

ریاضیات رشته تجربی

حسابان / رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل ششم: توابع نمایی و لگاریتم

مهرداد عباسپور

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



فصل ۶ : توابع نمایی و لگاریتم

(۱) تعریف لگاریتم و ویژگی‌های آن

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



$$\log_b^a = c \Leftrightarrow a = b^c$$

$$\log_b^a : \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_2^x = 3 \rightarrow x = 2^3$$

$$2^9 = 512 \rightarrow 9 = \log_2^{512}$$

$$\log_2^{512} = 9$$

$$2^9 = 512$$

$$\log x = \log_{10}^x$$



$$\log_a^1 = 0$$

$$\log_a^a = 1$$

$$\log_a^{a^n} = n$$

$$2 = \log_{\mu} \square \rightarrow \mu^2$$

مثال:

$$\log_{\varepsilon}^2 - \textcircled{3} = \log_{\varepsilon}^{2+1}$$

$$\log_{\varepsilon}^3$$



$$\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$$

$$\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

$$\log_c^{\frac{1}{b}} = -\log_c^b$$

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



$$\log_b a^n = n \log_b a$$

$$\log_b^a = \frac{1}{m} \log_b a$$

$$\log_b^a = \frac{n}{m} \log_b a$$

$$\log_b a^r = \frac{r}{m} \log_b a$$

$$4 \log_b a = \log_b a^4$$

$$\log_b a$$

$$\log_b a$$

$$\log_b a = \log_b a^n$$

$$\log_{\sqrt[3]{4}} = \log_{(\sqrt[3]{4})^2} = \log_{\sqrt[3]{16}}$$

$$\log_{\sqrt[3]{4}} + \log_{\sqrt[3]{4}} = 2$$

$$\log_{\sqrt[3]{4}} = 1$$



$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$\log_b^a \cdot \log_c^b = \log_c^a$$

$$\log_b^a = \frac{\log_{10}^a}{\log_{10}^b} = \frac{\log a}{\log b}$$

$$\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$\log_a^v = \frac{\log_v^v}{\log_a^v}$$

$$\cancel{\log_a^v} \cdot \cancel{\log_a^v} = \log_v^v$$

$$\log_a^v = \frac{\log_v^v}{\log_a^v} \rightarrow \log_a^v = \frac{1}{\log_a^v}$$

$$\log_a^v = \frac{1}{\log_a^v}$$

۷

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



$$a^{\log_a b} = b$$

$${}_c \log_a^b = b \log_a^c$$

$${}_2 \log_5 = a \rightarrow {}_2^a = 5$$

$${}_2 \log_5^a = 5$$

$$\begin{aligned} {}_2 \log_5^a &= {}_2 \log_{2^2}^a = \frac{1}{2} \log_2^a = \frac{1}{2} \log_2^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \log_2^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2} \\ {}_2 \log_5^a &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

برای اثبات از طرفین تادی a ~~مساوی~~



تمرین ۱: اگر $\log_b^a = 3$ باشد، حاصل $\log_{ab}^{b^{12}}$ را بیابید.

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

۶ (۲)

۸ (۱)

$$\log_b^a = 3 \Rightarrow a = b^3$$

$$\log_{ab}^{b^{12}} = \log_{b^3 \cdot b}^{b^{12}} = \log_{b^4}^{b^{12}} = \frac{12}{4} \log_b^b = 3$$

ایران تونش

توشه‌های برای موفقیت



تمرین ۲: اگر $\log_y^x \cdot \log_y^y \sqrt[2]{y} = 4$ و $x^2 = y^n$ باشد، مقدار n را بیابید.

$$\log_y^x \cdot \sqrt[2]{y} = \log_y^x y^{\frac{1}{2}} = \log_y^x y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{y}} \log_y^y y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\log_y^x \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = 4 \rightarrow \log_y^x = 4\sqrt{y} \Rightarrow x = y^{4\sqrt{y}} \rightarrow x^2 = y^{8\sqrt{y}}$$

$$n = 16$$

ایران تونش

توشه‌های برای موفقیت



تمرین ۳: با فرض $\log 2 \approx 0,3$ و $\log 3 \approx 0,5$ ، مقدار $\log \frac{\sqrt{2}}{15}$ را بیابید.

-0,98 (۴)

-1,02 (۳)

-0,95 (۲)

-1,05 (۱) ✓

$$\log \frac{\sqrt{2}}{15} = \frac{1}{2} \log 2 - (\log 3 + \log 5) \rightarrow 1 - \log 2 \approx 0,7$$

$$\approx \frac{1}{2} (0,3) - (0,5 + 0,7) = 0,15 - 1,2 = -1,05$$

ارتباط $\log 5$ و $\log 2$

$$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - \log 5$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$



تمرین ۱۴ : مقدار $(\sqrt{10})^{\frac{2}{3}} \log 5$ را به دست آورید.

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{3}} \log 5 = 10^{-\frac{1}{3}} \log 5 = 10^{-\frac{1}{3}} \log 5^{\frac{1}{3}} = 10^{-\frac{1}{3}} \log \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{10} \log \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{10 \log 5}$$

ایران تونش

توشه‌های برای موفقیت



$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

تمرین ۵: حاصل $2^{\frac{1}{2} + \log_4 3}$ را بیابید.

$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\log_4 3} = \sqrt{2} \times 2^{\log_4 3} = \sqrt{2} \times 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4}$$

ایران تونش
توشه‌های برای موفقیت



تمرین ۶: با فرض $\log 2 = 0,3$ و $\log 3 = 0,5$ ، مقدار $\log_{24} 54$ را بیابید.

$$1\frac{2}{9} \text{ (۴)}$$

$$1\frac{1}{9} \text{ (۳)}$$

$$1\frac{2}{7} \text{ (۲)} \checkmark$$

$$1\frac{1}{7} \text{ (۱)}$$

$$\log_{24} 54 = \frac{\log_{10} 54}{\log_{10} 24} = \frac{\log(2 \times 3^3)}{\log(2^3 \times 3)} = \frac{\log 2 + 3 \log 3}{\log 2 + 3 \log 3}$$

$$\approx \frac{0,3 + 3(0,5)}{0,3 + 3(0,3)} = \frac{1,1}{1,2} = \frac{11}{12} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$$

ایران تونش

توشه‌های برای موفقیت



تمرین ۷ : با فرض $\log_3^2 = a$ حاصل \log_{12}^{18} را بر حسب a بیابید.

$$\log_{12}^{18} = \frac{\log_3^{18}}{\log_3^{12}} = \frac{\log_3^{2 \times 3^2}}{\log_3^{2^2 \times 3}} = \frac{2\log_3^2 + 2\log_3^3}{2\log_3^2 + \log_3^3}$$

$$\frac{a+2}{2a+1}$$

ایران تونش
توشه‌های برای موفقیت



تمرین ۸ : اگر به ازای اعداد مثبت و مخالف یک a ، b و c تساوی $\log_a^c + \log_b^c = 1$ برقرار باشد،

