دفترچهٔ پاسخ

آزمون ۲۷ مرداد ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی (نظام جدید)

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	ریاضی پایه و حسابان ۲	دانیال ابراهیمی-کاظم اجلالی-عباس اشرفی-سعید اکبرزاده-امیرهوشنگ انصاری-محمدسجاد پیشوایی-سهیل حسن‌خان‌پور عادل حسینی-نسترن زارع-سهیل ساسانی-علی ساوجی-یاسین سپهر-محمدحسن سلامی‌حسینی-رضا سیدنجفی-علیرضا شریفی حسین شفیع‌زاده-علی شهرابی-پویان طهرانیان-حمید علیزاده-مصطفی کرمی-بهزاد محرمی-جهانبخش نیکنام-وحید ون آبادی
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-سامان اسپهرم-علی ایمانی-محمد بحیرایی-جواد حاتمی-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش محمد خندان-محسن رجبی-سوگند روشنی-یاسین سپهر-رضا عباسی‌اصل-سهام مجیدی‌پور-نصیر محبی‌نژاد-داریوش ناظمی سرژ یقیازاریان تبریزی
	آمارو احتمال وریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-حمیدرضا امیری-علی ایمانی-افشین خاصه‌خان-سوگند روشنی-علی ساوجی-سیدمحسن فاطمی-پژمان فرهادیان احمدرضا فلاح-مرتضی فهیم‌علوی-نیلوفر مهدوی-سروش موئینی
	فیزیک	خسرو ارغوانی‌فرد-عبدالرضا امینی‌نسب-زهره آقامحمدی-لاله بهادری-مجتبی خلیل‌ارجمندی-بیتا خورشید-محمد ساکی-معصومه شریعت‌ناصری مریم شیخ‌مو-پوریا علاقه‌مند-بهادر کامران-مصطفی کیانی-غلامرضا محبی-احسان محمدی-امیراحمد میرسعید-حسام نادری-حسین ناصحی
	شیمی	صلاح الدین ابراهیمی-عین‌اله ابوالفتحی-محمدرضا پورجاوید-امیر حاتمیان-پیمان خواجوی‌مجد-فرزاد رضایی-جواد سوری‌لکی امیرحسین طیبی-محمد عظیمیان‌زواره-علیرضا کیانی‌دوست-هادی مهدی‌زاده-حسین ناصری‌ثانی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	ریاضی پایه و حسابان ۲	هندسه	آمارو احتمال و ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب سوگند روشنی	مصطفی کیانی	امیر حاتمیان
گروه ویراستاری	محمدرضا راسخ مهدی ملارمضانی	ویراستار استاد : مهرداد ملوندی	ویراستار استاد : مهرداد ملوندی	زهره آقامحمدی حمید زرین‌کفش	بهنام قازانچایی ویراستار استاد: محمدحسن محمدزاده مقدم
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	محمد ساکی	امیرحسین مسلمی
مستند سازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	احسان صادقی	سمیه اسکندری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	محمد اکبری
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروفنگار	فرزانه فتح اله‌زاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۱

۱- **گزینهٔ «۳»** (علی شهرابی)

$$32^{0.3} = (2^5)^{0.3} = 2^{1.5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8}$$

$\sqrt{8}$ بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ است.

$$(0.04)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(5^{-2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(5^{-2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{625}$$

$\sqrt[3]{625}$ بین دو عدد صحیح ۸ و ۹ قرار دارد، زیرا $9^3 > 625 > 8^3$.

پس اعداد صحیح بین $32^{0.3}$ و $(0.04)^{-\frac{2}{3}}$ همان اعداد صحیح بین ۲ و ۹ هستند، یعنی ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۲- **گزینهٔ «۳»** (رضا سیرنجفی)

با توجه به شکل واضح است که نمودار تابع نمایی یک واحد پایین آمده است، یعنی $c = -1$. از طرفی تابع از نقطهٔ $(0,3)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$3 = a(b)^0 - 1 \Rightarrow a = 4$$

با توجه به نمودار مشخص است تابع از $(-2,0)$ نیز می‌گذرد:

$$\Rightarrow 0 = 4(b)^{-2} - 1 \Rightarrow \frac{1}{4} = 2^{-2} = b^{-2} \Rightarrow b = 2$$

در نهایت $\frac{ab}{c} = -8$ است.

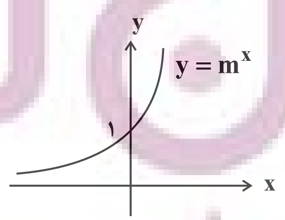
(حسابان ۱- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

۳- **گزینهٔ «۳»** (سعید اکبرزاده)

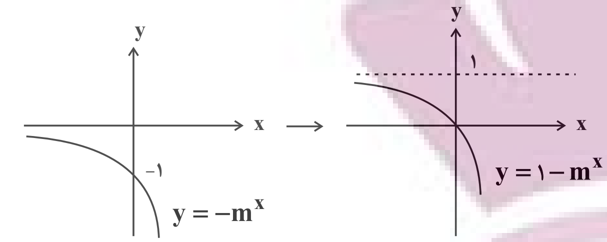
تابع نمایی داده شده نزولی است، پس پایه تابع نمایی عددی در بازهٔ $(0, 1)$ است.

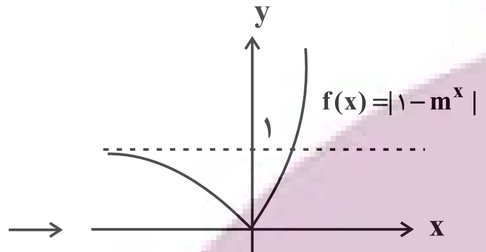
$$0 < 3 - 2m < 1 \Rightarrow -1 < 2m - 3 < 0 \Rightarrow 1 < m < \frac{3}{2}$$

نمودار تابع نمایی $y = m^x$ به صورت زیر است، چون پایه یعنی عدد m بزرگ‌تر از ۱ است،



حال نمودار تابع $f(x) = |1 - m^x|$ را رسم می‌کنیم.





(حسابان ۱- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۷)

۴- **گزینهٔ «۱»** (مصطفی کرمی)

$$4^x - 5\times 2^{x+1} + 21 = 0$$

$$(2^x)^2 - 10(2^x) + 21 = (2^x - 3)(2^x - 7) = 0 \Rightarrow 2^x = 3 \text{ یا } 2^x = 7$$

$$\Rightarrow x = \log_2 3 \text{ یا } \log_2 7$$

$$\Rightarrow \text{نسبت خواسته شده} = \frac{\log_2 3}{\log_2 7} = \log_7 3$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۵- **گزینهٔ «۱»** (علیرضا شریفی)

مقدار انرژی آزادشده برحسب واحد ارگ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\log E = 11.8 + 1.5M$$

که M بزرگی زمین‌لرزه در مقیاس ریشتر است.

اگر دو زمین لرزهٔ n و $n+1$ ریشتری را در نظر بگیریم. برای انرژی آزادشدهٔ آن‌ها (برحسب واحد ارگ) داریم:

$$\begin{cases} \log E_{n+1} = 11.8 + 1.5(n+1) \\ \log E_n = 11.8 + 1.5n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log E_{n+1} - \log E_n = 1.5(n + 1 - n) = 1.5$$

$$\Rightarrow \frac{E_{n+1}}{E_n} = 10^{1.5} \simeq 31.6$$

پس با توجه به رابطهٔ فوق داریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{E_3}{E_2} = \frac{E_4}{E_3} = 10^{1.5} \Rightarrow a = b = c$$

(حسابان ۱- صفحهٔ ۸۹)

۶- **گزینهٔ «۱»** (حسین شفیع‌زاده)

پس از گذشت هر ماه، ۰/۹۳ جرم ماه قبل باقی می‌ماند، پس می‌توان الگوی جرم باقی‌مانده این ماده هسته‌ای را بعد از گذشت n ماه به صورت $m(n)=m_0(0/93)^n$ نوشت که در آن m_0 مقدار اولیه است.

وقتی ۶۹ درصد جرم اولیه از دست برود، ۳۱ درصد آن باقی می‌ماند، پس داریم:

$$m_0(0/93)^n=0/31m_0 \Rightarrow (0/93)^n=0/31$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$n\log 0/93=\log 0/31 \Rightarrow n(\log 3+\log 31-2)=\log 31-2$$

$$\Rightarrow n=\frac{\log 31-2}{\log 3+\log 31-2}=\frac{1/49-2}{0/48+1/49-2}=\frac{-0/51}{-0/03}=17$$

پس از گذشت ۱۷ ماه ۶۹ درصد جرم اولیه از دست می‌رود.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۸ تا ۹۰)

۷- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

ابتدا ضابطه‌های توابع fog و gof را می‌یابیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=2^{g(x)}-1=2^{\log_4(x+1)}-1$$

$$=(x+1)^{\log_4 2}-1=\sqrt{x+1}-1$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\log_4^{(f(x)+1)}$$

$$=\log_4(2^x-1+1)=\log_4 2^x=x\log_4 2=\frac{1}{2}x$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر به صورت زیر است:

$$\sqrt{x+1}-1=\frac{1}{2}x \Rightarrow 2\sqrt{x+1}=x+2$$

$$\Rightarrow 4(x+1)=(x+2)^2 \Rightarrow 4x+4=x^2+4x+4$$

$$\Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$$

پس معادله فقط یک جواب دارد.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۶)

۸- **گزینهٔ «۳»** (محمدحسن سلامی‌حسینی)

بازه دامنه از اشتراک مجموعه‌های جواب‌های دو شرط زیر به دست می‌آید:

۱) $2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$

۲) $-2+\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>2$

$$\Rightarrow 2x-1<\frac{1}{4} \Rightarrow x<\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow D_f=(\frac{1}{2},\frac{5}{8}) \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{5}{8} \end{cases}$$

$$\log_{4a}(8b-1)=\log_2 4=2$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۹- **گزینهٔ «۳»** (جهانبخش نیکنام)

عبارت داده شده به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\log_2 24\log_2 96-\log_2 192\log_2 12$$

$$=(\log_2 2+\log_2 12)(\log_2 8+\log_2 12)-(\log_2 12+\log_2 16)\log_2 12$$

حال اگر $\log_2 12=a$ در این‌صورت داریم:

$$(1+a)(3+a)-(a+4)a=a^2+4a+3-a^2-4a=3$$

(حسابان ۱- صفحهٔ ۸۶)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** (پویان طهرانیان)

$x=\frac{1}{2}$ در معادله صدق می‌کند، پس:

$$\log_2\frac{1}{2}-\log_{\frac{1}{2}}k=3 \Rightarrow \log_2 2^{-1}-\log_{2^{-1}}k=3 \Rightarrow -1+\log_2 k=3$$

$$\log_2 k=4 \Rightarrow k=2^4=16$$

حال ریشهٔ دیگر را با نوشتن مجدد معادله پیدا می‌کنیم.

$$\log_2 x-\log_x 16=3 \Rightarrow \log_2 x-4\log_x 2=3$$

$$\xrightarrow{\log_2 x=t} t-4(\frac{1}{t})=3 \xrightarrow{\times t} t^2-3t-4=0 < \begin{matrix} t=-1 \\ t=4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 x=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ \log_2 x=4 \Rightarrow x=16 \end{cases}$$

بنابراین ریشهٔ دیگر معادله برابر $x=16$ است.

البته پس از محاسبهٔ k، می‌توانیم با جای‌گذاری گزینه‌ها نیز به جواب برسیم.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

هندسه ۲

۱۱- گزینهٔ «۴» (محمد خندان)

در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافتهٔ آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطهٔ ثابت تبدیل می‌نامند. در بازتاب نسبت به خط، تمامی نقاط روی محور بازتاب، نقاط ثابت تبدیل هستند، بنابراین هر بازتاب بی شمار نقطهٔ ثابت تبدیل دارد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحهٔ ۳۸)

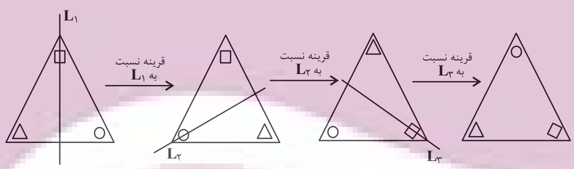
۱۲- گزینهٔ «۴» (نصیر محبی‌نژاد)

در دوران به مرکز نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ α، اگر A' تصویر نقطهٔ A باشد، $\widehat{AOA'} = \alpha$ و $OA = OA'$ است. همچنین دوران، تبدیلی طولپا است و جهت شکل‌ها را حفظ می‌کند. با توجه به این ویژگی تنها شکل شماره ۸ می‌تواند دوران یافتهٔ شکل سایه‌زده به مرکز O و زاویهٔ 180° باشد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۱۳- گزینهٔ «۳» (سرژ یقیازاریان‌تبریزی)

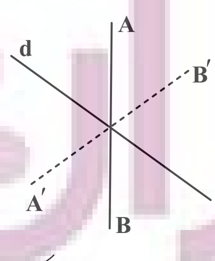
با توجه به شکل داریم:



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۱۴- گزینهٔ «۴» (افشین خاصه‌خان)

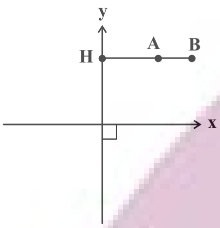
اگر نقاط A، B از خط d به یک فاصله باشند اما در طرفین خط d واقع شوند، در بازتاب آنها شیب پاره‌خط لزوماً حفظ نمی‌شود.



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۱۵- گزینهٔ «۴» (سوگند روشنی)

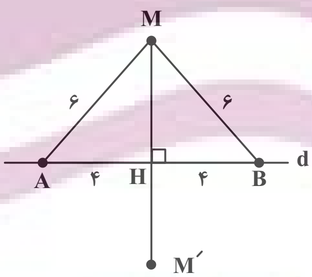
تبدیل T در صفحهٔ P، تابعی است که به هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از همان صفحه نظیر می‌کند و برعکس، هر نقطهٔ A' از صفحه P، تصویر دقیقاً یک نقطهٔ A از همان صفحه است. در گزینهٔ «۴» نقاط واقع بر محور y ها تصویر منحصر به فرد یک نقطه از صفحه نیستند. به عنوان مثال در شکل، تصویر نقاط A و B تحت این تابع بر نقطهٔ H منطبق می‌گردد.



