بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفترچه پاسخ

آزمون ۳۱ مرداد ۱۴۰۴

اختصاصی دوازدهم ریاضی

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲ و ریاضی پایه	کاظم اجلالی-مسعود برملا-محمدرضا توجه-سعید جعفری-ایمان چینی‌فروشان-مهدی حاجی‌نژادیان-عادل حسینی-محمد حمیدی افشین خاصه‌خان-محمدامین روانبخش-جواد زنگنه‌قاسم‌آبادی-علی سلامت-علی شهرابی-پویان طهرانیان-سجاد عظمتی حمید علیزاده-احسان غنی‌زاده-افشین گلستانی-سیدسپهر متولیان-علی مرشد-محمد مصطفی‌پور-جهانبخش نیکنام-محمد هجری
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-سامان اسپهرم-محبوبه بهادری-حسین حاجیلو-محمد حمیدی-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش-محمد خندان کیوان دارابی-سوگند روشنی-علی ساوجی-شایان عباچی-رضا عباسی‌اصل-امیرمحمد کریمی-محمدگودرزی-امیر مالمیر مجید محمدی‌نویسی-بهزاد نظام‌هاشمی-امیروفائی-سرژ یقیازاریان‌تبریزی
	آمارواحتمال وریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-افشین خاصه‌خان-کیوان دارابی-یاسین سپهر-علیرضا شریف‌خطیبی-ندا صالح‌پور محمد صحت‌کار-رضا عباسی‌اصل-عزیزاله علی‌اصغری-فرشاد فرامرزی-امیرمحمد کریمی-مهرداد ملوندی-میلاد منصوری نیلوفر مهدوی
	فیزیک	خسرو ارغوانی‌فرد-بابک اسلامی-عبدالرضا امینی‌نسب-احسان ایرانی-مهدی آذرنسب-زهره آقامحمدی-حامد ترحمی مجتبی خلیل‌ارجمندی-میثم دشتیان-محمدعلی راست‌پیمان-علیرضا رستم‌زاده-بهنام رستمی-امیر ستارزاده-رامین شادلویی سعید طاهری‌بروجنی-محمد عبدوی-عرفان عسکریان‌چایجان-محمد عظیم‌پور-محمدجواد غلامی-مسعود قره‌خانی-مصطفی کیانی حسین مخدومی-سیدعلی میرنوری-شادمان ویسی
	شیمی	امیرعلی برخورداریون-محمدرضا پورجاوید-جواد جدیدی-اسامه جوشن-امیرحاتمیان-حسن رحمتی‌کوکنده-مبینا شرافتی‌پور محمد عظیمیان‌زواره-میکائیل غراوی-حسن لشکری-سعید محسن‌زاده-محمدحسن محمدزاده‌مقدم-امیرحسین مسلمی-دانیال مهرعلی سیدرحیم هاشمی‌دهکردی-محمد وزیری

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی‌پایه	هندسه	آمارواحتمال وریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	سیدسپهر متولیان	امیرمحمد کریمی	امیرمحمد کریمی	حسام نادری	آرش ظریف
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب یاسین کشاورزی مهرداد ملوندی	امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	سینا صالحی حسین بصیرترکمبور زهره آقامحمدی	یاسر راش مجتبی محجوب فرزاد حلاج‌مقدم احسان پنجه‌شاهی
مسئول درس	سیدسپهر متولیان	امیرمحمد کریمی	امیرمحمد کریمی	حسام نادری	آرش ظریف
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران (مستندسازی)	معصومه صنعت‌کار-مهسا محمدنیا-احسان میرزینلی-سجاد سلیمی-فرشته کمبرانی			مهدی صالحی پرهام مهرآرا	محسن دستجردی عرفان قره‌مشک آتیلا ذاکری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

حسابان ۱

۱- **گزینهٔ «۲»** *(علی شهرابی)*

ابتدا ضابطه‌های دو تابع را برابر قرار می‌دهیم تا طول نقطهٔ برخوردشان بدست آید:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow ۱۵-۳^x=\sqrt{۳^{x+۲}}-۳$$

$$\Rightarrow ۳^x+\sqrt{۳^{x+۲}}-۱۸=۰\Rightarrow ۳^x+۳\times ۳^{\frac{x}{۲}}-۱۸=۰$$

با تغییر متغیر $۳^{\frac{x}{۲}}=t$، معادله را حل می‌کنیم:

$$t^۲+۳t-۱۸=۰\Rightarrow (t+۶)(t-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=-۶\Rightarrow ۳^{\frac{x}{۲}}=-۶ : \text{غ ق ق} \\ t=۳\Rightarrow ۳^{\frac{x}{۲}}=۳\Rightarrow x=۲ \end{cases}$$

حالا عرض نقطه برخورد را حساب می‌کنیم: $f(۲)=۱۵-۳^۲=۶$

پس نقطه برخورد دو تابع $A(۲,۶)$ است. حال فاصله A از نقطهٔ $O(۰,۰)$ را پیدا می‌کنیم: $OA=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۶-۰)^۲}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۹)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا توجه)*

می‌دانیم اگر جرم یک مادهٔ رادیواکتیو $m_۰$ و نیمه‌عمر آن T باشد، جرم مادهٔ باقی‌مانده (m) پس از طی شدن زمان t از رابطهٔ $m(t)=m_۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{T}}$ به‌دست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$m(t)=m_۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۵}}\Rightarrow m(۶۰)=m_۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{۶۰}{۱۵}}=\frac{m_۰}{۱۶}$$

جرم مادهٔ باقی‌مانده $\frac{۱}{۱۶}$ جرم مادهٔ اولیه است، یعنی جرم ماده‌ای که به انرژی تبدیل شده است، $\frac{۱۵}{۱۶}$ جرم ماده اولیه است:

$$\Rightarrow m_۰-\frac{m_۰}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}m_۰\simeq ۰/۹۴m_۰$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

$x_۰=\log_۳\frac{۳}{۴}$ صفر تابع است:

$$\Rightarrow a\times ۳^{b\log_۳\frac{۳}{۴}}-۱=a(۳^{\log_۳\frac{۳}{۴}})^b-۱=۰$$

طبق ویژگی $m^{\log_m^n}=n$ داریم:

$$۳^{\log_۳\frac{۳}{۴}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a(\frac{۳}{۴})^b-۱=۰\Rightarrow a=(\frac{۴}{۳})^b \qquad (*)$$

مختصات نقطهٔ $(۱\ ,\ ۱)$ هم در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$\Rightarrow a(۳^b)-۱=۱\xrightarrow{*}(\frac{۴}{۳})^b\times ۳^b=۲$$

$$\Rightarrow ۴^b=۲\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{*}a=\sqrt{\frac{۴}{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

در نهایت داریم: $ab=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹ و ۸۶)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(سجاد عظمتی)*

ابتدا معادلهٔ نمایی مورد نظر را حل می‌کنیم:

$$۲^x-۲^{-x}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲^x-\frac{۳}{۲}-۲^{-x}=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۲^x}(۲^x)^۲-\frac{۳}{۲}\times ۲^x-۱=۰$$

با تغییر متغیر $t=۲^x$ داریم:

$$t^۲-\frac{۳}{۲}t-۱=۰\Rightarrow (t-۲)(t+\frac{۱}{۲})=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲^x=-\frac{۱}{۲} & \text{غ ق ق} \\ t=۲\Rightarrow ۲^x=۲\Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

حال حاصل عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۳x}{x+\log_۳(۲x+۷)}=\frac{۳}{۱+\log_۳^۹}=\frac{۳}{۱+۲}=\frac{۳}{۳}=۱$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۸)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۵- **گزینهٔ «۴»** (محمد حمیدی)

$$۱۰^{۰/۶۹۹}=۵ \xrightarrow[\text{در مبنای ۱۰ می‌گیریم}]{\text{از طرفین log}} \log ۱۰^{۰/۶۹۹}=\log ۵$$

$$\Rightarrow ۰/۶۹۹\log ۱۰=\log ۵ \Rightarrow \log ۵=۰/۶۹۹$$

از طرفی دیگر داریم:

$$\log_۵\sqrt{\frac{۲۵}{۸}}=\log(\frac{۲۵}{۸})^{\frac{۱}{۵}}=\frac{۱}{۵}\log\frac{۲۵}{۸}=\frac{۱}{۵}(\log ۲۵-\log ۸)$$

$$=\frac{۱}{۵}(\log ۵^۲-\log ۲^۳)=\frac{۱}{۵}(۲\log ۵-۳\log ۲)$$

$$\xrightarrow{\log ۲=۱-\log ۵}\frac{۱}{۵}(۲\log ۵-۳(۱-\log ۵))$$

$$=\frac{۱}{۵}(۵\log ۵-۳)=\log ۵-\frac{۳}{۵}=۰/۶۹۹-۰/۶=۰/۰۹۹$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۶- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

α جواب معادلهٔ $f(x)=x$ است. پس داریم:

$$\log_۴^{(۲^{\alpha+۲}-۴)}=\alpha \Rightarrow ۲^{\alpha+۲}-۴=۴^{\alpha}$$

$$\Rightarrow ۴^{\alpha}-۴\times ۲^{\alpha}+۴=۰ \Rightarrow (۲^{\alpha}-۲)^۲=۰ \Rightarrow ۲^{\alpha}=۲ \Rightarrow \alpha=۱$$

حال اگر فرض کنیم $f^{-۱}(\frac{۱}{۲})=\beta$، آن‌گاه $f(\beta)=\frac{۱}{۲}$ است و در نتیجه:

$$\log_۴^{(۲^{\beta+۲}-۴)}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲^{\beta+۲}-۴=۴^{\frac{۱}{۲}}=۲$$

$$\Rightarrow ۲^{\beta+۲}=۶ \Rightarrow \beta+۲=\log_۲^۶ \Rightarrow \beta=\log_۲^۶-۲=\log_۲^۶-\log_۲^۴$$

$$\Rightarrow \beta=\log_۲^{\frac{۶}{۴}}=\log_۲^{\frac{۳}{۲}}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۷- **گزینهٔ «۴»** (جواد زنگنه‌قاسم‌آبادی)

$$\log_k^A=\log_k^B \Rightarrow A=B$$

$$\Rightarrow x^۲-۶x=۲x-۱۵ \Rightarrow x^۲-۸x+۱۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۳)(x-۵)=۰$$

$$\Rightarrow x=۳,۵ \xrightarrow{\text{در دامنه صدق نمی‌کنند}}$$ **معادله جواب ندارد.**

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۹۰)

۸- **گزینهٔ «۱»** (جواد زنگنه‌قاسم‌آبادی)

$$\log_۶^x+\frac{۷}{۲}\log_x^{۳۶}=۸ \Rightarrow \log_۶^x+\frac{۷}{۲}\log_x^{۶^۲}=۸$$

$$\Rightarrow \log_۶^x+۷\log_x^۶=۸ \xrightarrow{\log_۶^x=t} t+\frac{۷}{t}=۸$$

$$\Rightarrow t^۲-۸t+۷=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱=\log_۶^x \Rightarrow x_۱=۶ \\ t=۷=\log_۶^x \Rightarrow x_۲=۶^۷ \end{cases}$$

حاصل‌ضرب جواب‌ها: $۶\times ۶^۷=۶^۸$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۹- **گزینهٔ «۴»** (محمد مصطفی‌پور)

$$\frac{۱}{۲}x^۲-۵۰x+۵=۰ \Rightarrow a+b=-\frac{-۵۰}{\frac{۱}{۲}}=۱۰۰ \ , \ ab=\frac{۵}{\frac{۱}{۲}}=۱۰$$

$$\log a+\log b+\log(a+b)=\log ab+\log(a+b)$$

$$=\log ۱۰+\log ۱۰۰=۱+۲=۳$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** (محمدامین روانبخش)

ابتدا نقطهٔ (۵,۲) را در تابع صدق می‌دهیم:

$$\log_a^{(۵a-۶)}=۲ \Rightarrow a^۲=۵a-۶ \Rightarrow a^۲-۵a+۶=۰$$

$$(a-۲)(a-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ & \text{غ‌ق‌ق} \\ a=۳ \end{cases}$$

اگر $a=۲$ باشد، ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\log_۲^{(۲x-۶)}$ است که نقطهٔ (۱۱,۳) در آن صدق نمی‌کند. ولی برای $a=۳$ این‌گونه نیست. حال داریم:

$$a=۳ \Rightarrow f(x)=\log_۳^{۳x-۶}$$

$$f^{-۱}(x)=۳ \Rightarrow x=f(۳)=\log_۳^{(۳\times ۳-۶)}=۱$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

حسابان ۲

۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(جهانبخش نیکنام)*

تابع $y=-\sqrt{x}$ با دامنهٔ $[0,+\infty)$ و $y=\sqrt{5-x}$ با دامنهٔ $(-\infty,5]$ هر دو اکیداً نزولی هستند، پس تابع f نیز اکیداً نزولی است و دامنهٔ آن بازهٔ $[0,5]$ است.

حال برای دامنهٔ تابع g داریم:

$$f(2x+3)-f(-5x+2)\geq 0 \Rightarrow f(2x+3)\geq f(-5x+2)$$

تابع f اکیداً نزولی است؛ با لحاظ کردن این نکته و هم‌چنین دامنهٔ f، باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$0\leq 2x+3\leq -5x+2\leq 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{3}{2} \\ 2x+3\leq -5x+2 \Rightarrow x\leq -\frac{1}{7} \\ -5x+2\leq 5 \Rightarrow x\geq -\frac{3}{5} \end{cases}$$

اشتراک سه جواب بالا بازهٔ $[-\frac{3}{5},-\frac{1}{7}]$ است:

$$\Rightarrow D_g=[-\frac{3}{5},-\frac{1}{7}] \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{3}{5} \\ \beta=-\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{26}{35}$$

(حسابان ۲- مرتبط با تمرین ۹ (الف) صفحهٔ ۲۲)

۱۲- **گزینهٔ «۲»** *(سیرسپهر متولیان)*

نمودار تابع $f(x)$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند، بنابراین $f(0)=0$ و خواهیم داشت:

$$g(-k)=f(-k+k)+k=f(0)+k=k$$

بنابراین باید نقطه‌ای به فرم $(-k,k)$ روی $g(x)$ پیدا کنیم. به این منظور باید $g(x)$ را با $y=-x$ قطع کنیم:

$$\frac{1}{2}x+1=-x \Rightarrow x=-\frac{2}{3} \Rightarrow -k=-\frac{2}{3} \Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

توجه: نمودار $g(x)$ تنها در ربع دوم با $y=-x$ برخورد دارد، که ضابطهٔ آن در بازهٔ $[-2,0]$ به صورت $y=\frac{1}{2}x+1$ می‌شود.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(پویان طهرانیان)*

تابع f اکیداً نزولی است، پس برای اینکه fog صعودی باشد، لازم است تابع g نزولی باشد:

$$g=\{(1,6),(2,k),(3,4),(4,2)\} \xrightarrow{\text{g نزولی است}} 4\leq k\leq 6$$

کم‌ترین مقدار k برابر ۴ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(علی سلامت)*

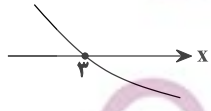
اگر f، تابعی اکیداً صعودی و مثبت باشد، تابع $-f$ اکیداً نزولی و $-\frac{1}{f}$ اکیداً صعودی است. بنابراین در گزینه «۲»، توابع $y=(\frac{1}{2})^x$ و $-f$ اکیداً نزولی هستند، بنابراین مجموع آن‌ها یعنی تابع h اکیداً نزولی است.

تابع g اکیداً صعودی، تابع k نزولی و وضعیت تابع p نیز نامشخص است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱۵- **گزینهٔ «۴»** *(افشین گلستانی)*

چون f یک تابع اکیداً نزولی و پیوسته با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و $f(3)=0$ است، پس می‌توان نمودار زیر را برای f فرض کرد.



دقت شود که نمودار تابع f الزاماً به شکل بالا نیست، ولی می‌توان برای تصور f از نمودار بالا استفاده کرد.

