

باسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه دوازدهم

آزمون جامع (مرحله بیست و دوم)

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

۲۶/ مرداد/ ۱۴۰۵

دانشته ریاضی

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	کاظم اجلالی - کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - بابک سادات - علی شهبازی مصطفی کرمی - محمد گودرزی - میلاد منصوری - سروش موئینی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحسوب - سید محمدرضا حسینی فرد - محمدطاهر شعاعی - حمید گلزاری - صبا مهدوی
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری - سوگند روشنی - سعید قندچی
فیزیک	یاشار انگوتی - هادی حمزه پور - علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	عین الله ابوالفتحی - پیمان خواجوی مجد - یلدا رزاق زاده - سروش عبادی - یاسر عبداللہی محمد عظیمیان زواره - محمد قهرمانی نژاد - پارسا طاهری منزہ - محسن مجنونی امیرحسین مسلمی - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل زاده سروش موئینی مازیار احمدی ناو	عاطفه خان محمدی سهند محمدکریم نژاد ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	علیرضا کاظمی بقا	سعید قندچی	عباس حسینی مریم نظری محمد خندان ماهان فنی فر
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری	علیرضا جباری سعید محبی هادی نجفی	احسان محمدی امیر محمدی انزلی فاطمه نجفی
شیمی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	یاشار ذریه محمد مهدی کریمیان مرتضی نصیرزاده	امیر بیات آرمین عظیمی مهدیس محبت پناه

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاچانپور

ویژه کنکوری های ۱۴۰۵



آزمون آزمایشی خلی سبز

بیتا ابراهیمی - علیرضا جعفری - عادل حسینی - مینا کریمزاده

تیم اجرایی و تألیف آزمون

الناز علی یاریزاده

سرپرست تولید

نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - زهرا صفری
الهه صفری - فاطمه علی اکبری - محیا غنی فرد
نادره نازآوری - ساعده نمازی

ویراستاران فنی

ندا فخاری
سارا گنجی آزادپور

رسام

مریم حسینزاده - سپیده سخائی - الهام سهرابی
طاهره صادق نژاد - مائده صبری - نیلوفر فرخجسته
فاطمه قیاسوند - مهدیه گل پور - دریا لطفی

صفحه آرایی



توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{(x-a)(x^2 - 8x + 16)}$ و $g(x) = |x-4|\sqrt{x-a}$ مساوی هستند. حدود a کدام است؟

$a \geq 4$ (۴)

$a \leq 4$ (۳)

$a > 0$ (۲)

$a \in \mathbb{R}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ضابطه تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f(x) = \sqrt{(x-a)(x-4)^2}$$

دامنه این تابع مجموعه $D_f = [a, +\infty) \cup \{4\}$ و دامنه تابع g نیز $D_g = [a, +\infty)$ است؛ بنابراین برای این که توابع f و g مساوی باشند، لازم است دامنه‌های آن‌ها مساوی باشند، در نتیجه $a \leq 4$ است.



تابع همانی f و تابع ثابت g با دامنه $\mathbb{R}$ مفروض‌اند. اگر $(g \circ f)(3x-1) + f(2x-1) = 2x+1$ باشد، مقدار

۲

$((f+g) \circ f)(1)$ کدام است؟

$f(x) = x$

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

ضابطه تابع f رو $f(x) = x$ و ضابطه تابع g رو $g(x) = c$ بگیر.

گام اول: ضابطه تابع f را $f(x) = x$ و ضابطه تابع g را $g(x) = c$ می‌گیریم. تابع f همانی است؛ یعنی ورودی و خروجی تابع در هر صورت یکسان‌اند، یعنی:

$$f(3x-1) = 3x-1, \quad f(2x-1) = 2x-1$$

گام دوم: بنابراین داریم:

$$(g \circ f)(3x-1) = g(f(3x-1)) = c$$

$$f(2x-1) = 2x-1$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(3x-1) + f(2x-1) = c + 2x-1$$

گام سوم: که طبق فرض باید برابر $2x+1$ باشد:

$$\Rightarrow 2x + c - 1 = 2x + 1 \Rightarrow c = 2$$

گام چهارم: خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(x) = x+2 \Rightarrow (f+g)(f(x)) = f(x)+2 = x+2 \Rightarrow (f+g)(f(1)) = 1+2 = 3$$

اگر f تابع همانی و g تابع ثابت بوده و $g(3x) + 2f(3+x) = 3 + 2x$ باشد، مقدار $\frac{f(-1)}{g(4)}$ کدام است؟

(سؤال ۱۱۶ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

$-\frac{1}{3}$ (۴)

$-\frac{1}{4}$ (۳)

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۳ تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \begin{cases} x - x^2 & ; x < -1 \\ x^2 - 2x & ; x \geq -1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 4 - x & ; f'(x) < 0 \\ x^2 & ; f'(x) \geq 0 \end{cases}$ مفروض‌اند. حاصل $(g \circ f)(2) + (f \circ g)(-2)$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: برای محاسبه مقادیر تابع g ، لازم است که علامت مشتق تابع f را بدانیم، پس در ابتدا ضابطه تابع f' را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2x & ; x < -1 \\ 2(x - 1) & ; x \geq -1 \end{cases}$$

گام دوم: حالا می‌توانیم، خواسته سؤال را حساب کنیم:

$$\begin{cases} (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(0) \xrightarrow{f'(0) < 0} g(0) = 4 - 0 = 4 \\ (f \circ g)(-2) = f(g(-2)) \xrightarrow{f'(-2) > 0} f(g(-2)) = f(4) = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(2) + (f \circ g)(-2) = 4 + 8 = 12$$

اگر $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x > 2 \\ -3x + 7 & x \leq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x + 4 & f(x) \geq 0 \\ x - 4 & f(x) < 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f \circ g(-4)$ کدام است؟

(سؤال ۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

۱) ۱۹ ۲) ۹ ۳) -۱۵ ۴) -۵

ایران تونلنه
توشه ای برای موفقیت

تعداد جواب‌های معادله $(13 \sin x + 5)(13 \cos x - 12) = 0$ در بازه 2π کدام است؟

یک دور دایره مثلثاتی

۳ (۲)

۴ (۱)

۱ (۴)

۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

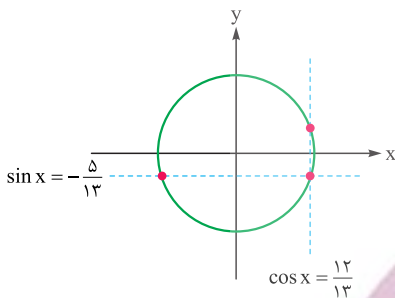
Hint از دایره مثلثاتی استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: حاصل ضرب دو عبارت صفر شده است، پس حداقل یکی از آن‌ها صفر است:

$$\Rightarrow \begin{cases} 13 \sin x + 5 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{5}{13} \\ 13 \cos x - 12 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{12}{13} \end{cases}$$

گام دوم: انتهای کمان جواب‌های هر معادله بالا را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:



بنابراین تعداد جواب‌های معادله برابر ۳ است.

درست است که هر کدام از معادلات به‌دست‌آمده در بازه $(0, 2\pi)$ دو جواب دارند، اما چون $(-\frac{5}{13})^2 + (\frac{12}{13})^2 = 1$ است، یکی از جواب‌ها، مشترک است و معادله در مجموع ۳ جواب دارد. اگر به تساوی $(-\frac{5}{13})^2 + (\frac{12}{13})^2 = 1$ دقت نشود، به اشتباه تعداد جواب‌های معادله ۴ به دست می‌آید.

گول نخوری

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

حاصل عبارت $\tan(\frac{10\pi}{3})\cos(\frac{17\pi}{6})-\cos(\frac{22\pi}{3})$ کدام است؟

۵

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نسبت‌های مثلثاتی $k\pi + \alpha$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$:

درس‌Box

$$\sin(k\pi + \alpha) = \begin{cases} \sin \alpha & ; \text{ زوج } k \\ -\sin \alpha & ; \text{ فرد } k \end{cases}$$

$$\cos(k\pi + \alpha) = \begin{cases} \cos \alpha & ; \text{ زوج } k \\ -\cos \alpha & ; \text{ فرد } k \end{cases}$$

$$\tan(k\pi + \alpha) = \tan \alpha, \cot(k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

گام اول: مقادیر نسبت‌های مثلثاتی عبارت داده‌شده را طبق درس‌یادکس به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\tan(\frac{10\pi}{3}) = \tan(3\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cos(\frac{17\pi}{6}) = \cos(3\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\frac{22\pi}{3}) = \cos(7\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

گام دوم: در نتیجه، حاصل عبارت صورت سؤال برابر است با:

$$\sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

اگر $6\pi < 4\alpha < 7\pi$ و $\tan \alpha + \cot \alpha = -4$ باشد، حاصل $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$ چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

۶

α در ربع چهارم است.

(۱) $-\frac{5}{8}$

(۲) $-\frac{3}{8}$

(۳) $\frac{3}{8}$

(۴) $\frac{5}{8}$

پاسخ: گزینه ۲

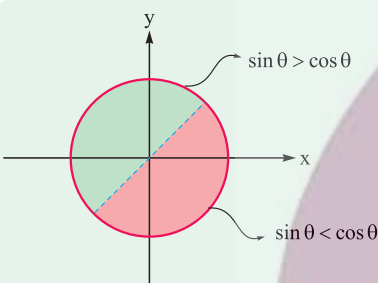
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی:

درس Box

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1; \theta \neq \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{cases}$$



نکته

گام اول: انتهای کمان α روی دایره مثلثاتی در ناحیه چهارم دستگاه مختصاتی قرار گرفته است؛ بنابراین $\sin \alpha < 0$ و $\cos \alpha > 0$ و در نتیجه حاصل عبارت $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$ قطعاً عددی منفی است؛ بنابراین یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) پاسخ صحیح تست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: از تساوی داده‌شده استفاده می‌کنیم:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = -4 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$$

عبارت $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$ را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$\Rightarrow \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = \frac{3}{4}(\sin \alpha - \cos \alpha) \quad (*)$$

گام سوم: حالا کافی است حاصل عبارت $\sin \alpha - \cos \alpha$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آوریم:

$$\xrightarrow{\alpha \text{ در ربع چهارم است}} \sin \alpha - \cos \alpha = -|\sin \alpha - \cos \alpha| = -\sqrt{1 - 2\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = -\sqrt{1 + \frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

و طبق عبارت (*)، حاصل عبارت $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$ برابر $-\frac{3}{8}\sqrt{6}$ خواهد شد.

از راه حل معادله مثلثاتی هم، می توانستیم سؤال را حل کنیم:

$$\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع چهارم}} \alpha = -\frac{\pi}{12} \\ 2\alpha = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع چهارم}} \alpha = -\frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

اما طبق فرض، $\alpha = -\frac{5\pi}{12}$ قابل قبول است و حالا به کمک اتحادهای مثلثاتی دو برابر کمان، $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را به دست می آوریم:

$$\alpha = -\frac{5\pi}{12} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = -\frac{1}{4}(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}) - \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}) = -\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{2} = -\frac{3}{8}\sqrt{6}$$

اگر $\tan x + \cot x = -3$ و $3\pi < 4x < 4\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x}$ کدام است؟

(سؤال ۱۱۹ کنکور تهری ۱۴۰۲ - نوبت دوم)

۱/ $75\sqrt{3}$ (۲)

۲/ $5\sqrt{6}$ (۴)

۳/ $5\sqrt{6}$ (۱)

۴/ $75\sqrt{3}$ (۳)

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{x}) \sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{2} + x} - \sqrt{x}}$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: عبارت داده شده را بازنویسی می کنیم:

$$\frac{\overbrace{\sin \frac{\sqrt{2}}{x}}^{\sin \frac{\sqrt{2}}{x}}}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{x}) \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2} + x} + \sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{2} + x} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} (\sqrt{\sqrt{2} + x} + \sqrt{x}) \sin \frac{\sqrt{2}}{x}}{\sqrt{2}}$$

گام دوم: وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $\sqrt{\sqrt{2} + x} \approx \sqrt{x}$ است و می توان $\sin \frac{\sqrt{2}}{x}$ را نیز هم ارز $\frac{\sqrt{2}}{x}$ در نظر گرفت؛ زیرا $\frac{\sqrt{2}}{x} \rightarrow 0$:

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} \times \frac{\sqrt{2}}{x}}{\sqrt{2}} = 2$$

صورت و مخرج را بر $\sqrt{x}$ تقسیم می کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{x})}{\frac{\sqrt{\sqrt{2} + x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{x})}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{x} + 1} - 1}$$

حالا $\frac{\sqrt{2}}{x}$ را متغیر جدید t می گیریم:

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}{\sqrt{1+t} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1 + \frac{1}{2}t - 1} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 2$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

اگر $f(x) = 4 - \frac{3}{2}|x-2|$ و $g(x) = \frac{|x-2|}{2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)+g(-x)}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)-g(-x)}{x}$ کدام است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

-۴ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ در عبارت خواسته شده داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)+g(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{3}{2}|x-2| + \frac{|-x-2|}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{3}{2}x + 3 + \frac{x}{2} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)-g(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - \frac{3}{2}|x-2| - \frac{|x+2|}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{3}{2}x - 3 + \frac{x}{2} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+2x}{x} = 2$$

در نتیجه خواسته سؤال $1 = -1 + 2$ است.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۹ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \leq a \\ \frac{bx^2-cx-1}{x-a} & ; x > a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر a عددی مثبت و $f(-\frac{a}{2}) = 0$ باشد،

مقدار b کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{2}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: اگر $a > 0$ باشد، آن گاه $-\frac{a}{2} < 0$ است، این یعنی صفر تابع که طبق فرض $x_0 = -\frac{a}{2}$ است، در ضابطه بالایی رخ می دهد:

$$2x_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2} = -\frac{a}{2} \Rightarrow a = 1$$

تابع f در $x = 1$ باید پیوسته باشد، پس ضابطه زیر را برای تابع f داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \leq 1 \\ \frac{b(x-1)(x+\frac{1}{b})}{x-1} & ; x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \leq 1 \\ bx+1 & ; x > 1 \end{cases}$$

در این بازنویسی، تساوی $c = b - 1$ را داریم.

گام دوم: برای این که تابع f در $x = 1$ پیوسته باشد، لازم است که $b = 2$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow 2+1 = b+1 \Rightarrow b = 2$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۱۰ اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x+2}|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{2x^5+|x^5|}$ باشد، حاصل $(fog)'(\sqrt{5}) + (gof)'(-\sqrt{5})$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

-۱ (۲)

$-\frac{2}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

بهبتره که ضابطه دو تابع fog و gof رو به دست بیاری.

گام اول: ابتدا ضابطه‌های دو تابع f و g را بازنویسی می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt[5]{x}} & ; x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt[5]{3x}} & ; x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & ; x < 0 \\ \frac{1}{3x^5} & ; x > 0 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$(fog)(x) = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ x & ; x > 0 \end{cases}$$

$$(gof)(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x & ; x < 0 \\ x & ; x > 0 \end{cases}$$

گام دوم: مشتق توابع fog و gof را به دست می‌آوریم:

$$(fog)'(x) = \begin{cases} -1 & ; x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases} \Rightarrow (fog)'(\sqrt{5}) = 1$$

$$(gof)'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3} & ; x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases} \Rightarrow (gof)'(-\sqrt{5}) = -\frac{1}{3}$$

در نتیجه خواسته سؤال برابر $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ است.

اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^3-|x^3|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ کدام است؟

(سؤال ۱۲۷ کنکور تجربی ۱۴۰۲ - نوبت دوم)

-۱ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

تابع f با ضابطه $f(x) = x^3$ مفروض است. اگر خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه $x = \alpha$ واقع بر نمودار آن، از نقطه $(4, 0)$ بگذرد، مقدار α کدام است؟

۴) صفر

۳) -۲

۲) -۱

۱) ۴

پاسخ: گزینه ۳

گام اول: تابع f وارون پذیر و روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است، بنابراین داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

گام دوم: طبق فرض شیب خط گذرنده از نقاط $(\alpha, \sqrt[3]{\alpha})$ و $(4, 0)$ باید برابر $(f^{-1})'(\alpha)$ باشد:

$$\frac{\sqrt[3]{\alpha} - 0}{\alpha - 4} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\alpha^2}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3\alpha = \alpha - 4 \Rightarrow \alpha = -2$$



۱۲ ماکزیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x) = \sin x \sqrt{\frac{3}{2}} + \cos^2 x$ کدام است؟

$\sqrt[3]{6}$ (۴)

$\sqrt[3]{12}$ (۳)

$\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$\sin x$ رو متغیر جدید t بگیر.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با تغییر متغیر $t = \sin x$ ضابطه تابع را ساده تر می نویسیم:

$$\sin x = t \Rightarrow \frac{3}{2} + \cos^2 x = \frac{3}{2} + 1 - t^2 = \frac{5}{2} - t^2$$

پس برد تابع f با برد تابع $g(x) = x \sqrt{\frac{5}{2} - x^2}$ در دامنه $[-1, 1]$ برابر است.

گام دوم: در تابع g داریم:

$$g(-1) = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \quad g(1) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

هم چنین:

$$g'(x) = \sqrt{\frac{5}{2} - x^2} + \frac{-2x^2}{3\sqrt{(\frac{5}{2} - x^2)^3}} = \frac{\frac{15}{2} - 5x^2}{3\sqrt{(\frac{5}{2} - x^2)^3}}$$

تابع g روی بازه $[-1, 1]$ اکیداً صعودی است؛ بنابراین برد آن بازه $[-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}]$ است، یعنی ماکزیمم مطلق تابع f برابر

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2} \text{ است.}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۱۳ نقطه (۲, ۴)، عطف نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ است. حاصل $f(-۳)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{۵}{۲}$ (۲) -۳ (۳) $-\frac{۷}{۲}$ (۴) -۴

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در ابتدا داریم:

$$f(۲) = \frac{۲a+b}{۵} = ۴ \Rightarrow ۲a+b=۲۰$$

گام دوم: ضابطه تابع f'' را باید به دست بیاوریم:

$$f'(x) = -\frac{ax^2 + ۲bx - a}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{(۲ax+۲b)(x^2+1)^2 - ۴x(x^2+1)(ax^2+۲bx-a)}{(x^2+1)^4} = \frac{۲(ax^3+۳bx^2-۳ax-b)}{(x^2+1)^3}$$

گام سوم: $x=۲$ صفر تابع f'' باید باشد:

$$f''(۲) = ۲ \times \frac{۸a+۱۲b-۶a-b}{۵^3} = ۰ \Rightarrow ۲a+۱۱b=۰$$

گام چهارم: دستگاه معادلات زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} ۲a+b=۲۰ \\ ۲a+۱۱b=۰ \end{cases} \Rightarrow ۱۰b=-۲۰ \Rightarrow b=-۲, a=۱۱$$

گام پنجم: در نتیجه $f(x) = \frac{۱۱x-۲}{x^2+1}$ است و داریم:

$$f(-۳) = \frac{-۳۵}{۱۰} = -\frac{۷}{۲}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۱۴

حاصل ضرب جواب‌های معادله $x^3 - x^2 - x - 4 = 26$ ، چند برابر مجموع آن‌ها است؟

۴) -۵

۳) ۵

۲) ۱۰

۱) ۱۰ -

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(x^3 - x^2 - x - 4) - 26 = x^3 - x^2 - x - 30 = 0$$

حالا در سمت چپ از اتحاد مزدوج و در سمت راست از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow (x^3 - x^2 - x - 30)(x^3 - x^2 - x + 1) = (x+1)(x^2 - x + 1) \Rightarrow (x^3 - x^2 - 9)(x^2 - x + 1) = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

گام دوم: $x^2 - x + 1$ قطعاً مخالف صفر است، پس داریم:

$$x^3 - x^2 - 9 = x + 1 \Rightarrow x^3 - x^2 - x - 10 = 0$$

مجموع جواب‌های این معادله ۲ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۰ - است.

بنابراین خواسته سؤال برابر $5 = -\frac{10}{2}$ است.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

نقاط متمایز A، B، C و D به ترتیب با طول‌های α ، -4 ، -2 و 5 روی محور x مفروض‌اند. اگر $AB > AC + AD$

باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای α شامل چند عدد صحیح است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

نامعادله قدرمطلقیه.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مختصات نقاط داده شده $A(\alpha, 0)$ ، $B(-4, 0)$ ، $C(-2, 0)$ و $D(5, 0)$ است و داریم:

$$AB = |\alpha + 4|, AC = |\alpha + 2|, AD = |\alpha - 5|$$

بنابراین نامعادله زیر را باید حل کنیم:

$$|\alpha + 4| > |\alpha + 2| + |\alpha - 5|$$

گام دوم: به کمک بازه‌بندی، نامعادله بالا را حل می‌کنیم:

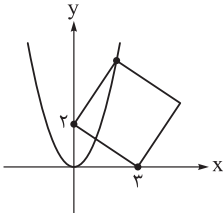
حدود α	نامعادله	جواب
$\alpha < -4$	$-\alpha - 4 > -\alpha - 2 - \alpha + 5 \Rightarrow \alpha > 7$	ندارد
$-4 \leq \alpha < -2$	$\alpha + 4 > -\alpha - 2 - \alpha + 5 \Rightarrow 3\alpha > -1 \Rightarrow \alpha > -\frac{1}{3}$	ندارد
$-2 \leq \alpha < 5$	$\alpha + 4 > \alpha + 2 - \alpha + 5 \Rightarrow \alpha > 3$	$(3, 5)$
$\alpha \geq 5$	$\alpha + 4 > \alpha + 2 + \alpha - 5 \Rightarrow \alpha < 7$	$[5, 7)$

گام سوم: از اجتماع جواب‌های به‌دست‌آمده، مجموعه مقادیر برای α ، بازه $(3, 7)$ به دست می‌آید ولی $\alpha = 5$ قابل قبول نیست، چون در این صورت نقاط D و A متمایز نمی‌شوند. پس مقادیر قابل قبول برای α شامل ۲ عدد صحیح است.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۱۶

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = kx^2$ در شکل زیر رسم شده است. اگر چهارضلعی رسم شده مربع باشد، حاصل $\frac{1}{f(k-1)}$ کدام است؟



- (۱) $۱۲/۸$
- (۲) $۱۳/۲$
- (۳) $۱۳/۴$
- (۴) $۱۳/۸$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: رأس مربع را که روی سهمی قرار گرفته است، $(\alpha, k\alpha^2)$ در نظر می‌گیریم. شیب خط گذرنده از نقاط $(\alpha, k\alpha^2)$ و $(0, 2)$ باید قرینه و معکوس شیب خط گذرنده از نقاط $(3, 0)$ و $(0, 2)$ باشد:

$$\begin{cases} (\alpha, k\alpha^2), (0, 2) \Rightarrow m = \frac{k\alpha^2 - 2}{\alpha} \\ (0, 2), (3, 0) \Rightarrow m' = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{k\alpha^2 - 2}{\alpha} \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{k\alpha^2 - 2}{\alpha} = \frac{3}{2}$$

گام دوم: همچنین فاصله نقاط $(\alpha, k\alpha^2)$ و $(0, 2)$ از یکدیگر باید برابر $\sqrt{13}$ باشد:

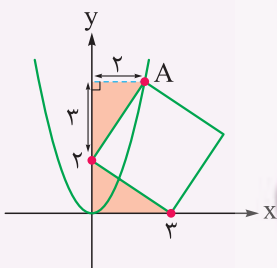
$$\Rightarrow (k\alpha^2 - 2)^2 + (\alpha - 0)^2 = 13$$

$$\frac{k\alpha^2 - 2}{\alpha} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{9\alpha^2}{4} + \alpha^2 = 13 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = 2$$

در نتیجه مقدار k به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{4k - 2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 4k - 2 = 3 \Rightarrow k = \frac{5}{4}$$

دو مثلث قائم‌الزاویه مشخص شده در شکل زیر، باید هم‌نهشت باشند، بنابراین مختصات نقطه A باید $A(2, 5)$ باشد، پس داریم:



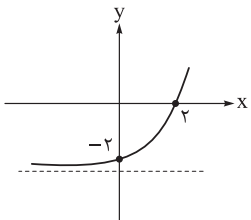
$$f(x) = kx^2 \rightarrow 5 = k \times 4 \Rightarrow k = \frac{5}{4}$$

گام سوم: در نهایت $f(x) = \frac{5}{4}x^2$ است و داریم:

$$\frac{1}{f(k-1)} = \frac{1}{f(\frac{1}{4})} = \frac{1}{\frac{5}{4} \times \frac{1}{16}} = \frac{64}{5} = 12\frac{8}{5}$$

۱۷

شکل زیر، نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a + b \times 3^{x+c}$ را نمایش می‌دهد. حاصل $f(\frac{1}{\log 3})$ کدام است؟



۱) ۰/۱

۲) ۰/۱۲۵

۳) ۰/۲

۴) ۰/۲۵

پاسخ: گزینه ۴

گام اول: ضابطه تابع را بازنویسی می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f(x) = a + (b \times 3^c) \times 3^x \Rightarrow f(x) = a + k \times 3^x$$

گام دوم: نمودار تابع از نقاط $(0, -2)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد:

$$\begin{cases} f(0) = a + k = -2 \\ f(2) = a + 9k = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} k = \frac{1}{4}, a = -\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3^x - 9}{4}$$

گام سوم: خواسته سؤال را حساب می‌کنیم:

$$f\left(\frac{1}{\log 3}\right) = f(\log_3 10) = \frac{3^{\log_3 10} - 9}{4} = \frac{10 - 9}{4} = 0/25$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

اعداد $\log \alpha$ ، $\log 6$ و $\log(2\alpha + 14)$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی و اعداد α ، $\log_{\alpha} 8$ و $\log_{\beta} \alpha$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. حاصل $\beta^2 \sqrt{\alpha}$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) ۴
(۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه (۲)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به ویژگی های جملات متوالی دنباله حسابی داریم:

$$\log \alpha + \log(2\alpha + 14) = 2 \log 6 = \log 36$$

$$\Rightarrow \alpha(2\alpha + 14) = 36 \Rightarrow \alpha^2 + 7\alpha - 18 = (\alpha + 9)(\alpha - 2) = 0 \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = 2$$

گام دوم: حالا براساس ویژگی جملات متوالی دنباله هندسی داریم:

$$\log_{\alpha} 8 \times \log_{\beta} \alpha = \alpha^2 \xrightarrow{\alpha=2} 3 \log_{\beta} 2 = 4 \Rightarrow \log_2 \beta = \frac{3}{4} \Rightarrow \beta = \sqrt[4]{2^3}$$

گام سوم: خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$\beta^2 \sqrt{\alpha} = \sqrt{2^3} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ای که بر خط‌های شامل اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین مماس است، برابر $\sqrt{2}$ می‌باشد. برای رسم عمودمنصف یکی از ساق‌های این مثلث، باید دهانهٔ پرگار را حداقل بیشتر از کدام عدد زیر باز کرد؟

$$2\sqrt{2} - 2 \quad (2)$$

$$\sqrt{2} + 1 \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{2} - 1 \quad (3)$$

مشاوره این سؤال، مشابه سؤال ۲۶ کنکور ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

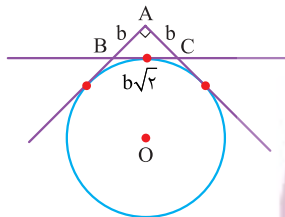
دایره‌ای که در سؤال گفته شده است، دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر بزرگ‌ترین ضلع (وتر مثلث قائم‌الزاویه) است.

Hint

درس: Box

(۱) هر مثلث، یک دایرهٔ محاطی داخلی و سه دایرهٔ محاطی خارجی دارد. دایرهٔ محاطی داخلی، داخل مثلث قرار می‌گیرد و بر سه ضلع آن مماس است. هر کدام از دایره‌های محاطی خارجی، بیرون مثلث قرار می‌گیرند و بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس هستند. (۲) در مثلثی به طول اضلاع a ، b و c ، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع a (مماس بر ضلع a و امتداد اضلاع b و c) برابر است با $r_a = \frac{S}{P-a}$ که در آن S مساحت و P نصف محیط مثلث است، پس هر چه طول ضلع بزرگ‌تر باشد، شعاع دایرهٔ محاطی نظیر آن نیز بزرگ‌تر است، ضمن آن‌که شعاع هر سه دایرهٔ محاطی خارجی، از شعاع دایرهٔ محاطی داخلی بزرگ‌تر است. (۳) برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB ، باید دو کمان به مرکزهای A و B و شعاع R رسم کنیم، به طوری که $R > \frac{AB}{2}$. خط گذرنده از نقاط تقاطع این دو کمان، عمودمنصف AB است.

گام اول: بزرگ‌ترین دایره‌ای که بر خط‌های شامل اضلاع یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه مماس است، دایرهٔ محاطی خارجی نظیر وتر آن می‌باشد:



گام دوم: طول ساق مثلث را b در نظر می‌گیریم، بنا به فرض داریم:

$$r_a = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{S}{P-a} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\frac{b \times b}{2}}{\frac{2b + b\sqrt{2}}{2} - b\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{b}{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2} - 2$$

گام سوم: پس برای رسم عمودمنصف یکی از ساق‌ها باید دهانهٔ پرگار حداقل بیشتر از نصف طول ساق، یعنی $\frac{b}{2} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1$ باز شود.

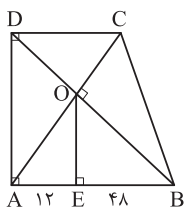
مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ محیط شده است. برای رسم عمودمنصف یکی از ساق‌های این مثلث، باید دهانهٔ پرگار را حداقل بیشتر از کدام عدد زیر باز کرد؟ (سؤال ۲۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

$$2 + \sqrt{2} \quad (2)$$

$$2 - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{2} + 1 \quad (4)$$

$$\sqrt{2} - 1 \quad (3)$$



۲۰ در شکل زیر، قطرهای دوزنقه قائم‌الزاویه بر هم عمودند. طول پاره خط OC کدام است؟

۲) $4\sqrt{5}$

۱) $2\sqrt{3}$

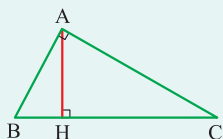
۴) $4\sqrt{3}$

۳) $3\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

۱) روابط طولی ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه:



۱) $AH \times BC = AB \times AC$

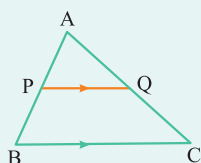
۲) $AH^2 = BH \times CH$

۳) $AB^2 = BH \times BC$

۴) $AC^2 = CH \times BC$

۲) قضیه تالس و تعمیم آن در مثلث:

مطابق شکل در مثلث ABC، نقاط P و Q به ترتیب بر AB و AC چنان واقع‌اند که $PQ \parallel BC$ ، داریم:



۱) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

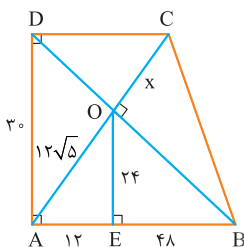
(قضیه تالس)

۲) $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$

(تعمیم قضیه تالس)

گام اول: مطابق شکل، بنا به رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه AOB داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$OE^2 = AE \times BE = 12 \times 48 = 12^2 \times 4 \Rightarrow OE = 24$

$OA^2 = AE \times AB = 12 \times 60 \Rightarrow OA = 12\sqrt{5}$

گام دوم: در مثلث ABD، بنا به تعمیم قضیه تالس، داریم:

$\triangle ABD: OE \parallel AD \Rightarrow \frac{OE}{AD} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{24}{AD} = \frac{48}{60} \Rightarrow AD = \frac{60 \times 24}{48} = 30$

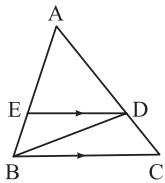
گام سوم: بنا به رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه ACD نتیجه می‌شود:

$AD^2 = OA \times AC \Rightarrow 30^2 = 12\sqrt{5} \times AC \Rightarrow AC = \frac{900}{12\sqrt{5}} = \frac{90}{\sqrt{5}} = 18\sqrt{5}$

$\Rightarrow x + 12\sqrt{5} = 18\sqrt{5} \Rightarrow x = 6\sqrt{5}$

ایران توانمند
توشه ای برای موفقیت

در مثلث ABC مطابق شکل، BC موازی است، اگر مساحت مثلث BDE، ۷۵ درصد مساحت مثلث BCD باشد، آن گاه نسبت مساحت مثلث ADE به مساحت دوزنقه کدام است؟



$$\frac{9}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{11}{7} \quad (۴)$$

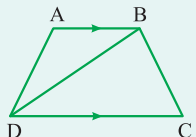
$$\frac{1}{7} \quad (۱)$$

$$\frac{10}{7} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

(۱) با رسم هر قطر یک دوزنقه، دو مثلث ایجاد می‌شود که نسبت مساحت‌های آن‌ها، با نسبت قاعده‌های دوزنقه برابر است، یعنی در شکل مقابل داریم:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AB}{CD}$$

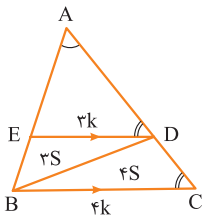
(۲) اگر $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ ، آن گاه می‌توانیم در نظر بگیریم $a = xk$ و $b = yk$.

(۳) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آن گاه $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$.

(۴) اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

(۵) نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر با مجذور نسبت اضلاع متناظر آن‌ها است.

گام اول: قطر هر دوزنقه، آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند که نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های دوزنقه است:



$$\frac{S_{BDE}}{S_{BCD}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} DE = 3k \\ BC = 4k \end{cases}$$

گام دوم: با توجه به این که طبق قضیهٔ موازی - مورب $\hat{ADE} = \hat{ACB}$ ، دو مثلث AED و ABC متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ADE} + S_{BCDE}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{S_{ADE}}{S_{BCDE}} = \frac{9}{7}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

در شکل زیر، BH و CK، دوتا از ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع $2\sqrt{3}$ هستند. مساحت مثلث OKH

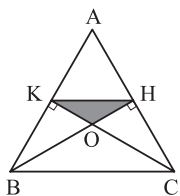
کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

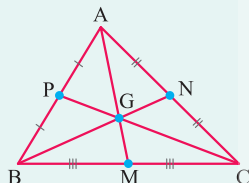
(۴) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$



پاسخ: گزینه ۱

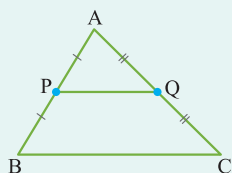
درس Box

(۱) میانه‌های هر مثلث هم‌رس هستند و با رسم سه میانه، مثلث اصلی به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود، پس در شکل زیر، داریم:



$$S_{GBC} = S_{GAC} = S_{GAB} = \frac{1}{3} S_{ABC}$$

(۲) اگر وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل کنیم، پاره‌خطی حاصل می‌شود که با ضلع سوم مثلث موازی و طول آن، نصف طول ضلع سوم است:



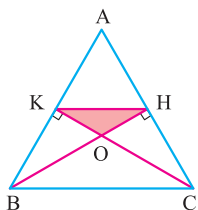
$$PQ \parallel BC \text{ و } PQ = \frac{1}{2} BC$$

مثلاً در شکل مقابل داریم:

(۳) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a ، برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

گام اول: از آن‌جا که BH و CK، میانه‌های مثلث ABC هم هستند، O نقطه هم‌رسی میانه‌های آن است و داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$S_{OBC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$$

گام دوم: از آن‌جا که H و K به ترتیب وسط‌های AC و AB هستند، داریم $HK = \frac{1}{2} BC$ و از آن‌جا که HK با BC موازی است، دو مثلث OHK و OBC بنا به حالت تساوی زاویه، متشابه‌اند و در نتیجه:

$$\frac{S_{OHK}}{S_{OBC}} = \left(\frac{HK}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{OHK}}{\frac{1}{3} S_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{OHK} = \frac{1}{12} S_{ABC} (*)$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{3})^2 = 3$$

گام سوم: داریم:

$$\xrightarrow{(*)} S_{OHK} = \frac{1}{12} \times 3 = \frac{1}{4}$$

پس:

حجم شکل حاصل از دوران مثلثی به طول اضلاع ۲، ۳ و ۴، حول ضلع متوسط، چند برابر π است؟

(۱) $3/75$

(۲) $3/5$

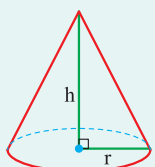
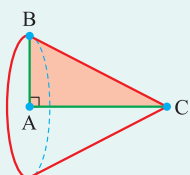
(۳) $3/25$

(۴) ۳

مشاوره این سؤال، به صورت ترکیبی از میث دوران (فصل چهارم هندسه (۱) و قضیه هرون (فصل سوم هندسه (۲) مطرح شده است.

