ماتریس !

- تعریف ماتریس : یک آرایش مستطیلی
  - مرتبه ماتریس : تعداد ستون × تعداد سطر
  - درایه : هر عدد درون ماتریس a_{mn}
    - شماره ستون ← شماره سطر
- تساوی دو ماتریس : هم مرتبه با درایه های نظیر به نظیر برابر
- انواع ماتریس
  - سطری یا ستونی : ماتریس هایی که فقط یک سطر یا فقط ستون دارند.
  - مربعی : ماتریس هایی که تعداد سطر و ستون آنها برابر است.
    - قطری : درایه خارج از قطر اصلی همه درایه ها صفر
    - ← اسکالر : قطری که درایه های روی قطر اصلی برابر
    - ← همانی : اسکالری که قطر اصلی همگی ۱ است.
- جمع و تفریق ماتریس ها : در دو ماتریس هم مرتبه درایه های نظیر جمع می شوند.
- ماتریس نویسی فرمولی : براساس فرمولهای داده شده برای قسمت ها مختلف درایه می نویسیم ← متداول

$$\begin{bmatrix} & & i<j \\ & i=j & \\ i>j & & \end{bmatrix}$$

- ضرب ماتریس ها : شرط (برابر بودن سطر اول و ستون دومی) $A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}$
  - ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جائی ندارد و از ضرب هر سطر ماتریس اول در هر ستون ماتریس دوم یک درایه با همان آدرس تولید می شود.
- ضرب عدد در ماتریس
  - در تک تک درایه ها
- توان رسانی ماتریس ها : ابتدا توان دوم و سوم یک ماتریس را مشخص می کنیم معمولاً با یافتن الگو توانهای بالاتر بدون محاسبه قابل تشخیص هستند.

$A^2=A$ خودتوان — $A^n=0$ پوچ توان از مرتبه n

$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \longrightarrow$ کیلی همیلتون : $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=0$

ماتریس ۲

وارون ماتریس

$AA^{-1}=A^{-1}A=I$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$(A^{-1})^{n}=(A^{n})^{-1}$ ← $(A^{-1}BA)^{n}=A^{-1}B^{n}A$

$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

A ماتریس مربعی ۲x۲ ← $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

معکوس دترمینان A ضربدر قطر اصلی جابجا قطر فرعی قرینه

دستگاه معادلات خطی

اگر $AX=B$ آنگاه $X=A^{-1}B$ یعنی: ماتریس مجهول = معکوس ماتریس ضرایب × ماتریس معلوم

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

- $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ یک جواب
- $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ صفر جواب
- $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ بی‌شمار جواب

دترمینان:

- 1x1 : خود درایه
- ۲x۲ : (قطر اصلی ضرب) منهای (قطر فرعی ضرب)
- ۳x۳ : بسط حول سطر یا ستون - ساروس

(قطری : ضرب درایه‌های روی قطر اصلی)

ویژگی دترمینان

$|AB|=|A||B|$ ولی $|A+B|\neq|A|+|B|$

$|A^{n}|=|A|^{n}$

$|O\times\bigcirc|=0$

$|kA|=k^{n}|A|$

تعویض دو سطر یا دو ستون قرینه کننده است : اگر دو سطر یا ستون برابر یا مضربی از هم باشند ← دترمینان صفر است

اگر دو دترمینان فقط در یک سطر یا یک ستون اختلاف (تفاوت) داشته باشند می‌توان آنها را جمع یا تفریق نمود.

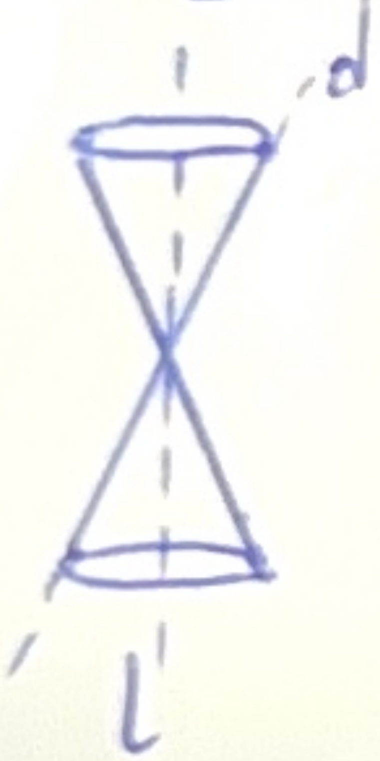
* راهبرد حل مسائل :

در نظر گرفتن مختصات یک نقطه شناور و پیاده سازی شرایط مسئله روی آن نقطه .

* همین مکان ها در فضا هم قابل تعریف است .

مکان هندسی

- فاصله ثابت از یک نقطه : دایره
- " " از دو سر پاره خط : عمود منصف
- " " از یک خط : دو خط موازی در دو طرف خط
- " " از دو خط موازی : یک خط موازی وسط دو خط
- " " از دو خط متقاطع (اضلاع یک زاویه) : نیمساز
- انواع مقاطع مخروطی



رویه مخروطی : دو خط متقاطع l و d را در نظر بگیرید ، اگر l محور باشد و d حول آن دوران کند رویه مخروطی داریم .