حال باید دامنهٔ تابع داده شده را پیدا کنیم:

$0\geq$ زیر رادیکال با فرجهٔ زوج

$$\Rightarrow (x-3)^2 f(2-x)\geq 0 \Rightarrow (x-3)^2=0 \quad \text{یا} \quad f(2-x)\geq 0$$

$$\begin{cases} (x-3)^2=0 \Rightarrow x=3 \\ f(2-x)\geq 0 \xrightarrow[f(3)=0]{\text{f اکیداً نزولی}} 2-x\leq 3 \Rightarrow x\geq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_g=[-1,+\infty)$$ اشتراک جواب‌ها:

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f(۲)$ است:

$$\Rightarrow f(۲)=۲^۳-۲a+۱=۹-۲a=۳\Rightarrow a=۳$$

(حسابان ۲- مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۲۲)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(سعید بحفری)*

چون چندجمله‌ای مورد نظر بر $x-۱$ بخش‌پذیر است، لذا:

$$p(x)=x^۳+ax^۲+bx+۶$$

$$x-۱=۰\Rightarrow x=۱$$

$$p(۱)=۰\Rightarrow ۱+a+b+۶=۰ \quad (۱)$$

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$

$$\Rightarrow p(۲)=۰\Rightarrow ۸+۴a+۲b+۶=۰ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow \begin{cases} a+b=-۷ \\ ۲a+b=-۷ \end{cases} \Rightarrow a=۰\ ,\ b=-۷\Rightarrow a-b=۷$$

(حسابان ۲- مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۲)

۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

قضیهٔ تقسیم را می‌نویسیم: $x^۳+ax^۲-b=(x-۱)(x+۲)q(x)+r$

$x=۱$ و $x=-۲$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۱+a-b=r \\ -۸+۴a-b=r \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۳a=۹\Rightarrow a=۳$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(حمیر علیزاده)*

رابطهٔ تقسیم را برای تقسیم $(x+۲)p(x)$ بر $x^۳-x$ می‌نویسیم:

$$(x+۲)p(x)=x(x-۱)(x+۱)q_۱(x)+۳x+۱$$

مقادیر $x=۰$ ، $x=۱$ و $x=-۱$ را در رابطه بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲p(۰)=۱\Rightarrow p(۰)=\frac{۱}{۲}$$

$$۳p(۱)=۴\Rightarrow p(۱)=\frac{۴}{۳}$$

$$p(-۱)=-۲$$

حال رابطهٔ تقسیم دوم را می‌نویسیم:

$$p(x)-xp(۱-x)=x(x-۱)q_۲(x)+\alpha x+\beta$$

در اینجا باقی‌مانده را درجه یک و به صورت $\alpha x+\beta$ در نظر گرفته‌ایم.

حال مقادیر $x=۰$ و $x=۱$ را در رابطه بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=۰: p(۰)=\beta\Rightarrow\beta=\frac{۱}{۲}$$

$$x=۱: p(۱)-p(۰)=\alpha+\beta\Rightarrow\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۲}=\alpha+\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۳}$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۲}$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(علی شهرابی)*

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $۲x^۲-x-۱۰$ برابر با $۲x+۶$ است:

$$f(x)=(۲x^۲-x-۱۰)q_۱(x)+۲x+۶\xrightarrow{x=-۲}f(-۲)=۲$$

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x^۲-x-۲$ برابر با $x+۱۰$ است:

$$f(x)=(x^۲-x-۲)q_۲(x)+x+۱۰\xrightarrow{x=۲}f(۲)=۱۲$$

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x^۲-۴$ را به صورت $r(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$f(x)=(x^۲-۴)q_۳(x)+ax+b$$

در تساوی بالا، یک بار $x=۲$ و یک بار هم $x=-۲$ را قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{matrix} f(۲)=۱۲\Rightarrow ۲a+b=۱۲ \\ f(-۲)=۲\Rightarrow -۲a+b=۲ \end{matrix}\right\}\Rightarrow a=\frac{۵}{۲},b=۷$$

پس باقی‌مانده برابر با $r(x)=\frac{۵}{۲}x+۷$ است.

حال معادله را حل می‌کنیم: $r(x)=\frac{۵}{۲}x+۷=-۸\Rightarrow x=-۶$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

ریاضی ۱

۲۱- **گزینهٔ «۳»** (مسعود برملا)

$$۲x^۲-۱۳x+۲۰=۰\Rightarrow ۲(x^۲-\frac{۱۳}{۲}x+۱۰)=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-\frac{۱۳}{۲}x+۱۰=۰\Rightarrow (x-\frac{۱۳}{۴})^۲-\frac{۱۶۹}{۱۶}+۱۰=۰$$

$$\Rightarrow (x-\frac{۱۳}{۴})^۲=\frac{۹}{۱۶}\Rightarrow \begin{cases} a=۱۳ \\ b=\frac{۹}{۴} \end{cases}, a.b=\frac{۱۱۷}{۴}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۲۲- **گزینهٔ «۲»** (عادل حسینی)

نقطهٔ $(۳,۰)$ بر روی سهمی قرار دارد، بنابراین:

$$y=ax^۲+bx+c\Rightarrow ۳=a(۰)^۲+b(۰)+c\Rightarrow c=۳$$

همچنین $x=-۱$ و $x=۳$ ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ است، در نتیجه:

$$a(-۱)^۲+b(-۱)+۳=۰\Rightarrow a-b=-۳$$

$$a(۳)^۲+b(۳)+۳=۰\Rightarrow ۹a+۳b=-۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=-۳ \\ ۳a+b=-۱ \end{cases}\Rightarrow ۴a=-۴\Rightarrow a=-۱$$

$$a-b=-۳\xrightarrow{a=-۱}-۱-b=-۳\Rightarrow b=۲$$

$$y=ax^۲+bx+c=-x^۲+۲x+۳=۴-(x-۱)^۲$$

عرض رأس این سهمی برابر ۴ است.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۲۳- **گزینهٔ «۳»** (محمد هجری)

$$f(x)=-۲x^۲+۱۲x-۱۲=-۲(x^۲-۶x+۹)+۶$$

$$=-۲(x-۳)^۲+۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B=۳ \\ y_B=۶ \end{cases}, \begin{cases} x_A=۰ \\ y_A=-۲(-۳)^۲+۶=-۱۲ \end{cases}$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۶-(-۱۲)}{۳-۰}=۶$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۲۴- **گزینهٔ «۴»** (علی مرشد)

نکته: از $|u|<a$ نتیجه می‌شود $-a<u<a\ (a>۰)$.

می‌دانیم که به ازای هر x، مقدار $x^۲+۱$ مثبت است:

$$|۲x-۱|<x^۲+۱\Rightarrow -x^۲-۱<۲x-۱<x^۲+۱$$

۱) $-x^۲-۱<۲x-۱\Rightarrow x^۲+۲x>۰$

x		-۲		۰	
عبارت	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$\Rightarrow x\in(-\infty,-۲)\cup(۰,+\infty)$$

۲) $۲x-۱<x^۲+۱\Rightarrow x^۲-۲x+۲>۰\xrightarrow[a>۰]{\Delta=-۴<۰}$ همواره برقرار

بنابراین جواب نامعادله به صورت $(-\infty,-۲)\cup(۰,+\infty)$ خواهد بود.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

۲۵- **گزینهٔ «۱»** (عادل حسینی)

با توجه به جدول تعیین علامت و عبارت $p(x)$، نتیجه می‌شود $x=c$ ریشه صورت و از مرتبه زوج است و $x=۱$ ریشه مخرج (و شاید مشترک با صورت) و از مرتبه فرد است، تنها حالت زیر برای $p(x)$ قابل قبول است:

$$p(x)=\frac{(x-۱)(x-c)^۲}{(x-۱)^۲}=\frac{(x-۱)(x^۲-۲cx+c^۲)}{x^۲-۲x+۱}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۳-ax^۲+(a+۳)x-۴}{x^۲-۲bx+b}$$

$$=\frac{x^۳-(۲c+۱)x^۲+(c^۲+۲c)x-c^۲}{x^۲-۲x+۱}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=۱ \\ c^۲=۴\xrightarrow{c>۱}c=۲\Rightarrow a=۵ \end{cases}\Rightarrow a+b+c=۸$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷)

۲۶- **گزینهٔ «۳»** (مهدی حاجی‌نژادیان)

برای اینکه رابطهٔ f تابع باشد داریم: $(-۲,-m)=(-۲,m^۲-۲m)$

$$m^۲-۲m=-m\Rightarrow m^۲-m=۰\Rightarrow \begin{cases} m=۰ \\ m=۱ \end{cases}$$

آنگاه:

مقادیر m را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} m=۰\Rightarrow f=\{(-۲,۰),(-n,-۲),(-۲,۰),(-n,-۱),(-n+۱,-n)\} \\ m=۱\Rightarrow f=\{(-۲,-۱),(۱-n,-۲),(-۲,-۱),(-n,-۱),(-n+۱,-n)(*)\} \end{cases}$$ غ ق ق

$$\xrightarrow{(*)}(۱-n,-۲)=(-n+۱,-n)\Rightarrow n=۲$$

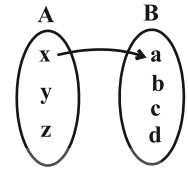
$$\begin{cases} n=۲ \\ m=۱ \end{cases}\Rightarrow \frac{۲m}{n}=\frac{k-۱}{۳}\Rightarrow \frac{۲}{۲}=\frac{k-۱}{۳}\Rightarrow k=۴$$

$$\Rightarrow (k-۳n)^۲=(۴-۳\times ۲)^۲=(-۲)^۲=۴$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(حمید علیزاده)*

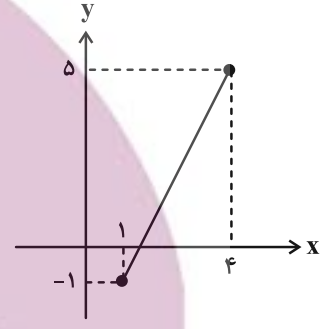
اگر زوج مرتب (x,a) را در نظر بگیریم برای y و همین‌طور برای z، چهار انتخاب d,c,b,a داریم یعنی تعداد کل توابع $۴\times۴=۱۶$ تابع می‌باشد.



(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

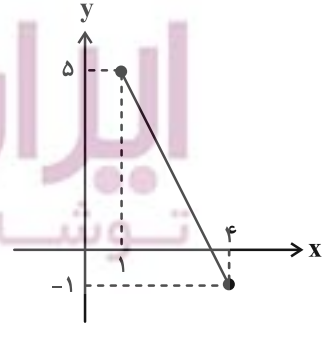
۲۸- **گزینهٔ «۳»** *(ایمان چینی‌فروشان)*

تابع f خطی است و با توجه به دامنه و بردش، نمودار آن به یکی از دو صورت زیر است:



$$y-۵=\frac{۵-(-۱)}{۴-۱}(x-۴)\Rightarrow y=۲x-۳$$

$$\Rightarrow f(x)=۲x-۳\Rightarrow f(۲)=۱\ ,\ f(۳)=۳$$



$$y-۵=\frac{-۱-۵}{۴-۱}(x-۱)\Rightarrow y=-۲x+۷$$

$$\Rightarrow f(x)=-۲x+۷\Rightarrow f(\frac{۳}{۲})=۴\ ,\ f(\frac{۵}{۲})=۲\ ,\ f(۳)=۱$$

همانطور که دیده می‌شود نقطهٔ $(۲\ ,\ ۳)$ به هیچ وجه نمی‌تواند روی نمودار تابع f قرار گیرد.

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

۲۹- **گزینهٔ «۴»** *(احسان غنی‌زاده)*

برای حل کافی است عدد ۲ را برابر با یکی از مقادیر $(۱-x)$ یا $(x+۱)$ قرار دهیم تا x جدید حاصل شود، پس داریم:

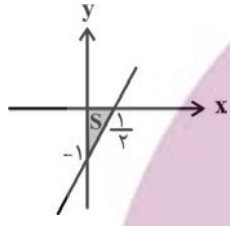
$$f(x+۱)+f(۱-x)=۲\xrightarrow[x=۱]{x+۱=۲}f(۲)+f(۰)=۲$$

$$\xrightarrow{f(۲)=۳}۳+f(۰)=۲\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=-۱\\f(۲)=۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow m_{\text{شیب‌خط}}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۳+۱}{۲-۰}=\frac{۴}{۲}=۲$$

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y+۱=۲(x-۰)\Rightarrow y=۲x-۱$$

$$S=\frac{۱}{۲}\ \text{قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times۱=\frac{۱}{۴}$$



(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(کاظم اجلالی)*

با توجه به مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^۲\geq|x|$ و $x^۲\leq|x|$، ضابطه‌های f را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}ax^۲+bx & ;\ x\in\{۰\}\cup(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)\\ ۲x^۴+c & ;\ x\in[-۱,۱]\end{cases}$$

برای این که f تابع باشد مقادیر دو ضابطه به ازای $x\in\{۰\ ,\ -۱\ ,\ ۱\}$ باید برابر باشند:

$$f(۰)=۰+۰=۰+c\Rightarrow c=۰$$

$$\left.\begin{aligned}f(۱)=a+b=۲+c\Rightarrow a+b=۲\\ f(-۱)=a-b=۲+c\Rightarrow a-b=۲\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\b=۰\end{cases}$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

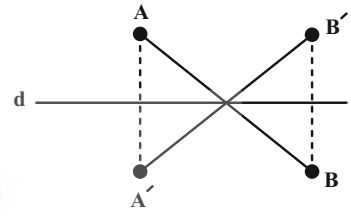
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

هندسه ۲

۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

در حالت‌های «الف» و «ب» شیب پاره‌خط AB الزاماً حفظ می‌شود.

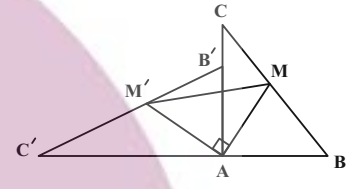
در حالت «پ» اگر نقاط A و B در طرفین خط d قرار داشته باشند، شیب پاره‌خط AB الزاماً حفظ نمی‌شود. (شکل زیر)



(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۶ تا ۳۸)

۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (6)^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow BC = 12$$

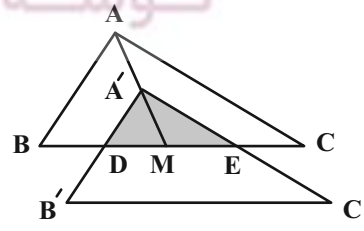
AM میانهٔ وارد بر وتر در مثلث ABC است و اندازهٔ آن برابر نصف اندازهٔ وتر یعنی برابر ۶ می‌باشد که با توجه به طولپا بودن دوران، اندازهٔ AM' نیز برابر ۶ است.

زاویهٔ بین AM و AM' برابر زاویهٔ دوران یعنی 90° است، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMM' داریم:

$$MM'^2 = AM^2 + AM'^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \Rightarrow MM' = 6\sqrt{2}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(رضا عباسی‌اصل)*



مطابق شکل تصویر مثلث ABC در انتقال با بردار $\overrightarrow{AA'}$ (A' محل همرسی میانه‌های مثلث ABC می‌باشد)، مثلث $A'B'C'$ است. ناحیهٔ مشترک بین این دو مثلث، مثلث $A'DE$ است. تصویر یک پاره‌خط در یک انتقال با آن پاره‌خط موازی است، پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} A'B' \parallel AB \Rightarrow A'D \parallel AB \\ A'C' \parallel AC \Rightarrow A'E \parallel AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{A'DE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

نسبت میانه‌ها در دو مثلث متشابه، برابر نسبت تشابه است. پس داریم:

$$\frac{\overset{\Delta}{A'DE}\ \text{محیط}}{\overset{\Delta}{ABC}\ \text{محیط}} = \frac{A'M}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overset{\Delta}{A'DE}\ \text{محیط} = 16$$

توجه: طبق تعمیم قضیهٔ تالس در دو مثلث ABM و ACM داریم:

$$\frac{A'D}{AB} = \frac{DM}{BM} = \frac{EM}{CM} = \frac{A'E}{AC} = \frac{A'M}{AM} = \frac{1}{3}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

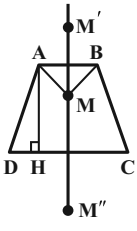
۳۴- **گزینهٔ «۲»** *(شایان عباچی)*

انتقال تبدیلی طولپا است، پس شعاع دایره در انتقال تغییری نمی‌کند و $R' = 4$ است. نقطهٔ O (مرکز دایرهٔ C) در این انتقال بر نقطهٔ O' (مرکز دایرهٔ C') تصویر می‌شود، پس طول خط‌المرکزین دو دایره برابر طول بردار انتقال است، یعنی $OO' = 6$ بوده و در نتیجه داریم:

$|R - R'| < OO' < R + R' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند

(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۳۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیر وفائی)*



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH(AB + CD)$$

$$\Rightarrow 225 = \frac{1}{2}AH(6 + 9)$$

$$\Rightarrow AH = 30$$

می‌دانیم ترکیب دو بازتاب نسبت به دو خط موازی معادل یک انتقال با برداری به‌طول دو برابر فاصلهٔ این دو خط است، بنابراین داریم:

$$MM'' = 2AH = 2 \times 30 = 60$$

(هندسه ۲- مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۴۲)

۳۶- **گزینهٔ «۴»** *(سرژ یقیازاریان‌تبریزی)*

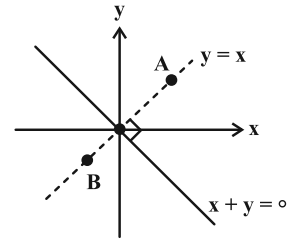
اگر بردار انتقال با یک خط موازی باشد، آن‌گاه انتقال یافته آن خط برخودش منطبق می‌شود، بنابراین گزینهٔ «۴» نادرست است.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۶ تا ۴۳)

۳۷- **گزینهٔ «۴»** *(سوکند روشنی)*

تبدیل T در صفحهٔ P، تابعی است که به هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از همان صفحه نظیر می‌کند و برعکس، هر نقطهٔ A' از صفحه P، تصویر دقیقاً یک نقطهٔ A از همان صفحه است. اما در گزینهٔ «۴» نقاط A و B (روی خط $y = x$) هر دو بر مبدأ مختصات تصویر شده‌اند.