پاسخ: گزینه ۱

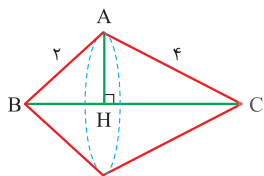
(۱) از دوران هر مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع زاویه قائمه آن، یک مخروط قائم به دست می آید.



(۲) حجم مخروط قائمی به شعاع قاعده r و ارتفاع h ، برابر است با $\frac{1}{3} \pi r^2 h$.

(۳) مساحت مثلثی به طول اضلاع a ، b و c برابر است با $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ که در آن P نصف محیط مثلث است $(P = \frac{a+b+c}{2})$.

گام اول: ارتفاع وارد بر ضلع به طول ۳ را رسم می کنیم، همان طور که در شکل می بینید، شکل حاصل از این دوران، از دو مخروط قائم که در قاعده به هم چسبیده هستند، تشکیل شده است:



گام دوم: حجم شکل حاصل از این دوران، برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi \times AH^2 \times BH + \frac{1}{3} \pi \times AH^2 \times CH = \frac{1}{3} \pi \times AH^2 \times (BH + CH) = \frac{1}{3} \pi \times AH^2 \times BC \quad (*)$$

گام سوم: مساحت مثلث ABC را به دست می آوریم:

$$P = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{\frac{9}{2}(\frac{9}{2}-2)(\frac{9}{2}-3)(\frac{9}{2}-4)} = \frac{3}{4} \sqrt{15}$$

از طرفی $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$ ، پس:

$$\frac{3}{4} \sqrt{15} = \frac{1}{2} AH \times 3 \Rightarrow AH = \frac{1}{2} \sqrt{15}$$

گام چهارم: از (*) نتیجه می شود:

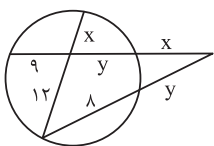
$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{4} \times 15 \right) \times 3 = \frac{15}{4} \pi = 3/75 \pi$$

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر حاصل $x + y$ کدام است؟

۲۴



۵ (۱)

۷ (۲)

۸ (۳)

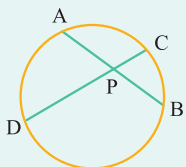
۱۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

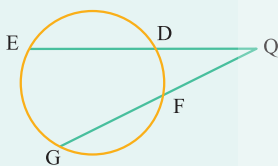
(۱) مطابق شکل، برای دو وتر AB و CD که در نقطه P درون دایره متقاطع‌اند، داریم:

$$PA \times PB = PC \times PD$$



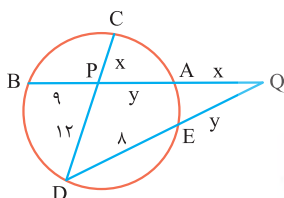
(۲) مطابق شکل، برای دو وتر DE و FG که امتدادهای آن‌ها در نقطه Q بیرون دایره متقاطع‌اند، داریم:

$$QD \times QE = QF \times QG$$



گام اول: برای دو وتر AB و CD که در نقطه P درون دایره متقاطع‌اند، داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$PC \times PD = PA \times PB \Rightarrow x \times 12 = y \times 9 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$$

گام دوم: برای دو وتر AB و DE که امتدادهای آن‌ها در نقطه Q بیرون دایره متقاطع‌اند، داریم:

$$QA \times QB = QE \times QD \Rightarrow x(x + y + 9) = y(y + 8) \xrightarrow{y = \frac{4}{3}x} x(x + \frac{4}{3}x + 9) = \frac{4}{3}x(\frac{4}{3}x + 8)$$

$$\Rightarrow (\frac{7}{3}x + 9) = \frac{4}{3}(\frac{4}{3}x + 8) \Rightarrow 21x + 81 = 16x + 96 \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{y = \frac{4}{3}x} y = 4$$

$$\Rightarrow x + y = 3 + 4 = 7$$

ایران تونله
توشه ای برای موفقیت

نقطه A' ، بازتاب نقطه A نسبت به خط d است به طوری که $AA' = ۴۸$. اگر O نقطه‌ای واقع بر d باشد، به طوری که $OA = ۲۵$ ، آن‌گاه فاصله A از OA' کدام است؟

(۲) $۱۴ / ۴۸$

(۱) $۱۳ / ۴۴$

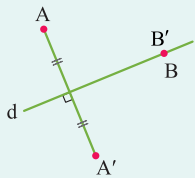
(۴) $۱۶ / ۸$

(۳) $۱۴ / ۲$

مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۷، صفحه ۴۳ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۱

(۱) بازتاب نسبت به خط d :

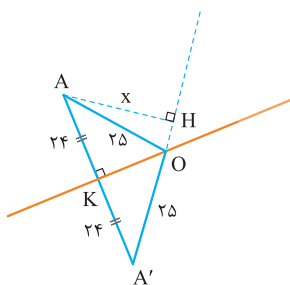


بازتاب نقطه A غیرواقع بر خط d ، نقطه‌ای مانند A' است به طوری که d عمودمنصف AA' باشد.

بازتاب نقطه B واقع بر خط d ، همان نقطه B است.

(۲) بازتاب، یک تبدیل ایزومتري است، یعنی طول پاره‌خط‌ها را حفظ می‌کند.

گام اول: شکل مناسب را رسم می‌کنیم، با استفاده از قضیه فیثاغورس، در مثلث OAK داریم:



$$OK^2 = OA^2 - AK^2 \Rightarrow OK^2 = 25^2 - 24^2$$

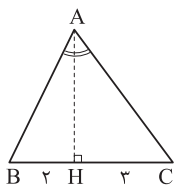
$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} OK^2 = (25 + 24)(25 - 24) = 49 \Rightarrow OK = 7$$

گام دوم: مساحت مثلث OAA' را از دو روش محاسبه کرده و با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} S_{OAA'} = \frac{1}{2} OK \times AA' \\ S_{OAA'} = \frac{1}{2} AH \times OA' \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} OK \times AA' = \frac{1}{2} AH \times OA' \Rightarrow 7 \times 48 = x \times 25 \Rightarrow x = \frac{7 \times 48}{25} = 13 \frac{44}{25}$$

نقطه A' ، تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA' = ۱۶$ و نقطه O روی خط l و $OA = ۱۰$ باشد، فاصله نقطه A از خط OA' چه قدر است؟
(هندسه (۲) - تمرین ۷ صفحه ۴۳ کتاب درسی)

ایران تونته
توشه‌ای برای موفقیت

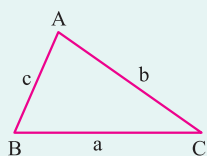


در شکل مقابل اگر $\hat{BAC} = 45^\circ$ ، آن گاه طول ارتفاع AH کدام است؟ **۲۶**

- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{6}$
(۳) $2\sqrt{3}$
(۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

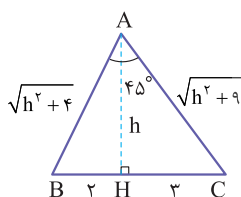


مساحت هر مثلث، برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b \times c \times \sin A = \frac{1}{2} a \times c \times \sin B = \frac{1}{2} a \times b \times \sin C$$

گام اول: اگر $AH = h$ باشد، آن گاه بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث ABH داریم $AB = \sqrt{h^2 + 4}$ و بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث ACH، داریم $AC = \sqrt{h^2 + 9}$.

گام دوم: برای محاسبه مساحت مثلث ABC از دو روش استفاده می‌کنیم:



$$S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{h \times 5}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + 4} \sqrt{h^2 + 9} \sin 45^\circ$$

گام سوم: مقادیری را که در گام دوم برای مساحت مثلث ABC به دست آوردیم، برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{h \times 5}{2} = \frac{\sqrt{h^2 + 4} \sqrt{h^2 + 9} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Rightarrow 5h = \sqrt{h^2 + 4} \sqrt{h^2 + 9} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 50 \times h^2 = (h^2 + 9)(h^2 + 4) \Rightarrow h^4 - 37h^2 + 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} h^2 = 1 & \text{غ ق} \\ h^2 = 36 & \Rightarrow h = 6 \end{cases}$$

توجه کنید که اگر $h = 1$ ، آن گاه $\cos \hat{BAH} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و $\cos \hat{CAH} = \frac{1}{\sqrt{13}}$ ، یعنی در این حالت $\hat{BAH}$ و $\hat{CAH}$ از 45° بیشتر هستند، پس این مقدار قابل قبول نیست.

ایران لوتله
توشه ای برای موفقیت

۲۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ باشند، دترمینان ماتریس $C = A^T B^T$ کدام است؟

$\frac{1}{4} (2)$
 $-4 (4)$

$-\frac{1}{4} (1)$
 $4 (3)$

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۳۴ کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۴ طراحی شده است و به نکاتی مانند دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس و تأثیر توان ماتریس در دترمینان آن می‌پردازد.

پاسخ: گزینه ۴

درس: Box

$|AB| = |A| |B|$

$|A^n| = |A|^n$

$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = abc$

تذکر: اگر در یک ماتریس مربعی، تنها یکی از درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی، عددی غیرصفر باشد، آن‌گاه دترمینان آن ماتریس برابر حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن است:

$B = \begin{bmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = abc$

گام اول: در ماتریس‌های مربعی A و B ، تنها یکی از درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی مخالف صفر است، پس طبق تذکر ارائه‌شده در درس باکس داریم:

$|A| = 2 \times (-1) \times 2 = -4$ و $|B| = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

گام دوم: با توجه به (۱) و (۲) درس باکس، دترمینان ماتریس C برابر است با:

$|C| = |A^T B^T| = |A^T| |B^T| = |A|^T \times |B|^T = (-4)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = (-4) \times \left(-4 \times \frac{1}{4}\right)^2 = -4$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

فواصل یکی از کانون‌های یک بیضی از دو سر قطر بزرگ و یک سر قطر کوچک آن، تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. اگر قدرنسبت این دنباله، نصف طول قطر کوچک بیضی باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

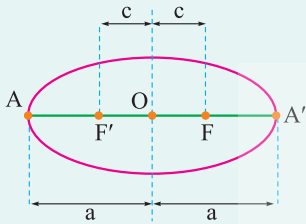
$\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

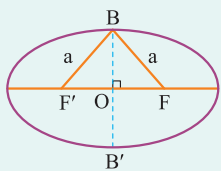
درس‌Box

فرض کنید طول قطر بزرگ یک بیضی $2a$ و فاصله بین کانون‌های آن $2c$ است:

الف) فاصله هر کانون از دو سر قطر بزرگ $a - c$ و $a + c$ است.



ب) فاصله هر کانون از دو سر قطر کوچک، برابر با a است.



$a^2 = b^2 + c^2$

$e = \frac{c}{a}$

پ) اگر طول قطر کوچک برابر با $2b$ باشد، آن گاه:

ت) خروج از مرکز بیضی برابر است با:

گام اول: مقادیر $a - c$, a , $a + c$ تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن برابر با c است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: طبق فرض سؤال، قدرنسبت دنباله مطرح‌شده در گام اول، برابر با $b = \frac{2b}{2} = \frac{2b}{2}$ است، پس در این بیضی:

$c = b \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} a^2 = c^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 2c^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}c \quad (*)$

گام سوم: خروج از مرکز بیضی، برابر است با:

$e = \frac{c}{a} \xrightarrow{(*)} e = \frac{c}{\sqrt{2}c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

دایره‌ای که نقاط $A(2, 4)$ و $B(-6, -2)$ ، دو سر قطری از آن هستند، یک سهمی با کانون $F(1, 1)$ و خط هادی $x = -3$ را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله این دو نقطه از یکدیگر کدام است؟

۱۴ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

Hint

درس‌Box

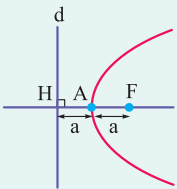
معادلات دایره و سهمی را با توجه به اطلاعات داده‌شده بنویسید و با حل دستگاه، مختصات نقاط تلاقی را به دست آورید.

(۱) اگر نقطه M وسط پاره خط AB باشد، آن‌گاه مختصات نقطه M از روابط زیر حاصل می‌شود:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

(۲) معادله دایره‌ای به مرکز (α, β) و شعاع R به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ است.

(۳) معادله یک سهمی که رأس آن نقطه $A(h, k)$ و فاصله کانونی آن برابر a باشد و دهانه آن به سمت راست باز شود، به صورت $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ است. مختصات کانون و معادله خط هادی این سهمی عبارتند از:



کانون: $F(h + a, k)$

خط هادی: $x = h - a$

گام اول: ابتدا معادله دایره را به دست می‌آوریم. نقطه O مرکز دایره دقیقاً وسط قطر AB قرار دارد، پس داریم:

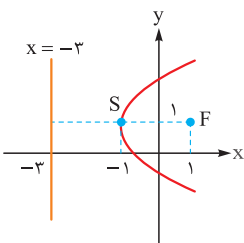
$$\begin{cases} x_O = \frac{2-6}{2} = -2 \\ y_O = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O(-2, 1)$$

شعاع این دایره برابر است با:

$$OA = \sqrt{(2+2)^2 + (4-1)^2} = 5$$

پس معادله این دایره به صورت $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ است.

گام دوم: با داشتن مختصات کانون و معادله خط هادی، معادله سهمی را می‌نویسیم. مطابق شکل رأس سهمی دقیقاً وسط خط هادی و کانون سهمی قرار دارد، پس $S(-1, 1)$ ، رأس سهمی و $a = 2$ ، فاصله کانونی سهمی است و سهمی رو به راست باز می‌شود، پس معادله آن به صورت زیر است:



$$(y - 1)^2 = 8(x + 1)$$

گام سوم: معادلات دایره و سهمی را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \\ (y - 1)^2 = 8(x + 1) \end{cases} \Rightarrow (x + 2)^2 + 8(x + 1) = 25 \Rightarrow x^2 + 12x - 13 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = \text{صفر}} \begin{cases} x = 1 \\ x = -13 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$x = 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 8 \times 2 = 16 \Rightarrow y - 1 = \pm 4 \Rightarrow y = 5, -3$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در این صورت فاصله دو نقطه برابر است با:

$$5 - (-3) = 8$$

توجه $x = -13$ غیر قابل قبول است، زیرا طول نقاط واقع بر این سهمی از (-1) کم تر نیست.



اگر $\vec{a} = \vec{j} + 10\vec{k}$ ، $\vec{b} = (4, 1, 5)$ و $\vec{c} = (1, -2, 2)$ آن گاه مجموع مؤلفه‌های تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b} + \vec{c}$ کدام است؟

۳۰

$$10/14 \quad (2)$$

$$10/12 \quad (1)$$

$$10/18 \quad (4)$$

$$10/16 \quad (3)$$

مشاوره مشابه تمرین ۴، صفحه ۸۴ کتاب درسی

پاسخ: گزینه ۱

درسی Box

(۱) طول بردار $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ برابر است با: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

(۲) حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ و $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ برابر است با: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

(۳) تصویر قائم بردار $\vec{u}$ بر $\vec{v}$ ، برابر است با: $\vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$.

گام اول: اگر $\vec{b} = (4, 1, 5)$ و $\vec{c} = (1, -2, 2)$ ، آن گاه $\vec{b} + \vec{c} = (5, -1, 7)$.

گام دوم: اگر $\vec{v} = (5, -1, 7)$ ، آن گاه $|\vec{v}| = \sqrt{25 + 1 + 49} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

گام سوم: تصویر قائم بردار $\vec{a} = (0, 1, 10)$ بر امتداد بردار $\vec{v} = (5, -1, 7)$ ، برابر است با:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{0 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) + 10 \cdot 7}{25 \times 3} (5, -1, 7) = \frac{73}{75} (5, -1, 7)$$

پس خواسته سؤال، برابر است با:

$$\frac{73}{75} (5 - 1 + 7) = \frac{73 \times 11}{25} = 10/12$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ ، $\vec{b} = (3, -4, 2)$ و $\vec{a} = (1, -3, 4)$ باشند، آن گاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید.

(هندسه ۳) - تمرین ۳ صفحه ۸۴ کتاب درسی

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

گزاره $[(p \Rightarrow q) \vee \sim r] \Rightarrow (p \wedge r)$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۳۱

۱) $p \wedge q$

۲) $p \wedge r$

۳) $r \wedge q$

۴) $p \wedge \sim r$

مشاوره از منطق ریاضی یک سؤال در کنکور می‌آید که بیشتر، همان سؤال‌های اول است. در سؤال‌هایی مثل این، سعی کنید با انتخاب ردیف مناسب از جدول ارزش، رد گزینه کنید.

پاسخ: گزینه ۲

حالتی رو بگیرین که فرض نادرست بشه یا از هم‌ارزی ترکیب شرطی استفاده کنید.

Hint

ترکیب گزاره‌ها:

درس‌Box

ارزش	فارسی	ریاضی	ترکیب گزاره‌ها
وقتی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست باشد.	p یا q	$p \vee q$	ترکیب فصلی
وقتی درست است که p و q هر دو درست باشند.	p و q	$p \wedge q$	ترکیب عطفی
فقط در حالت « $n \Rightarrow d$ » نادرست است و در بقیه حالت‌ها درست است.	اگر p آن‌گاه q	$p \Rightarrow q$	ترکیب شرطی
وقتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.	p اگر و فقط اگر q	$p \Leftrightarrow q$	ترکیب دوشروطی

جبر مجموعه‌ها و گزاره‌ها:

گزاره	مجموعه	اسم قانون
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	قوانین شرکت‌پذیری
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{(A \cup B) \cap (A \cup C)}$ فاکتور $\overline{A \cap (B \cup C)} = (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C})$	قوانین پخش (عکس آن فاکتورگیری)
-	$A \cup B = B$ $A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A - B = \emptyset \end{cases}$ (تمامی روابط، دوطرفه هستند.)	قوانین زیرمجموعه
$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$	قوانین دمورگان
-	$A - B = A \cap B'$	قانون تبدیل تفاضل به اشتراک
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A & (A \cap B \subseteq A \text{ چون}) \\ A \cap (A \cup B) = A & (A \subseteq A \cup B \text{ چون}) \end{cases}$	قوانین جذب
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	-	ترکیب شرطی
$p \vee \sim p \equiv T$ $p \vee T \equiv T$ $p \vee F \equiv p$ $p \wedge \sim p \equiv F$ $p \wedge T \equiv p$ $p \wedge F \equiv F$	$A \cup A' = U$ $A \cup U = U$ $A \cup \emptyset = A$ $A \cap A' = \emptyset$ $A \cap U = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	مقدماتی

پاسخ خیلی تشریحی ✓ اگر حالتی از جدول ارزش که فرض گزاره داده شده نادرست درمی آید (و در نتیجه، کل گزاره درست می شود) را در نظر بگیریم، داریم:

p	q	r	$(p \Rightarrow q) \vee \sim r$	کل گزاره	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$r \wedge q$	$p \wedge \sim r$
د	ن	د	ن	د	ن	د	ن	ن

می بینیم که در این حالت ارزش گزینه های (۱)، (۳) و (۴) مثل گزاره داده شده نیستند، پس پاسخ، گزینه (۲) است.

با استفاده از جبر گزاره، می دانیم $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ ، حالا داریم:

په چور دیگه

هم ارزی ترکیب شرطی $[\sim p \vee q \vee \sim r] \Rightarrow (p \wedge r) \equiv$

دمورگان $\sim [\sim p \vee q \vee \sim r] \vee (p \wedge r) \equiv$

$[p \wedge \sim q \wedge r] \vee (p \wedge r) \equiv$

جذب $[(p \wedge r) \wedge \sim q] \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge r$

(سوال ۳۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم ارز منطقی کدام گزاره است؟

(۱) $p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

(۲) $r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

(۳) $\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

(۴) $\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

(سوال ۳۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

گزاره $\sim p \Leftrightarrow q$ هم ارز منطقی کدام گزاره است؟

(۱) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$

(۲) $\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$

(۳) $(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

(۴) $\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

مجموعه $(A \cap B)' \cup [(A \cup B') - A] \cup (B - A')$ با کدام مجموعه برابر است؟ (U مجموعه مرجع است.)

۳۲

- (۱) B
(۲) A
(۳) $\emptyset$
(۴) U

مشاوره یک سؤال از مجموعه‌ها معمولاً به این شکل می‌آید. حواستان باشد با نمودار ون این سؤال راحت حل می‌شود، نکند از آن عبور کنید.

پاسخ: گزینه ۴

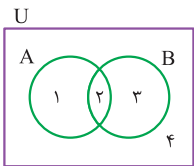
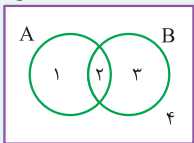
یک نمودار ون بکشین و نواحی رو شماره‌گذاری کنید و ببینین حاصل مجموعه کدام ناحیه می‌شه.

Hint

درس Box

روش شماره‌گذاری (نمودار ون) برای ساده‌سازی مجموعه‌ها:

برای دو مجموعه A و B نمودار ون را به صورت زیر رسم کرده و ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم. مجموعه داده‌شده را ساده می‌کنیم و می‌بینیم کدام ناحیه (یا مجموعه) در پایان به دست می‌آید.



گام اول: یک نمودار ون به صورت مقابل رسم کرده و نواحی را شماره‌گذاری می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم:

$$(A \cap B)' \cup [(A \cup B') - A] \cup (B - A') = \{1, 3, 4\} \cup \{4, 2\} = \{1, 2, 3, 4\} = U$$

ساده‌شده عبارت $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$ کدام است؟ (سؤال ۳۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

A (۴)

B (۳)

B - A (۲)

A - B (۱)

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

در مراسمی فاطمه، آناهیتا، رضوانه، سارا، پرنیا و سارینا می‌خواهند سخنرانی کنند، ولی باید آناهیتا قبل از رضوانه و سارا بلافاصله بعد از سارینا سخنرانی کند. به چند حالت می‌توانیم ترتیب سخنرانی را برای آن‌ها مشخص کنیم؟

۳۰ (۱)

۴۰ (۲)

۶۰ (۳)

۱۲۰ (۴)

مشاوره در سال‌های گذشته، سؤال شمارش چه در کنکور ریاضی و چه در کنکور تجربی بیشتر از بحث جایگشت بوده است.

پاسخ: گزینه ۳

سارا و سارینا رو در یک دسته قرار بدین و یک شیء بگیرید.

گام اول: سارا و سارینا را در یک دسته قرار می‌دهیم. دقت کنید چون سارا بلافاصله بعد از سارینا است، پس دسته را به صورت [سارا و سارینا] در نظر می‌گیریم که جایگشت نیز ندارند.

گام دوم: باید جایگشت‌های ۵ شیء [سارا و سارینا]، فاطمه، آناهیتا، رضوانه و پرنیا را به دست آوریم که رضوانه جلوتر از آناهیتا باشد. ۵ جایگاه مانند زیر داریم، اول به $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ روش دو جایگاه انتخاب می‌کنیم. رضوانه را در مکان جلوتر و آناهیتا را در مکان عقب‌تر قرار می‌دهیم:

گام سوم: ۳ شیء باقی‌مانده ۳! جایگشت دارند، پس تعداد حالت‌های سخنرانی برابر است با: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times 3! = 10 \times 6 = 60$

بعد از قراردادن سارا و سارینا در یک بسته دقت کنید که ۵ شیء داریم که در نصف حالت‌ها رضوانه جلوتر و در نصف حالت‌ها آناهیتا جلوتر است، پس تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با: $\frac{5!}{2} = 60$

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

بهبود دیگر

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

سکه‌ای به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن رو در آن سه برابر احتمال آمدن پشت است. آن را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید دو تاس و اگر پشت بیاید سه تاس پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده تاس‌ها حداکثر ۴ است؟

مشاوره احتمال سؤال آمدن، از قانون احتمال کل و بیز بیشتر از بخش‌های احتمال است.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} & (۲) \\ \frac{2}{3} & (۱) \\ \frac{7}{54} & (۴) \\ \frac{5}{27} & (۳) \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۴

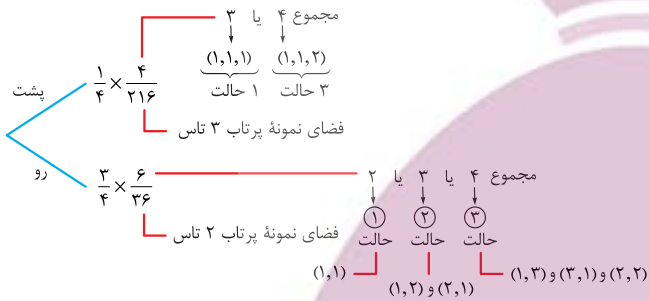
Hint

اول احتمال «پ» یا «ر» آمدن رو حساب کن و بعد از احتمال شاخه‌های برو.

گام اول: مجموع احتمال‌های $P(پ)$ و $P(ر)$ در پرتاب سکه برابر ۱ است، پس داریم:

$$P(پ) + P(ر) = 1 \Rightarrow P(پ) + 3P(پ) = 1 \Rightarrow P(پ) = \frac{1}{4}, P(ر) = \frac{3}{4}$$

گام دوم: از قانون احتمال کل داریم:



گام سوم: طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = \frac{1}{216} + \frac{1}{8} = \frac{28}{216} = \frac{7}{54}$$

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

برآورد بازه‌ای میانگین جامعه با اطمینان بیش از ۹۵ درصد با استفاده از یک نمونه ۱۶ تایی به صورت $(۳/۵, ۶/۵)$ برآورد شده است. اگر انحراف معیار جامعه و نمونه برابر باشد، چند داده برابر با ۵ به نمونه اضافه کنیم تا واریانس نمونه، ۳ واحد کاهش یابد؟

- ۶ (۱)
۸ (۳)
۷ (۲)
صفر (۴)

مشاوره از بحث برآورد بازه‌ای تا حالا سوالی در کنکور نیامده است. امسال ممکن است نوبت آن باشد.

پاسخ: گزینه ۳

از روی بازه $(۳/۵, ۶/۵)$ انحراف معیار و میانگین نمونه رو به دست بیارید.

Hint

درس: Box

شاخص‌های پراکندگی:

توضیح فارسی	فرمول	شاخص
هر داده را منهای میانگین کرده به توان ۲ می‌رسانیم. سپس با هم جمع کرده و تقسیم بر تعداد می‌کنیم. به زبان دیگر واریانس برابر میانگین مربع انحراف از میانگین‌هاست.	$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ یا $\sigma^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$	واریانس
جذر واریانس است.	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$	انحراف معیار

برآورده بازه‌ای:

برآورد بازه‌ای یا بازه اطمینان پارامتر جامعه، عبارت است از بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که به ضرب اطمینان مشهور است.

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه:

اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}}$$

که μ میانگین جامعه و σ انحراف معیار جامعه است.

(۱) وسط بازه اطمینان، همان میانگین نمونه $(\bar{x})$ است.

(۲) طول بازه اطمینان برابر با $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

نکته

گام اول: بازه اطمینان بیش از ۹۵٪ میانگین به صورت $(\bar{x} - \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}})$ است، پس داریم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$\begin{cases} \bar{x} - \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} = 3/5 \\ \bar{x} + \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} = 6/5 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} 2\bar{x} = 10 \Rightarrow \bar{x} = 5 \Rightarrow \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}} = 1/5 \xrightarrow{n=16} \gamma\sigma = 4(1/5) \Rightarrow \sigma = 2$$

گام دوم: طبق فرمول واریانس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - 5)^2}{n} \Rightarrow 4 = \frac{\sum (x_i - 5)^2}{16} \Rightarrow \sum (x_i - 5)^2 = 144$$

گام سوم: اگر k داده مساوی با ۵ به نمونه اضافه کنیم حاصل $\sum (x_i - 5)^2$ تغییری نمی کند، اما واریانس جدید ۳ واحد کاهش

می یابد، پس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - 5)^2}{16 + k} = 9 - 3 \Rightarrow \frac{144}{16 + k} = 6 \Rightarrow 144 = 96 + 6k \Rightarrow k = 8$$



a عددی اول است که $a \mid 6k + 1$ و $a \mid 3k + 4$. بزرگ‌ترین جواب دورقمی برای x در معادله هم‌نهشتی $107x \equiv 61 - x$

به پیمانه a کدام است؟

۹۵ (۱)

۹۶ (۲)

۹۷ (۳)

۹۸ (۴)

مشاوره در بین موضوعات نظریه اعداد، هم‌نهشتی کم‌تر از سایر موضوعات است، البته در سال‌های اخیر طراحان به عادی‌کردن هم‌علاقه زیادی نشان داده‌اند.

پاسخ: گزینه ۱

k رو حذف کنیم و بعد a رو پیدا کنیم.

Hint

درس‌Box

معادله هم‌نهشتی:

برای حل معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

(۱) اگر a و b اعداد بزرگی هستند، به جایشان یک عدد هم‌نهشت با آن‌ها به پیمانه m را قرار می‌دهیم.

(۲) با اضافه کردن مضارب پیمانه به b ، کاری می‌کنیم تا دو طرف بر a بخش‌پذیر باشند.

(۳) با استفاده از ویژگی تقسیم، دو طرف را به a ساده می‌کنیم تا x به دست آید.

ساده کردن دو طرف هم‌نهشتی:

$$ac \equiv bc \xrightarrow[\div c]{(c, m)=1} a \equiv b$$

گام اول:

پاسخ خیلی تشریحی

$$\begin{cases} a \mid 6k + 1 \\ a \mid 3k + 4 \end{cases} \xrightarrow{\times(2)} a \mid 6k + 8 \Rightarrow a \mid 7 \xrightarrow[\text{عدد اول}]{a} a = 7$$

گام دوم: معادله هم‌نهشتی را حل می‌کنیم:

$$107x \equiv 61 - x \Rightarrow 108x \equiv 61 \xrightarrow[\substack{108 \equiv 3 \\ 61 \equiv 5}]{\substack{108 \equiv 3 \\ 61 \equiv 5}} 3x \equiv 5$$

$$\Rightarrow 3x \equiv 5 + 7 = 12 \xrightarrow[\substack{(3, 7)=1}]{\div 3} x \equiv 4 \Rightarrow x = 7k + 4$$

به ازای $k = 13$ بزرگ‌ترین عدد دورقمی x ، یعنی ۹۵ به دست می‌آید.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف همبند G با کم‌ترین تعداد رأس از درجه یک، برابر ۶۰ است. حاصل $\gamma(\bar{G}) + \Delta(\bar{G})$

کدام است؟

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

مشاوره از فصل گراف، یک سؤال در کنکور می‌آید. این فصل نماد و تعریف‌های زیادی دارد، یک بار آن‌ها را دوره کنید.

پاسخ: گزینه ۳

۶۰ رو به صورت ضرب اعداد (درجه‌های) مناسب تجزیه کنید.

Hint

درس‌Box

نماد	اسم	توضیح	نکته
$V(G)$	مجموعه رأس‌های گراف	-	رأس‌ها را معمولاً با v_1 و v_2 و ... نمایش می‌دهیم.
$E(G)$	مجموعه یال‌های گراف	-	یال را معمولاً به صورت ab نمایش می‌دهیم.
p	مرتبه گراف	تعداد رأس‌های گراف ($p > 0$)	$ V(G) = p$
q	اندازه گراف	تعداد یال‌های گراف ($q \geq 0$)	$ E(G) = q$
$\deg_G(v)$	درجه رأس v	تعداد یال‌هایی که به رأس v متصل است (در گراف G).	درجه رأس v را با نماد $d(v)$ نمایش می‌دهیم $0 \leq d(v) \leq p-1$.
Δ	ماکزیمم درجه	بزرگ‌ترین درجه در بین کل درجه رأس‌ها	$\Delta \leq p-1$
δ	مینیمم درجه	کوچک‌ترین درجه در بین کل درجه رأس‌ها	$0 \leq \delta \leq \Delta$
$N_G(a)$	همسایگی باز رأس a	مجموعه رأس‌هایی که به a متصل هستند (در گراف G).	$N_G(a)$ به تعداد $d(a)$ عضو دارد.
$N_G[a]$	همسایگی بسته رأس a	مجموعه رأس‌هایی که به a متصل هستند، به‌علاوه خود a (در گراف G).	$N_G[a]$ به تعداد $1 + d(a)$ عضو دارد.
$\bar{K}_p$	گراف تهی	گرافی که یال ندارد (همه رأس‌ها ایزوله هستند).	تعدادی نقطه
$\gamma(G)$	عدد احاطه گری گراف G	کم‌ترین تعداد رأس که کل رأس‌های G احاطه شوند.	-

گراف مکمل:

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف مکمل G	$\bar{G}$	رأس‌های $\bar{G}$ همان رأس‌های G هستند. یال‌های $\bar{G}$ یال‌هایی هستند که در G وجود ندارد.	۱) $q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$ ۲) $\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p-1$ ۳) $\Delta(\bar{G}) + \delta(G) = p-1$ ۴) $\Delta(G) + \delta(\bar{G}) = p-1$

گام اول: $60 = 5 \times 4 \times 3$ یا $60 = 5 \times 3 \times 2 \times 2$ است. از طرفی وقتی رأس درجه ۵ داریم، مرتبه گراف باید حداقل برابر ۶ باشد.

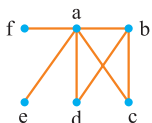
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: تعداد رأس‌های درجه ۱ را طوری قرار می‌دهیم که تعداد رأس‌های فرد، عددی زوج باشد. حالتی قابل قبول است که تعداد یک‌های کم‌تری داشته باشد:

$$60 = 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \quad \checkmark$$

$$60 = 5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \quad \times$$

گام سوم: درجه رأس‌های G به صورت ۱، ۱، ۲، ۲، ۳، ۵ و نمودار گراف آن به صورت زیر است:



گام چهارم: $\delta(G) = 1$ (مثل رأس f)؛ از طرفی این رأس در $\bar{G}$ تبدیل به رأس با درجه ماکزیمم می‌شود که به همه رأس‌های دیگر به غیر از a وصل است، پس $\Delta(\bar{G}) = 4$.

