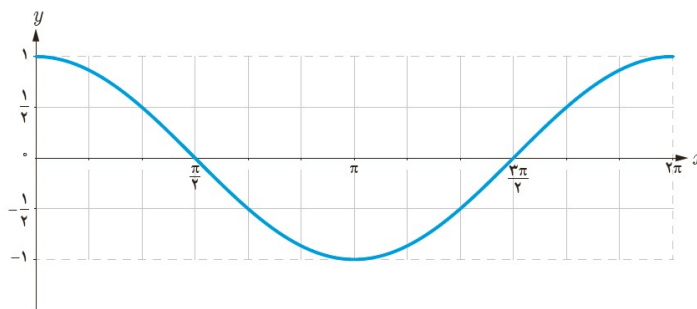
۵ جدول زیر را کامل کنید تا نمودار تابع کسینوس در بازه $[\pi, 2\pi]$ به صورت شکل مقابل

به دست آید.



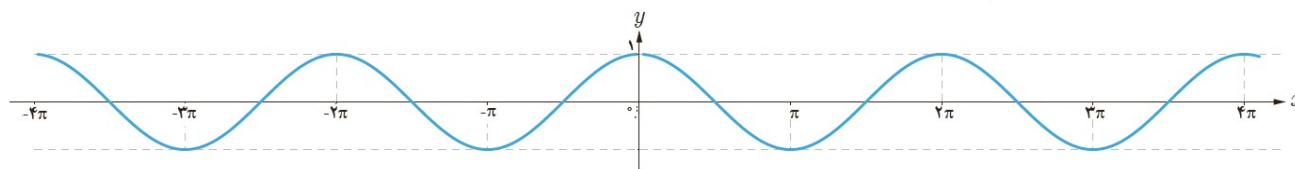
x	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

۶ با توجه به مراحل بالا نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. با توجه به این شکل جدول زیر را کامل کنید.



$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.	مقدار تابع از ۰ به -۱ کاهش می‌یابد.	مقدار تابع از -۱ به ۰ افزایش می‌یابد.	مقدار تابع از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.	مقدار تابع در ربع دوم منفی است.	مقدار تابع در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع در ربع چهارم مثبت است.

۷ تابع کسینوس دارای نمودار یکسانی در بازه‌های $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ است. در شکل زیر نمودار تابع کسینوس در بازه $[0, 4\pi]$ رسم شده است. شکل را کامل کنید.



۸ با توجه به شکل صفحه قبل جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطه $y = \cos x$ کامل کنید.

الف) دامنه تابع کسینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1, 1]$ است.

ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های $x = \frac{k\pi}{2}$ برابر با صفر است. ($k \in \mathbb{Z}$)

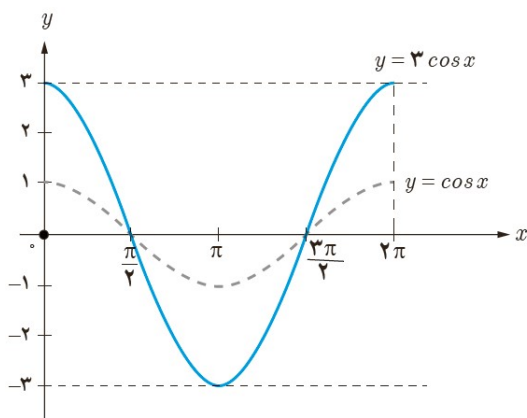
پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس 1 است که در طول‌های $x = 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع کسینوس -1 است که در طول‌های $x = (2k+1)\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

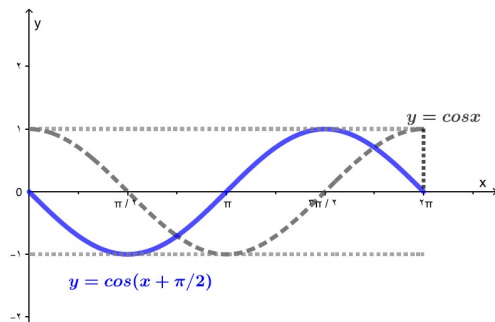
کار در کلاس

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = 3 \cos x$ را نشان می‌دهد. به طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را

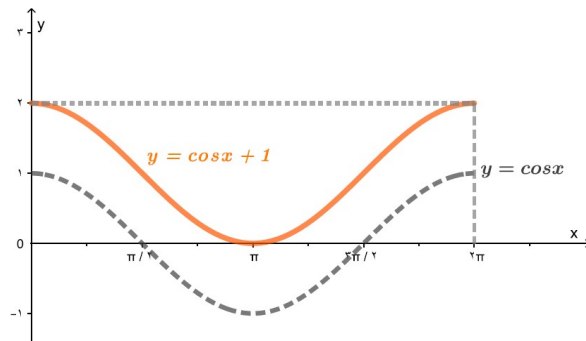
در بازه $[0, 2\pi]$ ، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.



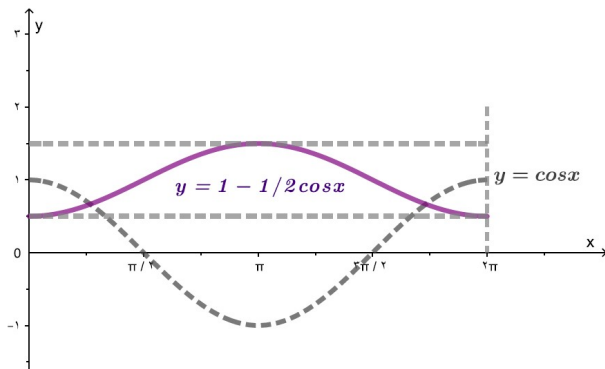
۱) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$



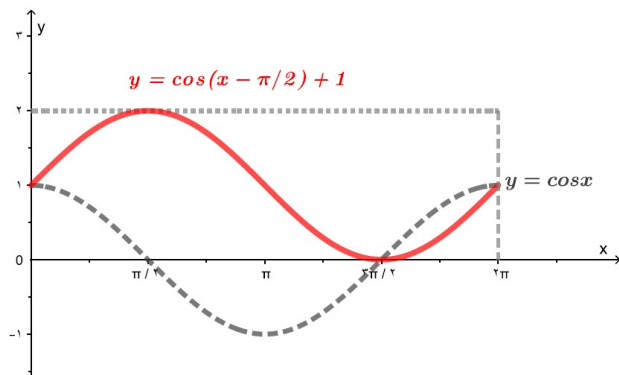
۲) $y = \cos x - 1$



۳) $y = 1 - \frac{1}{2} \cos x$



۴) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1$



تمرین

۱) آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y = \sin x$, $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

$y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(-(\frac{\pi}{2} - x)) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۲) $y = \cos x$, $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$

$y = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۳) $y = \cos x$, $y = \cos(2\pi - x)$

$y = \cos(2\pi - x) = \cos x$

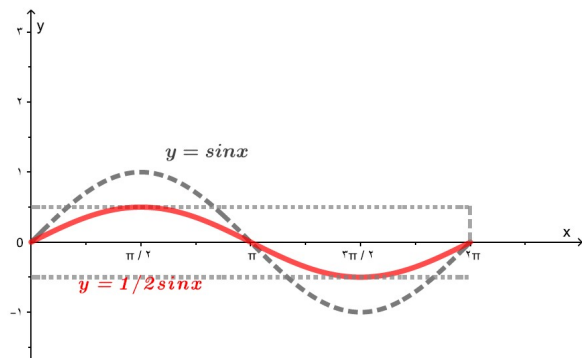
بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$۴) y = \sin x, \quad y = \sin(\Delta\pi - x)$$

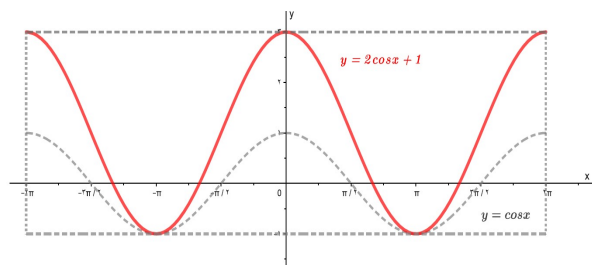
$y = \sin(\Delta\pi - x) = \sin(۴\pi + \pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$ این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۲) نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

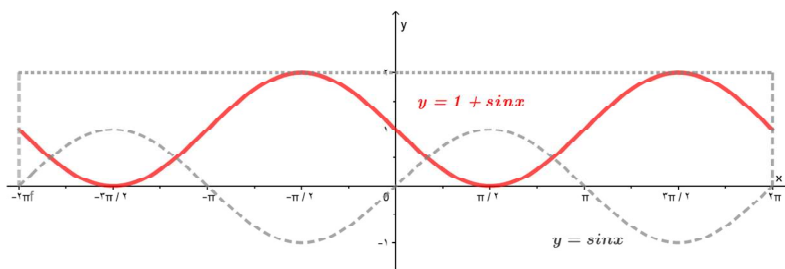
$$۱) y = \frac{1}{2} \sin x, \quad [0, 2\pi]$$



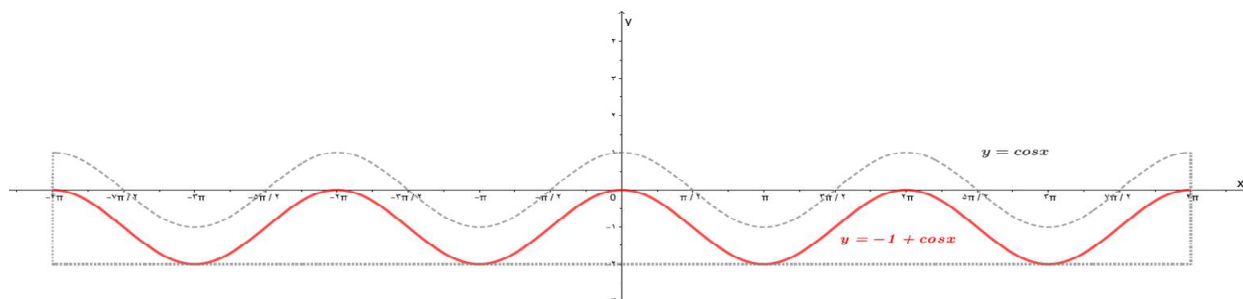
$$۲) y = 2 \cos x + 1, \quad [-2\pi, 2\pi]$$