(سراسری ریاضی خارج ۱۴۰۰)

آنگاه $\log_c^a \cdot \log_c^b$ ، کدام است ؟

$2 \log_c^{a+b}$ (۴)

\log_c^{a+b} (۳)

$2 \log_c^{ab}$ (۲)

\log_c^{ab} (۱) ✓

$$\frac{1}{\log_c^a} + \frac{1}{\log_c^b} = 1 \rightarrow \frac{\log_c^b + \log_c^a}{\log_c^b \cdot \log_c^a} = 1 \rightarrow$$

$$\log_c^{ab} = \log_c^b \cdot \log_c^a$$



تمرین ۹: حاصل عبارت $(\log_{21}(3))^2 + \log_{21}(147) \log_{21}(1323)$ ، کدام است ؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

$$\left(\log_{21}^2\right)^2 + \log_{21} \frac{21^2}{3} \cdot \log_{21} 21^2 \times 3$$

$$\left(\log_{21}^2\right)^2 + \left(\log_{21}^2 - \log_{21}^2\right) \left(\log_{21}^2 + \log_{21}^2\right)$$

$$a^2 + \underbrace{(2-a)(2+a)}_{4-a^2} = 4$$

$$147 = 21 \times 7$$

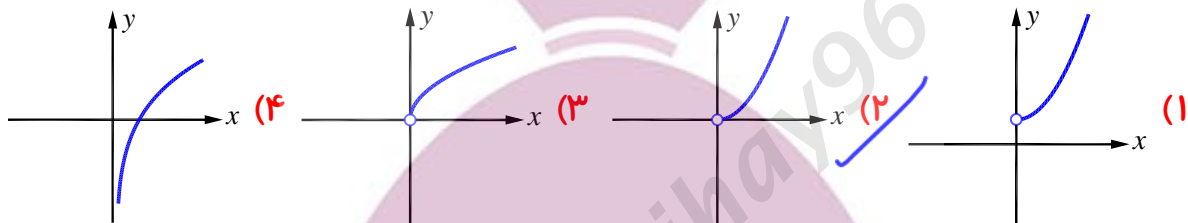
$$= 21 \times \frac{21}{3}$$

$$\frac{1323 = 21 \times 63}{= 21^2 \times 3}$$



سراسری ریاضی ۱۴۰۰

تمرین ۱۰: نمودار تابع $f(x) = 9^{\log_3 x}$ ، کدام است ؟



$$f(x) = x^{\log_3 9} = x^2 : x > 0$$

ایران تونش

توسعه‌ای برای موفقیت



تعداد ارقام یک عدد

$$\log_{10} \sqrt{3} = 1, \sim \quad 10^0 < \sqrt{3} < 10^1$$

$$\log_{10} 11223 = 2, \sim \quad 10^2 < 11223 < 10^4$$

$$\log_{10} n \text{ عدد } n \text{ در سطح } = k, \sim \Rightarrow \text{عدد } n \text{ عدد } k+1 \text{ رقم است}$$



تمرین ۱۱: با توجه به اینکه $\log 3 \approx 0,477$ ، عدد 3^{30} چند رقمی است؟

$$\log 3^{30} = 30 \log 3 \approx 30 \times (0,477) = 14,31 \Rightarrow \text{عدد ۱۵ رقمی}$$

ایران تونش

توشه‌های برای موفقیت



ریاضیات رشته تجربی

حسابان / رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل ششم: توابع نمایی و لگاریتم

مهرداد عباسپور



فصل ۶ : توابع نمایی و لگاریتم

(۲) حل معادلات نمایی و لگاریتمی

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۱۲: معادله $\log_x^{e+x} = 2$ را حل کنید.

$$9 + x = x^2 \rightarrow x^2 - x - 9 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 3, -2 \xrightarrow{\text{رد}} x = 3$$

$$x = 3$$



تمرین ۱۳ : معادله $2\log(x-1) - 1 = \log(x+2) - \log 5$ را حل کنید.

$$\log(x-1)^2 - \log 10 = \log(x+2) - \log 5$$

$$\cancel{\log \frac{(x-1)^2}{10}} = \cancel{\log \frac{x+2}{5}} \Rightarrow (x-1)^2 = 2(x+2) \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \rightarrow \textcircled{x = 2 + \sqrt{3}}$$



تمرین ۱۴: از رابطه‌ی $\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1)$ مقدار لگاریتم $(2x+5)$ در پایه‌ی

(سراسری ریاضی ۹۷)

۴، کدام است؟

۱/۵ (۴) ✓

۱/۲۵ (۳)

۰/۷۵ (۲)

۰/۵ (۱)

$$(x+2)(2x-1) = 4x+1 \rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow (2x-3)(x+1) = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ و } -1 \xrightarrow{\text{دست}} x = \frac{3}{2}$$

$$\log_{x+5} \bigcup_{\varepsilon} \xrightarrow{x = \frac{3}{2}} \log_{\frac{7}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} = \frac{2}{2} = 1$$



تمرین ۱۵: معادله‌ی $(\log_2^x)^2 - 9\log_8^x = 4$ را حل کنید.

$$\underbrace{(\log_2^x)^2}_{a^2} - 3 \log_2^x = 4 \rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \rightarrow a = -1, 4$$

↪ ۲^۳

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_2^x = -1 \rightarrow x = 2^{-1} \\ \log_2^x = 4 \rightarrow x = 2^4 \end{array} \right. \rightarrow x \in \left\{ \frac{1}{2}, 16 \right\}$$

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۱۶: معادله $\log_4^{2x+1} - \log_2^x = \log_{\sqrt{\frac{4}{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ را حل کنید.

$$\log_{\frac{1}{4}}^{2x+1} - \log_{\frac{1}{2}}^x = \log_{\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}^{2x+1} - \log_{\frac{1}{2}}^x = \log_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x^2 = 4x + 2$$

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{3} \rightarrow x = 2 + 2\sqrt{3}$$



تمرین ۱۷: معادله $\log_3^x + \log_x^9 = 3$ را حل کنید.

$$\log_3^x + 2 \log_x^3 = 3$$

$$\log_3^x = a \rightarrow \log_x^3 = \frac{1}{a}$$

$$a + \frac{2}{a} = 3 \xrightarrow{\cdot a} a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow a = 1, 2$$

$$\log_3^x = 1, 2 \rightarrow x = 3^1, 3^2 \rightarrow x \in \{3, 9\}$$



تمرین ۱۸: معادله‌ی $\log_2(\log_4(\log_8^x)) = 0$ را حل کنید.