گام پنجم: در گراف $\bar{G}$ رأس a ایزوله است (چون در خود G به همه وصل است)؛ از طرفی رأس f به همه رأس‌های غیر از a در $\bar{G}$ وصل هستند، پس $\{a, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای $\bar{G}$ بوده و $\gamma(\bar{G}) = 2$:

$$\gamma(\bar{G}) + \Delta(\bar{G}) = 2 + 4 = 6$$

حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف G ، ۴۸ است. اگر تعداد رأس‌ها با درجه رأس یک، حداقل باشد، حاصل $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ کدام است؟

(سؤال ۴۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت دوم)

۱۳ (۴)

۱۹ (۳)

۱۱ (۲)

۱۷ (۱)

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

چند تابع پوشا $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ وجود دارد که $f(1) \neq 1$ ؟

۳۱ (۴)

۶۲ (۳)

۱۰۰ (۲)

۵۰ (۱)

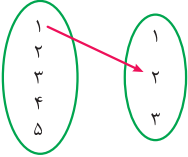
پاسخ: گزینه ۲

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

$f(1) = 2$ یا $f(1) = 3$. مثلاً فرض $f(1) = 2$ باشه و دو حالت نامطلوب (برای غیرپوشا بودن) تعریف کنیم.

گام اول: فرض کنیم $f(1) = 2$ (اگر $f(1) = 3$ باشد هم تعداد حالت‌ها همین می‌شود، پس در پایان جواب را ۲ برابر می‌کنیم):



گام دوم: دو مجموعه نامطلوب داریم:

$$A: 1 \text{ پوشیده نشود} \Rightarrow |A| = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{هرکدام ۲ تا ۵ به ۲ یا ۳ نظیر شوند}}$$

$$B: 3 \text{ پوشیده نشود} \Rightarrow |B| = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$A \cap B: 1 \text{ و } 3 \text{ پوشیده نشود} \Rightarrow |A \cap B| = 1 \text{ (همه به ۲ نظیر شوند)}$$

گام سوم: خواسته مسئله $\bar{A} \cap \bar{B}$ (هم ۱ پوشیده شود و هم ۳):

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\bar{A} \cap \bar{B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

$$= 3^4 - (16 + 16 - 1) = 81 - 31 = 50$$

هرکدام از ۲ تا ۵، به اعداد ۱ و ۳ ممکن است نظیر شوند.

گام چهارم: تعداد تابع‌های مطلوب برابر $2 \times 50 = 100$ می‌شود.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

از بین ۵ نوع گل مختلف می‌خواهیم دسته‌گلی شامل ۹ شاخه درست کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است، هرگاه از گل نوع سوم فقط دو شاخه و از گل نوع پنجم حداقل دو شاخه در دسته‌گل به کار رفته باشد؟

(۱) ۲۸

(۲) ۷۰

(۳) ۱۲۶

(۴) ۵۶

مشاوره از معادله سیاله خطی، بیشتر از موضوعات دیگر فصل سوم گسسته، سؤال آمده است.

پاسخ: گزینه ۴

تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 9$ رو با شرایط $x_3 = 2$ و $x_5 \geq 2$ پیدا کنید.

Hint

درس‌Box

تعداد جواب‌های معادله سیاله خطی در حالت‌های مختلف:

معادله	تعداد جواب‌های صحیح نامنفی	تعبیر یا روش حل
$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ k متغیر	$\binom{n+k-1}{k-1}$	توزیع n شیء یکسان بین k نفر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq a \end{cases}$	$\binom{n+k-1-a}{k-1}$	قرار می‌دهیم: $x_i = x'_i + a$
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$	$\binom{n-1}{k-1}$	جواب‌های طبیعی معادله
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_1 \leq a \end{cases}$	$\binom{n+k-1}{k-1} - \binom{n-(a+1)+k-1}{k-1}$	کل جواب‌ها را از جواب‌های با شرط $x_1 \geq a+1$ کم می‌کنیم.
$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$	$\binom{n+k}{k}$	متغیر نامنفی x_{k+1} را اضافه کرده تا نامعادله تبدیل به معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n$ گردد.
$\begin{aligned} ax_1 + \dots + x_k &= n \\ x_1^n + \dots + x_k &= n \\ \sqrt{x_1} + \dots + x_k &= n \end{aligned}$	-	متغیر دارای ضریب، توان، رادیکال و ... را حالت‌بندی می‌کنیم.

گام اول: تعداد گل‌های نوع x_i را می‌گیریم، پس:

پاسخ خیلی تشریحی

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9 \\ x_3 = 2, x_5 \geq 2 \end{cases}$$

گام دوم: $x_5 = x'_5 + 2$ و $x_3 = 2$ قرار می‌دهیم، پس داریم:

$$x_1 + x_2 + 2 + x_4 + x'_5 + 2 = 9 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x'_5 = 5$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی} = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$$

در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۳ مهره سبز، ۴ مهره قرمز و ۶ مهره آبی داریم. حداقل چند مهره خارج کنیم تا حداقل ۳ مهره سفید یا حداقل ۲ مهره سبز یا حداقل ۳ مهره قرمز خارج شود؟

۱۰ (۱)

۱۱ (۲)

۱۲ (۳)

۱۳ (۴)

مشاوره اصل لانه کیوتری از موضوعات مورد علاقه طراحان است. درست است که این بحث در ابتدا کمی دشوار به نظر می‌رسد، ولی با حل چند سؤال متنوع می‌توانید از پس سؤال کنکور آن بربایید.

پاسخ: گزینه ۳

بدترین حالت ممکن رو در نظر بگیرین تا اتفاقی که مسئله خواسته رخ نده.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فرض کنیم بدترین حالت ممکن در ابتدا رخ بدهد تا خواسته مسئله اتفاق نیفتد. گفته حداقل ۳ مهره سفید یا ۲ مهره سبز یا ۳ مهره قرمز بیرون بیاید، پس ما فرض می‌کنیم در ابتدا ۲ تا سفید، ۱ سبز و ۲ تا قرمز خارج بشود. مهره‌های آبی خارج شده نیز مهم نیستند، پس فرض کنیم آن‌ها هم خارج بشوند، پس اگر $2 + 1 + 2 + 6 = 11$ مهره خارج کرده باشیم، هنوز مطمئن نیستیم که خواسته مسئله قطعاً رخ داده باشد، ولی اگر یک مهره دیگر برداریم (یعنی حداقل ۱۲ تا) قطعاً خواسته مسئله رخ می‌دهد.

ایران تونلنه
توشه ای برای موفقیت

۴۱ بردار مکان متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_1 = 2\text{ s}$ و $t_2 = 9\text{ s}$ به ترتیب برابر $(15\text{ m})\vec{i}$ و $(-27\text{ m})\vec{i}$ است. بردار مکان متحرک در لحظه $t = 6\text{ s}$ بر حسب متر کدام است؟

- (۱) $9\vec{i}$ (۲) $3\vec{i}$
(۳) $-3\vec{i}$ (۴) $-9\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۴

سرعت متوسط متحرک در بازه‌های زمانی t_1 تا $t = 6\text{ s}$ و $t = 6\text{ s}$ تا t_2 را برابر با هم قرار دهید و از آن‌جا، مکان متحرک در لحظه $t = 6\text{ s}$ پیدا کنید.

Hint

درس‌Box

برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند، بردار مکان جسم در آن لحظه نام دارد. بردار مکان جسم در حرکت روی محور x را با $\vec{x}$ نشان می‌دهیم.

برداری که جهت‌داری است که مکان آغازین حرکت را به مکان پایانی وصل می‌کند، بردار جابه‌جایی $\vec{d}$ بین دو لحظه t_1 و t_2 همان تفاضل دو بردار مکان $\vec{x}_2$ و $\vec{x}_1$ در آن دو لحظه است، بنابراین داریم:

$$\vec{d} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$$

در حرکت روی محور x می‌توان نوشت:

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$$

در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متوسط متحرک در تمام بازه‌های زمانی، یکسان است. رابطه سرعت متوسط در حرکت روی محور x :

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}$$

$\vec{v}_{av}$: سرعت متوسط (m/s)

$\Delta \vec{x}$: جابه‌جایی (m)

Δt : بازه زمانی (s)

$\vec{x}_1$: مکان متحرک در لحظه t_1 (m)

$\vec{x}_2$: مکان متحرک در لحظه t_2 (m)

رابطه سرعت متوسط را یک بار بین دو لحظه t_1 تا $t = 6\text{ s}$ و بار دیگر بین دو لحظه $t = 6\text{ s}$ تا t_2 می‌نویسیم و آن‌ها را برابر با هم قرار می‌دهیم تا مکان متحرک در لحظه $t = 6\text{ s}$ را به دست آوریم:

$$\vec{v} = \vec{v}_{av} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{t - t_1} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}}{t_2 - t} \Rightarrow \frac{\vec{x} - 15\vec{i}}{6 - 2} = \frac{-27\vec{i} - \vec{x}}{9 - 6}$$

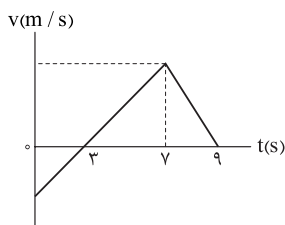
$$\Rightarrow 3\vec{x} - 45\vec{i} = -108\vec{i} - 4\vec{x} \Rightarrow 7\vec{x} = -63\vec{i} \Rightarrow \vec{x} = (-9\text{ m})\vec{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازه شتاب متوسط متحرک در ۸ ثانیه اول برابر 3 m/s^2 باشد، اندازه سرعت متوسط متحرک در ۹ ثانیه اول چند متر بر ثانیه است؟

۴۲

مشاوره بخشی قابل توجهی از سؤالات حرکت‌شناسی که با نمودار مطرح می‌شوند، مربوط به نمودار سرعت - زمان هستند. با ویژگی‌های این نمودار به خوبی آشنا شوید.



۴ (۱)

۴ / ۴ (۲)

۸ (۳)

۸ / ۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

Hint

ابتدا به کمک رابطه شتاب متوسط در ۸ ثانیه اول حرکت، رابطه‌ای بین سرعت اولیه (v_0) و بیشینه سرعت (v_m) به دست آورید. سپس با استفاده از تشابه مثلث‌ها، رابطه دیگری بین آن‌ها پیدا کنید و با حل یک دستگاه، v_m را پیدا کنید. در پایان نیز به کمک مساحت سطح زیر نمودار سرعت - زمان، جابه‌جایی و سرعت متوسط در ۹ ثانیه اول حرکت را محاسبه کنید.

درس‌Box

(۱) شتاب متوسط در هر بازه زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازه زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم.

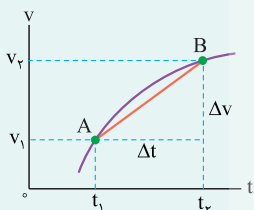
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

a_{av} : شتاب متوسط (m/s^2)

v_1 : سرعت متحرک در لحظه t_1 (m/s)

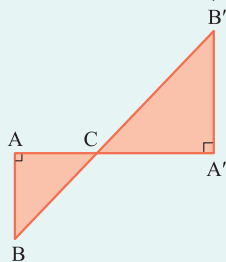
v_2 : سرعت متحرک در لحظه t_2 (m/s)

● شتاب متوسط بین دو لحظه، برابر شیب خطی است که نمودار سرعت - زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند:



(۲) مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، در هر بازه زمانی، برابر با جابه‌جایی متحرک (Δx) در آن بازه است. مساحت بخشی از سطح را که زیر محور زمان است، منفی در نظر می‌گیریم، زیرا سرعت و جابه‌جایی در این بخش، منفی هستند.

(۳) در نمودارهای حرکت‌شناسی، نوشتن نسبت تشابه بین اضلاع مثلث‌ها (رابطه تالس) می‌تواند مفید باشد:

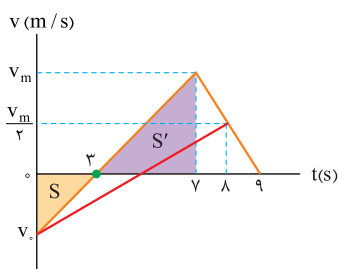


$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C}{AC}$$

ایران نوشته
توشه ای برای موفقیت

گام اول: به کمک رابطه شتاب متوسط در ۸ ثانیه اول حرکت، رابطه‌ای بین سرعت اولیه (v_0) و بیشینه سرعت متحرک (v_m) به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی



$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow 3 = \frac{v_m - v_0}{8 - 0}$$

$$\Rightarrow \frac{v_m}{8} - v_0 = 24 \quad (1)$$

گام دوم: مثلث‌های S و S' با هم متشابه‌اند و می‌توان نوشت:

$$\frac{v_m}{-v_o} = \frac{v - 3}{3 - 0} \Rightarrow v_m = -\frac{4}{3} v_o \quad (2)$$

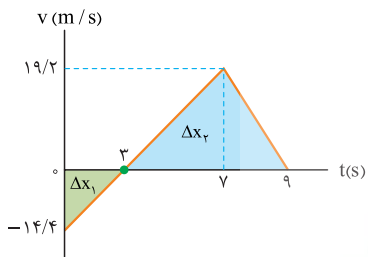
از ترکیب روابط (۱) و (۲)، v_o و v_m را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_m}{3} - v_o = 24 \xrightarrow{v_m = -\frac{4}{3} v_o} \frac{1}{3} \left(-\frac{4}{3} v_o \right) - v_o = 24 \Rightarrow -\frac{5}{3} v_o = 24$$

$$\Rightarrow v_o = -\frac{72}{5} = -14.4 \text{ m/s}$$

$$v_m = -\frac{4}{3} v_o = -\frac{4}{3} (-14.4) = 19.2 \text{ m/s}$$

گام سوم: با استفاده از مساحت سطح بین نمودار سرعت-زمان و محور زمان، جابه‌جایی متحرک در ۹ ثانیه اول حرکت را حساب می‌کنیم:



$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{-14.4 \times 3}{2} + \frac{19.2 \times 6}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta x = -21.6 + 57.6 = 36 \text{ m}$$

گام چهارم: سرعت متوسط متحرک در ۹ ثانیه اول حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{36}{9} = 4 \text{ m/s}$$

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

سرعت متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در مبدأ زمان برابر $\vec{v}_0$ است. اگر جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیه دوم، ۷ برابر جابه‌جایی آن در ثانیه اول باشد، شتاب متحرک بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

- (۱) $7\vec{i}$ (۲) $-7\vec{i}$
(۳) $12\vec{i}$ (۴) $-12\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۳

Hint

نمودار سرعت - زمان متحرک را در ۴ ثانیه اول حرکت رسم کنید و با استفاده از مساحت سطح زیر این نمودار در بازه‌های زمانی داده‌شده، شتاب حرکت را پیدا کنید.

درسی Box

(۱) معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

$$v = at + v_0$$

v : سرعت در لحظه t (m/s)

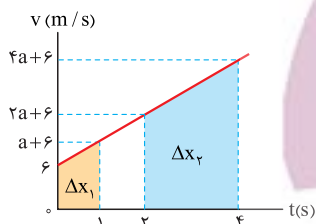
a : شتاب (m/s^2)

t : زمان (s)

v_0 : سرعت اولیه (m/s)

(۲) نمودار سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت، به صورت یک خط شیب‌دار است و شیب آن، شتاب حرکت را نشان می‌دهد. هم‌چنین نقطه شروع این نمودار روی محور v ، سرعت اولیه (v_0) را نشان می‌دهد.

گام اول: سرعت متحرک در لحظه‌های $t=1s$ ، $t=2s$ و $t=4s$ را بر حسب شتاب، به دست آورده و نمودار سرعت - زمان را در ۴ ثانیه اول حرکت رسم می‌کنیم:



$$v = at + v_0 \xrightarrow{v_0 = 6 \text{ m/s}} \begin{cases} t_1 = 1 \text{ s} \Rightarrow v_1 = a \times 1 + 6 = a + 6 \\ t_2 = 2 \text{ s} \Rightarrow v_2 = a \times 2 + 6 = 2a + 6 \\ t_4 = 4 \text{ s} \Rightarrow v_4 = a \times 4 + 6 = 4a + 6 \end{cases}$$

گام دوم: با توجه به این‌که جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیه دوم، ۷ برابر جابه‌جایی آن در ثانیه اول است، داریم:

$$\Delta x_2 = 7\Delta x_1 \Rightarrow \frac{[(2a+6) + (4a+6)](4-2)}{2} = 7 \times \frac{[6 + (a+6)](1)}{2}$$

$$\Rightarrow 6a + 12 = 7/5(a + 12) \Rightarrow 2/5a = 30 \Rightarrow a = 12 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \vec{a} = (12 \text{ m/s}^2)\vec{i}$$

په‌چور دیگه

در حرکت با شتاب ثابت a و سرعت اولیه v_0 روی محور x ، جابه‌جایی متحرک در T ثانیه n ام حرکت، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x = (n - 0/5)aT^2 + v_0 T$$

بنابراین در ۲ ثانیه دوم حرکت داریم ($v_0 = 6 \text{ m/s}$ و $n = 2$ ، $T = 2 \text{ s}$):

$$\Delta x_2 = (2 - 0/5)a \times 2^2 + 6 \times 2 = 6a + 12$$

در ثانیه اول نیز داریم ($v_0 = 6 \text{ m/s}$ و $n = 1$ ، $T = 1 \text{ s}$):

$$\Delta x_1 = (1 - 0/5)a \times 1^2 + 6 \times 1 = 0/5a + 6$$

با نوشتن نسبت Δx_2 و Δx_1 ، شتاب را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_2 = 7\Delta x_1 \Rightarrow 6a + 12 = 7(0.5a + 6) \Rightarrow 6a + 12 = 3.5a + 42$$

$$\Rightarrow 2.5a = 30 \Rightarrow a = 12 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \vec{a} = (12 \text{ m/s}^2)\vec{i}$$



در شرایط خلأ، گلوله A از ارتفاع ۵۰ متری سطح زمین و ۱ ثانیه بعد گلوله B از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین رها می شوند. از لحظه سقوط گلوله B تا لحظه ای که یکی از گلوله ها به سطح زمین می رسد، کم ترین فاصله دو گلوله برابر چند متر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

- ۱۵ (۱) ۱۰ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا تعیین کنید که کدام گلوله زودتر به زمین می رسد، سپس فاصله دو گلوله را در این لحظه پیدا کنید.

Hint

درس Box

ارتفاع سقوط آزاد جسمی که از یک بلندی رها شده است، از رابطه زیر به دست می آید:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

h: ارتفاع سقوط (m)

g: شتاب گرانش در سطح زمین (m/s^2)

t: زمان سقوط (s)

گام اول: زمان سقوط هر یک از گلوله ها تا رسیدن به زمین را به دست می آوریم:

$$h_A = \frac{1}{2}gt_A^2 \Rightarrow 50 = \frac{1}{2} \times 10 \times t_A^2 \Rightarrow t_A^2 = 10 \Rightarrow t_A = \sqrt{10} \text{ s} \approx 3.16 \text{ s}$$

$$h_B = \frac{1}{2}gt_B^2 \Rightarrow 20 = \frac{1}{2} \times 10 \times t_B^2 \Rightarrow t_B^2 = 4 \Rightarrow t_B = 2 \text{ s}$$

گام دوم: با آن که گلوله B یک ثانیه پس از گلوله A رها شده است، اما زودتر از گلوله A به زمین می رسد:

$$\left. \begin{array}{l} t_A - 1 = 3.16 - 1 = 2.16 \text{ s} \\ t_B = 2 \text{ s} \end{array} \right\} \Rightarrow t_A - 1 > t_B$$

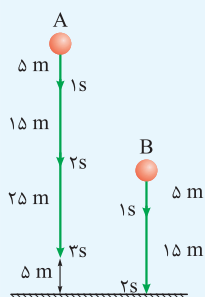
گام سوم: کم ترین فاصله بین دو گلوله در لحظه ای است که گلوله B به زمین می رسد، بنابراین فاصله هر یک از دو گلوله از زمین (H_A و H_B) را ۲ s پس از شروع حرکت B و ۳ s پس از شروع حرکت A به دست آورده و اختلاف آن ها را پیدا می کنیم:

$$t_B = 2 \text{ s} \Rightarrow H_B = 0$$

$$t'_A = 3 \text{ s} \Rightarrow h'_A = \frac{1}{2}gt'^2_A = \frac{1}{2} \times 10 \times 3^2 = 45 \text{ m} \Rightarrow H_A = 50 - 45 = 5 \text{ m}$$

$$H_A - H_B = 5 - 0 = 5 \text{ m}$$

در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه و با فرض $g = 10 \text{ m/s}^2$ ، جابه جایی های متحرک در ثانیه های متوالی، تشکیل یک دنباله حسابی می دهند که جمله اول آن ۵ m و قدرنسبت آن ۱۰ m است، بنابراین گلوله B، ۲ s پس از سقوط به زمین می رسد. در این لحظه، گلوله A، به مدت ۳ ثانیه سقوط کرده و ۴۵ m رو به پایین آمده است:

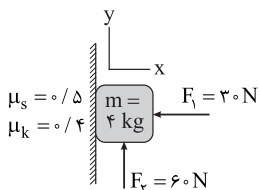


در لحظه ای که گلوله B به زمین می رسد، فاصله دو گلوله از هم ۵ m است.

په جور دیگه

در شکل زیر، به جسمی که به دیوار قائم تکیه داده شده، نیروی افقی F_1 و نیروی قائم F_2 وارد می‌شود. نیروی اصطکاک وارد بر جسم بر حسب نیوتون کدام است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

۴۵



(۱) $15 \vec{j}$

(۲) $-15 \vec{j}$

(۳) $12 \vec{j}$

(۴) $-12 \vec{j}$

مشاوره مشابه این سؤال قبلاً در کنکورهای خارج از کشور تجربی ۱۴۰۰ و ۱۴۰۲ و همچنین در کنکور سراسری تجربی ۱۴۰۰ مطرح شده است.

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا نیروی اصطکاک در آستانه حرکت و نیروی اصطکاک جنبشی را به دست آورید، سپس تعیین کنید که جسم در چه جهتی حرکت می‌کند یا می‌خواهد حرکت کند.

درس Box

(۱) رابطه نیروی اصطکاک در آستانه حرکت:

$$f_{s, \max} = \mu_s \times F_N$$

$f_{s, \max}$: نیروی اصطکاک در آستانه حرکت (N)

μ_s : ضریب اصطکاک ایستایی

F_N : نیروی عمودی سطح (N)

(۲) رابطه نیروی اصطکاک جنبشی:

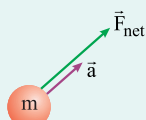
$$f_k = \mu_k \times F_N$$

f_k : نیروی اصطکاک جنبشی (N)

μ_k : ضریب اصطکاک جنبشی

F_N : نیروی عمودی سطح (N)

(۳) قانون دوم نیوتون: هرگاه نیروهای وارد بر جسمی متوازن نباشند، یعنی بر جسم نیروی خالصی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو، شتاب می‌گیرد:



$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

$\vec{a}$: شتاب (m/s^2)

m: جرم (kg)

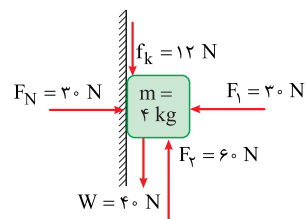
$\vec{F}_{\text{net}}$: نیروی خالص (N)

گام اول: نیروی اصطکاک در آستانه حرکت و نیروی اصطکاک جنبشی جسم را به دست می‌آوریم:

$$f_{s, \max} = \mu_s \times F_N \xrightarrow{F_N = F_1 = 30 \text{ N}} f_{s, \max} = 0.5 \times 30 = 15 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k \times F_N \xrightarrow{F_N = F_1 = 30 \text{ N}} f_k = 0.4 \times 30 = 12 \text{ N}$$

گام دوم: از آنجا که نیروی خالص $\vec{F}_2$ و $\vec{W}$ ، رو به بالا است؛ بنابراین نیروی اصطکاک رو به پایین است:



$$F_2 - W = 60 - 40 = 20 \text{ N}$$

از طرفی این نیروی 20 N از نیروی اصطکاک در آستانه حرکت بزرگ‌تر است، بنابراین جسم رو به بالا شروع به حرکت می‌کند و نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر آن رو به پایین است:

$$\vec{f}_k = (-12 \text{ N})\vec{j}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یک انتهای فنر سبکی به طول 30 cm و ثابت 400 N/m را به سقف آسانسوری بسته و از انتهای دیگر آن، وزنه‌ای به جرم 2 kg آویزان می‌کنیم. اگر آسانسور با شتاب رو به بالایی به بزرگی 2 m/s^2 ، به سمت پایین در حال حرکت باشد، طول فنر به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

۲۴ (۱)

۲۶ (۲)

۳۴ (۳)

۳۶ (۴)

مشاوره این یک سؤال ترکیبی بین حرکت آسانسور و نیروی کشسانی فنر است که مشابه آن در کنکورهای ریاضی و تجربی ۱۴۰۰ و خارج از کشور تجربی ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ مطرح شده است.

پاسخ: گزینه ۴

(۱) رابطه نیروی کشسانی فنر:

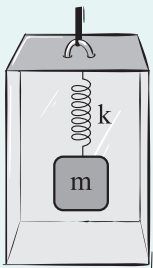
$$F_e = kx$$

F_e : اندازه نیروی کشسانی فنر (N)

k : ثابت فنر (N/m)

$x = \Delta L$: تغییر طول فنر (m)

(۲) اگر انتهای بالایی فنر را به سقف آسانسور بسته و وزنه‌ای را به انتهای پایینی آن بیاویزیم و آسانسور با شتاب a در راستای قائم حرکت کند، می‌توان نوشت:



$$F_e = m(g + a) \Rightarrow kx = m(g + a)$$

m : جرم وزنه آویخته به فنر (kg)

g : شتاب گرانش در سطح زمین (m/s^2)

a : شتاب حرکت آسانسور (m/s^2)

اگر شتاب آسانسور رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر رو به پایین باشد، $a < 0$ است.

رابطه نیروی کشسانی فنر را برای وزنه متصل به فنر قائم و آویخته به سقف آسانسور، می‌نویسیم و از آنجا طول فنر را به دست می‌آوریم:

$$kx = m(g + a) \xrightarrow{k=400 \text{ N/m}, m=2 \text{ kg}} 400x = 2(10 + 2)$$

$$\Rightarrow x = \Delta L = \frac{24}{400} = 0.06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$$

$$\Delta L = L_2 - L_1 \Rightarrow 6 = L_2 - 30 \Rightarrow L_2 = 36 \text{ cm}$$

اگر علامت شتاب را منفی در نظر بگیرید، در دام گزینه‌های (۲) یا (۳) می‌افتید.

پاسخ خیلی تشریحی

گول نخوری

معادلهٔ تکانه - زمان جسمی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $p = 2t^2 - 8t + 3$ است. نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازهٔ زمانی $t_1 = 3$ s تا $t_2 = 5$ s بر حسب نیوتون کدام است؟

- (۱) $2\vec{i}$
(۲) $-2\vec{i}$
(۳) $8\vec{i}$
(۴) $-8\vec{i}$

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤالات کنکور خارج از کشور تجربی ۱۴۰۲ و همچنین کنکور ریاضی ۱۴۰۲ نوبت دوم است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

ابتدا تکانهٔ جسم را در لحظه‌های $t_1 = 3$ s و $t_2 = 5$ s به دست آورید، سپس نیروی متوسط وارد بر جسم را به کمک رابطهٔ $\vec{F}_{av} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ محاسبه کنید.

درس‌Box

تکانه: حاصل ضرب جرم جسم در سرعت آن را تکانه می‌گوییم. با توجه به قانون دوم نیوتون، رابطهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر یک جسم بر حسب تکانه، به صورت زیر است:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1}$$

F_{av} : نیروی خالص متوسط وارد بر جسم (N)

Δp : تغییر تکانه $(\frac{kg \cdot m}{s})$

Δt : بازهٔ زمانی (s)

p_1 : تکانهٔ جسم در لحظهٔ t_1 $(\frac{kg \cdot m}{s})$

p_2 : تکانهٔ جسم در لحظهٔ t_2 $(\frac{kg \cdot m}{s})$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با جای‌گذاری زمان‌های داده‌شدهٔ t_1 و t_2 در معادلهٔ تکانه - زمان، تکانهٔ جسم را در این دو لحظه به دست می‌آوریم:

$$p = 2t^2 - 8t + 3 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \text{ s} \Rightarrow p_1 = 2 \times 9 - 24 + 3 = -3 \frac{kg \cdot m}{s} \\ t_2 = 5 \text{ s} \Rightarrow p_2 = 2 \times 25 - 40 + 3 = 13 \frac{kg \cdot m}{s} \end{cases}$$

گام دوم: نیروی خالص متوسط وارد بر جسم را محاسبه می‌کنیم.

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = \frac{13 - (-3)}{5 - 3} = 8 \text{ N}$$

از آن‌جا که این نیرو با علامت مثبت به دست آمده است، پس در جهت مثبت محور x اثر می‌کند:

$$\vec{F}_{av} = (8 \text{ N})\vec{i}$$

معادلهٔ تکانهٔ متحرکی به جرم 500 گرم که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $\vec{P} = (3t - 6)\vec{i}$ است. نیروی خالص متوسطی که در بازهٔ زمانی $t_1 = 1$ s تا $t_2 = 3$ s بر این متحرک وارد می‌شود، بر حسب نیوتون، کدام است؟

(سؤال ۵۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت دوم)

- (۱) $3\vec{i}$
(۲) $-3\vec{i}$
(۳) $6\vec{i}$
(۴) $-6\vec{i}$

دو ماهواره A و B روی مدارهای دایره‌ای شکلی به دور زمین می‌چرخند. اگر فاصله ماهواره A از سطح زمین ۸ برابر فاصله ماهواره B از سطح زمین و دوره ماهواره A، ۸ برابر دوره ماهواره B باشد، فاصله ماهواره A از سطح زمین چند مگامتر است؟ (شعاع کره زمین ۶۴۰۰ km است.)

(۱) $3/84$

(۲) $4/8$

(۳) $38/4$

(۴) 48

مشاوره معمولاً در سؤالاتی که مربوط به حرکت ماهواره به دور زمین است باید به این نکته توجه کنید که فاصله ماهواره از مرکز زمین (r) با فاصله ماهواره از سطح زمین (h) متفاوت است.

پاسخ: گزینه ۳

رابطه دوره حرکت ماهواره:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_e}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_e} \times r^3$$

$$r = R_e + h$$

T : دوره (s)

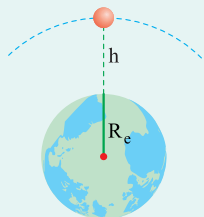
r : فاصله ماهواره از مرکز زمین (m)

G : ثابت جهانی گرانش ($\frac{N \cdot m^2}{kg^2}$)

M_e : جرم کره زمین (kg)

R_e : شعاع کره زمین (m)

h : فاصله ماهواره از سطح زمین (m)



با توجه به رابطه مطرح شده در درس باکس، مربع دوره حرکت ماهواره با توان سوم فاصله آن از مرکز زمین متناسب است:

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 \xrightarrow{T_A = 8T_B, r = R_e + h} 8^2 = \left(\frac{R_e + h_A}{R_e + h_B}\right)^3$$

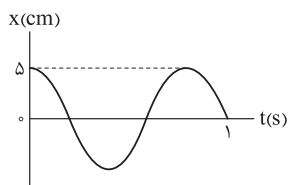
$$\Rightarrow \frac{R_e + h_A}{R_e + h_B} = 4 \xrightarrow{h_A = 8h_B} \frac{R_e + 8h_B}{R_e + h_B} = 4 \Rightarrow R_e + 8h_B = 4R_e + 4h_B$$

$$\Rightarrow 4h_B = 3R_e \xrightarrow{R_e = 6400 \text{ km}} h_B = \frac{3}{4} \times 6400 = 4800 \text{ km}$$

$$\Rightarrow h_A = 8h_B = 8 \times 4800 = 38400 \text{ km} = 38400 \text{ km} \times \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ Mm}}{10^6 \text{ m}} = 38.4 \text{ Mm}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار مکان - زمان نوسانگری که در راستای محور x حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد، به شکل زیر است. سرعت متحرک در لحظه $t = 0/2$ s بر حسب متر بر ثانیه کدام است؟



(۱) $\frac{\pi}{8} \vec{i}$

(۲) $-\frac{\pi}{8} \vec{i}$

(۳) $\frac{\pi}{16} \vec{i}$

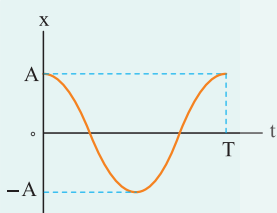
(۴) $-\frac{\pi}{16} \vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دوره تناوب نوسانگر (T) را تعیین کنید، سپس بسامد زاویه ای (ω) را به دست آورید و در نهایت، با مشخص کردن مکان متحرک در لحظه $t = 0/2$ s، سرعت آن را حساب کنید.

Hint

درس Box



(۱) نمودار مکان - زمان در حرکت هماهنگ ساده:

(۲) رابطه بیشینه تندی نوسانگر:

$$v_{\max} = A\omega$$

$v_{\max}$: بیشینه تندی نوسانگر (m/s)

A: دامنه (m)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ω : بسامد زاویه ای (rad/s)

T: دوره (s)

(۳) در لحظه ای که نوسانگر از حالت تعادل ($x = 0$) می گذرد، بیشینه تندی خود را دارد. اگر جهت حرکت آن در سوی مثبت محور x باشد، سرعت آن مثبت است و اگر جهت حرکت آن در سوی منفی محور x باشد، سرعت آن منفی است. با توجه به شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان نیز می توان علامت سرعت نوسانگر را تعیین نمود.

گام اول: با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، دوره تناوب نوسان را به دست می آوریم:

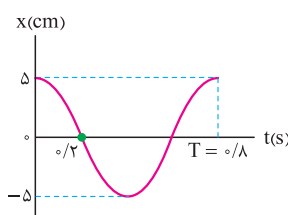
$$\frac{5}{4}T = 1 \Rightarrow T = 0/8 \text{ s}$$

سپس بسامد زاویه ای نوسانگر را حساب می کنیم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0/8} = \frac{2\pi}{0/4} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad/s}$$

گام دوم: مکان متحرک را در لحظه $t = 0/2$ s تعیین می کنیم:

$$t = 0/2 \text{ s} = \frac{T}{4} \Rightarrow x = 0$$



تندی نوسانگر در این لحظه بیشینه است:

$$v_{\max} = A\omega \xrightarrow[A = 5 \text{ cm} = 0/05 \text{ m}]{\omega = \frac{5\pi}{2} \text{ rad/s}} v_{\max} = \frac{5}{100} \times \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{8} \text{ m/s}$$

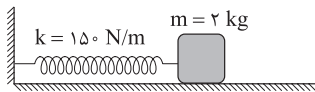
در لحظه $t = 0/2$ s حرکت نوسانگر در جهت منفی است، بنابراین سرعت آن نیز منفی است:

$$\vec{v} = -v_{\max} = -\left(\frac{\pi}{8} \text{ m/s}\right)\vec{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، جسم متصل به فنر روی سطح افقی بدون اصطکاک با دامنه ۱۰ cm نوسان می‌کند. در لحظه‌ای که تندی جسم برابر ۵ m/s است، انرژی پتانسیل سامانه برابر چند ژول است؟

۵۰



(۱) ۰/۲۵

(۲) ۰/۵

(۳) ۰/۷۵

(۴) ۱

مشاوره در مبحث نوسان، یکی از مطالبی که تعداد زیادی سؤال در مورد آن در کنکورهای اخیر دیده می‌شود، همین موضوع انرژی است. نمونه آن در کنکور تجربی ۱۴۰۴ نوبت دوم است.