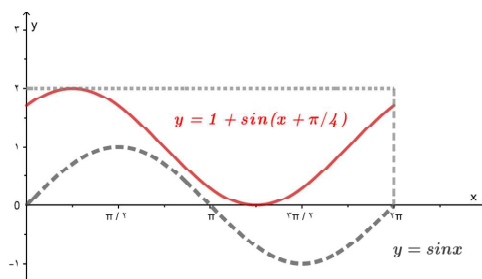
$$۳) y = 1 - \sin x, \quad [-2\pi, 2\pi]$$



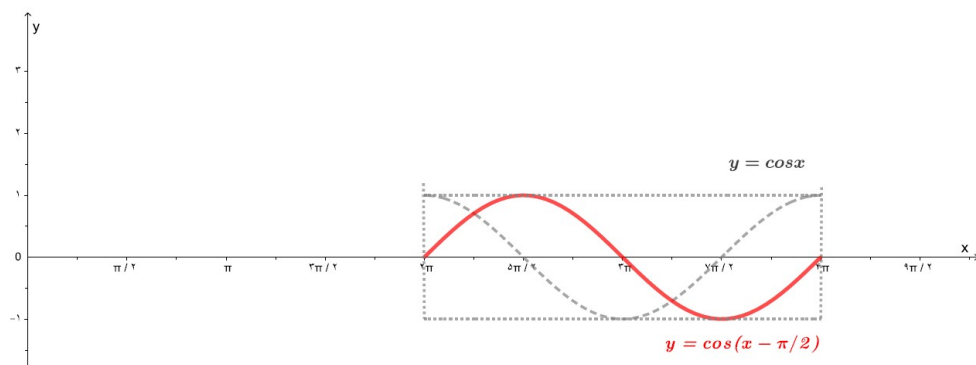
$$۴) y = -1 + \cos x, \quad [-4\pi, 4\pi]$$



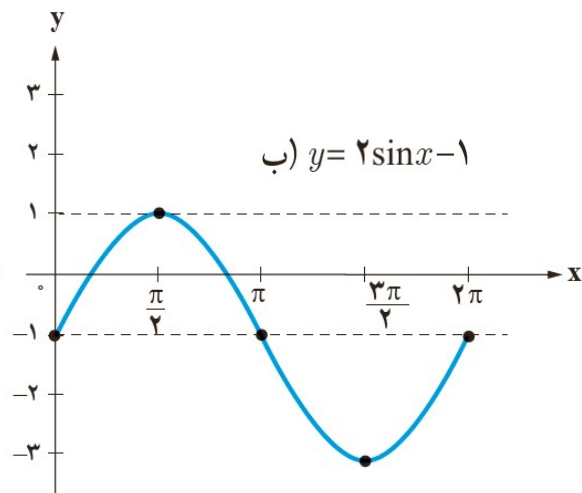
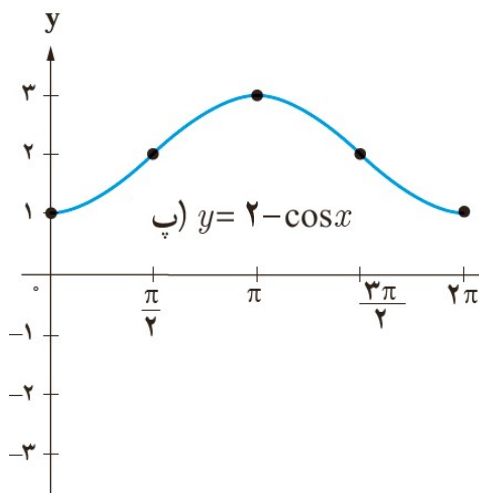
$$۵) y = 1 + \sin(x + \frac{\pi}{4}), \quad [0, 2\pi]$$



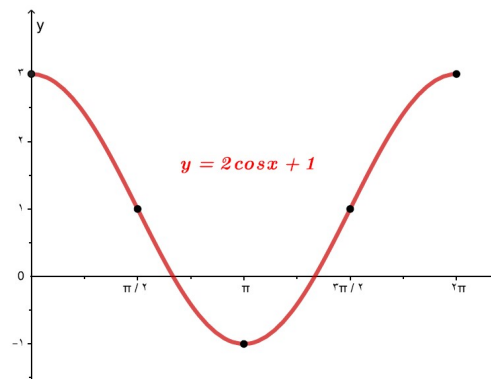
۶) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, $[\pi, 2\pi]$



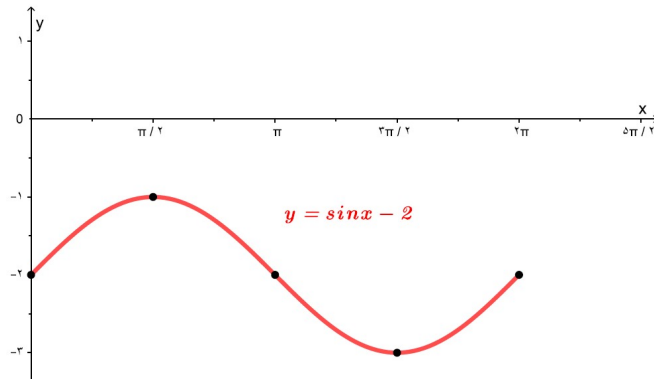
۳ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.



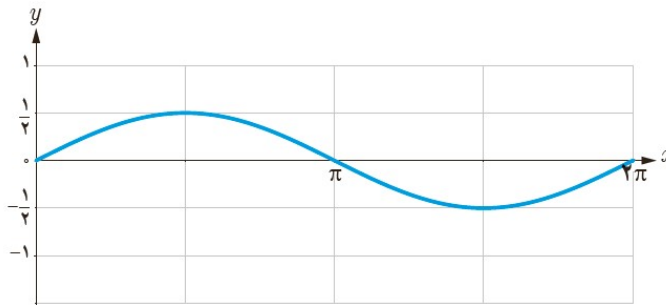
الف) $y = 2 \cos x + 1$



ت) $y = \sin x - 2$

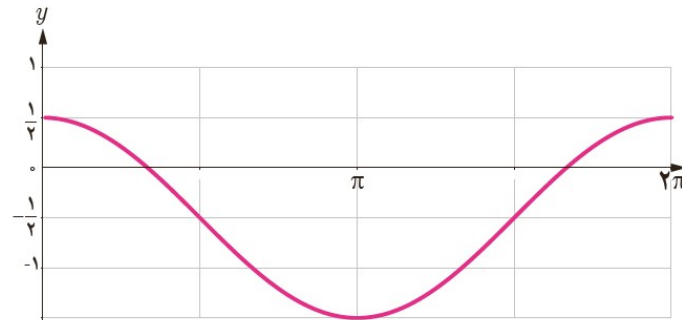


۴ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟
 الف) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{1}{4} \sin x$ را نشان می‌دهد.



درست است. در نمودار تابع سینوس مقادیر y باید نصف شوند.

ب) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x - \frac{1}{4}$ را نشان می‌دهد.



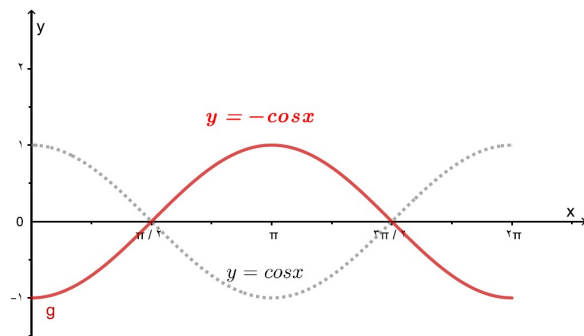
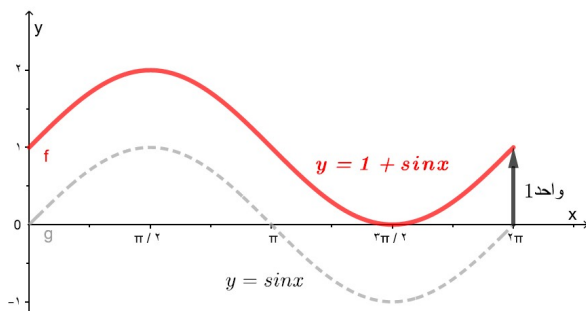
درست است نمودار تابع کسینوس را به اندازه نصف واحد به موازات محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.

پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور x ها انتقال دهیم.

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

پ) باید به اندازه یک واحد به موازات محور y ها به سمت بالا انتقال یابد.

ت) درست است.