چگونه ساخت مقاطع مخروطی

- مقطع عمود بر محور
  - اگر از محل برخورد l و d عبور کند : یک نقطه
  - " " " " " " نکند : دایره
- مقطع مایل
  - اگر صفحه برش بر محور عمود نباشد و با مولد نیز موازی نباشد : بیضی
- مقطع موازی مولد
  - اگر از محل برخورد l و d عبور کند : یک خط
  - " " " " " " نکند : سهمی
- مقطع موازی محور
  - اگر شامل محور باشد : دو خط متقاطع
  - " " نباشد : هذلولی

دایره :

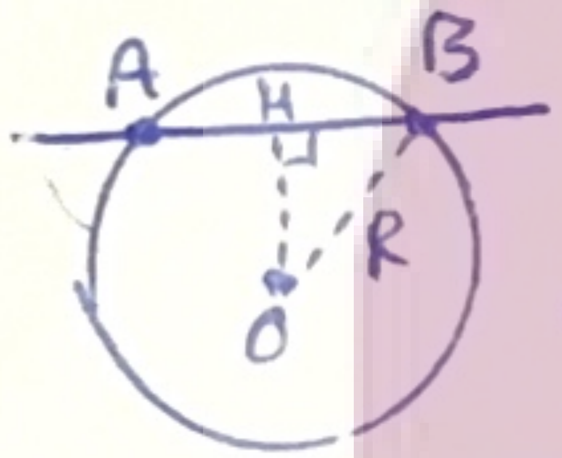
- تعریف مکان هندسی

- معادله استاندارد به مرکز $O(a,b)$ و شعاع r : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
  - نقطه داخل: $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$
  - نقطه روی دایره: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
  - نقطه خارج: $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$

- معادله گسترده (ضمنی) : $x^2+y^2+ax+by+c=0$
  - مرکز $O\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)$
  - شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$
    - دایره: $a^2+b^2-4c>0$
    - نقطه: $a^2+b^2-4c=0$
    - تهی: $a^2+b^2-4c<0$
  - اگر با جایگذاری مختصات یک نقطه به عدد $+$ / 0 / $-$ رسیدیم نقطه خارج / رو / داخل دایره است

- وضعیت خط و دایره
  - اگر معادله خط را در معادله دایره قرار دهیم بر اساس علامت Δ وضعیت خط و دایره مشخص می‌شود.
  - مقایسه:
    - بدون برخورد $OH>r$
    - مماس $OH=r$
    - متقاطع $OH<r$

- وتر ایجاد شده از برخورد خط با دایره دارای طول $AB=2\sqrt{R^2-OH^2}$ خواهد بود.

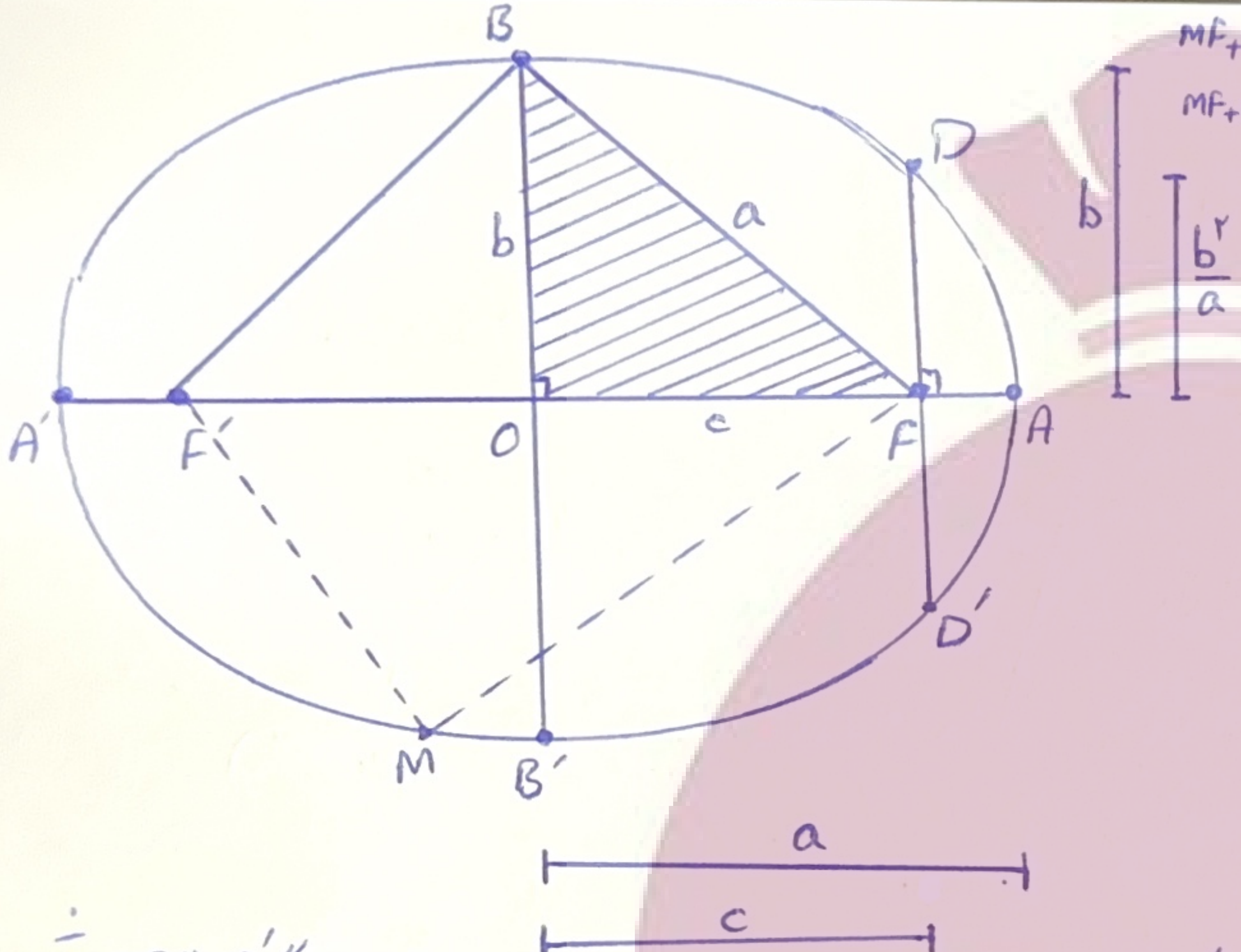


- خط مماس و قائم بر دایره (می‌توان از مشتق استفاده کرد)
  - خط قائم : هر خطی که از مرکز دایره عبور کند (قطر) بر دایره عمود است.
  - خط مماس : هر خطی که در محل برخورد قطر و دایره بر قطر عمود شود بر دایره مماس است.

- وضعیت دو دایره : $OO'=d$

d	0		$\lvert r-r'\rvert$		$r+r'$	
وضعیت	هم‌مرکز	متداخل	مماس داخل	متقاطع	مماس خارج	متخارج
تعداد خط مماس داخلی/خارجی	۰/۰	۰/۰	۱,۰	۲,۰	۲,۱	۲,۲

- وتر مشترک دو دایره: در حالتی که دو دایره متقاطع هستند از برابر قرار دادن معادله ضمنی دو دایره، معادله وتر مشترک بدست می‌آید.



بیضی

تعریف مکان هندسی $MF + MF' = 2a$

$MF+MF' > 2a$ خارج

$MF+MF' < 2a$ داخل

انواع بیضی: افقی، عمودی، مایل

نقاط اصلی بیضی (کانون‌ها، رئوس کانونی و غیرکانونی)

پارامترهای اصلی (a و b و c): $a^2=b^2+c^2$

خروج از مرکز: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

خط ⟵ $0 < e < 1$ ⟶ دایره

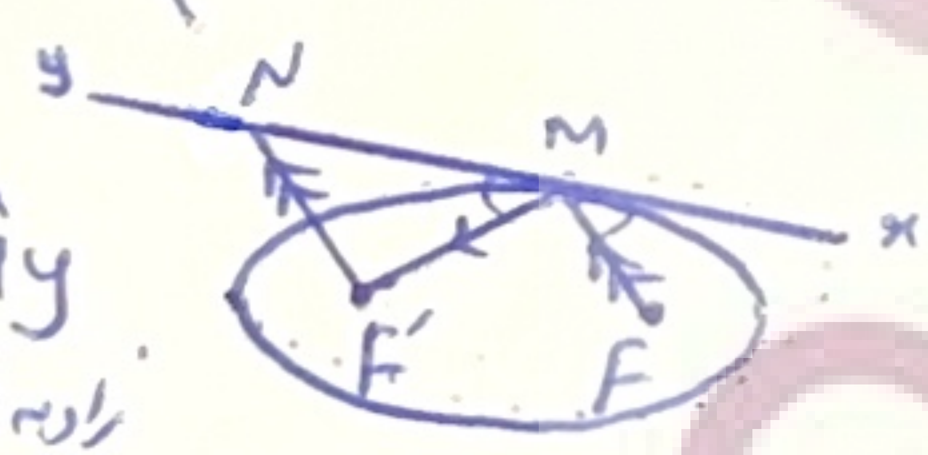
وتر مینیمم کانونی $DD' = \frac{2b^2}{a}$

اگر کانون‌ها از نقطه M با زاویه قائم رویت شوند: $MF.MF' = 2b^2$

دورترین و نزدیک‌ترین نقطه بیضی تا هر کانون، رأس‌های کانونی بیضی (A و A') هستند.

ویژگی بازتابندگی بیضی: اگر پرتو نوری از یک کانون بگذرد (بتابد) و به دیواره داخلی آینه‌ای بیضی برخورد کند، در بازتاب از کانون دیگری بگذرد.

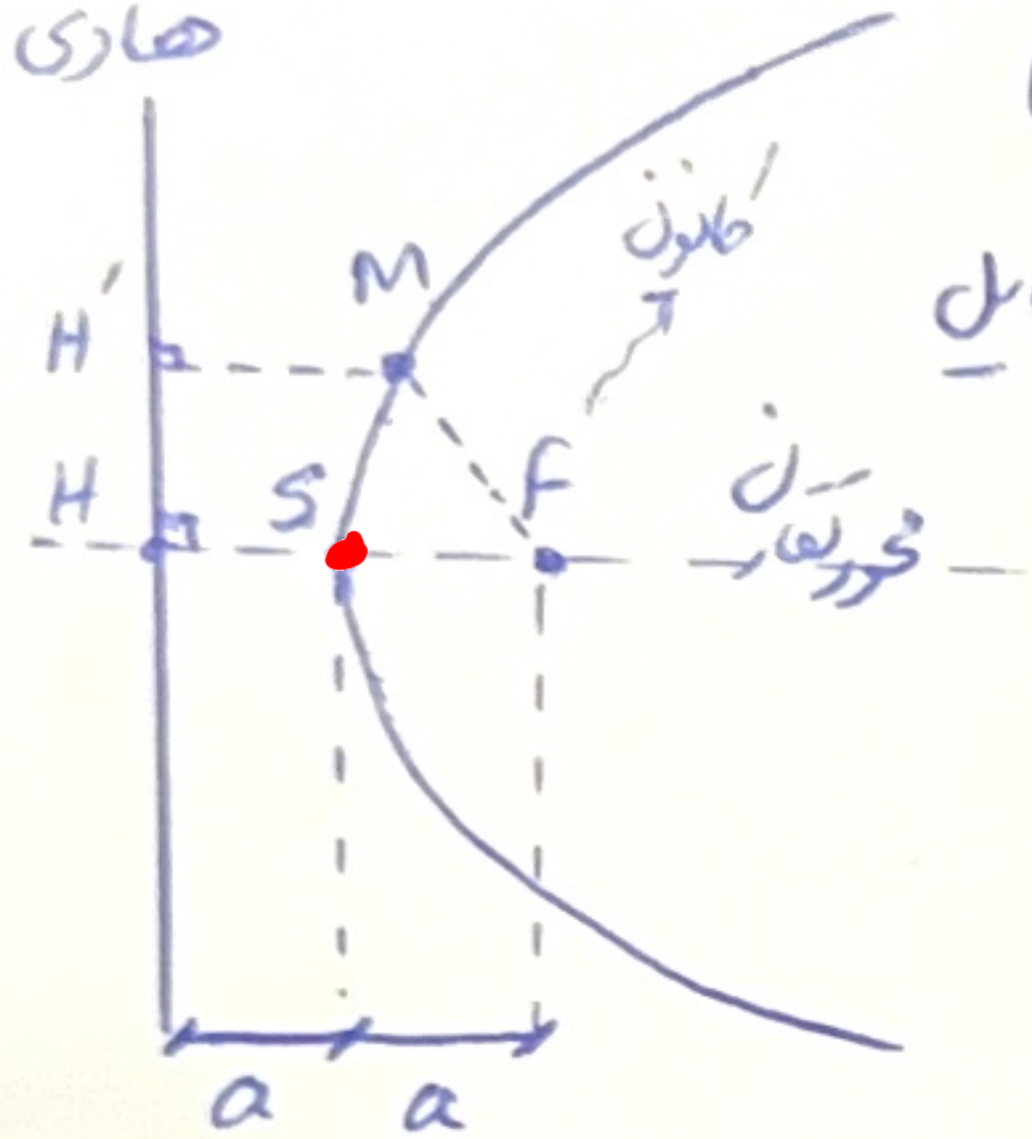
اگر $MF \parallel NF'$ باشد آنگاه $NF' = MF'$



$F\hat{M}x = F\hat{M}y$

زاویه تابش — زاویه بازتابش

همچنین براساس هندسه یازدهم می‌توان گفت $MF+MF'$ کوتاه‌ترین مسیری است که می‌توان با عبور از نقطه‌ای روی خط xy از F' به F رسید.



سهمی

تعریف مکان هندسی $MF = MH'$ ← $a = SF = SH$ پارامتر اصلی سهمی (فاصله کانونی)

انواع سهمی: قائم بالا رونده ∪ ـ قائم پایین رونده ∩ ـ افقی رونده ⊂ ـ افقی عقب رونده ⊃ ـ مایل

معادله سهمی: قائم: $(x-h)^2 = \pm 4a(y-k)$ افقی: $(y-k)^2 = \pm 4a(x-h)$

+ : بالا یا جلو رونده و − : پایین یا عقب رونده

راس (h,k)

$$(\quad)^2 = \pm 4a(\quad)$$

مختصات کانون و معادله هادی

معادله گسترده (ضمنی) سهمی: بصورت

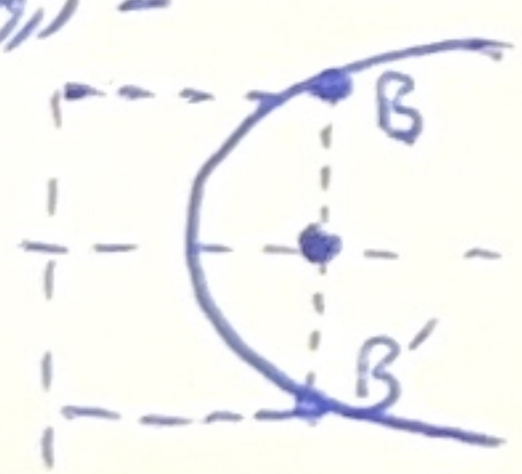
$$\begin{cases} \text{افقی}: Ay^2+By+Cx+D=0 \\ \text{قائم}: Ax^2+Bx+Cy+D=0 \end{cases}$$

است که با مربع سازی به فرم استاندارد تبدیل می شود.

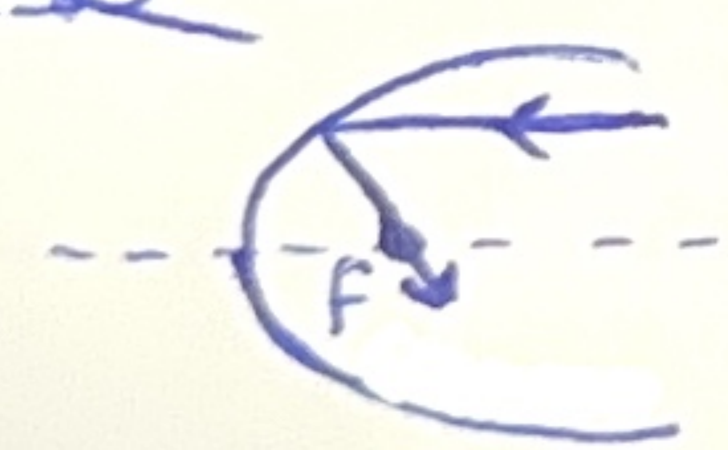
در این نوع معادله $a = \left|\frac{C}{4A}\right|$ ، اگر $AC<0$ باشد سهمی بالا و جلو رونده و اگر $AC>0$ پایین یا عقب رونده است.

تعیین وضعیت نقطه و سهمی:
- خارج سهمی $MF > MH'$
- روی سهمی $MF = MH'$
- درون سهمی $MF < MH'$

همچنین اگر در معادله گسترده $A>0$ باشد مختصات نقطه را درون معادله قرار دهید ۰ روی، + خارج، − درون

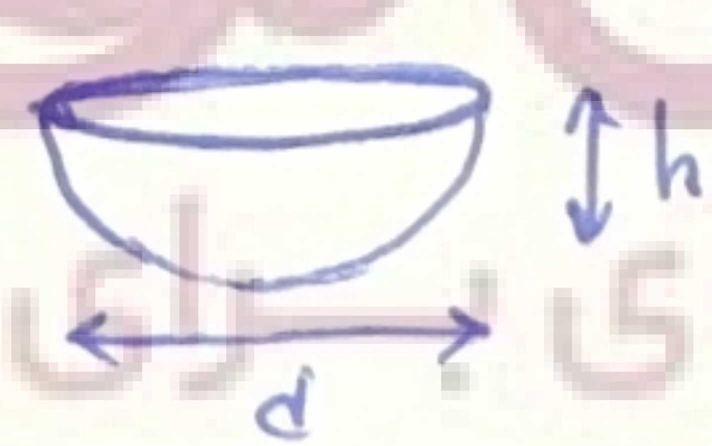


وتر کانونی Min : اگر از کانون خطی بر محور تقارن عمود کنیم و فاصله دو نقطه برخورد BB' باشد داریم: $BB' = 4a$



ویژگی بازتابندگی سهمی: اگر پرتوی به موازات محور تقارن به سهمی بتابد پرتو بازتابش از کانون عبور می کند و بالعکس. از این خاصیت در چراغ اتومبیل استفاده می شود.

دیش: $d^2 = 16ah$



فضای R^3

ناحیه‌ها و علامت‌ها : علامت چهار ربع در فضای R^2 را به خاطر بیاورید ، ناحیه‌های زیر هم ٤ واحد اختلاف دارند ، در ناحیه ۱ تا ٤ علامت z مثبت و در ناحیه‌های ۵ تا ۸ علامت z منفی است.

ناحیه	علامت x	علامت y	علامت z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
٤	+	−	+
۵	+	+	−
٦	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

نام (عنوان) و معادله یک مکان : پارامتری که در عنوان مکان به کار رفته است باید مقدار ثابت بگیرد تا معادله مکان تشکیل شود. این تکنیک ناهمنام برای معادله نویسی مکان‌های اصلی (محورها و صفحات) و مکان‌های موازی آنها بکار می‌رود.

(۱ و ۲ و ۳)

(۱ و ۵ و ۵)

مثلاً معادله محور z بصورت $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ و معادله خطی موازی محور z بصورت $\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$ خواهد بود.

یا معادله صفحه xoy بصورت $z=0$ و معادله صفحه‌ای موازی xoy بصورت $z=c$ خواهد بود.

مختصات نقطه هم همینطور است.

تصویر کردن یک نقطه روی یک مکان : ابتدا معادله مکان را مشخص کنید و مقادیر ثابت معادله مکان را در مختصات نقطه جایگذاری کنید.

مثلاً تصویر نقطه (x_0,y_0,z_0) روی محور z بصورت $(0,0,z_0)$ و روی صفحه xoy بصورت $(x_0,y_0,0)$ و روی خط $y=b$ بصورت (x_0,b,z_0) است.

قرینه کردن : می‌دانیم اگر A' قرینه A نسبت به M باشد رابطه $A'=2M-A$ برقرار است، پس معادله M را بنویسید و استفاده کنید.

مثلاً قرینه نقطه (x_0,y_0,z_0) نسبت به محور x $(x_0,-y_0,-z_0)$ ، نسبت به صفحه xoy $(x_0,y_0,-z_0)$ و نسبت به صفحه $x=a$ $(2a-x_0,y_0,z_0)$ است.

فاصله‌ها : ابتدا معادله مکان را بدست می‌آوریم و سپس فاصله نقطه تا مقادیر معلوم در معادله مکان را محاسبه می‌کنیم.

مثلاً فاصله نقطه (x_0,y_0,z_0) از نقطه (a,b,c) بصورت $\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2}$

از خط $\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$ بصورت $\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}$ یا از محور y بصورت $\sqrt{(x_0-0)^2+(z_0-0)^2}$

از صفحه $z=c$ بصورت $\sqrt{(z_0-c)^2}=|z_0-c|$ یا از صفحه zoy بصورت $\sqrt{(x_0-0)^2}=|x_0|$ است.

ابتدا - انتها = بردار ← دو بردار هم سنگ یعنی هم راستا هم جهت هم اندازه ← همه مولفه ها برابر

ضرب عدد در بردار : $k>1$ انبساط هم جهت ، $0<k<1$ انقباض هم جهت ، $-1<k<0$ انقباض خلاف جهت ، $k<-1$ انبساط خلاف جهت

بردار

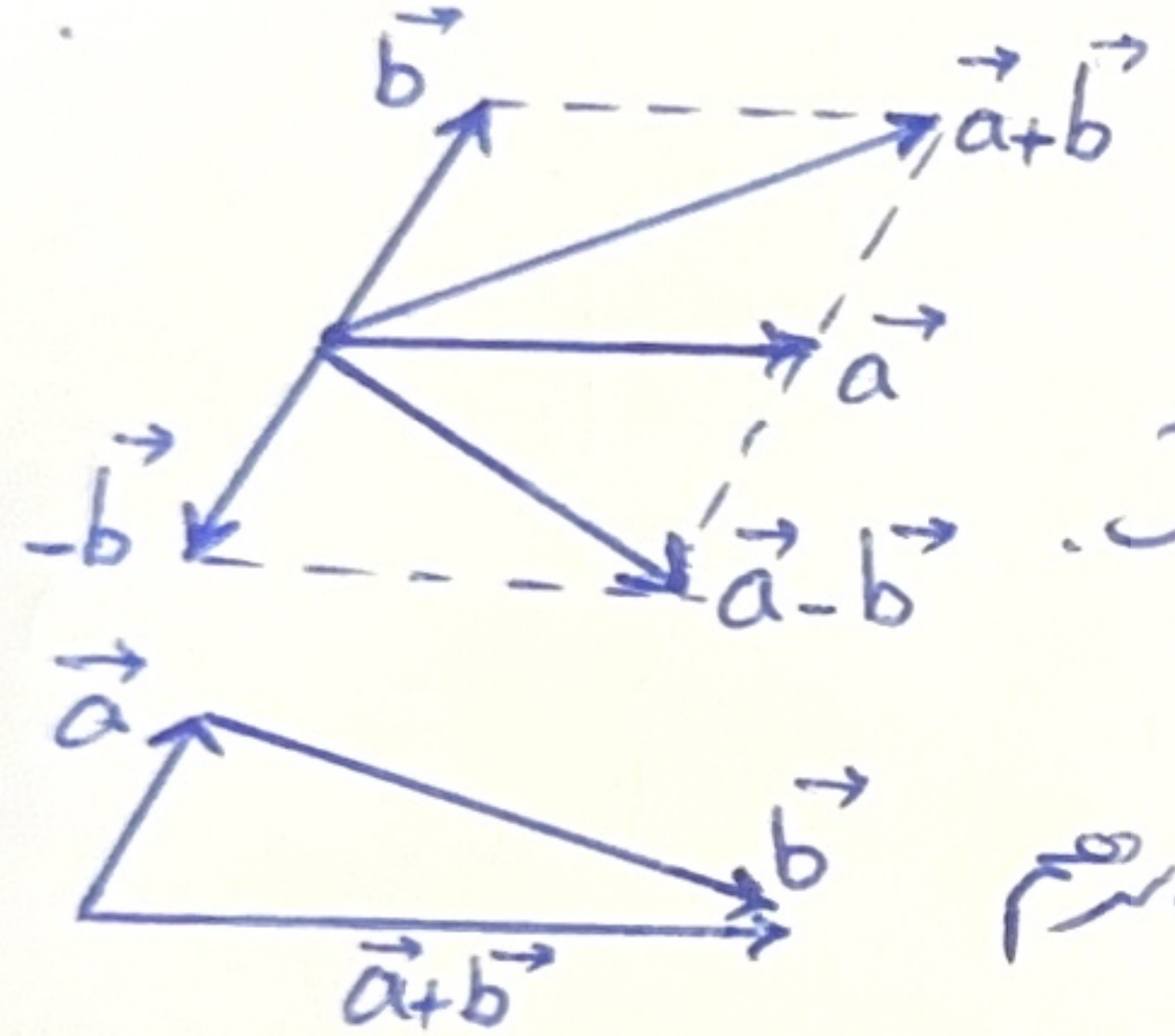
دو بردار موازی : $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

طول بردار : $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

جمع بردارها : دو روش دارد

روش متوازی الاضلاع : اگر دو بردار هم ابتدا باشند یک قطر مجموع و قطر دیگر تفاضل است.

روش مثلث : برای بردارهای پشت سرهم

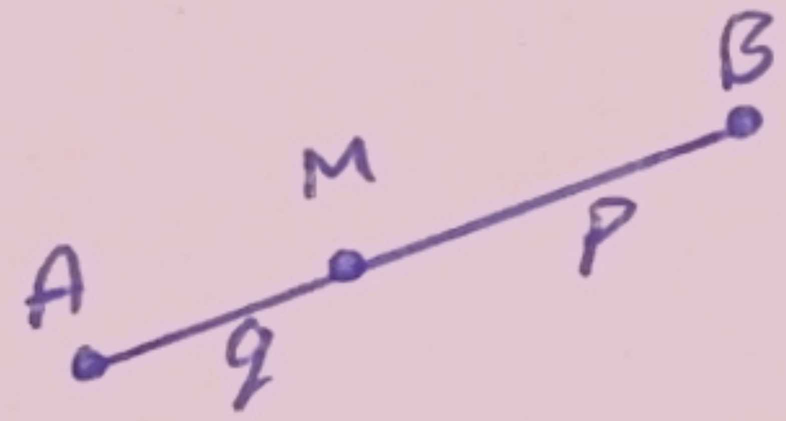


مختصات :

متوازی الاضلاع : $A + C = B + D$

مرکز ثقل : $G = \frac{A+B+C}{3}$

نسبت : $M = \frac{pA + qB}{p+q}$



$\vec{e}_a = \left(\frac{a_x}{|a|}, \frac{a_y}{|a|}, \frac{a_z}{|a|}\right)$

$\vec{e}_a = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$|\vec{e}_a| = 1 : \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

بردار یکه اصلی : $\vec{i} = (1,0,0)$ ، $\vec{j} = (0,1,0)$ ، $\vec{k} = (0,0,1)$ ← بردار یکه هر بردار

زوایای هادی : به زوایای ساخته شده بین بردار و محورهای مختصات (به ترتیب α و β و γ) گفته می شود و داریم

راستای نیمساز : اگر دو بردار جمع شوند، برآیند آنها به بردار بزرگتر نزدیکتر است و زاویه بین دو بردار را نصف نمی کند مگر اینکه دو بردار برابر باشند بنابراین بردار راستای نیمساز : $\vec{e}_a + \vec{e}_b$ یا $\vec{a}|b| + \vec{b}|a|$

متوازی الاضلاع خاص :
اگر $|a+b| = |a-b|$ ← مستطیل $a \perp b$
اگر $a+b \perp a-b$ ← لوزی $|a| = |b|$

اگر با هر سه محور زاویه برابر بسازد $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ضرب داخلی

- حاصلضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است. $a.b \in \mathbb{R}$ ⟵ دقت کن: $\vec{a}.0=0$ و $\vec{a}.\vec{0}=0$ و $\vec{a}.\vec{0} \neq \vec{0}$

- محاسبه ضرب داخلی:
  - براساس اندازه و زاویه بین: $a.b = |a||b|\cos\theta$ ⟵ زاویه بین دو بردار: $\cos\theta = \dfrac{a.b}{|a||b|}$
  - براساس مولفه‌ها: $a.b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

- ویژگی‌های ضرب داخلی: $a.a = |a|^2$ و $a.b = b.a$ و اتحادها برای ضرب داخلی برقرار است.

- عمود بودن دو بردار غیرصفر: $a.b = 0 \leftrightarrow a \perp b$

- زاویه بین قطرهای مکعب: $\cos\theta = \frac{1}{3}$

- تصویر بردار $\vec{a}$ روی راستای بردار $\vec{b}$: $\vec{a}_T = \dfrac{a.b}{|b|^2}.\vec{b}$

- قرینه بردار $\vec{a}$ نسبت به راستای بردار $\vec{b}$: $\vec{a}' = 2\vec{a}_T - \vec{a}$

- نامساوی کوشی-شوارتز: $|a.b| \leq |a|.|b|$ ⟵ $(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \leq (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)$

ضرب خارجی

حاصلضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر هر دو بردار که راستا و جهت آن با قانون دست راست بدست می آید.

$$|a\times b| = |a|\cdot|b|\cdot\sin\theta\cdot\cancel{a_n}$$

محاسبه ضرب خارجی:

- برحسب اندازه بردارها و زاویه بین:
- برحسب مولفه ها: محاسبه دترمینان

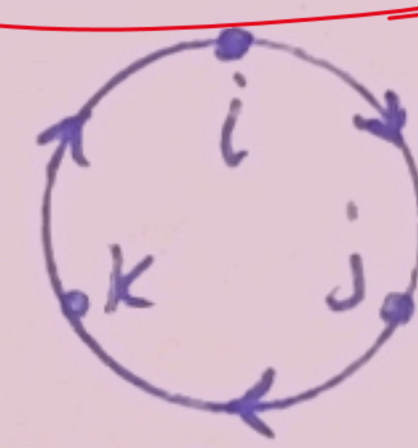
$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

اندازه ضرب خارجی:

$$|a\times b| = |a||b|\sin\theta$$

$$(a\cdot b)^2 + |a\times b|^2 = |a|^2\cdot|b|^2 \xleftarrow{\text{بسیار مهم}}$$

ضرب خارجی بردارهای یکه:



اگر در جهت تعیین شده دو بردار متوالی را ضرب کنید، حاصل بردار سوم است.