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا انرژی کل نوسانگر را حساب کنید؛ سپس انرژی مکانیکی آن را به دست آورید و در پایان، انرژی پتانسیل نوسانگر را پیدا کنید.

Hint

درس: Box

انرژی در حرکت هماهنگ ساده: انرژی کل (مکانیکی) یک نوسانگر، مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل آن است:

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

E: انرژی کل (مکانیکی) (J)

K: انرژی جنبشی (J)

U: انرژی پتانسیل (J)

m: جرم نوسانگر (kg)

v: تندی نوسانگر (m/s)

k: ثابت فنر (N/m)

A: دامنه (m)

هنگام نوسان، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل به یکدیگر تبدیل می‌شوند، ولی مجموع آن‌ها مستقل از زمان بوده و مقداری ثابت است.

گام اول: انرژی مکانیکی نوسانگر را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \xrightarrow{A=10 \text{ cm}=0.1 \text{ m}} E = \frac{1}{2} \times 150 \times (0.1)^2 = 0.75 \text{ J}$$

گام دوم: انرژی جنبشی نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \xrightarrow{v=5 \text{ m/s}} K = \frac{1}{2} \times 2 \times (5)^2 = 0.25 \text{ J}$$

گام سوم: انرژی پتانسیل نوسانگر را محاسبه می‌کنیم:

$$E = K + U \Rightarrow 0.75 = 0.25 + U \Rightarrow U = 0.5 \text{ J}$$

جسمی به جرم ۲ kg به فنری با ثابت ۲ N/cm متصل است و در راستای افقی با دامنه ۸ cm نوسان می‌کند. وقتی تندی جسم ۴۰ cm/s است، انرژی پتانسیل کشسانی آن چند ژول است؟ (از نیروهای اتلافی چشم‌پوشی شود.)

(سؤال ۵۸ کنکور تجربی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

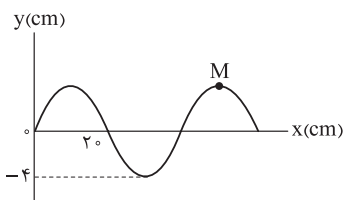
(۲) ۰/۳۲

(۴) ۰/۶۴

(۱) ۰/۴۸

(۳) ۰/۱۶

تصویر موج منتشرشده در تار کشیده‌ای در یک لحظه، به شکل زیر است. اگر تندی انتشار موج در تار برابر 80 m/s باشد، مسافت طی شده توسط ذره M از تار، در هر ثانیه برابر چند متر است؟



۸ (۱)

۱۶ (۲)

۳۲ (۳)

۶۴ (۴)

مشاوره این سؤال مشابه یکی از سؤالات کنکور تجربی ۱۴۰۳ نوبت دوم است.

پاسخ: گزینه ۳

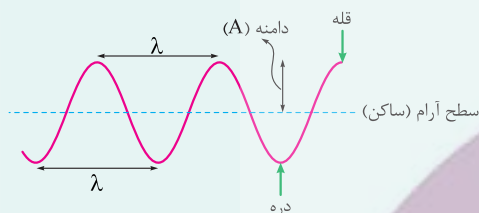
ابتدا به کمک نمودار داده‌شده، طول موج را به دست آورید، سپس بسامد موج را با استفاده از رابطه $f = \frac{v}{\lambda}$ ، پیدا کنید و در نهایت، مسافت طی شده توسط ذره M را در هر ثانیه حساب کنید.

Hint

درس Box

طول موج (λ): فاصله بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگی مجاور، طول موج نامیده می‌شود.

در یک نوسان کامل، هر نقطه از محیط، در جای خود یک نوسان کامل انجام می‌دهد و مسافتی به اندازه ۴ برابر دامنه ($4A$) را می‌پیماید.



رابطه بسامد بر حسب طول موج:

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

f : بسامد (Hz)

v : تندی انتشار موج (m/s)

λ : طول موج (m)

گام اول: با استفاده از نمودار داده‌شده، طول موج را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$\frac{\lambda}{20} = 20 \Rightarrow \lambda = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$$

گام دوم: با توجه به معلوم‌بودن تندی انتشار موج و طول موج آن، بسامد موج را حساب می‌کنیم:

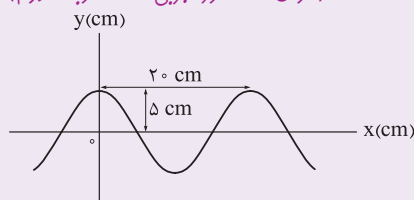
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{80}{0.4} = 200 \text{ Hz}$$

گام سوم: در هر نوسان کامل، ذره M از تار، مسافتی به اندازه ۴ برابر دامنه را می‌پیماید. با توجه به نمودار داده‌شده، دامنه برابر با ۴ cm است و در هر ثانیه ۲۰۰ نوسان انجام می‌شود، بنابراین مسافت طی شده در هر ثانیه (ℓ) برابر است با:

$$\ell = f(4A) \xrightarrow[A=4 \text{ cm}=0.04 \text{ m}]{f=200 \text{ Hz}} \ell = 200 \times 4 \times 0.04 = 32 \text{ m}$$

نمودار جابه‌جایی - مکان یک موج عرضی که در یک ریسمان در حال انتشار است، مطابق شکل است. اگر تندی انتشار موج 10 m/s باشد، مسافتی که هر یک از ذرات ریسمان در مدت 0.1 s طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟

(سؤال ۵۳ کنکور تجربی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)



۲۰ (۱)

۱۵ (۲)

۱۰ (۳)

۵ (۴)

اگر با کاهش دامنهٔ چشمهٔ صوتی، در یک فاصلهٔ معین از چشمه شدت صوت ۸۰ درصد کاهش یابد، تراز شدت آن چند دسی بل تغییر می‌کند؟ ($\log 2 = 0.3$)

۵۲

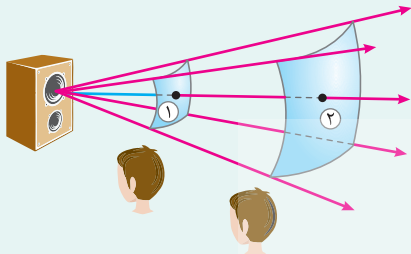
مشاوره برای حل چنین سؤال‌هایی، باید با محاسبات لگاریتمی آشنایی داشته باشید.

- (۲) ۱
(۴) ۰/۱

- (۱) ۷
(۳) ۰/۷

پاسخ: گزینهٔ ۱

(۱) شدت صوت I :



شدت صوت، آهنگ متوسط انرژی‌ای است که توسط موج به واحد سطح، عمود بر راستای انتشار صوت می‌رسد یا از آن عبور می‌کند.
(۲) اختلاف تراز شدت صوت، در دو حالت مختلف، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

I_1 : شدت صوت در حالت اول (W/m^2)

I_2 : شدت صوت در حالت دوم (W/m^2)

β_1 : تراز شدت صوت در حالت اول (dB)

β_2 : تراز شدت صوت در حالت دوم (dB)

رابطهٔ اختلاف تراز شدت صوت در دو حالت مختلف را می‌نویسیم:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \xrightarrow{I_2 = I_1 - 0.8 I_1 = 0.2 I_1} \beta_2 - \beta_1 = 10 \log \left(\frac{0.2 I_1}{I_1} \right) = 10 \log \left(\frac{2}{10} \right)$$

$$\Rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10 (\log 2 - \log 10) = 10 (0.3 - 1) = -7 \text{ dB}$$

اگر دقت نکنید و ضرب ۱۰ را پشت لگاریتم نگذارید، در دام گزینهٔ (۳) می‌افتید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گول نخوری ✗

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

بسامد امواج فراصوتی‌ای که وال برای مکان‌یابی پژواکی تولید می‌کند، 100 kHz و طول موج آن در آب $1/5 \text{ cm}$ است. زمان رفت و برگشت موج گسیل‌شده توسط وال برای مانعی که در فاصله 75 m از آن قرار گرفته، برابر چند ثانیه است؟

(۲) $0/1$

(۱) $0/05$

(۴) 1

(۳) $0/5$

مشاوره این سؤال، برگرفته از مثال ۱-۴ کتاب درسی فیزیک (۳) رشته ریاضی، یا مثال ۱-۳ کتاب درسی فیزیک (۳) رشته تجربی است. مثال‌های کتاب درسی را نیز جدی بگیرید.

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا تندی انتشار امواج فراصوت در آب را به دست آورید، سپس با معلوم‌بودن مسافت و تندی انتشار موج، زمان رفت و برگشت موج را حساب کنید.

Hint

درس‌Box

برای موجی که با تندی ثابت در محیطی معین در حال انتشار است، داریم:

$v = \frac{\ell}{\Delta t}$

v : تندی انتشار (m/s)

ℓ : مسافت (m)

Δt : بازه زمانی (s)

گام اول: با معلوم‌بودن طول موج و بسامد امواج فراصوتی، تندی انتشار این امواج در آب را به دست می‌آوریم:

$$v = \lambda f \quad \frac{\lambda = 1/5 \text{ cm} = 1/5 \times 10^{-2} \text{ m}}{f = 100 \text{ kHz} = 100 \times 10^3 \text{ Hz}} \rightarrow v = 1/5 \times 10^{-2} \times 100 \times 10^3 = 1500 \text{ m/s}$$

گام دوم: زمان رفت و برگشت موج (Δt) را محاسبه می‌کنیم:



$$\Delta t = \frac{\ell}{v} \quad \frac{\ell = 2 \times 75 = 150 \text{ m}}{v = 1500 \text{ m/s}} \rightarrow \Delta t = \frac{150}{1500} = 0/1 \text{ s}$$

اگر فقط مسیر رفت را در محاسبات خود در نظر بگیرید، در دام گزینه (۱) می‌افتید.

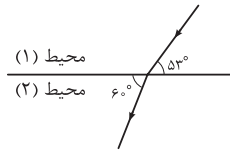
گول‌نخوری

وال عنبر، یکی از جانورانی است که با استفاده از پژواک امواج فراصوتی، مکان‌یابی می‌کند. بسامد امواج فراصوتی‌ای که این وال تولید می‌کند حدود 100 kHz است. با توجه به این که تندی صوت در آب دریا، حدود $1/52 \times 10^3 \text{ m/s}$ است، الف) طول موج این صوت و ب) زمان رفت و برگشت صوت گسیل‌شده توسط وال برای مانعی که در فاصله 100 m از آن قرار گرفته، چه قدر است؟ (فیزیک (۳) - مثال ۱-۴ صفحه ۹۳ کتاب درسی)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

در شکل زیر، پرتو نوری از محیط شفاف (۱) وارد محیط شفاف (۲) شده است. اگر اختلاف تندی نور در این دو محیط برابر $4/5 \times 10^8 \text{ m/s}$ باشد، تندی نور در محیط (۱) برابر چند متر بر ثانیه است؟ ($\sin 53^\circ = 4/5$)

۵۴



(۱) $2/7 \times 10^8$

(۲) $1/2 \times 10^8$

(۳) $2/25 \times 10^8$

(۴) $7/5 \times 10^8$

پاسخ: گزینه ۱

درس: Box

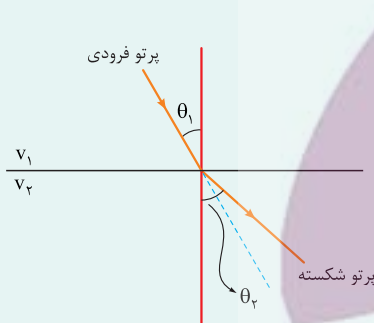
زاویه تابش: هنگام شکست موج، زاویه پرتو فرودی با خط عمود بر مرز جدایی دو محیط را با θ_1 نشان می‌دهیم و آن را زاویه تابش می‌نامیم.

زاویه شکست: هنگام شکست موج، زاویه پرتو شکسته با خط عمود بر مرز جدایی دو محیط را با θ_2 نشان می‌دهیم و آن را زاویه شکست می‌نامیم.

قانون شکست عمومی: اگر تندی انتشار موج فرودی را v_1 و تندی انتشار موج شکست‌یافته را v_2 بنامیم، بین تندی‌های v_1 و v_2 و زاویه‌های θ_1 و θ_2 رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

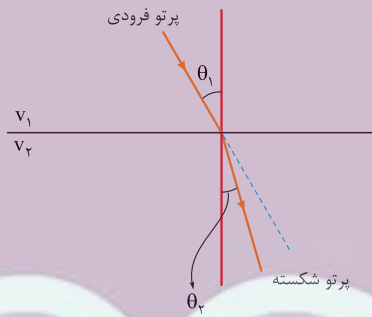
نمودار پرتویی در شکست:



شکل (۲)

$v_2 > v_1$

$\theta_2 > \theta_1$



شکل (۱)

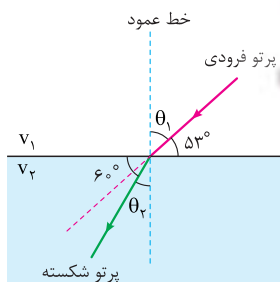
$v_2 < v_1$

$\theta_2 < \theta_1$

این قانون، هم در مورد موج‌های مکانیکی مانند صوت و هم در مورد موج‌های الکترومغناطیس مانند نور مرئی، صادق است.

گام اول: زاویه‌های تابش و شکست را روی شکل مشخص می‌کنیم و نسبت تندی انتشار دو محیط را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$\theta_1 = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$

$\theta_2 = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$

$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\sin 37^\circ}{\sin 53^\circ} = \frac{4/5}{3/4} = \frac{16}{15}$

گام دوم: با توجه به نسبت به دست آمده در گام اول، معلوم می‌شود که $v_2 < v_1$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$v_1 - v_2 = 4/5 \times 10^8 \text{ m/s}$

گام سوم: با ترکیب روابط به دست آمده در گام‌های اول و دوم، تندی انتشار موج در محیط اول را حساب می‌کنیم:

$$v_1 - v_2 = 4/5 \times 10^7 \xrightarrow{v_2 = \frac{5}{6} v_1} v_1 - \frac{5}{6} v_1 = 4/5 \times 10^7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} v_1 = 4/5 \times 10^7 \Rightarrow v_1 = 27 \times 10^7 = 2/7 \times 10^8 \text{ m/s}$$



در طیف اتمی هیدروژن، بلندترین طول موج گسیلی در ناحیه فرابنفش، چند برابر بلندترین طول موج گسیلی در

۵۵

ناحیه نور مرئی است؟

$$\frac{81}{49} \quad (2)$$

$$\frac{49}{81} \quad (1)$$

$$\frac{5}{27} \quad (4)$$

$$\frac{27}{5} \quad (3)$$

مشاوره معادله ریذبرگ از مهم‌ترین مطالب فیزیک اتمی است که در کنکورهای اخیر، بارها از آن سؤالات متنوعی طرح شده است. این معادله را به خوبی و بادقت یاد بگیرید.

پاسخ: گزینه ۱

در معادله ریذبرگ و در طیف بالمر $(n' = 2)$ ، اگر n را برابر با ۷ قرار دهید، بلندترین طول موج گسیلی در ناحیه فرابنفش و اگر n را برابر با ۳ قرار دهید، بلندترین طول موج گسیلی در ناحیه نور مرئی به دست می‌آید، سپس نسبت آن‌ها را پیدا کنید.

Hint

درس Box

طول موج خط‌های طیف اتمی هیدروژن از معادله ریذبرگ به دست می‌آیند:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$R: \text{ثابت ریذبرگ} = 1.097 \times 10^7 \text{ (nm)}^{-1}$$

λ : طول موج (nm)

n' : شماره مدار کوچک‌تر

n : شماره مدار بزرگ‌تر

نام طیف	مقدار n'	مقدارهای n	ناحیه طیف
لیمان	۱	۲, ۳, ۴, ...	فرابنفش
بالمر	۲	۳, ۴, ۵, ...	فرابنفش و مرئی
پاشن	۳	۴, ۵, ۶, ...	فروسرخ
براکت	۴	۵, ۶, ۷, ...	فروسرخ
پفوند	۵	۶, ۷, ۸, ...	فروسرخ

بلندترین طول موج هر رشته، مربوط به کم‌ترین انرژی مبادله‌شده بین دو مدار است:

$$E_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}}$$

در طیف بالمر $(n' = 2)$ ، $n = 3$ تا $n = 6$ مربوط به نور مرئی است، اما از $n = 7$ تا $n = \infty$ مربوط به فرابنفش است.

گام اول: در ناحیه نور مرئی، بلندترین طول موج گسیلی (λ_1) مربوط به گذار بین $n' = 2$ و $n = 3$ است:

$$\frac{1}{\lambda_1} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = \frac{5R}{36} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{36}{5R}$$

گام دوم: در ناحیه فرابنفش، بلندترین طول موج گسیلی (λ_2) مربوط به گذار بین $n' = 2$ و $n = 7$ است:

$$\frac{1}{\lambda_2} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{7^2} \right) = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{49} \right) = \frac{45R}{196} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{196}{45R}$$

گام سوم: نسبت $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\frac{196}{45R}}{\frac{36}{5R}} = \frac{196 \times 5R}{45R \times 36} = \frac{49}{81}$$

با توجه به این که طیف نور مرئی، حدوداً بین ۴۰۰ nm (بنفش) تا ۷۰۰ nm (قرمز) قرار دارد، بلندترین طول موج ناحیه فرابنفش، کم‌ترین طول موج نور مرئی یعنی حدود ۴۰۰ nm است. بیشترین طول موج ناحیه مرئی نیز که ۷۰۰ nm است، بنابراین داریم:

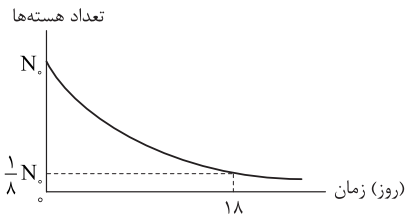
$$\frac{400}{700} \approx 0.57$$

که به گزینه (۱) بسیار نزدیک است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

تیزبازی

نمودار تعداد هسته‌های فعال یک ماده پرتوزا بر حسب زمان به شکل زیر است. چند درصد از هسته‌های یک نمونه از این ماده، پس از ۳۰ روز دچار واپاشی می‌شوند؟



(۱) $3/125$

(۲) $6/25$

(۳) $93/75$

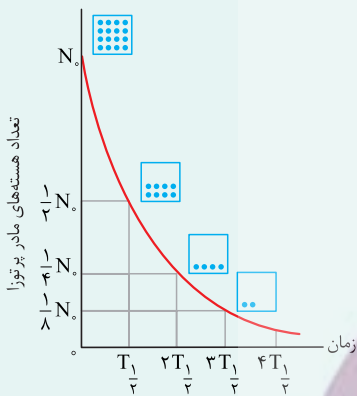
(۴) $96/875$

مشاوره این سؤال مشابه یکی از سؤالات کنکور تجربی ۱۴۰۳ نوبت دوم و کنکور ریاضی ۱۴۰۱ نوبت دوم، طرح شده است. کلاً مبحث نیم‌عمر مواد پرتوزا، از مطالب مهم و پرسؤال در کنکور و امتحان نهایی است.

پاسخ: گزینه ۴

درس: Box

نیم‌عمر: ایزوتوپ‌های پرتوزا با گذشت زمان واپاشیده می‌شوند. در نتیجه تعداد هسته‌های مادر (هسته‌های اولیه) آن‌ها کاهش می‌یابد و به صفر میل می‌کند. بنا به تعریف، نیم‌عمر، مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا تعداد هسته‌های مادر (اولیه) موجود در یک نمونه، به نصف برسند و آن را با نماد $T_{1/2}$ نشان می‌دهیم.



$$N = \frac{N_0}{2^n}, \quad n = \frac{t}{T_{1/2}}$$

N_0 : تعداد هسته‌های اولیه در یک نمونه پرتوزا

N : تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده

$N_0 - N$: تعداد هسته‌های واپاشیده‌شده

n : تعداد تکرار نیم‌عمر

t : کل زمان واپاشی

گام اول: با استفاده از اطلاعات داده‌شده در نمودار، نیم‌عمر این ماده پرتوزا را به دست می‌آوریم:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{8} N_0 = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = 3$$

$$n = \frac{t}{T_{1/2}} \Rightarrow 3 = \frac{18}{T_{1/2}} \Rightarrow T_{1/2} = 6 \text{ روز}$$

گام دوم: تعداد مراحل واپاشی (n') و تعداد هسته‌های باقی‌مانده (N') را پس از گذشت ۳۰ روز محاسبه می‌کنیم:

$$n' = \frac{t'}{T_{1/2}} \xrightarrow{\text{روز } t'=30 \rightarrow \text{روز } T_{1/2}=6} n' = \frac{30}{6} = 5$$

$$N' = \frac{N_0}{2^{n'}} \xrightarrow{n'=5} N' = \frac{N_0}{2^5} = \frac{1}{32} N_0 = 0.03125 N_0$$

بنابراین پس از گذشت ۳۰ روز، ۳/۱۲۵ درصد هسته‌های این ماده پرتوزا باقی‌مانده و درصد هسته‌های واپاشی‌شده آن برابر است با:

$$100 - 3/125 = 96/875$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یہ جو ریگہ

با توجه به اطلاعات موجود در نمودار، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{روز } t = 18 \\ n = 3 \end{array} \right.$$

$$N_0 \xrightarrow{\text{روز } 6} \frac{1}{2} N_0 \xrightarrow{\text{روز } 6} \frac{1}{4} N_0 \xrightarrow{\text{روز } 6} \frac{1}{8} N_0$$

پس از گذشت ۳۰ روز می‌توان نوشت:

$$N_0 \xrightarrow{\text{دو}} \frac{1}{2} N_0 \xrightarrow{\text{دو}} \frac{1}{4} N_0 \xrightarrow{\text{دو}} \frac{1}{8} N_0 \xrightarrow{\text{دو}} \frac{1}{16} N_0 \xrightarrow{\text{دو}} \frac{1}{32} N_0 \quad \begin{cases} t' = 30 \text{ روز} \\ n' = 5 \end{cases}$$

اگر تعداد هسته‌های فعال اولیه را 100 فرض کنیم، پس از 30 روز داریم:

$100 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 12/5 \rightarrow 6/25 \rightarrow (3/125)$
 درصد هسته‌های اولیه درصد هسته‌های باقی‌مانده

درصد هسته های واپاشی شده $۱۰۰ - ۳ / ۱۲۵ = ۹۶\% / ۸۷۵$



کدام یک از موارد زیر درست است؟ ۵۷

الف) در واپاشی β^+ ، یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود و سپس این پوزیترون از هسته گسیل می‌شود.

ب) الکترون گسیل‌شده در واپاشی β^- ، در هسته مادر وجود ندارد و یکی از الکترون‌های مداری اتم است.

پ) در تمام فرایندهای واپاشی پرتوزا، تعداد نوکلئون‌های هسته مادر با تعداد نوکلئون‌های هسته دختر برابر است.

ت) اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل پرتو گاما به حالت پایه می‌رسند.

۱) پ - ت

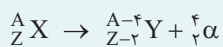
۲) الف - پ

۳) الف - ب

۴) الف - ت

پاسخ: گزینه ۴

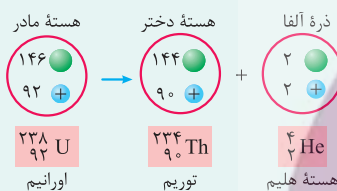
واپاشی آلفا (α): در این نوع واپاشی، هسته سنگین ${}_Z^AX$ با گسیل ذره آلفا وامی‌باشد. پرتوهای آلفا، ذرات باردار مثبت از جنس هسته اتم هلیوم هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند (${}_2^4\alpha = {}_2^4\text{He}$). واپاشی آلفا، با رابطه زیر بیان می‌شود:



عدد نوترونی $\rightarrow A = Z + N \leftarrow$ عدد جرمی
 عدد اتمی

در این رابطه، X هسته مادر و Y هسته دختر نامیده می‌شوند.

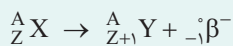
مثال واپاشی آلفا برای اورانیم ۲۳۸ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



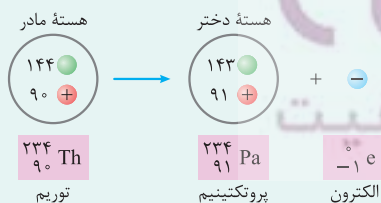
واپاشی بتا (β): این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست و ذرات گسیل‌شده در آن را ذرات بتا می‌نامند.

الف) واپاشی بتا، همراه با گسیل الکترون (${}_{-1}^0\beta^-$ یا ${}_{-1}^0e^-$):

الکترون گسیل‌شده در این واپاشی، در هسته مادر وجود ندارد و همچنین یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست؛ این الکترون وقتی به وجود می‌آید که نوترونی درون هسته، به پروتون و الکترون تبدیل شود. فرایند این واپاشی را با رابطه زیر بیان می‌کنند:

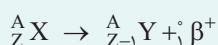


مثال واپاشی ${}_{-1}^0\beta^-$ برای توریم ۲۳۴ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



ب) واپاشی بتا، همراه با گسیل پوزیترون (${}_{+1}^0\beta^+$ یا ${}_{+1}^0e^+$):

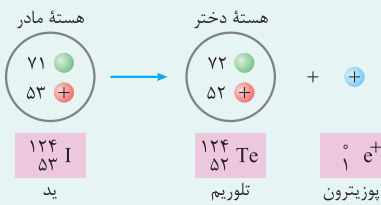
در این نوع واپاشی بتا، ذره گسیل‌شده توسط هسته، جرم یکسان با الکترون دارد؛ ولی به جای بار منفی، حامل بار مثبت است. به این الکترون مثبت، پوزیترون می‌گویند. در واقع آن‌چه در این واپاشی رخ می‌دهد، این است که یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود؛ سپس این پوزیترون از هسته گسیل می‌شود. فرایند این واپاشی، با رابطه زیر بیان می‌شود:



مشاوره این سؤال مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی ۱۴۰۰ است. واپاشی هسته‌ها نیز از مطالب بسیار مهم در فصل آخر کتاب فیزیک (۳) است که در کنکورهای سال‌های اخیر، بارها سؤالات متنوعی از آن طرح شده است.

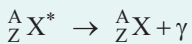
درس‌Box

مثال واپاشی β^+ برای ید ۱۲۴ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:

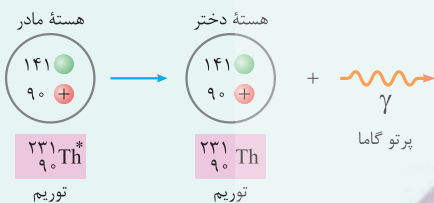


واپاشی گاما (γ):

اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل فوتون‌های پرنرژی (پرتو گاما) به حالت پایه می‌رسند. در این فرایند، Z و A تغییر نمی‌کنند، بلکه هسته برانگیخته که با علامت * مشخص شده است، با گسیل پرتو گاما به حالت پایه می‌رسد. واپاشی γ با رابطه زیر بیان می‌شود:



مثال واپاشی γ برای توریم ۲۳۱ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

موارد مطرح‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

- (الف) درست است. مطابق درس‌بکس، در واپاشی β^+ ، از تعداد پروتون‌ها یکی کاسته شده و به تعداد نوترون‌ها یکی افزوده می‌شود، در نتیجه عدد جرمی ثابت می‌ماند:
- $$A = \downarrow Z + N \uparrow$$
- (ب) نادرست است. الکترون گسیل‌شده در واپاشی β^- از تبدیل یک نوترون درون هسته به الکترون و پروتون حاصل شده است.
- (پ) نادرست است. در واپاشی آلفا، تعداد نوکلئون‌های هسته مادر با تعداد نوکلئون‌های هسته دختر، برابر نیست.
- (ت) درست است (مطابق قسمت آخر درس‌بکس).

کدام موارد درست است؟

(سوال ۱۵۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)

- (الف) در واپاشی β^- ، الکترون گسیل‌شده در هسته مادر وجود ندارد و همچنین یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست.
- (ب) در واپاشی β^+ ، ذره گسیل‌شده توسط هسته، جرم یکسان با الکترون دارد.
- (پ) اغلب هسته‌ها پس از واپاشی بتا، در حالت پایدار قرار می‌گیرند.
- (ت) در واپاشی β^+ ، یکی از نوترون‌های درون هسته به یک پروتون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود.

(۲) الف و پ
(۴) ب و پ

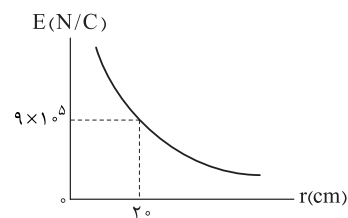
(۱) الف و پ
(۳) ب و ت

نمودار اندازه میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای q بر حسب فاصله از آن به شکل زیر است. اگر بار

۵۸

الکتریکی نقطه‌ای $q' = 5 \mu C$ در فاصله 30 cm از بار q قرار گیرد، اندازه نیروی الکتریکی که این دو بار به هم وارد

می‌کنند، چند نیوتون است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ / ۵ (۳)

۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا اندازه بار الکتریکی q را به دست آورید، سپس به کمک قانون کولن نیروی الکتریکی بین q و q' را پیدا کنید.

Hint

درس Box

۱) قانون کولن: اندازه نیروی الکتریکی بین دو بار نقطه‌ای که در راستای خط مستقیم بین آن‌ها اثر می‌کند، با حاصل ضرب بزرگی آن‌ها متناسب است و با مربع فاصله بین آن‌ها نسبت وارون دارد:

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$$

F : بزرگی نیروی الکتریکی (N)

$$k: \text{ثابت کولن} = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$$

$|q_1|$ و $|q_2|$: اندازه بارهای الکتریکی (C)

r : فاصله بین دو بار (m)

هنگام عددگذاری در رابطه قانون کولن، اگر بارهای الکتریکی بر حسب میکروکولن و فاصله بر حسب سانتی‌متر نوشته شوند، ضریب

نکته

ثابت k را برابر با $9 \times 10^9 \frac{N.cm^2}{\mu C^2}$ در نظر می‌گیریم تا نیرو بر حسب نیوتون به دست آید.

نیروی الکتریکی بین بارهای همنام از نوع رانش و بین بارهای ناهمنام از نوع ربایش است.

نکته

۲) اندازه میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = k \frac{|q|}{r^2}$$

E : اندازه میدان الکتریکی (N/C)

r : فاصله بار q تا نقطه‌ای که میدان الکتریکی را در آن نقطه می‌خواهیم (m)

گام اول: با استفاده از اطلاعات داده‌شده در نمودار، اندازه بار الکتریکی q را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \quad \frac{E=9 \times 10^5 \text{ N/C}, k=9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}}{r=30 \text{ cm}=0.3 \text{ m}} \rightarrow 9 \times 10^5 = 9 \times 10^9 \times \frac{|q|}{(0.3)^2}$$

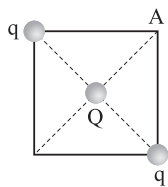
$$\Rightarrow |q| = 0.04 \times 10^{-4} \text{ C} = 4 \times 10^{-6} \text{ C} = 4 \mu C$$

گام دوم: به کمک رابطه قانون کولن، اندازه نیروی الکتریکی بین بارهای q و q' را پیدا می‌کنیم. برای این کار، از نکته مطرح‌شده

در درس باکس استفاده می‌کنیم:

$$F = k \frac{|q| |q'|}{r^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{4 \times 5}{30^2} = 2 \text{ N}$$

در شکل زیر که دو بار الکتریکی نقطه‌ای q روی دو رأس مربع و بار الکتریکی نقطه‌ای Q در مرکز مربع قرار دارد، میدان الکتریکی خالص در نقطه A برابر $\vec{E}_1$ است. اگر با حذف بار Q ، میدان الکتریکی خالص در نقطه A برابر $\vec{E}_2 = -2\vec{E}_1$ شود، $\frac{Q}{q}$ برابر کدام است؟



$$\frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{-3\sqrt{2}}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{-3\sqrt{2}}{2} \quad (۳)$$

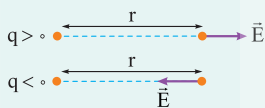
پاسخ: گزینه ۴

Hint

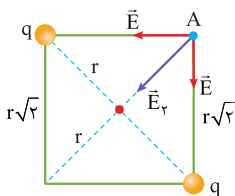
بار q را با علامت دلخواه (مثبت یا منفی) در نظر بگیرید و اندازه میدان الکتریکی آن در رأس A را E فرض کنید، سپس با توجه به اطلاعات سؤال، علامت بار Q و اندازه میدان الکتریکی آن در نقطه A را تعیین کرده و در انتها نسبت $\frac{Q}{q}$ را پیدا کنید.

درس‌Box

جهت میدان الکتریکی از بارهای مثبت رو به خارج و به طرف بارهای منفی است:



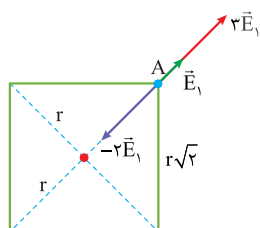
گام اول: ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که بار Q حذف شده است. بارهای q را منفی فرض می‌کنیم و اندازه میدان الکتریکی هر یک از آن‌ها را در نقطه A با E نشان می‌دهیم. بر این اساس، میدان الکتریکی خالص آن دو در نقطه A همان $\vec{E}_1$ است:



$$E = k \frac{|q|}{r^2}$$

$$E_1 = \sqrt{E^2 + E^2} = E\sqrt{2} \xrightarrow{E_2 = 2E_1} 2E_1 = E\sqrt{2} = \sqrt{2} \frac{k|q|}{r^2}$$

گام دوم: در صورتی که بار Q حضور داشته باشد، میدان الکتریکی خالص در نقطه A برابر $\vec{E}_1$ است و چون $\vec{E}_2 = -2\vec{E}_1$ است، پس میدان الکتریکی حاصل از بار Q در نقطه A برابر با $2E_1$ و جهت آن برخلاف $\vec{E}_1$ است:



$$2E_1 = k \frac{|Q|}{r^2}$$

گام سوم: نتایج به‌دست‌آمده از گام‌های اول و دوم را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2E_1}{2E_1} = \frac{k \frac{|Q|}{r^2}}{\sqrt{2} \frac{k|q|}{2r^2}} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{2|Q|}{\sqrt{2}|q|} \Rightarrow \frac{|Q|}{|q|} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) رد می‌شوند.