A

$$\log_2^A = 0 \rightarrow A = 2^0 = 1$$

$$\log_{\varepsilon}(\log_8^x) = 1$$

$$\log_{\varepsilon}^B = 1 \rightarrow B = \varepsilon^1$$

$$\log_8^{\varepsilon} = \varepsilon \rightarrow \varepsilon = 1^{\varepsilon} = (2^{\frac{1}{3}})^{\varepsilon} = 2^{\frac{\varepsilon}{3}}$$



تمرین ۱۹: معادله $x^{\log x} = 100$ را حل کنید.

$$\log(x^{\log x}) = \log(100)$$

$$\log x \cdot \log(x) = 2 \rightarrow (\log x)^2 = 2 \rightarrow \log x = \pm\sqrt{2}$$

$$x = 10^{\pm\sqrt{2}}$$



تمرین ۲۰: معادله $4^{x+1} + 2^{x+3} = 192$ را حل کنید.

$$\underbrace{4^x}_{a^2} \cdot 4^1 + \underbrace{2^x}_a \cdot 2^3 = 192$$

$$\rightarrow 4a^2 + 8a = 192 \rightarrow a^2 + 2a = 48 \xrightarrow{+1} (a+1)^2 = 49$$

$$a+1 = \pm 7 \rightarrow a = 6, -1$$

$$2^x = a \rightarrow a > 0 \Rightarrow 2^x = 6 \Rightarrow x = \log_2 6$$



تمرین ۲۱: از دو معادله‌ی دومجهولی $2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2 \log 3 + \log x$ مقدار y کدام

(سراسری تجربی ۹۶)

است؟

۴ (۴)

۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\log y = \log 3^2 + \log x \rightarrow \log y = \log 9x \rightarrow y = 9x$$

$$2^{x-7} \times (2^2)^{x+9x} = 1 \rightarrow 2^{x-7} \times 2^{20x} = 1 \rightarrow 2^{21x-7} = 1$$

$$\rightarrow 21x - 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 3 \end{cases}$$



۱۴۰۰

(سراسری ریاضی فارج)

تمرین ۲۲: مجموع جواب‌های معادله $\log_2(4^x + 15) = x + 3$ ، کدام است ؟

\log_4^{15} (۴)

\log_2^{15} (۳)

۱۵ (۲)

۸ (۱)

$4^x + 15 = 2^{x+3} \rightarrow 4^x + 15 = 2^x \cdot 2^3$

$\rightarrow a^2 - 1a + 15 = 0 \rightarrow a = 3, 5$

$\begin{cases} 2^x = 3 \\ 2^x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \log_2 3 \\ x_2 = \log_2 5 \end{cases} \rightarrow x_1 + x_2 = \log_2 15$



تمرین ۲۳: اگر در معادله $2 \log_x^a + \log_a^{\sqrt{x}} = 2$ مقدار x برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟

(سراسری تجربی خارج ۱۴۰۰)

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{9} \quad (1)$$

$$3 \quad (3) \checkmark$$

$$2 \log_{\sqrt{x}}^a + \log_a^{\sqrt{x}} = 2$$

$$\rightarrow \log_{\sqrt{x}}^9 + \log_a^{\sqrt{x}} = 2$$

t

$\frac{1}{t}$

$$t + \frac{1}{t} = 2 \rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \rightarrow t = 1$$

$$\log_{\sqrt{x}}^9 = 1 \rightarrow a = \sqrt{x}$$

۳۴



ریاضیات رشته تجربی

حسابان / رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل ششم : توابع نمایی و لگاریتم

مهرداد عباسپور

۳۵

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



فصل ۶ : توابع نمایی و لگاریتم

(۳) نامساوی‌ها و نامعادلات نمایی و لگاریتمی

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



هر دو تابع نمایی و لگاریتمی وقتی پایه‌ی بزرگتر از یک دارند، صعودی اکید و در حالتی که پایه‌ی کمتر از یک دارند، نزولی اکید هستند. پس:

$$a > 1 : \begin{cases} x > y \Leftrightarrow a^x > a^y \\ x > y > 0 \Leftrightarrow \log_a^x > \log_a^y \end{cases}$$

$$0 < a < 1 : \begin{cases} x > y \Leftrightarrow a^x < a^y \\ x > y > 0 \Leftrightarrow \log_a^x < \log_a^y \end{cases}$$

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۲۴ : هر نامعادله را حل کنید.

$$(0,2)^{2x+1} > (0,04)^{1-x}$$

$$(0,2)^2$$

$$\cancel{(0,2)^{2x+1}} > \cancel{(0,2)^{2-2x}}$$

(۰,۲ < ۱)
تک نوسان

$$\rightarrow 2x+1 < 2-2x \rightarrow x < \frac{1}{4}$$

$$3^x \geq 6 \xrightarrow{(3>1)}$$
$$\log_3(3^x) \geq \log_3(6) \rightarrow x \geq \log_3 6$$



$$\log(3x+1) < 2 \rightarrow \log(3x+1) < \log 100 \quad | \cdot 1 > 1$$

$$3x+1 < 100$$

دامنه تعریف هم بریم بارت نره

$$3x+1 > 0$$

$$x \in \left(-\frac{1}{3}, 33\right)$$

$$\log_{\frac{2}{3}} 2^x > \log_{\frac{2}{3}} (x^2-1) \quad \left| \cdot \frac{3}{2} < 1 \right. \rightarrow 2x < x^2-1$$

دامنه

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \rightarrow x > 4$$



شرط تعریف شدن لگاریتم :

\log_b^a تعریف شده است. $\Leftrightarrow (a > 0, b > 0, b \neq 1)$

ایران تونش

توشه‌های برای موفقیت



تمرین ۲۵ : حاصل $\lceil \log_{\frac{1}{2}} 100 \rceil$ را بیابید.

$$\lceil -\log_{\frac{1}{2}} 100 \rceil$$

$$2^? = 100$$

$$2^9 = 512 < 100 < 2^{10} = 1024 \rightarrow ? = 9, \dots$$

$$\lceil -9, \dots \rceil = \underline{\underline{-10}}$$

ایران تونش

توشه‌های برای موفقیت



تمرین ۲۶ : نامعادله $(\sqrt{5}-2)^{x^2+x} > (\sqrt{5}-2)^{12}$ را حل کنید.

$$0 < \sqrt{5}-2 < 1 \rightarrow x^2+x < 12 \rightarrow x^2+x-12 < 0$$

$$(x-3)(x+4) < 0 \rightarrow -4 < x < 3$$

ایران تونش

توشه‌های برای موفقیت



تمرین ۲۷: نامعادله $2^{2x} - 1 < 2^{x+1}$ را حل کنید.