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت



(هندسه ۲- صفحهٔ ۳۴)

۳۸- **گزینهٔ «۳»** (مصوبه بهاری)

هر بردار انتقالی که موازی نیمساز ربع اول دستگاه مختصات (خط $y=x$) باشد را می‌توان به صورت $\vec{v}=(a,a)$ نمایش داد. بنابراین مختصات نقطهٔ B' به صورت $B'(-۱+a,۱+a)$ خواهد بود. دوران تبدیلی طولپا است، در نتیجه اگر B' دوران یافتهٔ A به مرکز $P(۱,۱)$ و زاویهٔ θ باشد، آنگاه داریم:

$$PB'=PA \Rightarrow \sqrt{(-۱+a-۱)^۲+(۱+a-۱)^۲}$$

$$=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۵-۱)^۲}=۵ \xrightarrow{\text{توان ۲}} (a-۲)^۲+a^۲=۲۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{۲+\sqrt{۴۶}}{۲} & \text{ق ق} \\ a=\dfrac{۲-\sqrt{۴۶}}{۲} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

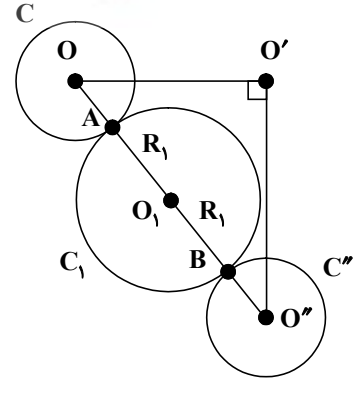
طول بردار انتقال برابر است با $a\sqrt{۲}$ که $\sqrt{a^۲+a^۲}$ برابر می‌شود با:

$$\sqrt{۲}\times\left(\frac{۲+\sqrt{۴۶}}{۲}\right)=\sqrt{۲}+\sqrt{۲۳}$$

توجه: طبق فرض، نقطهٔ B' در ناحیهٔ اول مختصات است، پس باید $x_{B'}=-۱+a>۰$ باشد، یعنی $a>۱$ است.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۸ تا ۴۲)

۳۹- **گزینهٔ «۱»** (فرزانه خاکپاش)



دوران تبدیلی طولپا است، بنابراین $O'O''=OO'=۸$ است. طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $OO'O''$ داریم:

$$OO''^۲=۸^۲+۸^۲=۲\times۸^۲ \Rightarrow OO''=۸\sqrt{۲}$$

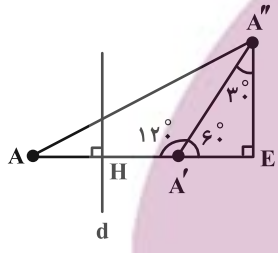
مطابق شکل، $C_۱$ کوچک‌ترین دایره‌ای است که بر هر دو دایرهٔ C و C'' مماس است. شعاع دایره‌های C'' و C برابر یکدیگر است، بنابراین داریم:

$$AB=OO''-(OA+O''B)=۸\sqrt{۲}-(۱+۱)$$

$$\Rightarrow ۲R_۱=۸\sqrt{۲}-۲$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** (محمد خندان)



مطابق شکل $AH=۳$ است، پس $AA'=A'A''=۶$ می‌باشد. اگر از A'' بر امتداد AA' عمود رسم کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'EA''$، $\hat{A}'=۶۰^\circ$ و $\hat{A}''=۳۰^\circ$ است. با توجه به این که در مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع روبه رو به زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° به‌ترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول وتر است، داریم:

$$A'E=\frac{A'A''}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳ \Rightarrow AE=۶+۳=۹$$

$$A''E=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A'A''=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۶=۳\sqrt{۳}$$

$$\overset{\Delta}{AEA''}: AA''^۲=AE^۲+A''E^۲=(۹)^۲+\left(۳\sqrt{۳}\right)^۲=۱۰۸$$

$$\Rightarrow AA''=۶\sqrt{۳}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۴۲)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۳

۴۱- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

طبق فرض داریم:

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&4\end{bmatrix}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a-1&-b\\c+1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m&0\\0&m\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2a+c-1&-2b+1\\-a+4c+5&b+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m&0\\0&m\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-2b+1=0\Rightarrow b=\frac{1}{2}\\-a+4c+5=0\Rightarrow -a+4c=-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}b+4=m\xrightarrow{b=\frac{1}{2}}m=\frac{9}{2}\\2a+c-1=m=\frac{9}{2}\Rightarrow 2a+c=\frac{11}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-a+4c=-5\xrightarrow{\times 2}-2a+8c=-10\\2a+c=\frac{11}{2}\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع}}9c=-\frac{9}{2}\Rightarrow c=-\frac{1}{2}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۲ تا ۱۹)

۴۲- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمحمد کریمی)*

با توجه به تعریف داریم:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\4&0&1\end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}0&1&2\\4&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\3&8\end{bmatrix}$$

پس حاصل‌جمع درایه‌های $A\times B$ برابر است با: $0+1+3+8=12$

(هندسه ۳- مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۸)

۴۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمحمد کریمی)*

$$\begin{bmatrix}x-y&10\\7&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&10\\x+y&z+2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-y=3\\x+y=7\end{cases}\Rightarrow x=5\ ,\ y=2$$
$$z+2=6\Rightarrow z=4$$

$$\Rightarrow x+2y+z=5+4+4=13$$

(هندسه ۳- مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۲۰)

۴۴- **گزینهٔ «۴»** *(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)*

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

$$A^2-4A=A(A-4I)$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-3&2&2\\2&-3&2\\2&2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}=5I$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۴۵- **گزینهٔ «۳»** *(امیرمحمد کریمی)*

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\5&9\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=1\times 9-2\times 5=-1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}9&-2\\-5&1\end{bmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}9&-2\\-5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&2\\5&-1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\times\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&2\\5&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11&-18\\6&10\end{bmatrix}$$

پس حاصل‌جمع درایه‌های قطر اصلی ماتریس فوق برابر است با:

$$-11+10=-1$$

(هندسه ۳- مرتبط با مثال صفحهٔ ۲۳)

۴۶- **گزینهٔ «۳»** *(محمد گودرزی)*

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I\qquad(1)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{0-(-1)}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow(A^{-1})^2=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow(A^{-1})^3=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I\ (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow A^3+(A^{-1})^3=-I+(-I)=-2I$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۴۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ماتریس A وارون‌پذیر نیست، پس دترمینان آن برابر صفر است:

$$|A|=0 \Rightarrow a(a+4)-4(-1)=0 \Rightarrow a^2+4a+4=0$$

$$\Rightarrow (a+2)^2=0 \Rightarrow a+2=0 \Rightarrow a=-2$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{2(-2)-(-2)}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

B^{-1} مجموع درایه‌های $=1+\frac{1}{2}-1-1=-\frac{1}{2}$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴۸- **گزینهٔ «۳»** *(مجید محمدی‌نویسی)*

دو ماتریس A و I تعویض‌پذیر هستند، بنابراین داریم:

$$B=A-I \Rightarrow B^2=(A-I)^2=A^2-2A+I \xrightarrow{A^2=A}$$

$$B^2=-A+I=-B$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$B^n=\begin{cases}B & ,\ n=\text{فرد}\\ -B & ,\ n=\text{زوج}\end{cases}$$

لذا $B^{10}=-B=I-A$.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴۹- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

عبارت $A^{-1}+2B^{-1}=I$ را از سمت چپ در ماتریس A و از سمت راست در ماتریس B ضرب می‌کنیم، داریم:

$$A^{-1}+2B^{-1}=I \Rightarrow A\left(A^{-1}+2B^{-1}\right)B=AIB$$

$$\Rightarrow \left(AA^{-1}+2AB^{-1}\right)B=AB \Rightarrow \left(I+2AB^{-1}\right)B=AB$$

$$\Rightarrow B+2A\underbrace{B^{-1}B}_{I}=AB$$

$$\Rightarrow B+2A=AB$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۵۰- **گزینهٔ «۱»** *(سراسری ریاضی - ۹۲)*

$$A=\begin{bmatrix}0 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 0\end{bmatrix} \Rightarrow I+A=\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

$$,\ I-A=\begin{bmatrix}1 & +\tan\alpha\\ -\tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1}=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

$(I-A)^{-1}(I+A)=$ در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\begin{bmatrix}1-\tan^2\alpha & -2\tan\alpha\\ \dots & \dots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} & \frac{-2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\ \dots & \dots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\ \dots & \dots\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۱

۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مثلثی به طول اضلاع ۸، ۱۶ و $8\sqrt{3}$، مثلث قائم‌الزاویه است، چون طول اضلاع آن در قضیهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند:

$$8^2+(8\sqrt{3})^2=16^2$$

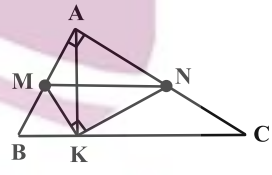
بنابراین مساحت این مثلث برابر است با: $S_1=\frac{1}{2}\times 8\times 8\sqrt{3}=32\sqrt{3}$

مساحت مثلث دوم در صورتی بیشترین مقدار ممکن را دارد که ضلع به طول $2\sqrt{3}$ متناظر با کوچک‌ترین ضلع مثلث اول باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{8}\right)^2\Rightarrow\frac{S_2}{32\sqrt{3}}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}\Rightarrow S_2=6\sqrt{3}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۵۲- **گزینهٔ «۲»** *(علی ساوجی)*



در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس:

$$MK=\frac{AB}{2}\quad,\quad KN=\frac{AC}{2}$$

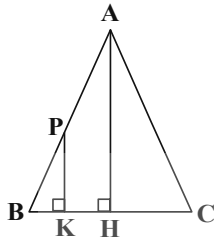
از طرفی طبق عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود که MN موازی BC و اندازه‌اش نصف BC است. پس $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{MNK}$ و نسبت مساحت‌هایشان مجذور نسبت تشابه است که برابر می‌شود با: $(\frac{MN}{BC})^2=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

حال داریم: $S_{MNK}=\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{1}{4}\times\frac{5\times 12}{2}=7/5$

(هندسه ۱- ترکیبی: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷ و ۶۰)

۵۳- **گزینهٔ «۴»** *(بهزاد نظام‌هاشمی)*

از رأس A عمود AH را بر ضلع BC رسم می‌کنیم. چون AH || PK، پس مثلث‌های AHB و PKB متشابه هستند و داریم:



$$k=\frac{BH}{BK}=\frac{AB}{BP}=\frac{AH}{PK}=4\ \text{(نسبت تشابه)}$$

$$\frac{S_{ABH}}{S_{PBK}}=k^2\Rightarrow S_{ABH}=16S_{PBK}$$

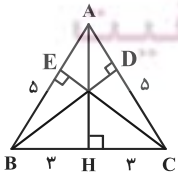
از طرفی می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانهٔ وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند، پس داریم: $S_{ABH}=S_{AHC}=\frac{1}{2}S_{ABC}$

$$S_{ABH}=16S_{PBK}\Rightarrow\frac{1}{2}S_{ABC}=16S_{PBK}\Rightarrow S_{ABC}=32S_{PBK}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۵۴- **گزینهٔ «۲»** *(سامان اسپهرم)*

کافی است طول ارتفاع‌ها را در مثلث ABC به دست آوریم و سپس با استفاده از نسبت تشابه دو مثلث، مجموع طول‌های ارتفاع‌ها را در مثلث $A'B'C'$ پیدا کنیم، مطابق شکل داریم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: AH^2=AB^2-BH^2=5^2-3^2=16\Rightarrow AH=4$$

حال داریم:

$$AH.BC=BD.AC=CE.AB\Rightarrow CE=BD=\frac{4\times 6}{5}=4/8$$

نسبت ارتفاع‌ها در دو مثلث متشابه، برابر نسبت تشابه دو مثلث است. از طرفی نسبت محیط‌ها در دو مثلث متشابه نیز با همین نسبت برابر است. با توجه به این‌که محیط مثلث ABC، برابر $۶+۵+۵=۱۶$ است، داریم:

$$\frac{BD}{B'D'}=\frac{CE}{C'E'}=\frac{AH}{A'H'}=\frac{\overset{\Delta}{ABC}\text{ محیط}}{\overset{\Delta}{A'B'C'}\text{ محیط}}=\frac{۱۶}{۳۲}=\frac{۱}{۲}$$

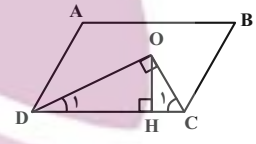
$$\Rightarrow A'H'=۸\quad,\quad C'E'=B'D'=۹/۶$$

در نتیجه: $A'H'+C'E'+B'D'=۸+۹/۶+۹/۶=۲۷/۲$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۵۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویهٔ مجاور مکمل یکدیگرند، بنابراین داریم:



$$\hat{C}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{C}_۱+\hat{D}_۱=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{O}=۹۰^\circ$$

همچنین در هر متوازی‌الاضلاع، زوایای مقابل با هم برابرند، پس داریم:

$$\hat{D}_۱=\frac{\hat{D}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۲}=۱۵^\circ$$

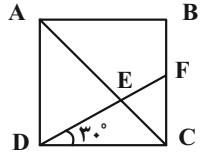
در مثلث قائم‌الزاویهٔ COD، یکی از زوایای حاده برابر ۱۵° است، پس طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است و در نتیجه داریم:

$$S_{COD}=\frac{۱}{۲}OH\times CD=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}CD\times CD=\frac{۱}{۲}\times۹\times۳۶=۱۶۲$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹ و ۶۴)

۵۶- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

پاره خط DE را امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در نقطهٔ F قطع کند.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ DCF، ضلع FC روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° می‌باشد و در نتیجه نصف ضلع DF است. اگر طول ضلع مربع را برابر a فرض کنیم، آن‌گاه داریم:

$$DF^۲=FC^۲+DC^۲\Rightarrow(۲FC)^۲=FC^۲+a^۲\Rightarrow ۳FC^۲=a^۲$$

$$\Rightarrow FC^۲=\frac{a^۲}{۳}\Rightarrow FC=\frac{a}{\sqrt{۳}}$$

دو مثلث ADE و CFE به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{FC}{AD}=\frac{CE}{AE}\Rightarrow\frac{\frac{a}{\sqrt{۳}}}{a}=\frac{CE}{AE}\Rightarrow\frac{CE}{AE}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}\frac{CE}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}\times\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$$

حال داریم:

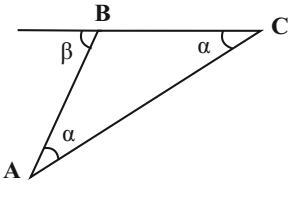
$$\left.\begin{aligned}S_{DEC}&=\frac{CE}{AC}.S_{ADC}\\S_{ADC}&=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}\end{aligned}\right\}\Rightarrow S_{DEC}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{DEC}}{S_{ABCD}}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۴}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۴)

۵۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمد حمیری)*

طبق رابطهٔ تعداد قطرها در یک n ضلعی محدب داریم:



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

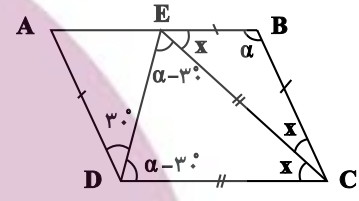
$$\frac{n(n-3)}{2}=170\Rightarrow n(n-3)=340=20\times17\Rightarrow n=20$$

فرض کنید مطابق شکل، A، B و C سه رأس متوالی این n ضلعی منتظم باشند. در این صورت $AB=BC$ و β (زاویهٔ خارجی نظیر رأس B) برابر است با:

$$\beta=2\alpha\Rightarrow\frac{360^\circ}{n}=2\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{180^\circ}{n}\xrightarrow{n=20}\alpha=9^\circ$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۵۵)

۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(امیر مالمیر)*



فرض کنید $\hat{B}=\alpha$ و $B\hat{E}C=x$ باشد. داریم:

$$BE=AD\xrightarrow{AD=BC}BE=BC$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{BEC}\text{ متساوی‌الساقین است}\Rightarrow B\hat{E}C=B\hat{C}E=x$$

$$BE\parallel CD,\text{ مورب }CE\Rightarrow D\hat{C}E=B\hat{E}C=x$$

$$\hat{B}=\hat{D}\Rightarrow\alpha=30^\circ+C\hat{D}E\Rightarrow C\hat{D}E=\alpha-30^\circ$$

بنابراین در دو مثلث BEC و DEC داریم:

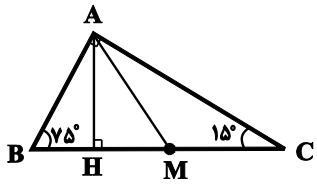
$$\begin{cases}\alpha+2x=180^\circ\\2(\alpha-30^\circ)+x=180^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+2x=180^\circ\\2\alpha+x=240^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=100^\circ\\x=40^\circ\end{cases}$$

بنابراین $B\hat{C}E=x=40^\circ$ است.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

۵۹- **گزینهٔ «۴»** *(حسین حاجیلو)*



مطابق شکل فرض کنید $\hat{A}=90^\circ$ و $\hat{C}=15^\circ$ باشد. در این صورت طبق فرض $BC=20$ است. می‌دانیم طول میانهٔ وارد بر وتر، نصف طول وتر است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ 15° دارد، طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ طول وتر است، پس داریم:

$$AM=\frac{1}{2}BC=10\text{ و }AH=\frac{1}{4}BC=5$$

$$\overset{\Delta}{AMH}:MH^2=AM^2-AH^2=10^2-5^2=75$$

$$\Rightarrow MH=5\sqrt{3}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۰ و ۶۴)

۶۰- **گزینهٔ «۱»** *(فرزانه خاکپاش)*

مجموع زوایای هر n‌ضلعی محدب برابر $180^\circ\times(n-2)$ است، بنابراین داریم:

$$2\times120^\circ+(n-2)\times150^\circ=(n-2)\times180^\circ$$
$$\Rightarrow 2\times120^\circ=(n-2)\times(180^\circ-150^\circ)$$
$$\Rightarrow(n-2)\times30^\circ=240^\circ\Rightarrow n-2=8\Rightarrow n=10$$

تعداد قطرهای یک ۱۰‌ضلعی برابر است با $\frac{10\times7}{2}=35$.