گام چهارم: در نقطه A جهت میدان الکتریکی حاصل از بار Q در خلاف جهت میدان الکتریکی خالص حاصل از دو بار q است، بنابراین بارهای Q و q ناهمنام هستند و داریم:

$$\frac{Q}{q} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

۶۰

خازنی به ظرفیت $5 \mu F$ توسط یک باتری 6 V باردار شده است. خازن را از باتری جدا کرده و سپس عایق بین صفحه‌های خازن را برمی‌داریم. اگر ثابت دی‌الکتریک این عایق برابر ۳ باشد، انرژی ذخیره‌شده در خازن چند میلی‌ژول و چگونه تغییر می‌کند؟

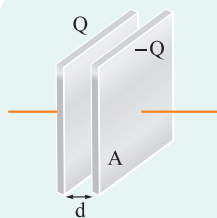
- (۱) 6 V ، کاهش می‌یابد.
- (۲) 6 V ، افزایش می‌یابد.
- (۳) 18 V ، کاهش می‌یابد.
- (۴) 18 V ، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا به کمک رابطه $Q = CV$ ، بار ذخیره‌شده در خازن را پیدا کنید، سپس با توجه به ثابت‌بودن این بار الکتریکی و با استفاده از رابطه $U = \frac{Q^2}{2C}$ ، تغییرات انرژی خازن را حساب کنید.

(۱) رابطه ظرفیت خازن براساس مشخصات ساختاری آن:



$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

C: ظرفیت خازن (F فاراد)

κ : ثابت دی‌الکتریک

ϵ_0 : ضریب گذردهی الکتریکی خلأ $= 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

A: مساحت متقابل صفحه‌ها (m^2)

d: فاصله جدایی صفحه‌ها (m)

• ظرفیت خازن تخت با ثابت دی‌الکتریک و مساحت سطح متقابل صفحه‌ها نسبت مستقیم دارد، ولی با فاصله دو صفحه از یکدیگر نسبت وارون دارد:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2}$$

• کم‌ترین κ برای هوا و خلأ بوده و برابر یک فرض می‌شود. برای سایر اجسام نارسانا، $\kappa > 1$ می‌باشد.

اگر خازن پر شده، از مولد جدا شود، بار الکتریکی (Q) آن ثابت می‌ماند.

$$Q = CV$$

(۲) رابطه بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن:

Q: بار الکتریکی (C)

V: اختلاف پتانسیل دو سر خازن (V)

(۳) یکی از شکل‌های رابطه محاسبه انرژی خازن به صورت زیر است:

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

U: انرژی (J)

(۴) هنگام عددگذاری در فرمول‌های انرژی، اختلاف پتانسیل همیشه برحسب ولت است، اما یکاهای انرژی و ظرفیت و بار الکتریکی، لازم نیست حتماً در SI باشند، بلکه کافی است پیشوند یکسانی داشته باشند. مثلاً هر سه می‌توانند با پیشوند میکرو باشند.

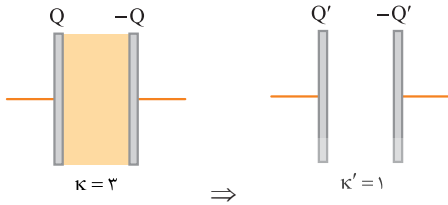
نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: بار الکتریکی ذخیره شده در خازن در حالت اول را پیدا می کنیم:

$$Q = CV = 5 \times 6 = 30 \mu C$$

از آن جا که در حالت دوم خازن را از باتری جدا کرده ایم، پس بار الکتریکی آن ثابت می ماند، یعنی بعد از خروج دی الکتریک داریم:

$$Q' = Q = 30 \mu C$$



گام دوم: ظرفیت خازن در حالت دوم را نیز به دست می آوریم:

$$\frac{C'}{C} = \frac{\kappa'}{\kappa} \times \frac{A'}{A} \times \frac{d}{d'} \xrightarrow[A'=A, C=5 \mu F, \kappa'=1]{d'=d, \kappa=3} \frac{C'}{5} = \frac{1}{3} \Rightarrow C' = \frac{5}{3} \mu F$$

گام سوم: تغییر انرژی خازن بین دو حالت را محاسبه می کنیم:

$$U' - U = \frac{Q'^2}{2C'} - \frac{Q^2}{2C} \xrightarrow[C'=\frac{5}{3} \mu F, C=5 \mu F]{Q'=Q=30 \mu C} U' - U = \frac{30^2}{2 \times \frac{5}{3}} - \frac{30^2}{2 \times 5}$$

$$\Rightarrow U' - U = \frac{2700}{10} - \frac{900}{10} = 180 \mu C = 0.18 mC$$

از آن جا که تغییر انرژی ذخیره شده در خازن، با علامت مثبت به دست آمده است، پس انرژی آن 0.18 mJ افزایش یافته است.

از همان ابتدا معلوم بود که با برداشتن عایق دی الکتریک، ظرفیت خازن کاهش یافته و با توجه به رابطه $U = \frac{Q^2}{2C}$ ، انرژی خازن افزایش می یابد، یعنی گزینه های (۱) و (۳) از همان ابتدا رد می شوند.

تئوری

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

اگر جرم سیم مسی A با جرم سیم مسی B برابر و قطر مقطع سیم A، ۲ برابر قطر مقطع سیم B باشد، مقاومت الکتریکی سیم A، چند برابر مقاومت الکتریکی سیم B است؟

۱/۱۶ (۴)

۱/۱۶ (۳)

۱/۴ (۲)

۴ (۱)

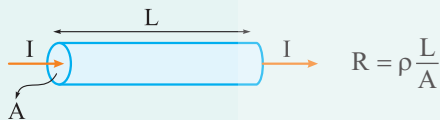
پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا رابطه‌ای فیزیکی برای مقاومت الکتریکی رسانا برحسب جرم، قطر و جنس رسانا به دست آورید، سپس از این رابطه، به صورت نسبیتی استفاده کنید.

درس Box

(۱) **مقاومت الکتریکی یک جسم در دمای ثابت:** مقاومت الکتریکی یک جسم در دمای ثابت، با طول و جنس آن نسبت مستقیم دارد، ولی با مساحت سطح مقطع آن، رابطه عکس دارد:



$$R = \rho \frac{L}{A}$$

R: مقاومت الکتریکی (Ω)

ρ : مقاومت ویژه ($\Omega \cdot m$)

L: طول جسم (m)

A: مساحت سطح مقطع (که در امتداد جسم ثابت فرض می‌شود). (m^2)

● اگر مقطع عبور جریان، دایره‌ای به قطر D باشد، داریم:

$$A = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$\rho' = \frac{m}{V}$$

(۲) یادآوری رابطه چگالی:

ρ' : چگالی (kg / m^3)

m: جرم (kg)

V: حجم (m^3)

گام اول: رابطه‌ای فیزیکی برای مقاومت الکتریکی رسانا، برحسب جرم، قطر و جنس آن به دست می‌آوریم. برای این کار، جرم رسانا را با V و چگالی آن را با ρ' نشان می‌دهیم:

$$R = \rho \frac{L}{A} \xrightarrow{L = \frac{V}{A}} R = \rho \frac{V}{A^2} \xrightarrow{V = \frac{m}{\rho'}, A = \pi \frac{D^2}{4}} R = \rho \times \frac{\frac{m}{\rho'}}{\pi^2 \frac{D^4}{16}} \Rightarrow R = \frac{16 m \rho}{\rho' \pi^2 D^4}$$

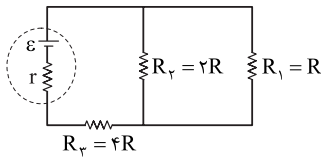
گام دوم: با توجه به رابطه به دست آمده در گام اول، نسبت مقاومت الکتریکی سیم A به مقاومت الکتریکی سیم B را می‌نویسیم:

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{\rho'_B}{\rho'_A} \times \left(\frac{D_B}{D_A}\right)^4 \xrightarrow{\frac{m_A}{\rho'_A} = \frac{m_B}{\rho'_B}, \rho_A = \rho_B} \frac{R_A}{R_B} = \left(\frac{D_B}{D_A}\right)^4 \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

چنانچه نسبت قطرها، برعکس نوشته شود، در دام گزینه (۳) می‌افتیم.

گول نخوری

در مدار شکل زیر، توان مصرفی مقاومت R_1 ، چند برابر توان خروجی باتری است؟



$$\frac{1}{21} \quad (1)$$

$$\frac{2}{21} \quad (2)$$

$$\frac{1}{7} \quad (3)$$

$$\frac{2}{7} \quad (4)$$

مشاوره موضوع توان در مدارهای الکتریکی از مطالب بسیار مهم به شمار می‌رود، چون به راحتی با سایر مطالب مدارهای الکتریکی ترکیب شده و سؤالات مختلفی از آن در کنکورهای اخیر مطرح شده است.

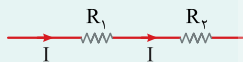
پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدا مقاومت معادل مدار را بر حسب R به دست آورید. سپس جریان هر شاخه را حساب کنید و در پایان، به کمک رابطه $P = RI^2$ ، نسبت توان‌های خواسته‌شده را پیدا کنید.

درس‌Box

(۱) به هم بستن متوالی مقاومت‌ها؛ هنگامی دو مقاومت را متوالی می‌گوییم که فقط از یک سر به هم متصل بوده و از محل اتصال آن‌ها هیچ انشعاب جریانی خارج نگردد. در این حالت، جریان الکتریکی عبوری از مقاومت‌ها یکسان است:

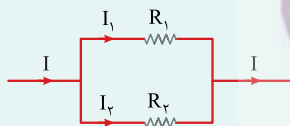


$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

R_{eq} : مقاومت معادل (Ω)

(۲) به هم بستن موازی مقاومت‌ها؛ هنگامی دو مقاومت را موازی می‌گوییم که هر دو سر آن‌ها به وسیله سیم‌های رابط به یکدیگر متصل شده باشند. در این حالت، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها یکسان است.

مجموع جریان‌هایی که به هر نقطه انشعاب (گره) وارد می‌شوند، برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطه انشعاب خارج می‌شوند.



$$I = I_1 + I_2$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

جریان الکتریکی بین دو مقاومت موازی و مشابه به اندازه مساوی تقسیم می‌شود، اما اگر اندازه مقاومت‌ها یکسان نباشد، جریان الکتریکی به نسبت عکس مقاومت‌های الکتریکی بین آن‌ها تقسیم می‌شود.

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times I, \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times I \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

(۳) توان مصرفی در مقاومت R از رابطه زیر به دست می‌آید:

مقاومت الکتریکی (Ω)

$$P = RI^2 \quad \leftarrow \text{توان (W)}$$

جریان الکتریکی (A)

(۴) **قانون اهم**: در دمای ثابت، نسبت اختلاف پتانسیل برخی وسیله‌ها که جریان الکتریکی را از خود عبور می‌دهند، به جریانی که از آن‌ها می‌گذرد، مقدار ثابتی است. چنین وسیله‌هایی را مقاومت یا رسانای اهمی می‌گوییم.

$$\frac{V}{I} = R \Rightarrow V = IR$$

R : مقاومت الکتریکی (Ω)

I : جریان الکتریکی (A)

V : اختلاف پتانسیل (V)

گام اول: مقاومت‌های R_1 و R_2 با هم به صورت موازی بسته شده‌اند. مقاومت معادل آن‌ها را برحسب R به دست می‌آوریم:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2R \times R}{2R + R} = \frac{2R}{3}$$

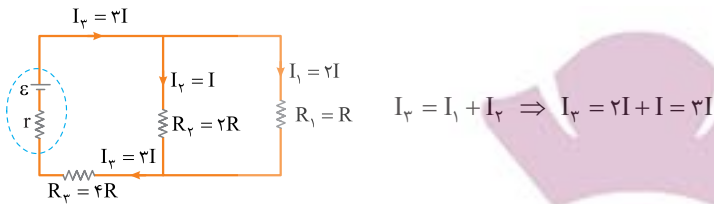
$R_{1,2}$ با R_3 به صورت متوالی بسته شده و مقاومت معادل مدار است، برحسب R به دست می‌آوریم:

$$R_{eq} = R_{1,2} + R_3 = \frac{2R}{3} + 4R = \frac{14R}{3}$$

گام دوم: اگر جریان عبوری از مقاومت R_3 ، برابر با I باشد، می‌توان نوشت:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow I_1 R = I \times 2R \Rightarrow I_1 = 2I$$

جریان عبوری از مقاومت R_3 را که همان جریان عبوری از مولد است، پیدا می‌کنیم:



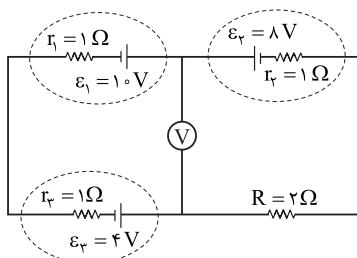
گام سوم: توان خروجی باتری، همان توان مصرفی مدار است. بر این اساس، نسبت توان‌های خواسته شده در سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{P_{R_1}}{P_{R_{eq}}} = \frac{R_1 I_1^2}{R_{eq} I_3^2} = \frac{R (2I)^2}{\frac{14R}{3} (3I)^2} = \frac{R \times 4 I^2}{\frac{14R}{3} \times 9 I^2} = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$$

ایران تونلنه
توشه ای برای موفقیت

در مدار شکل زیر، مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، چند ولت است؟

۶۳



۶ / ۸ (۱)

۷ / ۶ (۲)

۸ / ۴ (۳)

۹ / ۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

باتری‌ها ← منبع (مولد)
مصرف کننده ←

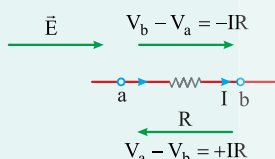
درس Box

باید توجه داشت که وقتی چند باتری در یک مدار به کار می‌روند، ممکن است بعضی از آن‌ها به عنوان مولد نباشند، یعنی به گونه‌ای بسته شوند که ضدمولد باشند. به عبارت دیگر، به جای انرژی دادن به مدار، به عنوان مصرف کننده عمل کنند. مانند باتری یک تلفن همراه که در حال شارژ است.

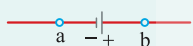
در باتری‌های منبع (مولد) همواره جریان از پایانه مثبت وارد مدار می‌شود، اما در باتری‌های مصرف کننده، برعکس است.

برای نوشتن تغییر پتانسیل الکتریکی در مدارها، دو نکته زیر به کار می‌روند:

(۱) هرگاه در جهت جریان از مقاومت R یا r بگذریم، پتانسیل الکتریکی به اندازه IR یا Ir کاهش می‌یابد (افت پتانسیل رخ می‌دهد) اما اگر در خلاف جهت جریان از آن‌ها بگذریم، پتانسیل به همان اندازه افزایش می‌یابد.



$V_a - V_b = -\varepsilon$



$V_b - V_a = +\varepsilon$

(۲) بدون توجه به جهت جریان، هرگاه درون باتری از پایانه منفی به پایانه مثبت برویم، پتانسیل به اندازه ε افزایش می‌یابد (زیرا در خلاف جهت $\vec{E}$ رفته‌ایم) و اگر برعکس از پایانه مثبت به منفی برویم، پتانسیل به اندازه ε کاهش می‌یابد (زیرا در جهت $\vec{E}$ رفته‌ایم).

چون مقاومت یک سیم رابط، ناچیز فرض می‌شود، هنگام عبور از آن، پتانسیل تغییر نمی‌کند. یعنی نقاطی که به وسیله یک سیم رابط به هم وصل می‌شوند، پتانسیل یکسانی دارند.

محاسبه اختلاف پتانسیل بین دو نقطه از مدار: ابتدا پتانسیل نقطه اول را می‌نویسیم، آن‌گاه از این نقطه روی مدار و در جهت دلخواه، به طور ذهنی به طرف نقطه دوم می‌رویم و ضمن گذر از هر قسمت، تغییر پتانسیل را می‌نویسیم تا به نقطه دوم برسیم. حاصل نوشته‌ها برابر پتانسیل نقطه دوم است.

اختلاف پتانسیل دو سر باتری مولد و باتری مصرف کننده:



باتری مصرف کننده

$V_a + \varepsilon + Ir = V_b$

$V_b - V_a = \varepsilon + IR$

$V = \varepsilon + Ir$



باتری مولد

$V_a + \varepsilon - Ir = V_b$

$V_b - V_a = \varepsilon - Ir$

$V = \varepsilon - Ir$

مدار تک حلقه: این مدار الکتریکی شامل یک یا چند باتری و یک یا چند مقاومت است که به وسیله سیم‌های رابط (با مقاومت ناچیز) به طور متوالی به هم بسته شده‌اند و جریان الکتریکی در همه قسمت‌های آن یکسان است.

تعیین جهت جریان در مدار تک حلقه:

هر باتری، می‌خواهد جریان الکتریکی را از پایانه مثبت خود، وارد مدار کند. بر این اساس، وقتی چند باتری در مدار بسته شده باشند، مجموع نیروی محرکه باتری‌هایی که می‌خواهند در مدار، جریان ساعتگرد ایجاد کنند و مجموع نیروی محرکه باتری‌هایی که می‌خواهند در مدار، جریان پادساعتگرد ایجاد کنند را با هم مقایسه می‌کنیم. هر کدام بزرگ‌تر باشد، آن باتری یا باتری‌ها مولد محسوب می‌شوند و جریان به میل آن‌ها در مدار برقرار می‌شود، یعنی جریان الکتریکی از پایانه مثبت آن‌ها وارد مدار می‌شود. سایر باتری‌ها نیز مصرف‌کننده محسوب می‌شوند و جریان الکتریکی از مدار وارد پایانه مثبت آن‌ها می‌شود.

محاسبه جریان در مدار تک حلقه:

$$I = \frac{\varepsilon_t - \varepsilon'_t}{R_{eq} + r_t + r'_t}$$

I : جریان الکتریکی مدار (A)

ε_t : مجموع نیروی محرکه باتری‌های مولد (V)

ε'_t : مجموع نیروی محرکه باتری‌های مصرف‌کننده (V)

R_{eq} : مجموع مقاومت‌های خارجی مدار (Ω)

r_t : مجموع مقاومت درونی باتری‌های مولد (Ω)

r'_t : مجموع مقاومت درونی باتری‌های مصرف‌کننده (Ω)

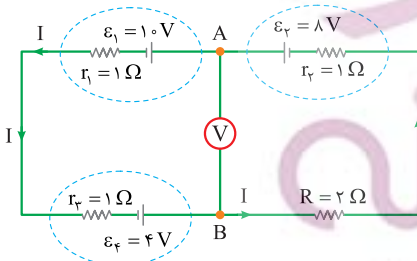
مقاومت الکتریکی یک ولت‌سنج آرمانی، بی‌نهایت فرض می‌شود و جریانی از آن عبور نمی‌کند.

گام اول: با توجه به نیروهای محرکه باتری‌های داده شده، معلوم می‌شود که جریان در این مدار تک حلقه، به صورت پادساعتگرد برقرار است؛ زیرا باتری‌های (۲) و (۳) به عنوان مولد و باتری (۱) به عنوان مصرف‌کننده در این مدار عمل می‌کنند:

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 > \varepsilon_1$$

$$8 + 4 > 10$$

گام دوم: اندازه جریان الکتریکی در این مدار را به دست می‌آوریم:



$$I = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1}{R + r_1 + r_2 + r_3} = \frac{8 + 4 - 10}{2 + 1 + 1 + 1}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{5} = 0.4 \text{ A}$$

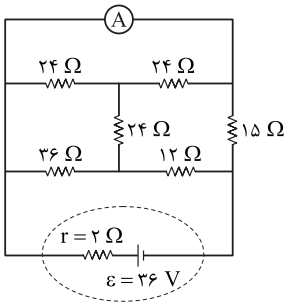
گام سوم: به طور ذهنی و در جهت جریان، روی مدار از نقطه A به طرف نقطه B حرکت می‌کنیم تا اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B را که همان عدد ولت‌سنج است، به دست آوریم:

$$V_A - \varepsilon_1 - Ir_1 - Ir_3 + \varepsilon_3 = V_B \Rightarrow V_A - 10 - 0.4 \times 1 - 0.4 \times 1 + 4 = V_B \Rightarrow V_A - V_B = 6.8 \text{ V}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مدار شکل زیر، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر است؟ **۶۴**



(۱) $1/75$

(۲) $0/75$

(۳) $2/25$

(۴) $1/25$

مشاوره در کنکورهای سال‌های اخیر، سوالات زیادی از مدارهای الکتریکی مطرح شده که در آن‌ها، آمپرسنج به تنهایی در یک شاخه از مدار قرار می‌گیرد و جریان عبوری از آن خواسته می‌شود، نمونه آن در کنکورهای تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲ و ۱۴۰۴، کنکور تجربی ۱۴۰۳ هر دو نوبت اول و دوم و کنکور ریاضی ۱۴۰۴ نوبت دوم دیده می‌شود.

پاسخ: گزینه ۳

Hint

ابتدا مقاومت معادل مدار را به دست آورید و به کمک آن، جریان عبوری از مولد و همچنین جریان الکتریکی در سایر شاخه‌های مدار را پیدا کنید. سپس با توجه به این نکته که جمع جریان‌های ورودی به هر نقطه انشعاب، با جمع جریان‌های خروجی از آن نقطه برابر است، جریان عبوری از آمپرسنج را حساب کنید.

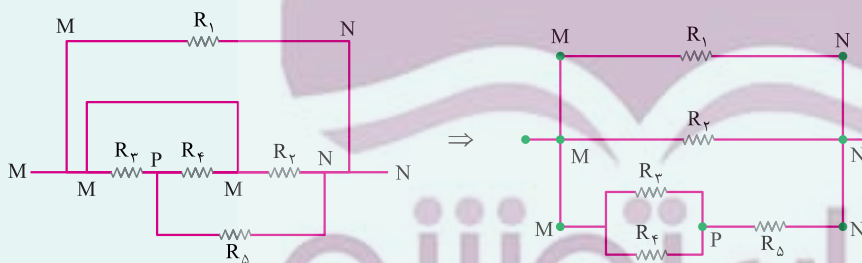
درس‌Box

نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل و ساده‌کردن مدار:

گاهی تشخیص متوالی یا موازی بودن مقاومت‌ها در یک مدار، به راحتی امکان‌پذیر نیست. در این صورت، شکل ساده‌تری از مدار را رسم می‌کنیم بدون آن‌که تغییری در تعداد اجزای مدار و چگونگی اتصال آن‌ها ایجاد شود.

برای این کار، نقاطی را که با سیم رابط (مقاومت آن ناچیز فرض می‌شود) به یکدیگر متصل شده‌اند، با پتانسیل یکسان و با نام مشترک یک نقطه، در نظر می‌گیریم. آمپرسنج آرمانی نیز در این مورد مانند سیم رابط عمل می‌کند. بعد از نام‌گذاری چنین نقاطی، دو سر مدار یا دو سر مولد را مبنا قرار داده و سایر اجزای مدار را بین نقطه‌های نام‌گذاری شده، جای گذاری می‌کنیم تا شکل واضح‌تری از مدار به دست آید.

مثال

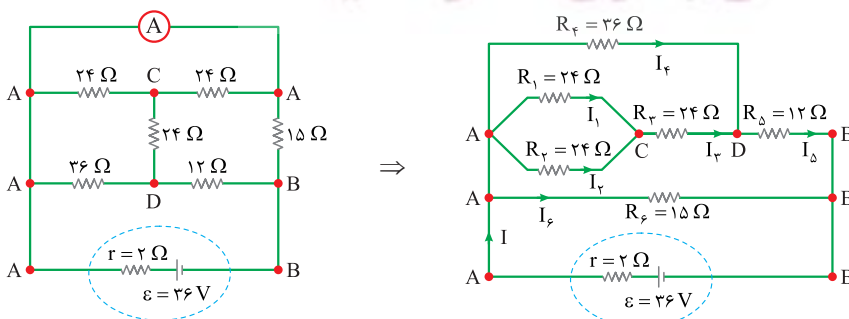


مقاومت الکتریکی یک آمپرسنج آرمانی برابر با صفر فرض می‌شود، بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر آن صفر خواهد بود، اما جریان الکتریکی می‌تواند از آن عبور کند.

نکته

گام اول: نقاط هم‌پتانسیل مدار را مشخص کرده و شکل ساده‌تری از مدار رسم می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی



گام دوم: مقاومت معادل مدار را به دست می آوریم. دو مقاومت R_1 و R_2 با هم موازی اند و حاصل آن ها با مقاومت R_3 به صورت متوالی بسته شده است:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{24 \times 24}{24 + 24} = 12 \Omega$$

$$R_{3,1,2} = R_{1,2} + R_3 = 12 + 24 = 36 \Omega$$

مقاومت $R_{3,1,2}$ با مقاومت R_4 به طور موازی بسته شده و مجموعه آن ها با مقاومت R_5 به طور متوالی قرار دارند:

$$R_{4,1,2,3} = \frac{R_{3,1,2} \times R_4}{R_{3,1,2} + R_4} = \frac{36 \times 36}{36 + 36} = 18 \Omega$$

$$R_{5,4,1,2,3} = R_{4,1,2,3} + R_5 = 18 + 12 = 30 \Omega$$

مقاومت $R_{5,4,1,2,3}$ با مقاومت R_6 به طور موازی بسته شده است، بنابراین مقاومت معادل مدار (R_{eq}) برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{R_{5,4,1,2,3} \times R_6}{R_{5,4,1,2,3} + R_6} = \frac{30 \times 15}{30 + 15} = 10 \Omega$$

گام سوم: جریان عبوری از مولد را محاسبه می کنیم، سپس این جریان را بین قسمت های مختلف مدار، تقسیم می کنیم تا جریان عبوری از مقاومت هایی که لازم داریم، به دست آید:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{36}{10 + 2} = 3 \text{ A}$$

$$R_6 I_6 = R_{eq} I \Rightarrow 15 \times I_6 = 10 \times 3 \Rightarrow I_6 = 2 \text{ A}$$

$$R_{5,4,1,2,3} \times I_5 = R_{eq} I \Rightarrow 30 \times I_5 = 10 \times 3 \Rightarrow I_5 = 1 \text{ A}$$

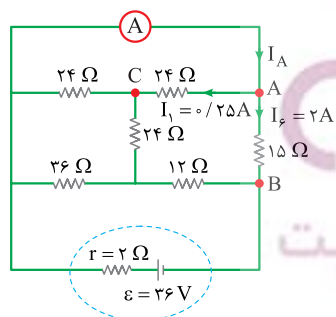
$$V_{AD} = R_{4,1,2,3} \times I_5 = 18 \times 1 = 18 \text{ V}$$

$$V_{AD} = R_4 \times I_4 \Rightarrow 18 = 36 I_4 \Rightarrow I_4 = 0.5 \text{ A}$$

$$V_{AD} = R_{3,1,2} \times I_3 \Rightarrow 18 = 36 I_3 \Rightarrow I_3 = 0.5 \text{ A}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 \xrightarrow{I_1 = I_2} 0.5 = 2 I_1 \Rightarrow I_1 = I_2 = 0.25 \text{ A}$$

گام چهارم: جریان های به دست آمده را روی شکل مدار اولیه نشان می دهیم و جریان عبوری از آمپرسنج را پیدا می کنیم. برای این منظور، گره A را در نظر می گیریم و جریان های I_1 و I_4 را روی مدار نشان می دهیم، بنابراین باید جریان آمپرسنج (I_A) به این نقطه انشعاب A وارد شود:



$$I_A = I_1 + I_4 = 0.25 + 0.5 = 0.75 \text{ A}$$

ایران تونل

توشه ای برای موفقیت

کدام مواد فاقد حوزه مغناطیسی اند، اما اتم‌های آن‌ها به طور ذاتی دارای دوقطبی مغناطیسی هستند؟

۶۵

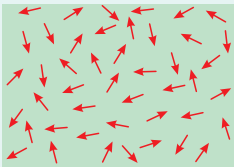
- (۱) فرومغناطیسی نرم
- (۲) فرومغناطیسی سخت
- (۳) پارامغناطیسی
- (۴) دیامغناطیسی

مشاوره شاید بعضی از دانش‌آموزان فکر کنند مطالب مربوط به ویژگی‌های مغناطیسی مواد، کم‌اهمیت هستند و در کنکور مطرح نمی‌شوند، اما چنین نیست. از همین مطالب در کنکور خارج از کشور تجربی ۱۴۰۴ و ریاضی ۱۴۰۳ و هم‌چنین کنکور ریاضی ۱۴۰۲ نوبت اول، سؤال مطرح شده است.

پاسخ: گزینه ۳

درس‌Box

مواد پارامغناطیسی: اتم‌های مواد پارامغناطیسی، خاصیت مغناطیسی دارند، اما دوقطبی‌های مغناطیسی وابسته به آن‌ها، به طور کاتوره‌ای سمت‌گیری کرده‌اند و میدان مغناطیسی خالصی ایجاد نمی‌کنند. با قراردادن مواد پارامغناطیسی درون میدان مغناطیسی خارجی قوی (مثلاً نزدیک یک آهنربای قوی)، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها، به مقدار مختصری در راستای خط‌های میدان مغناطیسی منظم می‌شوند. با دور کردن آهنربا از این مواد، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها، دوباره به طور کاتوره‌ای سمت‌گیری می‌کنند. پس مواد پارامغناطیسی فقط در حضور میدان‌های مغناطیسی قوی، خاصیت مغناطیسی موقت و ضعیفی پیدا می‌کنند. اورانیم، پلاتین، آلومینیم، سدیم، اکسیژن و اکسید نیتروژن از جمله مواد پارامغناطیسی اند.



• سمت‌گیری کاتوره‌ای دوقطبی‌های مغناطیسی در یک ماده پارامغناطیسی در نبود میدان مغناطیسی:

مواد دیامغناطیسی: اتم‌های مواد دیامغناطیسی، نظیر مس، نقره، سرب و بیسموت، به طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی اند. به عبارت دیگر، هیچ‌یک از اتم‌های این مواد، دارای دوقطبی مغناطیسی خالصی نیستند. با وجود این، حضور میدان مغناطیسی خارجی، می‌تواند به طور موقت، سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف سوی میدان خارجی، در مواد دیامغناطیسی شود. یعنی مواد دیامغناطیسی توسط میدان خارجی دفع می‌شوند.

مواد فرومغناطیسی: اتم‌های مواد فرومغناطیسی به طور ذاتی دارای دوقطبی مغناطیسی هستند. آهن، نیکل، کبالت و بسیاری از آلیاژهای دارای این عناصرها فرومغناطیسی اند. برهم‌کنش‌های قوی بین دوقطبی‌های مغناطیسی در این مواد موجب می‌شود که این دوقطبی‌ها، حتی در نبود میدان خارجی، در ناحیه‌هایی که حوزه‌های مغناطیسی نامیده می‌شود، همسو شوند.

حوزه‌های مغناطیسی برخی از مواد فرومغناطیسی، در حضور میدان مغناطیسی خارجی به سهولت تغییر می‌کنند و ماده به سادگی آهنربا می‌شود و با حذف میدان خارجی نیز، خاصیت آهنربایی خود را به آسانی از دست می‌دهد. این مواد را مواد فرومغناطیسی نرم می‌نامند. از این مواد در ساخت هسته پیچ‌ها و سیم‌لوله‌ها و آهنرباهای الکتریکی (آهنرباهای غیردائمی) استفاده می‌شوند.

برخی مواد دیگر مانند فولاد، آلیاژهای آهن، کبالت و نیکل به سختی آهنربا می‌شوند؛ یعنی در حضور میدان مغناطیسی خارجی، حجم حوزه‌ها در آن‌ها به سختی تغییر می‌کند. این مواد را فرومغناطیسی سخت می‌نامند. در این مواد، سمت‌گیری دوقطبی‌های مغناطیسی حوزه‌ها پس از حذف میدان خارجی، تا مدت‌زمان زیادی، تقریباً بدون تغییر باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، پس از حذف میدان خارجی، ماده فرومغناطیسی سخت، خاصیت آهنربایی خود را تا اندازه قابل توجهی حفظ می‌کند. به همین دلیل، این مواد برای ساختن آهنرباهای دائمی مناسب‌اند.

گام اول: با توجه به متن درس‌باکس، مواد فرومغناطیسی چه از نوع نرم و چه از نوع سخت، دارای حوزه مغناطیسی هستند، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند.

گام دوم: اتم‌های مواد پارامغناطیسی به طور ذاتی دوقطبی مغناطیسی دارند، ولی مواد دیامغناطیسی ندارند، بنابراین گزینه (۳) درست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در فضایی که میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 25 G در جهت شمال وجود دارد، یک ذره آلفا با تندی $4 \times 10^3 \text{ m/s}$ در راستای افقی و به سمت شرق در حال حرکت است. نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره چند نیوتون و در چه جهتی است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

- (۱) $1/6 \times 10^{-18}$ ، عمود بر سطح زمین و به طرف بالا
- (۲) $1/6 \times 10^{-18}$ ، عمود بر سطح زمین و به طرف پایین
- (۳) $3/2 \times 10^{-18}$ ، عمود بر سطح زمین و به طرف بالا
- (۴) $3/2 \times 10^{-18}$ ، عمود بر سطح زمین و به طرف پایین

پاسخ: گزینه ۳

Hint

ذره آلفا دارای بار مثبت است. جهت نیروی وارد بر آن را به کمک قاعده دست راست تعیین کنید و اندازه نیروی وارد بر آن را با استفاده از رابطه $F = |q| v B \sin \theta$ به دست آورید.

درس Box

(۱) میدان مغناطیسی، یک کمیت برداری است و یکای آن در SI، تسلا (T) می‌باشد. یکای دیگر آن گاوس (G) است:

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

(۲) نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

اندازه میدان مغناطیسی (T) بزرگی بار (C)

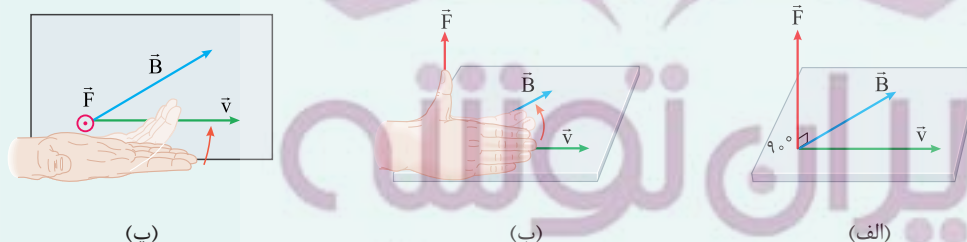
$$F = |q| v B \sin \theta$$

زاویه بین بردارهای سرعت و میدان مغناطیسی
تندی (m/s) اندازه نیرو (N)

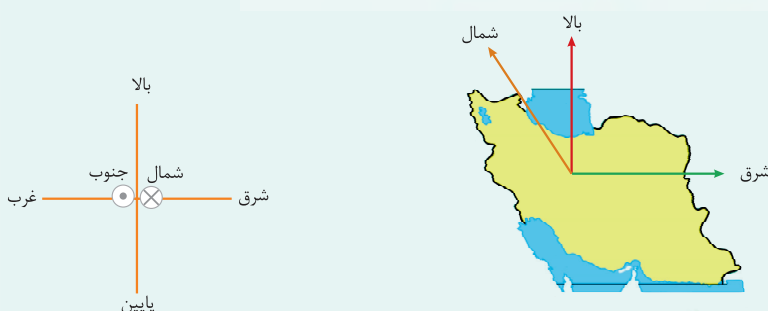
نماد میدان مغناطیسی برون‌سو: $\vec{B} \odot$

نماد میدان مغناطیسی درون‌سو: $\vec{B} \otimes$

(۳) تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار مثبت با استفاده از قاعده دست راست: اگر چهار انگشت دست راست را در جهت $\vec{v}$ قرار دهیم، به گونه‌ای که جهت خم شدن چهار انگشت در جهت $\vec{B}$ باشد، انگشت شست، جهت نیروی مغناطیسی ($\vec{F}$) را نشان می‌دهد.