$$2^{2x} - 1 < 2^{x+1}$$

$$\rightarrow a^2 - 1 < 2a$$

$$a^2 - 2a - 1 < 0$$

$$(a-4)(a+2) < 0$$

$$-2 < a < 4$$

$$-2 < 2^x < 4$$

$$\begin{cases} 2^x > -2 \\ 2^x < 4 \end{cases} \text{ همواره برقرار}$$

$$\begin{cases} 2^x < 4 \\ 2^x > -2 \end{cases} \xrightarrow{x > 1} x < 2$$



تمرین ۲۸ : نامعادله $\log_{\frac{1}{3}} x^{-1} > 2$ را حل کنید.

$$\cancel{\log_{\frac{1}{3}} x^{-1}} > \cancel{\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$0 < \frac{1}{3} < 1$

$$\rightarrow x^{-1} > \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

ضرب در x :

$$0 < 1 - x$$

$$\frac{0}{9} < x < 1$$



تمرین ۲۹ : نامعادلهی $\log_2^x > 1 + \log_2^{(x-1)}$ را حل کنید.

$$\log_2^x > \log_2^1 + \log_2^{x-1} \rightarrow \log_2^x > \log_2^2(x-1)$$

$$2 > 1 \rightarrow x > 2x - 2 \rightarrow 2 > x$$

دامنه $x > 0$

$$x > 0$$

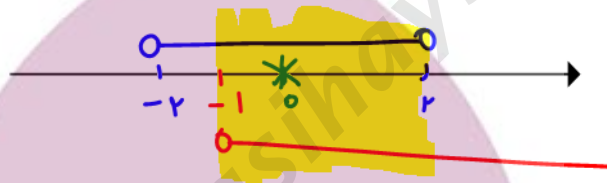
$$2x - 2 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$\rightarrow \text{لازمه } 1 < x < 2$$



تمرین ۳۰: دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \log_{x+1}^{4-x^2}$ را تعیین کنید.

$$\begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \end{cases}$$



$$D_f = (-1, 1) - \{0\}$$



تمرین ۳۱ : دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ به کدام صورت بازه‌ها است ؟

(سراسری ریاضی ۹۵)

$[-2, 0] \cup (3, 5]$ (۱) ✓ $(-2, 0) \cup (3, 5)$ (۲)

$(0, 5]$ (۴) $[-2, 3)$ (۳)

$$1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0$$

$$1 \geq \log(x^2 - 3x)$$

~~$$\log 1^0 \geq \log(x^2 - 3x)$$~~

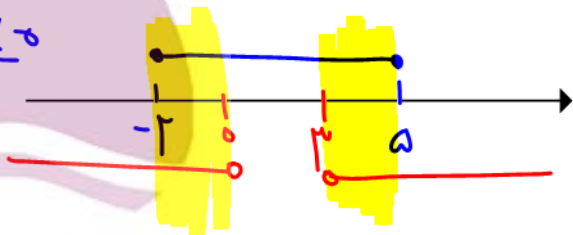
حتی‌بعض
نقشه
 $1 > 1 \rightarrow$

$$10 \geq x^2 - 3x \rightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0$$

$$\text{دامنه: } x^2 - 3x > 0$$

$$(x-5)(x+2) \leq 0$$

$$x(x-3) > 0$$





ریاضیات رشته تجربی

حسابان / رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل ششم: توابع نمایی و لگاریتم

مهرداد عباسپور

۴۸

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



فصل ۶ : توابع نمایی و لگاریتم

(۴) نمودار توابع نمایی و لگاریتمی

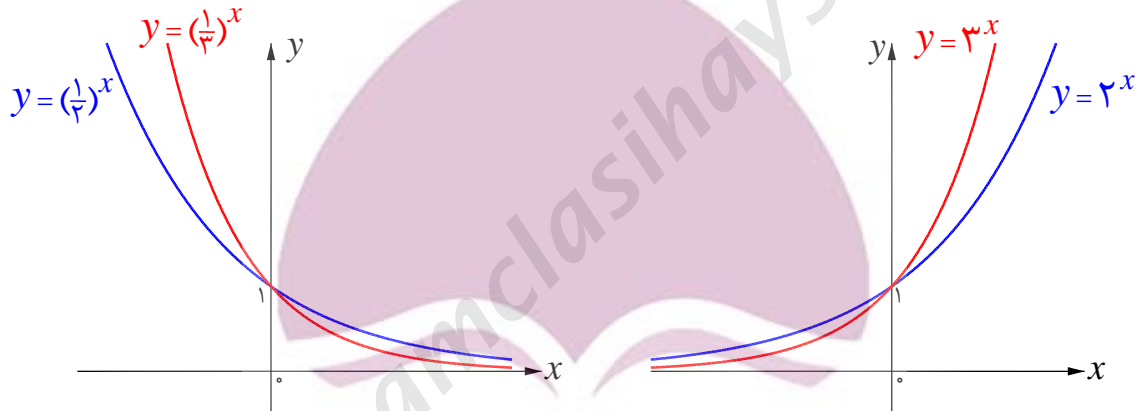
ایران تونش

توشه‌های برای موفقیت



(۱) تابع نمایی و نمودار آن

به نمودار توابع $y = a^x$ برای مقادیر $a > 1$ و $0 < a < 1$ دقت کنید.



تابع نمایی دارای مجانب افقی است که همان محور x یا $y = 0$ است.



(۲) تابع با رفتار نمایی

عدد مثبت a که $a \neq 1$ است و عدد غیر صفر k را در نظر بگیرید.

تابع $f(x) = a^x$ یک تابع نمایی می‌گویند. به تابع $f(x) = k \cdot a^x$ یک تابع با رفتار نمایی می‌گویند.

$$\underline{\underline{۲^x \text{ نمایی}}}}$$

$$\underline{\underline{۲^{x+۳} \text{ رفتار نمایی} = ۲^۳ \times ۲^x = ۸ \times ۲^x}}$$

ایران تونش

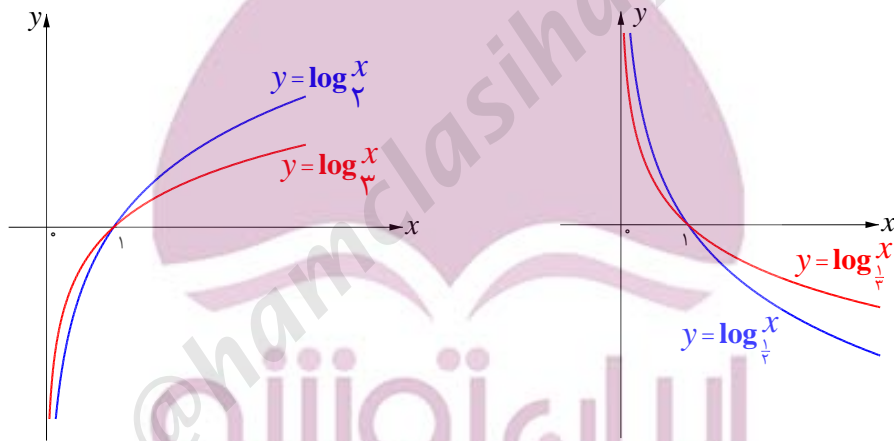
توشه‌های برای موفقیت



(۳) تابع لگاریتمی (وارون تابع نمایی)