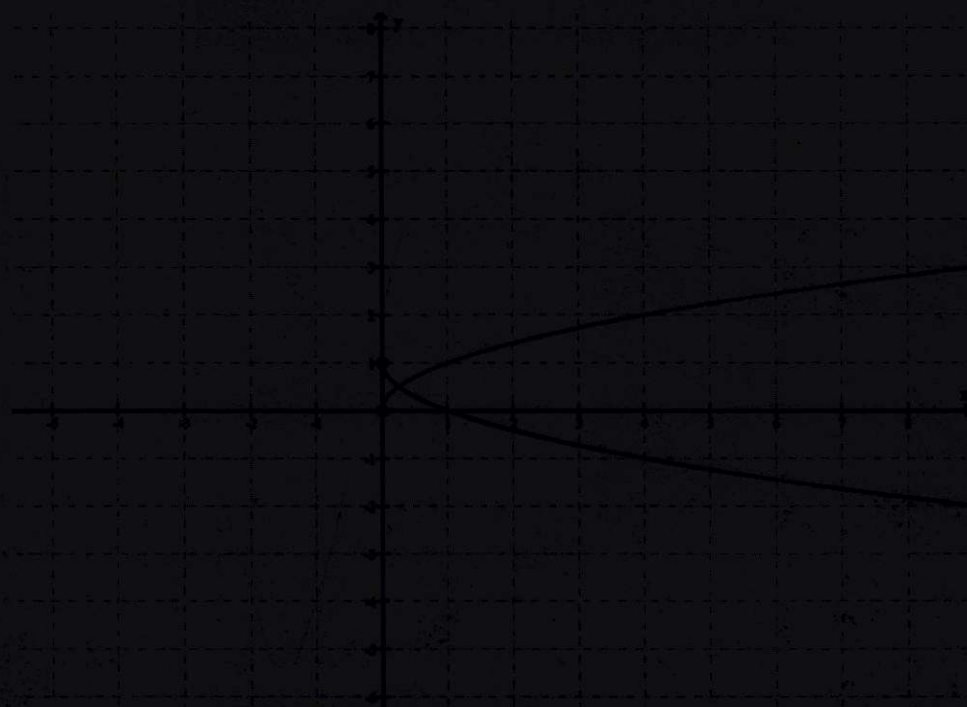
توابع نمایی و لگاریتمی



فصل

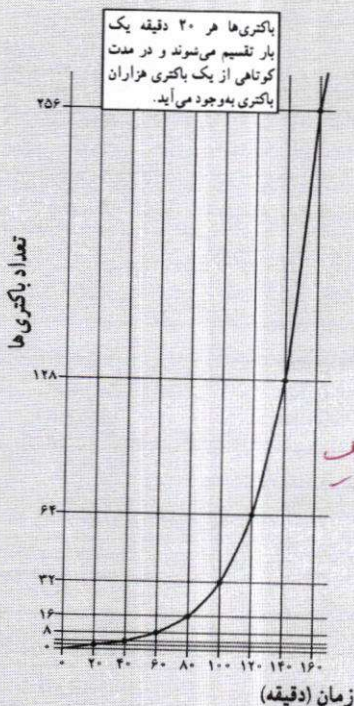


c) $u(x) = 1 - \sqrt{x}$



خواندنی

بیشتر باکتری ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می رسند و قادر به تولید مثل می شوند. در شرایط محیطی مساعد، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می شود. ۲۰ دقیقه بعد، از آن دو باکتری، چهار باکتری به وجود می آید و به همین ترتیب تعداد باکتری ها به ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ و ... می رسد. اگر این روش تکثیر باکتری ها تا ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده ای از باکتری به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد! باکتری ها از طریق تولید سم یا تخریب سلول های بدن، باعث بیماری می شوند و به بدن آسیب می رسانند.



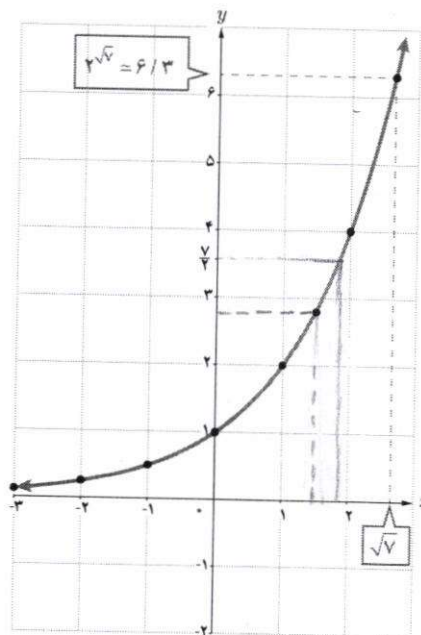
باکتری سل

هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ که در آن $a \in \mathbb{R}$ و $a > 0$ ، $a \neq 1$ یک تابع نمایی نامیده می شود.

مثال: توابع با ضابطه های $y = 2^x$ و $y = 3^x$ و $y = (\frac{1}{2})^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x$ نمونه ای از توابع نمایی هستند.

فعالیت

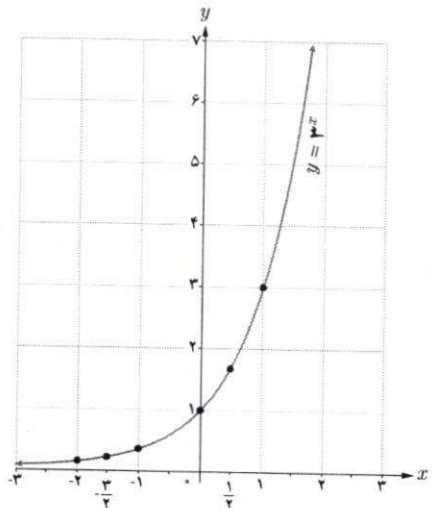
در شکل مقابل نمودار تابع نمایی با ضابطه $y = 2^x$ رسم شده است.



- محل تقاطع این نمودار با محور عرض ها چه نقطه ای است؟
- دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید.
- آیا این تابع یک به یک است؟ چرا؟
- عدد $\sqrt{2}$ را روی محور x ها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $2^{\sqrt{2}}$ را به صورت تقریبی به دست آورید.
- عدد $\frac{7}{4}$ روی محور y ها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را روی محور طول ها به دست آورید؛ به طوری که $\frac{7}{4} = 2^a$.
- اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.
- در حالت کلی اگر $x < y$ ، چه رابطه ای بین 2^x و 2^y برقرار است؟

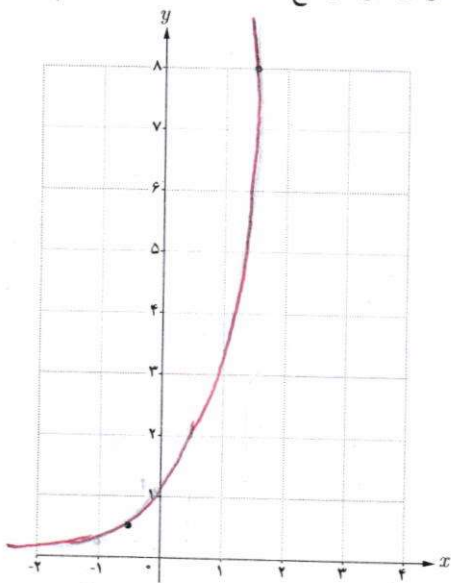
کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.



x	$y = 3^x$
-2	0/11
-1	0/33
0	1
1	3
2	9

۱ جدول زیر را کامل کنید و با استفاده از آن نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x$ را رسم کنید.



x	$y = 4^x$
-2	1/16
-1	1/4
0	1
1	4
2	16

خواندنی

در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه x^y (یا y^x) وجود دارد که با استفاده از آن می‌توانید مقادیر اعداد توان‌دار را به دست آورید. برای مثال جهت محاسبه 2^5 ، ابتدا عدد ۲ را وارد می‌کنید؛ سپس دکمه x^y و بعد عدد ۵ و سپس دکمه تساوی را فشار می‌دهید که عدد ۳۲ ظاهر می‌شود. اگر عدد توان، طبیعی نبود، آن را داخل پرانتز قرار می‌دهیم. تذکر: در برخی از ماشین حساب‌ها به جای دکمه x^y ، نمادی به صورت $\square$ وجود دارد که همان کار را انجام می‌دهد.

برای تمرین، مقادیر زیر را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید. (تا یک رقم اعشار)

$$2 \rightarrow x^y \rightarrow (\rightarrow 2 \rightarrow \sqrt{} \rightarrow) \rightarrow = \rightarrow \sqrt[2]{6}$$

۱) $2^{\sqrt{2}}$

۲) $2^{\sqrt{8}}$

۳) $2^{0.1}$

۴) $2^{-0.5}$

۵) $2^{(1+\sqrt{3})}$



۲ دامنه و برد توابع فوق را باهم مقایسه کنید. دامنه این توابع $\mathbb{R}$ و بردشان $(0, +\infty)$ است.

۳ با استفاده از نمودار، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^{2/5} > 3^{3/5}$

ب) $4^{\sqrt{7}} > 4^{\sqrt{5}}$

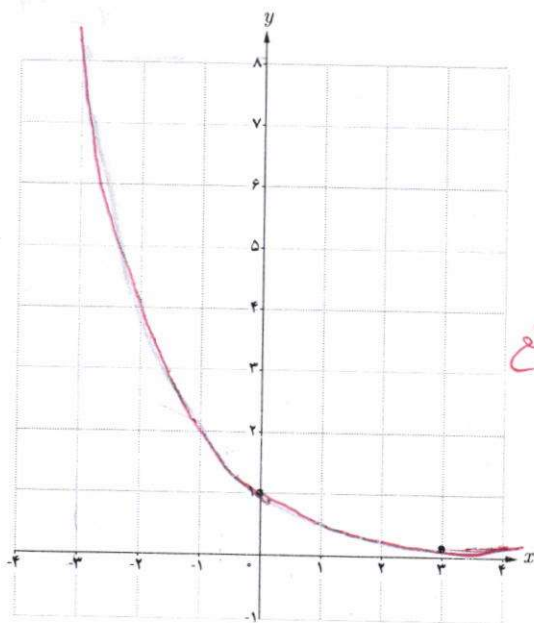
۴ اگر $x < y$ ، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^x < 3^y$

ب) $4^x < 4^y$

۱ با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = (\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	3
$y = (\frac{1}{2})^x$	8	4	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



۲ محل تقاطع نمودار این تابع با محور y ها چه نقطه‌ای است؟

$A (0, 1)$

۳ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

$D = (0, \infty)$ بر $R = IR$

۴ آیا این تابع یک به یک است؟ چرا؟

بله، زیرا هر خط موازی محور OX را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۵ با استفاده از نمودار فوق، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف $(\frac{1}{2})^{1/5} > (\frac{1}{2})^{1/4}$

ب $(\frac{1}{2})^{1/2} > (\frac{1}{2})^{1/3}$

پ $(\frac{1}{2})^{1/4} > (\frac{1}{2})^{1/5}$

$(\frac{1}{2})^4 > (\frac{1}{2})^3$

۶ با استفاده از نمودار، اگر $x < y$ ، چه رابطه‌ای بین $(\frac{1}{2})^x$ و $(\frac{1}{2})^y$ وجود دارد؟

خواندنی

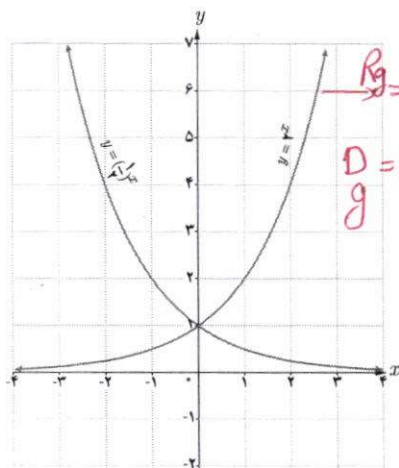
با استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا (GeoGebra) می‌توانید نمودارهای توابع نمایی را به راحتی رسم کنید. برای این کار در نوار دستور، ضابطه تابع را حروف جینی کرده و کلید Enter را بزنید. در پنجره گرافیکی، نمودار مطلوب نمایش داده می‌شود.