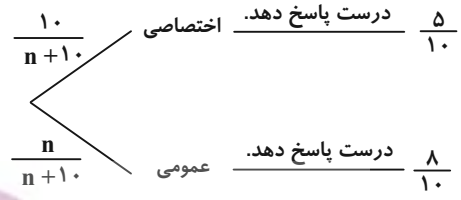
(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۵۵)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

آمار و احتمال

۶۱- **گزینهٔ «۳»** *(یاسین سپهر)*

طبق فرمول احتمال کل و نمودار درختی داریم:



$$P(\text{پاسخ‌گویی درست}) = \frac{۷۰}{۱۰۰} = \frac{۱۰}{n+۱۰}\times\frac{۵}{۱۰} + \frac{n}{n+۱۰}\times\frac{۸}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{n+۱۰} + \frac{۴n}{۵(n+۱۰)} = \frac{۷۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۲۵+۴n}{۵(n+۱۰)} = \frac{۷۰}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۲۵+۴n}{n+۱۰} = \frac{۷}{۲} \Rightarrow ۵۰+۸n = ۷n+۷۰ \Rightarrow n = ۲۰$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۶۲- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا شریف‌طیبی)*

فرض کنید پیشامدهای A و B به‌ترتیب به‌صورت «بازیکن اول قدبلندتر از بازیکن دوم باشد.» و «بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد.» تعریف شوند. در این‌صورت داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۵}$$

تذکر: $P(A) = \frac{۱}{۲}$ است، چون بین دو بازیکن اول و دوم، احتمال بلندقدتر بودن یک بازیکن برابر دیگری است. همچنین پیشامد B، زیرمجموعهٔ پیشامد A است، بنابراین $A\cap B = B$ است.

(آمار و احتمال- مشابه مثال صفحهٔ ۵۱)

۶۳- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا شریف‌طیبی)*

اگر پیشامد A را مشکی بودن روی مشاهده شدهٔ کارت و پیشامدهای B، C و D را به‌ترتیب انتخاب کارت دو رو سفید، انتخاب کارت دو رو مشکی و انتخاب کارت یک رو مشکی و یک رو سفید در نظر بگیریم، آنگاه طبق قانون احتمال کل و قانون بیز داریم:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C) + P(D)P(A|D)$$

$$= \frac{۲}{۱۰}\times ۰ + \frac{۴}{۱۰}\times ۱ + \frac{۴}{۱۰}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۲}$$

$$P(D|A) = \frac{P(D)P(A|D)}{P(A)} = \frac{\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

(آمار و احتمال- مشابه مثال صفحهٔ ۵۸)

۶۴- **گزینهٔ «۱»** *(رضا عباسی‌اصل)*

$$D = \{۱,۲,...,۷\}$$

۴ عضو از D فرد و ۳ عضو دیگر آن زوج هستند. می‌دانیم مجموع دو عدد صحیح زمانی فرد است که یکی از آن‌ها فرد و دیگری زوج باشد، بنابراین فضای نمونه‌ای کاهش یافته شامل حالت‌هایی است که یکی فرد و دیگری زوج است.

$$n(S) = ۴\times۳ + ۳\times۴ = ۲۴$$

تعداد اعضای پیشامد A که در آن اولی عددی اول باشد برابر است با:

$$\underbrace{\frac{۳}{\text{عدد اول فرد}}}_{\{۳,۵,۷\}}\times\frac{۳}{\text{عدد زوج}} + \frac{۱}{\text{عدد ۲}}\times\frac{۴}{\text{عدد فرد}} = ۱۳$$

بنابراین احتمال وقوع این پیشامد برابر $P(A) = \frac{۱۳}{۲۴}$ است.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۶۵- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد منصوری)*

اگر احتمال وقوع هر عدد فرد را با x نمایش دهیم، آنگاه احتمال وقوع هر عدد زوج برابر $۲x$ است. داریم:

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶) = ۱$$

$$\Rightarrow x+۲x+x+۲x+x+۲x = ۱ \Rightarrow ۹x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۹}$$

حالت‌هایی که مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس، برابر ۵ باشد، عبارتند از $(۲,۳),(۳,۲),(۱,۴),(۴,۱)$. احتمال وقوع این پیشامد برابر است با:

$$P(\{(۴,۱),(۱,۴),(۳,۲),(۲,۳)\})$$

$$= P(\{(۴,۱)\}) + P(\{(۱,۴)\}) + P(\{(۳,۲)\}) + P(\{(۲,۳)\})$$

$$= P(۴)\times P(۱) + P(۱)\times P(۴) + P(۳)\times P(۲) + P(۲)\times P(۳)$$

$$= \frac{۲}{۹}\times\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹}\times\frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۹}\times\frac{۲}{۹} + \frac{۲}{۹}\times\frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۸۱}$$

توجه: نتایج پرتاب‌های یک تاس مستقل از هم هستند.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۶۶- **گزینهٔ «۳»** *(عزیزاله علی‌اصغری)*

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه هر یک از دو پیشامد A و A' نسبت به هر یک از دو پیشامد B و B' مستقل از هم خواهند بود.

طبق فرض داریم: $P(B-A) = P(B\cap A') = P(B)P(A')$ (۱)

$$P(B-A) = P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow ۰/۱ = P(B) - ۰/۳$$

$$\Rightarrow P(B) = ۰/۴ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۰/۱ = ۰/۴ \times P(A') \Rightarrow P(A') = ۰/۲۵$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۶۷- **گزینهٔ «۴»** *(نیلوفر مهدوی)*

طبق قانون احتمال شرطی داریم:

$$P(B|A) = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۲}P(A\cap B)$$

$$P(A|B) = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow P(B) = \frac{۱۰}{۳}P(A\cap B)$$

$$P(B) - P(A) = \frac{۱}{۱۸} \Rightarrow \frac{۱۰}{۳}P(A\cap B) - \frac{۵}{۲}P(A\cap B) = \frac{۱}{۱۸}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۶}P(A\cap B) = \frac{۱}{۱۸} \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{۱}{۱۵}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{۵}{۲}P(A\cap B) + \frac{۱۰}{۳}P(A\cap B) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{۲۹}{۶}P(A\cap B) = \frac{۲۹}{۶}\times\frac{۱}{۱۵} = \frac{۲۹}{۹۰}$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۶۸- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

اگر $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ پیشامدهای سالم بودن لامپ‌های اول تا سوم باشند، داریم:

$$P(A_۱\cap A_۲'\cap A_۳') = P(A_۱)P(A_۲'|A_۱)P(A_۳'|(A_۱\cap A_۲'))$$

$$= \frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱۵}$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۶۹- **گزینهٔ «۱»** *(فرشاد فرامرزی)*

با استفاده از قاعدهٔ بیز داریم:

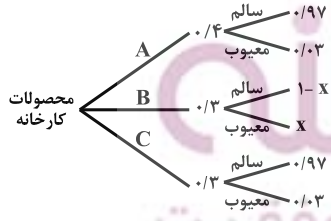
$$P(\text{ظرف اول}|\text{سفید بودن}) = \frac{P(\text{ظرف اول})\times P(\text{سفید بودن}|\text{ظرف اول})}{P(\text{سفید بودن})}$$

$$= \frac{\frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۶}}{\frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۶} + \frac{۳}{۵}\times\frac{۶}{۹}} = \frac{\frac{۴}{۳۰}}{\frac{۱۲+۳۶}{۹۰}} = \frac{۱}{۴}$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۵۷ تا ۶۰)

۷۰- **گزینهٔ «۱»** *(ندا صالح‌پور)*

ابتدا نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{معیوب بودن}) = ۰/۴\times۰/۰۳ + ۰/۳\times x + ۰/۳\times۰/۰۳$$

$$\Rightarrow ۰/۰۶ = ۰/۰۲۱ + ۰/۳x$$

$$\Rightarrow ۰/۳x = ۰/۰۳۹ \Rightarrow x = ۰/۱۳ \quad (۱۳ \text{ درصد})$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ریاضیات گسسته

۷۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمحمد کریمی)*

برای گزینهٔ «۲»، مثال نقض $x=2$ و $y=1$ وجود دارد.

$$2+2>2\sqrt{2}\sqrt{2\times1}=4 \quad \text{(نادرست)}$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲ تا ۸)

۷۲- **گزینهٔ «۱»** *(امیرمحمد کریمی)*

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a=23q_1+4 \\ b=23q_2+11 \end{cases} \Rightarrow 3a-7b=3(23q_1+4)-7(23q_2+11)$$

$$\Rightarrow 3a-7b=23(\underbrace{3q_1-7q_2}_{q})-65=23q-65+69-69$$

$$\Rightarrow 3a-7b=23(q-3)+4$$

باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر ۴ است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

(مشابه مثال صفحهٔ ۱۴)

۷۳- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

$$3^{58}\equiv 3^{13} \xrightarrow{\times 3^1} 3^{57}\equiv 1^{13} \xrightarrow{\text{به توان }19} 3^{3^{13}}\equiv 27^{13}\equiv 1$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

(مشابه مثال صفحهٔ ۲۱)

۷۴- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

طبق فرض داریم:

$$a=bq+r \qquad (1)$$

$$a+1=(b+1)(q+1)+(r+1)\Rightarrow a+1=bq+b+q+1+r+1$$

$$\xrightarrow{(1)} bq+r+1=(bq+r+1)+(b+q+1)$$

$$\Rightarrow b+q+1=0\Rightarrow q=-b-1\xrightarrow{(1)}a=b(-b-1)+r$$

از طرفی:

$$r=r_{max}=b-1$$

در نتیجه داریم:

$$a=-b^2-b+b-1=-b^2-1\Rightarrow a+1=-b^2$$

پس مقسوم جدید قرینهٔ یک عدد مربع کامل است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۷۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمحمد کریمی)*

طبق فرض داریم:

$$(a,9)=3\Rightarrow 3\mid a\Rightarrow a=3k$$

$$(b,9)=3\Rightarrow 3\mid b\Rightarrow b=3k'$$

که در آن‌ها k و k' نسبت به ۳ اول هستند.

$$(ab,9)=(9kk',9)=9(kk',1)=9\times1=9$$

مثال نقض گزینه‌های «۱» و «۳»:

گزینهٔ «۱»: $a=6,\ b=3\Rightarrow (a+b,9)=(9,9)=9$

گزینهٔ «۳»: $a=3,\ b=12\Rightarrow (a+b,9)=(15,9)=3$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۷۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

خواستهٔ سوال اعداد به فرم $x=17k+4$ است که $1\le x\le 100$، پس داریم:

$$1\le 17k+4\le 100$$

$$\Rightarrow -3\le 17k\le 96\Rightarrow 0\le k\le 5\Rightarrow 6 \text{ عدد}$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

(مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۸)

۷۷- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه خان)*

می‌دانیم ب. م. م دو عدد، هر دوی آن‌ها را عاد می‌کند، پس:

$$\left.\begin{matrix} d\mid 4a-10 \\ d\mid 4a+4 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid 14 \qquad d\mid 2a-5\xrightarrow{\times 2} d\mid 4a-10$$

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

با توجه به اینکه $2a-5$ عددی فرد است، پس d قطعاً فرد بوده و چون $d\neq 1$، پس $d=7$ است. طبق صورت سوال باید رقم دهگان 8^7 را به دست آوریم:

$$8^{3^{100}} \equiv 512^{100} \equiv 12 \xrightarrow{\text{توان } 2} 8^{6^{100}} \equiv 12^{2^{100}} \equiv 44$$

$$\xrightarrow{\times 8} 8^{7^{100}} \equiv 44\times 8^{100} \equiv 352$$

پس رقم دهگان برابر ۵ است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۴ و ۱۸ تا ۲۱)

۷۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمد صحت‌کار)*

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{11}{\equiv} 10\overset{11}{\equiv} -1 \Rightarrow a^2\overset{11}{\equiv} 1 \\ b\overset{11}{\equiv} 9\overset{11}{\equiv} -2 \Rightarrow b^3\overset{11}{\equiv} -8 \\ c\overset{11}{\equiv} 8\overset{11}{\equiv} -3 \Rightarrow c^4\overset{11}{\equiv} 81\overset{11}{\equiv} 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2b^3c^4 \overset{11}{\equiv} -32 \overset{11}{\equiv} 1$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۷۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیرمحمد کریمی)*

$$n^6 \overset{32}{\equiv} 1 \Rightarrow n^6 - 1 \overset{32}{\equiv} 0 \Rightarrow (n^2-1)(n^4+n^2+1) \overset{32}{\equiv} 0$$

اما از طرفی داریم:

$$n^4+n^2+1 = \underbrace{n^2(n^2+1)}_{2k} + 1 = 2k+1$$

پس $n^2-1 \overset{32}{\equiv} 0$، حال چون $n^2-1=(n-1)(n+1)$ حاصل‌ضرب دو صحیح با اختلاف ۲ واحد است، پس دو عدد $n-1$ و $n+1$ دو عدد زوج متوالی‌اند و داریم:

$$n-1=2k \quad , \quad n+1=2k+2$$

$$\Rightarrow 2k(2k+2) \overset{32}{\equiv} 0 \Rightarrow 4k(k+1) \overset{32}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow 32 \mid 4k(k+1) \Rightarrow 8 \mid k(k+1)$$

پس حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ مضرب ۸ است و در صورتی این اتفاق می‌افتد که $k=8k'$ یا $k=8k'-1$ و در آن صورت داریم:

$$10 \le n = 2(8k')+1 \le 99 \Rightarrow 1 \le k' \le 6 \Rightarrow \text{۶ تا}$$

$$10 \le n = 2(8k'-1)+1 \le 99 \Rightarrow 1 \le k' \le 6 \Rightarrow \text{۶ تا}$$

پس مجموعاً ۱۲ جواب داریم.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۸۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$A=\left(\frac{3x}{y}+2\right)\left(\frac{3y}{x}+2\right)=9+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}+4=6\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+13$$

با استفاده از اثبات بازگشتی می‌توان نشان داد که به ازای دو عدد حقیقی مثبت x و y، عبارت $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge 2 \xleftarrow{\times(xy)} x^2+y^2 \ge 2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$$

بنابراین $A \ge 25$ است، اما حالت تساوی تنها به ازای تساوی x و y حاصل می‌شود و چون x و y دو عدد متمایز هستند، پس $A>25$ و کم‌ترین مقدار صحیح برای این عبارت برابر ۲۶ است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۶ تا ۸)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

فیزیک ۲

۸۱- **گزینهٔ «۲»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

با توجه به رابطهٔ اختلاف پتانسیل دو سر یک باتری برحسب جریان عبوری از آن، داریم:

$$V = \varepsilon - Ir \Rightarrow ۱۲ = \varepsilon - ۴\times ۰/۵ \Rightarrow \varepsilon = ۱۴V$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۶)

۸۲- **گزینهٔ «۲»** *(رامین شادلویی)*

با استفاده از رابطهٔ جریان در مدار تک‌حلقه، داریم:

$$I = \frac{\varepsilon_۱ - (\varepsilon_۲ + \varepsilon_۳)}{R_{eq} + r_۱ + r_۲ + r_۳} \Rightarrow I = \frac{۲۰ - (۲+۶)}{۰+۱+۱+۱} = ۴A$$

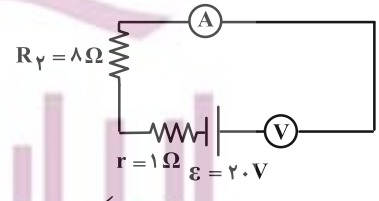
حال با توجه به رابطهٔ توان خروجی و مصرفی در باتری‌ها، داریم:

$$\frac{P_{\text{ورودی}\,۳}}{P_{\text{خروجی}\,۱}} = \frac{\varepsilon_۳ I + r_۳ I^۲}{\varepsilon_۱ I - r_۱ I^۲} = \frac{۶(۴) + ۱(۴)^۲}{۲۰(۴) - ۱(۴)^۲} = \frac{۴۰}{۶۴} = \frac{۵}{۸}$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۷۰)

۸۳- **گزینهٔ «۳»** *(محمدجواد غلامی)*

مقاومت الکتریکی آمپرسنج آرمانی صفر است، در نتیجه مقاومت ۶Ω اتصال کوتاه شده و مدار به‌صورت زیر ساده می‌شود. از طرفی چون مقاومت ولت‌سنج آرمانی بسیار زیاد است، جریانی در مدار برقرار نمی‌شود و آمپرسنج عدد صفر و ولت‌سنج مقدار ε را که برابر $۲۰V$ است، نمایش می‌دهد.