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a^y \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a^x$$

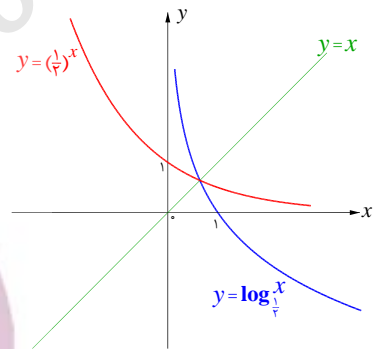
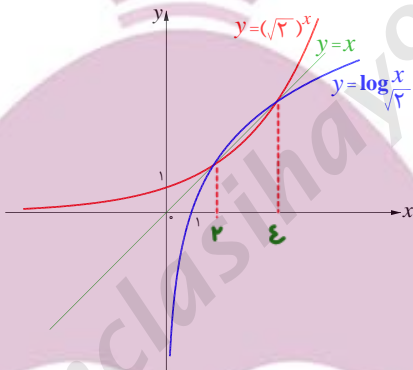
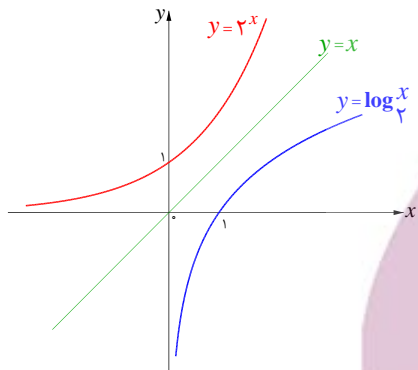
نمودار توابع $y = \log_a^x$ برای مقادیر $a > 1$ و $0 < a < 1$ دقت کنید.



تابع لگاریتمی دارای مجانب عمودی است که همان محور y یا $x = 0$ است.



(۱۴) مقایسه‌ی توابع نمایی و لگاریتمی در یک دستگاه مختصات.

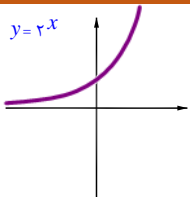


ایران تونش

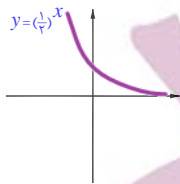
توشه‌ای برای موفقیت



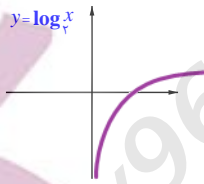
$$y = r^x$$



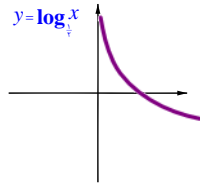
$$y = (\frac{1}{r})^x$$



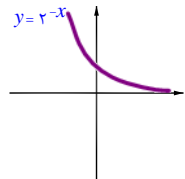
$$y = \log_r x$$



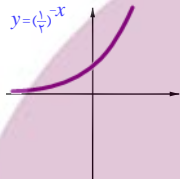
$$y = \log_{\frac{1}{r}} x$$



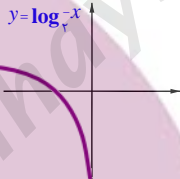
$$y = r^{-x}$$



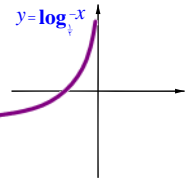
$$y = (\frac{1}{r})^{-x}$$



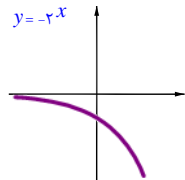
$$y = \log_r^{-x}$$



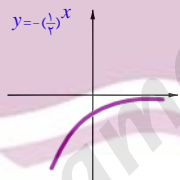
$$y = \log_{\frac{1}{r}}^{-x}$$



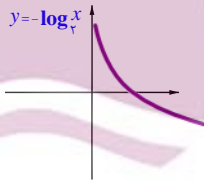
$$y = -r^x$$



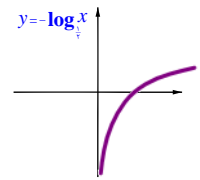
$$y = -(\frac{1}{r})^x$$



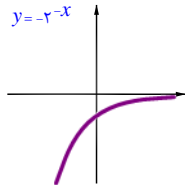
$$y = -\log_r x$$



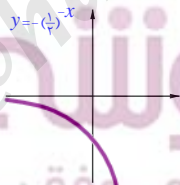
$$y = -\log_{\frac{1}{r}} x$$



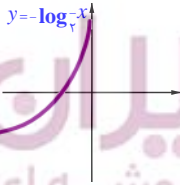
$$y = -r^{-x}$$



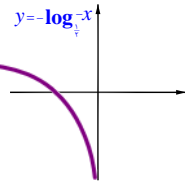
$$y = -(\frac{1}{r})^{-x}$$



$$y = -\log_r^{-x}$$



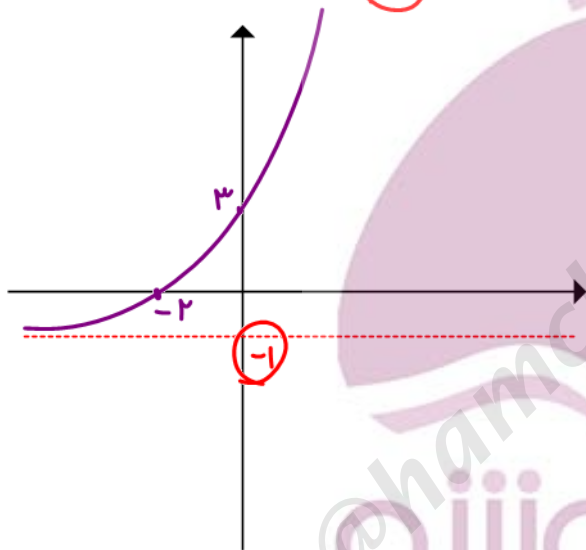
$$y = -\log_{\frac{1}{r}}^{-x}$$



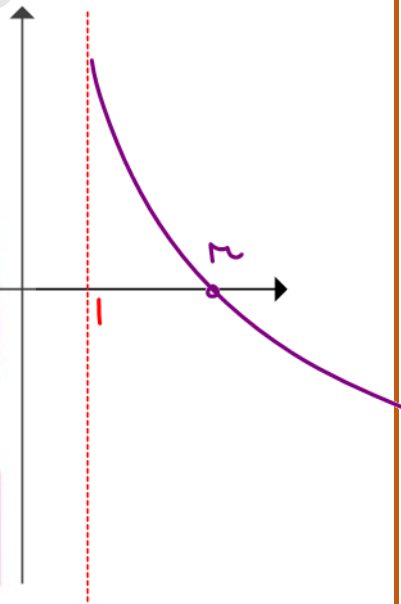


تمرین ۳۲ : نمودار هر تابع را رسم کنید.