در تصویر مقابل، نمودار تابع با ضابطه $y = 2^x$ در محیط این نرم‌افزار نمایش داده شده است.

کار در کلاس

نمودار توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = (\frac{1}{2})^x$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟ *محور y ها*



خواندنی

یک داروی بیماری آسم که به صورت قرص ۱۰۰ میلی گرمی موجود است، برای یک بیمار تجویز شده است. اگر او این قرص را مصرف کند و بدانی که در زمان مصرف دارو هیچ میزانی از آن در بدن وی موجود نیست، در این صورت می‌توان پیش‌بینی کرد که بعد از گذشت t دقیقه، در مجموع از این دارو به میزان A میلی گرم، در جریان خون او وجود خواهد داشت که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A = 100[1 - (0.9)^t]$$



۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطه $y = 2^x$ به تابع با ضابطه $y = 2^{-x}$ یا همان $y = (\frac{1}{2})^x$ دست می‌یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟ *دامنه ۲ همان برد ۲ و برد ۲ همان دامنه ۲*

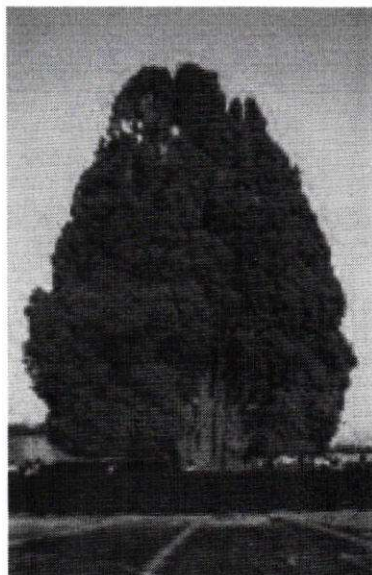
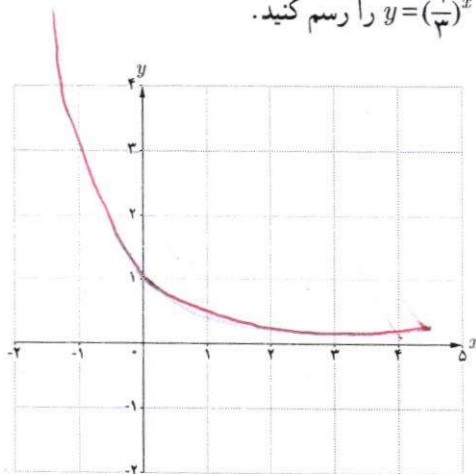
۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور y ها قرینه‌اند، مثال بزنید.

$$y = 3^x \quad y = (\frac{1}{3})^x$$

نمودار توابع با ضابطه‌های $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ ($a > 0$ و $a \neq 1$) نسبت به محور y ها قرینه‌اند.

کار در کلاس

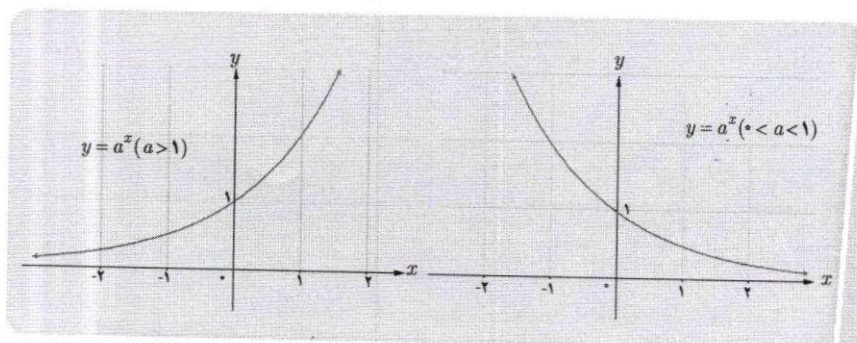
نمودار تابع با ضابطه $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید.



سرو کهن ابرکوه (یزد) با عمر تقریبی ۴۰۰۰ سال

$$(\frac{1}{3})^x \quad \begin{array}{c} x \\ -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 9 \quad 3 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \end{array}$$

- با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل کنید.
- ۱ دامنه تابع با ضابطه $y = a^x$ ($a > 1$) مجموعه اعداد حقیقی و برد آن $(0, +\infty)$ است.
 - ۲ دامنه تابع با ضابطه $y = a^x$ ($0 < a < 1$) $\mathbb{R}$ و برد آن بازه $(0, +\infty)$ است.
 - ۳ نمودار توابع فوق محور y ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کند و محور x ها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.
 - ۴ این دو تابع، یک به یک $y = a^x$ زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در $(0, 1)$ نقطه قطع می‌کند. نمودار توابع نمایی در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر است.



معادلات نمایی

معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادله نمایی می‌نامند. برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم. اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^x = a^y$ آنگاه $x = y$ و برعکس.

مثال: معادله‌های نمایی مقابل را حل کنید.

الف) $3^{2x-3} = 81 \rightarrow 3^{2x-3} = 3^4 \rightarrow 2x-3=4 \rightarrow x = \frac{7}{2}$

ب) $4^{2x-1} = 8^{x+1} \rightarrow (2^2)^{2x-1} = (2^3)^{x+1} \rightarrow 4x-2=3x+3 \rightarrow x=5$

پ) $5^{2n-1} = 125^{2n+1} \rightarrow 5^{2n-1} = 5^{6n+3} \rightarrow 2n-1=6n+3 \rightarrow n = -\frac{4}{3}$

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y = 2x^2 - 3x + 1$ ✗

ب) $y = x^2$ ✗

پ) $y = (0.1)^x$ ✓

ت) $y = (\frac{3}{4})^x$ ✓

ث) $y - 3x = 2$ ✗

ج) $y = \sqrt{x-1}$ ✗

۲ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ قرار دارند؟

الف) $(1, 0)$ ✗

ب) $(3, 1)$ ✗

پ) $(0, 1)$ ✓

ث) $(\sqrt{3}, \frac{1}{3})$ ✗

ج) $(1, 3)$ ✓

د) $(-1, \frac{1}{3})$ ✓

۳ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه $(\frac{1}{5}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطه $y = 5^x$ قرار دارد. ✓

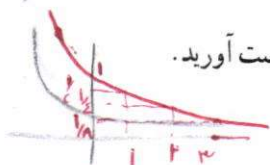
ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 10^x$ با محور y ها، نقطه $(0, 10)$ است. ✗

پ) دامنه توابع با ضابطه‌های $y = x^2$ و $y = 2^x$ مساوی اند. ✓

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 6^x$ با محور x ها، نقطه $(6, 0)$ است. ✗



۴ الف) نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $3^{\sqrt{2}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.



ب) نمودار تابع با ضابطه $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(\frac{1}{3})^{\sqrt{5}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.

۵ فرض کنیم $f(x) = 3^x$ ، $g(x) = (\frac{1}{16})^x$ و $h(x) = 10^x$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(3) = 3^3 = 27$

ب) $g(-1) = (\frac{1}{16})^{-1} = 16$

پ) $h(-2) = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{3n-2} = \frac{1}{32}$ $\rightarrow 2^{3n-2} = 2^{-5} \rightarrow 3n-2 = -5 \rightarrow 3n = -3 \rightarrow n = -1$

ب) $4^{3x+2} = \frac{1}{64}$ $\rightarrow 2^{4x+4} = 2^{-6} \rightarrow 4x+4 = -6 \rightarrow 4x = -10 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$

ت) $9^x = 3^{x^2-2x}$ $\rightarrow 3^{2x} = 3^{x^2-2x} \rightarrow 2x = x^2-2x \rightarrow x^2-4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ or } x = 4$

ث) $(\frac{3}{5})^{x+1} = \frac{25}{9}$ $\rightarrow (\frac{3}{5})^{x+1} = (\frac{5}{3})^2 \rightarrow x+1 = -2 \rightarrow x = -3$

خواندنی

جمعیت جهان در طول قرن گذشته به سرعت رشد کرده است. در نتیجه تقاضای افزایش برای منابع جهان ایجاد شده است. در بیشتر مواقع، از توابع و معادلات نمایی برای مدل سازی رشد های سریع استفاده می شود. جمعیت جهان که با P نشان داده می شود، در سال ۱۹۶۰ برابر با ۳ میلیارد نفر و در سال ۲۰۰۸ برابر با ۶/۷ میلیارد نفر بوده است. این رشد جمعیت را می توان با رابطه $P(x) = 3(1/0.17)^{x-1960}$ که در آن x نشان دهنده سال است، نمایش داد. به کمک این رابطه می توان سالی را که در آن جمعیت جهان برابر ۸ میلیارد نفر خواهد شد، تخمین زد.

تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

خواندنی

روش لگاریتم‌گیری در سال ۱۶۱۴ از سوی جان نپر (۱۶۱۷-۱۵۵۰)، ریاضی‌دان اسکاتلندی در کتابی با عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» ارائه شد.