(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۸۴- **گزینهٔ «۳»** *(سعید طاهری‌بروجنی)*

ابتدا با استفاده از داده‌های هر وسیله، (توان اسمی و ولتاژ اسمی) مقاومت الکتریکی آن را حساب می‌کنیم:

$$P = \frac{V^۲}{R} \Rightarrow R = \frac{V^۲}{P} \Rightarrow R_۱ = \frac{(۲۲۰)^۲}{۴۴۰} = ۱۱۰\Omega,$$

$$R_۲ = \frac{(۱۱۰)^۲}{۲۴۲} = ۵۰\Omega \ , \ R_۳ = \frac{(۲۲۰)^۲}{۲۴۲} = ۲۰۰\Omega$$

مقاومت معادل برابر است با:

$$R_{eq} = R_۱ + R_۲ + R_۳ = ۱۱۰ + ۵۰ + ۲۰۰ = ۳۶۰\Omega$$

با استفاده از توان مصرفی کل، می‌توانیم جریان گذرنده از مقاومت‌ها را بیابیم:

$$P = RI^۲ \Rightarrow P_t = R_{eq} \times I^۲ \Rightarrow I^۲ = \frac{P_t}{R_{eq}} = \frac{۱۴۴۰}{۳۶۰} = ۴$$

$$\Rightarrow I = ۲A$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۰)

۸۵- **گزینهٔ «۳»** *(بهنام رستمی)*

کافی است با حرکت از نقطهٔ b تا a پتانسیل‌نویسی کنیم:

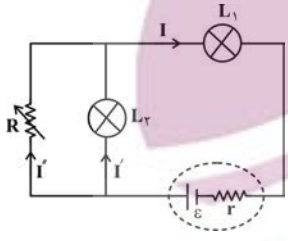
$$V_b - r_۱ I + \varepsilon_۱ - RI = V_a \xrightarrow[R=۴\Omega \ , \ I=۲A]{r_۱=۲\Omega \ , \ \varepsilon_۱=۱۸V}$$

$$V_b - ۲\times ۲ + ۱۸ - ۴\times ۲ = V_a \Rightarrow |V_b - V_a| = ۶V$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۷۰)

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

وقتی لغزنده به سمت راست حرکت می‌کند، طول کمتری از رئوستا در مدار قرار می‌گیرد و مقاومت آن کاهش می‌یابد. نحوهٔ قرارگیری لامپ‌ها و مقاومت به‌صورت زیر می‌باشد:



وقتی مقاومت رئوستا کاهش می‌یابد، مقاومت معادل مدار کاهش می‌یابد و جریان شاخهٔ اصلی مدار زیاد می‌شود. با این حساب، توان مصرفی لامپ $L_۱$ زیاد شده و پر نورتر می‌شود. $(P_۱ = R_۱ I^۲)$

اختلاف پتانسیل دو سر لامپ $L_۱$ نیز زیاد می‌شود. $(V_۱ = IR_۱)$

اختلاف پتانسیل دو سر باتری نیز با توجه به افزایش جریان، کاهش می‌یابد $(V = \varepsilon - Ir)$. پس با توجه به رابطهٔ زیر، ولتاژ دو سر $L_۲$ باید کاهش یابد و در نتیجه توان مصرفی آن کمتر شده و نور آن کمتر می‌شود.

$$\downarrow V = \varepsilon - rI \uparrow$$

$$\downarrow V = V_۱ \uparrow + V_۲ \Rightarrow V_۲ \downarrow$$

$$P_۲ \downarrow = \frac{V_۲^۲}{R} \downarrow \quad (\text{ثابت } R)$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۹)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۸۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیر ستارزاده)*

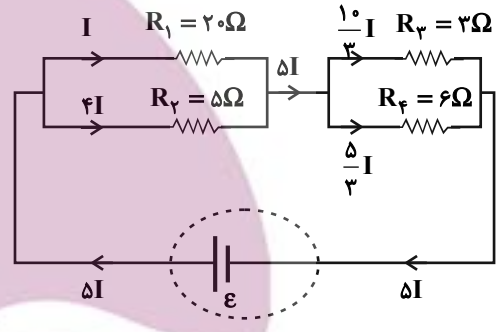
با توجه به اتصال مقاومت‌ها، درمی‌یابیم هر چهار مقاومت با هم موازی‌اند، چون دو سر همهٔ آن‌ها به هم وصل است. پس داریم:

$$R_{eq} = \frac{R}{n} = \frac{۱۲}{۴} = ۳\Omega$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۹)

۸۸- **گزینهٔ «۱»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

با توجه به مدار، مقاومت‌های $R_۱$ و $R_۲$ با هم و مقاومت‌های $R_۳$ و $R_۴$ نیز با هم موازی‌اند. اگر فرض کنیم جریان عبوری از بزرگترین مقاومت یعنی $R_۱$ برابر با I باشد، با توجه به موازی بودن مقاومت‌ها، جریان عبوری از هرکدام از مقاومت‌ها مطابق شکل زیر خواهد بود.



حال توان مصرفی هریک از مقاومت‌ها را می‌یابیم. داریم:

$$P_۱ = R_۱I_۱^۲ = ۲۰I^۲$$

$$P_۲ = R_۲I_۲^۲ = ۵(۴I)^۲ = ۸۰I^۲$$

$$P_۳ = R_۳I_۳^۲ = ۳(\frac{۱۰}{۳}I)^۲ = \frac{۱۰۰}{۳}I^۲$$

$$P_۴ = R_۴I_۴^۲ = ۶(\frac{۵}{۳}I)^۲ = \frac{۵۰}{۳}I^۲$$

بنابراین کمترین توان مصرفی را مقاومت $R_۴$ خواهد داشت که طبق صورت سؤال، ولتاژ دو سر آن برابر با $۱۸V$ است. داریم:

$$V_۴ = R_۴I_۴ \Rightarrow ۱۸ = ۶\times\frac{۵}{۳}I \Rightarrow ۵I = ۹A$$

بنابراین جریان عبوری از باتری که همان جریان شاخهٔ اصلی مدار است، برابر است با:

$$I_T = ۵I = ۹A$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷)

۸۹- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

بنا به رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$، اگر افت پتانسیل درون باتری (یعنی rI) برابر با نیروی محرکهٔ آن شود، اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر صفر می‌شود.

$$V = \varepsilon - rI \xrightarrow{rI=\varepsilon} V = \varepsilon - \varepsilon \Rightarrow V = ۰$$

از طرف دیگر، چون اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های موازی است، بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های موازی صفر می‌باشد. در این حالت، بنا به رابطهٔ $V = R_{eq}I$، مقاومت معادل مقاومت‌های $R_۱$ و ۱۰Ω نیز صفر خواهد بود.

$$V = R_{eq}I \xrightarrow{V=۰} ۰ = R_{eq}I \xrightarrow{I\neq ۰} R_{eq} = ۰$$

با صفر شدن مقاومت معادل، الزاماً باید یکی از این دو مقاومت صفر باشد. چون ۱۰Ω نمی‌تواند صفر باشد، لذا $R_۱ = ۰$ است.

$$\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{۱۰} \xrightarrow{R_{eq}=۰} \frac{۱}{۰} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow \infty = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{R_۱} = \infty \Rightarrow R_۱ = ۰$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷)

۹۰- **گزینهٔ «۳»** *(حسین مفرومی)*

با بستن کلید k، مقاومت $R_۲$ وارد مدار شده و موازی مقاومت $R_۱$ می‌شود و در نتیجه مقاومت معادل $R_۱$ و $R_۲$ کاهش می‌یابد و در نتیجه مقاومت معادل کل مدار نیز کاهش می‌یابد. با توجه به رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$، با ثابت ماندن ε و r، جریان الکتریکی مدار زیاد می‌شود. با توجه به ثابت بودن مقاومت لامپ (R_L)، طبق رابطه $P = R_LI^۲$، توان مصرفی لامپ افزایش و نور آن زیاد می‌شود. از طرفی اختلاف پتانسیل دو سر لامپ طبق رابطهٔ $V_L = R_LI$ با افزایش جریان، افزایش می‌یابد و با توجه به ثابت بودن اختلاف پتانسیل باتری، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_۱$ باید کاهش یابد و در نتیجه طبق رابطهٔ $P_۱ = \frac{V_۱^۲}{R_۱}$، توان مصرفی آن کم می‌شود.

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۳

۹۱- **گزینهٔ «۲»** *(سیدعلی میرنوری)*

ابتدا با استفاده از شیب خط مماس بر منحنی، سرعت متحرک را در لحظهٔ $t = 4s$ می‌یابیم:

$$v_{t=4s} = \text{شیب خط مماس} = \frac{6-0}{4-1} = 2\frac{m}{s}$$

و برای تعیین بزرگی سرعت متوسط در چهارثانیهٔ اول داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow[t_1=0\,,\,t_2=4s]{x_1=10m\,,\,x_2=6m}$$

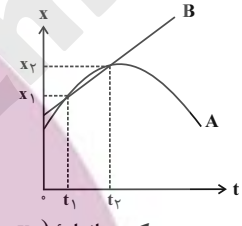
$$v_{av} = \frac{6-10}{4-0} = -1\frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}| = 1\frac{m}{s}$$

در نهایت نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{|v_{av}|}{v_{t=4s}} = \frac{1}{2}$$

(فیزیک ۳- مشابه تمرین ۱-۳ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۹۲- **گزینهٔ «۲»** *(خسرو ارغوانی‌فرد)*



در بازهٔ زمانی داده شده هر دو متحرک به اندازهٔ $(x_2 - x_1)$ جابه‌جا شده‌اند و چون در این بازهٔ زمانی هر دو متحرک تغییر جهت نداده‌اند، پس جابه‌جایی آن‌ها با مسافت طی شده‌شان برابر است و در نتیجه تندی متوسط دو متحرک یکسان می‌باشد و اندازهٔ تندی و سرعت متوسط دو متحرک برابر است.

در ضمن، شیب خط مماس بر منحنی A در لحظهٔ t_1 بیشتر از شیب نمودار B می‌باشد و در نتیجه سرعت A در این لحظه بیشتر است.

بنابراین گزینهٔ «۲» نادرست است.

(فیزیک ۳- مشابه سوال ۱۰ پرسش‌های آخر فصل صفحهٔ ۲۶)

۹۳- **گزینهٔ «۱»** *(احسان ایرانی)*

ابتدا جابه‌جایی هرکدام از متحرک‌ها را در مدت زمان $15\,min = \frac{1}{4}h$ محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t = 80 \times \frac{1}{4} = 20km$$

$$\Delta x_2 = v_2 \Delta t = 36 \times \frac{1}{4} = 9km$$

وقتی دو متحرک برای دومین بار به فاصلهٔ $5km$ از هم می‌رسند یعنی در مدت زمان $15\,min$ به هم رسیده‌اند و به اندازهٔ $5km$ هم از هم دور شده‌اند. با توجه به اینکه در مدت زمان $15\,min$ دو متحرک $29km$ را طی کرده‌اند، یعنی فاصلهٔ اولیه دو متحرک (فاصله دو شهر B و A) از هم $24km$ بوده است. مدت زمانی که طول می‌کشد که متحرک ۱ فاصله $24km$ بین دو شهر را طی کند از رابطهٔ $\Delta x = v\Delta t$ به‌دست می‌آید:

$$\Delta x = v_1 \Delta t \xrightarrow[v_1=80\frac{km}{h}]{\Delta x=24km} 24 = 80 \times \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{3}{10}h = 18\,min$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۹۴- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی خلیل‌ارجمندی)*

ابتدا سرعت اتومبیل را به متر بر ثانیه تبدیل می‌کنیم:

$$72\frac{km}{h} = 72\frac{km}{h} \times \frac{1h}{3600s} \times \frac{1000m}{1km} = 20\frac{m}{s}$$

حال با استفاده از رابطهٔ $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$، زمان برخورد احتمالی را پیدا می‌کنیم.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow[a=-2\frac{m}{s^2}\,,\,v_0=20\frac{m}{s}]{\Delta x=19m} 19 = -t^2 + 20t$$

$$\Rightarrow t^2 - 20t + 19 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-19) = 0 \begin{cases} t = 1s \text{ ق‌ق} \\ t = 19s \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

پس شخص حداکثر $1s$ زمان برای گریز از تصادف دارد.

دقت کنید $t = 19s$ به این دلیل غیرقابل‌قبول است که خودرو در $t = 10s$ متوقف شده است:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -2t + 20 = 0 \Rightarrow t = 10s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۹۵- **گزینهٔ «۲»** *(سیدعلی میرنوری)*

در ابتدا معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم. با توجه به این‌که نمودار داده شده قسمتی از یک سهمی است، در $t = 2s$، $x = 0$ است. در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow{x_0=0} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$\begin{cases} \xrightarrow[x=0]{t=2s} 0 = 2a + 2v_0 & (1) \\ \xrightarrow[x=6m]{t=4s} 6 = 8a + 4v_0 & (2) \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات به‌دست آمده، شتاب و سرعت اولیهٔ متحرک مشخص می‌شود.

$$\xrightarrow{(1)\,,\,(2)} a = \frac{3}{2}\frac{m}{s^2}\,,\; v_0 = -\frac{3}{2}\frac{m}{s}$$

حال مکان متحرک را در لحظهٔ $t = 1s$، به‌دست می‌آوریم:

$$x = \frac{3}{4}t^2 - 1/5t \xrightarrow{t=1s} x_{t=1s} = -\frac{3}{4}m$$

و در نهایت داریم:

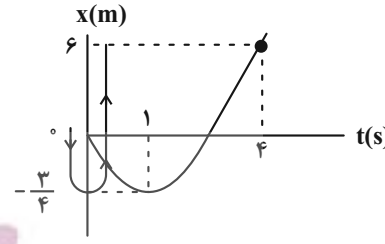
$$\ell = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 6 \Rightarrow \ell = 7/5m$$

@Azmoonha_Azmayeshi
ایران توشه ای برای موفقیت

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۷/۵}{۴}=\frac{۱۵}{۸}\frac{m}{s}$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۴-x_۰}{۴-۰}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow s_{av}-v_{av}=\frac{۱۵}{۸}-\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۸}\frac{m}{s}$$



(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ و ۱۵ تا ۲۱)

۹۶- **گزینهٔ «۱»** (زهره آقامحمدی)

با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:

$$\Delta y=v_{av}\Delta t\Rightarrow \Delta y=۲۹/۴\times ۲=۵۸/۸m \quad (۱)$$

اگر محل رها شدن گلوله را مبدا مکان و جهت رو به پایین را مثبت فرض کنیم، داریم:

$$y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow\begin{cases}y_۱=\frac{۱}{۲}gt_۱^۲\\ y_۲=\frac{۱}{۲}gt_۲^۲\end{cases}\Rightarrow y_۲-y_۱=\frac{۱}{۲}g(t_۲^۲-t_۱^۲)$$

$$\Rightarrow y_۲-y_۱=\frac{۱}{۲}g(t_۲-t_۱)(t_۲+t_۱)$$

$$\Rightarrow ۵۸/۸=\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times ۲\times(t_۲+t_۱)$$

$$\Rightarrow (t_۲+t_۱)=۶s \quad (۲)$$

از طرفی $(t_۲-t_۱)=۲s$ است. با حل هم‌زمان این معادله‌ها داریم:

$$\begin{cases}t_۱=۲s\\ t_۲=۴s\end{cases}$$

در نتیجه: $v=gt\Rightarrow v=۹/۸\times ۴=۳۹/۲m/s$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۹۷- **گزینهٔ «۳»** (محمدعلی راست‌پیمان)

جابه‌جایی در $۲t$ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow y_۱=\frac{۱}{۲}g(۲t^۲)=۲gt^۲$$