$$f(x) = 2^{x+2} - 1$$



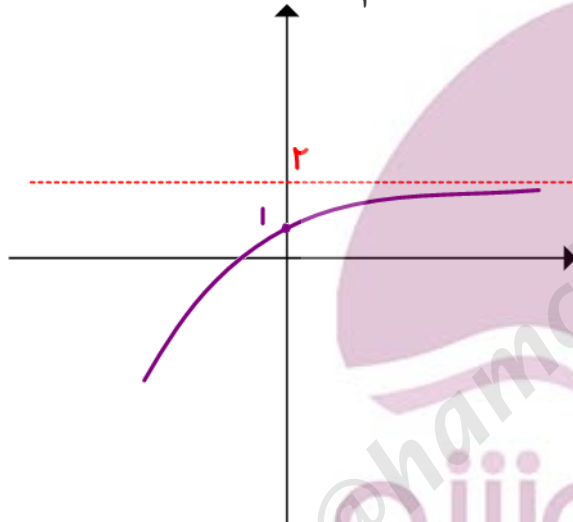
$$f(x) = 1 - \log_2^{x-1}$$



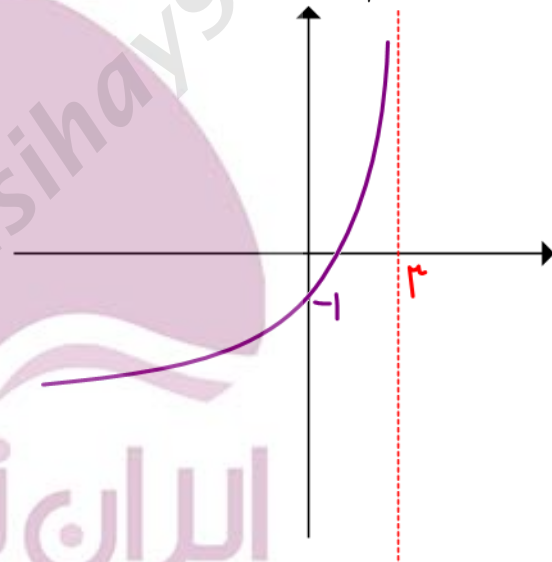


تمرین ۳۳ : نمودار هر تابع را رسم کنید.

$$f(x) = 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^x$$



$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} 3^{-x} \rightarrow x=3$$





تمرین ۳۴ : نمودار هر تابع را رسم کنید.

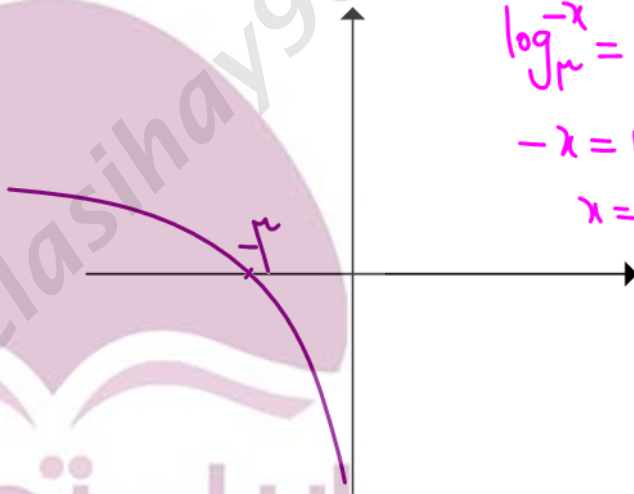
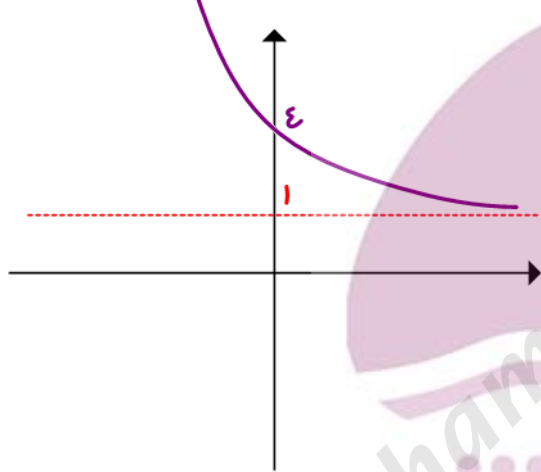
$$f(x) = 1 + 3^{1-x}$$

$$f(x) = \log_3^{-x} - 1 = 0$$

$$\log_3^{-x} = 1$$

$$-x = 3^1$$

$$x = -3$$



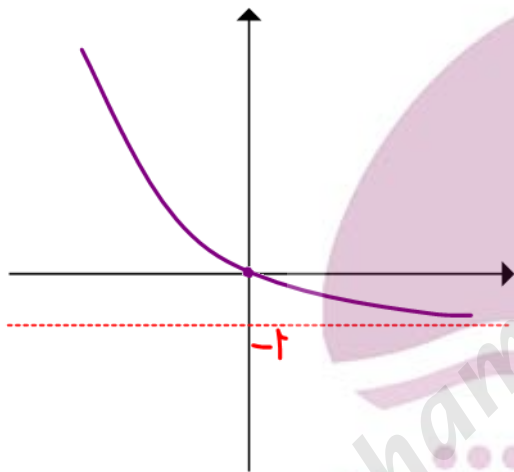
ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت

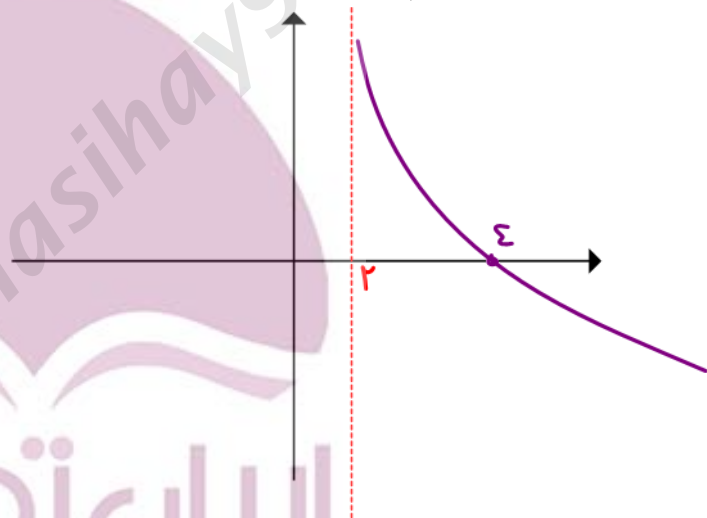


تمرین ۳۵ : نمودار هر تابع را رسم کنید.