در فیزیک مفهومی به نام شدت صوت وجود دارد که درک انسان را از بلندی صوت بیان می‌کند. تراز شدت یک صوت عبارت است از لگاریتم (در پایه ده) نسبت شدت آن صوت به شدت صوت مبنا. تراز شدت صوت را با β نشان می‌دهند و یکای آن را به افتخار بل فیزیکدان امریکایی مخترع تلفن، بل (B) و دسی بل (dB) نام‌گذاری کرده‌اند. هر بل برابر ده دسی بل است. (I) شدت صوت متناسب است که برابر آستانه شنوایی گوش سالم است).

$$\beta = \log_{10} I$$

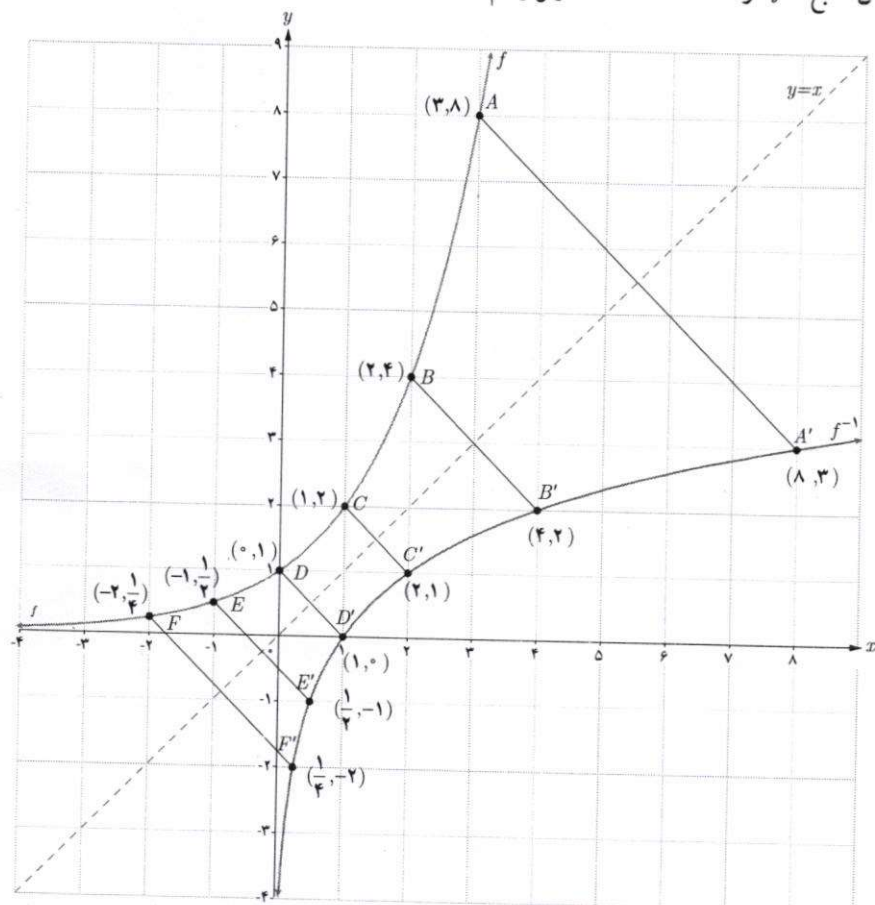
تراز شدن صوت dB	صدا
۰	شدت صوت مبنا
۱۰	نفس کشیدن
۲۰	برگ درختان در نسیم
۴۰	صحبت کردن از فاصله یک متری
۶۰	همهمه در فروشگاه
۷۰	سروصدای خودروها در خیابان شلوغ
۱۲۰	آستانه دردناکی (برای بسامد ۱۰۰۰ Hz)
۱۳۰	مسلسل
۱۴۰	غرش هواپیمای جت در حين بلند شدن
۱۷۰	راکت فضایی، در موقع بلند شدن

بسیاری از اندازه‌گیری‌ها در علوم مختلف، طیف وسیعی از اعداد را در برمی‌گیرد که برای سادگی محاسبات، می‌توان آنها را توان‌هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت و اندازه‌های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچک‌تری نشان داد یا اندازه‌های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد. کاربرد این ساده‌سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، جمعیت‌شناسی، مهندسی و... مشهود است.

تابع لگاریتمی

فعالیت

در درس اول با تابع نمایی با ضابطه $f(x) = 2^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان‌طور که مشاهده کردیم، این تابع یک به یک است؛ بنابراین وارون آن نیز یک تابع است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.



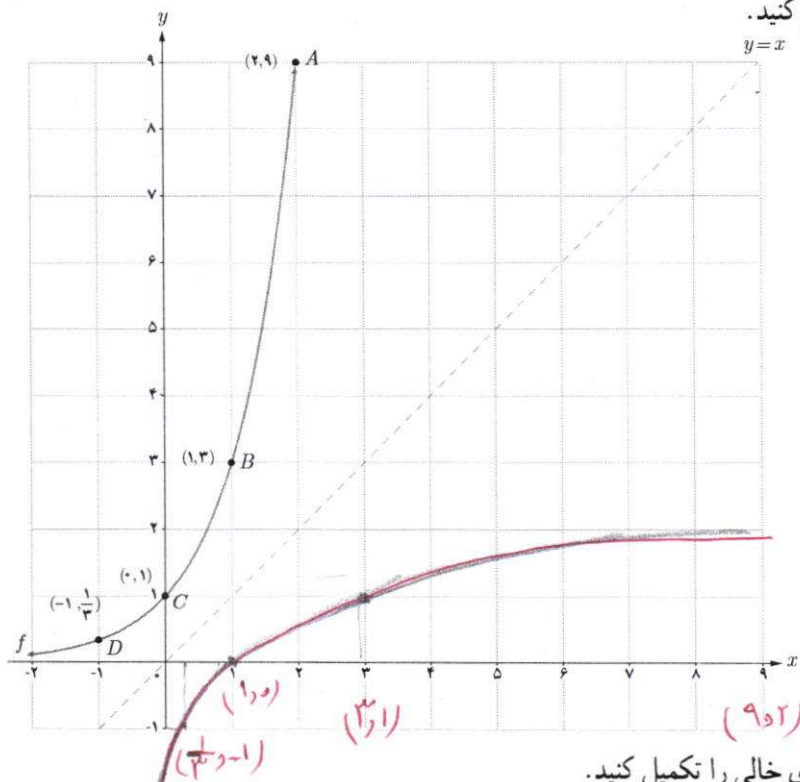
- ۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به دست آورید.
- ۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$f(-2) = \frac{1}{4}$	$f(-1) = \frac{1}{2}$	$f(0) = 1$	$f(2) = 4$
$f^{-1}(\frac{1}{4}) = -2$	$f^{-1}(\frac{1}{2}) = -1$	$f^{-1}(1) = 0$	$f^{-1}(4) = 2$

فعالیت

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 3^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

- ۱ با توجه به نقاط نمودار f ، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



- ۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

$f(-2) = \frac{1}{9}$	$f(0) = 1$	$f(1) = 3$	$f(2) = 9$
$f^{-1}(\frac{1}{9}) = -2$	$f^{-1}(1) = 0$	$f^{-1}(3) = 1$	$f^{-1}(9) = 2$

- ۳ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} را به دست آورید.
- با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطه $f(x) = 3^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_3 x$ نشان می دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای ۳ می نامیم.
- به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

- ۴ با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به طور کلی بنویسید.

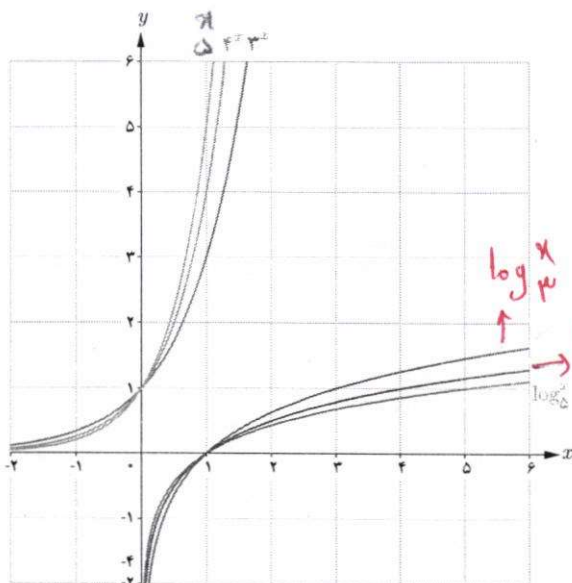
دامنه تابع نمایی: $(-\infty, +\infty)$ برد تابع نمایی: $(0, +\infty)$

دامنه تابع لگاریتمی: $(0, +\infty)$ برد تابع لگاریتمی: $(-\infty, +\infty)$

وارون تابع نمایی با ضابطه $f(x) = a^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می نامیم. به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی مثبت a ($a \neq 1$) داریم:

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

کار در کلاس



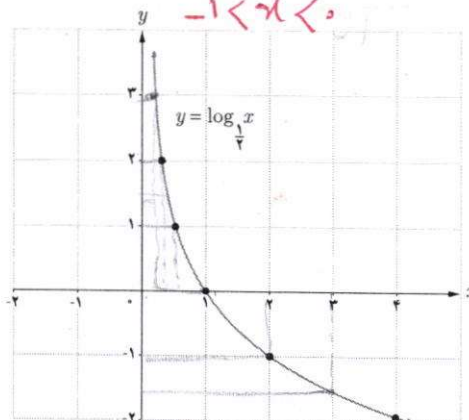
در شکل مقابل، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند. برای توابعی که ضابطه آنها نوشته شده، ضابطه وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.

کار در کلاس

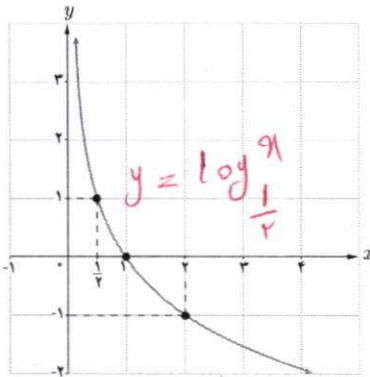
نمودار تابع با ضابطه $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف) $\log_{\frac{1}{2}} 3 = x \rightarrow (\frac{1}{2})^x = 3$

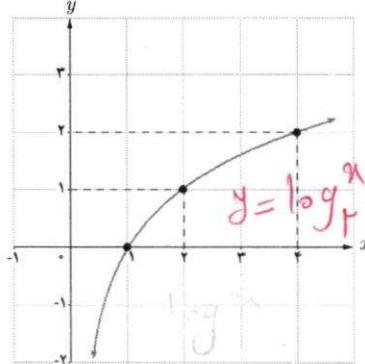
ب) $\log_{\frac{1}{2}} (1/5) = x \rightarrow (\frac{1}{2})^x = 1/5$



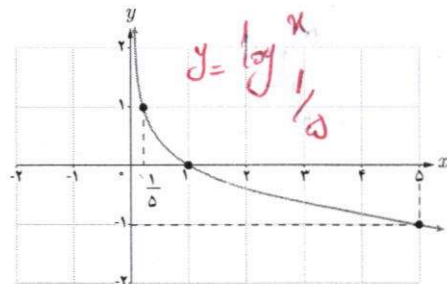
نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطه مربوط به هر کدام را بنویسید.