جابه‌جایی در t ثانیهٔ سوم حرکت، یعنی در بازهٔ $۲t$ تا $۳t$ ثانیه برابر است با:

$$y_۳=[\frac{۱}{۲}g(۳t)^۲]-[\frac{۱}{۲}g(۲t)^۲]=۵(\frac{۱}{۲}gt^۲)=۲/۵gt^۲$$

بنابراین: $y_۳-y_۱=۲/۵gt^۲-۲gt^۲=۰/۵gt^۲$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۹۸- **گزینهٔ «۳»** (بهنام رستمی)

گلولهٔ اول ۲ ثانیه بیش‌تر از گلولهٔ دوم در حرکت است. داریم: (جهت رو به پایین را مثبت در نظر می‌گیریم.)

$$y_۱=\frac{۱}{۲}g(t+۲)^۲=۵(t+۲)^۲\Rightarrow y_۱=۵t^۲+۲۰t+۲۰ \quad (۱)$$

$$y_۲=\frac{۱}{۲}gt^۲=۵t^۲ \quad (۲)$$

$$y_۱-y_۲=۱۴۰m$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}۵t^۲+۲۰t+۲۰-۵t^۲=۱۴۰\Rightarrow t=۶s$$

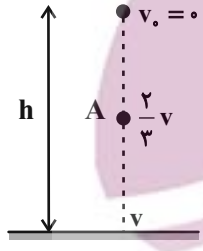
(فیزیک ۳- مشابه سوال ۲۴ پرسش‌های آخر فصل صفحهٔ ۲۸)

۹۹- **گزینهٔ «۴»** (بابک اسلامی)

برای سرعت متوسط گلوله بین دو لحظهٔ شروع حرکت تا رسیدن گلوله به نقطهٔ A که تندی آن برابر با $\frac{۲}{۳}v$ است، می‌توان نوشت:

$$v'_{av}=\frac{v_A+v_۰}{۲}\Rightarrow ۲۰=\frac{\frac{۲}{۳}v+۰}{۲}\Rightarrow v=۶۰\frac{m}{s}$$

تندی گلوله‌ای که در شرایط خلأ از حال سکون رها می‌شود، پس از طی مسافت h از رابطهٔ $v^۲=۲gh$ به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:



$$v^۲=۲gh\Rightarrow ۶۰^۲=۲\times ۱۰\times h\Rightarrow h=۱۸۰m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۰۰- **گزینهٔ «۳»** (مسعود قهرمانی)

محل رها شدن سنگ را مبدأ مکان و جهت مثبت را به سمت پایین در نظر می‌گیریم. اگر کل زمان سقوط سنگ تا رسیدن به زمین برابر با t ثانیه باشد، با استفاده از رابطهٔ مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\Delta y_{(t-۳)-t}=۳\Delta y_{۰-۳}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{t-۳}+v_t}{۲}\times ۳=۳\times\frac{v_۰+v_۳}{۲}\times ۳\xrightarrow{v=gt+v_۰}$$

$$\Rightarrow g(t-۳)+gt=۳\times ۳g\Rightarrow t=۶s$$

بنابراین تندی سنگ در لحظهٔ رسیدن به زمین برابر است با:

$$v=gt+v_۰=۱۰\times ۶+۰=۶۰\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۱

۱۰۱- **گزینهٔ «۴»** *(عرفان عسکریان‌چایان)*

$$v_۲ = v_۱ + \frac{۲۵}{۱۰۰}v_۱ = \frac{۱۲۵}{۱۰۰}v_۱ = \frac{۵}{۴}v_۱ \quad (۱)$$

$$\Delta K = K_۲ - K_۱ = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۱}{۲}\times ۲ \times \left(\left(\frac{۵}{۴}v_۱\right)^۲ - v_۱^۲\right) = ۹۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۱۶}v_۱^۲ = ۹۰۰ \xrightarrow{\sqrt{}} \frac{۳}{۴}v_۱ = ۳۰ \Rightarrow v_۱ = ۴۰\frac{m}{s}$$

$$v_۱ = ۴۰\frac{m}{s}\times\frac{۱km}{۱۰^۳m}\times\frac{۳۶۰۰s}{۱h} = ۱۴۴\frac{km}{h}$$

(فیزیک ۱- صفحهٔ ۵۴)

۱۰۲- **گزینهٔ «۳»** *(میثم رشتیان)*

مطابق با قضیهٔ کار و انرژی پتانسیل گرانشی، در یک جابه‌جایی معین، تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی برابر با منفی کار نیروی وزن در آن جابه‌جایی معین است.

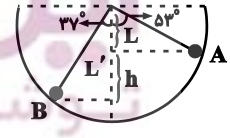
توجه داشته باشید که در حالات خاصی، تغیرات انرژی پتانسیل گرانشی می‌تواند با منفی تغییرات انرژی جنبشی نیز برابر باشد اما این تساوی همواره و در هر شرایطی برقرار نیست.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸)

۱۰۳- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا رستم‌زاده)*

برای محاسبهٔ کار نیروی وزن، تنها تغییر ارتفاع جسم در راستای قائم (h) را در نظر می‌گیریم:

$$h = L' - L = R\cos ۳۷^\circ - R\cos ۵۳^\circ = ۰/۸R - ۰/۶R = ۰/۲R$$



پس کار نیروی وزن جسم برابر است با:

$$W_{mg} = mgh = mg\times ۰/۲R = ۰/۲mgR$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۵ تا ۵۹)

۱۰۴- **گزینهٔ «۱»** *(حامد ترحمی)*

سطح زمین را به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی، در نظر می‌گیریم.

حداکثر انرژی ذخیره شده در فنر زمانی رخ می‌دهد که جسم تا حد توان فنر را فشرده کرده و متوقف شود. طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی، می‌توان نوشت:

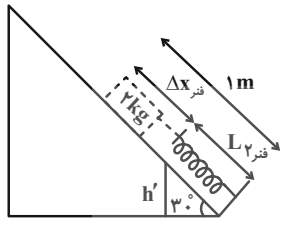
$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow mgh = mgh' + \Delta U_{\text{فنر}}$$

$$\Rightarrow ۲\times ۱۰\times ۴ = ۲\times ۱۰\times h' + ۷۵ \Rightarrow h' = ۰/۲۵m$$

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{h'}{L_{۲\,\text{فنر}}} \Rightarrow L_{۲\,\text{فنر}} = \frac{h'}{\sin ۳۰^\circ} \Rightarrow L_{۲\,\text{فنر}} = \frac{۰/۲۵}{۰/۵} = ۰/۵m$$

از طرفی:

$$\Delta x_{\text{فنر}} = ۱ - L_{۲\,\text{فنر}} \Rightarrow \Delta x_{\text{فنر}} = ۰/۵m \Rightarrow \frac{\Delta x_{\text{فنر}}}{h'} = \frac{۰/۵}{۰/۲۵} = ۲$$



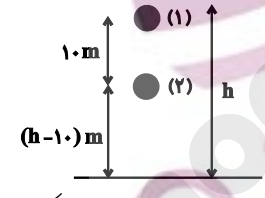
(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۱۰۵- **گزینهٔ «۴»** *(مهدی آذرنسب)*

انرژی پتانسیل گرانشی جسم در ارتفاع h را $U_۱$ و انرژی پتانسیل گرانشی آن در ارتفاع $(h-۱۰)$ را $U_۲$ نامگذاری می‌کنیم. از آنجایی که انرژی پتانسیل گرانشی دو حالت با نسبت ارتفاع از سطح زمین در دو حالت نسبت مستقیم دارد، بنابراین:

$$\frac{U_۲}{U_۱} = \frac{h_۲}{h_۱} \xrightarrow{U_۲ = U_۱ - ۰/۲U_۱} \frac{۰/۸U_۱}{U_۱} = \frac{h-۱۰}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{h-۱۰}{h} \Rightarrow h = ۵۰m$$



(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸)

۱۰۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیم‌پور)*

بنابر اصل پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۲ + U_۲ = K_۱ + U_۱$$

$$\xrightarrow{K_۱ = ۰} \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ = mg(h_A - h)$$

بنابراین هر چه $h_A - h$ بزرگتر باشد، اختلاف انرژی پتانسیل گرانشی و در نتیجه انرژی جنبشی نهایی بیشتر است. اگر نقاط را از پایین‌ترین به بالاترین مرتب کنیم، به توالیِ مقایسهٔ تندی‌ها می‌رسیم. در نتیجه مقایسهٔ تندی این ۴ نقطه به این صورت است:

$$v_D > v_B > v_C > v_E$$

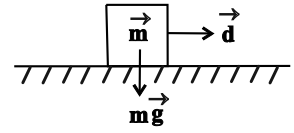
(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

© Azmoonha_Azmayeshi
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

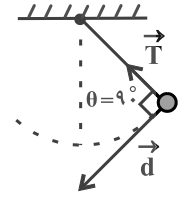
۱۰۷- **گزینهٔ «۴»** *(شارمان ویسی)*

بنا به رابطهٔ $W = Fd\cos\theta$ ، در صورتی کار برابر با صفر می‌شود که یکی از کمیت‌های F ، d و یا $\cos\theta$ برابر با صفر باشد.

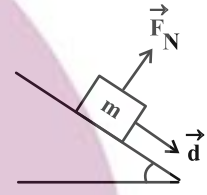
الف) $W = ۰$ است. زیرا $\theta = ۹۰^\circ$ و در نتیجه $W = Fd\cos۹۰^\circ = ۰$ است.



ب) $W = ۰$ است. زیرا در تمام لحظه‌ها نیروی کشش نخ بر جابه‌جایی عمود است.



پ) $W = ۰$ است. طبق استدلال مورد الف، نیروی عمودی سطح و جابه‌جایی بر هم عمودند.



ت) $W = ۰$ است. زیرا طبق قضیهٔ کار - انرژی جنبشی $W_t = \Delta K = ۰$ می‌باشد.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

۱۰۸- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

چون نیروی مقاومت هوا وجود ندارد، انرژی مکانیکی گلوله پایسته می‌ماند و در تمام نقاط، مقدار آن ثابت است. بنابراین، کافی است انرژی مکانیکی اولیهٔ گلوله را بیابیم:

$$E_۱ = U_۱ + K_۱ \xrightarrow{U_۱=۰} E_۱ = ۰ + \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$\xrightarrow[v_۱=۳۰\frac{m}{s}]{m=۱۰۰g=۰/۱kg} E_۱ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۰}\times۹۰۰ \Rightarrow E_۲ = E_۱ = ۴۵J$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۱۰۹- **گزینهٔ «۲»** *(مسعود قهرمانی)*

طبق رابطهٔ بازده داریم:

$$Ra = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}}\times۱۰۰ \Rightarrow Ra = \frac{\frac{W_{\text{خروجی}}}{t_۱}}{\frac{W_{\text{ورودی}}}{t_۲}}\times۱۰۰$$

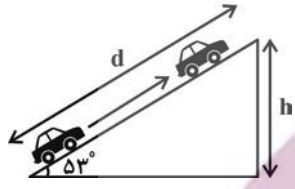
$$\Rightarrow Ra = \frac{\frac{mgh}{t_۱}}{\frac{W_{\text{ورودی}}}{t_۲}}\times۱۰۰$$

$$\xrightarrow{V=۴۰L\Rightarrow m=\rho V=۱۰۰۰\times۰/۰۴=۴۰kg}$$

$$Ra = \frac{\frac{۴۰\times۱۰\times۱۰}{۱}}{\frac{۱۵۰۰۰}{۳}}\times۱۰۰ = \frac{۴۰۰۰}{۵۰۰۰}\times۱۰۰ = ۸۰٪$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۱۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عبدوی)*



اتومبیل با تندی ثابت $۵\frac{m}{s}$ در حال حرکت است، پس در هر ثانیه، ۵ متر روی سطح شیب‌دار حرکت می‌کند. در مدت زمان $\Delta t = ۱s$ و با توجه به تعریف سینوس داریم:

$$\sin۵۳^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow \frac{۸}{۱۰} = \frac{h}{۵} \Rightarrow h = ۴m$$

با توجه به اینکه جابه‌جایی به سمت بالا است، کار نیروی وزن منفی است:

$$W_{mg} = -mgh = -۱۰^۳\times۱۰\times۴ = -۴\times۱۰^۴\ J$$

نیروی اصطکاک جنبشی سطح در خلاف جهت حرکت است، پس:

$$W_{f_k} = f_k d\cos\theta = f_k d\cos۱۸۰^\circ = ۳۰۰\times۵\times-۱ = -۱۵۰۰J$$

با توجه به قضیه کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \xrightarrow{\Delta K=۰} W_F + W_{mg} + W_{f_k} = ۰$$

$$\Rightarrow W_F = -W_{mg} - W_{f_k} = ۴\times۱۰^۴ + ۱۵۰۰ = ۴۱۵۰۰J$$

حال با توجه به رابطهٔ توان (در مدت زمان $\Delta t = ۱s$) داریم:

$$P = \frac{W_F}{\Delta t} = \frac{۴۱۵۰۰}{۱} = ۴۱۵۰۰W$$

در نهایت، چون هر اسب بخار برابر با ۷۵۰ وات می‌باشد، داریم:

$$P = ۴۱۵۰۰W\times\frac{۱hp}{۷۵۰W} \simeq ۵۵/۳۳\ hp$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

شیمی ۲

۱۱۱- **گزینهٔ «۲»** *(مینا شرافتی‌پور)*

نمودار انرژی، مربوط به فرایندی گرماده $(Q<0)$ است. فرایندهای سوخت و ساز فرایندهایی گرماده $(Q<0)$ می‌باشند. در فرایندهای گرماده، انرژی به محیط داده می‌شود. فرایند فتوسنتز نیز فرایند گرماگیر می‌باشد. در فرایندهای گرماده فراورده‌ها سطح انرژی پایین‌تری نسبت به واکنش‌دهنده‌ها دارند.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۱ و ۶۶)

۱۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمدحسن محمدزاده مقدم)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نام علمی گروه عاملی موجود در میخک، ۲- هپتانون می‌باشد.

۲) طبق صفحهٔ ۷۱ کتاب درسی درست می‌باشد.

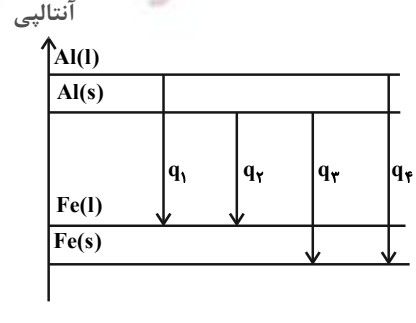
۳) گاز مرداب نام دیگر متان می‌باشد که آنتالپی سوختن آن، ۸۹۰- کیلوژول بر مول بوده و ارزش سوختن آن ۵۵/۶۲۵ کیلوژول بر گرم می‌باشد.

۴) مطابق متن صفحهٔ ۷۵ کتاب درسی درست می‌باشد.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۱ تا ۷۵)

۱۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به سطح انرژی مواد، میزان گرمای حاصل از انجام واکنش در هریک از شرایط گفته شده عبارت است از:



(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

۱۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

اگر مخلوط اتین و اکسیژن را با A نشان دهیم:

روش استوکیومتری:

$$?\,kJ = ۳۱/۳۶\,L\,A \times \frac{۱\,mol\,A}{۲۲/۴\,L\,A} \times \frac{-۲۶۰۰\,kJ}{۷\,mol\,A} = -۵۲۰\,kJ$$

روش تناسب: انرژی آزاد شده (kJ) حجم گاز (A)

۳۱/۳۶	x
۲۲/۴×۷	۲۶۰۰

$$\Rightarrow x = ۲۶۰۰ \times \frac{۳۱/۳۶}{۲۲/۴ \times ۷} = ۵۲۰\,kJ$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۲ و ۷۳)

۱۱۵- **گزینهٔ «۱»** *(سیدرحیم هاشمی‌دهکردی)*

مطابق متن کتاب درسی صفحهٔ ۷۵

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

۱۱۶- **گزینهٔ «۱»** *(مینا شرافتی‌پور)*

ابتدا آنتالپی واکنش مورد نظر را برحسب یک مول محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۴۲\,g\,CO}{۲۸\,g\,CO} \left| \frac{-۴۲۴/۵\,kJ}{x\,kJ} \right. \Rightarrow x = \frac{۲۸ \times ۴۲۴/۵}{۴۲} = -۲۸۳\,kJ$$

$$CO(g) + \frac{۱}{۲}O_۲(g) \rightarrow CO_۲(g) \qquad \Delta H = -۲۸۳\,kJ$$

برای به دست آوردن میانگین آنتالپی پیوند $[C \equiv O]$:

$$\Delta H(C \equiv O) + ۰/۵\Delta H(O=O) - ۲\Delta H(C=O) = -۲۸۳$$

$$\Rightarrow \Delta H(C \equiv O) = -۲۸۳ - ۰/۵(۴۹۴) + ۲(۷۹۹) = ۱۰۶۸\,kJ$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۷، ۶۸ و ۷۴ تا ۷۷)

۱۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست – بخش عمدهٔ انرژی موجود در شیر داغ، هنگام فرآیند گوارش و سوخت و ساز به بدن می‌رسد.