(۴) برای بررسی و تعیین جهت‌ها می‌توانیم از شکل‌های زیر استفاده کنیم:



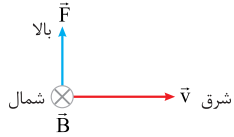
گام اول: اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره آلفا را در میدان مغناطیسی داده شده به دست می آوریم. برای این منظور باید بدانیم که ذره آلفا از جنس هسته اتم هلیوم است، یعنی دو پروتون و دو نوترون دارد، بنابراین بار هر ذره آلفا برابر است با:

$$q_{\alpha} = +2e \xrightarrow{e=1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} q_{\alpha} = 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$$

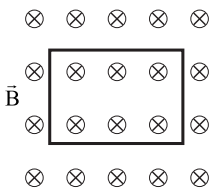
$$F = |q| v B \sin \theta \xrightarrow[\substack{B=25 \text{ G} = 25 \times 10^{-4} \text{ T}, \theta=90^{\circ}}]{q=q_{\alpha}=3.2 \times 10^{-19} \text{ C}, v=4 \times 10^7 \text{ m/s}} F = 3.2 \times 10^{-19} \times 4 \times 10^7 \times 25 \times 10^{-4} \sin 90^{\circ}$$

$$\Rightarrow F = 3.2 \times 10^{-18} \text{ N}$$

گام دوم: جهت نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره مثبت را به کمک قاعده دست راست تعیین می کنیم. جهت این نیرو، عمود بر سطح زمین و به طرف بالا است:



در شکل زیر، سطح قابی به مساحت 400 cm^2 و مقاومت الکتریکی 2Ω ، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد. اندازه این میدان با آهنگ 300 G/s افزایش می‌یابد. در این مدت، جریان الکتریکی القا شده در قاب، چند میلی‌آمپر و در چه جهتی است؟

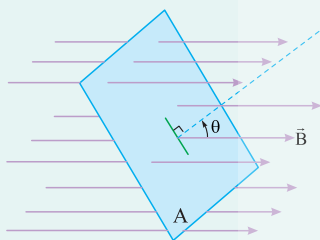


- (۱) $6/0$ ، پادساعتگرد
- (۲) $6/0$ ، ساعتگرد
- (۳) 6 ، ساعتگرد
- (۴) 6 ، پادساعتگرد

مشاوره در این سؤال دو مطلب مهم، یعنی قانون القای الکترومغناطیسی فاراده و قانون لنز، به صورت ترکیبی مطرح شده‌اند. از این دو مطلب سؤالات متعددی در کنکورهای اخیر مطرح شده‌اند.

پاسخ: گزینه ۱

شار مغناطیسی: مجموعه خطوط میدان مغناطیسی که از یک سطح می‌گذرند، شار مغناطیسی نام دارد. شار مغناطیسی، کمیتی نرده‌ای است و برای میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ که از مدار بسته‌ای (مثلاً یک حلقه) به مساحت A می‌گذرد، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Phi = AB \cos \theta$$


Φ : شار مغناطیسی (Wb)

A : مساحت سطح مدار بسته (m^2)

B : اندازه میدان مغناطیسی یکنواخت (T)

θ : زاویه بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه

قانون القای الکترومغناطیسی فاراده: هرگاه شار مغناطیسی‌ای که از مدار بسته‌ای می‌گذرد تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود که بزرگی آن با آهنگ تغییر شار مغناطیسی متناسب است:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

ε_{av} : نیروی محرکه القایی متوسط (V)

N : تعداد دورها یا حلقه‌های مدار

$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$: آهنگ تغییر شار مغناطیسی (Wb/s)

$$I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R}$$

I_{av} : جریان القایی متوسط (A)

R : مقاومت الکتریکی مدار (Ω)

اگر فقط اندازه میدان مغناطیسی تغییر کند، رابطه قانون القای الکترومغناطیسی فاراده به صورت زیر درمی‌آید:

$$\varepsilon_{av} = -N A \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

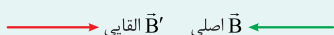
$\frac{\Delta B}{\Delta t}$: آهنگ تغییر میدان مغناطیسی (T/s)

قانون لنز، جریان حاصل از نیروی محرکه القایی در یک مدار یا پیچ در جهتی است که آثار مغناطیسی ناشی از آن، با عامل به‌وجودآورنده جریان القایی، یعنی تغییر شار مغناطیسی، مخالفت می‌کند.

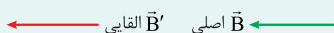
● علامت منفی در رابطه قانون فاراده، نشان‌دهنده همین مخالفت است.

● از قانون لنز برای تعیین جهت جریان القایی استفاده می‌شود.

الف) وقتی شار افزایشی است: میدان القایی (ثانویه) در جهت مخالف میدان اصلی (اولیه) است تا از این راه با افزایش شار مخالفت کند:



ب) وقتی شار کاهش می‌یابد: میدان القایی (ثانویه) هم‌جهت با میدان اصلی (اولیه) است تا از این راه با کاهش شار مخالفت کند:



درس‌Box

گام اول: با استفاده از رابطه قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، اندازه نیروی محرکه القایی متوسط را به دست می آوریم:

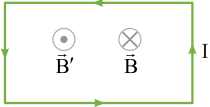
$$\varepsilon_{av} = -N A \cos \theta \times \frac{\Delta B}{\Delta t} \rightarrow \begin{matrix} N=1, A=4 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \\ \theta=0^\circ, \frac{\Delta B}{\Delta t}=3 \times 10^{-2} \text{ T/s} \end{matrix}$$

$$\varepsilon_{av} = -1 \times 4 \times 10^{-2} \times \cos 0^\circ \times 3 \times 10^{-2} \Rightarrow |\varepsilon_{av}| = 12 \times 10^{-4} \text{ V}$$

گام دوم: اندازه جریان القایی متوسط را محاسبه می کنیم:

$$|I_{av}| = \frac{|\varepsilon_{av}|}{R} = \frac{12 \times 10^{-4}}{2} = 6 \times 10^{-4} \text{ A} = 0.6 \text{ mA}$$

گام سوم: از آن جا که شار مغناطیسی عبوری از قاب، در حال افزایش است، بنا به قانون لنز، جهت میدان مغناطیسی القایی $\vec{B}'$ در خلاف جهت میدان مغناطیسی اصلی $\vec{B}$ عمل می کند و برون سو می شود:



با توجه به به قاعده دست راست، جهت جریان القایی در این قاب باید به صورت پادساعتگرد باشد تا $\vec{B}'$ به صورت برون سو باشد.

اگر از قاعده دست راست، درست استفاده نکنید یا به هر دلیل دیگری، جهت $\vec{B}'$ را برعکس به دست آورید، در دام گزینه (۲) می افتید.

در ظرفی استوانه‌ای به مساحت مقطع 50 cm^2 ، 4 L مایع با چگالی $1/7 \text{ g/cm}^3$ ریخته شده است. اگر فشار هوای محیط 74 cmHg باشد، فشار در کف ظرف چند کیلوپاسکال است؟ ($\rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \text{ g/cm}^3$ ، $g = 10 \text{ N/kg}$)

$$103/36 \quad (2)$$

$$102 \quad (4)$$

$$114/24 \quad (1)$$

$$104/72 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

Hint

درس Box

ابتدا جرم و وزن مایع درون ظرف را حساب کنید. سپس فشار پیمانه‌ای وارد بر کف ظرف را از رابطه $P = \frac{F}{A}$ محاسبه کنید. در پایان، با افزودن فشار هوای محیط به فشار پیمانه‌ای، فشار در کف ظرف را برحسب کیلوپاسکال به دست آورید.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

(۱) چگالی: نسبت جرم به حجم یک ماده همگن را چگالی آن می‌گوییم:

ρ : چگالی (kg/m^3)

m : جرم (kg)

V : حجم (m^3)

(۲) فشاری که بر یک سطح فرضی درون شاره وارد می‌شود از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{F}{A}$$

P : فشار (N/m^2 یا Pa)

F : اندازه نیروی عمودی وارد بر سطح (N)

A : مساحت سطح (m^2)

فشار کل (مطلق) یک جسم که بر سطحی وارد می‌شود، مجموع فشار پیمانه‌ای، یعنی فشار ناشی از جسم و فشار هوای محیط است:

$$P = P_g + P_o$$

(۳) فشار پیمانه‌ای یک مایع از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_g = \rho gh$$

P_g : فشار پیمانه‌ای (Pa)

ρ : چگالی مایع (kg/m^3)

g : شتاب گرانش در سطح زمین (N/kg)

h : ارتفاع یا عمق مایع (m)

گام اول: با استفاده از رابطه چگالی، جرم جسم و سپس وزن آن را حساب می‌کنیم:

$$m = \rho V = \frac{1/7 \text{ g/cm}^3 \times 4 \text{ L}}{1000} = 1/7 \times 4 = 6/8 \text{ kg}$$

$$W = mg = 6/8 \times 10 = 68 \text{ N}$$

گام دوم: فشار پیمانه‌ای مایع وارد بر کف ظرف را به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{F=W=68 \text{ N}}{A=50 \text{ cm}^2 = 50 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = \frac{68}{50 \times 10^{-4}} = 13600 \text{ Pa}$$

گام سوم: فشار مطلق (کل) در کف ظرف را محاسبه می‌کنیم:

$$P = P_o + P_g = 74 \text{ cmHg} = 13600 \times \frac{10}{136} + \frac{68}{50 \times 10^{-4}} = 7/4 \times 13600 + 13600 = 8/4 \times 13600 = 114240 \text{ Pa} = 114/24 \text{ kPa}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر مایعی به چگالی ρ و ارتفاع h داشته باشیم و فشار پیمانه‌ای آن را برحسب cmHg بخواییم، می‌توان نوشت:

$$P_g = \frac{\rho}{\rho_{Hg}} \times h$$

h : ارتفاع مایع برحسب (cm)

بر این اساس، فشار پیمانه‌ای مایع برحسب سانتی‌متر جیوه به دست می‌آید:

$$P_g = \frac{\rho}{\rho_{Hg}} \times h = \frac{1/7}{13/6} \times 80 = 10 \text{ cmHg}$$

سپس فشار مطلق (کل) را حساب می‌کنیم:

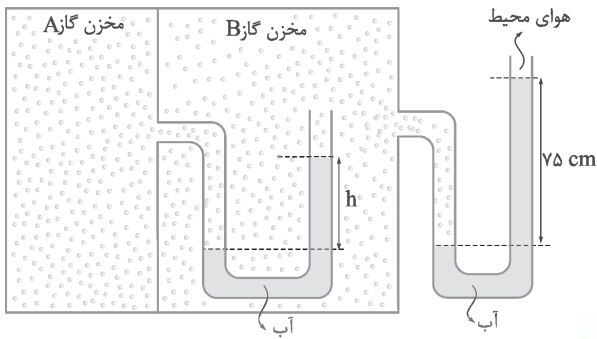
$$P = P_0 + P_g = 74 + 10 = 84 \text{ cmHg} \Rightarrow P = 84 \text{ cmHg} \times \frac{1360 \text{ Pa}}{1 \text{ cmHg}}$$

$$\Rightarrow P = 114240 \text{ Pa} = 114/24 \text{ kPa}$$



در شکل زیر، فشار گاز مخزن A برابر ۱۱۰ kPa و فشار هوای محیط ۹۶ kPa است. اگر چگالی آب 1 g/cm^3 باشد، مقدار h برابر چند سانتی متر است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

۶۹



(۱) ۳۵

(۲) ۴۵

(۳) ۵۵

(۴) ۶۵

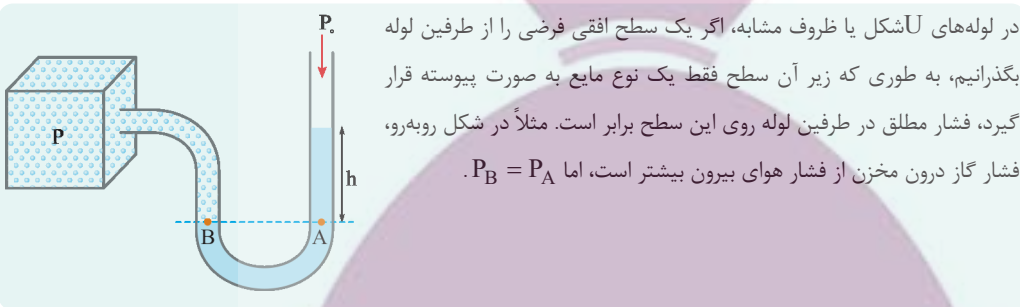
مشاوره این سؤال برگرفته از مسئله شماره ۱۴ صفحه ۵۰ کتاب درسی فیزیک (۱) است. پرسش‌ها و تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا فشار گاز مخزن B را به دست آورید، سپس رابطه فشار بین دو مخزن A و B را بنویسید تا ارتفاع h را پیدا کنید.

Hint

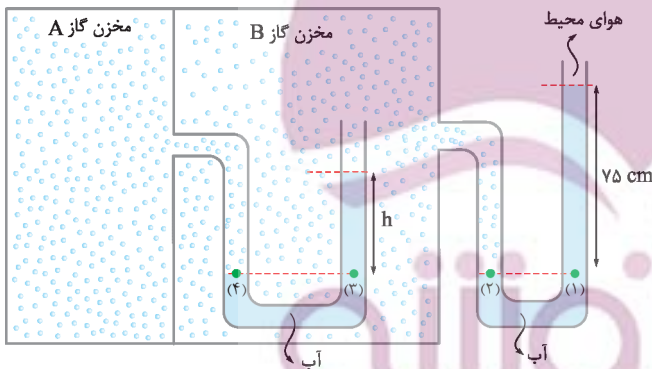
درسی Box



در لوله‌های U شکل یا ظروف مشابه، اگر یک سطح افقی فرضی را از طرفین لوله بگذرانیم، به طوری که زیر آن سطح فقط یک نوع مایع به صورت پیوسته قرار گیرد، فشار مطلق در طرفین لوله روی این سطح برابر است. مثلاً در شکل روبه‌رو، فشار گاز درون مخزن از فشار هوای بیرون بیشتر است، اما $P_B = P_A$.

گام اول: فشار گاز مخزن B را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی



$$P_B = P_A \rightarrow P_B = P_0 + \rho gh_1$$

$$\frac{\rho = 1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3, g = 10 \text{ N/kg}}{h_1 = 75 \text{ cm} = 0.75 \text{ m}, P_0 = 96 \text{ kPa} = 96000 \text{ Pa}} \rightarrow P_B = 96000 + 10^3 \times 10 \times \frac{75}{100} = 96000 + 7500 = 103500 \text{ Pa}$$

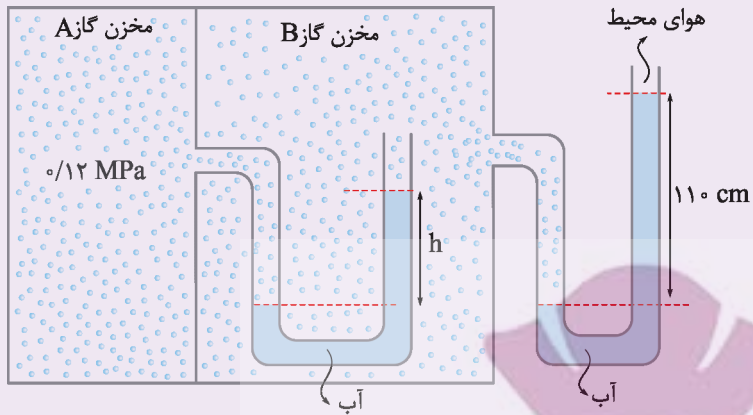
گام دوم: فشار دو نقطه (۳) و (۴) را برابر با هم قرار می‌دهیم و ارتفاع h را حساب می‌کنیم:

$$P_B = P_A \rightarrow P_A = P_B + \rho gh \rightarrow \frac{P_A = 110 \text{ kPa} = 110000 \text{ Pa}}{P_B = 103500 \text{ Pa}} \rightarrow 110000 = 103500 + 10^3 \times 10 \times h$$

$$\Rightarrow 6500 = 10^4 h \Rightarrow h = 0.65 \text{ m} = 65 \text{ cm}$$

در شکل زیر مقدار h چند سانتی متر است؟ فشار هوای محیط را 101 kPa و چگالی آب را 1000 kg/m^3 بگیرید.

(فیزیک (۱) - مسئله ۱۳ صفحه ۵۰ کتاب درسی)



ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

خودرویی به جرم 1600 kg در مسیری افقی، در مدت 5 s تندی خود را از 18 km/h به 54 km/h می‌رساند. توان متوسط خودرو برای انجام این کار چند کیلووات است؟ (نیروهای اتلافی را نادیده بگیرید.)

۷۰

۱۶ (۱)

۳۲ (۲)

۱۶۰ (۳)

۳۲۰ (۴)

مشاوره مشابه این سؤال، در کنکورهای قدیم (مثلاً کنکور ۱۳۸۱ ریاضی) مطرح شده است. به طور کلی به خاطر داشته باشید که مباحث کار و انرژی، به راحتی با مطالب حرکت‌شناسی و پادینامیک، ترکیب می‌شوند.

پاسخ: گزینه ۲

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

$$W = Fd \cos \theta$$

رابطه توان متوسط:

P_{av} : توان متوسط (W)

$(J) F$: کار نیروی (J)

Δt : بازه زمانی

d : جابه‌جایی (m)

θ : زاویه بین نیروی $\vec{F}$ و جابه‌جایی $\vec{d}$

گام اول: تندی‌های اولیه و نهایی خودرو را برحسب m/s به دست آورده و شتاب آن را در این مدت محاسبه می‌کنیم:

$$v_1 = 18 \text{ km/h} = 18 \div 3.6 = 5 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 54 \text{ km/h} = 54 \div 3.6 = 15 \text{ m/s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{15 - 5}{5} = 2 \text{ m/s}^2$$

گام دوم: به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی متوسط خالص وارد بر خودرو را پیدا می‌کنیم:

$$F = F_{av} = ma_{av} = 1600 \times 2 = 3200 \text{ N}$$

سرعت متوسط خودرو را نیز در این بازه زمانی حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{5 + 15}{2} = 10 \text{ m/s}$$

گام سوم: توان متوسط خودرو را به دست می‌آوریم:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{Fd \cos \theta}{\Delta t} \xrightarrow{v_{av} = \frac{d}{\Delta t}} P_{av} = Fv_{av} \cos \theta = 3200 \times 10 \times \cos 0^\circ = 32000 \text{ W}$$

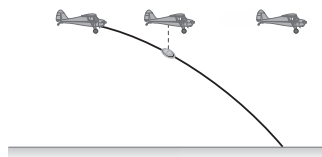
$$\Rightarrow P_{av} = 32 \text{ kW}$$

درسی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران لونه
توشه ای برای موفقیت

در شکل زیر، از هواپیمایی که در ارتفاع ۳۰۰ متری از سطح زمین و با تندی ۵۰ m/s پرواز می‌کند، بسته‌ای به جرم ۲۰۰ kg رها می‌شود. اگر تندی بسته هنگام برخورد به زمین برابر ۶۰ m/s باشد، کار نیروی مقاومت هوای بر روی بسته از لحظه رهاشدن تا لحظه رسیدن به سطح زمین، برابر چند کیلوژول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



(۱) -۲۴۰

(۲) ۲۴۰

(۳) -۴۹۰

(۴) ۴۹۰

مشاوره این سؤال، برگرفته از مسئله ۱۴ صفحه ۸۰ کتاب درسی فیزیک است که با تغییراتی در این جا مطرح شده است.

پاسخ: گزینه ۳

$$W_{mg} = -mg\Delta h$$

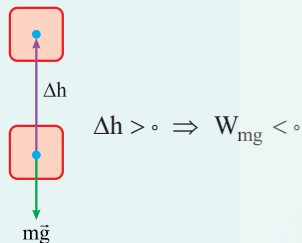
• کار نیروی وزن (W_{mg}):

m: جرم (kg)

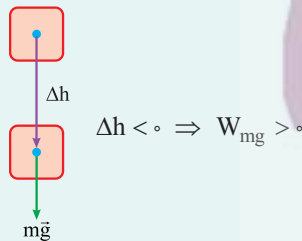
g: شتاب گرانش زمین ($g = 9.8 \text{ N/kg} \approx 10 \text{ N/kg}$)

$\Delta h = h_p - h_1$ جابه‌جایی قائم (m)

الف) اگر جسم رو به بالا جابه‌جا شود:



ب) اگر جسم رو به پایین جابه‌جا شود:



• کار یک نیرو با توجه به شرایط مختلف، ممکن است بزرگ‌تر از صفر، کوچک‌تر از صفر یا برابر صفر باشد:

$$\theta = 90^\circ \rightarrow W_F = 0$$

$$\theta < 90^\circ \rightarrow W_F > 0$$

$$\theta > 90^\circ \rightarrow W_F < 0$$

• کار، یک کمیت نرده‌ای است، پس به صورت نرده‌ای نیز جمع می‌شود؛ یعنی کار برآیند نیروهای وارد بر یک جسم در یک جابه‌جایی معین، با جمع جبری کار هر یک از نیروهای وارد بر جسم در این جابه‌جایی برابر است.

قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل انجام‌شده روی یک جسم در یک جابه‌جایی معین، با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است:

$$W_t = K_2 - K_1$$

W_t : کار کل (کار برآیند نیروها) (J)

K_1 : انرژی جنبشی در وضعیت ۱ (J)

K_2 : انرژی جنبشی در وضعیت ۲ (J)

درس‌Box

ایران تونش
توشه‌ای برای موفقیت

رابطه انرژی جنبشی:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

K: انرژی جنبشی (J)

m: جرم (kg)

v: تندی (m/s)

قضیه کار - انرژی جنبشی را برای این بسته، از لحظه رهاشدن از هواپیما تا لحظه برخورد به زمین می‌نویسیم. توجه داشته باشید که تندی هواپیما با تندی بسته در لحظه رهاشدن، برابر است. هم‌چنین دو نیروی وزن و مقاومت هوا در طول مسیر این بسته بر آن اثر می‌کنند:

$$\begin{aligned} K_f - K_i &= W_t \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W_{mg} + W_{fD} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) &= mgh + W_{fD} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 200 \times (60^2 - 50^2) = 200 \times 10 \times 300 + W_{fD} \\ \Rightarrow 100 \times 1100 &= 6 \times 10^5 + W_{fD} \Rightarrow W_{fD} = 11 \times 10^4 - 6 \times 10^4 = -490000 \text{ J} \\ \Rightarrow W_{fD} &= -490 \text{ kJ} \end{aligned}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، هواپیمایی که در ارتفاع 300 m از سطح زمین و با تندی 50 m/s پرواز می‌کند، بسته‌ای را برای کمک به آسیب‌دیدگان زلزله رها می‌کند. تندی بسته هنگام برخورد به زمین چه قدر است؟ (از تأثیر مقاومت هوا روی حرکت بسته چشم‌پوشی کنید).

(فیزیک (۱) - مسئله ۱۳ صفحه ۸۰ کتاب درسی)



ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

درون گرماسنجی، ۸۰۰ g آب ریخته شده و دمای مجموعه برابر 25°C است. اگر $1/2\text{ kg}$ آب با دمای 80°C به گرماسنج اضافه کنیم، پس از ایجاد تعادل گرمایی، دمای مجموعه به 55°C می‌رسد. ظرفیت گرمایی گرماسنج در

SI کدام است؟ (گرمای ویژه آب برابر $4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ و اتلاف گرمایی، ناچیز است).

(۲) ۸۴۰

(۱) ۷۰۰

(۴) ۸۴۰۰

(۳) ۷۰۰۰

مشاوره سؤالات مربوط به دمای تعادل، دو نوع هستند. یک نوع بدون تغییر حالت ماده و دیگری همراه با تغییر حالت ماده. این سؤال از نوع اول است.

پاسخ: گزینه ۲

ظرفیت گرمایی: وقتی در اثر انتقال گرما، دمای جسمی تغییر می‌کند، نسبت گرما به تغییر دما را ظرفیت گرمایی می‌گویند و به جنس و جرم آن جسم بستگی دارد:

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

Q: گرما (J)

C: ظرفیت گرمایی (J / K)

ΔT : تغییر دما (K)

مثلاً وقتی می‌گوییم ظرفیت گرمایی جسمی 500 J / K است، یعنی اگر به آن جسم 500 J گرما بدهیم، دمای آن 1 K یا 1°C افزایش می‌یابد.

گرمای ویژه: گرمای ویژه هر جسم، مقدار گرمایی است که باید به یک کیلوگرم از آن جسم داده شود تا دمای آن یک درجه سلسیوس یا یک کلوین افزایش یابد:

$$c = \frac{C}{m}$$

c: گرمای ویژه $(\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}})$

C: ظرفیت گرمایی (J / K)

m: جرم (kg)

• گرمای ویژه یک جسم به جنس ماده تشکیل‌دهنده آن و دما بستگی دارد.

برای جسمی که بدون تغییر حالت، در اثر تبادل گرمایی فقط دمای آن تغییر می‌کند، می‌توان نوشت:

$$Q = C\Delta T \Rightarrow Q = mc\Delta T$$

دمای تعادل: اگر دو یا چند جسم با دماهای مختلف در تماس با یکدیگر قرار گیرند، پس از مدتی، هم‌دما می‌شوند، یعنی دمای آن‌ها به مقدار یکسانی می‌رسد که دمای تعادل نام دارد. بنا به قرارداد، برای اجسامی که گرما می‌گیرند، $Q > 0$ و برای اجسامی که گرما از دست می‌دهند، $Q < 0$ است. براساس قانون پایستگی انرژی، همان قدر که اجسام گرم انرژی از دست می‌دهند، اجسام سرد انرژی می‌گیرند؛ پس جمع جبری این گرماها صفر می‌شود و داریم:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = 0$$

مثلاً وقتی چند جسم متفاوت با گرماهای ویژه c_1 و c_2 و c_3 و ... به جرم‌های m_1 و m_2 و m_3 و ... با دماهای اولیه θ_1 و θ_2 و θ_3 و ... را در تماس با یکدیگر قرار دهیم و دمای تعادل آن‌ها θ باشد، می‌توان نوشت:

$$m_1 c_1 (\theta - \theta_1) + m_2 c_2 (\theta - \theta_2) + m_3 c_3 (\theta - \theta_3) + \dots = 0$$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در این جا با سه جسم سروکار داریم: (۱) گرماسنج (۲) آب اولیه درون گرماسنج که دمای آن 25°C است. (۳) آب با دمای 80°C که بعداً به گرماسنج اضافه می‌شود. جمع جبری گرماهای مبادله شده بین این سه جسم، برابر با صفر است:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow C_1 \Delta\theta_1 + m_2 c_2 \Delta\theta_2 + m_3 c_3 \Delta\theta_3 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 (55 - 25) + 0.8 \times 4200 (55 - 25) + 1.2 \times 4200 (55 - 80) = 0$$

$$\Rightarrow C_1 \times 30 + 1008000 - 1260000 = 0 \Rightarrow 30 C_1 = 252000 \Rightarrow C_1 = 8400 \frac{\text{J}}{^{\circ}\text{C}}$$

در این سؤال، ظرفیت گرمایی گرماسنج خواسته شده بود، بنابراین در محاسبات خود، جرم گرماسنج را لازم نداشتیم.



درون ظرفی استوانه‌ای، تا ارتفاع ۸۰ cm بنزین ریخته شده است. اگر دمای بنزین 60°C افزایش یابد، ارتفاع بنزین در این ظرف چند میلی‌متر تغییر می‌کند؟ (ضریب انبساط حجمی بنزین $10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$ و انبساط ظرف، ناچیز است و تبخیر بنزین در اثر افزایش دما را ناچیز فرض کنید.)

۴۸ (۴)

۱۱ (۳)

۴ / ۸ (۲)

۱ / ۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

در رابطه انبساط حجمی مایع، به جای ΔV از $A\Delta h$ و به جای V_1 از Ah_1 استفاده کنید تا رابطه‌ای به صورت $\Delta h = h_1\beta\Delta T$ به دست آورید. سپس به کمک این رابطه، به راحتی تغییر ارتفاع بنزین را به دست آورید.

درس Box

انبساط حجمی: اگر در دمای T_1 حجم یک جسم، برابر V_1 و در دمای T_2 حجم آن برابر V_2 باشد، تجربه نشان می‌دهد که با افزایش دما، حجم جسم افزایش می‌یابد:

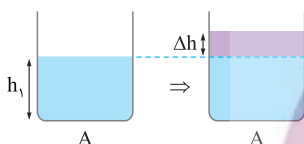
$$\Delta V = \beta V_1 \Delta T$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 \text{ : تغییر حجم (m}^3\text{)}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 \text{ : تغییر دما (K) یا (}^{\circ}\text{C)}$$

$$\beta \text{ : ضریب انبساط حجمی (} \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \text{ یا } \frac{1}{\text{K}} \text{)}$$

گام اول: با توجه به این که ظرف، استوانه‌ای شکل است حجم بنزین درون آن در حالت اول، $V_1 = Ah_1$ و افزایش حجم آن، $\Delta V = A\Delta h$ است:



گام دوم: رابطه انبساط حجمی را برای بنزین درون ظرف می‌نویسیم و تغییر ارتفاع آن را حساب می‌کنیم:

$$\Delta V = V_1\beta\Delta T \xrightarrow{V_1=Ah_1, \Delta V=A\Delta h} A\Delta h = Ah_1\beta\Delta T \Rightarrow \Delta h = h_1\beta\Delta T$$

$$\frac{h_1=80\text{ cm}=800\text{ mm}, \beta=10^{-3} \frac{1}{\text{K}}}{\Delta T=\Delta\theta=60^{\circ}\text{C}} \rightarrow \Delta h = 800 \times 10^{-3} \times 60 = 48\text{ mm}$$

پاسخ برحسب میلی‌متر خواسته شده، پس اگر ارتفاع ۸۰ cm را برحسب mm ننویسید، در دام گزینه (۲) می‌افتید.

گول نخوری

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مخزنی به حجم 40 L ، حاوی 25 g گاز هیدروژن است. اگر فشار این گاز برابر 7 bar باشد، دمای آن چند درجه

۷۴

فارنهایت است؟ $R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ و جرم مولی گاز هیدروژن 2 g/mol است.

(۱) ۷

(۲) $44/6$

(۳) $54/6$

(۴) 280

مشاوره این تست، مشابه یکی از سؤالات کنکور خارج از کشور رشته ریاضی ۱۴۰۴ است. توجه کنید که شما در معادله حالت گاز آرمانی، دما را برحسب کلوین به دست می‌آورید اما در این‌جا دمای گاز برحسب درجه فارنهایت خواسته شده است.

پاسخ: گزینه ۲

$$PV = nRT$$

$$n = \frac{m}{M}$$

$$T = \theta + 273$$

$$F = 1/8\theta + 32$$

(۱) معادله حالت گاز آرمانی (کامل):

P: فشار مطلق (Pa)

V: حجم (m^3)

n: تعداد مول (mol)

R: ثابت جهانی گازها ($\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$)

T: دما (K)

m: جرم گاز (g)

M: جرم مولی گاز (g/mol)

(۲) رابطه بین یکاهای دما (درجه سلسیوس، درجه فارنهایت و کلوین):

T: دما (K)

θ : دما ($^{\circ}\text{C}$)

F: دما ($^{\circ}\text{F}$)

گام اول: تعداد مول‌های گاز را به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{25}{2} \text{ mol}$$

گام دوم: به کمک معادله حالت گاز آرمانی، دمای گاز را برحسب کلوین حساب می‌کنیم:

$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR} = \frac{7 \times 10^5 \text{ Pa} \times 40 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{\frac{25}{2} \text{ mol} \times 8 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}} = 280 \text{ K}$$

گام سوم: دمای به‌دست‌آمده را ابتدا برحسب درجه سلسیوس و سپس برحسب درجه فارنهایت پیدا می‌کنیم:

$$T = \theta + 273 \Rightarrow 280 = \theta + 273 \Rightarrow \theta = 7^{\circ}\text{C}$$

$$F = 1/8\theta + 32 \Rightarrow F = 1/8 \times 7 + 32 = 44/6^{\circ}\text{F}$$

اگر دمای به‌دست‌آمده برحسب کلوین را به درجه فارنهایت تبدیل نکنید، در دام گزینه (۴) می‌افتید.

گول‌بخوری

مخزنی به حجم ۱۶ لیتر در دمای ۴۷ درجه سلسیوس، پر از گاز هلیوم است. اگر فشار پیمانه‌ای گاز برابر با فشار هوا

یعنی 10^5 پاسکال باشد، جرم گاز چند گرم است؟ ($R = 8 \frac{J}{mol.K}$ و $M_{He} = 4 g/mol$)

(سوال ۷۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (فارج از کشور))

۴ (۴)

۵ (۳)

۱۶ (۲)

۲۵ (۱)



در چرخه ماشین گرمایی درون سوز بنزینی، کدام فرایندها را می توان فرایند بی دررو در نظر گرفت؟ **۷۵**

الف) ضربه مکش

ب) ضربه تراکم

پ) ضربه قدرت

ت) ضربه خروج گاز

۱) ب - پ

۲) ب - ت

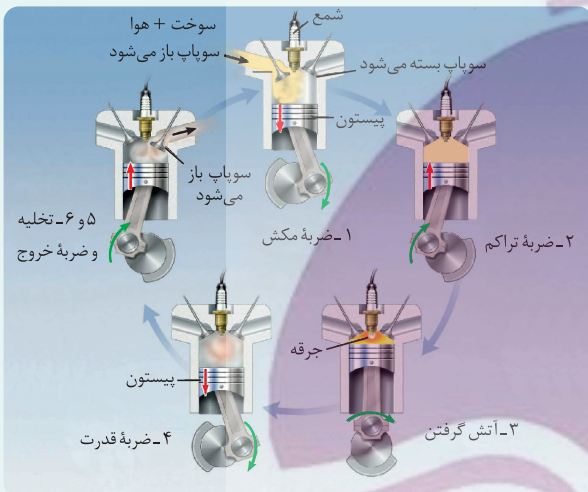
۳) الف - پ

۴) الف - ت

مشاوره تا قبل از کنکور ۱۴۰۳، فرایندهای چرخه موتور بنزینی در سؤالهای کنکور، جایگاهی نداشتند و به همین دلیل، بسیاری از داوطلبان کنکور، آن ها را کنار می گذاشتند. اما وقتی در کنکورهای ریاضی ۱۴۰۳ و ۱۴۰۴ نوبت اول و هم چنین کنکور خارج از کشور ۱۴۰۳ از این درس سؤالاتی در کنکور مطرح شد، توجه خاصی به این فرایندها پیدا شده و داوطلبان کنکور به این باور رسیده اند که سؤالات ترمودینامیک از چنین مباحثی هم می تواند مطرح شود.