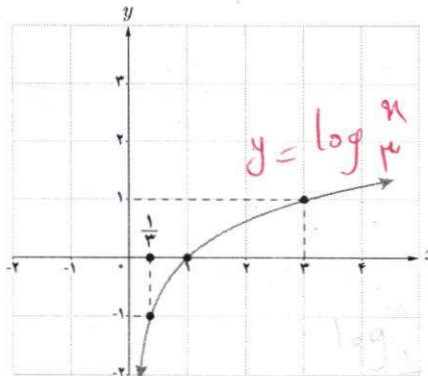
(۱)



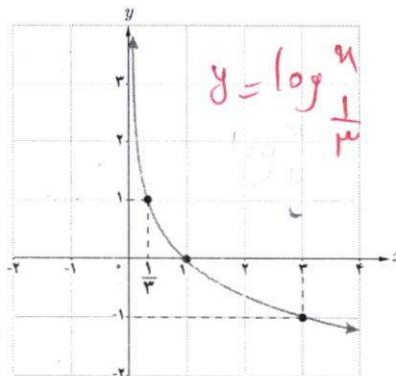
(۲)



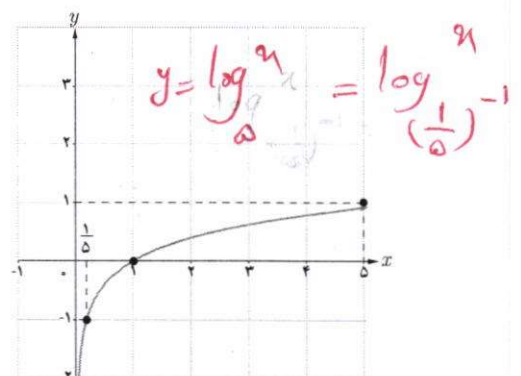
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

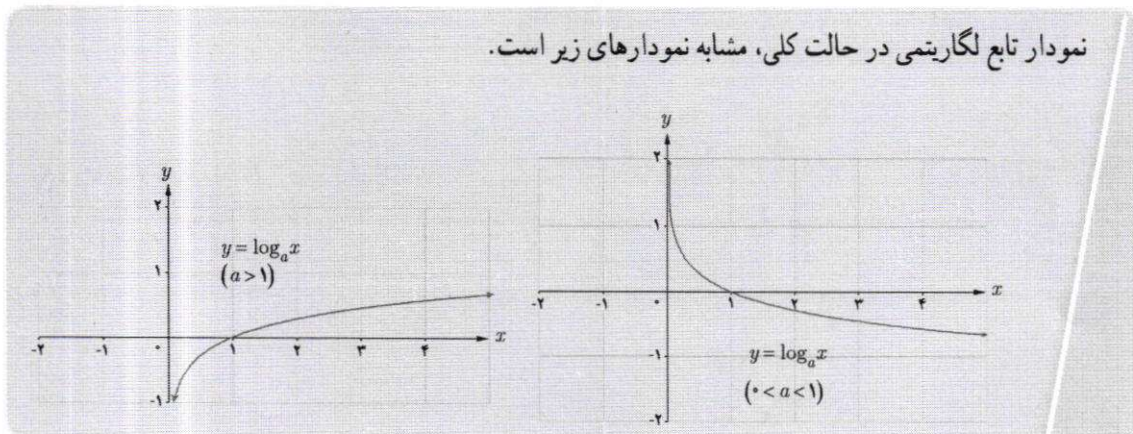
فعالیت

- ۱ با توجه به مطالبی که تا به حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.
دامنه تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($a > 1$)، مجموعه اعداد حقیقی مثبت و برد آن $(0, +\infty)$ است.
- ۲ دامنه تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)، بازه $(0, +\infty)$ و برد آن $(-\infty, +\infty)$ است.
- ۳ نمودار توابع فوق، محور x ها را در نقطه $(1, 0)$ قطع می‌کند و محور y ها را قطع نمی‌کند.
- ۴ این دو تابع، یک به یک هستند زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.
- ۵ وارون تابع نمایی، تابع $y = a^x$ است و وارون تابع لگاریتمی، تابع $y = \log_a x$ است.

اگر a عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$) باشد، داریم: $a^1 = a$ ، بنابراین همواره:

$$\log_a a = 1$$

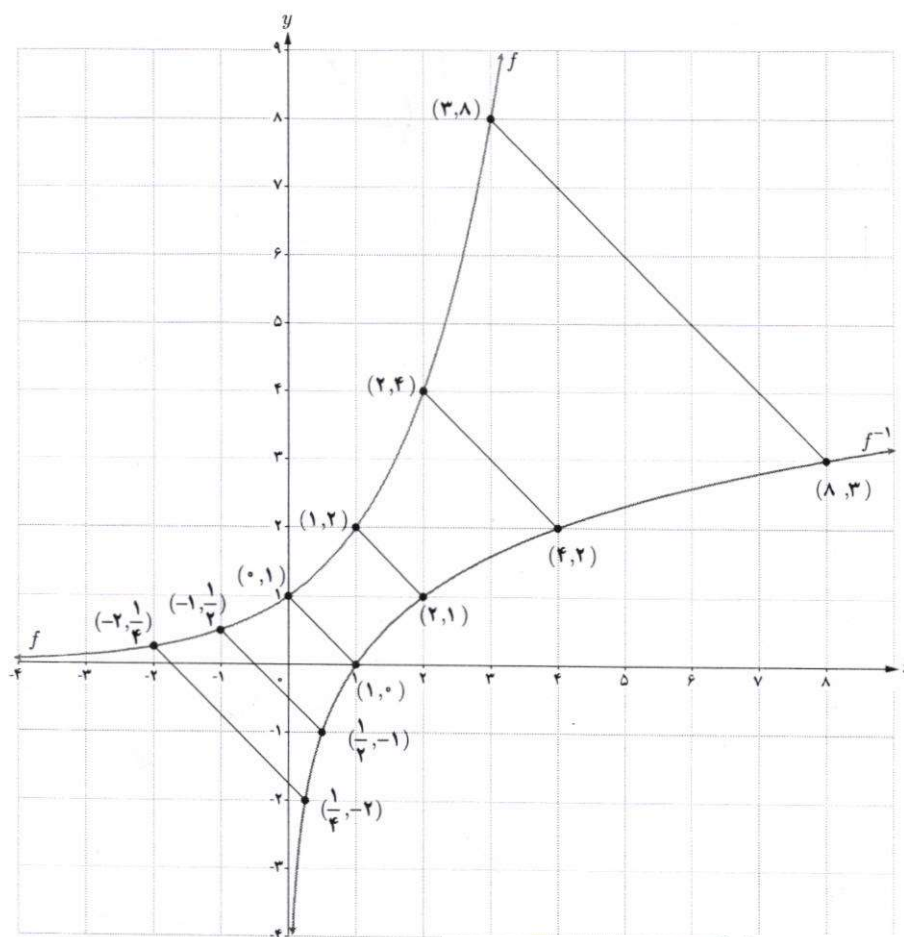
نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی، مشابه نمودارهای زیر است.



لگاریتم یک عدد

فعالیت

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2^x$ و $f^{-1}(x) = \log_2 x$ را در نظر بگیرید.



نویسه کننده:

با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

نمایی	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
لگاریتمی	$\log_2 \frac{1}{4} = -2$	$\log_2 \frac{1}{2} = -1$	$\log_2 1 = 0$	$\log_2 2 = 1$	$\log_2 4 = 2$	$\log_2 8 = 3$

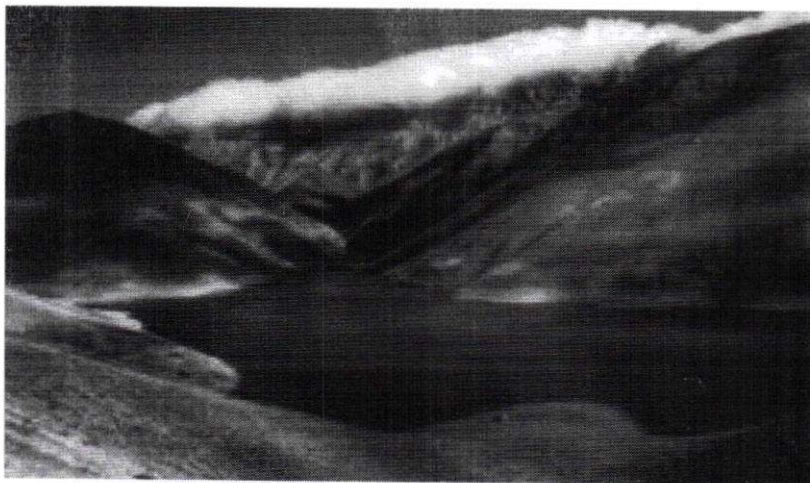
به طور کلی اگر $a^y = x$ آن گاه $\log_a x = y$ و به عکس. ($x > 0, a \neq 1, a > 0$)

$$b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a \quad (c > 0, b > 0, b \neq 1)$$

کار در کلاس

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$10^3 = 1000 \rightarrow \log_{10} 1000 = 3$	$\log_8 1 = 0 \rightarrow 8^0 = 1$
$4^2 = 16 \rightarrow \log_4 16 = 2$	$\log_2 \left(\frac{1}{16}\right) = -4 \rightarrow 2^{-4} = \frac{1}{16}$
$4^2 = 16 \rightarrow \log_4 16 = 2$	$\log_5 125 = 3 \rightarrow 5^3 = 125$
$2^5 = 32 \rightarrow \log_2 32 = 5$	$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$
$2^{-3} = \frac{1}{8} \rightarrow \log_2 \frac{1}{8} = -3$	$\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3 \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 125$
$3^2 = 9 \rightarrow \log_3 9 = 2$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$



دریاچه تار (دماوند)

خواندنی

ابداع لگاریتم یکی از مهم‌ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است. با لگاریتم، عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می‌شود.

تذکر

لگاریتم در مبنای 10 را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود، یعنی به جای $\log_{10} a$ می‌نویسیم $\log a$.