۲) درست – متن صفحهٔ ۶۱ کتاب درسی

@Azmoonha_Azmayeshi
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳) نادرست – مقدار گرمای آزاد شده در واکنش‌ها در دمای ثابت ناشی از تفاوت انرژی گرمایی در مواد واکنش‌دهنده و فرآورده نیست! زیرا در دمای ثابت تفاوت چشمگیری میان انرژی گرمایی آن‌ها وجود ندارد.

۴) نادرست – هر واکنش شیمیایی ممکن است با تغییر رنگ، تولید رسوب، آزاد شدن گاز و ایجاد نور و صدا همراه باشد اما یک ویژگی بنیادی در همهٔ آن‌ها داد و ستد گرما با محیط پیرامون است. از این رو، هر واکنش شیمیایی ممکن است گرماده یا گرماگیر باشد.

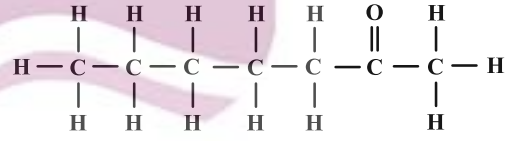
(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: بنزآلدهید و ترکیب عامل طعم و بوی دارچین، دارای گروه عاملی آلدهیدی می‌باشند، نه کتونی!

گزینهٔ «۲»: ۲- هپتانون با ساختار زیر دارای فرمول مولکولی $C_7H_{14}O$ است.



گزینهٔ «۴»: ترکیب موجود در رازیانه دارای گروه عاملی اتری است که اکسیژن متصل به هیدروژن ندارد، پس توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را ندارد.

(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۱۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

ابتدا اقدام به محاسبهٔ گرمای آزاد شده در واکنش می‌نماییم، با توجه به این که گرمای ویژهٔ محلول آغازی و پایانی تقریباً یکسان فرض شده است، پس می‌توان برای محاسبهٔ گرمای آزاد شده یک محلول را در نظر گرفت که دمای آن از $25^\circ C$ به $27^\circ C$ می‌رسد.

$$Q = m \times c \times \Delta\theta$$

$$\Rightarrow ((100+50)\,mL \times \frac{1\,g}{1\,mL}) \times 4/2 \times (27-25) = 1260\,J$$

حال گرمای آزاد شده در واکنش را به ازای ۱ مول HCl محاسبه می‌نماییم.

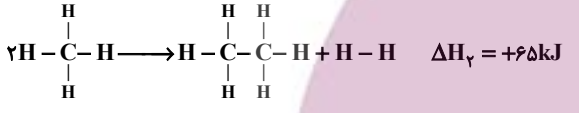
$$|?\,kJ| = 1\,mol\,HCl \times \frac{1\,L\,HCl}{0/5\,mol\,HCl} \times \frac{1000\,mL\,HCl}{1\,L\,HCl}$$

$$\times \frac{1260\,J}{50\,mL\,HCl} \times \frac{1\,kJ}{1000\,J} = 50/4\,kJ \Rightarrow \Delta H = -50/4\,kJ$$

(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸ و ۷۲)

۱۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(حسن رحمتی‌کوکنده)*

ابتدا به کمک واکنش (II)، آنتالپی پیوند $H-H$ را تعیین می‌کنیم:



$$\Delta H = \left[\text{مجموع آنتالپی‌های پیوند در مواد واکنش‌دهنده}\right] - \left[\text{مجموع آنتالپی‌های پیوند در مواد فراورده}\right]$$

$$= [2 \times 4\Delta H(C-H)] - \left[6\Delta H(C-H) + \Delta H(C-C) + \overbrace{\Delta H(H-H)}^{y}\right]$$

$$\Rightarrow +65 = 2(415) - 348 - y \Rightarrow y = 417\,kJ.mol^{-1}$$

در واکنش (I) داریم:

$$x = [\Delta H(N \equiv N) + 2\Delta H[H-H]] - [4\Delta H(N-H) + \Delta H(N-N)]$$

$$\Rightarrow x = [945 + 2(417)] - [4(391) + (163)] \Rightarrow x = 52\,kJ$$

(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۶۷، ۶۸ و ۷۴ تا ۷۷)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۳

۱۲۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمد وزیری)*

استیک اسید اسیدی ضعیف است که در آب، هم به‌صورت یونی و هم به‌صورت مولکولی حل می‌شود. با توجه به داشتن غلظت یون هیدرونیوم درجهٔ یونش برابر است با:

$$\alpha = \frac{\text{غلظت } [H^+]}{\text{غلظت اولیهٔ اسید}} = \frac{1/35\times10^{-3}}{0/1} = 1/35\times10^{-2}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحهٔ ۱۹)

(مطابق خود را بیازمایید صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

۱۲۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرعلی برفورداریون)*

فقط عبارت «الف» و «ت» درست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) مادهٔ حل شونده در ضدیخ، اتیلن گلیکول بوده و به دلیل برخورداری از گروه هیدروکسیل می‌تواند با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کند.

ب) قدرت پاک‌کنندگی صابون برای پارچهٔ نخی بیشتر از پارچهٔ پلی‌استر است.

پ) در آب دریا به دلیل وجود یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+}، قدرت پاک‌کنندگی صابون، کمتر از آب چشمه است.

ت) این جمله با توجه به متن کتاب درسی درست است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۴، ۹ و ۱۰)

۱۲۳- **گزینهٔ «۱»** *(امیرعلی برفورداریون)*

فرمول عمومی صابون‌های جامد به‌صورت $RCOONa$ می‌باشد و از آنجایی که گفته شده بخش ناقطبی زنجیره سیر شده است، می‌توان تعداد اتم‌های هیدروژن در ساختار صابون را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$C_nH_{2n+1}COONa \rightarrow 12n+2n+1+12+32+23=418$$

$$\rightarrow n=25$$

$$\rightarrow H=2\times25+1=51$$

فرمول عمومی پاک‌کننده‌های غیرصابونی به‌صورت $RC_6H_4SO_3Na$ است و با توجه به اینکه جرم مولی آن $418g.mol^{-1}$ ذکر شده است، می‌توان تعداد اتم‌های کربن آن را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$RC_6H_4SO_3Na \rightarrow R+72+4+32+48+23=418$$

$$\rightarrow R=239$$

زنجیر کربنی سیرشده (R) را به صورت C_gH_{2g+1} در نظر بگیریم:

$$\rightarrow 239=12g+2g+1\rightarrow g=17$$

$$\rightarrow C=17+6=23$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ تا ۱۱)

۱۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(جواد جدیری)*

گزینهٔ «۱»: نادرست. کلوییدها، مخلوط‌های ناهمگن محسوب می‌شوند.

گزینهٔ «۲» درست. ترکیب آب و روغن اگر به آن صابون اضافه شود، کلوئید حاصل می‌شود.

گزینهٔ «۳»: نادرست. برای کاهش میزان اسیدی بودن آهک می‌زنند.

گزینهٔ «۴»: نادرست. غلظت یون‌ها در دو محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$0/15\frac{mol}{L}Ca(OH)_2\times\frac{3mol\ \text{یون}}{1mol\ Ca(OH)_2}=0/45mol.L^{-1}\ \text{یون}$$

$$0/2\frac{mol}{L}HCl\times\frac{2mol\ \text{یون}}{1mol\ HCl}=0/4mol.L^{-1}\ \text{یون}$$

غلظت یون موجود در محلول ۰/۱۵ مولار کلسیم هیدروکسید بیشتر است، پس الکترولیت قوی‌تری است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۶، ۷، ۱۴ و ۱۷)

۱۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(دانیال مهرعلی)*

یکی از انواع روغن‌ها با فرمول مولکولی $C_{57}H_{104}O_6$، روغن زیتون است که از جمله موادی است که می‌تواند در واکنش با سدیم هیدروکسید، صابون جامد را تولید کند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵ و ۶)

@Azmoonha_Azmayeshi
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(اسامه بوشن)*

باید دقت داشت که تنها پاک‌کنندهٔ صابونی در این واکنش شرکت می‌کند:

$$۲R\,COONa + CaCl_۲ \rightarrow (RCOO)_۲Ca + ۲NaCl$$

$$۲۰۰\,mL\,CaCl_۲ \times \frac{۱\,L\,CaCl_۲}{۱۰۰۰\,mL\,CaCl_۲} \times \frac{۱\,mol\,CaCl_۲}{۱\,L\,CaCl_۲}$$

$$\times \frac{۲\,mol\,RCOONa}{۱\,mol\,CaCl_۲} \times \frac{۳۰۶\,g\,RCOONa}{۱\,mol\,RCOONa} = ۱۲۲/۴\,g\,RCOONa$$

با توجه به اینکه جرم مخلوط اولیه ۱۲۶/۴ گرم است، داریم:

$$\text{جرم پاک‌کنندهٔ غیرصابونی} = ۱۲۶/۴ - ۱۲۲/۴ = ۴\,g$$

$$\text{درصد جرمی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی در مخلوط اولیه} = \frac{\text{جرم پاک‌کنندهٔ غیرصابونی}}{\text{جرم مخلوط اولیه}} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۱۲۶/۴} \times ۱۰۰ \simeq ۳/۱۶\%$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۹ و ۱۱)

۱۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(حسن لشکری)*

$LiOH$ یک اکسید بازی بوده و در آب غلظت $[OH^-]$ را افزایش می‌دهد.

بررسی گزینه‌های نادرست:

۲) $HCl(g)$ اسید آرنیوس است، زیرا هنگام حل شدن در آب غلظت یون هیدرونیوم را افزایش می‌دهد.

۳) رنگ کاغذ pH، در محیط اسیدی قرمز و در محیط بازی آبی رنگ است.

۴) محلول $CO_۲$ در آب و $NH_۳(g)$ در آب به‌ترتیب کاغذ pH را به رنگ سرخ و آبی تغییر می‌دهند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۹)

(مطابق با هم بیندیشیم صفحه‌های ۱۴ و ۱۵ کتاب درسی)

۱۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(سعید محسن‌زاده)*

شکل (۱) انحلال اکسیدی نافلزی در آب است که باعث می‌شود محیط آب اسیدی شود.

شکل (۲) HCl یک اسید قوی و HF یک اسید ضعیف است بنابراین محلول HF روشنایی کمتری دارد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحهٔ ۱۸)

(مطابق با هم بیندیشیم صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱۲۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به تعریف درصد یونش خواهیم داشت:

$$\text{درصد یونش} = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار مولکول‌های حل شده}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۴}{۱۰۸+۲۴} \times ۱۰۰ \simeq ۱۸/۲\%$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحهٔ ۱۹)

۱۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(محمد وزیری)*

از آنجا که محلول موجود در تمام گزینه‌ها، اسیدی بوده و اسیدهای مربوطه همگی اسیدهای تک‌پروتون‌دار هستند، می‌توان گفت هرچه غلظت یون هیدرونیم درمحلولی بیشتر باشد، شمار یون‌های موجود در محلول بیشتر بوده و در نتیجه رسانایی الکتریکی آن بیشتر است.

گزینهٔ «۱»: نیتریک اسید $(HNO_۳)$، یک اسید قوی تک پروتون‌دار است. بنابراین غلظت یون هیدرونیوم در آن برابر ۲×۱۰^{-۴} مولار می‌باشد.

گزینهٔ «۲»:
$$۲/۴ = \frac{[H^+]}{۰/۰۵} \times ۱۰۰ \Rightarrow [H^+] = ۱۲\times۱۰^{-۴}\,\frac{mol}{L}$$

گزینهٔ «۳»: هیدروکلریک اسید (HCl)، یک اسید قوی تک پروتون‌دار می‌باشد، بنابراین غلظت یون هیدرونیوم برابر غلظت محلول اولیه می‌باشد.

گزینهٔ «۴»:
$$۱ = \frac{[H^+]}{۶\times۱۰^{-۴}} \Rightarrow [H^+] = ۶\times۱۰^{-۴}\,\frac{mol}{L}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

شیمی ۱

۱۳۱- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی)*

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: فلز آلومینیم به صورت بوکسیت (Al_2O_3 به همراه ناخالصی) در طبیعت یافت می‌شود.

گزینهٔ «۲»: سیلیس (SiO_2) در طبیعت به صورت کریستال مانند یافت می‌شود.

گزینهٔ «۳»: برای به دست آمدن هوای مایع کربن دی‌اکسید را در دمای $-78^\circ C$ به صورت جامد جدا می‌کنند.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۲، ۵۵ و ۵۶)

۱۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(میکائیل غراوی)*

از گاز هلیم، برای پر کردن بالن‌های هواشناسی، جوشکاری، کپسول غواصی و خنک کردن قطعات دستگاه‌های تصویربرداری مانند MRI استفاده می‌شود. برای بسته‌بندی برخی مواد خوراکی و نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی از گاز نیتروژن استفاده می‌شود.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحهٔ ۵۳)

۱۳۳- **گزینهٔ «۳»** *(مینا شراختی‌پور)*

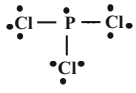
گوی‌های سفید گاز آرگون، گوی‌های خاکستری گاز نیتروژن و گوی‌های مشکی گاز اکسیژن را نشان می‌دهند.

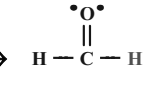
گاز هلیم حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را تشکیل می‌دهد. اما گوی‌های مشکی مربوط به گاز اکسیژن است.

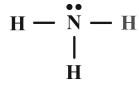
(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲)

۱۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین مسلمی)*

۱) $CO \rightarrow$ $\ddot{C} __ \ddot{O}$ — شمار الکترون‌های پیوندی = ۶

۲) $PCl_3 \rightarrow$  — شمار الکترون‌های پیوندی = ۶

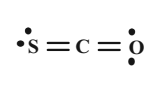
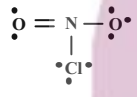
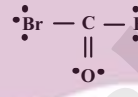
۳) $CH_2O \rightarrow$  — شمار الکترون‌های پیوندی = ۸

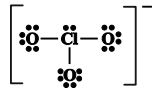
۴) $NH_3 \rightarrow$  — شمار الکترون‌های پیوندی = ۶

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۷ و ۵۸)

۱۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

ساختار لوویس گونه‌های داده شده به صورت زیر است:


$[\dot{N} \equiv O\dot{}]^+$

نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در $COBr_2$ و NO_2Cl برابر $\frac{2}{8} = \frac{1}{2}$ و شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی ClO_3^- برابر ۱۰ می‌باشد.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۴ و ۶۵)

۱۳۶- **گزینهٔ «۴»** *(محمدحسن محمدزاده‌مقدم)*

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} = 2/1 \frac{^\circ C}{km}$$

$$T - T_0 = \frac{\Delta T}{\Delta h}(h - h_0)$$

@Azmoonha_Azmayeshi
ایران توشا
توشای تو برای موفقیت

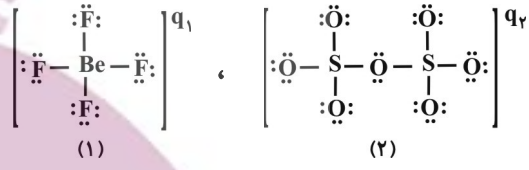
$T_0 = ۲۷۳ - ۶۰ = ۲۱۳K$

$\Rightarrow T - ۲۱۳ = ۲/۱(۴۰ - ۱۰) \Rightarrow T = ۲۷۶K$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۱۳۷- **گزینهٔ «۱»** *(کتاب آبی)*

برای به‌دست آوردن q_1 و q_2 کافیست پس از هشت‌تایی کردن اتم‌ها بار هر یک از اتم‌ها را در هر کدام از ترکیبات تعیین کنید که حاصل جمع بار همه اتم‌های موجود در یک ترکیب برابر بار آن ترکیب یعنی q_1 و q_2 است.



در ترکیب (۱) اتم F از گروه ۱۷ بوده و ۷ الکترون در لایهٔ ظرفیت خود دارد. اتم Be از گروه ۲ بوده و ۲ الکترون در لایهٔ ظرفیت خود دارد اما در اطراف خود ۴ الکترون دارد پس ۲ الکترون اضافی دارد و q_1 برابر (−۲) است. در ترکیب (۲)، اتم‌های O و S هر دو از گروه ۱۶ بوده و ۶ الکترون در لایهٔ ظرفیت خود دارند اما اتم‌های S هر کدام ۲ الکترون کم‌تر از لایهٔ ظرفیت خود دارند یعنی مجموعاً ((+۴)) و اتم‌های O به جز اتم O وسطی، هر کدام یک الکترون بیش‌تر از لایهٔ ظرفیت خود دارند یعنی مجموعاً ((−۶)) پس q_2 برابر (−۲) خواهد بود.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۷ و ۵۸)

۱۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

بررسی موارد نادرست:

الف: $\xrightarrow{\Delta}$ **: واکنش‌دهنده‌ها براثر گرم‌شدن واکنش می‌دهند.**

ب: $\xrightarrow{۸۵۰^\circ C}$ **: واکنش در دمای ۸۵۰ درجه سلسیوس انجام می‌شود.**

ت: $\xrightarrow{Pd(s)}$ **: برای انجام‌شدن واکنش، از فلز پالادیم (نه پلاتین) به عنوان کاتالیزگر استفاده می‌شود.**

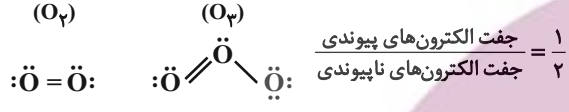
(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحهٔ ۶۳)

۱۳۹- **گزینهٔ «۱»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

$$C_۳H_۸ + ۵O_۲(g) \rightarrow ۳CO_۲(g) + ۴H_۲O(g)$$

مجموع ضرایب استوکیومتری مواد واکنش‌دهنده برابر ۶ می‌باشد.