$i\times j = k$, $j\times i = -k$

موازی بودن دو بردار غیرصفر:

$$a\parallel b \leftrightarrow \vec a\times\vec b = \vec 0$$

ویژگی های ضرب خارجی:

$$\vec a\times\vec b = -\vec b\times\vec a \quad , \quad \vec a\times\vec a = \vec 0 \quad , \quad \vec a\times\vec 0 = \vec 0$$

(خاصیت جابه‌جایی ندارد)

اگر $\vec a+\vec b+\vec c = \vec 0 \leftrightarrow a\times b = b\times c = c\times a$

مساحت:

متوازی الاضلاع ساخته شده روی بردارهای $\vec a$ و $\vec b$: در سه حالت بدست می آید:

$$S = |a\times b|$$

$$S = \frac{1}{2}|(a-b)\times(a+b)|$$

$$S = |a\times(a\pm b)|$$

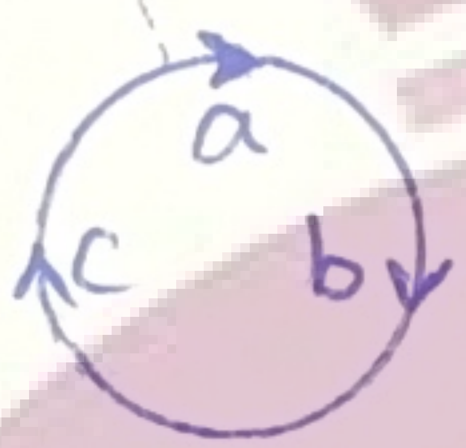
مثلثی که دو ضلع مجاور آن $\vec a$ و $\vec b$ باشند: $S = \frac{1}{2}|a\times b|$

ضرب مضاعف (سه‌گانه) سه بردار : $a\times(b\times c) = \vec{b}(a.c) - \vec{c}(a.b)$ (برداری است هم صفحه با b و c)

$$a\times(b\times c) + b\times(c\times a) + c\times(a\times b) = \bar{0}$$

ضرب مخلوط

محاسبه : $a.(b\times c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ ←

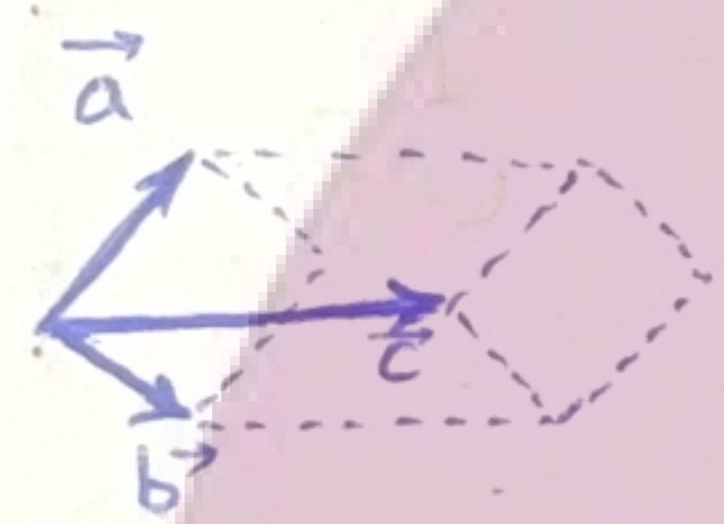


← $a.(b\times c) = b.(c\times a) = c.(a\times b)$

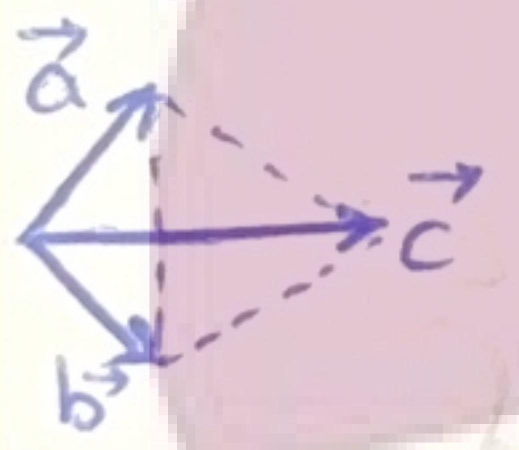
بصورت چرخشی حاصل یکسان تولید می‌کند

شرط هم صفحه بودن سه بردار $\leftrightarrow a.(b\times c) = 0$

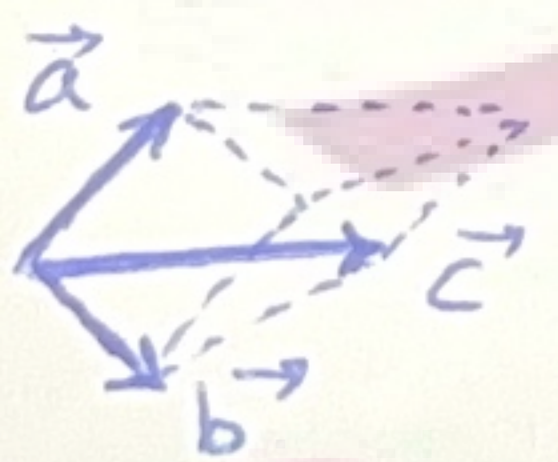
حجم



متوازی السطوح = $|a.(b\times c)|$



هرم = $\frac{1}{6}|a.(b\times c)|$



منشور مثلث القاعده = $\frac{1}{2}|a.(b\times c)|$