پاسخ: گزینه ۱

ماشین بنزینی چرخه ای را طی می کند که شامل شش فرایند است. از این شش فرایند، چهار فرایند همراه با حرکت پیستون اند که به آن ها ضربه می گویند.



۱) **ضربه مکش:** با پایین آمدن پیستون، مخلوط بنزین و هوا در فشار ثابت جو از طریق دریچه ورودی وارد استوانه شده و وقتی پیستون به پایین ترین وضعیت خود رسید، این دریچه بسته شده و مخلوط بنزین و هوا در داخل استوانه محبوس می شوند.

۲) **ضربه تراکم:** پیستون بالا می آید، مخلوط را به سرعت متراکم کرده و دما و فشار آن را به صورت بی دررو، تا حد زیادی بالا می برد.

۳) **آتش گرفتن:** هنگامی که پیستون به بالاترین وضعیت خود رسید، شمع جرعه می زند، مخلوط آتش می گیرد و دما و فشار آن در حجم ثابت تا مقدار زیادی بالا می رود.

۴) **ضربه قدرت:** در این مرحله، در اثر فشار زیاد، مخلوط منبسط می شود و حجم آن از V_1 به V_2 می رسد. این انبساط به سرعت رخ می دهد. بنابراین، می توان آن را بی دررو در نظر گرفت. در نتیجه در این انبساط، فشار و دمای مخلوط کاهش می یابند. در این مرحله، مخلوط پیستون را به شدت به پایین می راند و روی آن کار انجام می دهد. این کار توسط میل لنگ به اجزای دیگر ماشین منتقل می شود.

۵) **تخلیه:** در حالی که پیستون در پایین ترین وضعیت (حجم V_2) قرار دارد، سوپاپ دریچه خروجی باز می شود و قسمتی از محصولات احتراق به صورت دود از دریچه خروجی خارج می شود، تا این که فشار گاز داخل استوانه با فشار جو یکسان شود. در این مرحله، پیستون ساکن است.

۶) **ضربه خروج گاز:** پیستون بالا می آید و بقیه محصولات احتراق را بیرون می راند و حجم فضای بالای پیستون از V_2 به مقدار اولیه V_1 می رسد.

با توجه به متن درس باکس، مراحل ۲ و ۴، یعنی ضربه تراکم و ضربه قدرت را می توان فرایند بی دررو در نظر گرفت.

پاسخ خیلی تشریحی

کدام مورد درست است؟ ۷۶

- (۱) عنصرهایی از جدول تناوبی با عددهای اتمی ۱ تا ۹۲، در طبیعت یافت می‌شوند.
- (۲) جرم یک نمونه طبیعی از عنصر هیدروژن با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند.
- (۳) زمین، یک سیاره سنگی است و در بین ۸ عنصر فراوان تر آن، عنصر نافلزی وجود ندارد.
- (۴) امروزه با پیشرفت علم، تبدیل فلز پلاتین ($_{78}\text{Pt}$) به طلا ($_{79}\text{Au}$) امکان‌پذیر است.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با پیشرفت علم شیمی و فیزیک، انسان می‌تواند طلا تولید کند، اما هزینه تولید آن به اندازه‌ای زیاد است که صرفه اقتصادی ندارد. بررسی سایر گزینه‌ها:

- گزینه (۱): درست که ۹۲ عنصر در طبیعت یافت می‌شوند، اما همه این عناصر جزء ۹۲ عنصر اول جدول تناوبی نیستند! عنصر تکنسیم با عدد اتمی ۴۳، یک عنصر ساختگی است و در طبیعت یافت نمی‌شود.
- گزینه (۲): یک نمونه طبیعی از عنصر هیدروژن، شامل ۳ ایزوتوپ ^1_1H ، ^2_1H و ^3_1H است که ^3_1H پرتوزا بوده و با گذشت زمان، متلاشی می‌شود؛ بنابراین جرم نمونه تغییر می‌کند.
- گزینه (۳): زمین یک سیاره سنگی است، اما در بین ۸ عنصر فراوان تر آن، ۲ عنصر نافلزی (اکسیژن و گوگرد) وجود دارد.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

با در نظر گرفتن موقعیت عناصر A, D, X و Z در جدول دوره‌ای، کدام مطلب درست است؟

(۱) عنصر A، فراوان‌ترین گاز سازندهٔ هواکره است که در اتم آن شمار الکترونی با $l = 0$ با شمار الکترونی با $l = 1$ برابر است.

(۲) عنصر D، گازی زردرنگ با خاصیت رنگ‌بری است که فقط در دماهایی بالاتر از 200°C می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد.

۳) عنصر X ، تشکیل‌دهنده یونی ضروری برای تنظیم عملکرد دستگاه عصبی بوده و بزرگ‌ترین شعاع اتمی را در بین ۳۶ عنصر اول جدول دارد.

 K^+

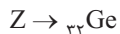
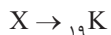
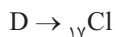
(۴) عنصر Z ، دومین شبه‌فلز گروه ۱۴ جدول دوره‌ای و عنصر اصلی سازنده سلول‌های خورشیدی است.

سليسم

پاسخ: گزینه ۳

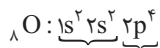
ابتدا عنصرها را مشخص می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



بررسی گزینه‌ها:

گزینۀ (۱): عنصر A، اکسیژن است، اما فراوان‌ترین گاز سازنده هوا، نیتروژن می‌باشد. در ضمن در اتم O_8 ، شمار الکترون‌ها برابر با $1 = 8$ (زیرلایه‌های s) و شمار الکترون‌ها با $1 = 1$ (زیرلایه‌های p) برابر است:



٤ الكترون با $l=1$ ٤ الكترون با $l=0$

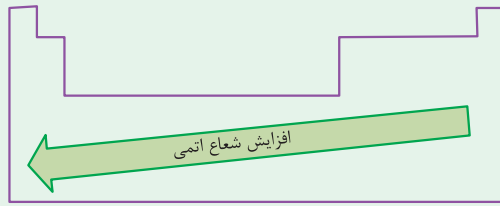
گزینه (۲): D، کلر بوده که در دمای اتاق، گازی زردرنگ با خاصیت رنگ‌بری و گندزدایی است. گاز کلر در دمای اتاق نیز می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد.

نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلوئور	حتی در دمای 200°C - به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم	در دمای 200°C واکنش می‌دهد.
ید	در دمای بالاتر از 400°C واکنش می‌دهد.

گزینه (۳): عنصر X ، پتاسیم است. یون K^+ برای تنظیم عملکرد دستگاه عصبی ضروری است. از اونجایی که در یک دوره از راست به چپ و در یک گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی می‌یابد، در بین ۳۶ عنصر اول جدول، نخستین عنصر دوره چهارم، یعنی K ۱۹ بیشترین شعاع اتمی را دارد.



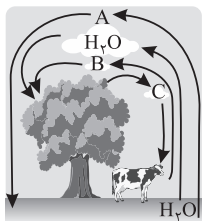
با توجه به روند تغییر شعاع اتمی در یک گروه و دوره، هر چه عنصری در جدول دوره‌ای، سمت چپ‌تر و پایین‌تر باشد. شعاع آن بیشتر است و بالعکس! هر چه عنصری، سمت راست‌تر و بالاتر باشد، شعاع آن کم‌تر است.



گزینه (۴): عنصر Z ، همان ژرمانیم است که دومین شبه‌فلز گروه ۱۴ محسوب می‌شود! اما عنصر اصلی سازنده سلول‌های خورشیدی، سیلیسیم است و نه ژرمانیم!



با توجه به شکل زیر که برهم کنش هواکره با زیست کره را نشان می دهد، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟



الف) نسبت شمار جفت الکترون های ناپیوندی به پیوندی در ساختار مولکول C،

دو برابر این نسبت در ساختار مولکول B است.

ب) گاز A یکی از واکنش دهنده های فرایند هابر است.

پ) در هوای مایع با دمای -200°C ، هر سه ماده A، B و C وجود دارند.

ت) گاز C دارای دگرشکلی است که در لایه دوم هواکره، درصد حجمی بیشتری نسبت به C دارد.

۲) پ و ت

۱) الف و ب

۴) ب و ت

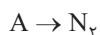
۳) الف و پ

پاسخ: گزینه ۱

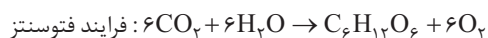
عبارت های «الف» و «ب» درست اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گیاهان برای رشد خود نیاز به نیتروژن دارند. جانداران ذره بینی، گاز نیتروژن هواکره را برای مصرف گیاهان در خاک تثبیت می کنند.

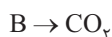


گیاهان با بهره گیری از نور خورشید و مصرف کربن دی اکسید هواکره (همان فرایند فتوسنتز)، اکسیژن مورد نیاز جانداران را تولید می کنند.



گاز تولیدی در فرایند
تنفس موجودات زنده و گاز مصرفی
در فرایند فتوسنتز

گاز تولیدی در فرایند فتوسنتز
و گاز مصرفی در فرایند تنفس



بررسی عبارت ها:

الف) نسبت شمار جفت الکترون های ناپیوندی به پیوندی در مولکول های B و C به ترتیب برابر ۱ و ۲ است:



ب) گاز A همان نیتروژن است که یکی از واکنش دهنده های تولید آمونیاک به روش هابر است:



پ) در هوای مایع با دمای -200°C ، کربن دی اکسید (CO_2) وجود ندارد. در مراحل تقطیر جزء به جزء هوای مایع، این ماده

در دمای -78°C به حالت جامد از مخلوط جدا می شود.

ت) گاز C، اکسیژن (O_2) است که به شکل مولکول های سه اتمی اوزون (O_3) نیز در هواکره یافت می شود. درست که بیشترین

مقدار اوزون در لایه دوم (استراتوسفیر) وجود دارد، اما دقت کنید که به طور کلی مقدار اوزون در هواکره کم است و درصد حجمی

آن در هوا خیلی کم تر از اکسیژن است.

با توجه به معادله‌های موازنه‌شده زیر، Y کدام ترکیب است؟ **۷۹**



(۲) سود سوزآور

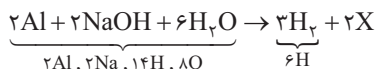
(۴) سدیم کربید

(۱) جوش شیرین

(۳) سدیم کربنات

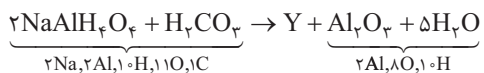
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ باید به کمک واکنش اول به X و سپس به کمک واکنش دوم، به Y برسیم. طبق قانون پایستگی جرم، شمار اتم‌های هر عنصر در دو سمت معادله یک واکنش باید برابر باشد؛ بنابراین خواهیم داشت:



با توجه به این که ضریب X برابر ۲ است، در فرمول X، باید ۱ اتم Al، ۱ اتم Na، ۴ اتم H و ۴ اتم O وجود داشته باشد؛ بنابراین فرمول X را می‌توان به صورت NaAlH_4O_4 در نظر گرفت (در واقع به صورت $\text{NaAl}(\text{OH})_4$ است).

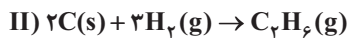
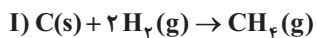
حالا بریم سراغ واکنش دوم:



پس در فرمول Y، باید ۲ اتم Na، ۱ اتم C و ۳ اتم O وجود داشته باشد، یعنی فرمول Y به صورت Na_2CO_3 بوده که همان سدیم کربنات است. دقت کنید که جوش شیرین همان سدیم هیدروژن کربنات (NaHCO_3) می‌باشد.

۸۰

برای تولید متان از عناصر سازنده‌اش، مقداری گرافیت را با مقدار کافی گاز هیدروژن وارد ظرف کرده‌ایم (واکنش I). اگر واکنش (II) نیز به عنوان واکنش جانبی انجام شود و جرم متان تولیدشده، $\frac{1}{6}$ برابر جرم اتان تولیدی باشد، چند درصد از گرافیت اولیه در واکنش (I) شرکت کرده است؟ ($H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)



۵۵ (۴)

۴۵ (۳)

۶۰ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

جرم متان و اتان تولیدی را به ترتیب $\frac{1}{6}$ و ۱ گرم در نظر می‌گیریم و شمار مول‌های گرافیت مصرف‌شده در هر واکنش را حساب می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} \text{ g } CH_4 \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{16 \text{ g } CH_4} \times \frac{1 \text{ mol } C}{1 \text{ mol } CH_4} = \frac{1}{96} \text{ mol } C \\ 1 \text{ g } C_2H_6 \times \frac{1 \text{ mol } C_2H_6}{30 \text{ g } C_2H_6} \times \frac{2 \text{ mol } C}{1 \text{ mol } C_2H_6} = \frac{2}{30} \text{ mol } C \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{96} + \frac{2}{30} = \frac{5}{72} = \frac{1}{14.4} \text{ mol } C$$

پس می‌توان گفت کربن (گرافیت) اولیه، $\frac{1}{6}$ مول بوده، اما $\frac{1}{14.4}$ مول از آن در واکنش تولید متان شرکت کرده است، پس خواهیم داشت:

$$\text{I) درصد گرافیت شرکت کرده در واکنش (I)} = \frac{\frac{1}{14.4}}{\frac{1}{6}} \times 100 = 41.6\%$$



اگر فرمول شیمیایی مس (II) منگنات و سدیم پرمنگنات به ترتیب به صورت CuMnO_4 و NaMnO_4 باشد، در هر واحد فرمولی از کلسیم پرمنگنات، اتم وجود دارد و تبدیل یون پرمنگنات به منگنات، یک فرایند به شمار می آید.

(۲) ۱۱ - اکسایش

(۱) ۷ - کاهش

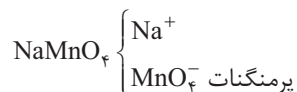
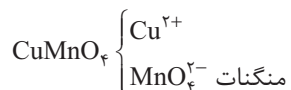
(۴) ۱۱ - کاهش

(۳) ۷ - اکسایش

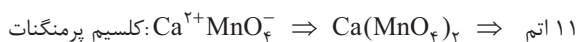
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

باید با توجه به فرمول ترکیب‌های داده شده و کاتیون‌های Cu^{2+} و Na^+ ، فرمول شیمیایی یون‌های منگنات و پرمنگنات را به دست آوریم:

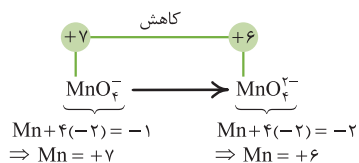


به این ترتیب خواهیم داشت:



عدد اکسایش منگنز در یون‌های پرمنگنات و منگنات به ترتیب برابر +۷ و +۶ است؛ بنابراین تبدیل یون پرمنگنات به منگنات،

یک فرایند کاهش به شمار می‌رود:



۸۲ کدام گزینه درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

- (۱) در محلول ۵۰ درصد جرمی اتانول در آب برخلاف محلول ۵۰ درصد جرمی استون در آب، آب نقش حلال را دارد.
- (۲) چگالی هگزان از آب کمتر بوده و عامل بنفش‌رنگ‌بودن مخلوط همگن ید در هگزان، حلال آن است.
- (۳) هوا و آب دریا از جمله محلول‌هایی هستند که از یک حل‌شونده و چند حلال تشکیل شده‌اند.
- (۴) جاذبه بین مولکولی ترکیبات هیدروژن‌دار عناصر دوره دوم گروه‌های ۱۵ و ۱۷ جدول دوره‌ای، برخلاف گروه ۱۴، از نوع پیوند هیدروژنی است.

پاسخ: گزینه ۴

ترکیب‌های هیدروژن‌دار عناصر دوره دوم در گروه‌های ۱۴، ۱۵ و ۱۷ به ترتیب به صورت CH_4 ، NH_3 و HF است که جاذبه بین مولکولی NH_3 و HF از نوع هیدروژنی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): در محلول ۵۰٪ جرمی اتانول و استون در آب، جرم حلال و حل‌شونده یکسان است و با توجه به جرم مولی بیشتر استون ($C_6H_{12}O$) و اتانول (C_2H_6O) نسبت به آب و در نتیجه کم‌تر بودن مول آن‌ها، آب، حلال و استون و اتانول، حل‌شونده محسوب می‌شوند.

برای مشخص کردن حلال و حل‌شونده، حلال ماده‌ای است که شمار مول بیشتری دارد، برای مثال در انحلال ۱ مول الکل در ۲ مول آب، آب، حلال و الکل، حل‌شونده محسوب می‌شود.

- گزینه (۲): هگزان بی‌رنگ بوده و جزء حلال‌های آلی است که چگالی کم‌تری از آب دارد.
- گزینه (۳): هوا و آب دریا، حاوی یک حلال و چند حل‌شونده هستند، نه بالعکس!

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نکته

در واکنش تخمیر یک کیلوگرم از محلول آبی گلوکز، ۲۲۰ گرم گاز CO_2 آزاد می‌شود. اگر در پایان واکنش غلظت مولی گلوکز به $\frac{1}{3}$ غلظت مولی اولیه‌اش برسد، درصد جرمی محلول به تقریب چند واحد تغییر می‌کند؟ (از تغییر حجم صرف نظر شود و $\text{O} = ۱۶, \text{C} = ۱۲, \text{H} = ۱: \text{g.mol}^{-1}$)



۶۲ (۴) ۴۵ (۳) ۳۹ (۲) ۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به جرم کربن دی‌اکسید آزاد شده، مقدار گلوکز مصرف شده در واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$220 \text{ g CO}_2 \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{44 \text{ g CO}_2} \times \frac{1 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}{2 \text{ mol CO}_2} = 2/5 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$$

گام دوم: با توجه به این که غلظت مولی گلوکز به $\frac{1}{3}$ غلظت مولی اولیه‌اش رسیده و حجم تغییر نکرده است، پس مول آن $\frac{1}{3}$ حالت اولیه شده؛ بنابراین مول اولیه (n) را به دست می‌آوریم:

$$\text{مول باقی‌مانده} = \text{مول مصرفی} - \text{مول اولیه} \Rightarrow n - 2/5 = \frac{n}{3} \Rightarrow n = \frac{15}{4} \text{ mol}$$

$$\text{مول باقی‌مانده} = \frac{15}{4} \text{ mol} - \frac{2}{5} \text{ mol} = \frac{5}{4} \text{ mol}$$

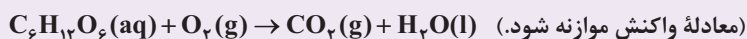
گام سوم: درصد جرمی محلول را در حالت اولیه و نهایی حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی محلول اولیه} = \frac{\frac{15}{4} \text{ mol} \times \frac{180 \text{ g}}{1 \text{ mol}}}{1000 \text{ g}} \times 100 = 67/5 \%$$

$$\text{درصد جرمی محلول ثانویه} = \frac{\frac{5}{4} \text{ mol} \times \frac{180 \text{ g}}{1 \text{ mol}}}{(1000 - 220) \text{ g}} \times 100 = 29 \%$$

$$\text{درصد جرمی محلول ثانویه} - \text{درصد جرمی محلول اولیه} = 29 - 67/5 = 38/5 = 7.6 \approx 8 \%$$

برای اکسایش بخشی از گلوکز موجود در ۸۱ میلی‌لیتر از محلول آبی آن، $1/5$ مول اکسیژن مصرف می‌شود. در صورتی که غلظت آغازی گلوکز در محلول، $6/5$ برابر غلظت پایانی آن باشد، به تقریب، چند درصد جرمی گلوکز در این واکنش شرکت کرده است؟ ($\text{O} = ۱۶, \text{H} = ۱: \text{g.mol}^{-1}$) (سوال ۲۳۹ کنکور تهرانی ۱۴۰۰ (فاز از کشور))



۶۹ / ۵ (۱) ۷۹ / ۵ (۲)
۸۹ / ۵ (۳) ۹۹ / ۵ (۴)

کدام مورد نادرست است؟

۸۴

- (۱) اگر درصد جرمی محلول سیرشده نمک AB در دمای 40°C برابر $37/5$ باشد، انحلال پذیری آن در آب در این دما برابر 60 گرم است.
- (۲) موادی که انحلال پذیری آن‌ها در آب در دمای معین، کمتر از $1/100$ گرم در 100 گرم آب باشد، جزء مواد نامحلول محسوب می‌شوند.
- (۳) اگر مولکول‌های AB_3 و AD_4 در میدان الکتریکی جهت‌گیری نکنند، اتم مرکزی در آن‌ها فاقد جفت‌الکترون ناپیوندی است.
- (۴) جرم مولی استون از جرم مولی اتانول بیشتر بوده، اما نقطه جوش اتانول بالاتر از استون است.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

موادی که انحلال پذیری آن‌ها کمتر از $1/100$ گرم در 100 گرم آب است، جزء مواد نامحلول محسوب می‌شوند.

انحلال پذیری

مواد محلول مواد کم‌محلول مواد نامحلول

1 g 100 g 100 g

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): اگر انحلال پذیری یک نمک در دمای معین را S گرم در 100 گرم آب در نظر بگیریم، درصد جرمی محلول سیرشده آن از رابطه $a = \frac{S}{S+100} \times 100$ به دست می‌آید:

$$37/5 = \frac{S}{S+100} \times 100 \Rightarrow \frac{37/5}{100} = \frac{S}{S+100} \Rightarrow 8S = 3S + 300 \Rightarrow 5S = 300 \Rightarrow S = 60$$

گزینه (۳): مولکول‌های AB_3 و AD_4 به شرطی ناقطبی هستند که اتم مرکزی در آن‌ها الکترون ناپیوندی نداشته باشد.

گزینه (۴): هرچند جرم مولی استون ($\text{CH}_3-\overset{\text{O}}{\parallel}{\text{C}}-\text{CH}_3$) بیشتر از اتانول ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$) است، اما نقطه جوش اتانول بالاتر می‌باشد، زیرا مولکول‌های اتانول به دلیل داشتن گروه OH ، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارند.



اگر آرایش الکترونی یون پایدار M^{n+} به $3d^1$ ختم شود، کدام مورد به یقین درست است؟

(۱) M ، فلز واسطه است و به n ، دو مقدار متفاوت می‌توان نسبت داد.

(۲) در اتم M ، شمار الکترون‌ها با $l = 2$ و $n = 3$ ، ۵ برابر شمار الکترون‌ها با $l = 0$ و $n = 4$ است.

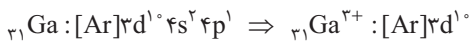
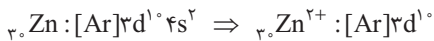
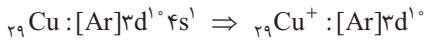
(۳) اگر در اتم ${}^{65}M$ ، تفاوت شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها برابر ۵ باشد، واکنش $M(s) + FeSO_4(aq) \rightarrow$ به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

(۴) اگر M ، فلزی اصلی باشد، تفاوت عدد اتمی آن با عنصر گروه ۷ در دوره پنجم برابر ۱۱ است.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

آرایش الکترونی یون‌های ${}_{29}Cu^{+}$ ، ${}_{30}Zn^{2+}$ و ${}_{31}Ga^{3+}$ به $3d^1$ ختم می‌شود:



بررسی گزینه‌ها:

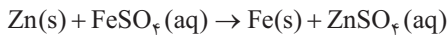
گزینه (۱): Cu و Zn جزء فلزهای واسطه (دسته d) و Ga ، جزء فلزهای اصلی (دسته p) است. در ضمن، n سه مقدار مختلف (۱، ۲ و ۳) دارد.

گزینه (۲): عددهای کوانتومی $l = 2$ و $n = 3$ مربوط به زیرلایه $3d$ و عددهای کوانتومی $l = 0$ و $n = 4$ مربوط به زیرلایه $4s$ است. در ${}_{30}Zn$ و ${}_{31}Ga$ ، تعداد الکترون‌های $3d$ ، ۵ برابر $4s$ ($\frac{1}{4} = 5$) است، اما در ${}_{29}Cu$ ، این نسبت برابر $1 = \frac{1}{1}$ می‌باشد.

گزینه (۳): باید به کمک عدد جرمی و تفاوت شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها در ${}^{65}M$ ، عدد اتمی M را به دست آوریم:

$${}_{30}Zn \Rightarrow \frac{65 - 5}{2} = 30 = \text{عدد اتمی} = \frac{\text{تفاوت شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها} - \text{عدد جرمی}}{2}$$

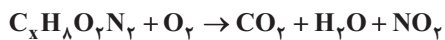
واکنش‌پذیری روی از آهن بیشتر است؛ بنابراین واکنش به طور طبیعی انجام می‌شود.



گزینه (۴): از بین مس، روی و گالیم، فقط گالیم (${}_{31}Ga$) متعلق به گروه ۱۳ و دسته p است و فلزی اصلی محسوب می‌شود. از طرفی عدد اتمی عنصر گروه ۷ در دوره پنجم، ۷ واحد بیشتر از گاز نجیب دوره چهارم بوده و برابر $36 + 7 = 43$ است:

$$43 - 31 = 12$$

از واکنش سوختن مقداری $C_xH_8O_7N_7$ ، $0/4$ مول آب و $17/6$ گرم کربن دی اکسید تولید شده است. چند گرم $C_xH_8O_7N_7$ در این واکنش مصرف شده است؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16 : g.mol^{-1}$) بازده واکنش 50% درصد است.



$$23/2 (2)$$

$$11/6 (1)$$

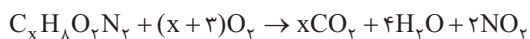
$$46/4 (4)$$

$$32/8 (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای محاسبه جرم مصرفی ترکیب آلی نیاز به جرم مولی آن و در نتیجه مقدار x داریم. ابتدا معادله واکنش را برحسب x موازنه می کنیم:



$$C_xH_8O_7N_7 \text{ جرم مولی} = (12x + 68) g.mol^{-1}$$

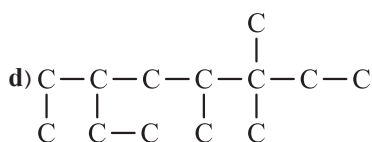
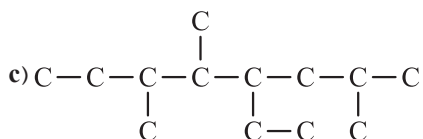
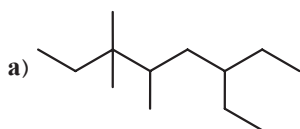
حالا کسرهای تناسب را برای ۳ ماده گفته شده می نویسیم:

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{100} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{m \times \frac{50}{100}}{1 \times (12x + 68)} = \frac{\frac{17/6}{x \times 44}}{\frac{0/4}{4}} \Rightarrow \frac{m \times \frac{1}{2}}{116} = \frac{0/4}{4}$$

$$\Rightarrow m = 23/2 g C_xH_8O_7N_7$$

کدام ساختارها را می‌توان به آلکانی با نام «۶-اتیل-۳،۳،۴-تری‌متیل اوکتان» نسبت داد؟

۸۷



۲ و d

۴ و c

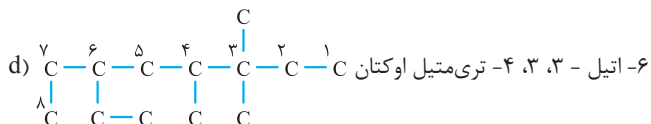
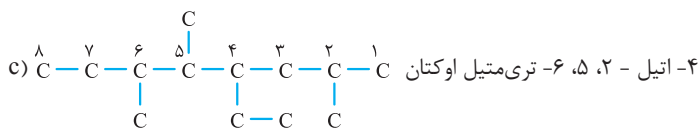
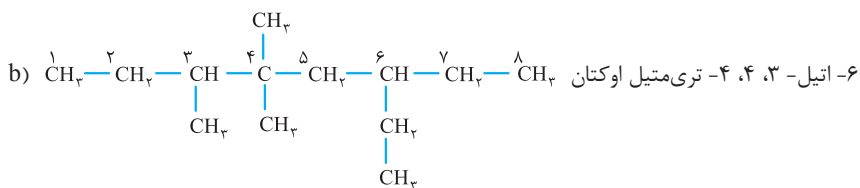
۱ و b

۳ و c

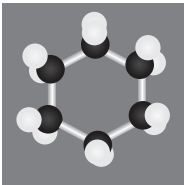
پاسخ: گزینه ۲

باید همه آلکان‌های داده شده را نام‌گذاری کنیم:

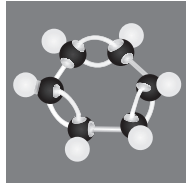
پاسخ خیلی تشریحی ✓



کدام موارد داده شده در ارتباط با هیدروکربن های زیر، درست است؟



(B)



(A)

الف) A سرگروه خانواده مهمی از هیدروکربن های سیرشده به نام ترکیب های آروماتیک است.

ب) هر دو هیدروکربن A و B، در نفت خام وجود دارند.

پ) فرمول مولکولی B، مانند ششمین عضو خانواده آلکن ها است.

ت) نسبت شمار اتم های هیدروژن به شمار اتم های کربن در مولکول B، دو برابر این نسبت در مولکول A است.

(۲) الف و ت

(۱) ب و پ

(۴) ب و ت

(۳) الف و پ

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت های «ب» و «ت» درست اند.

A و B به ترتیب بنزن (C_6H_6) و سیکلوهگزان (C_6H_{12}) هستند.

بررسی عبارت ها:

الف) بنزن، سرگروه ترکیب های آروماتیک است، اما این ترکیب ها، سیر نشده محسوب می شوند.

ب) کاملاً درسته!

پ) اولین عضو آلکن ها (C_2H_4)، دو اتم کربن دارد؛ پس ششمین عضو آن ها، دارای ۷ اتم کربن بوده و فرمول مولکولی یکسانی

با سیکلوهگزان ندارد.

$$\left. \begin{aligned} (C_6H_6) \text{ بنزن} &\Rightarrow x = \frac{\text{شمار اتم های هیدروژن}}{\text{شمار اتم های کربن}} = \frac{6}{6} = 1 \\ (C_6H_{12}) \text{ سیکلوهگزان} &\Rightarrow y = \frac{\text{شمار اتم های هیدروژن}}{\text{شمار اتم های کربن}} = \frac{12}{6} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = 2 \quad (ت)$$

کدام مورد درست است؟ ۸۹

- (۱) انرژی گرمایی دو نمونه آب خالص با جرم یکسان و دمای متفاوت، قابل مقایسه نیست.
- (۲) در شرایط یکسان دما و فشار، گرمای ویژه آب از روغن زیتون بیشتر است، اما ظرفیت گرمایی آن‌ها می‌تواند یکسان باشد.
- (۳) در دمای 25°C و فشار 1 atm ، ظرفیت گرمایی ویژه یک فلز در مقایسه با یک گاز به یقین بیشتر است.
- (۴) الماس و گرافیت، دگرشکل‌های طبیعی کربن هستند و پایداری الماس در مقایسه با گرافیت بیشتر است.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شرایط یکسان دما و فشار، ظرفیت گرمایی یک ماده به جرم آن نیز بستگی دارد. با افزایش جرم روغن زیتون، ظرفیت گرمایی آن می‌تواند با ظرفیت گرمایی آب یکسان شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): انرژی گرمایی یک نمونه ماده افزون بر جرم به دمای ماده نیز بستگی دارد. در جرم برابر، نمونه آبی که دمای بیشتری دارد، انرژی گرمایی آن بیشتر است.

گزینه (۳): بسته به نوع فلز و گاز، ظرفیت گرمایی ویژه یک فلز می‌تواند از یک گاز بیشتر یا کمتر باشد. مثلاً گرمای ویژه آلومینیم (0.9) از کربن دی‌اکسید (0.84) بیشتر و از اکسیژن (0.92) کمتر است. نیازی به حفظ اعداد نیست. فقط باید بدوین رابطه مشخصی بین گرمای ویژه فلزها و گازها وجود ندارد.

گزینه (۴): پایداری الماس از گرافیت کمتر است.

۹۰

یک یخچال صحرایی با ظرفیت گرمایی $1500 \text{ J} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ در محیطی با دمای 40°C قرار می‌گیرد. اگر حداکثر دمای لازم برای نگهداری نوعی روغن گیاهی 15°C باشد، حداقل چند گرم آب باید از سطح این یخچال تبخیر شود تا روغن فاسد نشود؟ (فرض کنید همه گرمای مورد نیاز برای تبخیر آب از محتویات درون یخچال گرفته می‌شود و گرمای لازم برای تبخیر یک مول آب برابر 44 kJ است و $H = 1$, $O = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

$$15/3 \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$

$$21/1 \quad (4)$$

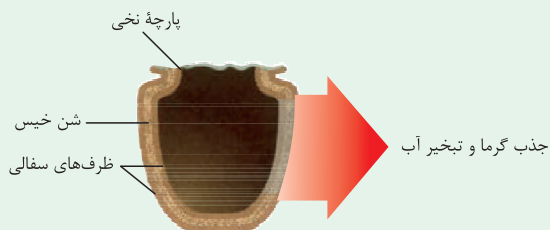
$$18 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

یخچال صحرایی:

نکته

یخچال صحرایی دستگاهی همانند یک یخچال است، با این تفاوت که بدون نیاز به انرژی الکتریکی، غذا را خنک و برای مدت طولانی‌تری سالم نگه می‌دارد.



این دستگاه از دو ظرف سفالی (ساخته‌شده از خاک رس) تشکیل شده که فضای بین آن‌ها با شن خیس پر شده است. درپوش این یخچال، پوششی نخی و مرطوب است که تهویه را به آسانی انجام می‌دهد. تبخیر آب از سطح بیرونی ظرف سفالی طبق معادله $H_2O(l) + 44/1 \text{ kJ} \rightarrow H_2O(g)$ باعث جذب گرما و کاهش دمای محفظه درون ظرف شده و به این ترتیب غذای درون آن را خنک می‌کند.

در یخچال‌های صحرایی، تبخیر آب از سطح کوزه‌های سفالی باعث جذب گرما و کاهش دمای درونی محفظه می‌شود.

حداکثر دمای لازم برای نگهداری این روغن گیاهی 15°C است؛ بنابراین برای نگهداری این روغن در یخچال صحرایی باید دمای درون آن حداکثر 15°C باشد.

با استفاده از ظرفیت گرمایی یخچال و تغییر دما، گرمای گرفته‌شده از محتویات درون یخچال را به دست می‌آوریم:

$$Q = C \Delta \theta \Rightarrow Q = 1500 \times (40 - 15) = 1500 \times 25 = 37500 \text{ J} \Rightarrow Q = 37/5 \text{ kJ}$$

ظرفیت گرمایی

حالا باید حساب کنیم که برای تبخیر چند گرم آب به $37/5$ کیلوژول گرما نیاز است:

$$? \text{ g } H_2O : 37/5 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ mol } H_2O}{44 \text{ kJ}} \times \frac{18 \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O} = 15/3 \text{ g } H_2O$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام مورد جمله زیر را به درستی کامل نمی کند؟

«نخستین عضو خانواده با دومین عضو خانواده همپار است.»

- (۱) اترها - الکلها
(۲) سیکلوآلکانها - آلکنها
(۳) کتونها - آلدهیدها
(۴) استرها - کربوکسیلیک اسیدها

پاسخ: گزینه ۳

ترکیب های آلی مهم:

درس Box

نام خانواده	ویژگی	فرمول کلی	فرمول ساده ترین عضو خانواده
آلکانها	همه پیوندها یگانه هستند.	$\begin{array}{c} \\ -C- \\ \end{array}$	$\begin{array}{c} H \\ \\ H-C-H \\ \\ H \end{array}$
آلکنها	دارای ۱ پیوند $C=C$	$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ C=C \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$	$\begin{array}{c} H & & H \\ & \diagdown & / \\ & C=C \\ & / & \diagdown \\ H & & H \end{array}$
آلکینها	دارای ۱ پیوند $C \equiv C$	$-C \equiv C-$	$H-C \equiv C-H$
سیکلوآلکانها	همه پیوندها یگانه و دارای ساختار حلقوی	$\triangle, \square, \dots$	$\begin{array}{c} CH_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ H_3C-CH_2 \end{array}$
آلدهیدها	دارای گروه آلدهیدی $-C(=O)H$	$\begin{array}{c} O \\ \\ R-C-H \end{array}$ R. هیدروژن یا گروه هیدروکربنی است.	$\begin{array}{c} O \\ \\ H-C-H \end{array}$
کتونها	دارای گروه کتونی $-C(=O)-$	$\begin{array}{c} O \\ \\ R-C-R' \end{array}$ R و R' گروه هیدروکربنی هستند.	$\begin{array}{c} O \\ \\ CH_3-C-CH_3 \end{array}$
الکلها	دارای گروه هیدروکسیل (OH)	ROH R گروه هیدروکربنی است.	CH_3-OH
اترها	دارای گروه اتری $(-O-)$	$R-O-R'$ R و R' گروه هیدروکربنی هستند.	CH_3-O-CH_3
کربوکسیلیک اسیدها	دارای گروه کربوکسیل $-C(=O)OH$	$\begin{array}{c} O \\ \\ R-C-OH \end{array}$ R. هیدروژن یا گروه هیدروکربنی است.	$\begin{array}{c} O \\ \\ H-C-OH \end{array}$
استرها	دارای گروه استری $-C(=O)O-$	$\begin{array}{c} O \\ \\ R-C-O-R' \end{array}$ R هیدروژن یا گروه هیدروکربنی است، اما R' فقط می تواند گروه هیدروکربنی باشد.	$\begin{array}{c} O \\ \\ H-C-O-CH_3 \end{array}$

نام خانواده	ویژگی	فرمول کلی	فرمول ساده‌ترین عضو خانواده
آمین‌ها	دارای گروه آمینی (—N—)	$\begin{array}{c} \text{R} - \text{N} - \text{R}' \\ \\ \text{R}'' \end{array}$ R، R' و R'' اتم هیدروژن یا گروه هیدروژنی هستند. ولی هر سه به طور هم‌زمان نمی‌توانند هیدروژن باشند.	CH_3NH_2
آمیدها	دارای گروه آمیدی (—C(=O)—N—)	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ \text{R} - \text{C} - \text{N} - \text{R}' \\ \\ \text{R}'' \end{array}$ R، R' و R'' اتم هیدروژن یا گروه هیدروکربنی هستند.	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ \text{H} - \text{C} - \text{NH}_2 \end{array}$

به ترکیب‌هایی که فرمول مولکولی یکسان، اما ساختار متفاوتی دارند، ایزومر یا همپار گفته می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی گزینه‌ها:

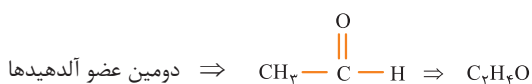
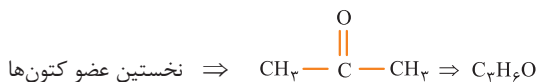
گزینه (۱):



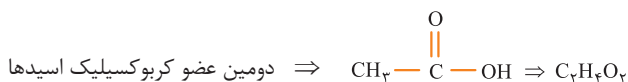
گزینه (۲):



گزینه (۳):



گزینه (۴):



در مورد واکنش تیغه روی و محلول مس (II) سولفات، چند عبارت زیر درست است؟ ($\text{Zn} = ۶۵$, $\text{Cu} = ۶۴ : \text{g.mol}^{-1}$)

- در طول انجام واکنش، غلظت یکی از یون‌ها ثابت است.
- با گذشت زمان، جرم مواد جامد کاهش می‌یابد.
- در طول انجام واکنش، سرعت تغییر رنگ محلول به مرور زمان کاهش می‌یابد.
- شیب نمودار غلظت - زمان برای تمام گونه‌ها در طول انجام واکنش یکسان است.

۴ (۴)

۳ (۳)

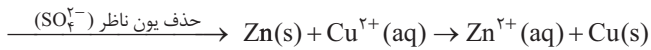
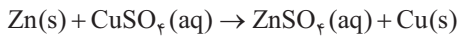
۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

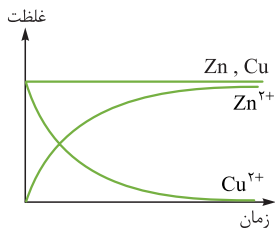
عبارت‌های اول تا سوم درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



بررسی عبارت‌ها:

- یون سولفات در واکنش شرکت ندارد و غلظت آن در طول انجام واکنش، ثابت است.
- با انجام واکنش، ۱ مول یا ۶۵ گرم Zn(s) مصرف و ۱ مول یا ۶۴ گرم Cu(s) تولید می‌شود، بنابراین جرم مواد جامد کاهش می‌یابد.
- با گذشت زمان، سرعت واکنش کاهش می‌یابد؛ بنابراین سرعت تغییر رنگ محلول (به دلیل مصرف یون‌های Cu^{2+}) نیز کاهش می‌یابد.
- غلظت مواد جامد و مایع خالص با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند، در حالی که غلظت یون‌های محلول در آب، تغییر می‌کند.



۹۳

در شرایطی معین، یک مول پروپان با سرعت ثابت ۱٪/۰ مول بر ثانیه در حال سوختن کامل است. پس از چند ثانیه، جرم کربن دی اکسید تولیدی با جرم پروپان باقی مانده برابر می شود؟ (H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol⁻¹)

- (۱) ۲۵ (۲) ۵۰ (۳) ۷۵ (۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

معادله واکنش سوختن کامل پروپان و جدول تغییرات تعداد مول C₃H₈ و CO₂ در آن به صورت زیر است:

	C ₃ H ₈	+	۵O ₂	→	۳CO ₂	+	۴H ₂ O
مول اولیه	۱				۰		
مول نهایی	۱-x				۳x		

$$\text{جرم مولی} \times \text{مول} = \text{جرم} \rightarrow ۳x \times ۴۴ = (۱-x) \times ۴۴ \Rightarrow ۴x = ۱$$

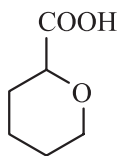
$$\Rightarrow x = ۰/۲۵ \text{ mol}$$

باید ۰/۲۵ مول پروپان مصرف شود:

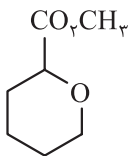
$$۰/۲۵ \text{ mol C}_3\text{H}_8 \times \frac{۱ \text{ s}}{۰/۰۱ \text{ mol C}_3\text{H}_8} = ۲۵ \text{ s}$$

سرعت مصرف پروپان

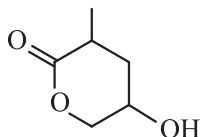
با توجه به ساختار ترکیب‌های زیر، کدام گزینه درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)



(I)



(II)



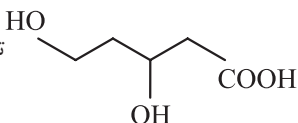
(III)

۱) از واکنش ماده (II) با مقدار کافی آب، علاوه بر تولید ماده (I)، ماده‌ای تولید می‌شود که در بازیافت PET نقش اساسی دارد.

۲) هر سه ترکیب، گروه عاملی اتری دارند و نیروی جاذبه بین مولکولی در دو مورد از آن‌ها مشابه است.

۳) (I) و (III) ایزومرند و جرم مولی آن‌ها، ۲ گرم کمتر از (II) است.

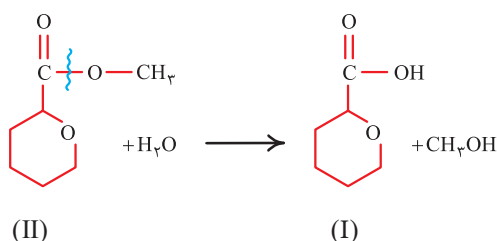
۴) از واکنش (III) با مقدار کافی آب، تولید می‌شود که دارای چهار نوع اتم کربن با عدد اکسایش متفاوت است.



پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

از واکنش ترکیب II با آب در فرایند آبکافت استر، خواهیم داشت:

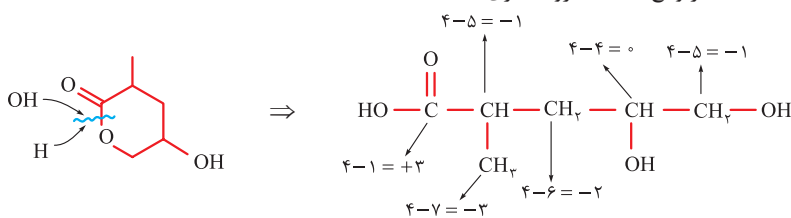


از متانول در بازیافت PET استفاده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۲: ترکیب (III)، گروه اتری ($-O-$) ندارد و دارای گروه‌های استری ($-C(=O)-O-$) و هیدروکسیل ($-OH$) است.
گزینه ۳: (I) و (III) با فرمول $C_7H_{12}O_3$ ایزومرند، اما جرم مولی آن‌ها نسبت به (II) با فرمول $C_7H_{12}O_3$ ، ۱۴ گرم کمتر است:
 $C_7H_{12}O_3 - C_6H_{10}O_3 = CH_2 = 14 g$

گزینه ۴: واکنش ترکیب (III) با آب، در واقع آبکافت گروه استری است:



اتم‌های کربن این ترکیب دارای عددهای اکسایش $-3, -2, -1, 0$ و $+3$ هستند.

با توجه به مطالب کتاب درسی، اگر در ساختار یک پاک‌کننده غیرصابونی دارای ۲۲ اتم کربن در مجموع ۵ پیوند $C=C$ وجود داشته باشد، جرم مولی آن کدام است و اگر هیدروژن‌های حلقه بنزنی آن را با گروه‌های متیل جایگزین کنیم، جرم مولی آن چند درصد افزایش می‌یابد؟ ($H=1, C=12, O=16, Na=23, S=32 : g.mol^{-1}$)

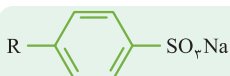
$$14, 394 \text{ (2)}$$

$$12, 394 \text{ (1)}$$

$$14, 400 \text{ (4)}$$

$$12, 400 \text{ (3)}$$

پاسخ: گزینه ۴



فرمول عمومی پاک‌کننده‌های غیرصابونی به صورت $RC_6H_4SO_3Na$ است:



حلقه بنزنی در ساختار پاک‌کننده، ۶ اتم کربن و ۳ پیوند $C=C$ دارد؛ بنابراین گروه R باید ۱۶ اتم کربن و ۲ پیوند $C=C$ داشته باشد. فرمول عمومی گروه R در صورت سیر شده بودن به صورت C_nH_{2n+1} است. با توجه به این که هر پیوند دوگانه، ۲ اتم هیدروژن کم می‌کند، فرمول گروه R به صورت $C_{16}H_{33-4} = C_{16}H_{29}$ است.

$$C_{16}H_{29}C_6H_4SO_3Na \Rightarrow \text{جرم مولی} = (22 \times 12) + 33 + 32 + (3 \times 16) + 23 = 400 : g.mol^{-1}$$
 با جایگزینی ۴ اتم هیدروژن حلقه بنزنی با ۴ گروه متیل (CH_3)، جرم مولی ترکیب به اندازه ۴ گروه CH_3 افزایش می‌یابد:

$$4CH_3 - 4H = 4CH_3 = 4 \times 14 \text{ g}$$

$$\text{جرم مولی اولیه} \times 100 = \frac{4 \times 14}{400} \times 100 = 14\% = \text{درصد افزایش جرم مولی پاک‌کننده}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به مطالب کتاب درسی، اگر اتم‌های هیدروژن حلقه بنزنی در یک پاک‌کننده دارای ۱۸ اتم کربن و با زنجیر هیدروکربنی سیر شده، با گروه متیل جایگزین شود، جرم مولی آن، به تقریب چند درصد افزایش می‌یابد؟ ($S=32, Na=23, O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1}$)

(سوال ۹۲ کنکور تهری ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

$$24 \text{ (4)}$$

$$18 \text{ (3)}$$

$$16 \text{ (2)}$$

$$12 \text{ (1)}$$

با توجه به جدول زیر که اطلاعاتی دربارهٔ ۱ لیتر از محلول‌های ۰/۰۲۵ مولار دو اسید را در دمای 25°C نشان

می‌دهد، کدام مورد درست است؟

pH	$[\text{OH}^-]$	محلول
۲/۳		HX
	4×10^{-13}	HY

(۱) X و Y به ترتیب می‌توانند دومین و سومین عنصر گروه ۱۷ جدول تناوبی باشند.

(۲) HY برخلاف HX، اسیدی قوی است و حجم کم‌تری از محلول آن برای خنثی کردن ۱ لیتر محلول سود با $\text{pH} = 10$ نیاز است.

(۳) تفاوت pH دو محلول با pH محلول ۰/۵ مولار نیتریک اسید برابر است.

(۴) درصد یونش و ثابت یونش HX به ترتیب برابر با ۰/۲۰ و $1/25 \times 10^{-3}$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

در اسیدهای قوی تک پروتون دار، $[\text{H}^+]$ با غلظت اولیهٔ محلول برابر است، اما در اسیدهای ضعیف تک پروتون دار، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$[\text{H}^+] = M\alpha$$

به کمک اطلاعات جدول و محاسبهٔ $[\text{H}^+]$ محلول‌ها، باید قوی یا ضعیف بودن اسیدها را بررسی کنیم.

$$\text{محلول HX: } [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2/3} = 10^{-3} \times 10^{1/3} = 5 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

در محلول HX، $[\text{H}^+]$ با غلظت اولیهٔ محلول ($0/025 \text{ mol.L}^{-1}$) برابر نیست؛ بنابراین HX یک اسید ضعیف است.

$$\text{محلول HY: } [\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{[\text{OH}^-]} = \frac{10^{-14}}{4 \times 10^{-13}} = \frac{10^{-1}}{4} = 0/25 \times 10^{-1} = 0/025 \text{ mol.L}^{-1}$$

در محلول HY، $[\text{H}^+]$ با غلظت اولیهٔ محلول ($0/025 \text{ mol.L}^{-1}$) برابر است؛ بنابراین HY یک اسید قوی است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): دومین و سومین عنصر گروه ۱۷ به ترتیب Cl و Br هستند. HCl و HBr هر دو جزء اسیدهای قوی هستند، در حالی که دیدیم HX، اسیدی ضعیف است.

گزینهٔ (۲): با توجه به این که غلظت اولیهٔ اسیدها برابر است، برای خنثی کردن مقدار معینی از محلول سود، به حجم یکسانی از محلول اسیدها نیاز است و طبق رابطهٔ $n_a M_a V_a = n_b M_b V_b$ ، این موضوع ربطی به قوی یا ضعیف بودن اسیدها ندارد.

گزینهٔ (۳): $\text{pH}(\text{HX}) = 2/3$

$$[\text{H}^+]_{\text{HY}} = 25 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow \text{pH}(\text{HY}) = -\log(25 \times 10^{-3}) = 3 - \log 25$$

$$= 3 - \log 5^2 = 3 - 2 \log 5 = 1/6$$

$$\text{pH}(\text{HX}) - \text{pH}(\text{HY}) = 2/3 - 1/6 = 0/7$$

pH محلول ۰/۵ مولار نیتریک اسید (HNO_3) برابر ۰/۳ است:

$$\text{pH} = -\log(5 \times 10^{-1}) = 1 - \log 5 = 0/3$$

گزینهٔ (۴): با توجه به $[\text{H}^+]$ و غلظت محلول HX خواهیم داشت:

$$\alpha = \frac{[\text{H}^+]}{M} \times 100 = \frac{5 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-3}} \times 100 = 20\%$$

$$K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M - [\text{H}^+]} = \frac{(5 \times 10^{-3})^2}{(25 \times 10^{-3}) - (5 \times 10^{-3})} = \frac{25 \times 10^{-6}}{20 \times 10^{-3}} = 1/25 \times 10^{-3}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام مورد دربارهٔ ضداسیدها درست است؟ ۹۷

- (۱) در واکنش مواد مؤثر در آن‌ها با اسید معده، تنها یک ترکیب یونی به همراه آب تولید می‌شود.
- (۲) داروهایی محلول در آب هستند که غلظت یون هیدروکسید در آن‌ها بیشتر از غلظت یون هیدرونیوم است.
- (۳) واکنش $H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_2O(l)$ ، مبنایی برای عملکرد آن‌ها است.
- (۴) مادهٔ مؤثر در آن‌ها را می‌توان برای افزایش خاصیت پاک‌کنندگی به شوینده‌ها نیز اضافه کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مبنای عملکرد ضداسیدها مانند شوینده‌های خورنده، واکنش خنثی‌شدن اسید و باز $H^+ + OH^- \rightarrow H_2O$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نه لزوماً! مثلاً در واکنش جوش شیرین با اسید معده، گاز کربن دی‌اکسید نیز تولید می‌شود:



گزینهٔ (۲): همهٔ ضداسیدها در آب محلول نیستند. شیر منیزی (حاوی $Mg(OH)_2$) به صورت سوسپانسیون مصرف می‌شود.

گزینهٔ (۴): در کتاب درسی می‌خوانیم که جوش شیرین که یکی از مواد مؤثر در ضداسیدها است، برای افزایش خاصیت

پاک‌کنندگی به شوینده‌ها اضافه می‌شود. همهٔ مواد مؤثر در ضداسیدها که این ویژگی را ندارند!

اگر در دمای معین، درجه یونش باز BOH با $K_b = 2 \times 10^{-5}$ برابر 0.04 باشد، به 200 mL از این محلول چند میلی لیتر آب اضافه کنیم تا درجه یونش باز به 0.12 برسد؟

(۲) 1800

(۱) 1600

(۴) 2200

(۳) 2000

پاسخ: گزینه ۱

در اسید و بازهای خیلی ضعیف (با ثابت یونش کوچک)، رابطه $K = M\alpha^2$ برقرار است. با توجه به این که ثابت یونش فقط به دما بستگی دارد، در دمای معین می توان نوشت:

$$M_1\alpha_1^2 = M_2\alpha_2^2$$

ابتدا به کمک درجه یونش اولیه و نهایی، رابطه غلظت اولیه و نهایی محلول را به دست می آوریم:

$$M_1\alpha_1^2 = M_2\alpha_2^2 \Rightarrow \frac{M_2}{M_1} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} = \left(\frac{0.04}{0.12}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

می خواهیم غلظت محلول، $\frac{1}{9}$ برابر شود؛ پس باید حجم محلول ۹ برابر شود؛ یعنی از 200 mL به 1800 mL برسد:

$$1800 - 200 = 1600 \text{ mL} = \text{حجم آب اضافه شده}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

تفاوت جرم یون‌های تولیدشده در واکنش زیر به ازای مبادله $۹/۰۳ \times ۱۰^{۲۱}$ الکترون، چند گرم خواهد بود؟

($I = ۱۲۷, Cu = ۶۴ : g.mol^{-1}$)

(معادله موازنه شود.) $AuI_3^-(aq) + Cu(s) \rightarrow Au(s) + Cu^{2+}(aq) + I^-(aq)$

۱/۰۳ (۲)

۰/۵۱۵ (۱)

۴/۱۲ (۴)

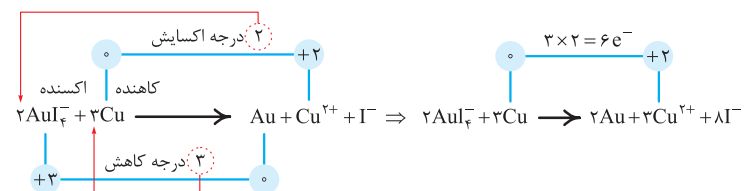
۲/۰۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا معادله واکنش مورد نظر را موازنه می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$AuI_3^- : Au + 4(-1) = -1 \Rightarrow Au = +3$



حالا تفاوت جرم یون‌های تولیدشده (I^- و Cu^{2+}) را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{تفاوت جرم}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}} = \frac{(A \times \text{جرم مولی} - B \times \text{جرم مولی})}{e^-}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(8 \times 127) - (3 \times 64)} = \frac{9/03 \times 10^{21}}{6 \times 6/02 \times 10^{23}} \Rightarrow \frac{x}{824} = \frac{1/5}{400} \Rightarrow x = \frac{824}{400} = 2/06 \text{ g}$$

در مورد سه سامانه: a) رایج‌ترین سلول سوختی b) قطعه آهن در حال خوردگی و c) سلول آبکاری فاشق آهنی با نقره، کدام گزینه درست است؟

۱۰۰

- ۱) آند در هر سه سامانه، قطب منفی است.
- ۲) در سامانه c، الکترولیت می‌تواند از جنس آهن (II) سولفات باشد.
- ۳) در سامانه a برخلاف c، در کاتد، نیم‌واکنش کاهش رخ می‌دهد.
- ۴) بر اساس معادله کلی، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در b، سه برابر a است.

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه ۱: سلول سوختی و قطعه آهن در حال خوردگی، جزء سلول‌های گالوانی محسوب شده و آند در آن‌ها، قطب منفی است، اما سلول آبکاری، جزء سلول‌های الکترولیتی است و آند در آن، قطب مثبت محسوب می‌شود.

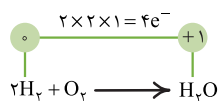
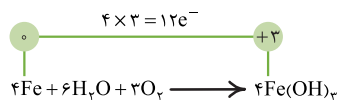
گزینه ۲: در آبکاری با نقره، الکترولیت باید نمکی از نقره باشد، مانند نقره نیترات!

گزینه ۳: کاتد همیشه الکترودی است که در آن کاهش رخ می‌دهد.

نوع سلول	آند		کاتد	
	چه نیم‌واکنشی در آن انجام می‌شود؟	علامت	چه نیم‌واکنشی در آن انجام می‌شود؟	علامت
گالوانی	اکسایش	-	کاهش	+
الکترولیتی	اکسایش	+	کاهش	-

گزینه ۴: شمار الکترون‌های مبادله‌شده در خوردگی آهن و سلول سوختی هیدروژن به ترتیب برابر ۱۲ و ۴ است:

$$\frac{12}{4} = 3$$



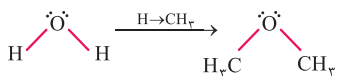
اگر در مولکول آب به جای اتم‌های هیدروژن، گروه‌های متیل جایگزین شود، به ترکیب A تبدیل می‌شود. کدام مطلب درباره‌ی این ترکیب درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

- (۱) اگر نقطه‌ی جوش سومین آلکان برابر θ_1 و نقطه‌ی جوش ترکیب A برابر θ_2 باشد، در فشار معین مقایسه‌ی $\theta_2 < \theta_1$ درست است.
- (۲) ترکیب A دارای یک ایزومر الکلی بوده که دارای پیوند $C - C$ است و نسبت به ترکیب A، نقطه‌ی جوش بالاتر و نیروی بین مولکولی قوی‌تری دارد.
- (۳) بیش از ۶۰ درصد جرمی ترکیب A را کربن تشکیل می‌دهد و شمار اتم‌های هیدروژن آن سه برابر شمار اتم‌های کربن آن است.
- (۴) ترکیب A مانند گوگرد تری‌اکسید در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

پاسخ: گزینه‌ی ۲

ترکیب A، دی‌متیل اتر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



آب

دی‌متیل اتر

بررسی گزینه‌ها:

- گزینه (۱): نقطه‌ی جوش دی‌متیل اتر از نقطه‌ی جوش پروپان (C_3H_8) بیشتر است، زیرا جرم مولی دو ترکیب به هم نزدیک است، اما دی‌متیل اتر برخلاف پروپان، قطبی است.
- گزینه (۲): اتانول (C_2H_5OH) ایزومر دی‌متیل اتر است که به دلیل توانایی در تشکیل پیوند هیدروژنی، نیروی بین مولکولی قوی‌تر و نقطه‌ی جوش بالاتری دارد.
- گزینه (۳): درصد جرمی کربن در دی‌متیل اتر (C_2H_6O) برابر است با:
- $$\text{جرم مولی} = (2 \times 12) + 6 + 16 = 46 \text{ g.mol}^{-1}$$
- $$\text{درصد جرمی کربن} = \frac{2 \times 12}{46} \times 100 = 52.1\%$$
- گزینه (۴): SO_3 یک مولکول ناقطبی است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

با توجه به فرمول‌ها و توضیحات داده‌شده، کدام گزینه درست است؟

$\text{MgF}_2, \text{NaCl}, \text{CO}_2, \text{SiO}_2, \text{C(s)}, \text{Fe}$ (الماس), Fe

(I) عدد کوئوردیناسیون کاتیون و آنیون برای آن به ترتیب برابر ۶ و ۳ است.

(II) اصطلاح شبکه بلور برای این گونه استفاده می‌شود.

(III) از آن، در ساخت منشورها و عدسی‌ها استفاده می‌شود.

(IV) در حالت جامد، رسانای جریان برق است.

(۱) گونه مرتبط با عبارت (I)، آنتالپی فروپاشی شبکه کم‌تری نسبت به LiF دارد.

(۲) عبارت (II) برای ۴ مورد از گونه‌ها صادق است.

(۳) تنها یکی از عناصر سازنده گونه مربوط به عبارت (III)، در ساختار یون سیلیکات وجود دارد.

(۴) عبارت (IV)، فقط برای یک مورد از گونه‌ها صادق است.



پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): می‌دانیم که عدد کوئوردیناسیون کاتیون و آنیون در NaCl یکسان است، پس توضیح (I) مربوط به MgF_2 است.

آنتالپی فروپاشی این ترکیب نسبت به LiF بیشتر است، زیرا چگالی بار Mg^{2+} از Li^+ بیشتر می‌باشد.

گزینه (۲): واژه شبکه بلور برای توصیف آرایش سه‌بعدی و منظم اتم‌ها (مانند فلز Fe و جامدهای کووالانسی الماس و SiO_2 ،

مولکول‌ها (مانند CO_2) و یون‌ها (مانند NaCl و MgF_2) استفاده می‌شود.

گزینه (۳): توضیح (III) مربوط به سیلیس (SiO_2) است که هر دو عنصر سازنده آن در ساختار یون سیلیکات (SiO_4^{4-}) نیز

وجود دارند.

گزینه (۴): عبارت (IV) فقط در مورد فلز آهن صادق است؛ دقت کنید که ترکیب‌های یونی در حالت جامد، رسانای جریان برق نیستند.

کدام مورد، درست است؟

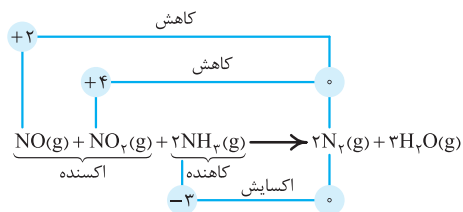
۱۰۳

- (۱) E_a و $|\Delta H|$ واکنش حذف NO از واکنش حذف CO در خودروهای بنزینی بیشتر است.
- (۲) میزان تأثیر مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی بر کاهش جرم آلاینده CO بیشتر از آلاینده NO است.
- (۳) در واکنش حذف آلاینده‌های NO و NO_x در خودروهای دیزلی، هر دو اکسید نقش اکسنده را دارند.
- (۴) در دمای اتاق، انرژی فعال‌سازی واکنش سوختن هیدروژن کم‌تر از واکنش سوختن فسفر سفید است.

پاسخ: گزینه ۳

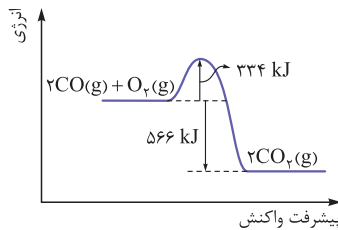
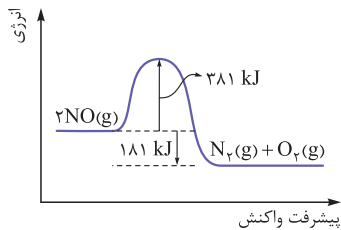
پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای حذف آلاینده‌های NO و NO_x در خودروهای دیزلی از آمونیاک استفاده می‌شود. در این واکنش، NO و NO_x نقش اکسنده را دارند، در حالی که NH_3 نقش کاهنده را ایفا می‌کند.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): با توجه به نمودارها و شکل‌های کتاب درسی بدانید و آگاه باشید که:



واکنش حذف CO $>$ واکنش حذف NO : E_a
 واکنش حذف CO $<$ واکنش حذف NO : $|\Delta H|$

گزینه (۲): جدول زیر مقدار برخی آلاینده‌ها را در گازهای خروجی از آگروز خودروها در غیاب و در حضور مبدل کاتالیستی نشان می‌دهد:

NO	C_xH_y	CO	فرمول شیمیایی آلاینده	
۱/۰۴	۱/۶۷	۵/۹۹	در غیاب مبدل	مقدار آلاینده برحسب گرم به ازای طی یک کیلومتر
۰/۰۴	۰/۰۷	۰/۶۱	در حضور مبدل	

در غیاب و در حضور مبدل، مقدار CO از دو آلاینده دیگر بیشتر و مقدار NO از همه کم‌تر است.

مقدار آلاینده‌ها در غیاب و حضور مبدل کاتالیستی: $CO > C_xH_y > NO$

حالا به سؤال؛ با توجه به این جدول، مبدل کاتالیستی بر کاهش کدام آلاینده (از نظر جرمی) تأثیر بیشتری دارد؟

$$100 \times \left| \frac{\text{میزان تغییر جرم آلاینده}}{\text{مقدار اولیه آلاینده در غیاب مبدل}} \right| = \text{درصد کاهش جرم آلاینده}$$

$$\text{درصد کاهش جرم CO} = \left| \frac{5/99 - 0/61}{5/99} \right| \times 100 \approx 89/82\%$$

$$\text{درصد کاهش جرم NO} = \left| \frac{1/04 - 0/04}{1/04} \right| \times 100 \approx 96/15\%$$

$$\text{درصد کاهش جرم } C_xH_y = \left| \frac{1/67 - 0/07}{1/67} \right| \times 100 \approx 95/81\%$$

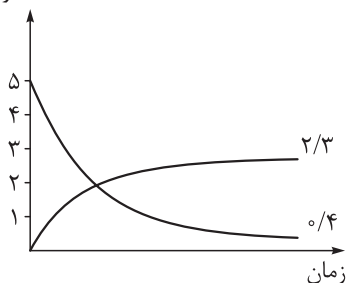
پس:

$\text{NO} > \text{C}_x\text{H}_y > \text{CO}$: میزان تأثیر مبدل کاتالیستی بر کاهش جرم آلاینده

گزینه (۴): فسفر سفید (P_4) در هوا و در دمای اتاق می‌سوزد، در حالی که گاز هیدروژن در هوا و در دمای اتاق با اکسیژن هوا واکنش نمی‌دهد. این موضوع نشان می‌دهد که انرژی فعال‌سازی واکنش سوختن فسفر سفید در هوا و در دمای اتاق تأمین می‌شود و کمتر از انرژی فعال‌سازی واکنش سوختن گاز هیدروژن است.

نمودار زیر را به کدام یک از واکنش‌های داده‌شده می‌توان نسبت داد و مقدار ثابت تعادل آن به تقریب کدام است؟

غلظت مولی



I واکنش $2\text{NO}(\text{g}) \rightleftharpoons \text{N}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g})$

II واکنش $\text{N}_2\text{O}_4(\text{g}) \rightleftharpoons 2\text{NO}_2(\text{g})$

۱۳ - I (۲)

۳۳ - I (۱)

۳۳ - II (۴)

۱۳ - II (۳)

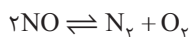
پاسخ: گزینه ۱

مقدار تغییرات غلظت مواد در یک واکنش، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها است. با توجه به نمودار خواهیم داشت:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\left| \frac{\Delta [\text{واکنش دهنده}]}{\Delta [\text{فراورده}]} \right| = \frac{5 - 0/4}{2/3 - 0} = \frac{4/6}{2/3} = 2$$

ضریب واکنش‌دهنده باید دو برابر فراورده باشد، بنابراین نمودار می‌تواند مربوط به واکنش I باشد.



برای محاسبه ثابت تعادل، باید از غلظت تعادلی مواد استفاده کنیم:

$$K = \frac{[\text{N}_2][\text{O}_2]}{[\text{NO}]^2} = \frac{2/3 \times 2/3}{0/4 \times 0/4} = \frac{529}{16} \approx 33$$

با توجه به ساختارهای داده شده، کدام مورد درست است؟

۱۰۵

$(\text{CH}_2\text{CH}_2)_n$ (A)	$\text{CH}_3 - \text{CH}_3$ (B)	$\begin{array}{c} \text{CH}_2 - \text{CH}_2 \\ \quad \\ \text{OH} \quad \text{OH} \end{array}$ (X)
$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ (D)	$\text{CH}_2 = \text{CH}_2$ (E)	 (M)

(۱) E در واکنش با یک اکسنده، به D تبدیل می شود.

(۲) تنها $\frac{1}{3}$ از این مواد در نفت خام وجود دارند.

(۳) واکنش تبدیل E به A از نوع اکسایش - کاهش است.

(۴) از واکنش X با فراورده حاصل از اکسایش M در حضور پتاسیم پرمنگنات، پلیمری با فرمول $(\text{C}_1\text{H}_8\text{O}_4)_n$ تولید می شود.

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): E (اتن) در واکنش با آب، به D (اتانول) تبدیل می شود. عدد اکسایش هیدروژن و اکسیژن در این واکنش تغییری نمی کند، بنابراین آب نقش کاهندگی یا اکسندگی ندارد.



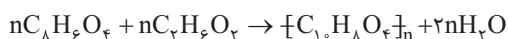
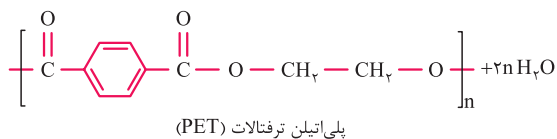
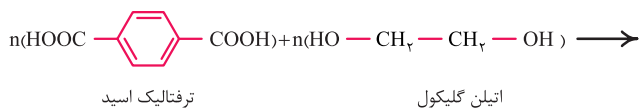
گزینه (۲): مواد B (اتان)، E (اتن) و M (پارازایلن) در نفت خام وجود دارند، یعنی ۳ ماده از ۶ ماده:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

گزینه (۳): در واکنش پلیمری شدن اتن، عدد اکسایش هیچ اتمی تغییری نمی کند، بنابراین از نوع اکسایش - کاهش نیست:



گزینه (۴): M (پارازایلن) در حضور پتاسیم پرمنگنات به ترفتالیک اسید تبدیل می شود. از واکنش ترفتالیک اسید با اتیلن گلیکول (X) در شرایط مناسب، پلی اتیلن ترفتالات (PET) تولید می شود.



ترفتالیک اسید اتیلن گلیکول پلی اتیلن ترفتالات