بررسی گزینهٔ «۲»:



بررسی گزینهٔ «۳»: درصد حجمی گاز آرگون ۰/۹۲۸ و درصد حجمی گاز کربن دی‌اکسید ۰/۰۳۸۵ است.

بررسی گزینهٔ «۴»: کربن مونوکسید بی بو است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۴۹، ۵۴، ۵۸ تا ۶۰)

۱۴۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیرعلی برفورداریون)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: در شرایط یکسان، نسبت چگالی به جرم مولی گازها یکسان است. بدین ترتیب $CO_۲$ از CO چگالی بیش‌تری دارد.

گزینهٔ «۲»: در هنگام سوختن گرد آهن، نور سفید آزاد نمی‌شود بلکه نور نارنجی رنگ پدید می‌آید.

گزینهٔ «۳»: فراوردهٔ آلی این واکنش محلول در آب است نه مایع!

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۶۰)

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی

دفترچه پاسخ

آزمون هوش و استعداد

(دورهٔ دوم)

۳۱ مرداد

تعداد کل سؤالات آزمون: ۲۰
زمان پاسخ‌گویی: ۳۰ دقیقه

گروه فنی تولید

مسئول آزمون	حمید لنجان‌زاده اصفهانی
ویراستار	فاطمه راسخ
مدیر گروه مستندسازی	محیا اصغری
مسئول درس مستندسازی	علیرضا همایون‌خواه
طراحان	حمید اصفهانی، فاطمه راسخ، حمید گنجی، حامد کریمی، فرزاد شیرمحمدلی
حروف‌چینی و صفحه‌آرایی	معصومه روحانیان
ناظر چاپ	حمید عباسی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

استعدادتحلیلی

۲۵۱- گزینهٔ «۱» *(حامد کریمی)*

شکل درست ابیات:

و) آن شنیدم که گفت پشّه به کیک / بامدادان پس از سلام علیک

هـ) ای عجب من بدین سیه‌رختی / تو بدان فرّهی و خوشبختی

ب) تو چنانی و من چنین ز چه روی؟ / تو طربناک و من غمین ز چه روی؟

الف) کیک چون ماجرای پشه شنفت / زیر لب خنده‌ای زد آن‌گه گفت

د) من به هنگام کار خاموشم / بسته‌لب پای‌تابه‌سر گوشم

ج) ای پسر رو خموش باش چو کیک / تا نخواندت کسی، مزن لبیک

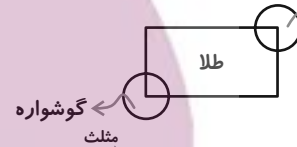
(ترتیب جملات، هوش کلامی)

۲۵۲- گزینهٔ «۱» *(کتاب استعدادتحلیلی هوش کلامی)*

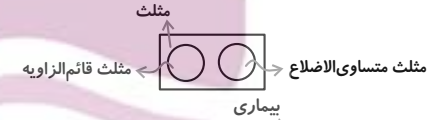
برخی گوشواره‌ها و برخی النگوها از طلا هستند و برخی هم نه. همچنین هر طلایی، النگو یا گوشواره نیست. پس رابطهٔ بین این واژه‌ها مثل شکل صورت سؤال است.

رابطهٔ بین واژه‌ها در دیگر گزینه‌ها نیز با شکل‌های جداگانه‌ای نشان داده می‌شود:

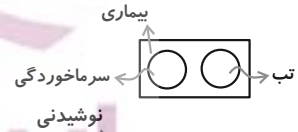
گزینهٔ «۱»:



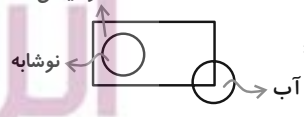
گزینهٔ «۲»:



گزینهٔ «۳»:



گزینهٔ «۴»:



(انساب اربعه، هوش کلامی)

۲۵۳- گزینهٔ «۲» *(کتاب استعدادتحلیلی هوش کلامی)*

در همهٔ گزینه‌ها، یکی از کلمه‌ها از ریشهٔ فعل گذشته و دیگری از ریشهٔ فعل حال تشکیل شده است، به‌جز گزینهٔ «۲»:

بینا: بین (ریشهٔ فعل حال) + ا ـ دیدنی: دید (ریشهٔ فعل گذشته) + ـَنی

پرستنده: پرست (ریشهٔ فعل حال) + ـَنده ـ پرستار: پرست (ریشهٔ فعل حال) + ار

گویا: گوی (ریشهٔ فعل حال) + ا ـ گفتنی: گفت (ریشهٔ فعل گذشته) + ـَنی

رونده: رو (ریشهٔ فعل حال) + ـَنده ـ رفتار: رفت (ریشهٔ فعل گذشته) + ار

(ساختمان واژه‌ها، هوش کلامی)

۲۵۴- گزینهٔ «۴» *(حمید اصفهانی)*

متن از چند مشخّصهٔ بررسی‌های مبتنی بر آرکی‌تایپ سخن می‌گوید که رنگ هم از آن‌هاست، پس در نقدهای ادبی متکّی بر مفهوم آرکی‌تایپ می‌توان آن‌ها را نیز بررسی کرد.

متن نمی‌گوید نمادها باید در همهٔ فرهنگ‌ها و در همهٔ ادراک‌ها یکسان باشد تا در ضمیر ناخودآگاه جمعی قرار گیرد. همچنین بحث از «ضمیر ناخودآگاه شخصی» با بحث از «ضمیر ناخودآگاه جمعی» متفاوت است، پس نمی‌توان گفت یونگ و مکتب او در بررسی ضمیر ناخودآگاه در آثار ادبی، از اوّلین‌ها بوده‌اند.

(تکمیل متن، استدلال هوش کلامی)

۲۵۵- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

متن از «جهانی‌های معنایی» صحبت می‌کند که قواعدی هستند که ساختار واژگان را در همهٔ زبان‌ها تعیین می‌کنند. در انتهای متن، از تفاوت‌های زبان‌ها سخن گفته شده است امّا پس از کلمهٔ «ولی» باید مطلبی باشد که وجود این شباهت‌های قواعدی را در زبان‌ها نشان دهد. تنها گزینهٔ «۲» است که چنین معنایی دارد.

(تکمیل متن، استدلال، هوش کلامی)

۲۵۶- گزینهٔ «۴» *(حمید اصفهانی)*

قطعهٔ ابونصر فراهی، از وجود حروف علّه می‌گوید که با مثال‌های آن می‌توان فهمید این حروف «و، ا، ی» است. از همان بیت نخست نیز مشخّص است که فراهی، شناخت «دال» و «ذال» را از شروط فصاحت دانسته است. معلوم است که علم به وجود حروف علّه مربوط به دوران متأخّر نیست، از «دال» و «ذال» غیرپایانی صحبت نشده است، و واژه‌هایی هست که «دال» در حرف پایانی آن‌هاست و تغییریافته از «ذال» نیست.

(تکمیل متن، استدلال، هوش کلامی)

۲۵۷- گزینهٔ «۴» *(کتاب استعدادتحلیلی هوش کلامی)*

عبارت گزینهٔ «۴» با نگاهی ناخوشایند، همه را به یک چشم می‌بینند و می‌گوید هر کسی را می‌توان به شکلی برای انجام کاری تطمیع کرد و از آن بهره برد. دیگر عبارت‌ها می‌گویند هر چیزی جای مخصوص به خود را دارد و نباید آن‌ها را به جای هم به‌کار برد.

(قرابت معنایی، هوش کلامی)

۲۵۸- گزینهٔ «۱» *(فرزاد شیرمحمدلی)*

سنّ علی، میلاد و داریوش را به ترتیب A ، M و D درنظر می‌گیریم:

$$(A-۲)=۳(M-۲+D-۲)\Rightarrow A=۳M+۳D-۱۰$$

$$(A+۲)=۸((M+۲)-(D+۲)\Rightarrow A=۸M-۸D-۲$$

$\Rightarrow ۳M+۳D-۱۰=۸M-۸D-۲ \Rightarrow ۱۱D=۵M+۸$

حال M را حدس می‌زنیم، تا جایی که $\frac{۵M+۸}{۱۱}$ عدد طبیعی یک‌رقمی شود. اگر $M=۵$ باشد، $D=۳$ و در نتیجه $A=۱۴$ است. در نتیجه:

الف: $A-M=۹$

ب: $M-D=۲$

(کفایت داده، هوش منطقی ریاضی)

۲۵۹- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

فرض کنید طول طناب a باشد. در مربع، محیط a، پس طول ضلع‌ها هر کدام $\frac{a}{۴}$ و مساحت $\frac{a^۲}{۱۶}$ خواهد بود. حال فرض کنید مستطیلی بسازیم. اگر این مستطیل، عرضی داشته باشد که x واحد از ضلع مربع کوچک‌تر باشد و طولی داشته باشد که به همین اندازه از ضلع مربع بزرگ‌تر باشد، عرض و طول آن $(\frac{a}{۴}-x)$ و $(\frac{a}{۴}+x)$ خواهد بود و مساحت آن به اندازهٔ $x^۲$ واحد کم‌تر از مربع خواهد بود:

$$(\frac{a}{۴}+x)(\frac{a}{۴}-x)=\frac{a^۲}{۱۶}-x^۲$$

(کفایت داده، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۰- گزینهٔ «۱» *(حمید کنبی)*

حسن به تنهایی در هر ساعت $\frac{۱}{۲۴}$ از کار را انجام می‌دهد:

$$\frac{۱}{۴۸}=\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۲۴} \Rightarrow x=\frac{۱}{۱۶}$$: کسر کار محمود و حسن

$$\frac{۱}{۲۴}+x=\frac{۱}{۱۶}$$

پس محمود به تنهایی در هر ساعت $\frac{۱}{۴۸}$ از کار را انجام می‌دهد، یعنی کل کار را در ۴۸ ساعت.

$$\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۴۸}=\frac{۳}{۴۸} \Rightarrow y=\frac{۱}{۴۸}+y=\frac{۱}{۱۲}$$: کسر کار علی و محمود

پس علی به تنهایی در هر ساعت $\frac{۱}{۱۶}$ کار را انجام می‌دهد، یعنی کل کار در ۱۶ ساعت.

(کفایت داده هوش منطقی ریاضی)

۲۶۱- گزینهٔ «۱» *(فاطمه راسخ)*

عدد مضرب پنج است، پس یکان صفر است. دقت کنید عدد ۵ را نداریم. اگر رقم‌های دهگان و صدگان هشت واحد اختلاف داشته باشند، قطعاً یک و نُه هستند. بسته به جایگاه این دو عدد، هزارگان ممکن است سه یا هفت باشد، اما عدد ۷ ممکن نیست. پس فقط ۳۱۹۰ ممکن است.

(مقیقت‌یابی، یکان، بخش‌پذیری، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۲- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

عددهای ممکن با شرایط گفته شده، یکی از حالات زیر هستند که در آن‌ها دست کم ۳ یا ۶ وجود دارد. دقت کنید که می‌توان جای یکان و هزارگان را با هم و جای دهگان و صدگان را با هم عوض کرد.

۳۱۲۴ / ۲۱۳۹ / ۳۱۴۸ / ۴۱۶۹ / ۴۲۳۹ / ۸۲۴۶ / ۹۲۶۸ / ۹۳۴۸

(مقیقت‌یابی، یکان، بخش‌پذیری، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۳- گزینهٔ «۱» *(فاطمه راسخ)*

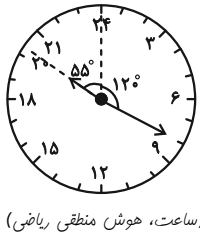
عددهای ۱ و ۵ و ۷ و ۸ در عدد نیستند. عددهای صفر و چهار نیز قطعاً در عدد هستند. پس باید دو رقم دیگر را با دو تا از اعداد ۲، ۳، ۶ و ۹ کامل کنیم. می‌دانیم مجموع ارقام عددی که بر ۹ بخشپذیر است، مضرب ۹ است. اکنون مجموع دو رقم معلوم است: $۴+۴=۰$ تنها حالت ممکن آن است که دو عدد دیگر ۲ و ۳ باشد.

$۰+۲+۳+۴=۹ \Rightarrow$ اختلاف $=۴-۳=۱$

(مقیقت‌یابی، یکان، بخش‌پذیری، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۴- گزینهٔ «۴» *(حمید کنبی)*

در ساعت $۲۰:۲۰'$، عقربهٔ دقیقه‌شمار به اندازهٔ $\frac{۲۰}{۶۰}=\frac{۱}{۳}$ از صفحه را چرخیده است. کل صفحه ۳۶۰° است پس عقربهٔ دقیقه‌شمار $(\frac{۳۶۰^\circ}{۳})=۱۲۰^\circ$ از خط قائم دور شده است. فاصلهٔ بین دو عدد در این ساعت، $(\frac{۳۶۰^\circ}{۲۴})=۱۵^\circ$ است. عقربهٔ ساعت‌شمار بیست دقیقه پس از ساعتِ بیست، به اندازهٔ $(\frac{۲۰}{۶۰}\times ۱۵^\circ)=۵^\circ$ از ساعت ۲۰ دور شده است. فاصلهٔ ساعت ۲۰ تا خط قائم، $۴\times ۱۵=۶۰^\circ$ است. پس فاصلهٔ عقربهٔ ساعت‌شمار تا خط قائم، $(۶۰-۵)^\circ=۵۵^\circ$ است. پس زاویهٔ بین دو عقربه $۵۵+۱۲۰=۱۷۵^\circ$ است.



(ساعت، هوش منطقی ریاضی)

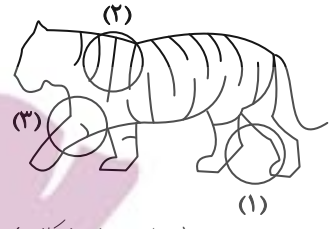
۲۶۵- گزینهٔ «۱» *(خرزاد شیرمحمدلی)*

دفتر و کتاب هر دو یک حرف را می‌زنند و چون یک دروغگو داریم، قطعاً دروغ نمی‌گویند هر دو نو هستند، پس خودکار هم راست می‌گوید و نو است، پس روپوش هم راست می‌گوید و نو است و گوشی دروغگو است.

(دقیقت‌یابی، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۶- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

دیگر گزینه‌ها در شکل صورت سؤال:



(جزءیابی، هوش غیرکلامی)

۲۶۷- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

در سمت چپ خطّ‌عمودی هر ردیف از الگوی صورت سؤال، هر شکلی که کم‌تر آمده است در سمت راست خط عمودی هم تکرار شده است. در ردیف پایینی نیز سه بار، دو بار و فقط یک بار آمده است، پس این شکل آخر را در سمت راست خط عمودی تکرار می‌کنیم.

(الگوی خطی، هوش غیرکلامی)

۲۶۸- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

سه طرح در شکل صورت سؤال در حرکتند و در شکل پنجم به‌جای نخست خود برمی‌گردند.

(الگوی خطی، هوش غیرکلامی)

۲۶۹- گزینهٔ «۱» *(حمید کنبی)*

از تکرار کُدها می‌فهمیم که تعداد ضلع‌ها یا پاره‌خط‌ها مهم است:

عددهای زوج $\Rightarrow i$

عددهای مضرب ۳ $\Rightarrow B$

عددهای مضرب ۴ $\Rightarrow A$

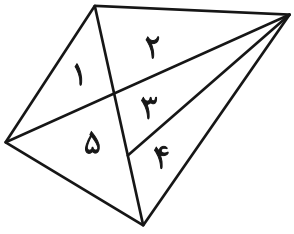
عددهای اول $\Rightarrow D$

$\Rightarrow ۱۲ = BAi$

(کدگذاری، هوش غیرکلامی)

۲۷۰- گزینهٔ «۳» *(خرزاد شیرممّدلی)*

مثلث‌های شکل:



$(۱),(۲),(۳),(۴),(۵),(۱,۲),(۱,۵),(۲,۳),(۳,۴)$

$(۲,۳,۴),(۳,۴,۵)$

(شمارش، هوش غیرکلامی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت