

ایران توشه

- رانلور نمونه سوالات امتحانی

- رانلور گام به گام

- رانلور آزمون گاج و قلم چی و سنجش

- رانلور فیلم و مقاله آنلیزشی

- رانلور و مشاوره



IranTooshe.Ir



@irantooshe



IranTooshe



۱. جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

$$(1) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (3) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

کد سوال: ۴۴۰۹-سراسری-۱۳۸۷-سخت

۲. اگر $1 = \tan \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ باشد مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

$$(1) \quad -\frac{2}{3} \quad (2) \quad -\frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{1}{3} \quad (4) \quad \frac{2}{3}$$

کد سوال: ۵۹۴۴-سراسری-۱۳۸۸-متوسط

۳. جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$ کدام است؟

$$(1) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (4) \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

کد سوال: ۶۸۴۳-سراسری-۱۳۹۰-متوسط

۴. اگر $\tan 20^\circ = 0.36$ ، حاصل $\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ کدام است؟

$$(1) \quad \frac{9}{4} \quad (2) \quad \frac{15}{8} \quad (3) \quad \frac{17}{8} \quad (4) \quad \frac{31}{16}$$

کد سوال: ۹۸۱۵-سراسری-۱۳۸۴-متوسط

۵. جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ کدام است؟

$$(1) \quad x = k\pi \quad (2) \quad x = 2k\pi + \pi \quad (3) \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (4) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

کد سوال: ۱۱۷۱۴-سراسری-۱۳۸۱-متوسط

۶. جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$ به کدام صورت است؟

$$(1) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (3) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (4) \quad x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

کد سوال: ۱۲۲۳۸-سراسری-۱۳۸۳-متوسط

۷. جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟

$$(1) \quad x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \quad (2) \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (4) \quad x = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

کد سوال: ۴۷۴۳۴-خارج از کشور-۱۳۹۱-متوسط

۸. جواب کلی معادله ی مثلثاتی $(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$ ، کدام است؟

$$(1) \quad x = k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (2) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۹. اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱ (۳) -۳ (۴) -۴

کد سوال: ۶۲۱۴۸-سراسری-۱۳۷۱-متوسط

۱۰. حاصل عبارت $\sin x \cos x (1 - 2\sin^2 x)$ به ازای $x = \frac{5\pi}{7}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{16}$

کد سوال: ۶۲۱۷۲-سراسری-۱۳۷۹-متوسط

۱۱. اگر انتهای کمان α در ناحیه‌ی اول باشد عبارت $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\tan \alpha$ (۲) $-\cot \alpha$ (۳) $\tan \alpha$ (۴) $\cot \alpha$

کد سوال: ۶۲۱۷۳-سراسری-۱۳۷۵-سخت

۱۲. اگر $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ باشد کم‌ترین مقدار $\frac{1 - \tan^2(45 - \alpha)}{1 + \tan^2(45 - \alpha)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

کد سوال: ۶۲۱۷۴-سراسری-۱۳۷۰-سخت

۱۳. حاصل $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

کد سوال: ۶۲۳۵۱-سراسری-۱۳۷۲-متوسط

۱۴. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

کد سوال: ۷۸۶۶۰-سراسری-۱۳۹۲-سخت

۱۵. اگر $\tan \alpha = 2$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) -۳

کد سوال: ۹۰۶۷۳-گزینه ۲-۱۳۹۴-متوسط

۱۶. از معادله‌ی $(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = \sin \frac{4\pi}{3}$ جواب کلی x کدام است؟

- (۱) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $x = k\pi \pm \frac{5\pi}{12}$ (۴) $x = k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$

کد سوال: ۹۱۱۷۱-گزینه ۲-۱۳۹۴-سخت

۱۷. مجموع جواب‌های معادله‌ی $\sin 3x = \cos 2x$ در فاصله‌ی $(0, \pi)$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

کد سوال: ۹۱۴۰۵-گزینه ۲-۱۳۹۴-سخت

۱۸. جواب کلی معادله‌ی $4 \sin x \cos^3 x - 4 \cos x \sin^3 x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$ کدام است؟

- (۱) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲) $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ (۴) $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{32}$

کد سوال: ۹۴۰۰۴-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۱۹. معادله‌ی $2 \sin 2x \cos 2x + \sin 3x = 0$ در بازه‌ی $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱

کد سوال: ۹۴۱۱۷-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۲۰. جواب کلی معادله‌ی $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + 3 \cos x = 1$ کدام است؟

- (۱) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

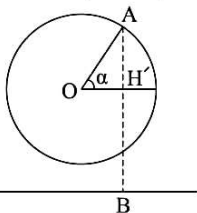
کد سوال: ۹۸۵۸۷-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۱. معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ در بازه‌ی $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

کد سوال: ۹۸۷۵۵-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۲. در شکل زیر، شخص A بر چرخ و فلکی سوار است که قطر آن ۵۰ متر و فاصله‌ی بالاترین نقطه‌ی چرخ و فلک تا زمین ۶۰ متر است، فاصله‌ی این شخص در هر لحظه تا زمین وقتی چرخ و فلک حرکت می‌کند (طول AB)، بر حسب α از کدام معادله به دست می‌آید؟



- (۱) $25 \sin \alpha + 10$ (۲) $25 \cos \alpha + 35$ (۳) $25 \sin \alpha + 35$ (۴) $25 \cos \alpha + 10$

کد سوال: ۹۸۷۹۹-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۳. اگر $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2$ باشد، حاصل $\cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{5}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{4}{1}$

کد سوال: ۹۸۸۱۴-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۴. حاصل $\cot^2 15^\circ - \tan^2 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۳) $8\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$

کد سوال: ۹۸۸۱۹-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۵. اگر $30^\circ < x < 25^\circ$ و $\cos 2x = \frac{2m-1}{2}$ ، آنگاه حدود تغییرات m کدام فاصله است؟

- (۱) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ (۲) $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (۳) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ (۴) $\left(\frac{1}{2}, \cos 50^\circ\right)$

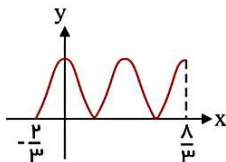
کد سوال: ۹۹۰۱۱-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۶. اگر $\tan \theta = ۲$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) $\frac{۱}{۲}$ (۳) ۲ (۴) ۳

کد سوال: ۹۹۰۳۰-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۷. شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = ۳ + a \cos(b\pi x)$ است، حاصل $(a + 2b)$ برابر با کدام گزینه می تواند باشد؟



- (۱) ۳
(۲) -۳
(۳) -۶
(۴) ۶

کد سوال: ۹۹۰۳۵-قلم چی-۱۳۹۴-سخت

۲۸. اگر انتهای کمان α , β در یک ناحیه ی مثلثاتی باشند و $\sin 2\alpha$, $\cot(-\beta) \sin \beta$ هر دو منفی باشند. آنگاه انتهای کمان های α , β در کدام ناحیه ی دایره ی مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

کد سوال: ۹۹۰۴۲-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۲۹. اگر $\tan x - \cot x = ۴$ باشد، حاصل $\sin 2x$ کدام است؟

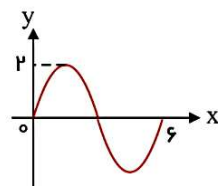
- (۱) $\pm \frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ (۴) $\pm \frac{1}{2}$

کد سوال: ۹۹۰۴۴-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط

۳۰. هر گاه $\tan ۱۵^\circ = a$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۵۵^\circ - \cos ۱۶۵^\circ}{2 \sin ۷۵^\circ + 3 \cos ۱۰۵^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1-a}{2-3a}$ (۲) $\frac{a-1}{2-3a}$ (۳) $\frac{1}{5}(a-1)$ (۴) $\frac{1}{5}(1-a)$

کد سوال: ۹۹۲۹۶-قلم چی-۱۳۹۴-متوسط



۳۱. شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

کد سوال: ۱۰۲۴۹۴-خارج از کشور-۱۳۹۳-سخت

۳۲. جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (۴) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

کد سوال: ۱۰۲۵۳۵-خارج از کشور-۱۳۹۳-متوسط

۳۳. نمودار تابع $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه ی $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

کد سوال: ۱۰۲۵۹۰-خارج از کشور-۱۳۹۱-متوسط

۳۴. حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۵^\circ + \sin ۷۰^\circ}{\cos ۵۶^\circ - \cos ۱۱^\circ}$ با فرض $\tan ۲۰^\circ = \frac{۳}{۴}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{۳}{۴}$ (۲) $\frac{۳}{۴}$ (۳) $\frac{۷}{۳}$ (۴) $\frac{۵}{۸}$

کد سوال: ۱۰۲۶۲۳-خارج از کشور-۱۳۹۴-متوسط

۳۵. اگر $\tan ۲۰^\circ = a$ ، حاصل عبارت $A = \frac{۳ \sin ۲۰^\circ + \cos ۱۶^\circ}{۵ \cos ۲۹^\circ + ۲ \sin ۲۵^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{۳a-۱}{۵a-۲}$ (۲) $\frac{۳a+۱}{-۵a+۲}$ (۳) $\frac{-۳a-۱}{-۵a+۲}$ (۴) $\frac{۳a+۱}{۵a+۲}$

کد سوال: ۱۰۸۶۷۰-گزینہ ۲-۱۳۹۵-متوسط

۳۶. اگر $\sin x = \frac{۱۲}{۱۳}$ و $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ ، مقدار $\tan \frac{x}{۲}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{۲}{۳}$ (۲) $\frac{۳}{۲}$ (۳) $\frac{۵}{۲۶}$ (۴) $\frac{۱۳}{۱۵}$

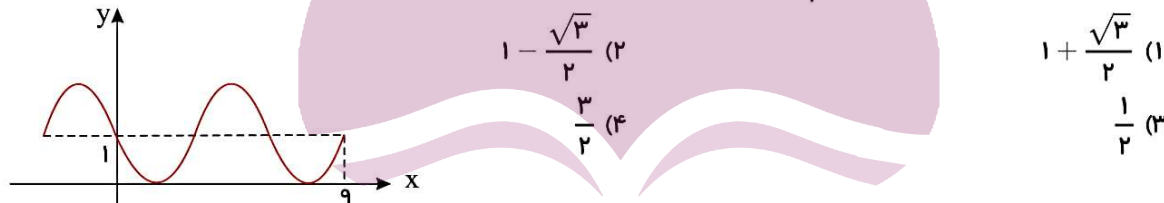
کد سوال: ۱۰۸۶۸۴-گزینہ ۲-۱۳۹۵-سخت

۳۷. اگر $a = \frac{\sin ۵۵^\circ + ۲ \cos ۲۱۵^\circ}{۳ \sin ۳۰۵^\circ - \cos ۳۲۵^\circ}$ باشد، آن گاه مقدار a کدام است؟

- (۱) $\tan ۳۵^\circ$ (۲) $\tan ۵۵^\circ$ (۳) $\frac{۱}{۴}$ (۴) $\frac{۱}{۲}$

کد سوال: ۱۱۲۷۴۷-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۳۸. نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = a + \cos(-\frac{1}{۲} + bx)\pi$ می باشد. حاصل $f(۲۹)$ کدام است؟



کد سوال: ۱۱۲۷۴۸-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۳۹. اگر $-\frac{\pi}{۶} < \alpha < \frac{\pi}{۶}$ باشد، حدود تغییرات $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{۲}, \frac{1}{۲})$ (۲) $(\frac{1}{۲}, ۱]$ (۳) $(۰, \frac{1}{۲})$ (۴) $(\frac{1}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$