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحهٔ ۳۶)

۱۶- گزینهٔ «۳» (امیرحسین ابومحبوب)

نقاط A و B دو نقطهٔ ثابت این تبدیل هستند، پس روی محور بازتاب یعنی خط d قرار دارند. نقطهٔ M از این دو نقطه به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد و در نتیجه مطابق شکل تصویر آن تحت این بازتاب، نقطهٔ M' است. داریم:



$$\overset{\Delta}{AHM} : MH^2 = AM^2 - AH^2 = 36 - 16 = 20$$

$$\Rightarrow MH = 2\sqrt{5}$$

فاصلهٔ نقطهٔ M' از محور بازتاب برابر فاصلهٔ نقطهٔ M از این محور است، پس داریم:

$$MM' = 2MH = 2\times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

ترکیب دو انتقال با بردارهای $\overrightarrow{v_1}$ و $\overrightarrow{v_2}$، انتقالی با بردار $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$ است.

مطابق شکل داریم:

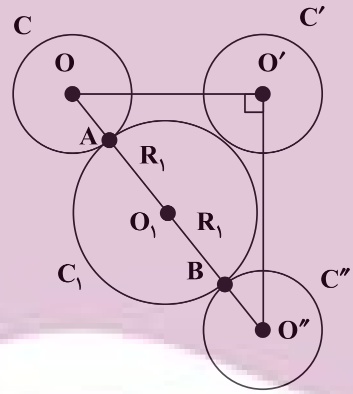
$$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}\Rightarrow \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$$

بنابراین کافی است با برداری هم اندازه و خلاف جهت $\overrightarrow{AB}$، انتقال را انجام دهیم تا چهارضلعی $A'B'C'D'$ بر $ABCD$ منطبق گردد که در بین گزینه‌ها، تنها بردار $\overrightarrow{CD}$ دارای این ویژگی است، یعنی داریم:

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۱۸- **گزینهٔ «۱»** (فرزانه خاکپاش)



دوران تبدیلی طولپا است، بنابراین $O'O''=OO'=۶$ است. طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $OO'O''$ داریم:

$$OO''^{۲}=۶^{۲}+۶^{۲}=۲\times۶^{۲}\Rightarrow OO''=۶\sqrt{۲}$$

مطابق شکل C_1 کوچک‌ترین دایره‌ای است که بر هر دو دایرهٔ C و C'' مماس است. شعاع دایره‌های C'' و C برابر یکدیگر است، بنابراین داریم:

$$AB=OO''-(OA+O''B)$$

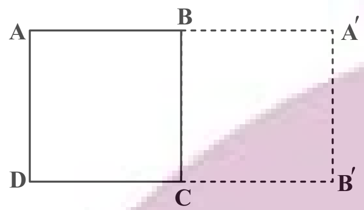
$$=۶\sqrt{۲}-۲\times۲\Rightarrow ۲R_1=۶\sqrt{۲}-۴$$

$$\Rightarrow R_1=۳\sqrt{۲}-۲$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۱۹- **گزینهٔ «۳»** (افشین خاصه‌خان)

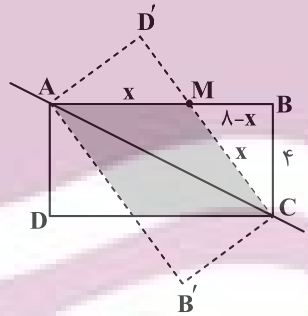
دوران به مرکز C و زاویهٔ ۹۰° در جهت عقربه‌های ساعت به‌صورت شکل زیر است. نقاط A، B و D به ترتیب بر نقاط A'، B' و B منطبق می‌شود.



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۳)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

مطابق شکل مستطیل $ABCD$ پس از بازتاب نسبت به قطر AC روی مستطیل $AB'CD'$ تصویر شده است و ناحیهٔ مشترک، یک لوزی به ضلع x است:



$$AM=MC=x\Rightarrow MB=۸-x$$

$$\Rightarrow x^{۲}=(۸-x)^{۲}+(۴)^{۲}\Rightarrow x^{۲}=۶۴-۱۶x+x^{۲}+۱۶\Rightarrow x=۵$$

با توجه به این‌که هر لوزی یک متوازی‌الاضلاع است، داریم:

$$\text{مساحت لوزی}=AM\times CB=۵\times۴=۲۰$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

آمار و احتمال

۲۱- گزینهٔ «۴» *(مرتضی فهیم‌علوی)*

گزینهٔ «۱»:

$$P((A\cup B)|B)=\frac{P((A\cup B)\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

گزینهٔ «۲»:

$$P((A-B)|B)=\frac{P((A\cap B')\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\varnothing)}{P(B)}=0$$

گزینهٔ «۳»:

$$P(A|(A-B))=\frac{P(A\cap(A\cap B'))}{P(A\cap B')}=\frac{P(A\cap B')}{P(A\cap B')}=1$$

گزینهٔ «۴»:

$$P((A\cap B)|(B-A))=\frac{P((A\cap B)\cap(B\cap A'))}{P(B-A)}=\frac{P(\varnothing)}{P(B-A)}=0$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۲۲- گزینهٔ «۳» *(علی ایمانی)*

فضای نمونهٔ کاهش یافته به‌صورت زیر است:

$$S=\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,5),(3,3),(3,6),(4,1),(4,4),(5,2),(5,5),(6,3),(6,6)\}$$

$$n(S)=12$$

حالت‌های مطلوب عبارت‌اند از:

$$A=\{(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)\}$$

$$n(A)=4$$

$$P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۲۳- گزینهٔ «۴» *(امیرحسین ابومحبوب)*

تعداد حالت‌های فضای نمونه برای ۴ فرزند، برابر $16=2^4$ است. از طرفی تعداد حالت‌هایی که این خانواده دارای ۲ فرزند پسر و ۲ فرزند دختر باشد، برابر $\binom{4}{2}=6$ است، بنابراین اگر A پیشامد برابر نبودن تعداد فرزندان پسر و دختر در این خانواده باشد، آنگاه داریم:

$$n(A)=16-6=10$$

اگر B پیشامد یکسان بودن جنسیت دو فرزند اول خانواده باشد، آنگاه داریم:

A ∩ B = {(د,د,د,د),(پ,د,پ,پ),(د,پ,پ,پ),(پ,پ,پ,پ),
(د,پ,د,د),(پ,د,د,د)}

$$P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۲۴- گزینهٔ «۳» *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر پیشامد همرنگ نبودن دو مهرهٔ خارج شده از جعبه را با A نمایش دهیم، آنگاه پیشامد A' (متمم پیشامد A) آن است که دو مهرهٔ خارج شده همرنگ باشند. احتمال پیشامد A' برابر است با:

$$P(A')=\underbrace{\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}}_{\text{دو مهره قرمز}}+\underbrace{\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}}_{\text{دو مهره آبی}}=\frac{6}{30}+\frac{2}{30}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$$

بنابراین احتمال پیشامد A برابر است با:

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۲۵- گزینهٔ «۴» *(پژمان فرهادیان)*

اگر A را پیشامد انتخاب دو مهرهٔ غیرهمرنگ و B_1 و B_2 را به ترتیب پیشامد انتخاب ظرف‌های اول و دوم، در نظر بگیریم، داریم:

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{\binom{7}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}+\frac{1}{2}\times\frac{21}{45}=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{15}+\frac{7}{15}\right)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۲۶- گزینهٔ «۱» *(نیلوفر مهدوی)*

با توجه به روابط جبر مجموعه‌ها داریم:

$$B\subseteq A\Rightarrow\begin{cases}A\cup B=A\\ A\cap B=B\end{cases}$$

حال طبق قانون احتمال شرطی داریم:

$$P(A\mid B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(B')}=\frac{P(A)-P(B)}{۱-P(B)}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۷}}{۱-\frac{۱}{۷}}=\frac{\frac{۴}{۲۱}}{\frac{۶}{۷}}=\frac{۲}{۹}$$

$$\frac{P(A\mid B')}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\mid B')}{P(A)}=\frac{\frac{۲}{۹}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۲۷- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

اگر پیشامد اینکه سکه رو بیاید را با A نمایش دهیم، داریم:

$$P(A)+P(A')=۱\Rightarrow ۲x+x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۳}$$

همچنین برای تاس، رابطه احتمال غیرهم‌شانس را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

$$\Rightarrow t+۳t+۳t+t+۳t+t=۱\Rightarrow t=\frac{۱}{۱۲}$$

بنابراین اگر پیشامد اینکه تاس ۶ بیاید را با B نمایش دهیم، $P(B)=\frac{۱}{۱۲}$ است.

دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۱۲}-\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۱۸}=\frac{۲۴+۳-۲}{۳۶}=\frac{۲۵}{۳۶}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱ و ۶۷ تا ۷۲)

۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(نیلوفر مهدوی)*

فرض کنید A پیشامد سمند بودن ماشین باشد. اگر $B_۱$ پیشامد آن باشد که ماشین انتخابی از جایگاه دوم از ابتدا در جایگاه اول بوده و $B_۲$ پیشامد آن باشد که ماشین انتخابی از جایگاه دوم از ابتدا در همان جایگاه حضور داشته است، آنگاه طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A)=P(B_۱)P(A\mid B_۱)+P(B_۲)P(A\mid B_۲)$$

$$=\frac{۲}{۸}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۶}{۸}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۳}{۲۰}+\frac{۳}{۸}=\frac{۶+۱۵}{۴۰}=\frac{۲۱}{۴۰}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۲۹- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

احتمال آنکه مهرهٔ خارج شده از جعبه سفید باشد، $\frac{۶}{۱۶}$ است. حال اگر مهرهٔ خارج شده از جعبه سفید باشد، این مهره را به همراه دو مهرهٔ سیاه به جعبه بر می‌گردانیم. در این‌صورت جعبه شامل ۶ مهرهٔ سفید و ۱۲ مهرهٔ سیاه خواهد شد که در نتیجه این‌بار احتمال خارج کردن یک مهرهٔ سفید از جعبه برابر $\frac{۶}{۱۸}$ می‌شود. طبق قانون ضرب احتمال، احتمال آنکه هر دو مهرهٔ خارج شده از جعبه سفید باشد، برابر است با:

$$\frac{۶}{۱۶}\times\frac{۶}{۱۸}=\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۸}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۳۰- **گزینهٔ «۴»** *(پژمان فرهادیان)*

وقتی گفته شده حداقل ۹ پیامک (با موفقیت) ارسال شده باشد یعنی یا ۹ پیامک و یا ۱۰ پیامک با موفقیت ارسال شده است، پس اگر پیشامد مورد نظر را با A نمایش دهیم، داریم:

$$P(A)=\binom{۱۰}{۹}\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۹}\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۱}+\binom{۱۰}{۱۰}\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۱۰}\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۰}$$

$$=\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۹}+\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۱۰}=\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۹}\left(۱+\frac{۹}{۱۰}\right)=\left(\frac{۱۹}{۱۰}\right)\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۹}$$

(آمار و احتمال- احتمال: مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۷۲)

فیزیک ۲

۳۱- گزینهٔ «۳» *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

با افزایش مقاومت R بدون توجه به جایگاهش، مقاومت معادل مدار افزایش می‌یابد. طبق رابطهٔ $I_T=\frac{\varepsilon}{R_T+r}$ جریان مدار کاهش می‌یابد و آمپرسنج عدد کمتری را نشان می‌دهد.
طبق رابطهٔ $V_1=\varepsilon-Ir$ با کاهش جریان، ولتاژ دو سر مولد افزایش می‌یابد. در نتیجه:

$$V_1=V_{R_1}+V_2\xrightarrow[V_1\uparrow]{VR_1\downarrow}V_2\uparrow$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۶)

۳۲- گزینهٔ «۱» *(غلامرضا محبی)*

در یک مدار تک حلقه جریان عبوری از هر دو مقاومت داخلی و خارجی یکسان است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_R=9V_r\Rightarrow RI=9rI\Rightarrow R=9r$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ جریان در مدار تک حلقه داریم:

$$I=\frac{\varepsilon}{R+r}\xrightarrow[R=9r\,,\ I=0/2A]{\varepsilon=6V}0/2=\frac{6}{9r+r}$$

$$\Rightarrow 0/2=\frac{6}{10r}\Rightarrow r=3\Omega\xrightarrow{R=9r}R=27\Omega$$

توان مصرفی در مقاومت R برابر است با:

$$P=RI^2\xrightarrow[I=0/2A]{R=27\Omega}P=27\times(0/2)^2=1/08W$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۳۳- گزینهٔ «۳» *(زهره آقامحمدی)*

مقاومت معادل مدار قبل از بستن کلید و بعد از بستن کلید را محاسبه می‌کنیم.

قبل از بستن کلید $R_t=R_1+R_2+R_3+r=\frac{9}{2}R$

بعد از بستن کلید $R'_t=R_1+R_2+r=\frac{5}{2}R$

طبق رابطهٔ $I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$ می‌توان نسبت جریان قبل و بعد از بستن کلید را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{I'}{I}=\frac{R_t}{R'_t}=\frac{9}{5}=1/8\Rightarrow I'=1/8I$$

پس جریان ۸۰ درصد افزایش یافته است.
اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از مقاومت‌های R_1 و R_2 با استفاده از قانون اهم برابر است با: $V=IR$
با افزایش جریان به اندازهٔ ۸۰ درصد، اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از مقاومت‌های R_1 و R_2 هم ۸۰ درصد افزایش می‌یابد.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۳۴- گزینهٔ «۴» *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

چون $\varepsilon_2<\varepsilon_1$ است جهت جریان ساعتگرد می‌باشد و شدت جریان برابر است با:

$$I=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R_{eq}+r_1+r_2}=\frac{15-5}{7+2+1}=1A$$

جریان از پایانهٔ مثبت مولد ε_1 خارج می‌شود، پس:

$$V_1=\varepsilon_1-Ir_1=15-1\times2=13V$$

جریان از پایانهٔ منفی مولد ε_2 خارج می‌شود پس:

$$V_2=\varepsilon_2+Ir_2=5+1\times1=6V$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{6}{13}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۳۵- گزینهٔ «۴» *(بیتا خورشید)*

چون ولت‌سنج آرمانی است از مقاومت $1/5\Omega$ که با ولت‌سنج آرمانی به صورت متوالی بسته شده است، جریان عبور نمی‌کند و مقاومت‌های $2/5\Omega$ هم که با آمپرسنج آرمانی به صورت موازی بسته شده‌اند، به علت اتصال کوتاه از مدار حذف می‌شوند. بنابراین جریان مقاومت 3Ω از آمپرسنج عبور می‌کند که برابر است با:

$$I=\frac{V}{R}\xrightarrow[R=3\Omega]{V=6V}I=\frac{6}{3}=2A$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۳۶- گزینهٔ «۴» *(مجتبی خلیل‌ارجمندی)*

مقاومت با قطر مقطع $(2d)$ را R_2 و مقاومت با قطر مقطع (d) را R_1 می‌نامیم. با توجه به رابطهٔ مقاومت و ویژگی‌های ساختمانی آن داریم:

$$R=\frac{\rho L}{A}\xrightarrow[A\propto d^2]{R_1\text{ و }R_2\text{ : همجنس}}\frac{R_2}{R_1}=\frac{L_2}{L_1}\times\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

$$\xrightarrow[d_2=2d_1]{L_1=1/5L_2}\frac{R_2}{R_1}=\frac{L_2}{1/5L_2}\times\left(\frac{d_1}{2d_1}\right)^2=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow R_2=\frac{R_1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\Omega$$

چون R_1 و R_2 موازی‌اند، داریم:

$$\frac{1}{R_T}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Rightarrow R_T=\frac{4}{7}\Omega$$

برای جریان عبوری از باتری داریم:

$$I=\frac{\varepsilon}{r+R_T}=\frac{7}{\frac{3}{7}+\frac{4}{7}}=7A$$

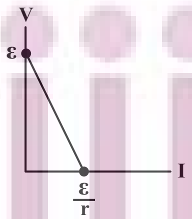
و در نهایت توان خروجی باتری این‌گونه به‌دست می‌آید:

$$P_{\text{خروجی}}=\varepsilon I-rI^2=49-21=28W$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۱، ۵۲، ۶۹ و ۷۰)

۳۷- گزینهٔ «۴» *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

هرگاه برای یک مولد محرک رابطهٔ $V=\varepsilon-Ir$ را رسم کنیم نمودار آن به صورت زیر است که عرض از مبدأ آن برابر نیروی محرکهٔ مولد (ε) و شیب آن برابر منفی مقاومت درونی مولد است.



$$V=\varepsilon-Ir\Rightarrow\begin{cases}I=0\Rightarrow V=\varepsilon\\ V=0\Rightarrow I=\frac{\varepsilon}{r}\end{cases}$$

بنابراین با توجه به نمودار داریم: $\varepsilon_A=\varepsilon_B=10V$

از طرفی برای نمودار A داریم: $\frac{\varepsilon_A}{r_A}=6 \Rightarrow \frac{10}{6}=r_A \Rightarrow r_A=\frac{5}{3}\Omega$

و همچنین برای نمودار B داریم:

$$\frac{\varepsilon_B}{r_B}=8 \Rightarrow \frac{10}{8}=r_B \Rightarrow r_B=\frac{5}{4}\Omega$$

آن‌گاه داریم: $\frac{r_A}{r_B}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{3} \Rightarrow r_A=\frac{4}{3}r_B$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۶)

۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کیانی)*

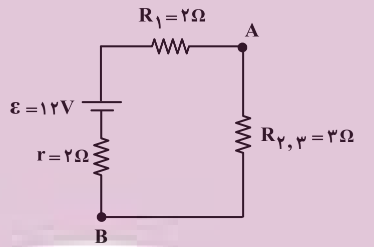
برای محاسبهٔ انرژی الکتریکی مصرف شده در مقاومت R_2، بهتر است از رابطهٔ $U=\frac{V^2}{R}t$ استفاده کنیم. به همین منظور ابتدا ولتاژ دو سر مقاومت R_2 را می‌یابیم. برای تعیین V_2، ابتدا مقاومت معادل مدار را حساب می‌کنیم و به دنبال آن جریان الکتریکی شاخهٔ اصلی مدار را می‌یابیم.

$$R_{2,3}=\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}\xrightarrow[R_3=4\Omega]{R_2=12\Omega}R_{2,3}=\frac{12\times4}{12+4}=3\Omega$$

$$R_{eq}=R_1+R_{2,3}\xrightarrow{R_1=2\Omega}R_{eq}=2+3=5\Omega$$

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}\xrightarrow[r=2\Omega]{\varepsilon=21V}I=\frac{21}{5+2}=3A$$

با توجه به مدار شکل زیر، $V_2=V_{2,3}$ است. بنابراین داریم:



$$V_2=V_{2,3}=R_{2,3}I \Rightarrow V_2=3\times3=9V$$

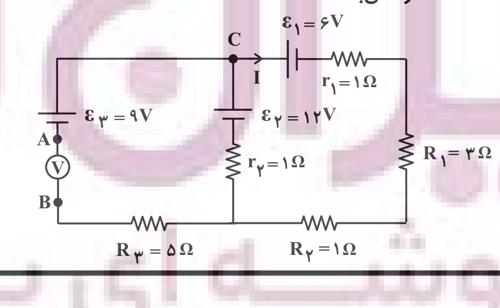
اکنون U_2 را پیدا می‌کنیم:

$$U_2=\frac{V_2^2}{R_2}t\xrightarrow[R_2=12\Omega]{t=6s}U_2=\frac{81}{12}\times6=40/5J$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۳۹- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

چون ولت‌سنج آرمانی است، مقاومت آن بسیار زیاد (بی‌نهایت) می‌باشد، بنابراین جریان الکتریکی از شاخه‌ای که شامل ولت‌سنج است، عبور نمی‌کند. در این حالت، ابتدا برای حلقهٔ سمت راست، جریان الکتریکی را به صورت زیر می‌یابیم. دقت کنید، چون در حلقهٔ سمت راست $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ است، جریان در این حلقه ساعتگرد می‌باشد.



$$V_C-\varepsilon_1-r_1I-R_1I-R_2I-r_2I+\varepsilon_2=V_C$$

$$-6-(1\times I)-(3\times I)-(1\times I)-(1\times I)+12=0$$

$$\Rightarrow 6=6I \Rightarrow I=1A$$

اکنون برای حلقهٔ سمت چپ از نقطهٔ A در جهت ساعتگرد به نقطهٔ B می‌رویم و V_A-V_B را که برابر عدد ولت‌سنج است، محاسبه می‌کنیم:

$$V_A+\varepsilon_3-\varepsilon_2+r_2I=V_B$$

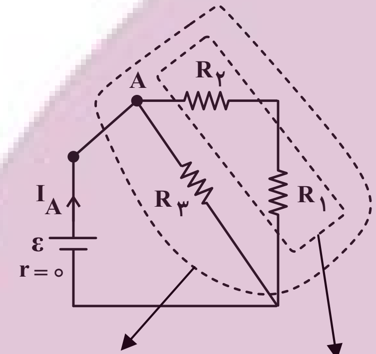
$$\Rightarrow V_A+9-12+1\times1=V_B \Rightarrow V_A-V_B=2V$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(لاله بهاری)*

یک بار بسته شدن کلید در A و بار دیگر در B را بررسی می‌کنیم:

بستهشدن کلید در نقطهٔ A: (قسمت چپ مدار باز شده و حذف می‌شود.)



$$R_{T_1}=\frac{R_{1,2}\times R_3}{R_{1,2}+R_3}=\frac{12\times6}{12+6}=4\Omega$$

متوالی $R_{1,2}=6+6=12\Omega$

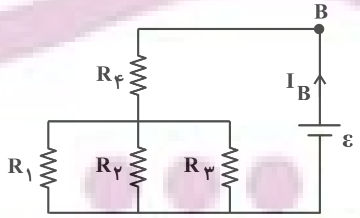
$$I_A=\frac{\varepsilon}{R_{T_1}}=\frac{\varepsilon}{4}$$

با توجه به رابطهٔ $P_{\text{خروجی}}=\varepsilon I-rI^2$ و $r=0$ داریم:

$$P_{\text{خروجی}}=\varepsilon I$$

$$P_1=\varepsilon\times\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon^2}{4}$$

بسته شدن کلید در نقطهٔ B: (قسمت راست مدار باز شده و حذف می‌شود.)



R_1 , R_2 , R_3 موازیند: $R_{1,2,3}=\frac{6}{3}=2\Omega$

$$R_T=R_{1,2,3}+R_4=2+6=8\Omega$$

$$I_B=\frac{\varepsilon}{8}\ ,\quad P_2=\varepsilon\times\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon^2}{8}\Rightarrow\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{\varepsilon^2}{4}}{\frac{\varepsilon^2}{8}}=\frac{8}{4}=2$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

شیمی ۲

۴۱- گزینهٔ «۳» (پیمان خوابجوی‌مهر)

عبارت‌های اول، دوم و چهارم صحیح است.

- ظرفیت گرمایی به جرم بستگی دارد، پس ظرفیت گرمایی آب در ظرف B بیشتر از ظرف A است.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۴۲- گزینهٔ «۴» (پیمان خوابجوی‌مهر)

برای حل این سؤال باید بدانیم که گرمای مبادله شده در دو ظرف باید برابر باشد تا تخم‌مرغ در مدت زمان مشابه پخته شود:

$$Q_{\text{آب}} = Q_{\text{روغن زیتون}} = mc\Delta\theta$$

$$۸۰۰\times۴/۲\times۵۰ = ۶۰۰\times۲\times(\theta_۲ - ۲۵)$$

$$\theta_۲ = ۱۶۵^{\circ}C$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۵۵ و ۵۶)

۴۳- گزینهٔ «۱» (علیرضا کیانی‌دوست)

$$\Delta H = [\Delta H(C=C) + ۴\Delta H(C-H) + \Delta H(H-H)]$$

$$-[\Delta H(C-C) + ۶\Delta H(C-H)]$$

$$\Delta H = [۶۱۴ + ۴\times۴۱۲ + ۴۳۶] - [۳۴۸ + ۶\times۴۱۲] = -۱۲۲kJ$$

$$?\ kJ = ۳/۰۱\times۱۰^{۲۲}\times\frac{۱mol}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}}\times\frac{۱۲۲kJ}{۱mol} = ۶/۱kJ$$

(شیمی ۲-صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۴۴- گزینهٔ «۲» (علیرضا کیانی‌دوست)

بررسی موارد:

اول) درست؛ گروه عاملی موجود در میخک، کتون است و در مولکول (II) نیز گروه عاملی کتون وجود دارد.

دوم) درست؛ زیرا تعداد پیوندهای دوگانهٔ کربن- کربن در آن‌ها برابر است.

سوم) درست؛ زیرا $-۴\times۱۵ + ۴ = -۵۶$

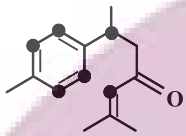
چهارم) نادرست؛ زیرا فرمول مولکولی ۱ به صورت $C_۹H_۸O$ است و معادلهٔ سوختن کامل آن به صورت زیر است:

$$۲C_۹H_۸O + ۲۱O_۲ \rightarrow ۱۸CO_۲ + ۸H_۲O$$

$$?\ L\ O_۲ = ۱mol\ C_۹H_۸O\times\frac{۲۱mol\ O_۲}{۲mol\ C_۹H_۸O}\times\frac{۲۲/۴L\ O_۲}{۱mol\ O_۲}$$

$$= ۲۳۵/۲L\ O_۲$$

پنجم) درست؛ کربن‌هایی که این ویژگی را دارند با نقطه پررنگ شده‌اند.



ششم) درست؛ با افزایش جرم مولی فرّاریت کاهش می‌یابد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

۴۵- گزینهٔ «۴» (محمد عظیمیان‌زواره)

با افزایش شمار کربن در آلکن‌ها، اندازهٔ آنتالپی سوختن افزایش و ارزش سوختی کاهش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) درست؛ با توجه به جدول صفحهٔ ۵۱

۲) درست؛

$$c = \frac{Q}{m\Delta\theta} \Rightarrow c = \frac{۹۰۰J}{۱۰۰\times۱۰}$$

$$= ۰/۹J.g^{-۱}\ .\ ^{\circ}C^{-۱} \quad \text{یا} \quad ۰/۹J.g^{-۱}\ .\ K^{-۱}$$

۳) درست؛ فرمول مولکولی هر کدام $C_۴H_۸O$ می‌باشد اما به دلیل تفاوت در گروه‌های عاملی و ساختار، خواص فیزیکی و شیمیایی آن‌ها متفاوت است.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۵۱ تا ۵۸ و ۷۰ و ۷۱)

۴۶- گزینهٔ «۳» (امیر حاتمیان)

موارد (الف)، (ب) و (ت) نادرست هستند.

بررسی موارد نادرست:

الف) پس از افطار احساس گرمی می‌کنیم، زیرا انرژی مواد غذایی در حال آزاد شدن است.

ب) یکی از راه‌های آزاد شدن انرژی موادی مانند الکل و بنزین، سوختن آن‌ها است و مقدار انرژی آزاد شده به مقدار مصرفی آن‌ها بستگی دارد.

ت) هنگامی که قندخون پایین باشد می‌توان با خوردن سیب یا نوشیدن شربت آبلیمو و عسل بدن را به حالت طبیعی بازگرداند.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۴۷- **گزینهٔ «۴»** (امیر حاتمیان)

دو واکنش زیر را با توجه به نمودار در نظر می‌گیریم:

$$A_2(g)+B_2(g)\rightarrow 2A(g)+2B(g)$$

$$\Delta H_1=(\Delta H_{A-A}+\Delta H_{B-B})-0=400$$

$$A_2(g)+B_2(g)\rightarrow 2AB(g)$$

$$\Delta H_2=(\Delta H_{A-A}+\Delta H_{B-B})-(2\Delta H_{A-B})=100$$

$$=\frac{1}{2}(\Delta H_1-\Delta H_2)\Rightarrow \Delta H_{A-B}=150\,kJ.mol^{-1}$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۴۸- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین طیبی)

ابتدا جرم گاز کلر و مقدار گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای آن را محاسبه می‌کنیم.

نکته: می‌دانیم در شرایط STP دما برابر با $0^\circ C$ می‌باشد.

$$?\,g\,Cl_2=11/2m^3\ Cl_2\times\frac{10^3\,L}{1m^3}\times\frac{1mol\,Cl_2}{22/4L\,Cl_2}$$

$$\times\frac{71g\,Cl_2}{1mol\,Cl_2}=35500g\,Cl_2$$

$$Q=mc\Delta\theta\Rightarrow Q=35500g\times 0/48\frac{J}{g.\,^\circ C}\times(25-0)^\circ C$$

$$=426\times10^3\,J=426\,kJ$$

پس جرم گاز اتن مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,C_2H_4=426kJ\times\frac{1mol\,C_2H_4}{1400kJ}\times\frac{28g\,C_2H_4}{1mol\,C_2H_4}$$

$$=8/52g\,C_2H_4$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۵۶ تا ۶۵)

۴۹- **گزینهٔ «۲»** (محمدرضا پورجاوید)

برای به دست آوردن معادلهٔ واکنش مورد نظر و ΔH آن باید واکنش‌های I و IV را معکوس کنیم و واکنش‌های II و III را نیز به ترتیب در $-\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ ضرب کنیم:

$$2NH_3(g)\rightarrow N_2(g)+3H_2(g)\qquad \Delta H=+92kJ$$

$$NO_2(g)\rightarrow NO(g)+\frac{1}{2}O_2(g)\qquad \Delta H=+57kJ$$

$$\frac{3}{2}O_2(g)+3H_2(g)\rightarrow 3H_2O(g)\qquad \Delta H=-726kJ$$

$$2NO(g)\rightarrow N_2(g)+O_2(g)\qquad \Delta H=-181kJ$$

$$NO(g)+NO_2(g)+2NH_3(g)\rightarrow 2N_2(g)+3H_2O(g)$$

$$\Delta H=-758kJ$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

۵۰- **گزینهٔ «۲»** (امیر حاتمیان)

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ بخش عمدهٔ انرژی موجود در شیر، هنگام فرایند گوارش و سوخت و ساز به بدن می‌رسد.

۲) درست؛ متن کتاب صفحهٔ ۶۰ کتاب درسی

۳) نادرست؛ مقدار گرمای آزاد شده در واکنش‌ها در دمای ثابت ناشی از تفاوت انرژی گرمایی در مواد واکنش‌دهنده و فراورده نیست زیرا در دمای ثابت تفاوت چشمگیری میان انرژی گرمایی آن‌ها وجود ندارد.

۴) نادرست؛ هر واکنش شیمیایی ممکن است با تغییر رنگ، تولید رسوب، آزاد شدن گاز و ایجاد نور و صدا همراه باشد اما یک ویژگی در همهٔ آن‌ها داد و ستد گرما با محیط پیرامون است از این‌رو هر واکنش شیمیایی ممکن است گرماده یا گرماگیر باشد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

ریاضی ۱

۵۱- گزینهٔ «۳» *(عادل حسینی)*

دو عدد حقیقی را a و b در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} a-b=۱ \\ ab=۱ \end{cases}$$

در معادلهٔ $ab=۱$ ، $b=a-۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a(a-۱)=۱ \Rightarrow a^۲-a-۱=۰ \Rightarrow a=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow b=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

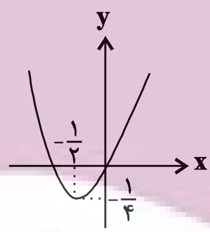
پس عدد بزرگ‌تر می‌تواند $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ یا $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ باشد.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

۵۲- گزینهٔ «۳» *(کاظم اجلالی)*

نمودار تابع $y=x^۲+x$ را در شکل زیر می‌بینید.

برد این تابع $[-\frac{۱}{۴},+\infty)$ است.



برای این‌که با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{a\}$ برد $(b\,,+\infty)$ را داشته باشیم، لازم است که نقطهٔ $(a\,,b)$ رأس سهمی باشد. پس داریم:

$$(a\,,b)=(-\frac{۱}{۲}\,,-\frac{۱}{۴}) \Rightarrow a+b=-\frac{۳}{۴}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها،تابع: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲، ۱۰۱ و ۱۰۲)

۵۳- گزینهٔ «۲» *(سهیل ساسانی)*

با توجه به نمودار باید معادلهٔ $f(x)=۱$ را حل کنیم و نقطهٔ تلاقی با طول مثبت را m بنامیم. اما قبل از آن باید ضابطهٔ $f(x)$ را بنویسیم. صفرهای تابع، ۱ و ۳- هستند، پس $x_S=\frac{-۳+۱}{۲}=-۱$ طول رأس سهمی است.

همچنین نقطهٔ $(-۱\,,-۲)$ در تابع صدق می‌کند پس داریم:

$$f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$$

$$\Rightarrow y=a(x+۳)(x-۱)$$

$$\xrightarrow{(-۱\,,\,-۲)} -۲=a(۲)(-۲) \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}(x+۳)(x-۱) \xrightarrow{f(x)=۱} \frac{(x+۳)(x-۱)}{۲}=۱$$

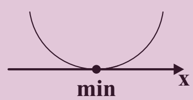
$$\Rightarrow x^۲+۲x-۳=۲ \Rightarrow x^۲+۲x-۵=۰$$

$$x=\frac{-۲\pm۲\sqrt{۶}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۶} \xrightarrow{m>۰} \sqrt{۶}-۱=m$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۵۴- گزینهٔ «۲» *(دانیال ابراهیمی)*

وقتی کمترین مقدار یک تابع درجه دوم روی محور طول‌ها قرار می‌گیرد، یعنی این تابع به شکل زیر خواهد بود:



بنابراین سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ بر محور x ها مماس است $(\Delta=۰)$ و دهانهٔ آن رو به بالا باز می‌شود $(a>۰)$. داریم:

$$\Delta=۰ \Rightarrow (m-۵)^۲-۴m(m-۸)=۰$$

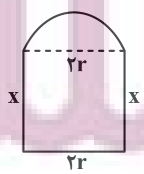
$$\Rightarrow -۳m^۲+۲۲m+۲۵=(m+۱)(-۳m+۲۵)=۰$$

$$\xrightarrow[\text{دهانه رو به بالا}]{m>۰} m=\frac{۲۵}{۳} \Rightarrow f(۰)=\frac{۲۵}{۳}-۸=\frac{۱}{۳}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۵۵- گزینهٔ «۲» *(وحید ون‌آبادی)*

شکل مسئله مطابق زیر است:



محیط پنجره : $P=\pi r+۲r+۲x=۱۰ \Rightarrow x=\frac{۱۰-(\pi+۲)r}{۲}$

از طرفی مقدار نوردهی پنجره مستقیماً به مساحت آن بستگی دارد، پس مساحت آن را حساب می‌کنیم:

$$S = ۲rx + \frac{۱}{۲}\pi r^۲ \xrightarrow{x=\frac{۱۰-(\pi+۲)r}{۲}}$$

$$S(r) = -(\frac{\pi}{۲}+۲)r^۲ + ۱۰r$$

در طول رأس سهمی، مقدار آن ماکزیمم است، پس داریم:

$$r_{max} = \frac{-۱۰}{-(\pi+۴)} = \frac{۱۰}{\pi+۴}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۵۶- **گزینهٔ «۲»** *(عباس اشرفی)*

$x=۲$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است. چرا که در همسایگی $x=۲$ تغییر علامت نداریم و در این نقطه، $P(x)$، تعریف نشده است.

از طرفی $x=-۱$ ریشهٔ درجهٔ یک صورت است. بنابراین:

$$P(x) = \frac{(x+۱)(x-۲)}{x-۲} = \frac{x^۲-x-۲}{x-۲} \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=-۲ \\ c=-۲ \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{(-۱)+(-۲)}{-۲} = \frac{-۳}{-۲} = \frac{۳}{۲}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)

۵۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرهوشنگ انصاری)*

$$\frac{۳}{۴} < \frac{x+۴}{۲x+۳} \Rightarrow \frac{x+۴}{۲x+۳} - \frac{۳}{۴} > ۰ \Rightarrow \frac{۷-۲x}{۴(۲x+۳)} > ۰ \Rightarrow \frac{-۳}{۲} < x < \frac{۷}{۲}$$

$$\frac{x+۴}{۲x+۳} < ۱ \Rightarrow \frac{x+۴}{۲x+۳} - ۱ < ۰ \Rightarrow \frac{۱-x}{۲x+۳} < ۰ \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{۳}{۲} \\ \text{یا} \\ x > ۱ \end{cases}$$

اشتراک دو مجموعهٔ فوق بازهٔ $(۱, \frac{۷}{۲})$ است و داریم:

$$a=۳, b=۲ \Rightarrow a+b=۵$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۸۸ تا ۹۱)

۵۸- **گزینهٔ «۲»** *(علی ساوجی)*

دو نامعادله را به ترتیب حل می‌کنیم:

۱) $||x|-۳| < ۲ \Rightarrow -۲ < |x|-۳ < ۲ \xrightarrow{+۳} ۱ < |x| < ۵$

$\Rightarrow -۵ < x < -۱$ یا $۱ < x < ۵$

۲) $||x|-۲| < ۳ \Rightarrow -۳ < |x|-۲ < ۳ \xrightarrow{+۲} -۱ < |x| < ۵$

$\Rightarrow |x| < ۵ \Rightarrow -۵ < x < ۵$

اشتراک دو مجموعهٔ بالا مجموعهٔ $(-۵, -۱) \cup (۱, ۵)$ است.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

۵۹- **گزینهٔ «۱»** *(حمید علیزاده)*

شرط آن‌که رابطهٔ f تابع باشد، آن است که مؤلفه‌های اول هیچ دو زوج مرتبی برابر نباشند و یا اگر مؤلفه‌های اول آن برابر باشند، باید مؤلفه‌های دوم نیز برابر باشند.

$$(۲, a^۲-۲a), (۲,۱) \in f \Rightarrow a^۲-۲a=۱$$

$$\Rightarrow a^۲-۲a-۱=۰$$

$$\Rightarrow a=۱\pm\sqrt{۲} \Rightarrow f=\{(۲,۱),(۱,۲),(۱,-۱),(۲,۱)\}$$

با جای‌گذاری $a=۱\pm\sqrt{۲}$ در رابطهٔ f دو زوج مرتب $(۱,۲)$ و $(۱,-۱)$ در رابطه قرار دارند، پس به‌ازای هیچ مقداری از a، رابطهٔ f تابع نخواهد شد.

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۶۰- **گزینهٔ «۲»** *(یاسین سپهر)*

نمایش جبری تابع خطی f به‌صورت $f(x)=ax+b$ می‌باشد.

$$f(x)=ax+b \Rightarrow \begin{cases} f(x-۳)=a(x-۳)+b \\ f(x+۲)=a(x+۲)+b \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x-۳)+f(x+۲)=ax-۳a+b+ax+۲a+b$$

$$۶x+۷ \Rightarrow ۲ax+(-a+۲b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a=۶ \Rightarrow a=۳ \\ -a+۲b=۷ \xrightarrow{a=۳} -۳+۲b=۷ \Rightarrow b=۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=۳x+۵ \Rightarrow f(-۱)=۲$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحهٔ ۱۰۳)

فیزیک ۱

۶۱- گزینهٔ «۳» (مصطفی کیانی)

گام اول: با استفاده از رابطهٔ $W = Fd\cos\theta$ و با داشتن W و θ، حاصل‌ضرب Fd را می‌یابیم:

$$W = Fd\cos\theta \xrightarrow[\theta=53^\circ]{W=36J} 36 = Fd\cos 53^\circ$$

$$\xrightarrow{\cos 53^\circ = 0/6} 36 = Fd \times 0/6 \Rightarrow Fd = 60J$$

گام دوم: بیشینهٔ کار انجام شده توسط نیروی ثابت $\vec{F}$ در جابه‌جایی ثابت $\vec{d}$ در حالتی است که نیرو و جابه‌جایی هم‌جهت باشند. یعنی $\theta = 0$ باشد.

بنابراین بیشینهٔ کار انجام شده برابر است با:

$$W = Fd\cos\theta \xrightarrow[Fd=60J]{\theta=0} W_{max} = 60 \times \cos(0)$$

$$\xrightarrow{\cos(0)=1} W_{max} = 60J$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۱)

۶۲- گزینهٔ «۳» (محمد ساکی)

با استفاده از رابطهٔ انرژی جنبشی داریم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}K_1}{K_1} = \frac{\frac{1}{3}m_1}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{درصد تغییرات تندی} = \frac{\Delta v}{v_1} \times 100$$

$$= \frac{\frac{3}{2}v_1 - v_1}{v_1} \times 100 = 50\%$$

بنابراین تندی ۵۰ درصد افزایش می‌یابد.

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحهٔ ۵۴)

۶۳- گزینهٔ «۳» (مصطفی کیانی)

می‌دانیم $W_{mg} = -\Delta U_g$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_{mg} = -(U_{g_B} - U_{g_A}) \xrightarrow[U_{g_B}=120J]{U_{g_A}=100J}$$

$$W_{mg} = -(120 - 100) = -20J$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۶۴- گزینهٔ «۱» (خسرو ارغوانی‌فرد)

می‌دانیم کار نیروی خالص وارد بر جسم برابر با تغییر در انرژی جنبشی جسم می‌باشد. از صورت مسئله ابتدا جرم جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 25 = \frac{1}{2}m \times 5^2 \Rightarrow m = 2kg$$

حال از قضیهٔ فوق استفاده می‌کنیم:

$$W_t = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

$$W_t = \frac{1}{2} \times 2 \times [(-10)^2 - (5)^2] = 75J$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۶۱ تا ۶۳)

۶۵- گزینهٔ «۴» (لاله بهادری)

در شرایط صرف‌نظر از اصطکاک، انرژی مکانیکی در کل مسیر ثابت است:

$$E = U + K = 35 + 25 = 60J$$

با در نظر گرفتن سطح زمین به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی، در بالاترین نقطه فقط انرژی پتانسیل داریم:

$$E = U_{max} = mgh$$

$$60 = 0/3 \times 10 \times h \Rightarrow h = \frac{60}{3} = 20m$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۶۶- **گزینهٔ «۳»** (حسام نادری)

طبق قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار کل انجام شده روی جسم برابر با تغییرات انرژی جنبشی جسم است. اگر سرعت جسم تغییر نکند، انرژی جنبشی هم تغییر نمی‌کند (یعنی $\Delta K = ۰$) و در نتیجه کار کل برابر صفر است و $W_1 = -W_2$ می‌باشد.

$$W_t = K_2 - K_1 = ۰ \Rightarrow W_1 + W_2 = ۰$$

$$\Rightarrow W_1 = -W_2$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۶۱ تا ۶۳)

۶۷- **گزینهٔ «۲»** (محمد ساکی)

چون نیروی اصطکاک وجود دارد، تغییرات انرژی مکانیکی برابر کار نیروی اصطکاک است. بنابراین با در نظر گرفتن سطح افقی به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۲}{d} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{d} \Rightarrow d = ۴m$$

$$E_2 - E_1 = W_{f_k} \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv^2 - mgh_1 = -f_k d$$

$$\xrightarrow[d=۴m]{m=۴kg\ ,\ f_k=۲N} \frac{۱}{۲}\times۴\times v^2 - ۴\times۱۰\times۲ = -۲\times۴$$

$$۲v^2 = ۷۲ \Rightarrow v = ۶\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۶۸ تا ۷۲)

۶۸- **گزینهٔ «۲»** (احسان محمدی)

انرژی حاصل از انفجار برابر است با:

$$E = ۰/۵\times۷۰۰ = ۳۵۰J$$

که ۲۵ درصد آن به صورت گرما تلف و باقی به گلوله و تفنگ می‌رسد:

$$K_1 + K_2 = \frac{۳}{۴}\times۳۵۰ = ۲۶۲/۵J$$

انرژی جنبشی گلوله برابر است با:

$$K_1 = \frac{۱}{۲}mv^2 = \frac{۱}{۲}\times۲\times۱۰^{-۳}\times۵۰۰^2 = ۲۵۰J$$

بنابراین انرژی جنبشی تفنگ برابر است با:

$$K_2 = ۲۶۲/۵ - ۲۵۰ = ۱۲/۵J$$

و در آخر تندی تفنگ برابر است با:

$$K_2 = \frac{۱}{۲}mv^2 \Rightarrow ۱۲/۵ = \frac{۱}{۲}\times۴\times v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow v = \frac{۵}{۲} = ۲/۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحهٔ ۵۴)

۶۹- **گزینهٔ «۳»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

تلمبه آب را به اندازهٔ $۱۰m = ۴ + ۶$ جابجا می‌کند، $h = ۱۰m$

$$P_{\text{مفید}} = \frac{mgh}{t} \Rightarrow ۱۰۰ = \frac{m\times۱۰\times۱۰}{۶۰} \Rightarrow m = ۶۰kg$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۷۰- **گزینهٔ «۲»** (حسین ناصحی)

کاری که پمپ روی آب انجام می‌دهد را با استفاده از قضیهٔ کار – انرژی جنبشی به‌دست می‌آوریم:

$$W_{\text{پمپ}} + W_{mg} = \Delta K$$

$$W_{\text{پمپ}} + (-mgh) = K_2 - K_1$$

$$\xrightarrow{K_1=۰} W_{\text{پمپ}} = \frac{۱}{۲}mv^2 + mgh$$

با استفاده از رابطهٔ چگالی، جرم آب را به‌دست می‌آوریم:

$$m = \rho V \xrightarrow[V=۶۰\times۱۰^{-۳}m^3]{\rho=۱۰^3\frac{kg}{m^3}} m = ۱۰^3\times۶۰\times۱۰^{-۳} = ۶۰kg$$

$$W_{\text{پمپ}} = \frac{۱}{۲}(۶۰)(۲۰)^2 + ۶۰\times۱۰\times۲۰ = ۱۲۰۰۰ + ۱۲۰۰۰ = ۲۴۰۰۰J$$

توان خروجی پمپ برابر است با:

$$\overline{P}_{\text{مفید}} = \frac{W_{\text{پمپ}}}{\Delta t} = \frac{۲۴۰۰۰}{۶۰} = ۴۰۰W$$

توان الکتریکی مصرفی پمپ برابر است با:

$$R_a = \frac{\overline{P}_{\text{مفید}}}{\overline{P}_{\text{مصرفی}}} \to \frac{۸۰}{۱۰۰} = \frac{۴۰۰}{\overline{P}} \Rightarrow \overline{P}_{\text{مصرفی}} = ۵۰۰W$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان: صفحه‌های ۶۱ تا ۶۳ و ۷۳ تا ۷۶)

حسابان ۲

۷۱- گزینهٔ «۳» (یاسین سپهر)

می‌دانیم که تبدیلات روی محور عمودی تاثیری در دامنه تابع ندارند، پس برای سادگی می‌توانیم دامنهٔ تابع $y=f(-x+۳)$ را حساب کنیم. برای رسم این تابع، نمودار تابع $y=f(۳x+۱)$ را $\frac{۲}{۳}$ واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۳(x+\frac{۲}{۳})+۱)=f(۳x+۳)$ حاصل شود. در نهایت طول نقاط روی نمودار این تابع را در ۳- ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(-x+۳)$ به دست آید. برای محاسبهٔ دامنهٔ این تابع، ترتیب تبدیلات گفته شده را روی بازهٔ $[-۲\,,\,۶]$ نیز انجام می‌دهیم:

$$D_۱=[-۲\,,\,۶]\xrightarrow{-\frac{۲}{۳}}D_۲=[-\frac{۸}{۳}\,,\,\frac{۱۶}{۳}]$$
$$\xrightarrow{\times(-۳)}D_{y=f(-x+۳)}=[-۱۶\,,\,۸]$$

این بازه شامل ۸ عدد طبیعی ۱ تا ۸ است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۷۲- گزینهٔ «۲» (علی شهرابی)

تبدیلات گفته شده را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:

$$y=\sqrt{۲x-۱}\xrightarrow[x\to x+۱]{\text{۱ واحد چپ}}$$
$$y=\sqrt{۲(x+۱)-۱}=\sqrt{۲x+۱}\xrightarrow[x\to\frac{x}{۲}]{\text{انبساط افقی}}$$
$$y=\sqrt{۲(\frac{x}{۲})+۱}=\sqrt{x+۱}$$

دو تابع $y=\sqrt{x+۱}$ و $y=\sqrt{۲x-۱}$ را قطع می‌دهیم:

$$\sqrt{x+۱}=\sqrt{۲x-۱}\Rightarrow x+۱=۲x-۱\Rightarrow x=۲$$

لازم به ذکر است که پس از پیدا کردن ضابطهٔ تابع ثانویه، برای محاسبهٔ طول نقطهٔ تقاطع می‌توانستیم از گزینه‌ها نیز استفاده کنیم.

(حسابان ۲ – تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۷۳- گزینهٔ «۲» (نسترن زارع)

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال یک واحدی}}y=f(x+۱)$$
$$\xrightarrow[\text{به محور yها}]{\text{قرینه نسبت}}y=f(-x+۱)$$
$$\xrightarrow[\text{به محور xها}]{\text{قرینه نسبت}}y=-f(۱-x)$$
$$\xrightarrow[\text{با ضریب }\frac{۱}{۴}]{\text{انقباض عمودی}}y=-\frac{۱}{۴}f(۱-x)$$

(حسابان۲ – تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۷۴- گزینهٔ «۱» (بهزاد محرمی)

ابتدا سراغ به‌دست آوردن وارون تابع f می‌رویم:

$$y=f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۵$$
$$y=(x-۲)^۳+۳\Rightarrow y-۳=(x-۲)^۳\Rightarrow\sqrt[۳]{y-۳}=(x-۲)$$
$$\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y-۳}+۲\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۳}+۲$$

برای منطبق شدن تابع $y=f^{-۱}(x)$ بر $y=\sqrt[۳]{x}$، باید ۳ واحد در جهت منفی محور xها و ۲ واحد نیز در جهت منفی محور yها انتقال یابد، یعنی:

$$y=(\sqrt[۳]{(x+۳)-۳}+۲)-۲=\sqrt[۳]{x}$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۴)

۷۵- گزینهٔ «۲» (عادل حسینی)

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+۲$ برابر صفر است:

$$p(-۲)=۰\Rightarrow -۸+۴a-۳(-۲)-۲=۴a-۴=۰\Rightarrow a=۱$$

از آنجا که $x+۲$ یکی از عامل‌های $p(x)$ است، داریم:

$$p(x)=x^۳+x^۲-۳x-۲=(x+۲)(x^۲-x-۱)$$
$$\xrightarrow{p(x)=۰}\begin{cases}x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\\ x^۲-x-۱=۰\xrightarrow{\Delta>۰}S=۱\end{cases}$$

مجموع جواب‌های معادله برابر است با: $-۲+۱=-۱$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۷۶- گزینهٔ «۳» (کاظم اجلالی)

با استفاده از اتحاد $a^۵+b^۵=(a+b)(a^۴-a^۳b+a^۲b^۲-ab^۳+b^۴)$ چندجمله‌ای $P(x)$ را تجزیه می‌کنیم.

$$P(x)=x^{۱۰}+x^۵=(x^۲)^۵+x^۵$$
$$=(x^۲+x)((x^۲)^۴-(x^۲)^۳x+(x^۲)^۲x^۲-(x^۲)x^۳+x^۴)$$
$$=(x^۲+x)(x^۸-x^۷+x^۶-x^۵+x^۴)$$
$$=(x^۲+x)Q(x)$$

بنابراین داریم:

$$Q(x)=x^۸-x^۷+x^۶-x^۵+x^۴$$
$$\Rightarrow Q(-۱)=۵$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۷۷- گزینهٔ «۳» (یاسین سپهر)

در توابع قدرمطلق، جهت یکنوایی نمودار تابع، فقط در ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق تغییر می‌کند (درصورت تغییر). پس جهت یکنوایی نمودار تابع f، در $x=-۳$ و $x=k$ تغییر می‌کند.

با این توضیحات نتیجه می‌گیریم که بازه‌ای که تابع f روی آن اکیداً صعودی است، به‌صورت $[-3,k]$ یا $[k,-3]$ است. داریم:

$$\begin{cases}[k,-3]: -3-k=5 \Rightarrow k=-8\\ [-3,k]: k+3=5 \Rightarrow k=2\end{cases}$$

به ازای این دو مقدار ضابطه‌های f را می‌نویسیم:

$$k=-8: f(x)=\begin{cases}-x+2 & ; \quad x<-8\\ -3x-14 & ; \quad -8\le x<-3\\ -x-8 & ; \quad x\ge -3\end{cases}$$

این تابع اکیداً نزولی است. پس پاسخ $k=2$ صحیح است. به ازای $k=2$ داریم:

$$f(x)=\begin{cases}-x-8 & ; \quad x<-3\\ x-2 & ; \quad -3\le x<2\\ -x+2 & ; \quad x\ge 2\end{cases}$$

تابع f روی بازهٔ $[-3,2]$ به طول ۵ اکیداً صعودی است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۷۸- گزینهٔ «۱» *(سهیل حسن‌خان‌پور)*

می‌دانیم $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2})^2-1=1$، پس داریم:

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}+1)^{-1}$$

همچنین با توجه به اتحاد مکعب دوجمله‌ای داریم:

$$(\sqrt{2}+1)^3=(\sqrt{2})^3+3\times(\sqrt{2})^2\times 1+3\times\sqrt{2}\times 1^2+1^3$$
$$=2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1=7+5\sqrt{2}$$

حال این عبارات را در نامعادلهٔ سوال جایگذاری می‌کنیم:

$$((\sqrt{2}+1)^{-1})^{(-x^2+3x-2)}<((\sqrt{2}+1)^3)^2$$
$$\Rightarrow(\sqrt{2}+1)^{x^2-3x+2}<(\sqrt{2}+1)^6$$

تابع $y=(\sqrt{2}+1)^x$ اکیداً صعودی است و در نتیجه:

$$x^2-3x+2<6\Rightarrow x^2-3x-4<0\Rightarrow(x-4)(x+1)<0$$
$$\Rightarrow -1<x<4\Rightarrow\begin{cases}b=4\\ a=-1\end{cases}\Rightarrow b+2a=4+2(-1)=2$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۷۹- گزینهٔ «۱» *(محمدسجاد پیشوایی)*

تابعی که به‌صورت $y=|x-a|-|x-b|$ باشد، شکلی شبیه به سرسره دارد که دو حالت در رسم آن وجود دارد:

$a<b$ یا $a>b$

پس برای صعودی بودن آن ریشهٔ قدرمطلق دوم باید بزرگ‌تر از ریشهٔ قدرمطلق اول باشد.

$$y=\left|x-m^2\right|-\left|x-(5m+6)\right|$$

$$a<b\Rightarrow m^2<5m+6\Rightarrow m^2-5m-6<0\Rightarrow(m+1)(m-6)<0$$
$$\Rightarrow -1<m<6\Rightarrow m=0,1,2,\dots,5$$

همچنین اگر ریشه‌های داخل دو قدرمطلق با هم برابر باشند تابع ثابت $y=0$ خواهد بود که این تابع نیز تابعی صعودی است.

$$m^2=5m+6\Rightarrow m^2-5m-6=0$$
$$\Rightarrow(m-6)(m+1)=0\Rightarrow m=-1,6$$

پس درمجموع تابع به‌ازای ۸ مقدار $-1,0,1,\dots,6$ صعودی است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۸۰- گزینهٔ «۴» *(عادل حسینی)*

رابطهٔ تقسیم را برای تقسیم $f(x)$ بر $x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$ می‌نویسیم:

$$f(x)=(x+5)(x-1)q_0(x)+x-6 \qquad (*)$$

همچنین برای تقسیم $f(f(x))$ بر $x-1$ داریم:

$$f(f(x))=(x-1)q_1(x)+r$$

می‌بینیم که اگر $x=1$ را در رابطهٔ بالا جای‌گذاری کنیم، مقدار r به دست می‌آید:

$$r=f(f(1))$$

از رابطهٔ (*) داریم:

$$f(1)=0+(1-6)\Rightarrow f(1)=-5\Rightarrow r=f(-5)$$

مجدداً داریم:

$$f(-5)=0+(-5-6)=-11$$

پس $r=-11$ است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

هندسه ۳

۸۱- **گزینهٔ «۳»** *(رضا عباسی‌اصل)*

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۶\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}=۲A$$

$$A^{۴}=\left(A^{۲}\right).\left(A^{۲}\right)=(۲A)(۲A)=۴A^{۲}=۴(۲A)=۸A$$

$$\Rightarrow k=۸$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۸۲- **گزینهٔ «۲»** *(یاسین سپهر)*

$$b_{۱۱}=b_{۱۲}=۱^{۲}+۱=۲\ ,\ b_{۲۱}=b_{۲۲}=۲^{۲}+۱=۵$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۵ & ۵\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۵ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۴ & -۶\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۵ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۵\\ ۶ & ۴\end{bmatrix}$$

$$(A-B)(A+B)=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۴ & -۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۵\\ ۶ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۴\\ -۵۲ & -۴۴\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۹)

۸۳- **گزینهٔ «۲»** *(یاسین سپهر)*

چون A ماتریس اسکالر است، بنابراین ماتریس مربعی می‌باشد. از طرفی ضرب AB تعریف شده است، پس تعداد ستون‌های ماتریس A برابر تعداد سطرهای ماتریس B یعنی برابر ۳ می‌باشد. حال چون ماتریس A اسکالر می‌باشد، پس به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ ۰ & a & ۰\\ ۰ & ۰ & a\end{bmatrix}$$

$$c_{۳۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۲\end{bmatrix}=۲a=-۴\Rightarrow a=-۲$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی A $=a+a+a=۳a=۳(-۲)=-۶$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۹)

۸۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمد خندان)*

با توجه به رابطهٔ $\frac{۱}{۲}A^{۲}B=I$، ماتریس B وارون ماتریس $\frac{۱}{۲}A^{۲}$ است، بنابراین داریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲ & -۶\\ -۸ & ۱۶\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{۱}{۲}A^{۲}=\begin{bmatrix}۶ & -۳\\ -۴ & ۸\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{۱}{۲}A^{۲}\right)^{-۱}=\frac{۱}{۶\times ۸-(-۳)(-۴)}\begin{bmatrix}۸ & ۳\\ ۴ & ۶\end{bmatrix}=\frac{۱}{۳۶}\begin{bmatrix}۸ & ۳\\ ۴ & ۶\end{bmatrix}=B$$

مجموع درایه‌های ماتریس B $=\frac{۱}{۳۶}(۸+۳+۴+۶)=\frac{۲۱}{۳۶}=\frac{۷}{۱۲}$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۸۵- **گزینهٔ «۴»** *(سامان اسپهرم)*

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۲^{x}\\ ۲^{۱-x} & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۲^{x}\\ ۲^{۱-x} & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=۲I$$

$$A^{۴}=۴I \text{ و } A^{۶}=۸I\Rightarrow A^{۲}+A^{۴}+A^{۶}=۲I+۴I+۸I=۱۴I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ماتریس A در صورتی وارون‌پذیر نیست که $|A|=۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$|A|=۰\Rightarrow (a+۱۰)-a(a+۴)=۰$$

$$\Rightarrow a+۱۰-a^{۲}-۴a=۰\Rightarrow a^{۲}+۳a-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow (a+۵)(a-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-۵\\ a=۲\end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۸۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

وارون وارون یک ماتریس برابر خود آن ماتریس است، بنابراین داریم:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{(-2)\times 1-1\times(-1)}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 7 & -5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\frac{1}{3\times(-5)-(-2)\times 7}\begin{bmatrix}-5 & 2\\ -7 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 7 & -3\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & -2\\ 7 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 6 & -1\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $(A+B)$ برابر است با:

$$4+(-1)+6+(-1)=8$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۸۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & 3\\ 6 & 3\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

$$\Rightarrow AB+BA=(A+B)^2-A^2-B^2$$

$$=\begin{bmatrix}18 & 3\\ 6 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۸۹- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

می‌دانیم $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$، پس داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & \cos^2\theta\\ 1+\tan^2\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \cos^2\theta\\ 1+\tan^2\theta & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I\Rightarrow A^{14}=(A^2)^7=I$$

$$B^2=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

$$\Rightarrow B^{15}=(B^2)^7\times B=I\times B=B$$

بنابراین داریم:

$$A^{14}+B^{15}=I+B$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۹۰- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

طبق فرض داریم:

$$A^2=2A+3I \qquad (1)$$

همچنین:

$$(A-4I)^{-1}=\alpha A+\beta I$$

$$\Rightarrow(\alpha A+\beta I)(A-4I)=I$$

$$\Rightarrow \alpha A^2+(\beta-4\alpha)A-4\beta I=I$$

$$\xrightarrow{(1)}\alpha(2A+3I)+(\beta-4\alpha)A=(4\beta+1)I$$

$$\Rightarrow(\beta-2\alpha)A+(3\alpha)I=(4\beta+1)I$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta-2\alpha=0\\ 3\alpha=4\beta+1\end{cases}\xrightarrow{\text{نهایتاً}}\alpha=-\frac{1}{5}\ ,\quad \beta=-\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{3}{5}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

ریاضیات گسسته

۹۱- **گزینهٔ «۳»** (حمیدرضا امیری)

اگر $a=2$ و $b=3$ باشد، آنگاه $ab=6$ زوج است ولی $a+b=5$ فرد می‌باشد. سایر موارد قضایای کلی هستند و همواره برقرارند.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲ و ۳)

۹۲- **گزینهٔ «۴»** (سروش موئینی)

$$-44=17(-3)+7\Rightarrow\begin{cases}q=-3\\ r=7\end{cases}$$

$$-3=7(-1)+4\Rightarrow 4=\text{باقی‌مانده}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۹۳- **گزینهٔ «۲»** (سیدمحسن فاطمی)

$$a^3\mid b^2\Rightarrow a\times a^2\mid b^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a\mid b^2\\ a^2\mid b^2\Rightarrow a\mid b\Rightarrow a^4\mid b^4\Rightarrow a^4\mid b^4\times b\Rightarrow a^4\mid b^5\end{cases}$$

پس رابطه‌های گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» همواره درست هستند ولی رابطهٔ گزینهٔ «۲» در حالت کلی نتیجه نمی‌شود. به عنوان مثال نقض برای گزینهٔ «۲»، $a=4$ و $b=8$ را درنظر بگیرید.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۹۴- **گزینهٔ «۳»** (علی ساوجی)

گزینهٔ «۱»: در میان هر سه عدد طبیعی متوالی، قطعاً یکی مضرب ۳ و حداقل یکی زوج است، پس حاصل‌ضرب هر سه عدد متوالی مضرب ۶ است.

گزینهٔ «۲»: در بین هر n عدد صحیح متوالی، یکی قطعاً بر n بخش‌پذیر است، پس حاصل‌ضرب هر n عدد صحیح متوالی مضرب n است.

گزینهٔ «۳»: عدد ۲، عددی اول است ولی مربع آن به‌صورت $8k+1$ $(k\in\mathbb{Z})$ نیست.

گزینهٔ «۴»: ۵ عدد طبیعی متوالی را در نظر می‌گیریم. اگر کوچک‌ترین عدد را برابر n فرض کنیم، داریم:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10$$

$$=5\underbrace{(n+2)}_{k}=5k\qquad (k\in\mathbb{N})$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۹۵- **گزینهٔ «۳»** (افشین خاصه‌خان)

$$a\overset{m}{\equiv}r\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}r+km\xrightarrow{k=m}a\overset{m}{\equiv}r+m^2$$
$$a=mq+r\Rightarrow a-r=mq\Rightarrow m\mid a-r$$

رابطهٔ $a+r=mk$ در حالت کلی درست نیست. به عنوان مثال اگر $a=17$ و $m=3$ باشد، آنگاه $r=2$ است و رابطهٔ $3k=2+17$ برقرار نیست.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۹۶- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

$$24a \overset{15}{\equiv} 16b \Rightarrow 9a \overset{15}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} 9a \overset{5}{\equiv} b \Rightarrow -a \overset{5}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{5}{\equiv} -b \\ 9a \overset{3}{\equiv} b \Rightarrow b \overset{3}{\equiv} 0 \end{cases}$$

$$24a \overset{15}{\equiv} 16b \xrightarrow[(15,8)=1]{\div 8} 3a \overset{15}{\equiv} 2b$$

هر چهار نتیجه درست است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۹۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

رقم یکان یک عدد معادل باقی‌ماندهٔ تقسیم آن عدد بر ۱۰ است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 3^2 = 9 \overset{10}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{به توان } 15} 3^{30} \overset{10}{\equiv} -1 \\ 7^2 = 49 \overset{10}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{به توان } 35} 7^{70} \overset{10}{\equiv} -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{30}+7^{70} \overset{10}{\equiv} -2 \overset{10}{\equiv} 8$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۹۸- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$7^2 = 49 = 4\times12+1 \Rightarrow 7^2 \overset{12}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{به توان } 700} 7^{1400} \overset{12}{\equiv} 1$$

$$\xrightarrow{\times 7} 7^{1401} \overset{12}{\equiv} 7$$

$$5^2 = 25 = 2\times12+1 \Rightarrow 5^2 \overset{12}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{به توان } 701} 5^{1402} \overset{12}{\equiv} 1$$

$$\xrightarrow{\times 10} 10\times5^{1402} \overset{12}{\equiv} 10$$

$$7^{1401} - 10\times5^{1402} \overset{12}{\equiv} 7-10 \overset{12}{\equiv} -3 \overset{12}{\equiv} 9$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۹۹- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a = 37q+q^3 \Rightarrow q^3 < 37 \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} q_{max} = 3$$

$$\Rightarrow a_{max} = 37\times3+3^3 = 138 \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow a_{max} \in [3]_5$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۹)

۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

اگر $d = (6n+1\ ,\ 3n+2)$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\left.\begin{matrix} d \mid 3n+2 \xrightarrow{\times 2} d \mid 6n+4 \\ d \mid 6n+1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 3 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 3$$

از طرفی هیچ کدام از عبارت‌های $6n+1$ و $3n+2$، مضرب ۳ نیستند، پس d نمی‌تواند برابر ۳ باشد، در نتیجه داریم:

$$d = 1 \Rightarrow [1\ ,\ p] = p$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

فیزیک ۳

۱۰۱- گزینهٔ «۳» (مریم شیخ‌ممو)

معادلهٔ $x=-t^{۲}+۶t-۴$ نشان می‌دهد، $a<۰$ و $v_{۰}>۰$ است. بنابراین در ابتدا حرکت متحرک کندشونده و در لحظه‌ای که $v=۰$ است، تغییر جهت می‌دهد. بنابراین داریم:

$$x=-t^{۲}+۶t-۴\Rightarrow\begin{cases}v_{۰}=۶\dfrac{m}{s}\\ \dfrac{۱}{۲}a=-۱\Rightarrow a=-۲\dfrac{m}{s^{۲}}\end{cases}$$

$$v=at+v_{۰}\Rightarrow v=-۲t+۶$$

$$\xrightarrow{v=۰} ۰=-۲t+۶\Rightarrow t=۳s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۱۰۲- گزینهٔ «۴» (پوریا علاقه‌مند)

در بازهٔ زمانی صفر تا $t_{۴}$ چون تقعر سهمی رو به بالا است پس علامت شتاب مثبت است. همچنین در بازهٔ صفر تا $t_{۲}$ متحرک خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین علامت سرعت منفی است. لذا در این بازهٔ زمانی شتاب و سرعت خلاف جهت هم هستند.

دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها:

۱) فقط در لحظهٔ $t_{۲}$ سرعت متحرک صفر می‌شود.

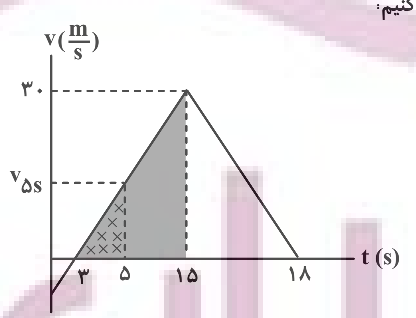
۲) متحرک در این بازه ابتدا خلاف جهت محور x سپس در جهت محور x حرکت کرده است.

۳) چون حرکت شتابدار است پس سرعت ثابت نیست.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

۱۰۳- گزینهٔ «۲» (معصومه شریعت‌ناصری)

برای محاسبهٔ شتاب متوسط به کمک نمودار $v-t$ کافی است سرعت متحرک را در دو لحظهٔ خواسته شده به‌دست آوریم و در رابطهٔ $a_{av}=\dfrac{v_{۲}-v_{۱}}{t_{۲}-t_{۱}}$ قرار دهیم. در لحظهٔ $t_{۲}=۱۸s$ سرعت متحرک صفر است و برای محاسبهٔ سرعت در لحظهٔ $t=۵s$ از تشابه دو مثلث رنگ شده استفاده می‌کنیم:



$$\frac{۳۰}{v_{۵s}}=\frac{۱۵-۳}{۵-۳}\Rightarrow\frac{۳۰}{v_{۵s}}=\frac{۱۲}{۲}\Rightarrow v_{۵s}=۵\frac{m}{s}$$

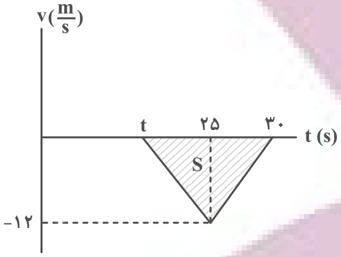
اکنون شتاب متوسط را می‌یابیم:

$$a_{av}=\frac{v_{۱۸s}-v_{۵s}}{t_{۲}-t_{۱}}=\frac{۰-۵}{۱۸-۵}=-\frac{۵}{۱۳}\frac{m}{s^{۲}}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

۱۰۴- گزینهٔ «۳» (امیراحمد میرسعید)

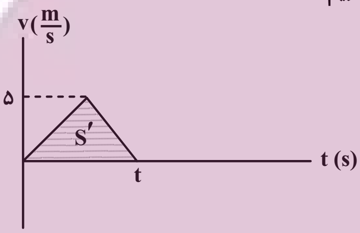
برای محاسبهٔ سرعت متوسط هنگامی که متحرک در سوی منفی محور x حرکت می‌کند، مساحت بین نمودار و محور زمان را به‌دست آورده و بر زمان تقسیم می‌کنیم:



$$S=\frac{|(۳۰-t)(-۱۲)|}{۲}=۶(۳۰-t)$$

$$|v_{av}|=\frac{|۶(۳۰-t)|}{(۳۰-t)}=۶\frac{m}{s}$$

برای محاسبهٔ تندی متوسط هنگامی که متحرک در سوی مثبت محور x در حرکت است، داریم:



$$S'=\frac{۵\times t}{۲}$$

$$s_{av}=\frac{\frac{۵\times t}{۲}}{t}=۲/۵\frac{m}{s}$$

$$\frac{|v_{av}|}{s_{av}}=\frac{۶}{۲/۵}=۲/۴$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۱۰۵- گزینهٔ «۴» (مصطفی کیانی)

آن‌طور که نمودار نشان می‌دهد متحرک A از مکان $x_{۰A}=۰$ و متحرک B از مکان $x_{۰B}=۵m$ شروع به حرکت نموده‌اند و در لحظهٔ $t=۱۰s$ به هم رسیده‌اند. بنابراین کافی است مکان متحرک B را در لحظهٔ $t=۱۰s$ بیابیم و جابه‌جایی آن را حساب کنیم. چون در لحظهٔ $t=۱۰s$ مکان هر دو متحرک یکسان است، به همین منظور با استفاده از معادلهٔ حرکت یکنواخت و داشتن $v_{A}=۲\dfrac{m}{s}$، مکان متحرک A را پیدا می‌کنیم:

$$x_{A}=v_{A}t+x_{۰A}\xrightarrow[t=۱۰s]{x_{۰A}=۰\ ,\ v_{A}=۲\frac{m}{s}}$$

$$x_{A}=۲\times۱۰+۰=۲۰m$$

$$x_{A}=x_{B}\Rightarrow x_{B}=۲۰m$$

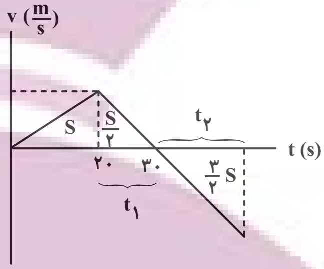
جابه‌جایی متحرک B در بازهٔ زمانی $t=۰s$ تا $t=۱۰s$ برابر است با:

$$\Delta x_{B}=x_{B}-x_{۰B}=۲۰-۵=۱۵m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۰۶- **گزینهٔ «۴»** (محمد ساکی)

متحرک زمانی به مکان اولیه خود بازمی‌گردد که جابجایی آن صفر شود. می‌دانیم مساحت محصور بین نمودار سرعت- زمان و محور زمان در یک بازهٔ زمانی معین برابر با بزرگی جابجایی متحرک در آن بازه است. پس به کمک نمودار سرعت- زمان و با استفاده از تشابه مثلث‌ها داریم:

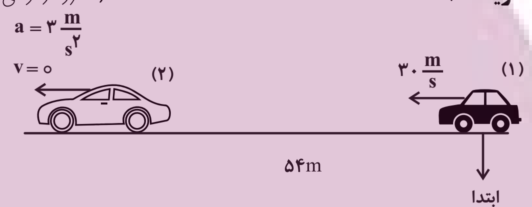


$$\frac{\frac{۳}{۲}S}{\frac{۱}{۲}S}=(\frac{t_۲}{t_۱})^۲ \Rightarrow \sqrt{۳}=\frac{t_۲}{۱۰}\xrightarrow{\sqrt{۳}=۱/۷} t_۲=۱۷s$$

$$t_{کل}=۳۰+t_۲=۳۰+۱۷=۴۷s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۱۰۷- **گزینهٔ «۳»** (خسرو ارغوانی‌فرد)



معادلهٔ حرکت هر دو را می‌نویسیم. وقتی دو اتومبیل به هم می‌رسند، مکان آن‌ها یکسان است.

$$x_۱=vt=۳۰t$$

$$x_۲=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰=\frac{۳}{۲}t^۲+۵۴$$

$$x_۱=x_۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}t^۲-۳۰t+۵۴=۰ \Rightarrow t=\frac{۳۰\pm\sqrt{۹۰۰-۳۲۴}}{۳}$$

$$t_۱=۱۸s\ ,\ \ t_۲=۲s \Rightarrow \Delta t=۱۸-۲=۱۶s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۱۰۸- **گزینهٔ «۲»** (مصطفی کیانی)

چون متحرک در دو ثانیهٔ اول $۱۶m$ و در ۳ ثانیهٔ بعدی $۳۹m$ را طی کرده است، لذا در ۵ ثانیهٔ اول $\Delta x=۱۶+۳۹=۵۵m$ را طی می‌کند. بنابراین، ابتدا با استفاده از رابطهٔ جابه‌جایی، $v_۰$ و a را می‌یابیم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow[\Delta x=۱۶m]{t=۲s} ۱۶=\frac{۱}{۲}a\times۴+۲v_۰ \\ \xrightarrow[\Delta x=۵۵m]{t=۵s} ۵۵=\frac{۱}{۲}a\times۲۵+۵v_۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۸=a+v_۰ \\ ۱۱۰=۲۵a+۱۰v_۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۸۰=-۱۰a-۱۰v_۰ \\ ۱۱۰=۲۵a+۱۰v_۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳۰=۱۵a \Rightarrow a=۲\frac{m}{s^۲}\ ,\ \ v_۰=۶\frac{m}{s}$$

اکنون، سرعت متحرک در مکان $x=۲۷m$ را می‌یابیم:

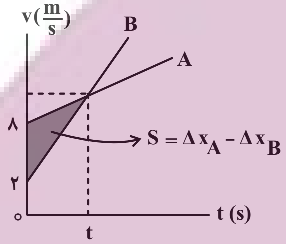
$$v^۲=v_۰^۲+۲a\Delta x \xrightarrow[a=۲\frac{m}{s^۲}]{v_۰=۶\frac{m}{s}} v^۲=۳۶+۲\times۲\times(۲۷-۰)=۱۴۴$$

$$v=۱۲\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱۰۹- **گزینهٔ «۳»** (مصطفی کیانی)

می‌دانیم مساحت سطح محصور بین نمودار $v-t$ و محور t برابر، جابه‌جایی متحرک است. بنابراین، ابتدا، مطابق شکل، اختلاف مساحت ذوزنقهٔ بزرگ (Δx_A) و مساحت ذوزنقهٔ کوچک (Δx_B) را که برابر مساحت مثلث رنگ شده است، برابر $۳۰m$ قرار می‌دهیم و t را بیابیم:



$$S_{مثلث}=\frac{(۸-۲)\times t}{۲}=۳۰ \Rightarrow t=۱۰s$$

اکنون به صورت زیر اندازهٔ سرعت دو متحرک را پیدا می‌کنیم:

$$a_B=۴a_A \xrightarrow{a=\frac{\Delta v}{\Delta t}} \frac{v-۲}{۱۰-۰}=۴\times(\frac{v-۸}{۱۰-۰})$$

$$\Rightarrow v-۲=۴v-۳۲ \Rightarrow ۳۰=۳v \Rightarrow v=۱۰\frac{m}{s}$$

با داشتن v، اندازهٔ شتاب متحرک A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_A=a_{av}=\frac{\Delta v_A}{\Delta t} \Rightarrow a_A=\frac{۱۰-۸}{۱۰-۰}=۰/۲\frac{m}{s^۲}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۵ تا ۱۷)

۱۱۰- **گزینهٔ «۱»** (بهار کامران)

زمان حرکت گلولهٔ اول را t در نظر می‌گیریم. گلولهٔ دوم، ۲ ثانیه دیرتر رها می‌شود. پس زمان حرکتش ۲ ثانیه کمتر یعنی $t-۲$ می‌باشد. معادلهٔ دو گلوله را نوشته و از هم کم می‌کنیم تا فاصلهٔ دو گلوله به دست آید.

$$y_۱=\frac{۱}{۲}gt^۲=۵t^۲$$

$$y_۲=\frac{۱}{۲}g(t-۲)^۲=۵(t^۲-۴t+۴)$$

$$\Rightarrow y_۱-y_۲=۶۰ \Rightarrow ۵t^۲-۵(t^۲-۴t+۴)=۶۰ \Rightarrow t=۴s$$

$$y_۱=y_۲=h=۵t^۲=۵\times۴^۲=۸۰m$$

توجه داریم که بیشترین فاصلهٔ دو گلوله در طول حرکت زمانی است که گلولهٔ اول به زمین می‌رسد.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

شیمی ۳

۱۱۱- گزینهٔ «۲» *(صلاح‌الدین ابراهیمی)*

بررسی همهٔ موارد:

الف) اتیلن گلیکول دارای دو گروه عاملی هیدروکسیل است نه هیدروکسید

ب) صحیح است.

پ) اوره دارای فرمول مولکولی $CO(NH_۲)_۲$ است.

ت) بنزین با فرمول $C_۸H_{۱۸}$ ، به تقریب ۸۴ درصد جرم خود را بـه کـربن اختصاص داده است:

$$\text{درصد جرمی کربن} = \frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم ترکیب}}\times ۱۰۰ = \frac{۸\times ۱۲}{۱۱۴}\times ۱۰۰ \simeq ۸۴٪$$

ث) روغن زیتون با فرمول $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$ و چربی کوهـان شـتر بـا فرمـول $C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶$ در ۶ هیدروژن با هم تفاوت دارند که جـرم مـولی H (۱) است و جرم مولی روغن زیتون ۶ واحد از چربی کوهان شتر کمتر است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳ و ۴)

۱۱۲- گزینهٔ «۴» *(جواد سوری‌لکی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) شاخص امید به زندگی در شهرهای مختلف یک کشور تفاوت دارد.

۲) آهنگ رشد شاخص امید به زندگی در نواحی کم‌برخوردار بیشتر از نواحی برخوردار است. نمودار ۱ صفحهٔ ۳

۳) شاخص امید به زندگی در نواحی برخوردار بیشتر از نواحی کـم‌برخـوردار است.

۴) سلامت و بهداشت در شاخص امید به زنـدگی اهمیـت بسـیاری دارد و در راستای ارتقای آن پاک‌کننده‌ها و شوینده‌ها نقش پررنگی ایفا می‌کنند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳ و ۴)

۱۱۳- گزینهٔ «۳» *(عین‌اله ابوالفتحی)*

۴ مورد نادرست هستند.

نوع مخلوط / ویژگی	محلول	کلویید	سوسپانسیون
رفتار در برابر نور	نور را پخش نمی‌کند	نور را پخش می‌کند	نور را پخش می‌کند
همگن / ناهمگن	همگن	ناهمگن	ناهمگن
پایداری	پایدار	پایدار	ناپایدار
مثال	نمک در آب	سس مایونز	شربت معده

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶ و ۷)

۱۱۴- گزینهٔ «۳» *(فرزاد رضایی)*

ابتدا شمار کربن‌های الکل را تعیین می‌کنیم. یعنی:

جرم الکل: $۱۴n+۱۸$

$$R'-OH \to C_nH_{۲n+۱}-OH$$

$$\text{درصد جرمی کربن} = ٪۶۰ \Rightarrow \frac{۱۲n}{۱۴n+۱۸}\times ۱۰۰ = ۶۰ \Rightarrow n = ۳$$

پس R' شامل ۳ اتم کربن است، اکنون شمار کربن‌های استر و بعد صـابون را به دست می‌آوریم. استر باید به صورت زیر باشد تا شامل ۸ پیوند کـربن-کربن باشد یعنی R ، ۶ کربنی است.

$$C \overset{۸}{-} C \overset{۷}{-} C \overset{۶}{-} C \overset{۵}{-} C \overset{۴}{-} C \overset{۳}{-} \underset{}{\overset{\overset{O}{\|}}{C}} - O - C \overset{۲}{-} C \overset{۱}{-} C$$

پس ترکیب یونی حاصل به صورت $C_۶H_{۱۳}COONa$ است.

$$\text{درصد جرمی سدیم} = \frac{۲۳}{۱۵۲}\times ۱۰۰ \simeq ٪۱۵/۱۳$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۵ و ۶)

۱۱۵- گزینهٔ «۳» *(هادی مهدی‌زاده)*

موارد (الف)، (ب) و (ت) درست‌اند.

مورد (پ): به منظور افزایش خاصیت ضـدعفونی‌کننـدگی و میکـروب‌کشـی صابون‌ها، به آن‌ها مادهٔ شیمیایی کلردار اضافه می‌کنند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶ و ۸ تا ۱۲)

۱۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(فرزاد رضایی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) در این گزینه صابون سنتی به اشتباه صابون صنعتی بیان شده است.

۲) در این گزینه موهای چرب به اشتباه خشک بیان شده است.

۳) با حل شدن صابون در آب بین سرهای باردار صابون و آب نیروی جاذبه یون- دوقطبی ایجاد می‌شود (آب مولکولی قطبی است)

۴) افزایش دمای آب و افزودن آنزیم به صابون هر دو باعث افزایش قدرت پاک‌کنندگی صابون می‌شوند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۸ تا ۱۱)

۱۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(حسین ناصری‌ثانی)*

مورد دوم «نادرست» و بقیه موارد درست‌اند.

معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش:

$$۲Al(s) + ۲NaOH(s) + ۶H_۲O(l) \rightarrow ۲NaAl(OH)_۴(aq) + ۳H_۲(g)$$

پس مجموع ضرایب مواد شرکت کننده پس از موازنه برابر ۱۵ است.

(شیمی ۳- صفحهٔ ۱۲)

۱۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

اکسیدهای بازی: $Na_۲O$ ، BaO ، CaO و $K_۲O$

نکته: $NH_۳$ در آب خاصیت بازی دارد ولی اکسید نیست.

اکسید اسیدی: $SO_۳$ ، $NO_۲$ و $CO_۲$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۱۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(فرزاد رضایی)*

ابتدا غلظت مولی HX را با استفاده از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم:

$$M = \frac{۱۰\,a\,d}{Mw} = \frac{۱۰ \times ۱۵ \times ۰/۸}{۱۵۰} = ۰/۸\,mol.L^{-۱}$$

اکنون با استفاده از جدول تغییر غلظت داریم:

$$\begin{array}{llll} HX & \rightleftharpoons H^+ & + X^- & \\ ۰/۸ & ۰ & ۰ & x = M\alpha \\ ۰/۸ - x & x & x & x = ۰/۸ \times ۰/۰۱ = ۰/۰۰۸ \end{array}$$

$$\frac{\text{مجموع غلظت یون‌ها}}{\text{غلظت اولیه } HX} = \frac{۲x}{۰/۸} = \frac{۲ \times ۰/۰۰۸}{۰/۸} = ۰/۰۲$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(عین‌اله ابوالفتحی)*

$$MgCl_۲(aq) + ۲RCOONa(aq)$$

$$\rightarrow Mg(RCOO)_۲(s) + ۲NaCl(aq)$$

$$CaCl_۲(aq) + ۲RCOONa(aq)$$

$$\rightarrow Ca(RCOO)_۲(s) + ۲NaCl(aq)$$

اگر مقدار اولیه کلسیم کلرید و منیزیم کلرید را x مول در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$x\,mol\ MgCl_۲ \times \frac{۲mol\ NaCl}{۱mol\ MgCl_۲} \times \frac{۵۸/۵g\ NaCl}{۱mol\ NaCl}$$

$$= ۱۱۷x\,g\ NaCl$$

$$x\,mol\ CaCl_۲ \times \frac{۲mol\ NaCl}{۱mol\ CaCl_۲} \times \frac{۵۸/۵g\ NaCl}{۱mol\ NaCl}$$

$$= ۱۱۷x\,g\ NaCl$$

$$۱۱۷x\,g\ NaCl + ۱۱۷x\,g\ NaCl = ۲۳۴x\,g\ NaCl$$

$$= ۰/۴۶۸g\ NaCl \rightarrow x = ۰/۰۰۲mol\ CaCl_۲$$

$$۰/۰۰۲mol\ CaCl_۲ \times \frac{۱۱۱g\ CaCl_۲}{۱mol\ CaCl_۲} \times \frac{۱۰۰۰mg}{۱g} = ۲۲۲mg$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۵ تا ۹)

هندسه ۱

۱۲۱- گزینهٔ «۴» *(داریوش ناظمی)*

گزینه (۱) : متوازی الاضلاع است که لزوماً لوزی نیست.

گزینه (۲) : لوزی است که لزوماً مربع نیست.

گزینه (۳) : می‌تواند ذوزنقهٔ متساوی الساقین باشد، که قطرهای آن یکدیگر را نصف نمی‌کنند.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۱)

۱۲۲- گزینهٔ «۳» *(افشین خاصه‌خان)*

تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب برابر است با $\frac{n(n-۳)}{۲}$. بنابراین داریم:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}-\frac{(n-۱)(n-۴)}{۲}=۱۰۰$$

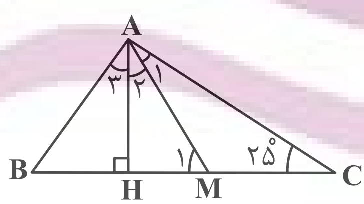
$$\Rightarrow n^۲-۳n-n^۲+۵n-۴=۲۰۰$$

$$\Rightarrow ۲n=۲۰۴\Rightarrow n=۱۰۲$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۵۵)

۱۲۳- گزینهٔ «۲» *(محمد بحیرایی)*

مطابق شکل فرض کنید AM و AH به ترتیب میانه و ارتفاع وارد بر وتر باشند. می‌دانیم طول میانهٔ وارد بر وتر، نصف طول وتر است، بنابراین داریم:



$$\overset{\Delta}{AMC}: AM=MC=\frac{۱}{۲}BC\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{C}=۲۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AMC}: \text{زاویهٔ خارجی است } \hat{M}_۱\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{A}_۱+\hat{C}=۲۵^\circ+۲۵^\circ=۵۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AHM}: \hat{H}=۹۰^\circ\Rightarrow \hat{A}_۲+\hat{M}_۱=۹۰^\circ\Rightarrow \hat{A}_۲+۵۰^\circ=۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_۲=۴۰^\circ$$

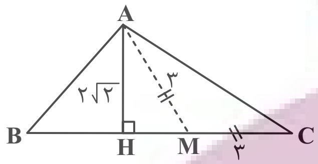
بنابراین زاویهٔ بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث، برابر ۴۰° است.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۶۰)

۱۲۴- گزینهٔ «۳» *(سامان اسپهرم)*

می‌دانیم که طول میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه، نصف طول وتر است.

پس $CM=AM=۳$ است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در $\overset{\Delta}{AHM}$، اندازهٔ HM را پیدا می‌کنیم تا اندازهٔ CH معلوم شود.



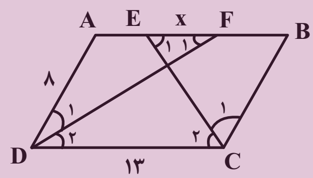
$$HM=\sqrt{۹-۸}=۱\Rightarrow CH=۳+۱=۴$$

حال در مثلث AHC از فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$AC^۲=CH^۲+AH^۲=۴^۲+(۲\sqrt{۲})^۲=۱۶+۸=۲۴\Rightarrow AC=۲\sqrt{۶}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۶۰)

۱۲۵- گزینهٔ «۲» *(علی ایمانی)*



فرض کنید $EF=x$ باشد. در این صورت داریم:

$$AB \parallel DC \text{ و مورب } DF\Rightarrow \hat{F}_۱=\hat{D}_۲\xrightarrow{\hat{D}_۱=\hat{D}_۲}\hat{F}_۱=\hat{D}_۱$$

$$\xrightarrow{\overset{\Delta}{ADF}} AF=AD=۸\Rightarrow AE=AF-EF=۸-x$$

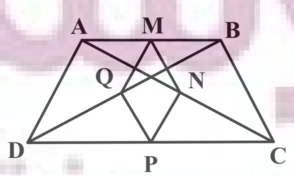
$$AB \parallel DC \text{ و مورب } CE\Rightarrow \hat{E}_۱=\hat{C}_۲\xrightarrow{\hat{C}_۱=\hat{C}_۲}\hat{E}_۱=\hat{C}_۱$$

$$\xrightarrow{\overset{\Delta}{BCE}} BE=BC=۸$$

$$AE+BE=AB\Rightarrow (۸-x)+۸=۱۳\Rightarrow x=۳$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

۱۲۶- گزینهٔ «۲» *(جواد حاتمی)*



در مثلث ABD، نقاط M و Q به‌ترتیب وسط اضلاع AB و BD هستند، پس طبق تعمیم قضیهٔ تالس، $MQ = \frac{۱}{۲}AD$ است. به دلیل مشابه به ترتیب در مثلث‌های ABC، ADC و BDC، $MN = \frac{۱}{۲}BC$، $PQ = \frac{۱}{۲}BC$ و $NP = \frac{۱}{۲}AD$ است و در نتیجه داریم:

$$\text{محیط } MNPQ = \frac{۱}{۲}AD + \frac{۱}{۲}BC + \frac{۱}{۲}AD + \frac{۱}{۲}BC$$

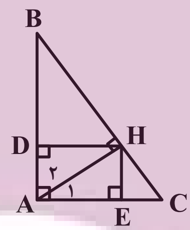
$$= AD + BC = ۳ + ۳ = ۶$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۱۲۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$\hat{A} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ \xrightarrow{\hat{C}=۵\hat{B}} ۶\hat{B} = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} = ۱۵^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۷۵^\circ$$



می‌دانیم اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، یکی از زوایای حاده برابر ۱۵° باشد، آن‌گاه طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است، بنابراین داریم:

$$\overset{\Delta}{AHB} : \hat{B} = ۱۵^\circ \Rightarrow HD = \frac{۱}{۴}AB$$

$$\overset{\Delta}{AHC} : \hat{A}_۱ = ۱۵^\circ \Rightarrow HE = \frac{۱}{۴}AC$$

چهارضلعی $ADHE$ مستطیل است. در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{ADHE}}{S_{ABC}} = \frac{HD \times HE}{\frac{۱}{۲}AB \times AC} = ۲ \times \frac{HD}{AB} \times \frac{HE}{AC} = ۲ \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۸}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۶۴)

۱۲۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

هر دو n ضلعی منتظم همواره با هم متشابه‌اند، پس دو پنج ضلعی منتظم نیز با هم متشابه‌اند و نسبت محیط‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آن‌ها مجذور نسبت تشابه است. بسته به اینکه مساحت پنج‌ضلعی منتظم بزرگتر یا کوچکتر برابر ۱۰۰ باشد، مسئله دارای دو حالت است.

$$\text{حالت اول}: \frac{S}{S'} = k^۲ \Rightarrow \frac{۱۰۰}{S'} = (\frac{۲}{۵})^۲ = \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow S' = ۶۲۵$$

$$\text{حالت دوم}: \frac{S}{S'} = k^۲ \Rightarrow \frac{S}{۱۰۰} = (\frac{۲}{۵})^۲ = \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow S = ۱۶$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۱۲۹- **گزینهٔ «۴»** *(سهام مجیدی‌پور)*

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DECB}} = \frac{۵}{۴} \xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}} \frac{S_{ABC}}{S_{ABC} - S_{DECB}} = \frac{۵}{۵-۴}$$

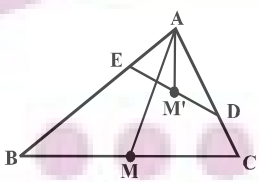
$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{۵}{۱} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow (\frac{AD}{AB})^۲ = \frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۱۳۰- **گزینهٔ «۴»** *(محسن رجبی)*

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AED}$$



پس نسبت میانه‌های AM' و AM در دو مثلث متشابه AED و ABC برابر است با نسبت تشابه، یعنی داریم:

$$\frac{AM'}{AM} = \frac{AD}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

شیمی ۱

۱۳۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

موارد «ب» و «ت» نادرست است.

با افزایش ارتفاع از سطح زمین غلظت اجزای سازندهٔ هواکره کمتر شـده و در نتیجه از مقدار فشار هوا کاسته خواهد شد.

گاز کربن مونوکسید در مقایسه با هوا، چگالی کمتری داشته و به سـرعت در محیط منتشر می‌شود.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۴۷، ۵۷ و ۵۸)

۱۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

منابع زیرزمینی هلیم بیشتر از مقدار آن در هواکره هستند.

مهم‌ترین کاربرد هلیم در خنک کردن قطعـات الکترونیکـی در دسـتگاه‌هـای تصویربرداری است.

فراوان‌ترین گاز هواکره نیتروژن است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۱)

۱۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

دمای ابتدای لایه (کلوین) $\Rightarrow T_1 = -۵۳ + ۲۷۳ = ۲۲۰K$

تغییرات دما به ازای یک کیلومتر افزایش ارتفاع $= ۱/۵K\uparrow$

$$\Delta h = \frac{\Delta T}{۱/۵} = \frac{T_۲ - T_۱}{۱/۵}$$

Δh : تغییرات ارتفاع $\quad$ ΔT : تغییرات دما

$$۴۰km = \frac{T_۲ - ۲۲۰}{۱/۵} \Rightarrow ۶۰ = T_۲ - ۲۲۰ \Rightarrow T_۲ = ۲۸۰K$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۱۳۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

موارد (الف) و (پ) درست هستند.

	تعداد اتم‌ها / بار کاتیون	ترکیب	شمار کاتیون / شمار آنیون	ترکیب
آ)	$\frac{۲}{۲} = ۱$	MgO	$\frac{۱}{۱} = ۱$	NaCl
ب)	$\frac{۲}{۱} = ۲$	KF	$\frac{۱}{۱} = ۱$	LiI
پ)	$\frac{۲}{۲} = ۱$	CuO	$\frac{۱}{۱} = ۱$	FeS
ت)	$\frac{۴}{۳}$	$AlF_۳$	$\frac{۱}{۳}$	$CrBr_۳$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۵۳ تا ۵۵)

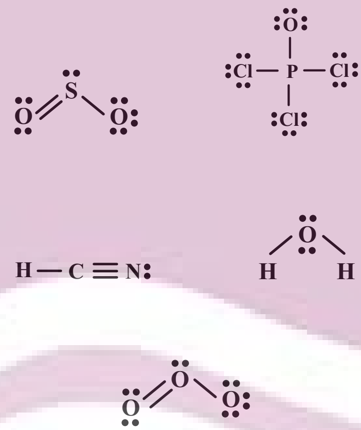
۱۳۵- **گزینهٔ «۲»** (امیر حاتمیان)

افزایش CO_2 و انحلال این گاز در آب باعث کاهش pH آب و اسیدی شدن آن می‌شود که نتیجهٔ آن از بین رفتن آبزیانی مانند مرجان‌ها است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۶۰، ۶۸ و ۶۹)

۱۳۶- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا پورجاوید)

ساختار لوویس گونه‌های داده شده عبارتند از:



بنابراین تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی در اتم مرکزی $POCl_3$ و HCN با هم برابر بوده (فاقد جفت الکترون ناپیوندی هستند) و SO_2 و O_3 نیز تعداد پیوندهای اشتراکی یکسانی دارند.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۵۳ تا ۵۵)

۱۳۷- **گزینهٔ «۱»** (محمدرضا پورجاوید)

واکنش‌های موازنه شده عبارتند از:

$$C_5H_8O_2 + 2NaH + 2HCl \rightarrow C_5H_{12}O_2 + 2NaCl$$

$$K_2Cr_2O_7 + 6FeCl_2 + 14HCl \rightarrow 2CrCl_3 + 6FeCl_3 + 2KCl + 7H_2O$$

$$4KMnO_4 + 6H_2SO_4 \rightarrow 2K_2SO_4 + 4MnSO_4 + 6H_2O + 5O_2$$

$$K_2Cr_2O_7 + 4KCl + 3H_2SO_4 \rightarrow 2CrO_2Cl_2 + 3K_2SO_4 + 3H_2O$$

با توجه به این‌که نسبت مجموع ضرایب مولی واکنش‌دهنده‌ها به فراورده‌ها در آن‌ها به ترتیب برابر با $\frac{5}{3}$، $\frac{21}{17}$، $\frac{10}{17}$ و $\frac{8}{8}$ است، این نسبت در واکنش اول بیشتر از بقیه خواهد بود.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۱۳۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

مقایسهٔ میزان CO_2 تولید شده برای تولیـد یـک کیلـووات سـاعت بـرق از منابع مختلف به صورت زیر است:

باد < گرمای زمین < انرژی خورشیدی < گاز طبیعی < نفت خام < زغال سنگ

(شیمی ۱- صفحه‌های ۶۶، ۶۷)

۱۳۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

	چوب	+	اکسیژن	→	فراورده گاز
زمان شروع واکنش $t=0$	۲۵kg		۲۷/۲ kg		۰
	۲۰/۲−		۱۶/۱−		
زمان پایان واکنش t	۴/۸kg		۱۱/۱kg		۳۶/۳kg = ۱۶/۱ + ۲۰/۲

مقدار جرم‌های کاسته شده در واکنش‌دهنده‌ها در فراورده‌ها تولید می‌شود.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۵۶، ۵۷، ۶۱ و ۶۲)

۱۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

عبارت‌های (الف)، (ب) و (ت) نادرست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) بخش کمی از پرتوهای خورشیدی به وسیلهٔ گازها به فضا برمی‌گردند.

ب) گازهای گلخانه‌ای بخشی از گرمای تابیده شده از سطح زمـین را دوبـاره بازمی‌گردانند.

ت) تعدادی از گازهای هـواکره ماننـد CO_2، CH_4 و H_2O در ایجـاد اثر گلخانه‌ای موثر هستند.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)