$$f(x) = 2^{1-2x} - 2$$



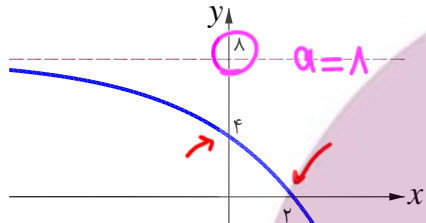
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x^{-2} + 1$$



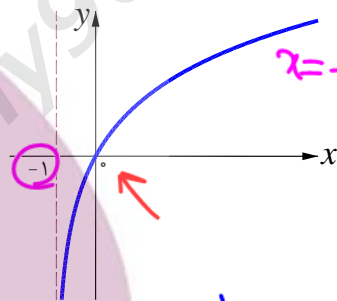


تمرین ۳۶: ضرایب مجهول را تعیین کنید.

$$f(x) = a - r^{bx+c} = 1 - r^{\frac{1}{r}x+2}$$



$$f(x) = \log_r^{ax+b} - 1$$



$$\begin{aligned} ax+b &= 0 \\ x &= -1 \rightarrow \\ -a+b &= 0 \\ b &= a \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(r) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 - r^c = r \\ 1 - r^{rb+c} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} r^c = r \\ r^{rb+c} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = r \\ rb + c = r \end{cases} \rightarrow b = \frac{1}{r}$$

۵۹

$$f(1) = 0 \rightarrow \log_r^b - 1 = 0 \rightarrow \log_r^b = 1 \rightarrow b = r$$

$$f(x) = \log_r^{rx+r} - 1$$

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۳۷ : ضرایب مجهول را تعیین کنید.

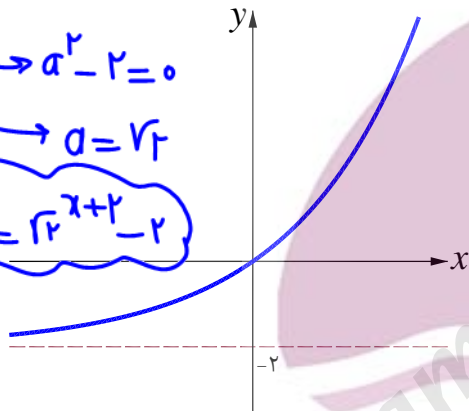
$$f(x) = a^{x+r} + b \rightarrow -r$$

$$f(x) = \log_c^{ax+b}$$

$$(0,0) \rightarrow a^r - r = 0$$

$$\rightarrow a = r^r$$

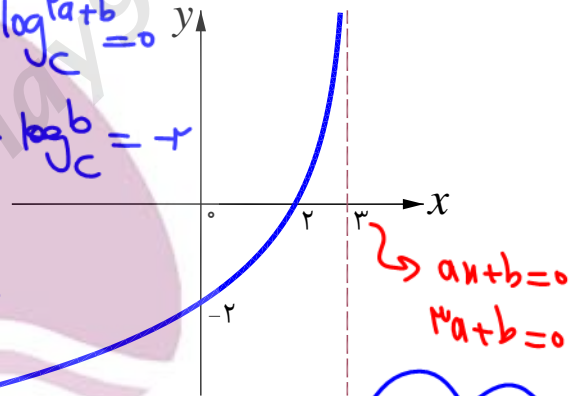
$$f(x) = r^r x^{r+r} - r$$



$$\begin{cases} f(r) = 0 \\ f(0) = -r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_c^{ra+b} = 0 \\ \log_c^b = -r \end{cases}$$

$$\begin{cases} ra+b = 1 \\ b = c^{-r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ra+b = 1 \\ ra+b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = r \end{cases} \rightarrow c = \frac{1}{r^r}$$



$$\begin{cases} ax+b = 0 \\ ra+b = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{r^r}}^{r-x}$$



تمرین ۳۸: بجانب افقی تابع $f(x) = 2^{ax+b} + c$ خط $y + 2 = 0$ است. این تابع محور x ها و نیمساز ربع اول را در نقاطی به طول ۲ و ۶ قطع می کند. مقادیر a ، b و c را بیابید.

$$y = -2 \rightarrow c = -2 \quad f(x) = 2^{ax+b} - 2$$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(4) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{2a+b} - 2 = 0 \\ 2^{4a+b} - 2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{2a+b} = 2 \\ 2^{4a+b} = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a+b = 1 \\ 4a+b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 0, c = -2$$



تمرین ۳۹: دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = c \log_{\frac{1}{3}}(ax+b)$ بازه‌ی $(-\infty, \frac{1}{3})$ است. اگر نمودار تابع

محورهای مختصات را در نقاطی به طول ۱- و عرض ۳ قطع کند، ضابطه‌ی تابع f را بیابید.



$$ax+b=0 \rightarrow \frac{1}{3}a+b=0 \rightarrow a=-3b$$

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(0)=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c \log_{\frac{1}{3}}(b-a)=0 \\ c \log_{\frac{1}{3}} b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b-a=1 \\ b = \frac{1}{3} \rightarrow c(-1)=3 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$a = -\frac{2}{3} / b = \frac{1}{3} / c = -3$$



تمرین ۱۴۰: نمودار یک تابع به صورت $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$ ، نمودار تابع $y = x^2 - x$ را در دو

(سراسری ریاضی ۹۸)

۶ (۴ ✓)

نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(3)$ کدام است؟

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

$$-2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B} = x^2 - x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 2 \\ x=2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 4 \end{array} \right. \rightarrow \begin{cases} A+B = -1 \\ 2A+B = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$$

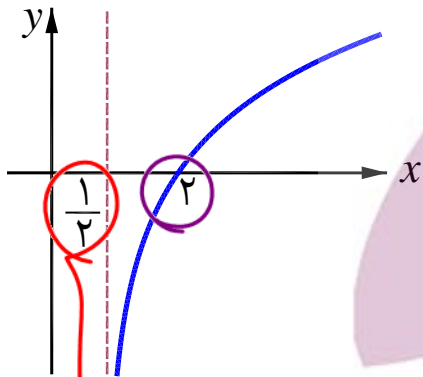
$$f(x) = 2^x - 2$$



تمرین ۴۱: شکل زیر، نمودار تابع $y = -1 + \log_b(2x+a)$ است. این منحنی خط $y = 1$ را با کدام

(سراسری تهرانی قارچ ۹۸)

طول قطع می کند؟



$$f(x) = 0$$

$$-1 + \log_b(2x+a) = 0$$

$$\rightarrow \log_b(2x+a) = 1 \rightarrow b = 3$$

$$f(x) = -1 + \log_3(2x-1) = 1$$

$$\rightarrow \log_3(2x-1) = 2 \rightarrow 2x-1 = 3^2 \rightarrow x = 5$$

۵ (۲ ✓)

۷ (۴)

۴ (۱)

۶ (۳)

$$2x+a=0$$

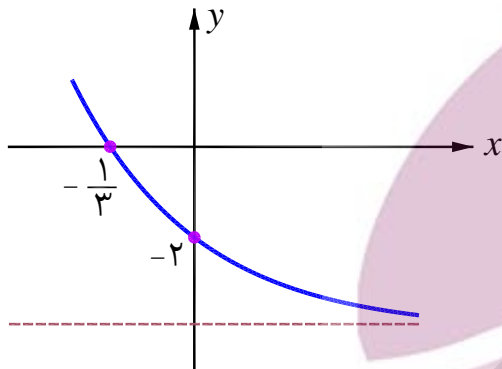
$$1+a=0 \rightarrow a=-1$$

۶۴



تمرین ۱۴۲: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f\left(-\frac{5}{3}\right)$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۹)



(۱) ۵۴

(۲) ۶۰

(۳) ۴۸

(۴) ۲۸



تمرین ۴۳ : دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{(x-2)\log(6-x)}$ را تعیین کنید.

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۴۴ : وارون تابع $f(x) = 2 + 3^{1-x}$ را بیابید.

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۴۵: اگر $f(x) = \log_2 2^{-x} - 1$ باشد، دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{(x-1)f^{-1}(x)}$ را تعیین کنید.

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۴۶: وارون تابع $f(x) = 2^{2x} + 2^{x+1}$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_2^g(x)$ می نویسیم، طول

نقطه‌ی تلاقی نمودار تابع $y = g(x)$ با نمودار خط $x + y = 1$ کدام است؟

$$\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{7 - \sqrt{17}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{7 + \sqrt{17}}{2} \quad (۱)$$

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



ریاضیات رشته تجربی

حسابان / رشته ریاضی

کنکور ۱۴۰۱

فصل ششم : توابع نمایی و لگاریتم

مهرداد عباسپور



فصل ۶ : توابع نمایی و لگاریتم

(۵) حل مسئله‌های مربوط به لگاریتم و تابع نمایی

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



(۱) پدیده‌هایی با توابع نمایی و لگاریتمی

تمرین ۴۷: در شروع یک نوع کشت ۱۴۰۰ باکتری موجود است و تعداد باکتری‌ها پس از t دقیقه

به صورت $f(t) = A \times 2^{\left(\frac{t}{18}\right)}$ می‌باشد. پس از چند دقیقه ۷۰۰۰ باکتری موجود است؟ ($\log 2 \approx 0.3$)

(سراسری تیربی ۹۲)

۲۱ (۲)

۲۸ (۱)

۴۲ (۴)

۳۵ (۳)

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۴۸: می‌دانیم که اگر فشار هوا در ارتفاع a متری از سطح دریا برابر p باشد، رابطه‌ی

$a = 15500(5 - \log p)$ برقرار است. در چه ارتفاعی فشار هوا نصف فشار هوا در سطح دریاست؟

$$(\log 2 = 0,3)$$

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۴۹: مقدار نمک در هر کیلوگرم آب اقیانوس در عمق x متری از سطح دریا برابر

$S(x) = ۳۱/۵ + ۱/۱ \log(x + ۱)$ بر حسب گرم است. در چه عمقی از سطح دریا $۳/۵$ درصد از وزن

آب را نمک تشکیل می‌دهد؟ ($\sqrt[۱]{۱۰۰} \approx ۱/۵۲$)

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۵۰: با توجه به رابطه‌ی انرژی آزاد شده در زلزله، $(\log E = 11.8 + 1.5M)$ اگر بدانیم، انرژی آزاد شده در زلزله‌ی شهر A ، ۶۰ برابر انرژی آزاد شده در زلزله‌ی شهر B باشد، محاسبه کنید زلزله‌ی شهر A چند ریشتر بیشتر از زلزله‌ی شهر B بوده است. ($\log 2 \approx 0.3$ ، $\log 3 \approx 0.5$)

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



$$A \times (1 \pm r)^n$$

(۲) کمیت‌هایی با تغییرات زمانی در زمان

$$100 \rightarrow 0.02 \times 100 \rightarrow 100 + 0.02 \times 100 = 100 (1 + 0.02)$$

$$100 \xrightarrow{\text{دو بار بین ساله}} 100 \times 1.02 \xrightarrow{\text{دو بار بین ساله}} 100 \times 1.02 \times 1.02$$

$$100 (1.02)^2 \rightarrow \dots \xrightarrow{\text{دو بار بین ساله}} 100 (1.02)^n$$

$$\textcircled{A} - (A \times 0.02) = A(1 - 0.02)$$



تمرین ۵۱: یک توپ بادی روزی ۰.۵٪ از بادش را از دست می‌دهد. تقریباً پس از چند روز نصف باد

اولیه را دارد؟ ($\log 2 \approx 0.3$, $\log 19 \approx 1.28$)

مقدار باد توپ
در پایان هر روز
→ -۰.۵٪ از باد

ن روز بگذرد

$$\rightarrow x (1 - 0.005)^n$$

$$(0.995)^n = \frac{1}{2} \xrightarrow{\log} \log \left(\frac{995}{1000} \right)^n = \log \frac{1}{2} \rightarrow n (\log \frac{995}{1000}) = -\log 2$$

$$n = \frac{-\log 2}{\log \frac{995}{1000}} = \frac{\log 2}{2 - (\log 995 + \log 1000)} \approx \frac{0.3}{2 - (0.997 + 1.28)} = \frac{0.3}{0.003} = 100$$



تمرین ۵۲: جمعیت یک شهر ۲۰۰۰۰ نفر است. نرخ رشد سالانه‌ی افزایش جمعیت این شهر ۸ درصد است. تقریباً بعد از چند سال جمعیت این شهر ۲ برابر می‌شود؟

$$(\log 2 \approx 0,301 \quad , \quad \log 3 \approx 0,477)$$

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۵۳: پس از مصرف یک قرص ۱۰۰ میلی گرمی، در هر دقیقه ۱۰ درصد از میزان دارو در معده‌ی فرد، جذب جریان خون می‌شود. پس از چند دقیقه بیش از ۹۰ میلی گرم از این دارو جذب جریان خون شده است؟ ($\log 3 \approx 0,477$)

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



(۳) مسأله‌ی نیمه عمر





تمرین ۵۴: نیمه عمر عنصری ۵ سال و جرم اولیه‌ی یک نمونه از آن ۱۰ گرم است. پس از چند سال جرم آن به ۱ گرم می‌رسد؟ ($\log 2 \approx 0,3$)

ایران تونش

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۵۵: مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر مورد نظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه،

$\frac{1}{10}$ جرم باقی مانده را از دست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر باقی می ماند؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

$$(\log 3 = 0,48)$$

۳۰۰ (۲)

۳۶۰ (۱)

۲۴۰ (۴)

۲۷۰ (۳)

ایران تونش

توشه ای برای موفقیت