کد سوال: ۱۱۲۷۴۹-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۴۰. اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{۳}$ باشد، حاصل $\cos^4 x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{۴۷}{۸۱}$ (۲) $\frac{۴۷}{۸۱}$ (۳) $\frac{۱۵}{۳۶}$ (۴) $-\frac{۱۵}{۳۶}$

کد سوال: ۱۱۲۷۵۱-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۴۱. تعداد جواب های معادله $(\sin x + \cos x)^2 = \cos^4 x$ در بازه $[۰, \pi]$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۴

کد سوال: ۱۱۲۷۸۱-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۴۲. جواب کلی معادله $1 - \sin 2x - \cos 2x + \sin 2x \cos 2x = 0$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{k\pi}{2} \\ (2) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad x = \frac{k\pi}{4} \\ (3) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x = k\pi \\ (4) \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

کد سوال: ۱۱۶۰۲۱-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۴۳. یکی از جواب‌های کلی معادله $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ (2) \quad x = k\pi - \frac{\pi}{3} \\ (3) \quad x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \\ (4) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

کد سوال: ۱۱۶۱۴۵-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۴۴. عبارت $1 + \tan 1^\circ \tan 2^\circ$ با کدام گزینه برابر است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{4}{3} \\ (2) \quad \frac{1}{\cos 1^\circ} \\ (3) \quad \frac{1}{\cos 2^\circ} \\ (4) \quad 2 \tan 4^\circ \end{aligned}$$

کد سوال: ۱۱۶۱۵۲-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۴۵. اگر $\sin 2x + \cos 2x = -\frac{1}{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad 3 \text{ یا } \frac{1}{2} \\ (2) \quad -3 \text{ یا } \frac{1}{2} \\ (3) \quad 2 \text{ یا } \frac{1}{3} \\ (4) \quad -2 \text{ یا } \frac{1}{3} \end{aligned}$$

کد سوال: ۱۱۶۱۵۴-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۴۶. اگر $\sin^4 x + \frac{1}{4} = \cos^4 x$ حاصل $\sin^4 x$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{9}{16} \\ (2) \quad \frac{1}{16} \\ (3) \quad \frac{9}{64} \\ (4) \quad \frac{25}{64} \end{aligned}$$

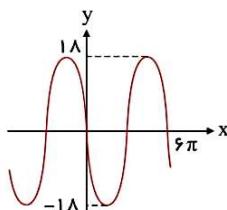
کد سوال: ۱۱۶۱۶۱-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۴۷. اگر $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل عبارت $A = \cos^8 x + \sin^8 x - 2 \sin^4 x \cos^4 x$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{9} \\ (2) \quad \frac{5}{9} \\ (3) \quad \frac{1}{81} \\ (4) \quad \frac{25}{81} \end{aligned}$$

کد سوال: ۱۱۶۲۱۷-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۴۸. نمودار تابع $f(x) = b \sin ax$ به صورت مقابل است. کمترین مقدار $a+b$ کدام است؟



$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{53}{3} \\ (2) \quad -19 \\ (3) \quad -17 \\ (4) \quad -\frac{53}{3} \end{aligned}$$

کد سوال: ۱۱۷۱۹۸-گزینه ۲-۱۳۹۵-سخت

۴۹. جواب کلی معادله $\cos^3 x + \cos^3 2x = 2$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ (2) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ (3) \quad x = 2k\pi \\ (4) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

کد سوال: ۱۱۷۲۳۴-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۵۰. جواب کلی معادله ی $\cos 4x + 2 \sin^2 x = 1$ کدام است؟

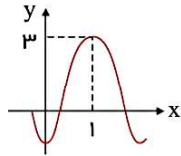
$$x = \frac{k\pi}{3} \quad (۴)$$

$$x = k\pi \quad (۳)$$

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad (۲)$$

$$x = 2k\pi \quad (۱)$$

کد سوال: ۱۱۷۶۹۲-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط



۵۱. اگر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a \cos b\pi x$ به صورت مقابل باشد، a کدام است؟

$$2 \quad (۲)$$

$$-2 \quad (۱)$$

$$-3 \quad (۴)$$

$$-1 \quad (۳)$$

کد سوال: ۱۱۸۰۲۰-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۵۲. اگر $\tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = 3$ ، حاصل $\cos^2 \alpha$ کدام است؟

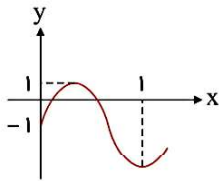
$$\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۱)$$

کد سوال: ۱۱۸۰۳۲-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط



۵۳. شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin b\pi x - 1$ است. مقدار $a + b$ کدام می تواند باشد؟

$$3 \quad (۲)$$

$$2,5 \quad (۱)$$

$$4 \quad (۴)$$

$$3,5 \quad (۳)$$

کد سوال: ۱۱۸۹۴۵-قلم چی-۱۳۹۵-سخت

۵۴. مجموعه جواب کلی معادله ی $2 \sin^2(\frac{\pi}{2} + x) - \sin x + 1 = 0$ کدام است؟

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۲)$$

$$x = 2k\pi \quad (۱)$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

کد سوال: ۱۱۸۹۹۱-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۵۵. اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2})$ کدام است؟

$$2 \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$-2 \quad (۱)$$

کد سوال: ۱۱۹۴۹۸-خارج از کشور-۱۳۹۵-متوسط

۵۶. جواب های معادله ی $1 + \sin x = (2 + \sqrt{2}) \cos^2 x$ بر روی دایره ی مثلثاتی، رئوس کدام چند ضلعی است؟

(۱) مثلث متساوی الاضلاع (۲) مثلث قائم الزاویه (۳) مثلث متساوی الساقین (۴) مثلث با زاویه بیش از 90°

کد سوال: ۱۲۱۸۱۶-گزینه ۲-۱۳۹۵-سخت

۵۷. اگر $\cot \alpha = 2$ باشد، حاصل $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^3 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$ عبارت کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{6}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{9}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

کد سوال: ۱۲۱۸۲۳-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۵۸. اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta = 50^\circ$ برابر 10 سانتی متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

$$(1) \frac{1}{50} \quad (2) \frac{1}{10} \quad (3) \frac{18}{\pi} \quad (4) \frac{36}{\pi}$$

کد سوال: ۱۲۱۸۲۷-قلم چی-۱۳۹۵-متوسط

۵۹. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x + 3\sin(\frac{\pi}{2} + x) + 2 = 0$ به کدام صورت است؟

$$(1) x = k\pi \quad (2) x = 2k\pi \quad (3) x = k\frac{\pi}{2} \quad (4) x = (2k+1)\pi$$

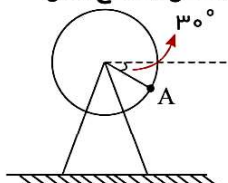
کد سوال: ۱۲۱۹۵۷-خارج از کشور-۱۳۸۴-متوسط

۶۰. مجموع تمام جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$(1) 8\pi \quad (2) 9\pi \quad (3) 10\pi \quad (4) 11\pi$$

کد سوال: ۱۲۷۰۰۱-خارج از کشور-۱۳۹۲-سخت

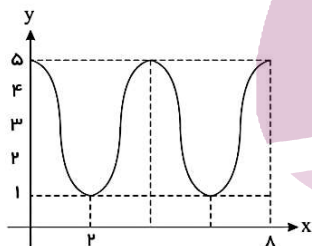
۶۱. چرخ و فلکی دایره‌ای شکل به شعاع 12 متر دارای تعدادی کابین است. مطابق شکل، کابین A در ارتفاع 18 متری از سطح زمین قرار دارد. اگر چرخ و فلک 210° حول مبدأ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند، کابین A در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار خواهد گرفت؟ (زاویه‌ی کابین A با سطح افقی 30° است.)



$$(1) 6(4 + \sqrt{3}) \quad (2) 3(7 + 2\sqrt{3}) \quad (3) 24 \quad (4) 21$$

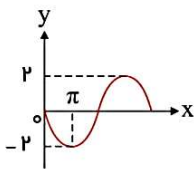
کد سوال: ۱۳۰۶۶۴-قلم چی-۱۳۹۶-سخت

۶۲. نمودار معادله‌ی $y = a \cos b\pi x + 3$ مطابق شکل زیر است؛ حاصل $a + b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟



$$(1) \frac{5}{2} \quad (2) \frac{7}{2} \quad (3) \frac{9}{2} \quad (4) 1$$

کد سوال: ۱۳۰۶۷۷-قلم چی-۱۳۹۶-سخت



۶۳. اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = b \cos(\frac{3\pi}{2} + ax)$ به صورت زیر باشد، ab کدام است؟ ($a > 0$)

$$(1) -2 \quad (2) -1 \quad (3) -\frac{3}{2} \quad (4) 1$$

کد سوال: ۱۳۲۷۴۴-قلم چی-۱۳۹۶-سخت

۶۴. نقطه‌ی $A(0, 1)$ ، روی دایره‌ی مثلثاتی به اندازه‌ی $\frac{13\pi}{4}$ رادیان در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند تا به

نقطه‌ی A' برسد. مجموع طول و عرض نقطه‌ی A' کدام است؟

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) \sqrt{2} \quad (3) -\sqrt{2} \quad (4) 2\sqrt{2}$$

کد سوال: ۱۳۲۷۴۸-قلم چی-۱۳۹۶-سخت

۶۵. حاصل $\frac{1}{\tan^2 15^\circ} - \frac{1}{\cot^2 15^\circ}$ کدام است؟

(۴) $-4\sqrt{3}$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۲) $-8\sqrt{3}$

(۱) $8\sqrt{3}$

کد سوال: ۱۳۶۳۰۸ - قلم چی - ۱۳۹۶ - متوسط

۶۶. اگر $\frac{1}{6} = \cos^4 x - \sin^4 x$ ، مقدار $\cos^4 x$ کدام است؟

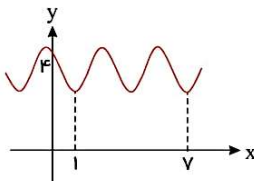
(۴) $-\frac{7}{9}$

(۳) $-\frac{5}{6}$

(۲) $-\frac{8}{9}$

(۱) $-\frac{17}{18}$

کد سوال: ۱۳۸۶۲۷ - گزینه ۲ - ۱۳۹۶ - متوسط



۶۷. شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ می باشد. حاصل ab کدام است؟

(۱) $-\frac{8}{3}$

(۲) -2

(۳) $-\frac{2}{3}$

(۴) $-\frac{4}{3}$

کد سوال: ۱۳۸۶۳۳ - گزینه ۲ - ۱۳۹۶ - متوسط

۶۸. جواب کلی معادله $1 + \cot^2 x = 2 \cot x$ کدام است؟

(۴) $x = \frac{k\pi}{4}$

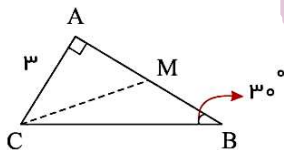
(۳) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

(۲) $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

(۱) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

کد سوال: ۱۴۲۲۱۰ - قلم چی - ۱۳۹۶ - متوسط

۶۹. در شکل زیر، $AC = 3$ ، $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{B} = 30^\circ$. اگر M وسط AB باشد، مساحت مثلث MBC کدام است؟



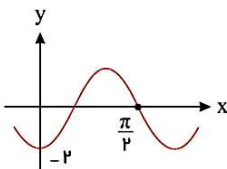
(۱) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

(۲) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$

(۴) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

کد سوال: ۱۴۵۶۹۴ - قلم چی - ۱۳۹۶ - متوسط



۷۰. شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx + \frac{\pi}{2})$ است. مقدار $f(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟

(۲) $2\sqrt{2}$

(۴) $-2\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{2}$

(۳) $-\sqrt{2}$

کد سوال: ۱۴۵۷۰۹ - قلم چی - ۱۳۹۶ - سخت

۷۱. اگر $\sin 2x = \frac{4}{5}$ ، آن گاه حاصل $\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}$ کدام می تواند باشد؟

(۴) $\frac{1}{4}$

(۳) ۴

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۲

کد سوال: ۲۰۵۶۰۰ - قلم چی - ۱۳۹۶ - سخت

۷۲. معادله‌ی $\frac{\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}}{\cos x \cos 2x} = 8$ چند جواب در فاصله‌ی $[0, \pi]$ دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

کد سوال: ۲۰۶۷۰۵-قلم چی-۱۳۹۶-سخت

۷۳. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x = \sin 2x$ به صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ است. مجموعه مقادیر i کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۱) $\{0, 1, 3\}$ (۲) $\{1, 3\}$ (۳) $\{0, 1\}$ (۴) $\{1, 2, 3\}$

کد سوال: ۲۰۶۷۰۹-قلم چی-۱۳۹۶-سخت

۷۴. اگر $\tan 2^\circ = 4$ ، حاصل عبارت $A = \frac{2 \sin 25^\circ + 3 \sin 34^\circ}{\cos 20^\circ - 4 \cos 43^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\frac{16}{13}$ (۲) $\frac{15}{13}$ (۳) $\frac{17}{13}$ (۴) $\frac{15}{26}$

کد سوال: ۲۰۹۹۱۱-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۷۵. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(\lambda \cos x + 1)(\sqrt{3} \sin x - 1) = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چقدر است؟

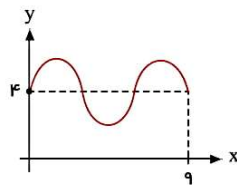
(۱) π (۲) 2π (۳) 3π (۴) 4π

کد سوال: ۲۱۷۳۲۵-گزینه ۲-۱۳۹۶-سخت

۷۶. مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $2 = (1 + \cot^2 x) \sin(\pi + 2x)$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) 2π (۲) 3π (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{13\pi}{2}$

کد سوال: ۲۲۰۰۰۶-قلم چی-۱۳۹۶-متوسط



۷۷. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 2m + \sin n\pi x$ است. مقدار mn کدام است؟

(۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

کد سوال: ۲۲۰۸۸۵-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۷۸. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ به کدام صورت است؟

(۱) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

کد سوال: ۲۲۰۹۰۷-سراسری-۱۳۸۶-متوسط

۷۹. اگر $\cot 5^\circ = a$ ، حاصل عبارت $A = \frac{3 \sin 185^\circ - 4 \cos 175^\circ}{5 \sin 275^\circ + \cos 635^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\frac{-3+4a}{-5a+1}$ (۲) $\frac{3-4a}{1-5a}$ (۳) $\frac{3-4a}{1-5a}$ (۴) $\frac{3+4a}{5a+1}$

کد سوال: ۲۲۳۶۹۰-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۸۰. اگر $f(x) = \sin^2 x - 1$ و $g(x) = x^2 + x$ ، مقدار تابع $y = g \circ f(x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{16}$ چقدر است؟

(۱) $2^{-4} - 2^{-\frac{5}{2}}$ (۲) $2^{-3} - 2^{-\frac{9}{2}}$ (۳) $2^{-3} - 2^{-\frac{7}{2}}$ (۴) $2^{-3} - 2^{-\frac{5}{2}}$

کد سوال: ۲۲۳۷۳۹-گزینه ۲-۱۳۹۶-سخت

۸۱. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x + 2\cos^2 x = 0$ ، کدام است؟

(۱) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

کد سوال: ۲۲۹۴۷۲-سراسری-۱۳۹۶-متوسط

۸۲. مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ ، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π

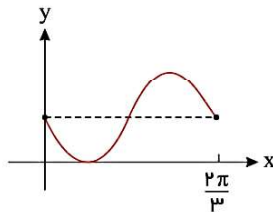
کد سوال: ۲۲۹۶۳۵-خارج از کشور-۱۳۹۶-متوسط

۸۳. اگر $\sin^4(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{1}{3} + \sin^4 x$ ، آنگاه مقدار مثبت $\tan x$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

کد سوال: ۲۳۶۱۵۱-قلم چی-۱۳۹۶-متوسط

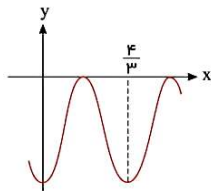
۸۴. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ی $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟



(۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

کد سوال: ۲۵۴۱۶۴-خارج از کشور-۱۳۹۶-متوسط

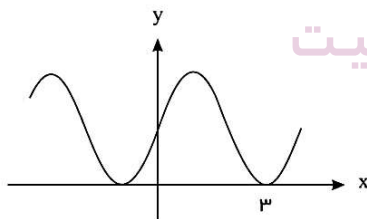
۸۵. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = -2 + a \cos \pi(1 + bx)$ است. در این صورت ab کدام می‌تواند باشد؟ ($a > 0$)



(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۵

کد سوال: ۲۶۹۳۵۰-قلم چی-۱۳۹۷-سخت

۸۶. قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \sin(b\pi x)$ به صورت زیر است، $a + b$ کدام است؟



(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

کد سوال: ۲۷۵۱۹۹-قلم چی-۱۳۹۷-سخت

۸۷. اگر $\cos^4 x = 1 + \sin^4 x$ ، آنگاه حاصل $\cos x$ کدام می‌تواند باشد؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

کد سوال: ۲۷۹۴۱۵-قلم چی-۱۳۹۷-متوسط

۸۸. حاصل $\tan^4 \frac{\pi}{8} - \cot^4 \frac{\pi}{8}$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

(۴) -۲۴

(۳) ۲۴

(۲) -۱۲

(۱) ۱۲

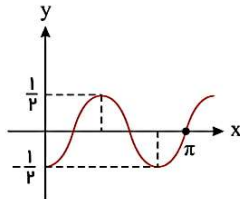
کد سوال: ۲۷۹۴۹۷-قلم چی-۱۳۹۷-سخت

۸۹. اگر $\cos x - \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{4 \sin x}$ ، حاصل $\sin 4x$ کدام است؟

(۴) $1 - \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2} - 1$ (۲) $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$

کد سوال: ۲۷۹۵۱۱-قلم چی-۱۳۹۷-سخت

۹۰. اگر نمودار تابع $f(x) = a \cos bx$ به شکل روبه‌رو باشد، کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟

(۲) $-\frac{3}{2}$

(۱) -۳

(۴) -۴

(۳) -۲

کد سوال: ۲۸۶۲۹۶-گزینه ۲-۱۳۹۷-متوسط

۹۱. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\sin x(\sin x + 1) + \cos x + \frac{\sin 2x}{2} = -\cos^2 x$ در بازه‌ی $[0, 3\pi]$ ، چند برابر π است؟

(۴) ۵٫۷۵

(۳) ۵٫۵

(۲) ۵٫۲۵

(۱) ۵

کد سوال: ۲۸۶۴۴۰-گزینه ۲-۱۳۹۷-سخت

۹۲. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(\sqrt{7} \sin x - 8)(3 \sin x + 1)(5 \cos x - 2) = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند برابر π است؟

(۴) ۴

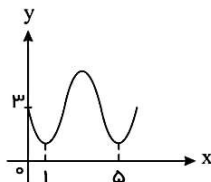
(۳) ۳

(۲) ۶

(۱) ۵

کد سوال: ۲۹۹۹۸۳-گزینه ۲-۱۳۹۷-سخت

۹۳. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟



(۱) ۲

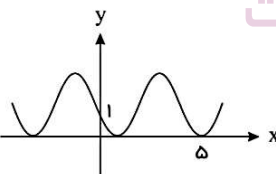
(۲) ۲٫۵

(۳) ۳

(۴) ۳٫۵

کد سوال: ۳۱۶۵۰۴-سراسری-۱۳۹۳-سخت

۹۴. قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - \cos(\pi(\frac{1}{2} + bx))$ به صورت زیر است. $a + b$ کدام است؟



(۱) صفر

(۲) ۱٫۵

(۴) ۰٫۵

(۳) ۱

کد سوال: ۳۱۷۳۴۴-قلم چی-۱۳۹۷-سخت

۹۵. اگر جواب معادله‌ی مثلثاتی $2 \cos^3 x = \cos x$ به صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر i کدام است؟

(۴) $\{1, 2\}$ (۳) $\{1, 2, 3\}$ (۲) $\{0, 1\}$ (۱) $\{1, 2, 0\}$

کد سوال: ۳۳۲۴۰۰-قلم چی-۱۳۹۷-سخت

۹۶. معادله‌ی $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - \sin 2x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

کد سوال: ۳۳۲۴۰۸-قلم چی-۱۳۹۷-سخت

۹۷. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos^4 2x - 16 \sin^4 x \cos^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ کدام است؟

- (۱) $x - \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$ (۲) $x - \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{48}$ (۳) $x - \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$ (۴) $x - k\pi \pm \frac{\pi}{12}$

کد سوال: ۳۳۸۴۴۸-گزینه ۲-۱۳۹۷-سخت

۹۸. اگر $\tan \frac{\pi}{\gamma} = \alpha$ ، حاصل عبارت $A = \frac{3 \sin \frac{8\pi}{\gamma} + 4 \cos \frac{6\pi}{\gamma}}{2 \sin \frac{13\pi}{\gamma} + \sin \frac{29\pi}{\gamma}}$ بر حسب α کدام است؟

- (۱) $\frac{4\alpha + 3}{\gamma}$ (۲) $\frac{3\alpha + 4}{2}$ (۳) $\frac{3\alpha + 4}{\alpha}$ (۴) $\frac{3\alpha - 4}{\alpha}$

کد سوال: ۳۴۱۷۲۳-گزینه ۲-۱۳۹۷-متوسط

۹۹. مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند برابر π است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

کد سوال: ۳۴۱۹۶۲-گزینه ۲-۱۳۹۷-متوسط

۱۰۰. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ ، کدام است؟

- (۱) $x = \frac{k\pi}{4}$ (۲) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ (۴) $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

کد سوال: ۳۵۱۴۵۳-سراسری-۱۳۹۷-متوسط

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

۱. گزینه ۳

$$2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cdot \sin x + 3 \frac{\cos x}{\sin x} (-\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 + 3A - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \\ A = \frac{-3-5}{4} = -2 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$A = -2 \Rightarrow \cos x = -2 \text{ امکان ندارد } (-1 \leq \cos x \leq 1)$$

۲. گزینه ۲

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

 می دانیم:

$$\tan \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$$

$$\Rightarrow -\tan \frac{\pi}{3} (-\cos x) = 1 \Rightarrow \sqrt{3} \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{1}{3} - 1 = \frac{-1}{3}$$

۳. گزینه ۳

$$\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0 \Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۴. گزینه ۳

$$\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ)} = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}$$

$$\frac{\div \cos 20^\circ}{- \tan 20^\circ + 1} = \frac{\frac{36}{100} + 1}{-\frac{36}{100} + 1} = \frac{136}{64} = \frac{17}{8}$$

۵. گزینه ۲

$$2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - A - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \\ A = -\frac{c}{a} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \pi \\ \cos x = \frac{3}{2} > 1 \text{ غ ق } (-1 \leq \cos x \leq 1) \end{cases}$$

۶. گزینه ۴

روش اول:

$$\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) \neq 0 \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) \neq 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$$

روش دوم: اگر به k صفر دهیم گزینه‌های ۱، ۲، ۳ جواب $x = \frac{\pi}{4}$ بدست می‌آید که غیر قابل قبول است (چون مخرج را صفر می‌کند)

پس گزینه‌ی ۴ جواب صحیح است.

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \text{می‌دانیم:} \quad \text{۷. گزینه ۲}$$

$$\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

۸. گزینه ۳

$$(\sin x - \tan x) \tan(\frac{3\pi}{2} - x) = \cos \frac{4\pi}{3} \Rightarrow (\sin x - \tan x) \cot x = \cos(\pi + \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow \sin x \cot x - \tan x \cot x = -\cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = -\cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۹. گزینه ۱

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\text{تک تک جملات را بر } \alpha \text{ تقسیم می‌کنیم} \quad \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5$$

۱۰. گزینه ۲

$$\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u, \quad \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a \quad \text{می‌دانیم:}$$

۱۱. گزینه ۴

$$\boxed{1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می کنیم}]{\text{در مزدوج مخرج}} \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

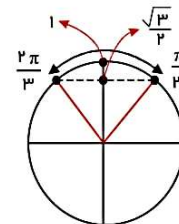
$$\text{پس: } \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

۱۲. گزینه ۴

$$\boxed{\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos 2\alpha} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\frac{1 - \tan^2(45 - \alpha)}{1 + \tan^2(45 - \alpha)} = \cos 2(45 - \alpha) = \cos(90 - 2\alpha) = \sin 2\alpha$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2\alpha \leq \frac{2\pi}{3}$$



مقدار سینوس در این بازه از $\frac{\sqrt{3}}{2}$ تا ۱ متغیر است که کمترین مقدار آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

۱۳. گزینه ۲

$$\boxed{\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

۱۴. گزینه ۴

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a} \quad \text{می دانیم}$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

توجه کنید که $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

گزینه ۴. ۱۵

$$\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha) + \sin(3\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{-\cos \alpha + \sin \alpha} \div (-\cos \alpha) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

گزینه ۳. ۱۶

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a} \text{ می دانیم:}$$

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) &= \sin \frac{4\pi}{3} \xrightarrow{\text{مزدوج}} \cos^2 x - \sin^2 x = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow \cos 2x &= -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{5\pi}{12} \end{aligned}$$

گزینه ۳. ۱۷

$$\sin 3x = \cos 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \\ 3x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - 2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(\circ, \pi)} \begin{cases} x = \frac{\pi}{10}, \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10}, \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\frac{\pi}{10}}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10}}_{\frac{9\pi}{10}} + \underbrace{\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{10}}_{\frac{9\pi}{10}} \Rightarrow \text{مجموع جواب ها} = \frac{\pi}{10} + \frac{9\pi}{10} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۳. ۱۸

$$\boxed{\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u, \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a} \text{ می دانیم:}$$

$$\begin{aligned} 4 \sin x \cos^3 x - 4 \cos x \sin^3 x &= \cos^2 2x - \sin^2 2x \\ \rightarrow \underbrace{4 \sin x \cos x}_{2 \sin 2x} \underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x} &= \underbrace{\cos^2 2x - \sin^2 2x}_{\cos 4x} \Rightarrow \underbrace{2 \sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x} = \cos 4x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin 4x = \cos 4x \xrightarrow{\div \cos 4x} \tan 4x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

$$\boxed{\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u} \text{ می دانیم:} \quad \text{گزینه ۲. ۱۹}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{2} \sin 4x}_{2 \sin 2x \cos 2x} + \sin 3x &= 0 \rightarrow \sin 4x + \sin 3x = 0 \Rightarrow \sin 4x = -\sin 3x = \sin(-3x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = -3x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7} \\ 4x = 2k\pi + \pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر صحیح k ، ریشه‌های معادله در بازه‌ی $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ برابر صفر و $\frac{2\pi}{7}$ است. پس در این بازه، دو ریشه دارد.

۲۰. گزینه ۳

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + 3\cos x = 1 \rightarrow \cos 2x + 3\cos x = 1$$

حال با کمک رابطه‌ی $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ داریم:

$$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Rightarrow (\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -2 \text{ غ ق ق } (-1 \leq \cos x \leq 1) \\ 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

دقت کنید معادله‌ی $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ را از راه Δ نیز می‌توانید حل کنید.

۲۱. گزینه ۲

$$\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \sin 2x = \sin x \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \rightarrow 2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \rightarrow 2x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

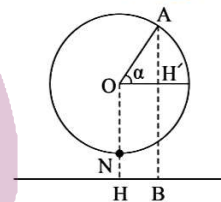
$$\begin{array}{c|cc} k & -1 & 0 \\ \hline x & -\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3} \end{array} \Rightarrow \text{بنابراین، این معادله‌ی مثلثاتی در بازه‌ی } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{، دارای ۳ جواب می‌باشد.}$$

$$OH = 60 - r = 60 - 25 = 35$$

$$\sin \alpha = \frac{AH'}{r} \Rightarrow AH' = 25 \sin \alpha$$

$$AB = AH' + H'B \stackrel{H'B=OH}{=} AH' + OH = 25 \sin \alpha + 35$$

۲۲. گزینه ۳



۲۳. گزینه ۲

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cot x \Rightarrow -\cot x = 2 \Rightarrow \cot x = -2 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5} = -0.2$$

۲۴. گزینه ۳ اول از اتحاد مزدوج و سپس از روابط $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ و $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ استفاده می‌کنیم:

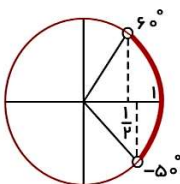
$$\cot^2 15^\circ - \tan^2 15^\circ = (\cot 15^\circ - \tan 15^\circ)(\cot 15^\circ + \tan 15^\circ) = 2 \cot 2(15^\circ) \times \frac{2}{\sin 2(15^\circ)}$$

$$= 2 \cot 30^\circ \times \frac{2}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{3} \times \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}$$

۲۵. گزینه ۱

$$-25^\circ < x < 30^\circ \Rightarrow -50^\circ < 2x < 60^\circ$$

کمانی را که $2x$ روی دایره‌ی مثلثاتی می‌پیماید مشخص می‌کنیم، با توجه به شکل داریم:



$$\tan \theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = 5$$

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} \cdot \frac{1 + \cot \theta}{1 + 1} = \frac{6}{2} = 3$$

۲۷. گزینه ۴ یادآوری: دوره‌ی تناوب تابع $y = \cos kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ است.

از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که، نمودار داده شده در بازه‌ی $[-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$ به تعداد 2.5 مرتبه تکرار شده است، لذا اگر دوره‌ی تناوب این تابع را T فرض کنیم داریم:

$$2.5T = \frac{8}{3} - (-\frac{2}{3}) \Rightarrow 2.5T = \frac{10}{3} \Rightarrow T = \frac{4}{3} \quad (1)$$

با توجه به مطلب گفته شده داریم:

$$y_1 = \cos(b\pi x) \xrightarrow{(1)} T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2} \quad (2)$$

همچنین از روی نمودار تابع مشاهده می‌کنیم که $f(-\frac{2}{3}) = 0$ است. لذا:

$$\xrightarrow{(2)} f(-\frac{2}{3}) = 3 + a \cos(\pm \frac{3}{2} \pi \times (-\frac{2}{3})) = 3 + a \cos(\pm \pi) = 3 - a = 0$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow a + 2b = 3 + 2(\pm \frac{3}{2}) \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + 2b = 6 \end{cases}$$

۲۸. گزینه ۴

$$\sin 2\alpha < 0 \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha < 0 \Rightarrow \alpha$$

(سینوس و کسینوس باید هم علامت باشند چون ضربشان مثبت شده است) ناحیه‌ی دوم یا چهارم $\in$

$$\cot(-\beta) \sin \beta < 0 \Rightarrow \frac{-\cos \beta}{\sin \beta} \sin \beta < 0 \Rightarrow \cos \beta > 0 \Rightarrow \beta \in \text{ناحیه‌ی اول یا چهارم}$$

از اشتراک جواب‌های بالا داریم:

$$\Rightarrow \alpha, \beta \in \text{ناحیه‌ی چهارم}$$

۲۹. گزینه ۳

$$\boxed{\cot a - \tan a = 2 \cot 2a} \text{ می‌دانیم:}$$

$$\tan x - \cot x = 4 \rightarrow -2 \cot 2x = 4 \rightarrow \cot 2x = -2$$

حال به کمک رابطه‌ی $1 + \cot^2 u = \frac{1}{\sin^2 u}$ ، حاصل $\sin 2x$ را می‌یابیم:

$$1 + \cot^2 2x = \frac{1}{\sin^2 2x} \xrightarrow{\cot 2x = -2} 5 = \frac{1}{\sin^2 2x} \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

۳۰. گزینه ۱

$$\frac{\cos 255^\circ - \cos 165^\circ}{2 \sin 75^\circ + 3 \cos 105^\circ} = \frac{\cos (270^\circ - 15^\circ) - \cos (180^\circ - 15^\circ)}{2 \sin (90^\circ - 15^\circ) + 3 \cos (90^\circ + 15^\circ)} = \frac{-\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{2 \cos 15^\circ - 3 \sin 15^\circ}$$

$$\frac{\div \cos 15^\circ}{2 - 3 \tan 15^\circ} = \frac{-\tan 15^\circ + 1}{2 - 3a}$$

۳۱. گزینه ۳ دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ می باشد.

$$y = a \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

باتوجه به شکل داده شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه ها مثبت می باشند پس $b = \frac{1}{3}$ قابل قبول است.

بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می باشد و بیشترین مقدار $y = a \sin(b\pi x)$ زمانی رخ می دهد که سینوس برابر ۱ باشد

$$a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

۳۲. گزینه ۴

$$\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1 \rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \xrightarrow{\sin x \neq 0 \rightarrow x \neq k\pi} \sin 3x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \rightarrow 3x = 2k\pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \rightarrow 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

چون $x \neq k\pi$ می باشد پس جواب $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ است.

۳۳. گزینه ۴ برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودار تابع $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ با محور x ها بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ کافی است

معادله $3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$ را روی بازه ی مورد نظر حل کنیم. داریم:

$$3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$

$$\xrightarrow[\text{حالت خاص}]{x=k\pi} \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow -2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}$$

حال، جواب های قابل قبول x را که در بازه ی $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ قرار دارند به دست می آوریم:

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \pi = -\frac{7\pi}{8}, \quad k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}, \quad k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$$

$$k = -2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$$

در نتیجه، پنج جواب قابل قبول وجود دارد.

۳۴. گزینه ۳

ابتدا تمام زوایا را بر حسب ۲۰° می نویسیم:

$$\sin ۲۵۰^\circ = \sin(۲۷۰^\circ - ۲۰^\circ) = -\cos ۲۰^\circ, \quad \sin ۷۰۰^\circ = \sin(۷۲۰^\circ - ۲۰^\circ) = \sin(-۲۰^\circ) = -\sin ۲۰^\circ$$

$$\cos ۵۶۰^\circ = \cos(۵۴۰^\circ + ۲۰^\circ) = \cos(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) = -\cos ۲۰^\circ, \quad \cos ۱۱۰^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۲۰^\circ) = -\sin ۲۰^\circ$$

$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\sin ۲۵۰^\circ + \sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ} = \frac{-\cos ۲۰^\circ - \sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ + \sin ۲۰^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos ۲۰^\circ$ تقسیم می کنیم در نتیجه:

$$\frac{-1 - \tan ۲۰^\circ}{-1 + \tan ۲۰^\circ} = \frac{-1 - ۰.۳۴}{-1 + ۰.۳۴} = \frac{-۱.۳۴}{-۰.۶۶} = \frac{۱۳}{۶} = \frac{۷}{۳}$$

۳۵. گزینه ۲ ابتدا سعی می کنیم زوایای داده شده را بر حسب ۲۰° بنویسیم.

$$\sin ۲۰۰^\circ = \sin(\pi + ۲۰) = -\sin ۲۰, \quad \cos ۲۹۰^\circ = \cos\left(\frac{۳\pi}{۲} + ۲۰\right) = \sin ۲۰$$

$$\cos ۱۶۰^\circ = \cos(\pi - ۲۰) = -\cos ۲۰, \quad \sin ۲۵۰^\circ = \sin\left(\frac{۳\pi}{۲} - ۲۰\right) = -\cos ۲۰$$

$$A = \frac{-۳\sin ۲۰ - \cos ۲۰}{۵\sin ۲۰ - ۲\cos ۲۰} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را بر } \cos ۲۰^\circ \text{ تقسیم می کنیم}} \frac{-۳\tan ۲۰ - ۱}{۵\tan ۲۰ - ۲} = \frac{-۳a - ۱}{۵a - ۲} = \frac{۳a + ۱}{-۵a + ۲}$$

۳۶. گزینه ۲

$$\sin ۲a = \frac{۲\tan a}{1 + \tan^2 a} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sin x = \frac{۲\tan \frac{x}{۲}}{1 + \tan^2 \frac{x}{۲}} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۳} = \frac{۲\tan \frac{x}{۲}}{1 + \tan^2 \frac{x}{۲}} \Rightarrow ۱۲\tan^2 \frac{x}{۲} - ۲۶\tan \frac{x}{۲} + ۱۲ = 0 \Rightarrow ۶\tan^2 \frac{x}{۲} - ۱۳\tan \frac{x}{۲} + ۶ = 0$$

$$\tan \frac{x}{۲} = A \Rightarrow 6A^2 - 13A + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 169 - 144 = 25$$

$$\Rightarrow \tan \frac{x}{۲} = \frac{13 \pm 5}{12} = \begin{cases} \tan \frac{x}{۲} = \frac{18}{12} = \frac{۳}{۲} & \text{ق ق} \\ \tan \frac{x}{۲} = \frac{8}{12} = \frac{۲}{۳} & \text{غ ق} \end{cases}$$

دقت کنید چون $\frac{\pi}{۴} < \frac{x}{۲} < \frac{\pi}{۲}$ می باشد حتماً $\tan \frac{x}{۲}$ از یک بزرگتر می باشد.۳۷. گزینه ۳ زوایا را بر حسب ۵۵° درجه مرتب می کنیم.

$$\sin ۳۰۵^\circ = \sin(۲\pi - ۵۵) = -\sin ۵۵, \quad \cos ۳۲۵^\circ = \cos\left(\frac{۳\pi}{۲} + ۵۵\right) = \sin ۵۵$$

$$\cos ۲۱۵^\circ = \cos\left(\frac{۳\pi}{۲} - ۵۵\right) = -\sin ۵۵$$

$$\frac{\sin ۵۵ + ۲\cos ۲۱۵}{۳\sin ۳۰۵ - \cos ۳۲۵} = \frac{\sin ۵۵ - ۲\sin ۵۵}{-۳\sin ۵۵ - \sin ۵۵} = \frac{-\sin ۵۵}{-۴\sin ۵۵} = \frac{1}{4} = a$$

۳۸. گزینه ۱

$$y = \sin ax \xrightarrow{\text{دوره ی تناوب}} T = \frac{۲\pi}{|a|} \quad \text{می دانیم:}$$

$$y = a + \cos\left(-\frac{1}{2} + bx\right)\pi \rightarrow y = a + \cos\left(\frac{-\pi}{2} + \pi bx\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\rightarrow y = a + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi bx\right) \rightarrow y = a + \sin \pi bx$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به شکل ۳}} \frac{1}{2}T = 9 \rightarrow T = 6 \rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

چون بلافاصله بعد از محور عرض، نمودار نزول پیدا می‌کند و بنابراین ضریب کمان سینوس می‌باید منفی باشد پس $b = -\frac{1}{3}$ است.

$$f(x) = a + \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right) \xrightarrow{\text{صدق ۱}} 1 = a + 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow f(x) = 1 + \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right) = 1 - \sin \frac{\pi}{3}x$$

$$\rightarrow f(29) = 1 - \sin \frac{29\pi}{3} = 1 - \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

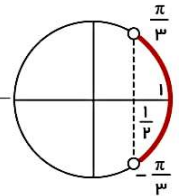
۳۹. گزینه ۲ می‌دانیم: $\cos^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\underbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}_1)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha$$

حال باید حدود $\cos^2 \alpha$ را پیدا کنیم.

$$-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{6} \rightarrow -\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{\pi}{3}$$

باتوجه به دایره‌ی مثلثاتی $\frac{1}{2} < \cos 2\alpha \leq 1$ می‌باشد.



۴۰. گزینه ۱ می‌دانیم: $(\sin a - \cos a)^2 = 1 - \sin 2a$
 $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 - \sin 2x = \frac{1}{9} \rightarrow \sin 2x = \frac{8}{9}$$

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2\left(\frac{64}{81}\right) = 1 - \frac{128}{81} = \frac{-47}{81}$$

۴۱. گزینه ۱

می‌دانیم: $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + \sin 2a$
 $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \cos 4x \rightarrow 1 + \sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$$

$$\rightarrow 2\sin^2 2x + \sin 2x = 0 \rightarrow \sin 2x(2\sin 2x + 1) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \begin{cases} \frac{x=2k\pi+\alpha}{2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}} \rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x=\frac{11\pi}{12} \\ \frac{x=2k\pi+\pi-\alpha}{2x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}} \rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x=\frac{\pi}{12} \end{cases}$$

پس معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $[0, \pi]$ دارای پنج جواب است.

۴۲. گزینه ۳

$$1 - \sin 2x - \cos 2x + \sin 2x \cos 2x = 0$$

$$\rightarrow (1 - \cos 2x) - \sin 2x(1 - \cos 2x) = 0 \rightarrow (1 - \cos 2x)(1 - \sin 2x) = 0$$

$$1 - \cos 2x = 0 \rightarrow \cos 2x = 1 \xrightarrow[\text{حالت خاص}]{x=2k\pi} 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi$$

$$1 - \sin 2x = 0 \rightarrow \sin 2x = 1 \xrightarrow[\text{حالت خاص}]{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 \end{aligned}} \quad \text{۴۳. گزینه ۳ می‌دانیم:}$$

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0 \rightarrow 1 + \sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 0$$

$$\rightarrow (\sin x + \cos x) + 2 \cos x (\sin x + \cos x) = 0 \rightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \cos x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \rightarrow \sin x = -\cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ 1 + 2 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}, \quad \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \tan 2a} \quad \text{۴۴. گزینه ۳ می‌دانیم:}$$

$$\begin{aligned} 1 + \tan 1^\circ \tan 2^\circ &= 1 + \tan 1^\circ \cdot \frac{2 \tan 1^\circ}{1 - \tan^2 1^\circ} = 1 + \frac{2 \tan^2 1^\circ}{1 - \tan^2 1^\circ} \\ &= \frac{1 - \tan^2 1^\circ + 2 \tan^2 1^\circ}{1 - \tan^2 1^\circ} = \frac{1 + \tan^2 1^\circ}{1 - \tan^2 1^\circ} = \frac{1}{\frac{1 - \tan^2 1^\circ}{1 + \tan^2 1^\circ}} = \frac{1}{\cos 2^\circ} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} \text{ و } \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}} \quad \text{۴۵. گزینه ۱ می‌دانیم:}$$

$$\sin 2x + \cos 2x = -\frac{1}{5} \rightarrow \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} + \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow{\tan x=A} \frac{2A}{1+A^2} + \frac{1-A^2}{1+A^2} = \frac{-1}{5} \rightarrow \frac{2A+1-A^2}{1+A^2} = \frac{-1}{5}$$

$$\rightarrow 10A + 5 - 5A^2 = -1 - A^2 \rightarrow 4A^2 - 10A - 6 = 0 \rightarrow 2A^2 - 5A - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49 \rightarrow A_1, A_2 = \frac{5 \pm 7}{4} = 3, -\frac{1}{2} \rightarrow \tan x = 3, -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ \cos 2a &= 1 - 2 \sin^2 a \end{aligned}} \quad \text{۴۶. گزینه ۳ می‌دانیم:}$$

$$\sin^4 x + \frac{1}{4} = \cos^4 x \rightarrow \cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{4} \rightarrow (\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \cos 2x = \frac{1}{4}$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \rightarrow \frac{1}{4} = 1 - 2 \sin^2 x \rightarrow 2 \sin^2 x = \frac{3}{4} \rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{8} \rightarrow \sin^4 x = \frac{9}{64}$$

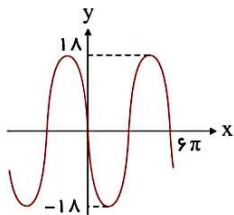
$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \quad \text{می‌دانیم: ۴۷. گزینه ۳}$$

$$\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{3} \rightarrow \sin x = \frac{2}{3}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$A = \sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 \\ = \left(\frac{16}{81} - \frac{25}{81} \right)^2 = \left(-\frac{1}{9} \right)^2 = \frac{1}{81}$$

۴۸. گزینه ۴



در توابع $y = b \sin ax$ و $y = b \cos ax$ دوره‌ی تناوب برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ ، ماکسیمم برابر $|b|$ و مینیمم برابر $-|b|$ است.

با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر 6π و ماکسیمم آن برابر ۱۸ است. پس با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{|a|} = 6\pi \rightarrow |a| = \frac{1}{3} \rightarrow a = \pm \frac{1}{3} \\ |b| = 18 \rightarrow b = \pm 18 \end{cases}$$

چون نمودار در همسایگی مبدأ نزولی است، پس دقیقاً یکی از a یا b منفی و دیگری مثبت است.

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \rightarrow a + b = -\frac{53}{3} \\ b = -18 \end{cases}, \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \rightarrow a + b = \frac{53}{3} \\ b = 18 \end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار $a + b$ برابر $-\frac{53}{3}$ است.

۴۹. گزینه ۳ با توجه به آنکه $-1 \leq \cos u \leq 1$ است از معادله‌ی داده شده، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \\ \cos 2x = 1 \xrightarrow[\substack{\text{حالت خاص} \\ x=2k\pi}]{2x=2k\pi \rightarrow x=k\pi} \end{cases}$$

بنابراین جواب کلی این معادله، $x = 2k\pi$ است. (جواب‌های حاصل از $x = k\pi$ در $x = 2k\pi$ وجود دارند)

۵۰. گزینه ۴

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\cos 4x + 2 \sin^2 x = 1 \rightarrow \cos 4x = 1 - 2 \sin^2 x \rightarrow \cos 4x = \cos 2x$$

$$x = 2k\pi \pm \alpha \rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + 2x \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi \\ 4x = 2k\pi - 2x \rightarrow 6x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

دقت کنید که جواب‌های $x = k\pi$ همگی در $x = \frac{k\pi}{3}$ قرار دارند بنابراین جواب کلی معادله $x = \frac{k\pi}{3}$ است.

۵۱. گزینه ۱ چون فاصله‌ی طولی بین کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار روی نمودار برابر یک است پس دوره‌ی تناوب تابع برابر ۲ است:

$$T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow y = 1 + a \cdot \cos(\pm \pi x) = 1 + a \cdot \cos \pi x$$

از طرفی $f(1) = 3$ ، بنابراین داریم:

$$3 = 1 + a \cos(\pi(1)) \Rightarrow 3 = 1 + a \cos(\pi) \Rightarrow 3 = 1 + a(-1) \Rightarrow a = -2$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a, \tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a} \quad \text{می‌دانیم: ۵۲. گزینه ۲}$$

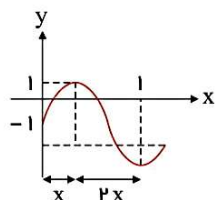
$$\tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = 3 \rightarrow \frac{2}{\sin \alpha} = 3 \rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{4}{9}\right) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$y = \sin ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} \quad \text{می دانیم:} \quad \text{۵۳. گزینه ۳}$$

نکته: در منحنی های متناوب دو برابر فاصله ی طولی ماکسیمم و مینیمم، طول دوره ی تناوب آن تابع است.

باتوجه به شکل دوره ی تناوب تابع برابر $4x$ می باشد. $3x = 1$ است، پس $x = \frac{1}{3}$ به دست می آید. بنابراین دوره ی



تناوب تابع $T = 4x = \frac{4}{3}$ خواهد بود. از ضابطه ی تابع دوره ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b\pi|}$ به دست می آید:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ \text{یا} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

اگر $b = \frac{3}{2}$ باشد، مقدار تابع در $x = \frac{1}{3}$ برابر ۱ است بنابراین همین عدد برای b صحیح است.

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = a \sin \frac{\pi}{2} - 1 = 1 \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow a + b = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$$

توجه کنید که اگر $b = -\frac{3}{2}$ باشد به طور مشابه $a = -2$ به دست می آید که $a + b = -\frac{7}{2}$ می شود که در گزینه ها نیست.

۵۴. گزینه ۲

$$2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin x + 1 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - \sin x + 1 = 0$$

$$\rightarrow 2(1 - \sin^2 x) - \sin x + 1 = 0 \rightarrow 2 - 2 \sin^2 x - \sin x + 1 = 0$$

$$\rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 3 = 0 \xrightarrow{\sin x = A} 2A^2 + A - 3 = 0$$

$$a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} A=1 \rightarrow \sin x=1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ A=\frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \rightarrow \sin x = -\frac{3}{2} \quad (-1 \leq \sin x \leq 1) \quad \text{امکان ندارد} \end{cases}$$

۵۵. گزینه ۱

$$\begin{aligned} 1 + \cos u &= 2 \cos^2 \frac{u}{2} \\ \sin u &= 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \end{aligned} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

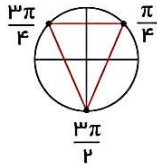
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$1 + \sin x = (2 + \sqrt{2}) \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x = (2 + \sqrt{2})(1 - \sin^2 x) \rightarrow 1 + \sin x = (2 + \sqrt{2})(1 + \sin x)(1 - \sin x)$$

$$\rightarrow (1 + \sin x) - (2 + \sqrt{2})(1 + \sin x)(1 - \sin x) = 0 \Rightarrow \underbrace{(1 + \sin x)}_{\text{فاکتور}} ((2 + \sqrt{2})(1 - \sin x) - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ 1 - \sin x = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow 1 - \sin x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$



جواب ها بر روی دایره ی مثلثاتی، رئوس مثلث متساوی الساقین هستند.

۵۷. گزینه ۲ باتوجه به $\cot \alpha = 2$ یک رابطه بین $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ بدست می آوریم.

$$\cot \alpha = 2 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \xrightarrow{\sin \alpha \neq 0} \cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

حال در صورت تست، به جای تمام $\cos \alpha$ ها، مساوی آن یعنی $2 \sin \alpha$ را قرار می دهیم.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^4 \alpha + \cos^3 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} &= \frac{\sin^4 \alpha + (2 \sin \alpha)^3 \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha (2 \sin \alpha)^2} \\ &= \frac{\sin^4 \alpha + 8 \sin^4 \alpha}{4 \sin^2 \alpha \times 4 \sin^2 \alpha} = \frac{9 \sin^4 \alpha}{16 \sin^4 \alpha} = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

۵۸. گزینه ۳ ابتدا زاویه را از درجه به رادیان تبدیل می کنیم.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{50}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{18}$$

$$\text{شعاع دایره: } \theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{5\pi}{18} = \frac{10}{r} \Rightarrow r\pi = 36 \Rightarrow r = \frac{36}{\pi}$$

$$\left. \begin{aligned} S = \text{مساحت دایره} &= \pi r^2 \\ P = \text{محیط دایره} &= 2\pi r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S}{P} = \frac{r}{2} = \frac{\frac{36}{\pi}}{2} = \frac{18}{\pi}$$

۵۹. گزینه ۴

$$\cos^2 x + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0 \rightarrow \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} A^2 + 3A + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \text{حالت خاص} \\ A = -1 \rightarrow \cos x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \\ A = -\frac{c}{a} = -2 \rightarrow \cos x = -2 \quad (-1 \leq \cos x \leq 1) \text{ امکان ندارد} \end{cases}$$

۶۰. گزینه ۴

$$\sin \Delta x + \sin 4x = 1 + \underbrace{\cos \pi}_{-1} \rightarrow \sin \Delta x = -\sin 4x \rightarrow \sin \Delta x = \sin(-4x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \rightarrow \Delta x=2k\pi-4x \rightarrow 9x=2k\pi \rightarrow x=\frac{2k\pi}{9} \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \rightarrow \Delta x=2k\pi+\pi+4x \rightarrow x=2k\pi+\pi \end{cases}$$

$$x=\frac{2k\pi}{9} \rightarrow \begin{array}{c|ccccccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 \\ \hline x & 0 & \frac{2\pi}{9} & \frac{4\pi}{9} & \frac{6\pi}{9} & \frac{8\pi}{9} & \dots & 2\pi \end{array}$$

$$x=2k\pi+\pi \rightarrow \begin{array}{c|cc} k & 0 & 1 \\ \hline x & \pi & 2\pi \end{array}$$

$$\text{مجموع جواب ها} = \frac{2\pi+4\pi+6\pi+\dots+18\pi}{9} + \underbrace{\pi}_{\text{جدول پایین}}$$

$$= \frac{(2+4+6+\dots+18)\pi}{9} + \pi = \frac{90\pi}{9} + \pi = 10\pi + \pi = 11\pi$$

دقت کنید که $2+4+6+\dots+2n=n(n+1)$ است روی همین اصل داریم:

$$2+4+6+\dots+18=9(9+1)=90$$

۶۱. گزینه ۱ بعد از دوران 210° کابین A در موقعیت شکل زیر قرار می گیرد. با توجه به شکل:

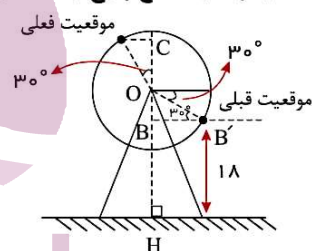
$$A \text{ ارتفاع فعلی کابین } = OC + OB + BH$$

حال باتوجه به شعاع چرخ و فلک طول OB و OC را می یابیم:

$$\cos 30^\circ = \frac{OC}{R} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OC}{12} \rightarrow OC = 6\sqrt{3}$$

$$\Delta OBB' \quad \sin 30^\circ = \frac{OB}{R} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OB}{12} \rightarrow OB = 6$$

$$\Rightarrow A \text{ ارتفاع فعلی کابین } = 6\sqrt{3} + 6 + 18 = 24 + 6\sqrt{3} = 6(4 + \sqrt{3})$$



۶۲. گزینه ۱

$$\left| \begin{array}{c} 0 \\ \Delta \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق در}} \Delta = a(1) + 3 \rightarrow a + 3 = \Delta \Rightarrow a = 2$$

طبق نمودار فاصله ی $x=0$ تا $x=2$ برابر نصف دورهی تناوب تابع مورد نظر است:

$$2-0 = \frac{T}{2} \Rightarrow T=4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \end{cases} \text{ در گزینه ها نیست}$$

دورهی تناوب تابع $y=\sin x$ برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ است.

۶۳. گزینه ۲ می دانیم $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$ بنابراین $y=b \sin ax$ است.

از طرفی دورهی تناوب تابع $f(x)=b \sin ax$ به صورت $\frac{2\pi}{|a|}$ می باشد.

همچنین از روی نمودار تابع دورهی تناوب تابع برابر است با 4π در نتیجه:

$$\frac{2\pi}{|a|} = 4\pi \rightarrow |a| = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{2}$$

با توجه به نمودار $f(\pi) = -2$ می باشد.

$$f(\pi) = b \sin a\pi \stackrel{a=\frac{1}{2}}{=} b \sin \frac{\pi}{2} = b = -2 \rightarrow ab = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

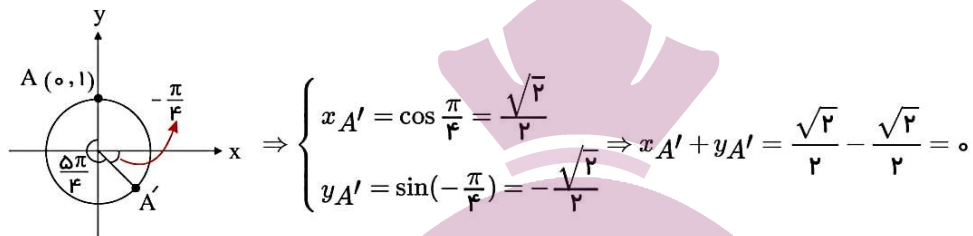
۶۴. گزینه ۱ اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، علامت زاویه مثبت است، پس زاویه ی دوران برابر است با:

$$\frac{13\pi}{4} = 2\pi + \frac{5\pi}{4}$$

با دوران به اندازه ی 2π ، نقطه ی A به موقعیت اولیه ی خود باز می گردد، پس کافیت نقطه ی A را در خلاف جهت حرکت عقربه های

ساعت به اندازه ی $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$ دوران دهیم تا نقطه ی A' به دست آید.

مطابق شکل داریم:



$$\cot a - \tan a = 2 \cot a, \cot a + \tan a = \frac{2}{\sin 2a} \quad \text{۶۵. گزینه ۱ می دانیم:}$$

$$\frac{1}{\tan^2 15^\circ} - \frac{1}{\cot^2 15^\circ} = \cot^2 15^\circ - \tan^2 15^\circ = (\cot 15^\circ + \tan 15^\circ)(\cot 15^\circ - \tan 15^\circ)$$

$$= \left(\frac{2}{\sin 30^\circ}\right) \left(2 \cot 30^\circ\right) = \left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right) \left(2\sqrt{3}\right) = 8\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha &= \cos 2\alpha \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 \end{aligned} \quad \text{۶۶. گزینه ۱ می دانیم:}$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{6} \rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{6} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{6}$$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \rightarrow \cos 4x = 2\left(\frac{1}{36}\right) - 1 = \frac{1}{18} - 1 = -\frac{17}{18}$$

۶۷. گزینه ۱ نمودار تابع از نقطه ی $\frac{\pi}{4}$ می گذرد پس این نقطه در تابع صدق می کند.

$$\left| \begin{array}{c} \text{صدق} \\ 0 \\ 4 \end{array} \right. \rightarrow 4 = a + \sin 0 \rightarrow a = 4$$

باتوجه به شکل، فاصله ی ۱ تا ۷ دو برابر دوره ی تناوب است و می دانیم دوره ی تناوب تابع $y = k \sin ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

$$2T = 7 - 1 \rightarrow 2T = 6 \rightarrow T = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|} \rightarrow 3 = \frac{2\pi}{|b\pi|} \rightarrow 3 = \frac{2}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{2}{3} \rightarrow b = \pm \frac{2}{3}$$

چون نمودار تابع در $x = 0$ نزولی است پس فقط $b = -\frac{2}{3}$ قابل قبول است.

$$ab = (4)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3}$$

$$2 \cot 2a = \cot a - \tan a \quad \text{۶۸. گزینه ۲ می دانیم:}$$

$$2 \cot 2x = 1 + \cot x \rightarrow \cot x - \tan x = 1 + \cot x \rightarrow \tan x = -1 = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

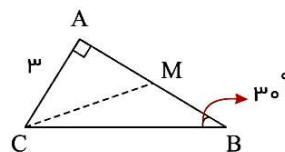
$$\frac{x=k\pi+\alpha}{\rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}}$$

۶۹. گزینه ۴ ضلع روبرو به زاویه ی 30° نصف وتر است $\leftarrow BC = 6$

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2}(6) = 3\sqrt{3} \leftarrow \text{وتر است } \frac{\sqrt{3}}{2}, (\hat{C}) 60^\circ \text{ ضلع روبرو به زاویه ی } 60^\circ$$

$$\text{از طرفی: } MB = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2} MB \times BC \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) (6) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{18\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$



۷۰. گزینه ۳

$$f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + bx\right) \xrightarrow{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha} f(x) = a \cos bx$$

نمودار تابع از نقطه ی $\left| -\frac{\pi}{2} \right|$ عبور می کند بنابراین این نقطه در تابع صدق می کند.

$$\left| -\frac{\pi}{2} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = a \cos 0 \rightarrow a = -2 \rightarrow f(x) = -2 \cos bx$$

می دانیم دوره ی تناوب $y = \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است و از روی نمودار داریم:

$$\frac{3T}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow T = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = \pm 3$$

$$\text{پس: } f(x) = -2 \cos(\pm 3x) \xrightarrow{\cos(-\alpha) = \cos \alpha} f(x) = -2 \cos 3x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2 \cos \frac{\pi}{4} = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

۷۱. گزینه ۳

$$\cot a - \tan a = 2 \cot 2a, \sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sin 2x = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{4}{5} \rightarrow 4 + 4 \tan^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\rightarrow 4 \tan^2 x - 1 + \tan x + 4 = 0 \rightarrow 4 \tan^2 x - 5 \tan x + 9 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9 \rightarrow \tan x = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$= 2, \frac{1}{2}$$

$$\text{پس: } \begin{cases} \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2 \cot x = 2\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \frac{\tan x = 2}{\tan x} \\ \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2 \cot x = 2\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \frac{\tan x = \frac{1}{2}}{\tan x} \end{cases}$$

$$\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}, \sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \quad \text{۷۲. گزینه ۳ می دانیم:}$$

$$\frac{\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}}{\cos x \cos 2x} = 1 \rightarrow \frac{\frac{2}{\sin x}}{\cos x \cos 2x} = 1 \rightarrow \frac{2}{\underbrace{\sin x \cos x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 2x}} = 1 \rightarrow \frac{2}{\frac{1}{2} \underbrace{\sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x}} = 1$$

$$\rightarrow \frac{2}{\frac{1}{2} \sin 4x} = 1 \rightarrow \frac{4}{\sin 4x} = 1 \rightarrow \sin 4x = 4 \xrightarrow[\text{حالت خاص}]{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k=0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ k=1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \rightarrow \text{معادله در بازه ی } [0, \pi] \text{ دارای دو جواب است.}$$

۷۳. گزینه ۱ می‌دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$$\tan x = \sin 2x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x \rightarrow \sin x = 2 \sin x \cos^2 x$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos^2 x - \sin x = 0 \rightarrow \sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=k\pi \pm \alpha} x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{x=k\pi \pm \alpha} x = k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ به صورت $x = k\pi$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ و $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ هستند.

بنابراین مجموعه‌ی مقادیر i به صورت $\{0, 1, 3\}$ است.

۷۴. گزینه ۱

$$\frac{2 \sin 25^\circ + 3 \sin 34^\circ}{\cos 20^\circ - 4 \cos 43^\circ} = \frac{2 \sin(27^\circ - 2^\circ) + 3 \sin(36^\circ - 2^\circ)}{\cos(18^\circ + 2^\circ) - 4 \cos(36^\circ + 7^\circ)}$$

$$= \frac{-2 \cos 2^\circ - 3 \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ - 4 \cos 7^\circ} = \frac{-2 \cos 2^\circ - 3 \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ - 4 \sin 2^\circ}$$

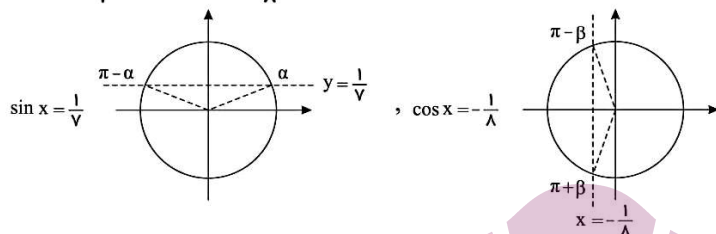
$$\div \cos 2^\circ = \frac{-2 - 3 \tan 2^\circ}{-1 - 4 \tan 2^\circ} = \frac{-2 - 3(0.4)}{-1 - 4(0.4)} = \frac{-3.2}{-2.6} = \frac{32}{26} = \frac{16}{13}$$

۷۵. گزینه ۳ می‌دانیم که اگر $\sin x = \sin \alpha$ باشد آن گاه $\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$ است و اگر $\cos x = \cos \alpha$ باشد آن گاه

$x = 2k\pi \pm \alpha$ است.

$$(\sqrt{3} \sin x - 1)(\lambda \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \lambda \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos x = -\frac{1}{\lambda}$$



پس مجموع ریشه‌های معادله‌ی مورد نظر برابر است با: $\alpha + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi + \beta) = 3\pi$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \text{۷۶. گزینه ۳ می‌دانیم:}$$

$$(1 + \cot^2 x) \sin(\pi + 2x) = 2 \rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} (-\sin 2x) = 2$$

$$\rightarrow 2 \sin^2 x = -\sin 2x \rightarrow 2 \sin^2 x = -2 \sin x \cos x$$

$$\rightarrow 2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 0 \rightarrow 2 \sin x (\sin x + \cos x) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2 \sin x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \quad (\text{غ ق ق (مخرج را صفر می‌کند)} \\ \sin x + \cos x = 0 \rightarrow \sin x = -\cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = -1 = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\text{بنابراین مجموع جواب‌ها } \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{5\pi}{2} \text{ است.}$$

$$\text{۷۷. گزینه ۴ می‌دانیم که دوره‌ی تناوب تابع } y = k \sin ax \text{ برابر } T = \frac{2\pi}{|a|} \text{ است.}$$

$$\text{باتوجه به شکل: } \begin{cases} f(0) = 4 \rightarrow 2m = 4 \rightarrow m = 2 \\ T + \frac{T}{2} = 9 \rightarrow 2T + T = 18 \rightarrow 3T = 18 \rightarrow T = 6 \end{cases}$$

$$T = 6 \rightarrow \frac{2\pi}{|n\pi|} = 6 \rightarrow \frac{2}{|n|} = 6 \rightarrow |n| = \frac{1}{3} \rightarrow n = \pm \frac{1}{3}$$

چون نمودار در همسایگی $x = 0$ صعودی است پس فقط $n = \frac{1}{3}$ قابل قبول است بنابراین $mn = \frac{2}{3}$ است.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{۷۸. گزینه ۴ می‌دانیم:}$$

$$2 \sin^2 x = 3 \cos x \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x \rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 + 3A - 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = \frac{-3-5}{4} = -2. \text{ امکان ندارد زیرا } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ است.} \end{cases}$$

۷۹. گزینه ۱ سعی کنید تمام زوایا را برحسب 5° بنویسید.

$$A = \frac{3 \sin 185^\circ - 4 \cos 175^\circ}{5 \sin 275^\circ + \cos 635^\circ} = \frac{3 \sin(180^\circ + 5^\circ) - 4 \cos(180^\circ - 5^\circ)}{5 \sin(270^\circ + 5^\circ) + \cos(360^\circ + 275^\circ + 5^\circ)}$$

$$3 \sin 5^\circ + 4 \cos 5^\circ : \sin 5^\circ = 3 + 4 \cot 5^\circ \quad 3 + 4 \cot 5^\circ$$

۸۰. گزینه ۳ می‌دانیم:

$$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha, \quad 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha, \quad \sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a, \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$y = g \circ f(x) = g(f(x)) = \underbrace{(\sin^2 x - 1)}_{-\cos^2 x} + \sin^2 x - 1 = \cos^2 x - \cos^2 x$$

$$\rightarrow y = \cos^2 x \underbrace{(\cos^2 x - 1)}_{-\sin^2 x} = -\sin^2 x \cos^2 x = -(\sin x \cos x)^2 = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{4} \sin^2 2x = -\frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = -\frac{1}{8} (1 - \cos 4x)$$

$$\rightarrow y\left(\frac{\pi}{16}\right) = -\frac{1}{8} (1 - \cos \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{8} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{-1}{8} + \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^4} = -2^{-3} + 2^{-\frac{7}{2}}$$

۸۱. گزینه ۳ می‌دانیم:

$$1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$$

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \rightarrow 2 \cos 2x = -1 \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

۸۲. گزینه ۴ می‌دانیم:

$$\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \rightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حال خاص}} x = k\pi \xrightarrow{k=0,1,2} x = 0, \pi, 2\pi \\ 2 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=0} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $\frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$ است.

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a, \quad \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

۸۳. گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{3} + \sin^2 x \xrightarrow{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x} \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{3} \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{3}$$

$$\text{از طرفی: } \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \rightarrow 1 + \tan^2 x = 3 - 3 \tan^2 x$$

$$\rightarrow 4 \tan^2 x = 2 \rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{مقدار مثبت}} \tan x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۸۴. گزینه ۴ می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع $y = a \sin bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره‌ی تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{3}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = 3, m = -3$$

از طرفی تابع در همسایگی راست $x = 0$ نزولی است پس $m > 0$ است یعنی $m = 3$ قابل قبول است.

$$y = 1 - \sin 3x \rightarrow y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 - \sin \frac{21\pi}{6} = 1 - \sin \frac{7\pi}{2} = 1 - \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ = 1 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

۸۵. گزینه ۲ می‌دانیم $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ است.

$$f(x) = -2 + a \cos(\pi + \pi bx) \rightarrow f(x) = -2 - a \cos(\pi bx)$$

$$-1 \leq \cos(\pi bx) \leq 1 \xrightarrow{a > 0} -a \leq a \cos(\pi bx) \leq a$$

منفی ضرب می‌کنیم

$$\rightarrow -a \leq -a \cos(\pi bx) \leq a \rightarrow -2 - a \leq -2 - a \cos(\pi bx) \leq -2 + a$$

بیشترین مقدار تابع از روی شکل برابر صفر است یعنی $-2 + a = 0$ است یعنی $a = 2$ می‌باشد پس $f(x) = -2 - 2 \cos(\pi bx)$ است.

با توجه به نمودار داده شده دوره‌ی تناوب تابع برابر $T = \frac{4}{3}$ است و می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع $y = a \cos bx$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{4}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{3}{2} \rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

بنابراین $a \times b = \pm 3$ است.

۸۶. گزینه ۳ اولاً چون مقادیر تابع از نقطه‌ی $x = 0$ در حال افزایش است، بنابراین $b > 0$. از طرفی کم‌ترین مقدار تابع صفر است.

در نتیجه:

$$-1 \leq \sin b\pi x \leq 1 \Rightarrow a - 1 \leq a + \sin b\pi x \leq a + 1 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

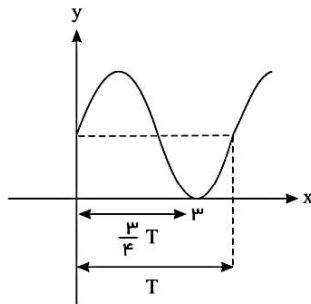
از طرفی با توجه به شکل $T = 3$ و در نتیجه $T = 4$ است.

دوره‌ی تناوب $y = \sin bx$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{1}{2}$$

پس $a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ است.

به شکل دقت کنید:



۸۷. گزینه ۲ می‌دانیم: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$

$$\cos^4 x = 1 + \sin^4 x \rightarrow \cos^4 x - \sin^4 x = 1 \rightarrow (\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \rightarrow \cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow 1 = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow 2\cos^2 x = 2 \rightarrow \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1$$

۸۸. گزینه ۴ می‌دانیم: $\cot a + \tan a = \frac{2}{\sin 2a}$, $\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$, $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$\begin{aligned} \tan^4 \frac{\pi}{4} - \cot^4 \frac{\pi}{4} &= (\tan^2 \frac{\pi}{4} + \cot^2 \frac{\pi}{4})(\tan^2 \frac{\pi}{4} - \cot^2 \frac{\pi}{4}) \\ &= ((\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4})^2 - 2 \tan \frac{\pi}{4} \cot \frac{\pi}{4})(\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4})(\tan \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

$$= ((\frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}})^2 - 2)(\frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}})(-2 \cot \frac{\pi}{4})$$

$$= ((\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}})^2 - 2)(\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}})(-2(1)) = (6)(\frac{4}{\sqrt{2}})(-2) = \frac{-48}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -24\sqrt{2}$$

که جواب حاصل ۲۴- برابر $\sqrt{2}$ است.

۸۹. گزینه ۱ می‌دانیم: $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$, $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

$$\cos x - \sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2 \sin x} \rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x - (\frac{1 - \cos 2x}{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \times 2 \rightarrow \sin 2x - 1 + \cos 2x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}_1 + \underbrace{2 \sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x} = 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

$$\rightarrow 1 + \sin 4x = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

۹۰. گزینه ۱ توجه کنید دوره‌ی تناوب تابع $y = \cos kx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|k|}$ است.

$$f(0) = \frac{-1}{2} \rightarrow a \cos 0 = -\frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

اگر دوره‌ی تناوب تابع را T بنامیم در این صورت $T + \frac{T}{4} = \pi$ است پس $T = \frac{4\pi}{5}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{4\pi}{5} \rightarrow |b| = \frac{5}{2} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{2} \xrightarrow{a = -\frac{1}{2}} a + b = 2 \\ b = -\frac{5}{2} \xrightarrow{a = -\frac{1}{2}} a + b = -3 \end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار $a + b$ برابر ۳- است.

۹۱. گزینه ۳ می‌دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$$\sin x(\sin x + 1) + \cos x + \frac{\sin 2x}{2} = -\cos^2 x$$

$$\rightarrow \sin^2 x + \sin x + \cos x + \frac{2 \sin x \cos x}{2} + \cos^2 x = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \sin x + \cos x + \sin x \cos x} + \underbrace{\cos^2 x} = 0$$

$$\rightarrow 1 + \sin x + \underbrace{\cos x + \sin x \cos x} = 0 \rightarrow \underbrace{1 + \sin x + \cos x(1 + \sin x)} = 0$$

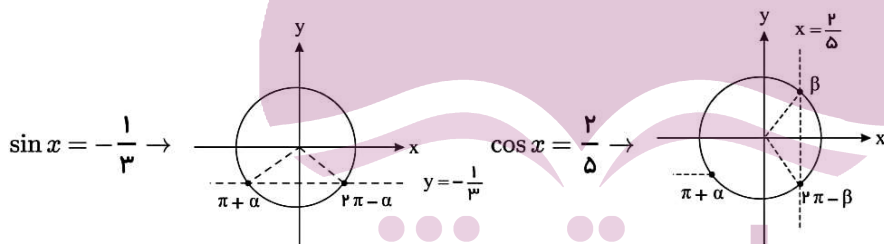
$$\rightarrow (1 + \sin x)(1 + \cos x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \xrightarrow{x \in [0, 3\pi]} x = \frac{3\pi}{2} \\ \cos x = -1 \xrightarrow{x \in [0, 3\pi]} x = \pi, 3\pi \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها در بازه‌ی خواسته شده} = \frac{3\pi}{2} + \pi + 3\pi = \frac{11\pi}{2} = 5,5\pi$$

۹۲. گزینه ۱

$$\begin{cases} \forall \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{5} > 1 \text{ غ ق} \\ 3 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{3} \\ 5 \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

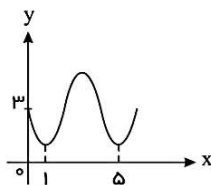
$$(\forall \sin x - 1)(3 \sin x + 1)(5 \cos x - 2) = 0 \Rightarrow$$

پس مجموع ریشه‌های این معادله در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابر است با:

$$(\pi + \alpha) + (2\pi - \alpha) + \beta + (2\pi - \beta) = 5\pi$$

۹۳. گزینه ۲

با توجه به شکل روبه‌رو به راحتی پی می‌بریم که دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ برابر $T = 4$ می‌باشد. از طرفی عرض از مبدأ این تابع برابر ۳ است یعنی: $f(0) = 3 \rightarrow a = 3$

توجه کنید دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|k|}$ است.

$$y = a + \sin\left(\frac{b\pi}{k}x\right) \Rightarrow \text{دوره‌ی تناوب} = T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \xrightarrow{T=4} \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون به ازای $x > 0$ ، تابع ابتدا نزولی می‌باشد، پس مقدار b منفی می‌باشد، یعنی $b = -\frac{1}{2}$ است. داریم:

$$y = 3 + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi x\right)$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{25}{3}\right) = 3 + \sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right) = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin\frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

۹۴. گزینه ۴ ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر کنیم:

$$f(x) = a - \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a + \sin b\pi x$$

با توجه به نمودار، نقطه‌ی $(0, 1)$ روی نمودار قرار دارد:

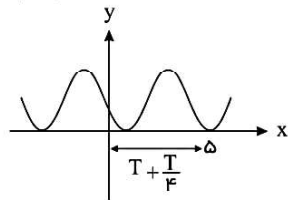
$$f(0) = 1 \Rightarrow a + \sin 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی مطابق شکل زیر، دوره‌ی تناوب تابع را می‌یابیم:

$$T + \frac{T}{4} = 5 \Rightarrow \frac{5}{4}T = 5 \Rightarrow T = 4$$

دوره تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|a|}$ بدست می‌آید.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$



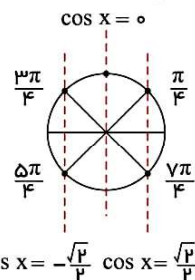
چون بلافاصله بعد از محور y نمودار در حال کاهش است، پس $b = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow a + b = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0,5$$

$$2\cos^3 x = \cos x \rightarrow 2\cos^3 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cos^2 x - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

۹۵. گزینه ۳



با توجه به شکل این معادله سه جواب کلی به صورت $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ دارد بنابراین مجموعه

مقادیر i را می‌توان به صورت $\{1, 2, 3\}$ در نظر گرفت.

$$\boxed{\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a, \sin 2a = 2 \sin a \cos a, 1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - \sin^2 x \rightarrow (\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \sin^2 x$$

$$\rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \rightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \sin^2 x$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0 \rightarrow 2 \sin x (\cos x - \sin x) = 0$$

۹۶. گزینه ۴

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = \sin x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه‌ی داده شده دارای پنج جواب است.

$$\boxed{\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a} \quad \text{۹۷. گزینه ۱ می‌دانیم:}$$

ابتدا سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos^2 2x - 1 \neq \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 2x - (2 \sin x \cos x)^2 = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$= \underbrace{(\cos^2 2x - \sin^2 2x)}_{\cos 4x} \underbrace{(\cos^2 2x + \sin^2 2x)}_1 = \cos 4x$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 4x = \cos \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$$

۹۸. گزینه ۳

$$\begin{aligned} A &= \frac{3 \sin \frac{8\pi}{9} + 4 \cos \frac{6\pi}{9}}{2 \sin \frac{13\pi}{9} + \sin \frac{29\pi}{9}} = \frac{3 \sin(\pi + \frac{\pi}{9}) + 4 \cos(\pi - \frac{\pi}{9})}{2 \sin(2\pi - \frac{\pi}{9}) + \sin(4\pi + \frac{\pi}{9})} \\ &= \frac{-3 \sin \frac{\pi}{9} - 4 \cos \frac{\pi}{9}}{-2 \sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{-3 \sin \frac{\pi}{9} - 4 \cos \frac{\pi}{9}}{-\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{-3 \sin \frac{\pi}{9}}{-\sin \frac{\pi}{9}} + \frac{4 \cos \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} \\ &= 3 + 4 \cot \frac{\pi}{9} = 3 + \frac{4}{\tan \frac{\pi}{9}} = 3 + \frac{4}{\alpha} = \frac{3\alpha + 4}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin 2a = 2 \sin a \cos a} \quad \text{۹۹. گزینه ۱ می‌دانیم:}$$

$$\sin 2x = -\cos(\frac{\pi}{2} + x) \Rightarrow \sin 2x = \sin x \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \sin x \Rightarrow \sin x(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌های این معادله در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابر است با:

$$0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{3} + (2\pi - \frac{\pi}{3}) = 5\pi$$

۱۰۰. گزینه ۴

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

۲ -۵	۳ -۴	۳ -۳	۲ -۲	۳ -۱
۲ -۱۰	۱ -۹	۳ -۸	۲ -۷	۴ -۶
۴ -۱۵	۴ -۱۴	۲ -۱۳	۴ -۱۲	۴ -۱۱
۳ -۲۰	۲ -۱۹	۳ -۱۸	۳ -۱۷	۳ -۱۶
۱ -۲۵	۳ -۲۴	۲ -۲۳	۳ -۲۲	۲ -۲۱
۱ -۳۰	۳ -۲۹	۴ -۲۸	۴ -۲۷	۴ -۲۶
۲ -۳۵	۳ -۳۴	۴ -۳۳	۴ -۳۲	۳ -۳۱
۱ -۴۰	۲ -۳۹	۱ -۳۸	۳ -۳۷	۲ -۳۶
۱ -۴۵	۳ -۴۴	۳ -۴۳	۳ -۴۲	۱ -۴۱
۴ -۵۰	۳ -۴۹	۴ -۴۸	۳ -۴۷	۳ -۴۶
۱ -۵۵	۲ -۵۴	۳ -۵۳	۲ -۵۲	۱ -۵۱
۴ -۶۰	۴ -۵۹	۳ -۵۸	۲ -۵۷	۳ -۵۶
۱ -۶۵	۱ -۶۴	۲ -۶۳	۱ -۶۲	۱ -۶۱
۳ -۷۰	۴ -۶۹	۲ -۶۸	۱ -۶۷	۱ -۶۶
۳ -۷۵	۱ -۷۴	۱ -۷۳	۳ -۷۲	۳ -۷۱
۳ -۸۰	۱ -۷۹	۴ -۷۸	۴ -۷۷	۳ -۷۶
۲ -۸۵	۴ -۸۴	۱ -۸۳	۴ -۸۲	۳ -۸۱
۱ -۹۰	۱ -۸۹	۴ -۸۸	۲ -۸۷	۳ -۸۶
۳ -۹۵	۴ -۹۴	۲ -۹۳	۱ -۹۲	۳ -۹۱
۴ -۱۰۰	۱ -۹۹	۳ -۹۸	۱ -۹۷	۴ -۹۶