ویژگی‌های لگاریتم

فعالیت

۱ اگر a عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$) باشد، همواره داریم:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{و} \quad \log_a a = 1 \quad \text{و} \quad \log_a \left(\frac{1}{a}\right) = -1$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c ($c \neq 1$) داریم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات: فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$ ، پس طبق تعریف $a = c^m$ و $b = c^n$ ، از این رو $ab = c^m \cdot c^n = c^{m+n}$ بنا بر این طبق تعریف لگاریتم داریم: $\log_c ab = \log_c c^{m+n}$ و در نتیجه:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

مثال: فرض کنید $\log 2 = 0/3$ و $\log 3 = 0/48$ ، مقدار $\log 6$ را حساب کنید.

$$\log 6 = \log(3 \times 2) = \log 3 + \log 2 = 0/48 + 0/3 = 0/78$$

۳ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم:

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات:

$$\log_a b^n = \log_a \underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_n = \underbrace{\log_a b + \dots + \log_a b}_n = n \log_a b$$

۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c ($c \neq 1$) داریم:

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\frac{a}{b} = d$ ، بنابراین:

$$a = bd \rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c d \rightarrow \log_c d = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

مثال: اگر $\log 2 = 0/3$ ، مقدار $\log 5$ را محاسبه کنید.

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 = 1 - 0/3 = 0/7$$



خواندنی

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای اتمسفر (جو زمین) کاهش می‌یابد. رابطه محاسبه فشار براساس ارتفاع به صورت $a = 15500(5 - \log p)$ است، که در آن a ارتفاع برحسب متر و p نیز فشار برحسب پاسکال است. فشار هوا را در بالای قله دماوند به ارتفاع 5610 متر محاسبه کنید.

$$\log \frac{25}{18} = \log 25 - \log 18 = 5 \log 5 - \log 2 \cdot 3^2 = 5(1 - \log 2) - (2 \log 3 + \log 2) = 5(1/7) - (2 \times 1/48 + 1/3) = 5/7 - 1/24 = 1/24$$

کار در کلاس

اگر $\log 2 \approx 0/3$ و $\log 3 \approx 0/48$ ، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به دست آورید.

$$1) \log 12 = \log (3 \times 4) = \log 3 + \log 2^2 = \log 3 + 2 \log 2 = 0/48 + 0/6 = 1/8$$

$$2) \log \frac{1}{\sqrt{5}} = \log 5^{-1/2} = -\frac{1}{2} \log 5 = -\frac{1}{2} (1 - \log 2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0/3 = -\frac{1}{2} + 0/15 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

$$3) \log \sqrt{5} = \log 5^{1/2} = \frac{1}{2} \log 5 = \frac{1}{2} (1 - \log 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0/3 = \frac{1}{2} - 0/15 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$4) \log \frac{25}{18} = \log 25 - \log 18 = 5 \log 5 - \log 2 \cdot 3^2 = 5(1 - \log 2) - (2 \log 3 + \log 2) = 5(1/7) - (2 \times 1/48 + 1/3) = 5/7 - 1/24 = 1/24$$

$$5) \log \sqrt[3]{6} = \log 6^{1/3} = \frac{1}{3} \log 6 = \frac{1}{3} (\log 2 + \log 3) = \frac{1}{3} (0/3 + 0/48) = \frac{1}{3} \times 0/78 = 0/26$$

$$6) \log \frac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{5}} = \log 27^{1/2} - \log 5^{1/3} = \frac{1}{2} \log 27 - \frac{1}{3} \log 5 = \frac{1}{2} (3 \log 3) - \frac{1}{3} (1 - \log 2) = \frac{3}{2} \log 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log 2 = \frac{3}{2} \times 0/48 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0/3 = 0/72 - \frac{1}{3} + 0/15 = 0/72 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = 0/72 - \frac{10}{30} + \frac{2}{60} = 0/72 - \frac{16}{60} = 0/72 - \frac{4}{15} = \frac{1}{12} - \frac{4}{15} = \frac{5}{60} - \frac{16}{60} = -\frac{11}{60}$$

$$\frac{1}{3} \log 2 = \frac{1}{3} (1 - \log 3) = \frac{1}{3} (1 - 0/48) = \frac{1}{3} (1 - 1/16) = \frac{1}{3} \times \frac{15}{16} = \frac{5}{16}$$

یکی از مهم‌ترین کاربردهای لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است که معمولاً از مدل‌سازی یک مسئله واقعی به دست می‌آید. مانند محاسبه شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبه نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی اند:

$$\log_4 x + 1 = 3, \log_7 x = \log_7 7, \log_5 x + \log_5 (x-1) = \log_5 12$$

منظور از حل معادله لگاریتمی، پیدا کردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند.

به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$)، باشد آن‌گاه با توجه به یک به یک بودن

تابع لگاریتمی، از تساوی $\log_a x = \log_a y$ ($x, y > 0$) می‌توان نتیجه گرفت $x = y$ و

به عکس، اگر $x = y$ ($x, y > 0$) آن‌گاه $\log_a x = \log_a y$.

فعالیت

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$1) \log_3 x = 2 \rightarrow x = 3^2 = 9$$

$$2) \log_5 (x+6) = \log_5 (2x-3) \rightarrow x+6 = 2x-3 \rightarrow x = 9$$

که $x = 9$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

$$3) \log_5 (x+6) + \log_5 (x+2) = 1 \rightarrow \log_5 [(x+6)(x+2)] = 1$$

$$\rightarrow (x+6)(x+2) = 5 \rightarrow x^2 + 8x + 12 = 5$$

$$\rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \rightarrow x = -7 \text{ یا } x = -1$$

توجه کنید که $x = -7$ قابل قبول نیست؛ از این رو تنها جواب $x = -1$ قابل قبول است که در معادله اصلی صدق می‌کند.

خواندنی

لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی درباره

لگاریتم گفته است:

«لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به

کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش

می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر

می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و

از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی

بیزار است».

خواندنی

شوری آب اقیانوس‌ها با عرض جغرافیایی

(فاصله از خط استوا) و عمق اقیانوس تغییر

می‌کند. در مناطق استوایی میزان شوری

آب در سطح اقیانوس‌ها به دلیل تبخیر سریع

آب، بیشتر است. هرچه به قطب نزدیک‌تر

می‌شویم، کاهش تبخیر و بارش باران باعث

می‌شود شوری سطح آب کاهش یابد. تابع

مربوطه عبارت است از:

$$S(x) = 31/5 + 1/11 \log(x+1)$$

که در این رابطه x نشان دهنده عمق به متر و

$S(x)$ نشان دهنده مقدار گرم نمک موجود

در هر کیلو گرم آب اقیانوس است.



زیاده شوری کم

- ۴ $\log_4(x+2) = \log_4 8 \rightarrow x+2=8 \rightarrow x=6$
- ۵ $3 \log_3 x = -\log_3 27 \rightarrow \log_3 x^3 = \log_3 27^{-1} \rightarrow x^3 = \frac{1}{27} = 3^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \rightarrow x = \frac{1}{3}$
- ۶ $\log(x+1) - \log(x-3) = 3 \rightarrow \log \frac{x+1}{x-3} = 3 \rightarrow \frac{x+1}{x-3} = 10^3 \rightarrow x+1 = 1000x-3000 \rightarrow x = \frac{4001}{999}$

کار در کلاس

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

- ۱ $\log_5 x = 2 \rightarrow 5^2 = x \rightarrow x = 25$
- ۲ $\log_7(2x+1) = 2 \rightarrow 7^2 = 2x+1 \rightarrow 49 = 2x+1 \rightarrow 2x = 48 \rightarrow x = 24$
- ۳ $\log_2(x+1) + \log_2(x+4) = 2 \rightarrow \log_2(x+1)(x+4) = 2 \rightarrow x^2 + 5x + 4 = 4 \rightarrow x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(x+5) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -5$
- ۴ $\log_3 243 = 2x+1 \rightarrow \log_3 3^5 = 2x+1 \rightarrow 5 = 2x+1 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$
- ۵ $\log_7(x-1) = 4 \rightarrow x-1 = 7^4 = 2401 \rightarrow x = 2402$
- ۶ $\log(2x) - \log(x-3) = 1 \rightarrow \frac{2x}{x-3} = 10^1 \rightarrow 2x = 10x - 30 \rightarrow 8x = 30 \rightarrow x = \frac{15}{4}$
- ۷ $2 \log_5(x-1) = 3 \rightarrow (\log_5(x-1))^2 = 3 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \rightarrow x = 4 \text{ یا } x = -1$

تمرین

۱ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ ($c \neq 1$ و a, b, d اعداد حقیقی مثبت‌اند)

$$\log_c^a(bd) = \log_c^a b + \log_c^a d = \log_c^a b + \log_c^a d + \log_c^a 1$$

ب) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (b و c اعداد حقیقی مثبت‌اند و $c \neq 1$)

$$\log_c^a = m \rightarrow c^m = a \quad \log_c^b = n \rightarrow c^n = b \rightarrow \log_b^a = \log_{c^n}^a = \frac{m}{n} \log_c^a = \frac{m}{n} = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

پ) $a^{\log_a b} = b$ (a و b اعداد حقیقی مثبت‌اند و $a \neq 1$)
 از طرفین لگاریتم بگیریم
 $\log_a a^{\log_a b} = \log_a b \rightarrow \log_a b \cdot \log_a a = \log_a b \cdot 1 = \log_a b$

ت) $\log_b a \times \log_a b = 1$

$$\log_b^a = \frac{\log_a^a}{\log_a^b} = \frac{1}{\log_a^b} \xrightarrow{\text{تساوی}} \log_b^a \times \log_a^b = 1$$

۲) حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\log_{\sqrt{5}} 49^{\frac{1}{5}} = \log_{\sqrt{5}} \sqrt[5]{49} = \frac{1}{5} \log_{\sqrt{5}} 49 = \frac{1}{5} \log_{\sqrt{5}} 7^2 = \frac{2}{5} \log_{\sqrt{5}} 7 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

ب) $\log_{\sqrt{2}} 2^{\frac{1}{2}} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ج) $-\log_{\frac{1}{5}} 5^3 = -3 \log_{\frac{1}{5}} 5 = -3 \cdot (-1) = 3$

د) $\log_{\frac{1}{10}} (10^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{10}} 10^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \log_{\frac{1}{10}} 10 = \frac{3}{4} \cdot (-1) = -\frac{3}{4}$

الف) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[5]{49}$

ب) $\log_{\sqrt{2}} 2^{\frac{1}{2}}$

پ) $-\log_{\frac{1}{5}} 5^3$

ت) $3 \log_{\frac{1}{10}} \sqrt[5]{1000}$

۳) اگر $f(x) = 3 - 2 \log_{\frac{1}{2}} (x - 5)$ ، مقدار $f(42)$ را به دست آورید. $f(x) = 3 - 2 \log_{\frac{1}{2}} (x - 5) = 3 - 2 \log_{\frac{1}{2}} 37 = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

۴) الف) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(2, 2)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید. $\log_a 2 = 2 \rightarrow a^2 = 2 \rightarrow a = \sqrt{2}$

ب) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(\frac{1}{4}, -4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟ $\log_a \frac{1}{4} = -4 \rightarrow a^{-4} = \frac{1}{4} \rightarrow a^4 = 4 \rightarrow a = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$



x	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

۵) نمودار تابع با ضابطه $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را رسم کنید. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

۶) کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $y = \log_a x$ ، آنگاه $a^x = y$. $\times$

ب) نمودار تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) از نقطه $(1, 0)$ عبور می‌کند. $\checkmark$

پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. $\checkmark$

$p^2 - 2 = p \rightarrow p^2 - p - 2 = 0 \rightarrow (p-2)(p+1) = 0$
 $p = 2$ یا $p = -1$

الف) $\log_p (p^2 - 2) = \log_p p$
 $D = (\sqrt{2}, +\infty)$

ب) $3 \log_{\frac{1}{2}} a - \log_{\frac{1}{2}} 5 = \log_{\frac{1}{2}} 25$

۷) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

ا) $\log_5 (x+1) + \log_5 (x-1) = 1$ $D = (1, +\infty)$

ب) $\log_{\frac{1}{10}} (x^2 - 21) = -2$ $D = (-\sqrt{21}, \sqrt{21})$

حل: $(x+1)(x-1) = 5 \rightarrow x^2 - 1 = 5 \rightarrow x^2 = 6 \rightarrow x = \pm \sqrt{6}$

حل: $\log_{\frac{1}{5}} a^3 - \log_{\frac{1}{5}} 5 = \log_{\frac{1}{5}} 25 \rightarrow \log_{\frac{1}{5}} \frac{a^3}{5} = \log_{\frac{1}{5}} 25 \rightarrow \frac{a^3}{5} = 25 \rightarrow a^3 = 125 \rightarrow a = 5$

حل: $x^2 - 21 = (\frac{1}{10})^{-2} = 100 \rightarrow x^2 = 121 \rightarrow x = \pm 11 \in D$

حرفه‌ای قبول شد

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

در درس اول و دوم با نمودار توابع نمایی و لگاریتمی آشنا شدیم. نمودار این توابع را می‌توان با استفاده از قوانینی که قبلاً فرا گرفته‌ایم، انتقال دهیم.

با توجه به آنچه که در مبحث انتقال توابع گفته شد، فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

نمودار هر تابع را به ضابطه آن نظیر کنید.

الف) $k(x) = -\log_2 x$

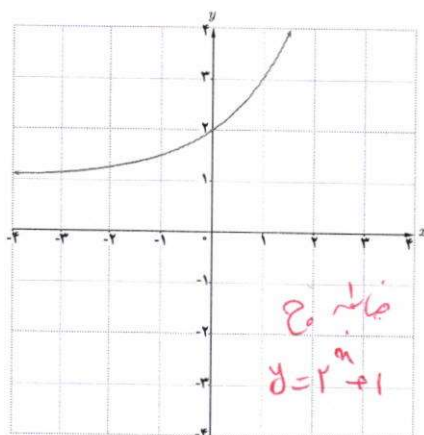
ت) $g(x) = \log(x-1)$

ب) $l(x) = 2 + \log x$

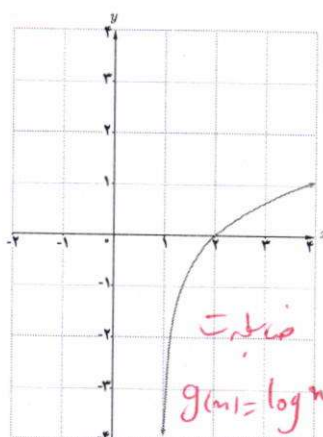
ث) $j(x) = 3^{(x-1)}$

پ) $h(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

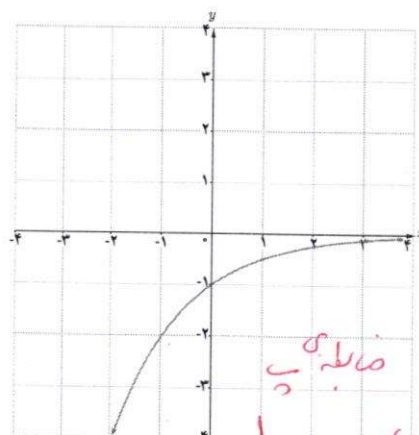
ج) $f(x) = 2^x + 1$



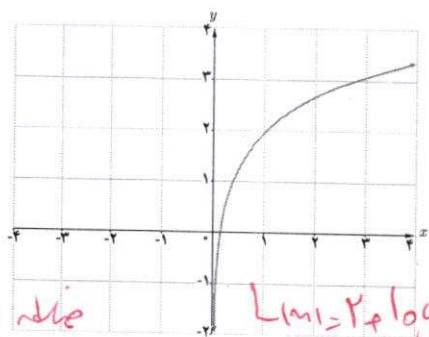
(۱)



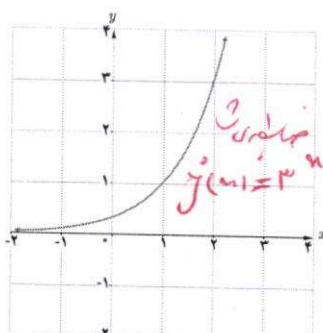
(۲)



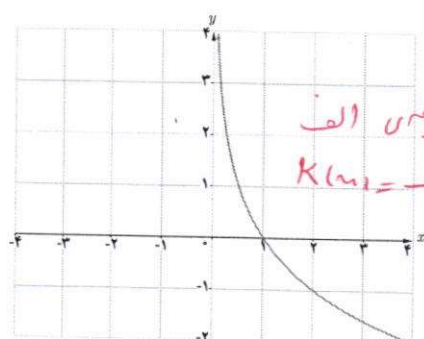
(۳)



(۴)



(۵)

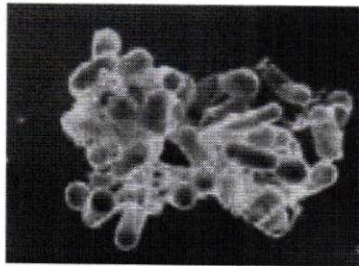


(۶)

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی:

در حالت کلی یک تابع به صورت $h(x) = ka^x$ ($a \neq 1, a > 0$) مانند یک تابع نمایی رفتار می‌کند که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهر می‌شود.



توده باکتری اشریشیاکلی

مثال: اشریشیاکلی (Escherichia coli) یا به طور اختصار E.coli نوعی باکتری است که به طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می‌کند و تکثیر آن به صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می‌شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می‌شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازه هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$p(t) = 100 \times 2^{2t} \quad (0 \leq t \leq 16)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری‌ها از بین نروند، تعداد باکتری‌ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با:

$$p(3) = 100 \times 2^6 = 6400$$

تابع لگاریتمی:

ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

انرژی یک زلزله ۸ ریشتری تقریباً برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن ماده انفجاری TNT است.

مثال: روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \rightarrow$$

$$\log E = 11/8 + 1/5 (6/6)$$

$$\rightarrow \log E = 21/7 \rightarrow E = 10^{21/7} \text{ Erg}$$

کار در کلاس

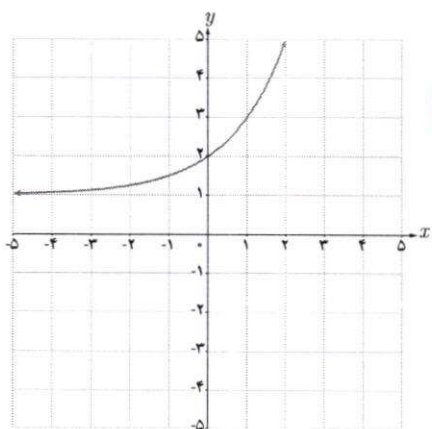


زلزله ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار - منجیل
به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقه بامداد
رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را
محاسبه کنید.

t	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲
$P(t)$	۱۰۰	۲۰۰	۴۰۰	۸۰۰	۱۶۰۰

هر نیم ساعت برابر و هر یک ساعت برابر

$$P(t) = 100 \times (2^2)^t = 100 \times 4^t$$



۱ در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است.

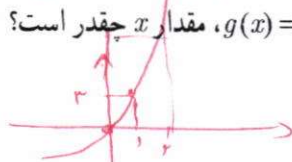
a و b را به دست آورید.

$$\begin{aligned} 1^0 \quad 1^2 \quad a + 2^{-b} &= 2 \rightarrow a + 2^{-b} = 2 \\ a + 2^{2-b} &= 5 \rightarrow a + 2^{2-b} = 5 \\ a + 2^{2-b} - a - 2^{-b} &= 5 - 2 \rightarrow 2^{2-b} - 2^{-b} = 3 \rightarrow 2^{2-b} - 2^{-b} = 3 \\ 2^{-b}(2^2 - 1) &= 3 \rightarrow 2^{-b} = 1 \rightarrow 2^{-b} = 1 \rightarrow -b = 0 \rightarrow b = 0 \\ a + 2^0 &= 2 \rightarrow a = 1 \quad \boxed{a=1, b=0} \end{aligned}$$

الف $g(-1) = 5^{-1} + 2 = \frac{1}{5} + 2 = \frac{9}{5}$

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{15}{14}$	$-\frac{3}{5}$	0	3	15

ب) $44 = 2^x + 2 \rightarrow 42 = 2^x \rightarrow x = 3$
فرض می‌کنیم $g(x) = 4^x + 2$. الف) $g(-1)$ را به دست آورید. ب) اگر $g(x) = 66$ ، مقدار x چقدر است؟



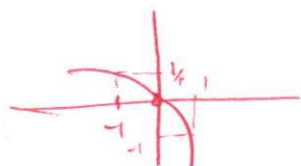
۳ نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x - 1$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = -2^x + 1$

ب) $y = -\log_2(x-1)$

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{2}$	0	-1



$$x-1=0 \rightarrow x=1$$

