

خوبه! آزمون‌های تشریحی خیلی سبز

۵ مرحله در طول سال

آزمون

شبیه‌سازی کامل امتحان نهایی

- منطبق بر بارم‌بندی آموزش و پرورش
- تشابه کامل فرم برگه سوال، پاسخبرگ، کلید، پاسخنامه و حتی فونت سوال‌ها با امتحان نهایی
- پوشش همه مطالب و انواع سوالات
- ارائه یک یا دو تست عیناً مشابه امتحان نهایی
- هم‌سطح با دشواری سوالات امتحان نهایی



پاسخنامه‌های خیلی تشریحی

- ارائه پاسخ کامل و مرحله به مرحله
- محتوای یاددهنده شامل درسنامه
- ارائه نکات کلیدی هر سوال

تصحیح کاملاً مکانیزه

- تصحیح کاملاً حرفه‌ای توسط دو مصحح
- تصحیح سوم در صورت اختلاف نظر دو مصحح قبل
- تصحیح به صورت بررسی یک سوال برای گروهی از دانش‌آموزان
- امکان کامنت‌گذاری مصحح در فرایند تصحیح
- امکان درخواست تصحیح مجدد در پیل ثبت اعتراض

کارنامه‌های بسیار کاربردی

- کارنامه تحلیلی و مقایسه‌ای
- نمره به تفکیک سوال
- کارنامه مبحثی

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله چهارم

پایه دوازدهم

۱۴۰۵/۰۳/مهر

۱۴۰۵-۰۶

ویژگی های برنامه ریزی آزمون های آزمایشی خیلی سبز در تابستان ۱۴۰۵-۰۶

- ۱- دوره دروس پایه دهم
- ۲- دوره دروس پایه یازدهم
- ۳- مطالعه بخشی از دروس پایه دوازدهم
- ۴- امکان فرایند ترکیبی هر کدام از موارد فوق

پایه	مرحله	اول ۲۳ مرداد	دوم ۲۶ شهریور	سوم ۲۰ شهریور	چهارم ۳ مهر
دهم		-	✓	✓	✓
یازدهم		✓	✓	✓	✓
دوازدهم		-	✓	✓	-

با توجه به موارد فوق دفتر چهارم آزمون خیلی سبز در این آزمون از ۲ قسمت تشکیل شده است.

هر داوطلب باید در جلسه آزمون به یک یا دو قسمت (که قبلاً در پلن کاربری انتخاب کرده است) پاسخ دهد.

آزمون مرحله چهارم (همین دفتر چه ای که در دست دارید) آزمون جمع بندی دروس پایه است.

تمامی سرفصل های دوازدهم، مجدداً از مهر، در برنامه ریزی دیده شده است.

ویژه کنکوری های ۱۴۰۶



آزمون آزمایشی خلی سبز

بیتا ابراهیمی - عادل حسینی - مینا کریمزاده

تیم اجرایی و تألیف آزمون

الناز علی‌پاریزاده

سرپرست تولید

نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - زهرا صفری
الهه صفری - فاطمه علی‌اکبری - محیا غنی‌فرد
ساناز فلاحی - نادره نازآوری - ساعده نمازی

ویراستاران فنی

ندا فخاری
سارا گنجی آزادپور

رسام

مریم حسین‌زاده - سپیده سخائی - الهام سهرابی
طاہرہ صادق‌نژاد - مائده صبری - نیلوفر فرخجسته
فاطمه قیاسوند - مهدیه گل‌پور - دریا لطفی

صفحه‌آرایی

ایران تهذیب
توشه‌ای برای موفقیت



پایه دهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
ریاضی (۱)	کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - بابک سادات - علی شهرابی - مصطفی کرمی محمد گودرزی - سروش موئینی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه (۱)	امیرحسین ابومحبوب - حمید گلزاری
فیزیک (۱)	علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی (۱)	مهدی براتی - سلیم بهرامی - سروش عبادی - یاسر عبداللهی - محمد قهرمانی نژاد - امیرحسین مسلمی محمد مرادی - محسن مجنونی - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
ریاضی (۱)	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	محمدرضا راسخ	علی افضل زاده سروش موئینی مازیار احمدی ناو	عاطفه خانمحمدی منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری
هندسه (۱)	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	زهرا جالینوسی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
فیزیک (۱)	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جعفری آثار علی محمدی	علیرضا جباری هادی نجفی	مدیا عیدی امیر محمودی انزلی ادریس محمدی
شیمی (۱)	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده پارسا فراهانی محمد مهدی کریمیان	عماد ربیعی عرشیا شفیعی علیرضا فرضعلی هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

ریاضی دهم

۱

دو مجموعه A و B در مجموعه مرجع U تعریف شده‌اند. اگر $n(A \cup B) = \frac{3}{4}n(A) = \frac{3}{4}n(B) = 24$ باشد،

حاصل $\frac{n(A-B)}{n(B-A)}$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

Hint

برای محاسبه نسبت خواسته شده، ابتدا تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه را از فرمول اجتماع به دست آورید و سپس آن را در روابط تفاضل مجموعه‌ها جای گذاری کنید.

تعداد عضوهای یک مجموعه:

فرض کنید A مجموعه‌ای متناهی باشد؛ تعداد اعضای آن با نماد $n(A)$ نمایش داده می‌شود.

فرض کنید U مجموعه مرجع متناهی و A زیرمجموعه‌ای از U باشد؛ در این صورت رابطه زیر برقرار است:

$$n(A) + n(A') = n(U)$$

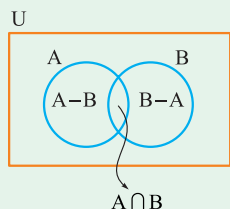
تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه:

راهبرد اصلی محاسبه تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه متناهی A و B به صورت زیر است:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

نکته

روابط تفاضل و اجتماع براساس نمودار ون:



با توجه به نمودار ون، نتایج زیر استنتاج می‌گردد:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

$$n(A - B) + n(B - A) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

گام اول: ابتدا با توجه به تساوی‌های داده شده می‌توان نوشت:

$$n(U) = 24, n(A) = 12, n(B) = 8, n(A \cup B) = 16$$

گام دوم: حال با توجه به رابطه تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 16 = 12 + 8 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

گام سوم: خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{n(A - B)}{n(B - A)} = \frac{n(A) - n(A \cap B)}{n(B) - n(A \cap B)} = \frac{12 - 4}{8 - 4} = \frac{8}{4} = 2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

چند دنباله صعودی مختلف از اعداد طبیعی a_1, a_2, a_3 و a_4 وجود دارد که $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 20$ و اختلاف هر دو جمله متوالی حداقل ۲ باشد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه (۳)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا توجه کنید که:

$$a_i \geq 1, a_{i+1} - a_i \geq 2 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

گام دوم: حال با تعریف متغیرهای جدید زیر، شرط اختلاف حداقل ۲ را به یک حالت ساده‌تر تبدیل می‌کنیم:

$$t_1 = a_1, t_2 = a_2 - 2, t_3 = a_3 - 4, t_4 = a_4 - 6$$

چون اختلاف هر جمله با جمله قبلی در دنباله اصلی حداقل ۲ است، دنباله جدید دیگر لزوماً اکیداً صعودی نیست، بلکه یک دنباله غیرنزولی خواهد بود:

$$1 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$$

گام سوم: مجموع متغیرهای جدید برابر است با:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (2 + 4 + 6) = 20 - 12 = 8$$

گام چهارم: حال سؤال به یافتن تعداد راه‌هایی تبدیل می‌شود که بتوان عدد ۸ را به عنوان مجموع ۴ عدد طبیعی نوشت:

$$۱) 1+1+1+5=8$$

$$۲) 1+1+2+4=8$$

$$۳) 1+1+3+3=8$$

$$۴) 1+2+2+3=8$$

$$۵) 2+2+2+2=8$$

گام پنجم: با توجه به گام قبلی دنباله‌های مورد نظر برابرند با:

$$۱) 1, 3, 5, 11$$

$$۲) 1, 3, 6, 10$$

$$۳) 1, 3, 7, 9$$

$$۴) 1, 4, 6, 9$$

$$۵) 2, 4, 6, 8$$

بنابراین ۵ دنباله مختلف وجود دارد.

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

طول اضلاع یک مستطیل x و y هستند و z طول قطر آن است. اگر اعداد x ، y و z با همین ترتیب، تشکیل دنباله حسابی و اعداد ۱۲ ، $۳x$ و y نیز با همین ترتیب تشکیل دنباله هندسی دهند، مقدار z کدام است؟

$$\frac{۸۰}{۲۷} \quad (۴)$$

$$\frac{۶۴}{۲۷} \quad (۳)$$

$$\frac{۲۴}{۲۷} \quad (۲)$$

$$\frac{۱۶}{۲۷} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴



از ویژگی واسطه حسابی و قضیه فیثاغورس استفاده کنید تا رابطه بین طول و عرض و قطر دربیاد؛ بعدش با واسطه هندسی کار رو تموم کنید!

درس Box

واسطه حسابی:

در یک دنباله حسابی، اگر سه عدد a ، b و c به طور متوالی (پشت سر هم) قرار گرفته باشند، به جمله میانی یعنی c ، «واسطه حسابی» بین دو عدد a و b گفته می‌شود.

از آنجایی که در دنباله حسابی فاصله (قدرنسبت) جملات متوالی با هم برابر است، جمله وسط همواره دقیقاً میانگین حسابی دو جمله کناری خود است، بنابراین رابطه زیر همواره برقرار خواهد بود:

$$c = \frac{a+b}{۲}$$

واسطه هندسی:

در یک دنباله هندسی، اگر سه عدد a ، b و c به صورت متوالی قرار داشته باشند، به جمله وسطی یعنی c ، «واسطه هندسی» بین دو عدد a و b می‌گویند.

در دنباله هندسی، چون نسبت هر جمله به جمله قبلی‌اش مقداری ثابت است، مربع (توان دوم) جمله وسط، همیشه با حاصل ضرب دو جمله کناری‌اش برابر می‌شود، پس می‌توانیم این رابطه مهم را بنویسیم:

$$c^2 = a \times b$$

گام اول: ابتدا با توجه به رابطه واسطه حسابی، می‌توان نوشت:

$$2y = x + z \quad (۱)$$

گام دوم: هم‌چنین بین اضلاع مستطیل و قطر آن، رابطه فیثاغورس برقرار است، پس:

$$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow y^2 = z^2 - x^2 \Rightarrow y^2 = (z-x)(z+x)$$

$$\xrightarrow{(۱)} y^2 = 2y(z-x) \xrightarrow{y \neq 0} \frac{y}{2} = z-x \quad (۲)$$

گام سوم: حال به کمک رابطه‌های (۱) و (۲)، مقدار y و x را بر حسب z می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 2y = z + x \\ \frac{y}{2} = z - x \end{cases} \Rightarrow 2z = \frac{5}{2}y \Rightarrow y = \frac{4}{5}z \Rightarrow x = \frac{3}{5}z \quad (۳)$$

گام چهارم: حال در دنباله هندسی، با توجه به رابطه واسطه هندسی داریم:

$$(3x)^2 = 12y \Rightarrow 9x^2 = 12y \xrightarrow{(۲)} 9\left(\frac{3}{5}z\right)^2 = 12\left(\frac{4}{5}z\right) \Rightarrow \frac{81}{25}z^2 = \frac{48}{5}z$$

$$\xrightarrow{z \neq 0} z = \frac{48}{5} \times \frac{25}{81} = \frac{48 \times 5}{81} = \frac{80}{27}$$

تنها مثلی که اضلاع آن دنباله حسابی می‌سازند، مثلث معروف ۵ - ۴ - ۳ و مضارب آن است، پس:

$$x = 3k, y = 4k, z = 5k \Rightarrow 9x^2 = 12y \Rightarrow 9(3k)^2 = 12(4k) \Rightarrow 81k^2 = 48k$$

$$\Rightarrow 81k^2 - 48k = 0 \xrightarrow{k \neq 0} k = \frac{48}{81} \Rightarrow z = \frac{5 \times 48}{81} = \frac{80}{27}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

تیبازی

۴ اگر $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ باشد، مقدار $a + \frac{1}{a}$ کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$\sqrt{5} \quad (۳)$$

$$\sqrt{6} \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

مجذور عبارت خواسته شده رو حساب کن.

Hint

درس Box

روش های گویا کردن مخرج های گنگ (از بین بردن ریشه):

• فرض کنید مخرج کسر شامل عبارت رادیکالی به فرم $\sqrt[n]{a^m}$ باشد.

• شرط لازم برای استفاده از این روش آن است که $m < n$ باشد.

• راهبرد اصلی حل: برای از بین بردن ریشه در مخرج، صورت و مخرج کسر را در عامل زیر ضرب می کنیم:

$$\sqrt[n]{a^{n-m}}$$

روش های گویا کردن مخرج های گنگ (استفاده از اتحاد مزدوج):

• فرض کنید در مخرج کسری، یکی از عبارت های گنگ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و یا $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ قرار داشته باشد.

• راهبرد اصلی حل: برای گویا کردن مخرج، صورت و مخرج کسر را در عبارت مزدوج مخرج (عبارت دیگر) ضرب می کنیم تا ریشه های دوم حذف گردند.

روش های گویا کردن مخرج های گنگ (استفاده از اتحاد چاق و لاغر):

• فرض کنید در مخرج کسری، یکی از عبارت های $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ و یا $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ وجود داشته باشد.

• راهبرد اصلی حل: صورت و مخرج کسر را در عبارت دیگر ضرب می کنیم تا مخرج گویا شود.

• فرض کنید در مخرج کسری، یکی از عبارت های $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ و یا $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ وجود داشته باشد.

• راهبرد اصلی حل: در این حالت نیز صورت و مخرج کسر را در عبارت دیگر ضرب می کنیم تا ریشه های سوم از بین بروند.

گام اول: ابتدا توجه کنید که:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$$

گام دوم: حال با محاسبه a^2 و $\frac{1}{a^2}$ داریم:

$$a^2 = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2 = 6 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = \sqrt{6}$$

ایران نوننت
توشه ای برای موفقیت

۵ اگر $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ باشد، حاصل $a^3 - 6$ چند برابر a است؟

۱۲ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

از اتحاد مکعب مجموع هر دو جمله‌ای کمک بگیر و سعی کن فرم عبارتی که ازت خواسته شده رو شبیه سازی کنی!

Hint

درسی Box

اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله:

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند.

اتحاد مکعب مجموع دو جمله به صورت زیر بیان می شود:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

براساس این اتحاد، مکعب مجموع دو جمله برابر است با: مجموع مکعب های این دو جمله، بعلاوه سه برابر مربع جمله اول در

جمله دوم و بعلاوه سه برابر مربع جمله دوم در جمله اول.

به همین ترتیب، اتحاد مکعب تفاضل دو جمله به صورت رابطه زیر استخراج می گردد:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

گام اول: به کمک اتحاد مکعب دو جمله ای می توان نوشت:

پاسخ خیلی تشریحی

$$a^3 = (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^3 = (\sqrt[3]{2})^3 + (\sqrt[3]{4})^3 + 3(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{4})(\underbrace{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}_a)$$

$$\Rightarrow a^3 = 2 + 4 + 6a \Rightarrow a^3 - 6 = 6a$$

گام دوم: نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{a^3 - 6}{a} = 6$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ همواره پایین تر از نمودار تابع $y = x^2 - 4x + 4$ باشد، بزرگ ترین مقدار صحیح ممکن

برای $f(1)$ کدام است؟

۴) -۱

۳) ۱

۲) صفر

۱) ۲

پاسخ: گزینه ۲

نامعادلاتی که در صورت سؤال به زبان فارسی گفته شده رو به زبان ریاضی بنویس!

Hint

گام اول: با توجه به فرض مسئله، نامعادله زیر همواره برقرار است:

پاسخ خیلی تشریحی

$$f(x) < x^2 - 4x + 4$$

گام دوم: حال با جای گذاری $x = 1$ داریم:

$$f(1) < 1 - 4 + 4 \Rightarrow f(1) < 1$$

بنابراین بزرگ ترین مقدار صحیح ممکن برای $f(1)$ برابر صفر است.



اگر معادله $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$ دو جواب برای x داشته باشد، کدام گزینه در مورد a درست است؟

- $a = -1$ (۴) $a \in \mathbb{R}$ (۳) $a < -1$ (۲) $a > -1$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

شرط داشتن دو ریشه حقیقی $\Delta > 0$ هستش!

Hint

درس Box

وضعیت جواب های معادله درجه دوم:

فرض کنید معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ داده شده باشد.

راهنمای اصلی برای تعیین وضعیت جواب های این معادله، محاسبه مقدار ممیز یا دلتا (Δ) است:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

با توجه به علامت Δ ، وضعیت جواب های معادله به یکی از سه حالت زیر تفکیک می گردد:

اگر $\Delta > 0$ باشد: معادله دارای دو جواب حقیقی متمایز است که از رابطه زیر محاسبه می شوند:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

اگر $\Delta = 0$ باشد: معادله دارای یک جواب حقیقی (ریشه مضاعف) است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

اگر $\Delta < 0$ باشد: معادله فاقد جواب حقیقی است.

شرط داشتن دو جواب برای معادله درجه دوم این است که $\Delta > 0$ باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-2(a+1))^2 - 4(a^2 - 1) > 0 \Rightarrow 4(a^2 + 2a + 1) - 4a^2 + 4 > 0 \Rightarrow 8a + 8 > 0 \Rightarrow a > -1$$

با استفاده از گزینه ها و با جای گذاری $a = 0$ داریم:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

پس گزینه های (۲) و (۴) رد می شوند.

حال با جای گذاری $a = -2$ داریم:

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

پس گزینه (۳) نیز رد و پاسخ گزینه (۱) است.

پاسخ خیلی تشریحی

تیزبازی

به ازای چند مقدار از a ، معادله درجه دوم $(x-2)^2 + 2a(x+1)^2 = a$ دارای یک ریشه مضاعف است؟

(سوال ۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۵)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

کنکور

به ازای چند مقدار صحیح k ، نامعادله $x^2 - 2kx + k^2 - 4 \leq 0$ حداقل یک جواب برای x در بازه $[-5, 5]$ دارد؟

۱۵ (۴)

۱۳ (۳)

۱۱ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

جواب‌های نامعادله رو بر حسب k بنویس و بررسی کن چه‌طوری می‌تونه با بازه داده‌شده اشتراک داشته باشه!

Hint

درس‌Box

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم:

فرض کنید چندجمله‌ای درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c$ مفروض باشد ($a \neq 0$).

برای تعیین علامت این چندجمله‌ای، ابتدا دلتای معادله متناظر آن ($\Delta = b^2 - 4ac$) را محاسبه می‌کنیم. براساس علامت دلتا، سه حالت مجزا بررسی می‌گردد.

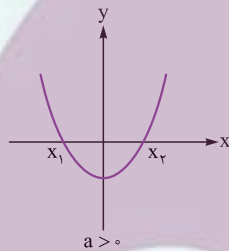
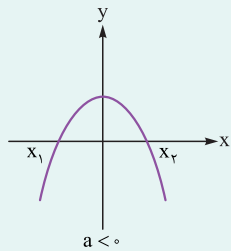
حالت اول: $\Delta > 0$

فرض کنید $\Delta > 0$ باشد؛ در این حالت معادله دو جواب حقیقی متمایز دارد، این جواب‌ها را x_1 و x_2 بنامید و فرض کنید $x_1 < x_2$.

جدول تعیین علامت در این حالت به صورت زیر است:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	مخالف علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

نمودارهای متناظر با این حالت (تقاطع منحنی با محور x در دو نقطه):



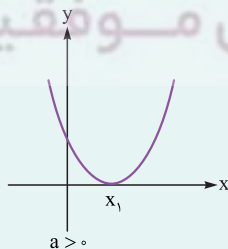
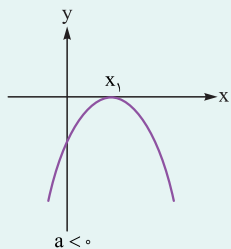
حالت دوم: $\Delta = 0$

فرض کنید $\Delta = 0$ باشد؛ در این حالت معادله یک جواب حقیقی (ریشه مضاعف) دارد. این جواب را x_1 بنامید.

جدول تعیین علامت در این حالت به صورت زیر است:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	موافق علامت a	موافق علامت a

نمودارهای متناظر با این حالت (مماس بودن منحنی بر محور x در یک نقطه):



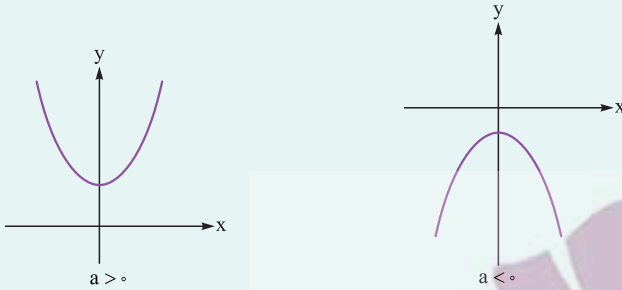
حالت سوم: $\Delta < 0$

فرض کنید $\Delta < 0$ باشد؛ در این حالت معادله فاقد جواب حقیقی است.

جدول تعیین علامت در این حالت به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	

نمودارهای متناظر با این حالت (عدم برخورد منحنی با محور X):



گام اول: ابتدا نامساوی داده شده را به صورت زیر بازنویسی کرده و جواب‌های آن را برحسب k مشخص می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$x^2 - 2kx + k^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow (x - k)^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow (x - k)^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x - k \leq 2$$

$$\Rightarrow k - 2 \leq x \leq k + 2$$

گام دوم: اشتراک بازه $[k - 2, k + 2]$ با بازه $[-5, 5]$ نباید تهی باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} k - 2 \leq 5 \Rightarrow k \leq 7 \\ k + 2 \geq -5 \Rightarrow k \geq -7 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -7 \leq k \leq 7$$

گام سوم: مقادیر صحیح k عبارتند از:

$$k \in \{-7, -6, \dots, 6, 7\} \Rightarrow \text{تعداد} = 7 - (-7) + 1 = 15$$

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

مجموعه S شامل تمام اعداد حقیقی x است که در نامعادله $|x-2| < |x+4|$ صدق می کند. اگر مجموعه T بازه ای به صورت $(m, +\infty)$ باشد، بزرگ ترین مقدار m برای آن که $S \subseteq T$ باشد، کدام است؟

۱ (۴)

۳ (صفر)

۲ (۲-)

۱ (۱-)

پاسخ: گزینه ۱

حل نامعادلات قدرمطلقى دوطرفه:

کرتی Box

فرض کنید نامعادله ای شامل دو عبارت قدرمطلقى به فرم $|ax+b| < |cx+d|$ مفروض باشد.

راهبرد اصلی حل: از آن جا که مقادیر هر دو طرف نامساوى همواره نامنفى هستند، شرط لازم و كافى برای حل، به توان دو رساندن طرفین نامعادله است تا نمادهای قدرمطلق حذف گردند:

$$(ax+b)^2 < (cx+d)^2$$

با انتقال عبارات به یک سمت نامساوى و تجزیه براساس اتحاد مزدوج، ساختار نامعادله به فرم استاندارد زیر تغییر می یابد:

$$((ax+b)-(cx+d))((ax+b)+(cx+d)) < 0$$

در گام نهایی، با محاسبه ریشه های هر یک از عوامل ضرب (پرانتزها) و تشکیل جدول تعیین علامت چندجمله ای درجه دوم حاصل، بازه های متناظر با مجموعه جواب استخراج می گردد.

گام اول: ابتدا مجموعه S، یعنی مجموعه جواب های نامعادله را مشخص می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$|x-2| < |x+4| \Rightarrow (|x-2|)^2 < (|x+4|)^2 \Rightarrow (x-2)^2 - (x+4)^2 < 0 \Rightarrow (x-2+x+4)(x-2-x-4) < 0$$

$$\Rightarrow 2(x+1)(-6) < 0 \Rightarrow (x+1) > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow S = (-1, +\infty)$$

گام دوم: حال برای آن که $(-1, +\infty) \subseteq (m, +\infty)$ باشد، داریم:

$$m \leq -1 \Rightarrow \text{بزرگ ترین مقدار } m = -1$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

تابع خطی f و تابع ثابت g مفروض‌اند به طوری که $g(x) = f(-2)$ است. اگر تابع h با ضابطه $h(x) = f(2x-1) + g(x-2)$ همانی باشد، حاصل $f(g(2))$ کدام است؟

$$\frac{7}{4} (4)$$

$$-\frac{7}{4} (3)$$

$$-\frac{5}{8} (2)$$

$$\frac{5}{8} (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

تابع خطی:

درسی Box

فرض کنید ضابطه تابعی به فرم زیر بیان شده باشد؛ در این صورت، این تابع را یک تابع خطی می‌نامند:

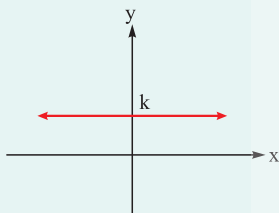
$$f(x) = ax + b$$

تابع ثابت:

در تابع ثابت، مجموعه برد تنها شامل یک عضو است.

فرض کنید f یک تابع ثابت باشد؛ در این صورت ضابطه آن به شکل $f(x) = k$ بیان می‌شود که در آن k یک عدد حقیقی ثابت است.

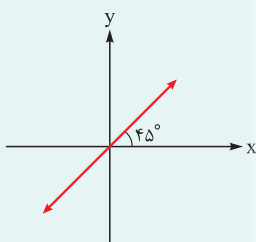
شرط لازم برای آن که نمودار این تابع یک خط موازی محور x باشد، این است که دامنه تابع f برابر با مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ باشد.



تابع همانی:

در تابع همانی، دامنه و برد تابع با یکدیگر برابر هستند و هر عضو از دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر می‌گردد.

فرض کنید دامنه تابع همانی، مجموعه اعداد حقیقی باشند؛ در این صورت ضابطه و نمودار آن به صورت خط $y = x$ است.



گام اول: ابتدا فرض می‌کنیم $f(x) = ax + b$ ، در نتیجه:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$g(x) = f(-2) \Rightarrow g(x) = -2a + b$$

گام دوم: حال با توجه به ضابطه تابع h و همانی بودن آن داریم:

$$h(x) = f(2x-1) + g(x-2) = x \Rightarrow a(2x-1) + b + (-2a + b) = 2ax - 2a + 2b = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ -2a + 2b = 0 \xrightarrow{a=\frac{1}{2}} -1 + 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

گام سوم: با جای گذاری مقادیر a و b می‌توان نوشت:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \quad g(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(g(2)) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

اگر f تابع همانی و g تابع ثابت بوده و $g(3x) + 2f(3+x) = 3 + 2x$ باشد، مقدار $\frac{f(-1)}{g(4)}$ کدام است؟

(سؤال ۱۱۶ کنکور تهرانی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

$-\frac{1}{3} (4)$

$-\frac{1}{4} (3)$

$\frac{1}{3} (2)$

$\frac{1}{4} (1)$



توابع $f(x) = |x - 4|$ و $g(x) = x^2$ مفروض اند. تعداد نقاط مشترک نمودار تابع $h(x) = f(g(x))$ و محور x کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

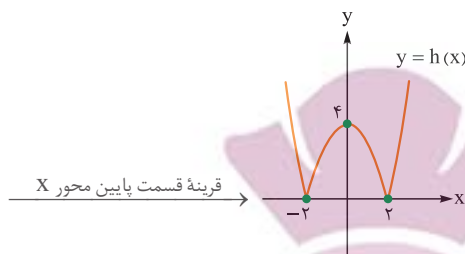
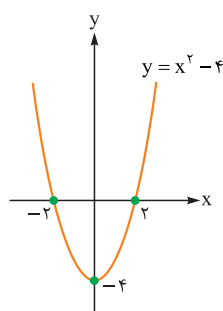
پاسخ: گزینه ۳

گام اول: ابتدا ضابطه و دامنه تابع h را مشخص می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$h(x) = |x^2 - 4|, D_h = \mathbb{R}$$

گام دوم: حال نمودار تابع h را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تعداد نقاط مشترک نمودار تابع h و محور x برابر ۲ است.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۱۲ برد تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$ کدام است؟

(۲) $\mathbb{R} - [-4, 4]$

(۱) $(-\infty, 4)$

(۴) $(-4, +\infty)$

(۳) $\mathbb{R} - \{4\}$

پاسخ: گزینه ۴

ضابطه تابع رو به کمک قدرمطلق به صورت چندضابطه‌ای بنویس و نمودارش رو رسم کن!

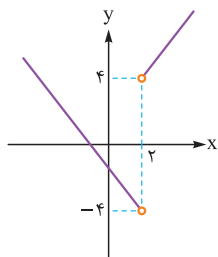
Hint

گام اول: ابتدا به کمک ریشه قدرمطلق، ضابطه تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} & ; x > 2 \\ \frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)} & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x > 2 \\ -(x+2) & ; x < 2 \end{cases}$$

گام دوم: حال نمودار تابع را در دستگاه مختصات رسم کرده و برد آن را مشخص می‌کنیم:



$R_f = (-4, +\infty)$

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

نمودار تابع $y = f(x)$ ، با انتقال ۲ واحد به راست و ۲ واحد به پایین، بر نمودار تابع $g(x) = x^2 - 4x + 1$ منطبق می‌شود. کم‌ترین مقدار تابع f کدام است؟

۳ (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

انتقال‌ها رو برعکس انجام بده تا تابع f به دست بیاد!

Hint

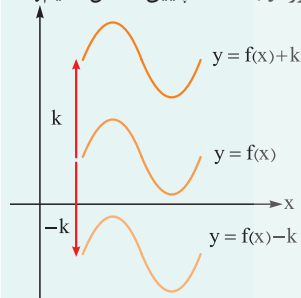
درس‌Box

انتقال عمودی توابع:

فرض کنید نمودار تابع f مفروض است و k یک عدد حقیقی مثبت ($k > 0$) باشد.

برای رسم تابع $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار تابع f را به اندازه k واحد در امتداد محور y به سمت بالا منتقل کنیم.

برای رسم تابع $y = f(x) - k$ ، کافی است نمودار تابع f را به اندازه k واحد در امتداد محور y به سمت پایین منتقل کنیم.

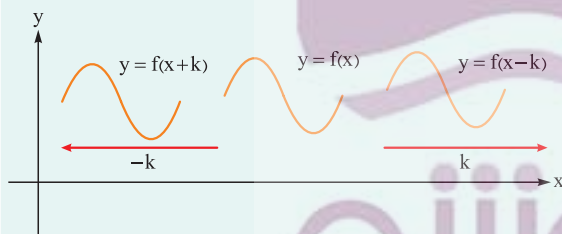


انتقال افقی توابع:

فرض کنید نمودار تابع f مفروض است و k یک عدد حقیقی مثبت ($k > 0$) باشد.

برای رسم تابع $y = f(x + k)$ ، کافی است نمودار تابع f را به اندازه k واحد در امتداد محور x به سمت چپ منتقل کنیم.

برای رسم تابع $y = f(x - k)$ ، کافی است نمودار تابع f را به اندازه k واحد در امتداد محور x به سمت راست منتقل کنیم.



گام اول: ابتدا ضابطه تابع g را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x) = x^2 - 4x + 4 - 3 \Rightarrow g(x) = (x - 2)^2 - 3$$

گام دوم: حال انتقال‌های انجام‌شده را به صورت برعکس انجام می‌دهیم تا ضابطه تابع f را به دست آوریم:

$$y = (x - 2)^2 - 3 \xrightarrow[\text{۲ واحد به چپ}]{\text{۲ واحد به بالا}} y = (x + 2 - 2)^2 - 3 + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1$$

گام سوم: کم‌ترین مقدار تابع f برابر است با:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow f(0) = -1$$

انتقال افقی روی کم‌ترین مقدار تأثیری ندارد، کافیه اول کم‌ترین مقدار تابع g رو مشخص کنیم و به آن ۲ واحد اضافه کنیم:

$$g(x) = (x - 2)^2 - 3 \Rightarrow y_{S_g} = -3 \Rightarrow y_{S_f} = -3 + 2 = -1$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

تیزپازی

در یک مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه 30° برابر ۶ است. مساحت این مثلث کدام است؟

$54\sqrt{3} \quad (۴)$

$36\sqrt{3} \quad (۳)$

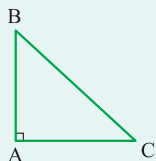
$24\sqrt{3} \quad (۲)$

$18\sqrt{3} \quad (۱)$

پاسخ: گزینه ۱

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:

درس Box



فرض کنید مثلثی قائم‌الزاویه مفروض باشد.

نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه حاده به طول وتر مثلث را سینوس ($\sin$) آن زاویه می‌نامند:

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}, \quad \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$$

نسبت طول ضلع مجاور به هر زاویه حاده به طول وتر مثلث را کسینوس ($\cos$) آن زاویه می‌نامند:

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}, \quad \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC}$$

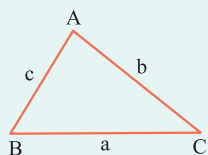
نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه حاده به طول ضلع مجاور به آن زاویه را تانژانت ($\tan$) آن زاویه می‌نامند:

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}, \quad \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC}$$

عکس نسبت تانژانت را کتانژانت ($\cot$) آن زاویه می‌نامند:

$$\cot \hat{B} = \frac{AB}{AC}, \quad \cot \hat{C} = \frac{AC}{AB}$$

محاسبه مساحت مثلث با استفاده از سینوس:



فرض کنید مثلث ABC با طول اضلاع a , b و c مفروض باشد.

راهبرد اصلی محاسبه مساحت مثلث: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول‌های دو ضلع آن در سینوس زاویه میان این دو ضلع.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

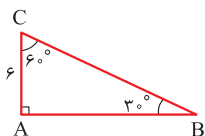
مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های پرکاربرد 30° ، 45° و 60° در جدول زیر آمده است:

مقدار نسبت مثلثاتی	30°	45°	60°
$\sin \hat{A}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \hat{A}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \hat{A}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot \hat{A}$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا شکل مقابل را در نظر بگیرید:



گام دوم: حال با توجه به نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه می‌توان نوشت:

$$\tan 30^\circ = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{AB} \Rightarrow AB = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

گام سوم: مساحت مثلث برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{6 \times 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$

یہ جو ریگہ  ضلع روبہ رو بہ زاویہ 30° نصف وتر است، پس:

$$BC = 12 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$



اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\cos 3x = 1 - 2m$ باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

$$-\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$-۱ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

Hint

اول، محدوده زاویه $3x$ رو مشخص کنید و روی دایره مثلثاتی ببینید کسینوس تو این بازه بین چه اعدادی نوسان می‌کنه؛ بعدش عبارت $1 - 2m$ رو تو همون محدوده گیر بندازید!

درس‌Box

دایره مثلثاتی: دایره مثلثاتی، یک دایره استاندارد در صفحه مختصات است که دو ویژگی اساسی دارد: (۱) مرکز آن دقیقاً روی مبدأ مختصات $O(0,0)$ قرار دارد. (۲) شعاع آن دقیقاً برابر با ۱ واحد است ($R = 1$).

برای اندازه‌گیری زاویه‌ها روی این دایره، یک قرارداد جهانی داریم: همیشه نقطه $A(1,0)$ (محل تقاطع دایره با بخش مثبت محور طول‌ها) را به عنوان نقطه شروع در نظر می‌گیریم. پاره خط OA ، «ضلع ابتدایی» تمام زاویه‌هاست. حالا اگر این پاره خط را به اندازه زاویه α حول مبدأ دوران دهیم، به نقطه جدیدی مثل P روی محیط دایره می‌رسیم. زاویه α ، همان زاویه مثلثاتی متناظر با نقطه P است. جهت چرخش پادساعتگرد (خلاف عقربه‌های ساعت) به عنوان جهت مثبت و چرخش ساعت‌گرد به عنوان جهت منفی در نظر گرفته می‌شود.

محورهای سینوس و کسینوس روی دایره مثلثاتی: زیبایی و قدرت دایره مثلثاتی در این است که نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه را مستقیماً به مختصات یک نقطه روی دایره تبدیل می‌کند! فرض کنید نقطه $P(x,y)$ روی دایره مثلثاتی قرار دارد و زاویه α را می‌سازد. اگر از نقطه P به محورهای مختصات عمود کنیم، یک مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شود که وتر آن همان شعاع دایره (یعنی ۱) است. طبق تعریف نسبت‌های مثلثاتی در این مثلث:

$$\bullet \cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{1} = x \quad \bullet \sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{1} = y$$

بنابراین:

- محور طول‌ها (محور x) همان محور کسینوس‌ها است. طول نقطه P دقیقاً مقدار $\cos \alpha$ را نشان می‌دهد.
- محور عرض‌ها (محور y) همان محور سینوس‌ها است. عرض نقطه P دقیقاً مقدار $\sin \alpha$ را نشان می‌دهد.
- حدود سینوس و کسینوس: چون نقطه P همیشه روی محیط دایره‌ای به شعاع ۱ حرکت می‌کند، مختصات طول (x) و عرض (y) آن هرگز نمی‌تواند از ۱ بیشتر یا از -۱ کمتر شود. به همین دلیل، برای هر زاویه دلخواه α ، همواره داریم:

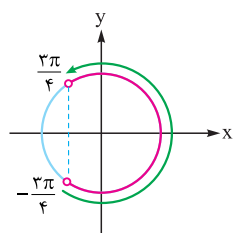
$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

گام اول: ابتدا توجه کنید که:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{3\pi}{4} < 3x < \frac{3\pi}{4}$$

گام دوم: حال با مشخص کردن محدوده x روی دایره مثلثاتی، بیشترین و کمترین مقدار $\cos 3x$ را به دست می‌آوریم:



$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos 3x \leq 1$$

گام سوم: با جای گذاری مقدار $\cos 3x$ برحسب m داریم:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 - 2m \leq 1 \Rightarrow \frac{-\sqrt{2}-2}{2} < -2m \leq 0 \Rightarrow 0 \leq m < \frac{2+\sqrt{2}}{4} \approx 0.85$$

در نتیجه مقدار m می‌تواند برابر صفر باشد.

به ازای چند مقدار θ در بازه $[0, 2\pi]$ ، تساوی $|\sin \theta| + |\cos \theta| = 1$ برقرار است؟

یک دور دایره مثلثاتی

۵ (۴)

۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی:

درس Box

فرض کنید α زاویه‌ای دلخواه باشد؛ شرط لازم برای صحت و برقراری روابط زیر آن است که مخرج کسرها در هیچ یک از عبارات برابر با صفر نباشد.

راهبرد اصلی در ساده‌سازی عبارات مثلثاتی، استفاده از روابط شش گانه زیر است:

$$۱) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$۲) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$۳) \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$۴) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$۵) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$۶) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

نتایج و روابط فرعی:

براساس تساوی (۳)، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\tan \alpha \cot \alpha = 1$$

هم‌چنین از تساوی (۴) که به اتحاد اصلی مثلثات معروف است، تساوی‌های کاربردی زیر استنتاج می‌گردد:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha, \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

گام اول: ابتدا طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$(|\sin \theta| + |\cos \theta|)^2 = 1^2 \Rightarrow \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{=1} + 2|\sin \theta \cos \theta| = 1 \Rightarrow 2|\sin \theta \cos \theta| = 0$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 \\ \cos \theta = 0 \end{cases}$$

گام دوم: حال با توجه به دایره مثلثاتی در بازه $[0, 2\pi]$ ، مقادیری از θ که به ازای آن‌ها مقدار $\sin \theta$ یا $\cos \theta$ برابر صفر می‌شود، عبارت است از:

$$\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\} \Rightarrow ۵ \text{ مقدار}$$

۱۷ اگر $\tan x + \cot x = 5$ باشد، حاصل عبارت $A = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}$ چند برابر $\sqrt[3]{5}$ است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$
(۲) $\frac{2}{5}$
(۳) $\frac{3}{5}$
(۴) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

مشاوره فرض کنید در برخی مسائل مثلثات، مقدار یک عبارت مشخص است و هدف، محاسبه مقدار عبارت دیگری است.

در این دسته از مسائل، با بهره‌گیری از اتحادهای جبری و روابط مثلثاتی، سعی می‌کنیم ساختار یکی از عبارت‌ها را تغییر داده و آن را به عبارت دیگر تبدیل کنیم.

پاسخ: گزینه ۲

گام اول: ابتدا با توجه به تساوی داده‌شده می‌توان نوشت:

$$\tan x + \cot x = 5 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 5 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 5 \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 5 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{5}$$

گام دوم: حال به کمک اتحاد چاق و لاغر عبارت خواسته‌شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$A = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}$$

$$A = \sqrt{(\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{5})} = \sqrt{(\sin x + \cos x)(\frac{4}{5})}$$

گام سوم: حال برای محاسبه مقدار $\sin x + \cos x$ می‌توان نوشت:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

برای این که عبارت زیر رادیکال تعریف‌شده باشد:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{7}{5}}$$

گام چهارم: حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$A = \sqrt{\frac{4\sqrt{7}}{5\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{35}}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt[4]{35}$$

اگر $\tan x + \cot x = -3$ و $3\pi < 4x < 4\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x}$ کدام است؟

(سوال ۱۹ کنکور تهری ۱۴۰۲ - نوبت دوم)

- (۱) $-\frac{5}{\sqrt{6}}$
(۲) $\frac{5\sqrt{3}}{7}$
(۳) $-\frac{5\sqrt{3}}{7}$
(۴) $\frac{5\sqrt{6}}{7}$

۶ نفر می‌خواهند در کنار یکدیگر قرار بگیرند. تعداد حالت‌هایی که دو فرد A و B کنار هم قرار نگیرند، کدام است؟

11

 $\Delta f \circ (f$

५८० (३)

३६० (२)

۲۴۰ (۱)

پاسخ: گزینہ ۳

حالت‌هایی که A و B کنار هم هستند رو حساب کن و از کل حالت‌های ممکن کم کن!

 Hint

گام اول: ابتدا تعداد راههایی که هر ۶ نفر بدون محدودیت می توانند کنار هم قرار بگیرند را به دست می آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$6! = 720$$

گام دوم: حال تعداد حالت‌هایی که دو فرد A و B همیشه در کنار هم هستند را محاسبه کرده و از کل حالت‌های ممکن کم می‌کنیم:

$$A, B, \text{stick figure}, \text{stick figure}, \text{stick figure} \Rightarrow 5! \times 2! = 24.$$
 جاگشت B, A

دقت کنید که A و B کنار هم هستند، پس آن‌ها را در یک بسته قرار می‌دهیم.

$۷۲۰ - ۲۴۰ = ۴۸۰$ = حالت‌هایی که A و B کنار هم قرار نگیرند.

از میان ۵ پسر و ۲ دختر، یک گروه سه نفره به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که در بین نفرات انتخاب شده، حداقل یک دختر باشد، کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{41}{56} \quad (۳)$$

$$\frac{37}{56} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{7} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

تعاریف اولیه آزمایش تصادفی و پیشامد:

دانش Box

- فرض کنید آزمایشی انجام می‌شود که تمامی حالت‌های ممکن برای نتیجه آن مشخص است، اما نتیجه قطعی پیش از انجام آن نامعلوم باشد؛ چنین فرایندی را «آزمایش تصادفی» می‌نامند.
 - مجموعه دربرگیرنده تمامی نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، «فضای نمونه‌ای» نامیده می‌شود.
 - هر زیرمجموعه دلخواه از فضای نمونه‌ای، یک «پیشامد تصادفی» نام دارد.
 - احتمال رخداد یک پیشامد:
 - فرض کنید S یک فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی بوده و A پیشامدی از آن باشد.
 - محاسبه احتمال وقوع پیشامد A (با نماد $P(A)$)، از طریق نسبت تعداد اعضای پیشامد به تعداد کل اعضای فضای نمونه‌ای انجام می‌پذیرد:
- $$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ویژگی‌های احتمال:



- فرض کنید S یک فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی است و A و B پیشامدهایی در این فضا هستند.
 - احتمال هر پیشامد همواره عددی در بازه $[0, 1]$ است؛ هم‌چنین احتمال پیشامد قطعی برابر ۱ و پیشامد غیرممکن برابر صفر است:
- $$P(S) = 1, P(\emptyset) = 0, 0 \leq P(A) \leq 1$$
- احتمال اجتماع دو پیشامد از بسط رابطه زیر به دست می‌آید:
- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- در صورتی که دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، رابطه اجتماع به فرم زیر ساده می‌شود:
- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
- در صورتی که سه پیشامد A ، B و C دویه‌دو ناسازگار باشند، رابطه اجتماع برای آن‌ها چنین تعمیم می‌یابد:
- $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
- احتمال متمم یک پیشامد براساس رابطه تفاضل از مقدار کل (یک) تعیین می‌شود:
- $$P(A') = 1 - P(A)$$
- احتمال تفاضل دو پیشامد به کمک رابطه زیر محاسبه می‌گردد:
- $$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$
- هرگاه $A \subseteq B$ باشد، نتیجه می‌شود $P(A) \leq P(B)$ ؛ بر همین اساس و با توجه به این که $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ ، نابرابری زیر استنتاج می‌گردد:
- $$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$$

گام اول: ابتدا فضای نمونه، یعنی تعداد حالت‌های انتخاب ۳ نفر از بین ۷ نفر را محاسبه می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

گام دوم: حال به کمک اصل متمم، تعداد حالت‌هایی که هیچ دختری انتخاب نشود را حساب می‌کنیم:

$$n(A') = \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10 \Rightarrow n(A) = 35 - 10 = 25$$

↓
حداقل یک دختر

گام سوم: احتمال این که حداقل یک دختر انتخاب شود، برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$



۲۰

از بین اعداد $\{1, 2, \dots, 20\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد انتخاب شده زوج یا مضرب ۳ باشد، کدام است؟

$$\frac{7}{10} \text{ (۴)}$$

$$\frac{13}{20} \text{ (۳)}$$

$$\frac{3}{5} \text{ (۲)}$$

$$\frac{11}{20} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۳

اعمال روی پیشامدها:

درس Box

فرض کنید A و B دو پیشامد تعریف شده در فضای نمونه‌ای S باشند.

• اجتماع دو پیشامد $(A \cup B)$: این پیشامد زمانی به وقوع می‌پیوندد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

• اشتراک دو پیشامد $(A \cap B)$: وقوع این پیشامد منوط به رخ دادن هم‌زمان هر دو پیشامد A و B است.

• تفاضل دو پیشامد $(A - B)$: این پیشامد در شرایطی رخ می‌دهد که پیشامد A به وقوع بپیوندد، اما پیشامد B رخ ندهد.

• متمم یک پیشامد (A') : این پیشامد معادل با عدم وقوع پیشامد A است.

گام اول: ابتدا فضای نمونه و پیشامدهای مورد نظر را مشخص می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 20\} \Rightarrow n(S) = 20$$

$$A = \{2, 4, 6, \dots, 20\} \Rightarrow n(A) = 10 \text{ (پیشامد } A \text{ زوج بودن)}$$

$$B = \{3, 6, 9, \dots, 18\} \Rightarrow n(B) = 6 \text{ (پیشامد } B \text{ مضرب ۳)}$$

$$A \cap B = \{6, 12, 18\} \Rightarrow n(A \cap B) = 3 \text{ (پیشامد زوج بودن و مضرب ۳)}$$

گام دوم: حال احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

ارزش نقیض کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

- (۱) کوچک‌ترین زاویه داخلی یک مثلث مختلف‌الاضلاع از ۶۰° کم‌تر است.
- (۲) درون هر مثلث نقطه‌ای وجود دارد که از سه ضلع آن به یک فاصله است.
- (۳) هر زاویه خارجی یک مثلث، از زاویه‌های داخلی آن بزرگ‌تر است.
- (۴) مثلثی وجود دارد که طول یک ضلع آن، واسطه هندسی طول‌های دو ضلع دیگر آن باشد.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

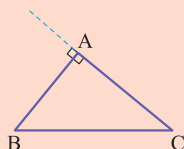
باید از میان گزینه‌ها، گزاره نادرست را انتخاب کنید، چون در این صورت، نقیض آن یک گزاره درست خواهد بود. گزینه‌ها را تک‌تک بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): این گزاره درست است؛ فرض کنید در مثلث مختلف‌الاضلاع ABC ، زاویه A کوچک‌ترین زاویه باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \hat{A} &< \hat{B} \\ \hat{A} &< \hat{C} \\ \hline \hat{A} + \hat{A} &< \hat{B} + \hat{C} \xrightarrow{+ \hat{A}} \hat{A} + \hat{A} + \hat{A} < \underbrace{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}_{180^\circ} \Rightarrow 3\hat{A} < 180^\circ \Rightarrow \hat{A} < 60^\circ \end{aligned}$$

گزینه (۲): این گزاره درست است. نقطه‌ای درون یک مثلث که از سه ضلع آن به یک فاصله باشد. نقطه هم‌رسی نیمسازهای داخلی آن مثلث است و می‌دانیم نیمسازهای داخلی هر مثلث همواره در نقطه‌ای درون آن مثلث، هم‌رس‌اند.

گزینه (۳): این گزاره درست نیست، زیرا مثال نقض دارد. در مثلث قائم‌الزاویه شکل زیر، اندازه زاویه خارجی A با اندازه زاویه داخلی A برابر است.



پس این گزینه نادرست و نقیض آن درست است.

گزینه (۴): این گزاره درست است. مثلاً مثلثی به طول اضلاع ۴، ۶ و ۹ را در نظر بگیرید: اولاً ۶، واسطه هندسی ۴ و ۹ است ($۶^2 = ۴ \times ۹$)، ثانیاً این سه عدد می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند، زیرا بزرگ‌ترین آن‌ها از مجموع دوتای دیگر کوچک‌تر است ($۹ < ۴ + ۶$).

اگر سه عدد مثبت به گونه‌ای باشند که بزرگ‌ترین آن‌ها از مجموع دوتای دیگر کم‌تر باشد، می‌توان مثلثی رسم کرد که آن سه عدد، طول اضلاع آن باشند.



توشه ای برای موفقیت

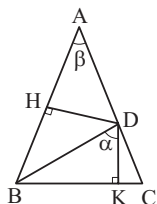
(سوال ۲۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

برای کدام گزاره، می‌توان مثال نقض ارائه کرد؟

- (۱) هر چهارضلعی که قطرهای یکدیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است.
- (۲) اندازه میانه‌های وارد بر اضلاع مساوی در هر مثلث، با هم برابرند.
- (۳) هر چهارضلعی با قطرهای برابر و عمود بر هم، مربع است.
- (۴) نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث هم‌رس‌اند.



۲۲ در شکل زیر، اگر $AB = AC$ ، $AH = BH$ و $HD = KD$ ، آن گاه حاصل $\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟



(۱) $1/6$

(۲) $1/2$

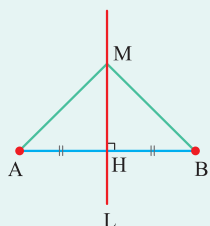
(۳) $1/25$

(۴) $1/5$

پاسخ: گزینه ۴

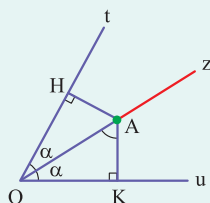
درس Box

(۱) هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و بالعکس، یعنی در شکل زیر:



$$M \in L \text{ (عمودمنصف پاره‌خط } AB) \Leftrightarrow MA = MB$$

(۲) هر نقطه واقع بر نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و بالعکس، یعنی در شکل زیر:

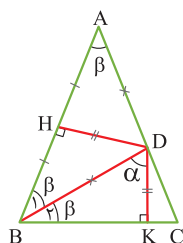


$$A \in Oz \text{ (نیمساز } \hat{O}) \Leftrightarrow AH = AK$$

(۳) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، 180° است.

گام اول: با توجه به شکل و فرض سؤال ($AH = BH$)، نقطه D روی عمودمنصف پاره‌خط AB واقع است، پس $DA = DB$.

یعنی مثلث ABD متساوی الساقین است، پس $\hat{B}_1 = \hat{A} = \beta$



$$\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = \beta$$

گام دوم: طبق فرض سؤال $HD = KD$ ، بنابراین BD نیمساز زاویه ABC است، پس:

گام سوم: طبق فرض $AB = AC$ ، پس مثلث ABC متساوی الساقین است، در نتیجه $\hat{C} = 2\beta$ و داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \beta + 2\beta + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 36^\circ$$

گام چهارم: در مثلث BDK، داریم:

$$\hat{B} + \hat{D} + \hat{K} = 180^\circ \Rightarrow \beta + \alpha + 90^\circ = 180^\circ \xrightarrow{\beta=36^\circ} \alpha = 54^\circ$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{54^\circ}{36^\circ} = \frac{3 \times 18^\circ}{2 \times 18^\circ} = 1/2$$

پس:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۲۳ اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت و $\frac{x^2}{x^2+8} = \frac{y^2}{y^2+2}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{x-y}{x+y}$ کدام است؟

$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

الف) ترکیب نسبت در صورت یا مخرج: اگر a, b, c و d اعدادی حقیقی و $d \neq 0$ و b باشند، آن گاه داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

ب) تفضیل نسبت در صورت و مخرج: اگر a, b, c و d اعدادی حقیقی و $d \neq 0$ و b باشند، آن گاه داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

گام اول: ابتدا به کمک تفضیل نسبت در مخرج، نسبت $\frac{x}{y}$ را محاسبه می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$\frac{x^2}{x^2+8} = \frac{y^2}{y^2+2} \Rightarrow \frac{x^2}{(x^2+8)-x^2} = \frac{y^2}{(y^2+2)-y^2} \Rightarrow \frac{x^2}{8} = \frac{y^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{8}{2} = 4 \xrightarrow{x, y > 0} \frac{x}{y} = 2$$

گام دوم: صورت و مخرج کسر $\frac{x-y}{x+y}$ را بر y تقسیم می کنیم:

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{x}{y}+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

به جور دیگه

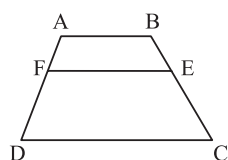
$$\frac{x^2}{x^2+8} = \frac{y^2}{y^2+2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 y^2 + 2x^2 = x^2 y^2 + 8y^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 8y^2 \Rightarrow x^2 = 4y^2 \Rightarrow x = 2y$$

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{2y-y}{2y+y} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

در شکل زیر اگر $CD = 2AB$ و $FD = 2AF$ ، آن گاه نسبت مساحت دوزنقه $ABEF$ به مساحت دوزنقه $CDFE$ کدام است؟

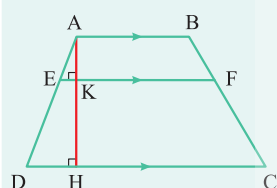


- کدام است؟
- ۱) $\frac{1}{2}$ /
 - ۲) $\frac{2}{25}$ /
 - ۳) $\frac{3}{3}$ /
 - ۴) $\frac{35}{35}$ /

پاسخ: گزینه ۴

در شکل زیر، EF با قاعده‌های دوزنقه ABCD موازی است، داریم:

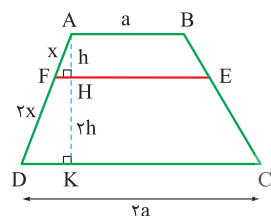
درس Box



$$\begin{aligned} ۱) \quad \frac{AE}{ED} &= \frac{BF}{FC} \\ ۲) \quad \frac{AE}{ED} &= \frac{AK}{KH} \\ ۳) \quad \frac{AE}{ED} &= \frac{EF - AB}{CD - EF} \end{aligned}$$

گام اول: صورت سؤال چهارضلعی‌های $ABEF$ و $CDFE$ را دوزنقه معرفی کرده پس می‌توان گفت: $AB \parallel FE \parallel CD$. حالا با توجه به درس باکس داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\frac{AH}{HK} = \frac{AF}{FD} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = h, HK = 2h$$

گام دوم: بنا به درس باکس، داریم:

$$\frac{EF - AB}{CD - EF} = \frac{AF}{FD} \Rightarrow \frac{EF - a}{2a - EF} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2EF - 2a = 2a - EF \Rightarrow EF = \frac{4a}{3}$$

گام سوم: در نهایت، داریم:

$$\frac{S_{ABEF}}{S_{CDFE}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times (AB + EF)}{\frac{1}{2} HK \times (EF + CD)} = \frac{h(a + \frac{4a}{3})}{2h(\frac{4a}{3} + 2a)} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = ۰/۷۰$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

در یک مثلث قائم الزاویه، با رسم ارتفاع وارد بر وتر، وتر به دو پاره خط به طول های $۲x$ و $x+۲$ تقسیم می شود. اگر نسبت بزرگ ترین ضلع به کوچک ترین ضلع این مثلث $\sqrt{۲/۸}$ باشد، نسبت مقادیر قابل قبول x کدام است؟

۲۳ / ۲ (۲)

۲۳ / ۴ (۱)

۲۲ / ۶ (۴)

۲۲ / ۸ (۳)

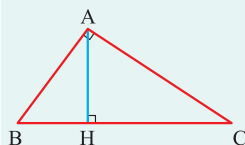
پاسخ: گزینه ۱

طبق روابط طولی در مثلث قائم الزاویه، مربع اندازه هر ضلع قائم را به دست آورید.

Hint

درس Box

مطابق شکل، در مثلث قائم الزاویه AH ، ارتفاع وارد بر وتر است، داریم:



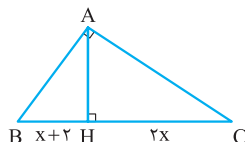
۱) $AB^2 = BH \times BC$

۲) $AC^2 = CH \times BC$

۳) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

گام اول: طبق روابط طولی در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH} (*)$$

گام دوم: فرض کنید $AB < AC$ باشد، در این صورت طبق فرض، $\frac{BC}{AB} = \sqrt{۲/۸} = \sqrt{\frac{۱۴}{۵}} = \frac{\sqrt{۱۴}}{\sqrt{۵}}$ است و در نتیجه می توانیم

فرض کنیم $AB = \sqrt{۵} k$ و $BC = \sqrt{۱۴} k$ که در این صورت بنا به قضیه فیثاغورس:

گام سوم: بنا به تساوی (*) داریم:

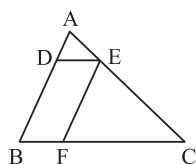
$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \frac{۵}{۹} = \frac{x+۲}{۲x} \Rightarrow ۱۰x = ۹x + ۱۸ \Rightarrow x = ۱۸$$

و در صورتی که $AC < AB$ باشد، $x = \frac{۱}{۱۳}$ به دست می آید که در این صورت، نسبت مقادیر قابل قبول x برابر است با:

$$\frac{۱۸}{\frac{۱}{۱۳}} = \frac{۱۸ \times ۱۳}{۱} = ۲۳ / ۴$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

در شکل زیر، مساحت متوازی الاضلاع BDEF، ثلث مساحت مثلث ABC است. اگر $AD < BD$ ، آن گاه حاصل $\frac{EF}{AB}$ کدام است؟



$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

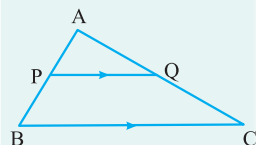
$$\frac{3 + \sqrt{3}}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

۱) در شکل زیر دو نقطه P و Q را به ترتیب روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که $PQ \parallel BC$ ، در این صورت:



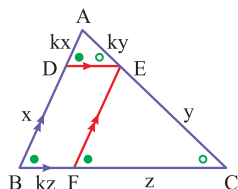
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \quad (\text{قضیه تالس})$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} \quad (\text{تعمیم قضیه تالس})$$

۲) اگر دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشد، آن دو مثلث متشابه‌اند.

۳) نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر است با مجذور نسبت تشابه (نسبت اضلاع متناظر) آن‌ها.

گام اول: با توجه به قضیه موازی مورب، زاویه‌های برابر، روی شکل نشان داده شده‌اند؛ بنابراین دو مثلث ADE و EFC با مثلث ABC متشابه‌اند.



گام دوم: فرض می‌کنیم $\frac{AD}{BD} = k < 1$ و این طور در نظر می‌گیریم که $BD = x$ و $AD = kx$. بنا به قضیه تالس می‌توان در نظر گرفت $(AE = Ky)$ و $(CE = y)$ و $(BF = kz)$ و $(CF = z)$.

گام سوم: از تشابه مثلث‌ها که در گام اول گفتیم، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \quad \text{و} \quad \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CE}{AC}\right)^2 = \left(\frac{1}{k+1}\right)^2$$

گام چهارم: طبق فرض، داریم:

$$\begin{aligned} S_{BDEF} &= \frac{1}{3} S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} - S_{ADE} - S_{CEF} = \frac{1}{3} S_{ABC} \Rightarrow 1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 - \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 = \frac{1}{3} \\ \xrightarrow{\times 3(k+1)^2} \quad 3(k+1)^2 - 3k^2 - 3 &= (k+1)^2 \Rightarrow 2(k+1)^2 - 3k^2 - 3 = 0 \\ \Rightarrow 2(k^2 + 2k + 1) - 3k^2 - 3 &= 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \xrightarrow{k < 1} k = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

گام پنجم: بنا به قضیه تالس، داریم:

$$\triangle ABC : EF \parallel BA \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{k+1} = \frac{1}{3-\sqrt{3}} \times \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

در مثلثی به طول اضلاع ۵، ۵ و ۸، نسبت فاصله نقطه همرسی میانه‌ها از دورترین رأس، به فاصله آن از نزدیک‌ترین رأس، کدام است؟

$$\sqrt{4/25} \quad (۲)$$

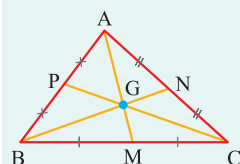
$$۲ \quad (۱)$$

$$\sqrt{4/75} \quad (۴)$$

$$\sqrt{4/5} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

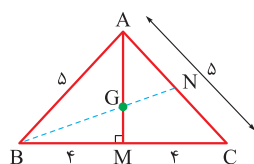
میانه‌های هر مثلث هم‌رسانند و نقطه هم‌رسی آن‌ها، هر میانه را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند، مثلاً در شکل زیر داریم:



$$\frac{AG}{AM} = \frac{BG}{BN} = \frac{CG}{CP} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{GM}{AM} = \frac{GN}{BN} = \frac{GP}{CP} = \frac{1}{3}$$

گام اول: شکل مناسب را رسم می‌کنیم، از آن‌جا که مثلث مفروض سؤال متساوی‌الساقین است، میانه وارد بر ضلع به طول ۸، بر



آن عمود است و خواسته سؤال، مقدار $\frac{BG}{AG}$ است.

گام دوم: بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث ABM، داریم $AM = 3$ و بنا به خاصیت نقطه هم‌رسی میانه‌ها، داریم:

$$GM = \frac{1}{3} AM = 1 \quad \text{و} \quad AG = \frac{2}{3} AM = 2$$

$$BG = \sqrt{BM^2 + GM^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

گام سوم: بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث BGM، داریم:

$$\frac{BG}{AG} = \frac{\sqrt{17}}{2} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \sqrt{4/25}$$

پس خواسته سؤال، برابر است با:

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای برابر $\frac{9}{5}$ است. حداکثر تعداد نقاط مرزی این چندضلعی کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۹ (۳)

۱۷ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

در یک چندضلعی شبکه‌ای، اگر تعداد نقاط مرزی را b ، تعداد نقاط درونی را i و مساحت را با S نمایش دهیم، آن‌گاه:

(۱) حداقل مقدار b ، برابر با ۳ است.

(۲) حداقل مقدار i ، برابر با صفر است.

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \quad (۳)$$

درستی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به این‌که $S = \frac{b}{2} + i - 1$ ، اگر S معلوم باشد، حداکثر مقدار b زمانی به دست می‌آید که i حداقل باشد. حداقل تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه‌ای برابر با صفر است، یعنی در این چندضلعی شبکه‌ای $i = 0$ می‌باشد. اگر تعداد نقاط مرزی را b در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow \frac{9}{5} = \frac{b}{2} + 0 - 1 \Rightarrow b = 21$$

ایران توننه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۹ دو صفحه، در کدام حالت زیر حتماً موازی یکدیگرند؟

- (۱) هر دو بر یک صفحه عمود باشند.
- (۲) هر دو بر یک خط عمود باشند.
- (۳) هر دو موازی یک خط باشند.
- (۴) هر کدام شامل خطی موازی دیگری باشند.

مشاوره این سؤال بر اساس دو مفهوم خطها و صفحه‌های موازی و متعامد (خطها و صفحه‌های عمود بر هم) و مشابه کار در کلاس صفحه ۸۳ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

(۱) دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند.

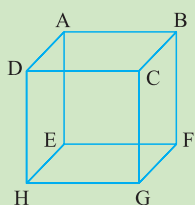
(۲) دو صفحه عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

(۳) اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

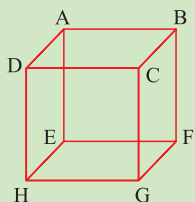
(۴) اگر صفحه‌ای بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

گام اول: دو صفحه که بر صفحه سوم عمود باشند، لزوماً موازی یکدیگر نیستند. به عنوان مثال در شکل مقابل دو صفحه متقاطع ABFE و ADHE هر دو بر صفحه ABCD عمودند ولی با هم موازی نیستند؛ بنابراین گزینه (۱) نادرست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

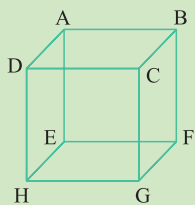


گام دوم: طبق مورد (۲) درس باکس، دو صفحه که بر یک خط عمود باشند، موازی یکدیگرند، پس گزینه (۲) درست است.



گام سوم: دو صفحه که موازی یک خط باشند، لزوماً موازی یکدیگر نیستند. به عنوان مثال در شکل مقابل خط AB با هر دو صفحه EFGH و DCGH موازی است، ولی این دو صفحه متقاطع‌اند؛ بنابراین گزینه (۳) نادرست است.

گام چهارم: دو صفحه که هر کدام شامل خطی موازی دیگری باشند، لزوماً موازی یکدیگر نیستند. به عنوان مثال در شکل زیر، خط AB از صفحه ABCD موازی صفحه DCGH و خط GH از صفحه DCGH موازی صفحه ABCD است، ولی این دو صفحه متقاطع‌اند.



(هندسه (۱) - کار در کلاس صفحه ۸۳ کتاب درسی)

می‌دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.



(الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟

(ب) آیا دو صفحه عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟

(ج) دو صفحه عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(د) اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

(ه) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید.

کتاب
درسی

یکی از زاویه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه، دو برابر زاویه دیگر آن است. اگر طول وتر این مثلث برابر با واحد باشد، کم‌ترین مقدار ممکن برای حجم شکل حاصل از دوران آن، حول ضلع کوچک‌تر، چند برابر π است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{24} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

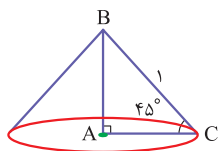
درس‌Box

(۱) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم b و c ، حول ضلع به طول b ، مخروط قائمی به ارتفاع b و شعاع قاعده c است.

(۲) حجم مخروط قائمی به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با: $\frac{1}{3} \pi r^2 h$.

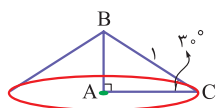
گام اول: دو حالت امکان‌پذیر است: (۱) زاویه‌های مثلث $(۴۵^\circ, ۴۵^\circ, ۹۰^\circ)$ باشد یا (۲) زاویه‌های آن $(۳۰^\circ, ۶۰^\circ, ۹۰^\circ)$ باشد.

گام دوم: در مثلث ABC طبق فرض صورت سؤال $BC = ۱$ است. در حالت (۱)، شعاع قاعده مخروط قائم حاصل از دوران $AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و ارتفاع آن $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است که حجم آن می‌شود:



$$\begin{cases} AB = BC \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ AC = BC \times \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{12} \pi$$

گام سوم: در حالت (۲)، شعاع قاعده مخروط قائم حاصل از دوران $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و ارتفاع آن $AB = \frac{1}{2}$ است که حجم آن می‌شود:



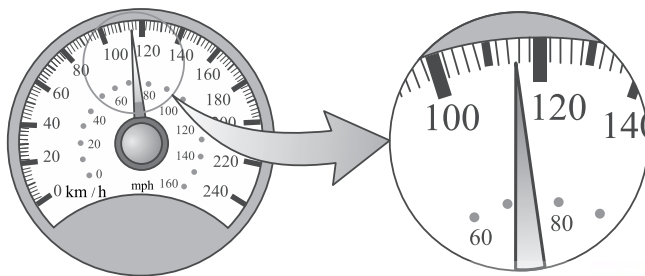
$$\begin{cases} AB = BC \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ AC = BC \times \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} \pi$$

گام چهارم: خواسته سؤال، برابر است با $\frac{\sqrt{2}}{12}$ ، زیرا:

$$\frac{\sqrt{2}}{12} = \sqrt{\frac{2}{144}} = \sqrt{\frac{1}{72}} < \frac{1}{8} = \sqrt{\frac{1}{64}}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

شکل زیر، صفحه تندی سنج یک خودرو را نشان می‌دهد. دقت اندازه‌گیری این تندی سنج چند کیلومتر بر ساعت است؟



۱۰ (۴)

۵ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

دقت اندازه‌گیری یک ابزار مدرج برابر با کم‌ترین مقدار درجه‌بندی آن ابزار است.

درس Box

گام اول: اختلاف دو مقدار متوالی داده شده برای تندی را به دست می‌آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 120 - 100 = 20 \text{ km/h}$$

گام دوم: حالا می‌بینیم که فاصله بین این دو تندی، به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شده است و با تقسیم اختلاف تندی به تعداد

$$\text{فاصله‌ها، دقت اندازه‌گیری را به دست می‌آوریم:} \quad \text{دقت اندازه‌گیری} = \frac{\text{اختلاف دو عدد}}{\text{تعداد فاصله‌ها}} = \frac{20}{10} = 2 \text{ km/h}$$

بنابراین با توجه به تصویر بزرگ‌شده تندی سنج، کم‌ترین مقدار درجه‌بندی شده، یعنی دقت اندازه‌گیری آن، ۲ km/h است.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

چگالی قطعه جواهری که ۷۵ درصد جرم آن از طلا و بقیه جرم آن از نقره تشکیل شده، تقریباً برابر چند گرم بر

سانتی متر مکعب است؟ (چگالی طلا و نقره به ترتیب 19 g/cm^3 و 10 g/cm^3 است.)

۱۲/۲۵ (۲)

۱۱/۵ (۱)

۱۶/۷۵ (۴)

۱۵/۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

کارت Box

چگالی مخلوط: اگر دو یا چند ماده را با هم مخلوط کنیم، چگالی مخلوط حاصل، از رابطه زیر محاسبه می شود (اگر در تشکیل مخلوط، تغییر حجم صورت نگیرد):

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots}$$

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2 + \dots}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \dots}$$

اگر جرم و چگالی، جزء داده ها یا خواسته های سؤال باشد:

با توجه به درس باکس، ابتدا رابطه چگالی مخلوط را بر حسب جرم و چگالی می نویسیم: (جرم کل قطعه جواهر را m در نظر بگیرد.)

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_{\text{طلا}} + m_{\text{نقره}}}{\frac{m_{\text{طلا}}}{\rho_{\text{طلا}}} + \frac{m_{\text{نقره}}}{\rho_{\text{نقره}}}} \quad \frac{m_{\text{طلا}} = \frac{3}{4}m, \rho_{\text{طلا}} = 19 \text{ g/cm}^3}{m_{\text{نقره}} = \frac{1}{4}m, \rho_{\text{نقره}} = 10 \text{ g/cm}^3} \rightarrow \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m}{\frac{3}{4} \frac{m}{19} + \frac{1}{4} \frac{m}{10}} =$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m}{\frac{3m}{76} + \frac{m}{40}} = \frac{1}{\frac{3}{76} + \frac{1}{40}} = \frac{1}{\frac{3 \times 40 + 76}{76 \times 40}} = \frac{76 \times 40}{3 \times 40 + 76} = \frac{3040}{196} \approx 15.5 \text{ g/cm}^3$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

ارتفاع برجی برابر 480 m است. اگر فشار هوا در پایین برج برابر 72 cmHg باشد، فشار هوا در بالای برج چند سانتی‌متر جیوه است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و چگالی جیوه 13.6 g/cm^3 و چگالی متوسط هوا 1.275 kg/m^3 است).

$$71/55 \text{ (2)}$$

$$67/5 \text{ (1)}$$

$$76/5 \text{ (4)}$$

$$72/45 \text{ (3)}$$

پاسخ: گزینه ۱

فشار ناشی از شاره، به چگالی و عمق آن وابسته است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

درس Box

$$P = \rho gh$$

P : فشار ناشی از شاره (Pa)

ρ : چگالی (kg/m^3)

g : شتاب گرانش (N/kg)

h : ارتفاع (m)

گام اول: وقتی از پایین برج به بالای آن می‌رویم، به اندازه ارتفاع برج از ضخامت ستون هوای بالای سر ما کم می‌شود، کاهش فشار، برابر است با فشار ناشی از وزن همین ستون هوا:

$$\Delta P = \rho_{\text{هوا}} gh_{\text{برج}}$$

گام دوم: از طرفی می‌خواهیم این افت فشار را برحسب سانتی‌متر جیوه بیان کنیم، پس باید ببینیم این مقدار فشار هوا، معادل چه ارتفاعی از ستون جیوه است.

$$\Delta P = \rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}}$$

گام سوم: با مساوی قرار دادن دو رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\rho_{\text{هوا}} h_{\text{برج}} = \rho_{\text{جیوه}} h_{\text{جیوه}} \quad \frac{\rho_{\text{هوا}} = 1.275 \text{ kg/m}^3, h_{\text{برج}} = 480 \text{ m}}{\rho_{\text{جیوه}} = 13.6 \text{ g/cm}^3 = 13600 \text{ kg/m}^3} \rightarrow 1.275 \times 480 = 1360 \cdot h_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = 0.45 \text{ m} \times \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 45 \text{ cm}$$

رفتن به بالای برج، فشاری معادل 45 سانتی‌متر از ستون جیوه را از فشار هوا کم می‌کند.

گام چهارم: فشار هوا در بالای برج، برابر است با اختلاف فشار بین پایین برج و افت فشار محاسبه‌شده:

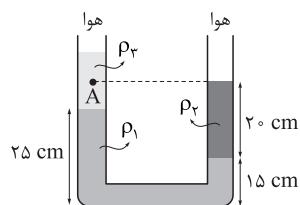
$$P_{\text{بالا}} = P_{\text{پایین}} - \Delta h_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow P_{\text{بالا}} = 72 - 45 = 27 \text{ cmHg}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

در شکل زیر، سه مایع مخلوط‌نشدنی به چگالی‌های $\rho_1 = 4 \text{ g/cm}^3$ ، $\rho_2 = 3 \text{ g/cm}^3$ و $\rho_3 = 1 \text{ g/cm}^3$ در لوله U شکلی در تعادل هستند. فشار پیمانه‌ای نقطه A چند پاسکال است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



$$10^3 \quad (1)$$

$$1/5 \times 10^3 \quad (2)$$

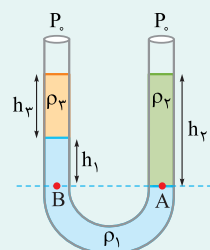
$$5 \times 10^2 \quad (3)$$

$$2 \times 10^3 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

۱) اگر دو نقطه، در یک نوع مایع قرار داشته و هم‌تراز باشند، فشار آن‌ها با هم برابر است، به عنوان مثال در شکل زیر، نقاط A و B در یک مایع و هم‌تراز هستند، پس هم‌فشار هستند؛ یعنی:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_2 g h_2 + P_0 = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + P_0$$

$$\Rightarrow \rho_2 h_2 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$$

۲) فشار پیمانه‌ای: به اختلاف میان فشار کل و فشار هوا، فشار پیمانه‌ای گفته می‌شود.

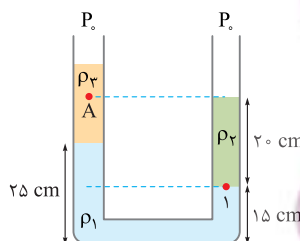
$$P_g = P - P_0$$

P_g : فشار پیمانه‌ای (Pa)

P : فشار کل (Pa)

P_0 : فشار هوا (Pa)

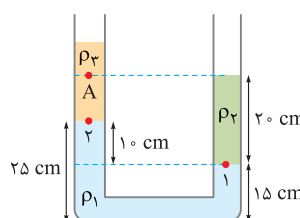
گام اول: ابتدا پایین‌ترین سطح تماس بین مایعات را به عنوان خط هم‌فشار در نظر می‌گیریم. نقطه (۱) در شاخه سمت راست و در ارتفاع ۱۵ سانتی‌متری از کف قرار دارد، فشار در این نقطه برابر است با:



$$P_1 = P_0 + \rho_2 g h_2$$

$$\frac{\rho_2 = 3 \text{ g/cm}^3 = 3000 \text{ kg/m}^3, g = 10 \text{ N/kg}}{h_2 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}} \rightarrow P_1 = P_0 + 3000 \times 10 \times 0.2 = P_0 + 6000 \text{ Pa}$$

گام دوم: نقطه (۲) در مرز مشترک مایع‌های (۱) و (۳) در ارتفاع ۲۵ سانتی‌متری از کف لوله قرار دارد. این نقطه نسبت به نقطه (۱) ۱۰ سانتی‌متر بالاتر است. با حرکت به سمت بالا درون مایع (۱) فشار کاهش می‌یابد:



$$P_2 = P_1 - \rho_1 g \Delta h \xrightarrow{P_1 = P_0 + 6000 \text{ Pa}, g = 10 \text{ N/kg}, \Delta h = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \rho_1 = 4 \text{ g/cm}^3 = 4000 \text{ kg/m}^3}$$

$$P_2 = P_0 + 6000 - (4000 \times 10 \times 0.1) \Rightarrow P_2 = P_0 + 2000 \text{ Pa}$$

گام سوم: مطابق شکل، نقطه A، دقیقاً با سطح آزاد مایع ۲ در شاخه سمت راست هم‌تراز است، پس نقطه A در ارتفاع ۳۵ سانتی‌متری از کف قرار دارد.

فاصله نقطه A تا مرز مایع‌های (۱) و (۳) برابر ۱۰ سانتی‌متر است، پس برای رسیدن به نقطه A، باید ۱۰ سانتی‌متر در مایع (۳) بالا برویم.

$$P_A = P_3 - \rho_3 g h_A$$

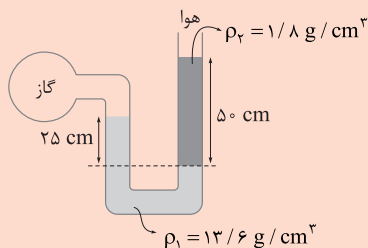
$$\frac{P_3 = P_0 + 2000 \text{ Pa}, g = 10 \text{ N/kg}}{h_A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \rho_3 = 1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3} \rightarrow P_A = P_0 + 2000 - (1000 \times 10 \times 0.1) \Rightarrow P_A = P_0 + 1000 \text{ Pa}$$

گام چهارم: حالا فشار پیمانه‌ای نقطه A را محاسبه می‌کنیم:

$$P_g = P_A - P_0 \Rightarrow P_g = P_0 + 1000 - P_0 = 1000 \text{ Pa} = 10^3 \text{ Pa}$$



۳۵ در شکل زیر، فشار پیمانه‌ای گاز چند کیلوپاسکال است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



۴۳ (۱)

-۴۳ (۲)

۲۵ (۳)

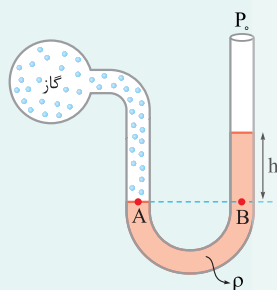
-۲۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

وسیله اندازه‌گیری فشار گاز (مانومتر): عبارت است از یک لوله U شکل محتوی مایع که یک سر آن باز بوده و با هوای آزاد در تماس است و طرف دیگر آن به یک مخزن گاز یا هر جایی که باید فشار آن اندازه‌گیری شود، وصل می‌شود.

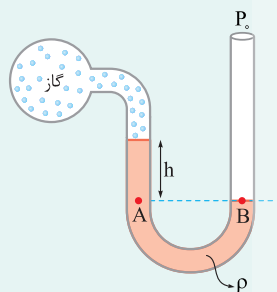
الف) فشار گاز، بیشتر از فشار جو است.



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = \rho gh + P_0$$

(فشار پیمانه‌ای: $P_{\text{گاز}} - P_0 = \rho gh$)

ب) فشار گاز، کمتر از فشار جو است.

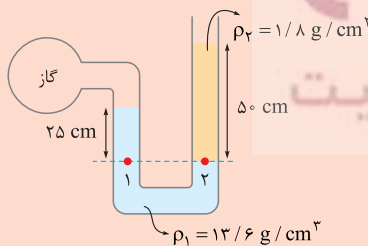


$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho gh = P_0 \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_0 - \rho gh$$

(فشار پیمانه‌ای: $P_{\text{گاز}} - P_0 = -\rho gh$)

گام اول: سطح تماس بین دو مایع مختلف را به عنوان سطح هم‌فشار در نظر می‌گیریم:

✓ پاسخ خیلی تشریحی



$$P_1 = P_2$$

$$\Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho_1 gh_1 = \rho_2 gh_2 + P_0$$

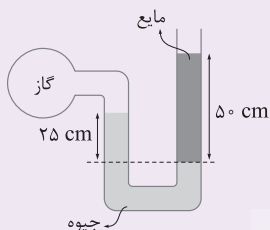
گام دوم: حالا داده‌ها را جای‌گذاری می‌کنیم و فشار پیمانه‌ای را به دست می‌آوریم:

$$P_{\text{گاز}} - P_0 = \rho_2 gh_2 - \rho_1 gh_1$$

$$\frac{\rho_1 = 13/6 \text{ g/cm}^3 = 13600 \text{ kg/m}^3, \rho_2 = 1/8 \text{ g/cm}^3 = 125 \text{ kg/m}^3}{g = 10 \text{ N/kg}, h_1 = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}, h_2 = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}} \rightarrow P_g = P_{\text{گاز}} - P_0 = 125 \times 10 \times 0.5 - (13600 \times 10 \times 0.25)$$

$$= -25000 \text{ Pa} = -25 \text{ kPa}$$

در شکل زیر، فشار پیمانه ای گاز -25 kPa است. چگالی مایع، چند kg/m^3 است؟ ($\rho_{\text{جیوه}} = 13.6 \text{ g/cm}^3$ و $g = 10 \text{ m/s}^2$)
(سؤال ۴۴ کنکور تهری ۱۴۰۲ - نوبت اول)



۳۶۰۰ (۱)

۲۵۰۰ (۲)

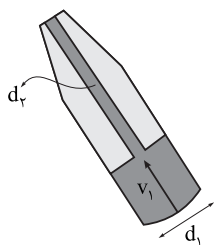
۱۸۰۰ (۳)

۹۰۰ (۴)



در شیر آتش‌نشانی شکل زیر، قطر مقطع قسمت‌های ورودی و خروجی به ترتیب $d_1 = 8 \text{ cm}$ و $d_2 = 2 \text{ cm}$ است،

اگر آب با تندی 4 m/s وارد شیر شود، با تندی چند متر بر ثانیه از شیر خارج می‌شود؟



(۱) ۸

(۲) ۱۶

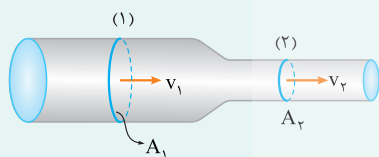
(۳) ۳۲

(۴) ۶۴

پاسخ: گزینه ۴

کرتی Box

معادله پیوستگی: اگر مطابق شکل زیر، شاره تراکم‌ناپذیر، همه جای لوله را پر کرده و درون لوله با جریان لایه‌ای در حال حرکت باشد، در حالت پایا، آهنگ شارش حجمی شاره از همه مقاطع لوله یکسان است:



$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

A_1 : مساحت مقطع (۱) (m^2)

A_2 : مساحت مقطع (۲) (m^2)

v_1 : تندی شاره در مقطع (۱) (m/s)

v_2 : تندی شاره در مقطع (۲) (m/s)

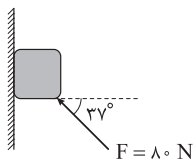
معادله پیوستگی را می‌نویسیم و داده‌ها را جای‌گذاری می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \xrightarrow[A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \pi \text{ cm}^2]{A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = 16\pi \text{ cm}^2, v_1 = 4 \text{ m/s}} (16\pi)4 = \pi v_2 \Rightarrow v_2 = 64 \text{ m/s}$$

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

در شکل زیر، به جسمی به جرم 8 kg که روی دیوار قائم قرار دارد، نیروی $F = 80 \text{ N}$ که با سطح افق زاویه 37° می‌سازد، وارد می‌شود. اگر جسم به سمت پایین در حال حرکت باشد، در مدتی که جسم 50 cm جابه‌جا می‌شود، کار انجام‌شده توسط نیروی F ، برابر چند ژول است؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$)



۲۴ (۱)

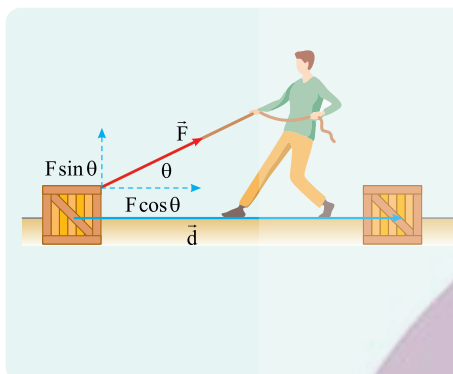
۳۲ (۲)

-۲۴ (۳)

-۳۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box



$$W_F = Fd \cos \theta$$

W_F : کار نیروی $\vec{F}$ (J)

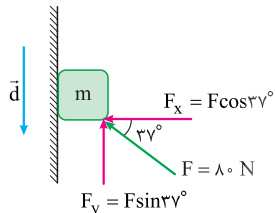
F : اندازه نیرو (N)

d : اندازه جابه‌جایی (m)

θ : زاویه بین بردارهای نیرو و جابه‌جایی

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق صورت سؤال، جسم به سمت پایین حرکت می‌کند، پس بردار جابه‌جایی در راستای قائم و رو به پایین است؛ همان طور که در شکل مشخص است، نیروی F ، به طور مایل به دیوار وارد می‌شود و پس از تجزیه آن می‌بینیم که فقط مؤلفه قائم $\vec{F}_y$ کار انجام می‌دهد. با توجه به شکل داریم:



$$F_y = F \times \sin 37^\circ$$

$$\frac{F=80 \text{ N}}{\sin 37^\circ=0.6} \rightarrow F_y = 80 \times \frac{6}{10} = 48 \text{ N} \Rightarrow \text{این مؤلفه رو به بالا است.}$$

گام دوم: زاویه بین مؤلفه نیروی F_y و بردار جابه‌جایی، برابر 180° است، پس داریم:

$$W_F = F_y \times d \times \cos 180^\circ$$

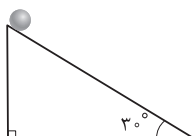
$$\Rightarrow W_F = 48 \times 0.5 \times (-1) \Rightarrow W_F = -24 \text{ J}$$

چون بردارهای نیرو و جابه‌جایی در خلاف جهت هم بودند، کار با علامت منفی به دست آمده است.

نکته

در شکل زیر، جسمی از بالای یک سطح شیبدار بدون اصطکاک به طول ۴ m رها می‌شود. تندی جسم هنگام

رسیدن به پایین سطح شیبدار چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ N / kg}$)



(۱) $\sqrt{10}$

(۲) $2\sqrt{10}$

(۳) $2\sqrt{5}$

(۴) $4\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

(۱) انرژی مکانیکی جسم برابر با مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل آن است:

$$E = K + U$$

E: انرژی مکانیکی (J)

K: انرژی جنبشی (J)

U: انرژی پتانسیل گرانشی (J)

(۲) اصل پایستگی انرژی مکانیکی: در غیاب نیروهای اتلافی مانند مقاومت هوا، اصطکاک و ... انرژی مکانیکی جسم در تمام نقاط مسیر حرکت آن مقدار یکسانی دارد:

$$E_1 = E_2 \xrightarrow{\Delta E=0} \Delta K + \Delta U = 0$$

گام اول: برای محاسبه انرژی پتانسیل گرانشی، به ارتفاع قائم جسم نیاز داریم، نه طول سطح شیبدار. با استفاده از رابطه مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه شکل می‌توان نوشت:

$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل (ارتفاع)}}{\text{وتر (طول سطح)}} = \frac{h_1}{L} \Rightarrow h_1 = L \sin \theta$$

$$\Rightarrow h_1 = 4 \times \sin 30^\circ = 4 \times 0.5 = 2 \text{ m}$$

گام دوم: حالا با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی، تندی نهایی جسم را به دست می‌آوریم:

$$E_1 = E_2$$

$$\Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \xrightarrow{\substack{K_1=0 \\ U_2=0}} U_1 = K_2$$

$$\Rightarrow mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 \xrightarrow{\substack{h_1=2\text{ m} \\ g=10\text{ m/s}^2}} 10 \times 2 = \frac{v_2^2}{2} \Rightarrow v_2^2 = 40 \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{10} \text{ m/s}$$

پاسخ خیلی تشریحی

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

گلوله‌ای به جرم 25 g با تندی اولیه 80 m/s از سطح زمین پرتاب می‌شود و در ارتفاع 236 متری از سطح زمین با تندی 20 m/s به صخره‌ای برخورد می‌کند، از لحظه پرتاب گلوله تا لحظه برخورد آن به صخره، به ترتیب از راست به چپ کار کل انجام‌شده روی گلوله و کار نیروی مقاومت هوای وارد بر آن چند ژول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

- (۱) $-16, -75$ (۲) $-134, -75$
(۳) $-16, -750$ (۴) $-134, -750$

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

(۱) قضیه کار - انرژی جنبشی: کار انجام‌شده روی یک جسم در یک جابه‌جایی معین، با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است.

$$W_t = K_f - K_i$$

W_t : کار کل (کار برابند نیروها) (J)

K_f : انرژی جنبشی در وضعیت ۲ (J)

K_i : انرژی جنبشی در وضعیت ۱ (J)

(۲) رابطه تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم:

$$\Delta U = mg\Delta h$$

ΔU : تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم (J)

m : جرم جسم (kg)

g : شتاب گرانشی (N/kg)

Δh : تغییر ارتفاع (m)

کار نیروی وزن برابر قرینه تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم است.

$$W_{mg} = -\Delta U$$

گام اول: با توجه به قضیه کار - انرژی جنبشی، کار کل به تغییرات انرژی جنبشی وابسته است:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \xrightarrow{v_i=80 \text{ m/s}, v_f=20 \text{ m/s}, m=25 \text{ g}=25 \times 10^{-3} \text{ kg}} W_t = \frac{1}{2} \times 25 \times 10^{-3} (400 - 6400)$$

$$W_t = -75 \text{ J}$$

گام دوم: کار کل، جمع جبری تمام کارها است. در این جا فقط کار نیروی وزن و کار نیروی مقاومت هوا بر جسم اثر گذاشته‌اند.

$$W_t = W_{mg} + W_{f_k}$$

$$W_{mg} = -\Delta U = -mg(h_f - h_i) \Rightarrow W_{mg} = -25 \times 10^{-3} \times 10 \times (236 - 0) \Rightarrow W_{mg} = -59 \text{ J}$$

گام سوم: حالا کار نیروی مقاومت هوا را به دست می‌آوریم:

$$W_t = W_{mg} + W_{f_k}$$

$$\Rightarrow -75 = -59 + W_{f_k} \Rightarrow W_{f_k} = -16 \text{ J}$$

قسمت دوم سؤال، یعنی محاسبه کار نیروی مقاومت هوا را می‌توان از قانون پایستگی انرژی نیز به دست آورد.

$$W_f = E_f - E_i \Rightarrow W_{f_k} = U_f + K_f - (U_i + K_i) \xrightarrow{U_i=0} W_f = mgh_f + K_f - K_i$$

$$\xrightarrow{\substack{m=25 \text{ g}=25 \times 10^{-3} \text{ kg}, g=10 \text{ m/s}^2, h_f=236 \text{ m} \\ v_i=80 \text{ m/s}, v_f=20 \text{ m/s}}} W_f = 25 \times 10^{-3} \times 10 \times 236 + \frac{1}{2} \times 25 \times 10^{-3} \times 400 - \frac{1}{2} \times 25 \times 10^{-3} \times 6400$$

$$\Rightarrow W_f = 59 + 5 - 80 \Rightarrow W_f = -16 \text{ J}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

په‌چور دیگه

گلوله‌ای با تندی اولیه 80 m/s از سطح زمین پرتاب می‌شود و در ارتفاع 236 متری از سطح زمین با تندی 20 m/s به صخره‌ای برخورد می‌کند. چند درصد انرژی جنبشی اولیه گلوله در اثر مقاومت هوا تلف شده است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(سوال ۶۸ کنکور تهرانی ۱۴۰۲ - نوبت اول)

۵ (۴)

۱۰ (۳)

۲۰ (۲)

۲۵ (۱)



یک پمپ با توان ۸ kW در هر دقیقه ۱۲۰۰ L نفت را با تندی ثابت، به اندازه ۲۵ m بالا می‌برد. بازده این پمپ چند

درصد است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و چگالی نفت 8 g/cm^3 است.)

۳۷ / ۵ (۲)

۲۵ (۱)

۶۲ / ۵ (۴)

۵۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

(۱) توان: کار انجام‌شده در واحد زمان (آهنگ انجام کار) را توان متوسط می‌گوییم:

درس Box

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

P_{av} : توان متوسط (W)

W: کار (J)

Δt : بازه زمانی (s)

(۲) رابطه بازده:

$$Ra = \frac{P_r}{P_i} \times 100$$

Ra: بازده برحسب درصد

P_r : توان مفید (خروجی) (W)

P_i : توان مصرفی (ورودی) (W)

گام اول: نفت با تندی ثابت بالا می‌رود، پس تغییرات انرژی جنبشی آن صفر است و تمام کار مفید پمپ، صرف افزایش انرژی پتانسیل گرانشی نفت می‌شود:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$W_t = K_f - K_i = 0 \Rightarrow W_{\text{پمپ}} + W_{mg} = 0 \Rightarrow W_{\text{پمپ}} = -W_{mg} = \Delta U$$

$$\Rightarrow W_{\text{مفید}} = \Delta U = mg\Delta h = \rho V g \Delta h$$

$$\frac{\rho = 8 \text{ g/cm}^3 = 8000 \text{ kg/m}^3, V = 1200 \text{ L} = 1/2 \text{ m}^3}{g = 10 \text{ N/kg}, \Delta h = 25 \text{ m}} \rightarrow W_{\text{مفید}} = 8000 \times 1/2 \times 10 \times 25 = 240000 \text{ J}$$

گام دوم: حالا توان مفید (خروجی) را محاسبه می‌کنیم:

$$P_{\text{مفید}} = \frac{W_{\text{مفید}}}{\Delta t} \Rightarrow P_{\text{مفید}} = \frac{240000}{60} = 4000 \text{ W}$$

گام سوم: در پایان، بازده را به دست می‌آوریم:

$$Ra = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{مصرفی}}} \times 100 = \frac{4000}{8000} \times 100 = 50\%$$

طول یک پل معلق در دمای $^{\circ}\text{F} - 80$ برابر 1200 m است. این پل از نوعی فولاد با ضریب انبساط طولی $\frac{1}{K} = 10^{-5} \times \frac{1}{25}$ ساخته شده است، اگر دمای پل به $^{\circ}\text{F} 100$ برسد، تغییر طول پل تقریباً چند متر است؟

۰ / ۲۷ (۲)

۰ / ۱۵ (۱)

۲ / ۷ (۴)

۱ / ۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

(۱) رابطه انبساط طولی:

دروس Box

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta T$$

ΔL : تغییرات طول (m)

L_1 : طول اولیه (m)

α : ضریب انبساط طولی ($\frac{1}{K}$)

ΔT : تغییرات دما (K)

ΔF : تغییر دما بر حسب فارنهایت

(۲) رابطه تبدیل تغییرات دما از مقیاس کلون به فارنهایت

ΔT : تغییر دما بر حسب کلون

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta T$$

گام اول: ابتدا یکای تغییرات دما را از فارنهایت به کلون تبدیل می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta T \xrightarrow{F_2 = 100^{\circ}\text{F}, F_1 = -80^{\circ}\text{F}} 100 - (-80) = \frac{9}{5} \Delta T \Rightarrow 180 = \frac{9}{5} \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{180 \times 5}{9} = 100 \text{ K}$$

گام دوم: حالا تغییرات طول پل را به دست می آوریم:

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta T \xrightarrow{L_1 = 1200 \text{ m}, \alpha = 1/25 \times 10^{-5} \frac{1}{K}, \Delta T = 100 \text{ K}} \Delta L = 1200 \times 1/25 \times 10^{-5} \times 100 = 1/5 \text{ m}$$

طول یک پل معلق در دمای $^{\circ}\text{F} - 58$ برابر 1158 m است. این پل از نوعی فولاد با $\alpha = 1/3 \times 10^{-5} \frac{1}{K}$ ساخته شده

است. اگر دمای پل به $^{\circ}\text{F} 122$ برسد، تغییر طول پل تقریباً چند متر است؟ (سوال ۷۰ کنکور تهری ۱۴۰۲ - نوبت اول)

۱ / ۲ (۲)

۱ / ۵ (۱)

۰ / ۹۸ (۴)

۰ / ۹۶ (۳)

پایه دوازدهم ریاضی
سوم مهرماه ۱۴۰۵
مرحله چهارم

ظرفیت گرمایی کره مسی A، ۴ برابر ظرفیت گرمایی کره مسی B و شعاع کره A، ۲ برابر شعاع کره B است. اگر دو کره گرمای یکسانی دریافت کنند، افزایش حجم کره A چند برابر افزایش حجم کره B است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

رابطه محاسبه انبساط حجمی در اثر تغییر دمای ΔT برای جامدات:

$$\Delta V = V_1 \alpha \Delta T$$

جامدات:

ΔV : تغییر حجم (m^3)

V_1 : حجم اولیه (m^3)

ΔT : تغییر دما (K)

α : ضریب انبساط حجمی جامد (K^{-1})

با توجه به رابطه $Q = mc\Delta T$ ، ظرفیت گرمایی برابر است با $C = mc$.

گام اول: طبق رابطه $Q = C\Delta\theta$ نسبت تغییرات دمای دو کره را به دست می‌آوریم:

$$Q_A = Q_B \Rightarrow C_A \Delta\theta_A = C_B \Delta\theta_B \xrightarrow{C_A = 4C_B} 4C_B \Delta\theta_A = C_B \Delta\theta_B \Rightarrow \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} = \frac{1}{4}$$

گام دوم: حالا از رابطه $\Delta V = V_1(\alpha)\Delta\theta$ نسبت تغییرات حجم دو کره را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{V_{1A}}{V_{1B}} \times \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_A^3}{\frac{4}{3}\pi r_B^3} \times \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 \times \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} \xrightarrow{r_A = 2r_B} \frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = (2)^3 \times \frac{1}{4} = 2$$

پرسش: آیا کره‌ها توپر هستند؟

پاسخ: خیر. حداقل یکی از آن‌ها توپر نیست، چون اگر توپر بودند، می‌باید نسبت ظرفیت گرمایی و نسبت حجم اولیه آن‌ها برابر می‌شد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_A}{C_B} = \frac{m_{AC}}{m_{BC}} = \frac{m_A}{m_B} = 4 \\ \frac{V_A}{V_B} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 = (2)^3 = 8 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} \neq \frac{V_A}{V_B} \Rightarrow \text{حداقل یکی از کره‌ها تو خالی است.}$$

درس‌Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

ایران تولد
توشه ای برای موفقیت

مقداری یخ با دمای -10°C با دریافت گرما به آب با دمای 15°C تبدیل می‌شود. چند درصد از گرمای دریافتی یخ،

صرف ذوب آن شده است؟ ($L_F = 336 \text{ J/g}$, $c_{\text{آب}} = 42 \text{ J/g} \cdot ^{\circ}\text{C}$, $c_{\text{یخ}} = 21 \text{ J/g} \cdot ^{\circ}\text{C}$)

۸۵ (۴)

۸۰ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

(۱) برای جسمی که بدون تغییر حالت، در اثر تبادل گرمایی، فقط دمای آن تغییر می‌کند، می‌توان نوشت:

$$Q = mc\Delta T$$

Q : گرما (J)

m : جرم (kg)

c : گرمای ویژه ($\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$)

$C = mc$: ظرفیت گرمایی (J/K) یا ($\text{J/}^{\circ}\text{C}$)

$\Delta\theta = \Delta T$: تغییر دما (K) یا ($^{\circ}\text{C}$)

(۲) وقتی جسم جامدی در دمای ذوب خود، از حالت جامد به مایع تبدیل شود و یا مایعی در همین دما به جامد تبدیل شود، روابط زیر را داریم:

$$Q = \pm mL_F$$

↑ ذوب
↓ انجماد

Q : گرما (J)

m : جرم (kg)

L_F : گرمای نهان ذوب (J/kg)

گام اول: ابتدا گرمای مورد نیاز هر مرحله را برحسب جرم m می‌نویسیم:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$Q_1 = mc\Delta\theta \text{ (افزایش دمای یخ)} \xrightarrow{c_{\text{یخ}} = 21 \text{ J/g} \cdot \text{K}, \Delta\theta = -(-10) = 10^{\circ}\text{C}} Q_1 = m \times 21 \times 10 = 21m \text{ J}$$

$$Q_2 = mL_F \text{ (ذوب یخ)} \xrightarrow{L_F = 336 \text{ J/g}} Q_2 = 336m \text{ J}$$

$$Q_3 = mc\Delta\theta \text{ (افزایش دمای آب)} \xrightarrow{c_{\text{آب}} = 42 \text{ J/g} \cdot \text{K}, \Delta\theta = 15 - 0 = 15^{\circ}\text{C}} Q_3 = m \times 42 \times 15 = 63m \text{ J}$$

گام دوم: کل گرمای دریافتی را به دست می‌آوریم:

$$Q_t = Q_1 + Q_2 + Q_3 \Rightarrow Q_t = 21m + 336m + 63m \Rightarrow Q_t = 420m \text{ J}$$

گام سوم: حالا نسبت Q_2 (گرمای لازم برای ذوب شدن) به گرمای کل را به صورت درصدی محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{Q_2}{Q_t} \times 100 \Rightarrow \frac{336m}{420m} \times 100 = 80\%$$

می‌توانستیم جرم جسم را 1 kg فرض کنیم و به کمک رابطه‌های $c_{\text{آب}} = 42$ و $c_{\text{یخ}} = 21$ محاسبات را ساده‌تر کنیم.

تیزبازی

درون ظرفی مقداری آب به جرم m و دمای 10°C ریخته شده است. اگر داخل این ظرف قطعه یخی به جرم 600 g و دمای 10°C قرار دهیم، تا رسیدن مجموعه به تعادل گرمایی، نیمی از آب منجمد می‌شود. m برابر چند گرم است؟

$$\left(c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}, c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}, L_F = 336 \times 10^3 \text{ J/kg} \text{ و اتلاف گرما ناچیز است.} \right)$$

۶۰ (۴)

۷۵ (۳)

۱۵۰ (۲)

۳۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به متن سؤال و عبارت «نیمی از آب منجمد شده است، می‌فهمیم که پس از تعادل گرمایی، در ظرف، هم آب وجود دارد و هم یخ و این یعنی دمای تعادل مجموعه برابر با 0°C است.

ابتدا گرمای دریافت‌شده توسط یخ تا رسیدن به دمای ذوب خود را محاسبه می‌کنیم:

$$Q_{\text{دریافت‌شده توسط یخ}} = mc\Delta\theta$$

$$\frac{c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}, m = 600 \text{ g} = 0.6 \text{ kg}}{\Delta\theta = (0 - (-10)) = 10^\circ\text{C}} \rightarrow Q_{\text{دریافت‌شده توسط یخ}} = 0.6 \times 2100 \times 10 = 12600 \text{ J}$$

گام دوم: حالا گرمایی را که آب از دست داده، محاسبه می‌کنیم:

$$1) Q_1 = mc_{\text{آب}}\Delta\theta \xrightarrow{c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}, |\Delta\theta| = |0 - (+10)| = 10^\circ\text{C}} Q_1 = m \times 4200 \times 10 = 42000m \text{ J}$$

$$2) Q_2 = \frac{m}{\rho} L_F \xrightarrow{L_F = 336000 \text{ J/kg}} Q_2 = \frac{m}{\rho} \times 336000 = 168000m \text{ J}$$

$$Q_{\text{آب دست داده}} = 42000m + 168000m = 210000m \text{ J}$$

گام سوم: حالا گرمایی را که آب از دست داده با گرمایی که یخ دریافت کرده، مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم و m را به دست می‌آوریم:

$$Q_{\text{دریافت‌شده یخ}} = Q_{\text{آب دست داده}}$$

$$12600 = 210000m \Rightarrow m = 0.06 \text{ kg} = 60 \text{ g}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

در چه تعداد از موارد زیر همرفت طبیعی رخ می دهد؟

(الف) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن

(ب) سیستم گرم کننده مرکزی در ساختمان ها

(پ) گرم و سرد شدن بخش های مختلف بدن بر اثر گردش خون در بدن جانوران خونگرم

(۴) صفر

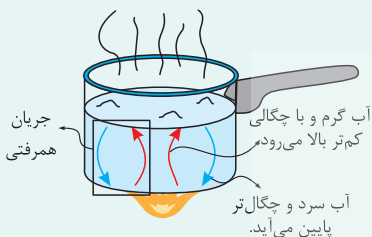
(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۱

درس Box



الف) همرفت طبیعی: با گرم شدن قسمتی از شاره، حجم شاره در آن قسمت زیاد شده و چگالی آن قسمت کم می شود، بنابراین شاره در آن قسمت به سمت بالا حرکت می کند و شاره با دمای کم تر که چگالی اش بیشتر است، به سمت پایین حرکت می کند. شکل مقابل چنین جریان همرفتی را نشان می دهد:

ب) همرفت واداشته: در این حالت، به کمک یک تلمبه، شاره را وادار به چرخش و انتقال گرما می کنیم؛ به عنوان مثال دستگاه گردش خون در بدن که توسط یک تلمبه طبیعی (قلب)، جریان خون را در بدن به حرکت وامی دارد، نمونه ای از همرفت واداشته است.

تک تک عبارات را بررسی می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی

الف) خورشید دارای لایه ای به نام «ناحیه همرفتی» است. در این ناحیه، پلاسمای بسیار داغ از لایه های زیرین به دلیل دمای بالاتر و چگالی کم تر، به سمت سطح خورشید صعود می کند، پس از رسیدن به سطح خورشید و تابش انرژی به فضا، پلازما خنک تر و چگال تر شده و مجدداً به اعماق سقوط می کند. از آن جا که این چرخه کاملاً براساس اختلاف چگالی و بدون هیچ عامل خارجی رخ می دهد، نوعی همرفت طبیعی است.

(وضعیت: همرفت طبیعی ✓)

ب) در سیستم های گرمایش مرکزی (مانند شوفاژ و موتورخانه)، آب گرم شده در دیگ بخار، باید مسیر طولانی لوله ها را طی کند تا به رادیاتورها برسد. برای غلبه بر اصطکاک داخل لوله ها و تسریع جریان، از یک پمپ (تلمبه) آب استفاده می شود؛ چون یک عامل مکانیکی (پمپ) شاره را به حرکت درمی آورد، این پدیده از نوع همرفت واداشته است.

(وضعیت: همرفت واداشته ✗)

پ) خون که حامل گرمای بدن است، خودبه خود و بر اثر اختلاف چگالی در رگ ها حرکت نمی کند؛ بلکه قلب (به عنوان یک پمپ بیولوژیکی) خون را با فشار در سراسر بدن به جریان می اندازد، بنابراین انتقال گرمای ناشی از گردش خون، یک نمونه از همرفت واداشته است.

(وضعیت: همرفت واداشته ✗)

بنابراین فقط عبارت «الف» مربوط به همرفت طبیعی است و گزینه (۱) صحیح می باشد.

(سؤال ۷۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

کدام مورد همرفت طبیعی است؟

(۱) سیستم خنک کننده موتور اتومبیل

(۲) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن

(۳) سیستم گرم کننده مرکزی در ساختمان ها

(۴) گرم و سرد شدن بخش های مختلف بدن بر اثر گردش خون در بدن جانوران خونگرم

دمای گاز درون یک کپسول، صفر درجهٔ سلسیوس و فشار پیمانه‌ای آن ۵ cmHg است. چه کسری از جرم گاز درون این کپسول از آن خارج شود تا دمای گاز درون کپسول به ۳۹ °C و فشار پیمانه‌ای آن به ۵ cmHg - برسد؟ ($P_o = ۶۵ \text{ cmHg}$)

$$\frac{1}{8} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{8} \text{ (۳)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) رابطهٔ تبدیل یکای سلسیوس (درجهٔ سلسیوس) به یکای کلوین:

$$T = \theta + ۲۷۳ \text{ (K)}$$

↓
دما (°C)

$$PV = nRT$$

۲) رابطهٔ قانون گازهای آرمانی (کامل):

P : فشار مطلق (Pa)

V : حجم (m^3)

n : تعداد مول (mol)

R : ثابت جهانی گازها ($\frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$) ($۸/۳۱۴$)

T : دما (K)

۳) تعداد مول‌های گاز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$n = \frac{m}{M} \rightarrow \text{جرم مولی (g/mol)} \leftarrow \text{جرم (g)} \rightarrow n = \frac{m}{M} \leftarrow \text{تعداد مول (mol)}$$

گام اول: ابتدا دماها را برحسب کلوین و فشارها را برحسب فشار مطلق به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$T = \theta + ۲۷۳$$

$$T_1 = ۰ + ۲۷۳ = ۲۷۳ \text{ K}$$

$$T_2 = ۳۹ + ۲۷۳ = ۳۱۲ \text{ K}$$

$$P = P_o + P_g$$

$$P_1 = P_o + P_{g1} = ۶۵ + ۵ = ۷۰ \text{ cmHg}$$

$$P_2 = P_o + P_{g2} = ۶۵ + (-۵) = ۶۰ \text{ cmHg}$$

گام دوم: با توجه به رابطهٔ گازهای آرمانی و $n = \frac{m}{M}$ داریم:

$$PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow m = \frac{PVM}{RT}$$

حالا این رابطه را به صورت نسبتی می‌نویسیم و چون M و R ثابت هستند، داریم:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{P_2}{P_1} \times \frac{T_1}{T_2} \xrightarrow{P_2=۶۰ \text{ cmHg}, T_1=۲۷۳ \text{ K}; P_1=۷۰ \text{ cmHg}, T_2=۳۱۲ \text{ K}} \frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{۶۰}{۷۰}\right) \left(\frac{۲۷۳}{۳۱۲}\right) \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{۶}{۷}\right) \left(\frac{۷}{۸}\right) = \frac{۳}{۴}$$

بنابراین، $\frac{۳}{۴}$ از جرم گاز، درون کپسول باقی مانده است. سؤال از ما «کسر خارج‌شده» را می‌خواهد:

$$\text{کسر جرم خارج‌شده} = ۱ - \frac{m_2}{m_1} = ۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

در چرخه ماشین درون سوز بنزینی، نوع فرایند طی شده در مراحل آتش گرفتن و ضربه تراکم، به ترتیب از راست به

چپ کدام است؟

(۲) هم حجم، بی دررو

(۱) هم حجم، هم حجم

(۴) هم فشار، بی دررو

(۳) هم فشار، هم حجم

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

(۱) مرحله آتش گرفتن: زمانی که پیستون به بالاترین نقطه مسیر خود می‌رسد، مخلوط متراکم شده بنزین و هوا آتش می‌گیرد. از آن‌جا که این انفجار در کسری از ثانیه و بسیار سریع رخ می‌دهد، پیستون در این بازه زمانی بسیار کوتاه فرصت حرکت و تغییر دادن حجم داخل سیلندر را ندارد، بنابراین گرما وارد سیستم شده و دما و فشار به شدت بالا می‌روند؛ در حالی که حجم ثابت مانده است، پس این فرایند، هم حجم است.

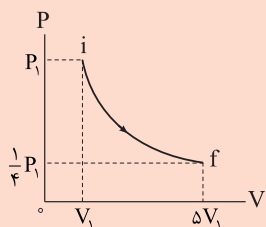
(۲) ضربه تراکم: پیستون بالا می‌آید، مخلوط را متراکم می‌کند و آن را به حجم V_1 می‌رساند. این تراکم به سرعت رخ می‌دهد. بنابراین، می‌توان آن را بی‌دررو در نظر گرفت. در نتیجه، در پایان این مرحله، دما و فشار مخلوط بسیار بالا رفته است.

با توجه به درس باکس، مرحله آتش گرفتن، هم حجم و مرحله ضربه تراکم، بی‌دررو است.

✓ پاسخ خیلی تشریحی

ایران تونلنه
توشه ای برای موفقیت

در نمودار شکل زیر، مقداری گاز آرمانی طی فرایندی ایستوار از حالت i به حالت f می‌رسد. اگر در این فرایند، تغییر انرژی درونی گاز برابر ΔU و گرمای داده شده به گاز برابر Q باشد، کدام رابطه زیر درست است؟



(۱) $\Delta U > 0 > Q$

(۲) $Q > 0 > \Delta U$

(۳) $Q > \Delta U > 0$

(۴) $\Delta U > Q > 0$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

قانون اول ترمودینامیک: در یک فرایند ایستوار، تغییر انرژی درونی دستگاه، برابر است با مجموع کار انجام شده توسط محیط روی دستگاه (گاز) و گرمای داده شده به دستگاه (گاز):

$$\Delta U = Q + W$$

$$\Delta U = U_f - U_i \text{ : تغییر انرژی درونی (J)}$$

$$U_i \text{ : انرژی درونی اولیه (J)}$$

$$U_f \text{ : انرژی درونی نهایی (J)}$$

اگر دستگاه گرما بگیرد، $Q > 0$ و اگر دستگاه گرما از دست بدهد، $Q < 0$.

هنگام تراکم $W > 0$ و هنگام انبساط $W < 0$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: انرژی درونی مقدار معینی از یک گاز آرمانی فقط به دمای آن بستگی دارد، پس برای یافتن علامت ΔU ، باید ببینیم دما چه تغییری کرده است. مطابق معادله گازهای آرمانی، دما با PV نسبت مستقیم دارد، پس این حاصل ضرب را برای دو حالت i و f به دست می آوریم:

$$\frac{T_f}{T_i} = \frac{P_f V_f}{P_i V_i} = \frac{\frac{1}{4} P_i \times 4 V_i}{P_i V_i} = \frac{1}{4}$$

پس $T_f > T_i$ و در نتیجه $\Delta U > 0$ است.

گام دوم: با توجه به نمودار، می فهمیم که حجم گاز از V_1 به $4V_1$ رسیده است، پس گاز منبسط شده است ($\Delta V > 0$)، در نتیجه کار انجام شده توسط محیط روی گاز، منفی است ($W < 0$).

گام سوم: از قانون اول ترمودینامیک استفاده می کنیم و آن را بر حسب Q می نویسیم:

$$Q = \Delta U - W$$

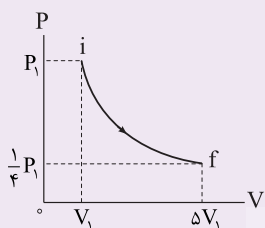
از گام دوم می دانیم W منفی است، پس $-W$ یک عدد مثبت است و این یعنی Q از ΔU بزرگ تر است: $Q > \Delta U$ و چون $\Delta U > 0$ است، پس داریم:

$$Q > \Delta U > 0$$

په جور دیگه در گام سوم: $\rightarrow$

$$\overset{+}{\Delta U} = \overset{+}{Q} + \overset{-}{W} \xrightarrow{\Delta U > 0, W < 0} Q > \Delta U > 0$$

مقداری گاز آرمانی طی فرایندی ایستاوار از حالت i به حالت f می‌رسد. اگر W کار انجام شده روی گاز و Q گرمای داده شده به گاز باشد، کدام رابطه درست است؟
(سوال ۷۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)



(۱) $|W| > |Q|$

(۲) $|W| = |Q|$

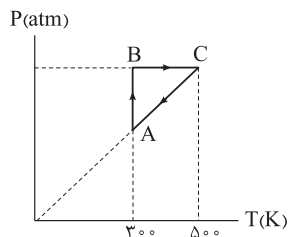
(۳) $W + Q > 0$

(۴) $W + Q < 0$

ایران توننده
توشه ای برای موفقیت

نمودار فشار 5 mol / گاز کامل بر حسب دمای آن در طی چرخه‌ای به شکل زیر است. اگر اندازه گرمای مبادله‌شده بین

گاز و محیط در فرایند AB برابر 600 J باشد، کار انجام‌شده روی گاز در هر چرخه چند ژول است؟ $(R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}})$



- (۱) ۲۰۰
- (۲) -۲۰۰
- (۳) ۱۴۰۰
- (۴) -۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۲

رابطه کار در فرایند هم‌فشار:

درس‌Box

$$W = -nR\Delta T$$

W : کار محیط روی دستگاه یا کار انجام‌شده روی گاز (J)

n : تعداد مول (mol)

R : ثابت جهانی گازها $(\frac{\text{J}}{\text{mol.K}})$

ΔT : تغییر دما (K)

گام اول: ابتدا نوع هر فرایند را مشخص می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

● فرایند $A \rightarrow C$: امتداد این خط از مبدأ مختصات نمودار $P-T$ می‌گذرد. در گازهای کامل، رابطه‌ای که در آن، فشار با دمای مطلق نسبت مستقیم دارد ($P \propto T$)، نشان‌دهنده ثابت بودن حجم است، پس این فرایند هم‌حجم است.

● فرایند $B \rightarrow C$: نمودار $P-T$ به صورت یک خط افقی است، یعنی فشار گاز تغییر نکرده است؛ پس این فرایند هم‌فشار است.

● فرایند $A \rightarrow B$: نمودار $P-T$ به صورت یک خط عمودی روی دمای 300 K است، پس این فرایند هم‌دما است.

گام دوم: برای یافتن کار کل چرخه، کار انجام‌شده روی گاز در هر سه مسیر را محاسبه می‌کنیم و با هم جمع می‌کنیم.

● کار در مسیر $C \rightarrow A$: چون فرایند هم‌حجم است، تغییری در حجم گاز نداریم ($\Delta V = 0$)، در نتیجه کاری انجام نمی‌شود:

$$W_{CA} = 0$$

● کار در مسیر $B \rightarrow C$: در فرایند هم‌فشار، کار انجام‌شده روی گاز از رابطه $W = -P\Delta V$ به دست می‌آید، اما چون حجم را نداریم، با استفاده از معادله حالت گاز کامل ($P\Delta V = nR\Delta T$)، رابطه را برحسب دما می‌نویسیم:

$$W_{BC} = -nR\Delta T_{BC} = -nR(T_C - T_B)$$

$$\xrightarrow[T=8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}, n=5 \text{ mol}]{T_B=300 \text{ K}, T_C=500 \text{ K}} W_{BC} = -5 \times 8 \times 200 = -800 \text{ J}$$

● کار در مسیر $A \rightarrow B$: در فرایند هم‌دما، تغییرات انرژی درونی صفر است ($\Delta U = 0$). طبق قانون اول ترمودینامیک:

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow 0 = Q_{AB} + W_{AB} \Rightarrow W_{AB} = -Q_{AB}$$

صورت سؤال، اندازه گرمای مبادله‌شده در این مسیر را 600 J داده است ($|Q| = 600 \text{ J}$). برای تعیین علامت کار، به نمودار نگاه می‌کنیم. در مسیر A به B ، در دمای ثابت، فشار در حال افزایش است. افزایش فشار در فرایند هم‌دما به معنای کاهش حجم (تراکم) است. در فرایند تراکمی، کار انجام‌شده روی گاز مثبت است:

$$W_{AB} = +600 \text{ J}$$

حالا هر سه کار را با هم جمع می‌کنیم:

$$W_{\text{چرخه}} = W_{CA} + W_{BC} + W_{AB} \Rightarrow W_{\text{چرخه}} = 0 + (-800) + 600 = -200 \text{ J}$$

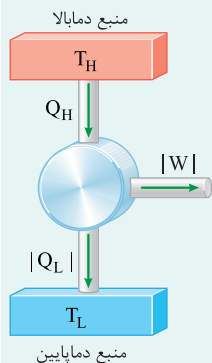
اندازه گرمایی که یک ماشین گرمایی در هر چرخه، با منبع دمابالا و منبع دمابالین مبادله می کند، به ترتیب 3 kJ و 8 kJ است. اگر این ماشین در هر دقیقه 20 چرخه را طی کند، توان مفید آن چند وات و بازده آن چند درصد است؟

- (۱) $60, 4000$ (۲) $40, 4000$ (۳) $60, 2400$ (۴) $40, 2400$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

بازده ماشین گرمایی: هر ماشین گرمایی، گرمای Q_H را به عنوان گرمای دریافتی از یک منبع با دمای بالا گرفته و مقداری از آن را به صورت کار $|W|$ روی محیط انجام می دهد که به عنوان کار مفید خروجی است. باقی مانده آن را نیز که گرمای $|Q_L|$ است، به یک منبع با دمای پایین می دهد که همان انرژی تلف شده است.



$$Q_H = |W| + |Q_L|$$

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H}$$

بازده:

توان خروجی یک ماشین گرمایی از رابطه زیر به دست می آید:

$$P = \frac{|W|}{\Delta t} \rightarrow \text{کار مفید خروجی (J)} \rightarrow \text{بازده زمانی (s)} \rightarrow \text{توان خروجی (W)}$$

گام اول: در هر ماشین گرمایی، کار انجام شده در یک چرخه برابر است با تفاضل گرمای دریافتی از منبع گرم و گرمای انتقال یافته به منبع سرد:

$$|W| = Q_H - |Q_L| \rightarrow \frac{Q_H = 3000 \text{ J}}{|Q_L| = 1800 \text{ J}} \rightarrow |W| = 3000 - 1800 = 1200 \text{ J}$$

گام دوم: بازده نشان می دهد چه کسری از گرمای دریافتی به کار مفید تبدیل شده است. برای بیان آن، به صورت درصد داریم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \times 100$$

$$\eta = \frac{1200}{3000} \times 100 = 0.4 \times 100 = 40\%$$

(تا این جا دیدیم که بازده 40% است، بنابراین گزینه های (۱) و (۳) که بازده را 60% داده اند، رد می شوند.)

گام سوم: چون ماشین گرمایی در هر دقیقه، 20 چرخه را طی می کند، باید کار یک چرخه را در تعداد چرخه ها ضرب می کنیم:

$$W_{\text{total}} = n \times |W|$$

$$W_{\text{total}} = 20 \times 1200 \text{ J} = 24000 \text{ J}$$

گام چهارم: حالا توان ماشین گرمایی را محاسبه می کنیم:

$$P = \frac{W_{\text{total}}}{t}$$

$$P = \frac{24000 \text{ J}}{60 \text{ s}} = 400 \text{ W}$$

پاسخ خیلی تشریحی

شیمی دهم

شرایط STP

۵۱ چگالی کدام گاز در دمای ۲۷۳ K و فشار ۱ atm، به تقریب برابر $1/79 \text{ g.L}^{-1}$ است؟

($\text{H} = 1, \text{He} = 4, \text{C} = 12, \text{N} = 14, \text{Ar} = 40 : \text{g.mol}^{-1}$)

(۲) نیتروژن

(۱) هلیوم

(۴) متان

(۳) آرگون

پاسخ: گزینه ۳

برای محاسبه چگالی یک گاز در شرایط STP (دمای 0°C و فشار ۱ atm)، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:



$$\text{چگالی} = \frac{\text{جرم مولی}}{\text{حجم مولی}} \xrightarrow{\text{شرایط STP}} \text{چگالی} = \frac{\text{جرم مولی}}{22.4} (\text{g.L}^{-1})$$

ابتدا به کمک چگالی، جرم مولی گاز را حساب می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\text{چگالی} = \frac{\text{جرم مولی}}{\text{حجم مولی}} \Rightarrow \text{جرم مولی} = 1/79 \times 22.4 / 4 \approx 40 \text{ g.mol}^{-1}$$

در بین گازهای داده‌شده، فقط جرم مولی آرگون (Ar)، ۴۰ گرم بر مول است.

ایران تونلنه
توشه ای برای موفقیت

اگر در اتم یک عنصر، زیرلایه‌ای با عددهای کوانتومی $l = 1$ و $n = 5$ در حال پرشدن از الکترون باشد، مطابق قاعده آفا، زیرلایه با کدام مشخصات، به یقین از الکترون پر است؟

$$n = 6, l = 2$$

$$n = 4, l = 3$$

$$n = 4, l = 2$$

$$n = 7, l = 0$$

پاسخ: گزینه ۴

ترتیب پرشدن زیرلایه‌ها طبق قاعده آفا را می‌توان با فرمول زیر بیان کرد:

$$ns \rightarrow (n-2)f \rightarrow (n-1)d \rightarrow np$$

$n \geq 1$ $n \geq 6$ $n \geq 4$ $n \geq 2$

در سؤال‌هایی که از شما پرسیده می‌شود که قبل یا بعد از فلان زیرلایه، چه زیرلایه‌ای از الکترون اشغال می‌شود، این فرمول کولاک می‌کند!

مثال بعد از زیرلایه $5s$ ، چه زیرلایه‌ای از الکترون اشغال می‌شود؟

پاسخ: $4d$ - مطابق فرمول بالا، بعد از ns ، زیرلایه $(n-2)f$ اشغال می‌شود، اما چون در این جا، n کوچک‌تر از ۶ است، می‌ریزیم سراغ $(n-1)d$!

$$ns \rightarrow (n-2)f \rightarrow (n-1)d \rightarrow np$$

$n \geq 1$ $n \geq 6$ $n \geq 4$ $n \geq 2$

$$5s \rightarrow \times \rightarrow 4d$$

مثال قبل از زیرلایه $5d$ ، چه زیرلایه‌ای از الکترون اشغال می‌شود؟

پاسخ: $4f$

$$(n-1)d = 5d \Rightarrow n = 6$$

$$ns \rightarrow (n-2)f \rightarrow (n-1)d \rightarrow np$$

$$(6-2)f = 4f \leftarrow 5d$$

زیرلایه با عددهای کوانتومی $l = 1$ و $n = 5$ ، زیرلایه $5p$ است. قبل از زیرلایه $5p$ ، زیرلایه $4d$ ($n = 4$ و $l = 2$) از الکترون اشغال شده است.

$$5s \rightarrow 4d \rightarrow 5p \rightarrow 6s \rightarrow 4f \rightarrow 5d \rightarrow 6p \rightarrow 7s$$

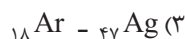
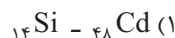
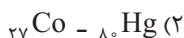
در گزینه‌های (۱) تا (۳)، به زیرلایه‌های $4f$ ، $6d$ و $7s$ اشاره شده است که همگی بعد از $5p$ از الکترون اشغال می‌شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران توننت
توشه‌ای برای موفقیت

جرم هسته یون پایدار X^{2+} مربوط به نوترون‌های آن است. اگر اختلاف شمار ذرات زیراتمی در هسته این اتم

برابر ۵ باشد، X با عنصر هم‌گروه و با عنصر هم‌دوره است. ($m_p = m_n = 1 \text{ amu}$)



پاسخ: گزینه ۲

ابتدا باید به کمک اطلاعات داده‌شده، عدد اتمی عنصر X را پیدا کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{A}{Z} X^{2+} \Rightarrow \frac{\text{جرم نوترون}}{\text{جرم هسته}} = \frac{Y}{13} \Rightarrow \frac{A-Z}{A} = \frac{Y}{13} \Rightarrow 13A - 13Z = 7A \Rightarrow 6A = 13Z \Rightarrow A = \frac{13}{6} Z$$

$$\text{اختلاف شمار نوترون و پروتون} = 5 \Rightarrow (A-Z) - Z = 5 \Rightarrow A - 2Z = 5 \xrightarrow{A = \frac{13}{6} Z} \frac{13}{6} Z - 2Z = 5$$

$$\Rightarrow \frac{Z}{6} = 5 \Rightarrow Z = 30$$

$$\frac{Y}{13} A = n \Rightarrow \frac{6}{13} A = p \Rightarrow \frac{n}{p} = \frac{Y}{6}$$

$$n - p = 5 \Rightarrow \frac{Y}{6} p - p = 5 \Rightarrow p = 30$$

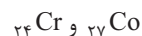
په‌جور دیگه

عنصر X همان فلز روی (${}_{30}^{64}\text{Zn}$) است که متعلق به دوره چهارم و گروه ۱۲ است.

عدد اتمی ${}_{30}^{64}\text{Zn}$ نسبت به گاز نجیب هم‌دوره‌اش (${}_{36}^{84}\text{Kr}$)، ۶ واحد کمتر است؛ پس عنصری با Zn هم‌گروه است که عدد اتمی‌اش نسبت به گاز نجیب هم‌دوره‌اش، ۶ واحد کمتر باشد.

در قسمت اول گزینه‌ها، ${}_{48}^{112}\text{Cd}$ و ${}_{80}^{200}\text{Hg}$ ، این ویژگی را دارند:

$$\text{گروه } 12 \Rightarrow 86 - 6 = 80, \text{ گروه } 12 \Rightarrow 54 - 6 = 48$$



عنصرهایی با عدد اتمی ۱۹ تا ۳۶ در دوره چهارم قرار دارند:

توجه! در محدوده کنکور، برای پیدا کردن گروه عنصرهایی به غیر از گروه ۱، ۲ و عنصرهای دسته f، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

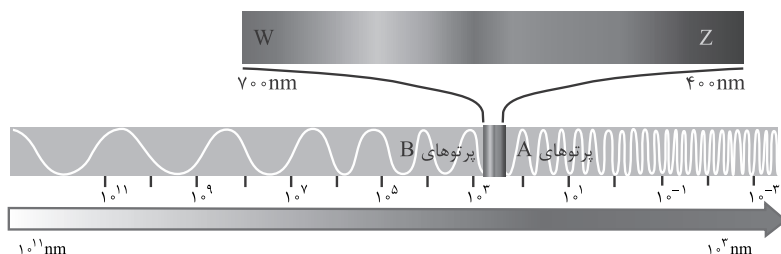
(عدداً اتمی عنصر مورد نظر - عدد اتمی گاز نجیب هم‌دوره) - ۱۸ = شماره گروه

مثلاً برای ${}_{48}^{112}\text{Cd}$ داریم:

$$12 = 112 - (54 - 6) = 12$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۵۴ با توجه به شکل زیر «گستره پرتوهای الکترومغناطیسی» کدام گزینه نادرست است؟

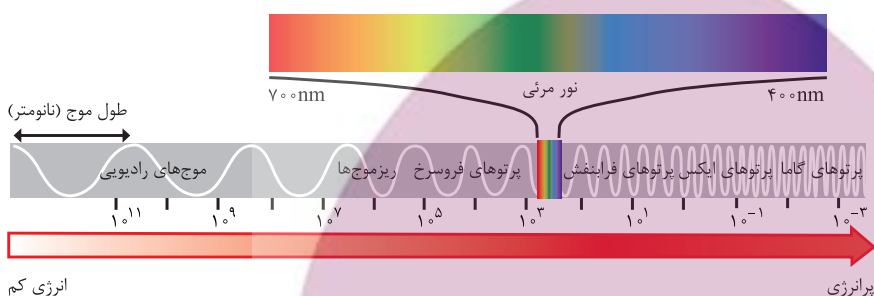


- (۱) پرتوهای B، انرژی بیشتری نسبت به ریزموجها دارند.
- (۲) در عبور از منشور، انحراف پرتوهای W کم تر از پرتوهای Z است.
- (۳) مولکولهای اوزون موجود در استراتوسفر، بخش قابل توجهی از پرتوهای A را جذب می کنند.
- (۴) تفاوت طول موج پرتوهای B و پرتوهای گاما، کم تر از تفاوت طول موج پرتوهای A و پرتوهای ایکس است.

پاسخ: گزینه ۴

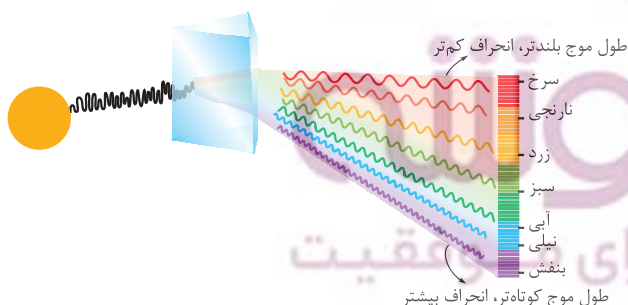
شکل کامل گستره پرتوهای الکترومغناطیسی به صورت زیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



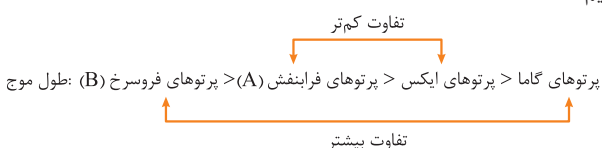
بررسی گزینه ها:

- گزینه (۱): پرتوهای B همان پرتوهای فروسرخ هستند که طول موج بلندتر و انرژی کمتری نسبت به ریزموجها دارند.
- گزینه (۲): هر چه طول موج یک پرتو کوتاه تر باشد (انرژی آن بیشتر باشد)، میزان انحراف آن در عبور از منشور بیشتر است.



- گزینه (۳): پرتوهای A، پرتوهای فرابنفش هستند. در لایه استراتوسفر، مولکولهای اوزون مانع ورود بخش عمده ای از این پرتوها به زمین می شوند.

گزینه (۴): با توجه به مقایسه طول موج پرتوها خواهیم داشت:



در اتم عنصری، ۴ لایه الکترونی اشغال شده است. اگر بیرونی ترین زیرلایه این اتم دارای ۱ الکترون باشد، تفاوت حداقل و حداکثر عدد اتمی که می توان برای این عنصر در نظر گرفت، کدام است؟

۵ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) **۴s^۱ یا ۴p^۱**

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به این که در اتم مورد نظر، ۴ لایه الکترونی اشغال شده است، آرایش الکترونی آن به ۴s یا ۴p ختم می شود. همه حالت هایی که این زیرلایه ها دارای یک الکترون می باشد را می نویسیم:

- ۱) ${}_{19}\text{K} : [\text{Ar}] 4s^1$
- ۲) ${}_{24}\text{Cr} : [\text{Ar}] 3d^5 4s^1$
- ۳) ${}_{29}\text{Cu} : [\text{Ar}] 3d^{10} 4s^1$
- ۴) ${}_{31}\text{Ga} : [\text{Ar}] 3d^{10} 4s^2 4p^1$

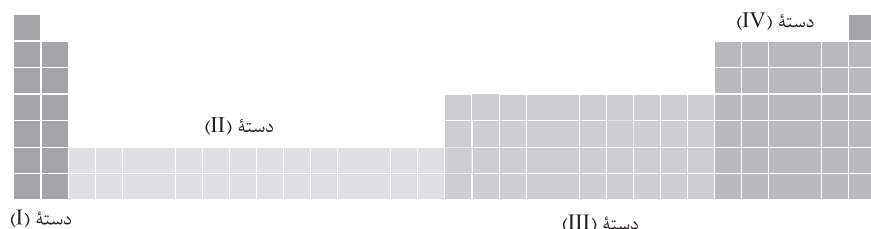
حداقل و حداکثر عدد اتمی ممکن برای A به ترتیب برابر ۱۹ و ۳۱ است:

$$31 - 19 = 12$$



عنصرهای جدول دوره‌ای را می‌توان در چهار دسته (s, p, d و f) به صورت زیر جای داد. بر این اساس، کدام مورد

نادرست است؟



(۱) نخستین عنصر ساخت بشر در دسته (III) قرار دارد. ${}_{43}^{98}\text{Tc}$

(۲) گازهای نجیب در دسته‌های (I) و (IV) قرار دارند.

(۳) تفاوت عدد اتمی اولین و آخرین عنصر دسته (II)، برابر ۲۸ است.

(۴) عدد کوانتومی فرعی در بیرونی‌ترین زیرلایه اتم عنصرهای دسته (III)، برابر صفر است.

پاسخ: گزینه ۳

✓ پاسخ خیلی تشریحی

دسته I ← دسته s (۱۴ عنصر)

دسته II ← دسته f (۲۸ عنصر)

دسته III ← دسته d (۴۰ عنصر)

دسته IV ← دسته p (۳۶ عنصر)

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): نخستین عنصر ساخت بشر، تکنسیم با عدد اتمی ۴۳ است. عدد اتمی این عنصر، ۷ واحد بیشتر از گاز نجیب دوره

چهارم (Kr ۳۶) است؛ پس در گروه ۷ و دوره پنجم قرار دارد و جزء عنصرهای دسته d محسوب می‌شود.

شماره دوره	عددهای اتمی عنصرهای دسته p	عددهای اتمی عنصرهای دسته d
۲	۵ - ۱۰	
۳	۱۳ - ۱۸	
۴	۳۱ - ۳۶	۲۱ - ۳۰
۵	۴۹ - ۵۴	۳۹ - ۴۸
۶	۸۱ - ۸۶	۷۱ - ۸۰
۷	۱۱۳ - ۱۱۸	۱۰۳ - ۱۱۲

گزینه (۲): گاز نجیب هلیوم متعلق به دسته s و سایر گازهای نجیب، متعلق به دسته p هستند.

گزینه (۳): عنصرهایی با عددهای اتمی ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲ در دو ردیف پایین جدول قرار گرفته‌اند و جزء عنصرهای دسته f

محسوب می‌شوند؛ بنابراین تفاوت عدد اتمی اولین و آخرین عنصر دسته f جدول برابر با $۱۰۲ - ۵۷ = ۴۵$ است.

گزینه (۴): دسته (III)، همان عنصرهای دسته d هستند. آرایش الکترونی اتم این عنصرها به $(n-1)d^x ns^y$ ختم می‌شود،

یعنی بیرونی‌ترین زیرلایه آن‌ها، ns با عدد کوانتومی فرعی $l = 0$ است.

کدام گزینه درست است؟ ۵۷

- (۱) بررسی‌های دانشمندان نشان می‌دهد که درصد گازهای سازندهٔ هواکره در حال حاضر نسبت به ۲۰۰ میلیون سال پیش، تغییر محسوسی داشته است.
- (۲) حدود ۷۵ درصد از حجم هواکره در نزدیک‌ترین لایه به زمین، یعنی تروپوسفر قرار دارد.
- (۳) در لایه‌های بالایی هواکره، اکسیژن به شکل‌های O ، O^+ ، O^- و O_2^+ وجود دارد.
- (۴) از کاربردهای فراوان‌ترین گاز هواکره، می‌توان به بسته‌بندی خوراکی‌ها، پرکردن تایر خودروها و نگهداری نمونه‌های بیولوژیکی در پزشکی اشاره کرد.

N_2

پاسخ: گزینهٔ ۴

بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

- گزینهٔ (۱): بررسی دانشمندان برای هوای به دام‌افتاده درون بلورهای یخ در یخچال‌های قطبی و نیز سنگ‌های آتشفشانی نشان می‌دهد که از حدود ۲۰۰ میلیون سال پیش تاکنون، نسبت گازهای سازندهٔ هواکره تقریباً ثابت مانده است.
- گزینهٔ (۲): حدود ۷۵ درصد از جرم هواکره در نزدیک‌ترین لایه به زمین (تروپوسفر) قرار دارد.
- گزینهٔ (۳): در لایه‌های بالایی هواکره، آنیون (مانند O^-) وجود ندارد.
- گزینهٔ (۴): از گاز نیتروژن، برای بسته‌بندی برخی مواد خوراکی، پرکردن تایر اتومبیل‌ها، انجماد مواد غذایی و نگهداری نمونه‌های بیولوژیکی در پزشکی استفاده می‌شود.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

کدام مطلب زیر نادرست است؟

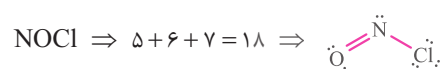
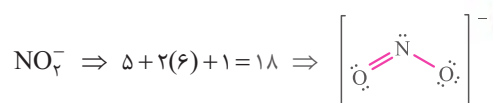
- (۱) در ساختار لوویس یون NO_2^- و مولکول NOCl ، اتم مرکزی دارای یک جفت الکترون ناپیوندی است.
- (۲) در ساختار لوویس مولکول هیدروژن سیانید همانند مولکول CH_3O ، تعداد پیوندهای یگانه و جفت الکترون‌های ناپیوندی با هم برابر است.
- (۳) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار لوویس مولکول‌های NOBr و کربن مونوکسید، برابر است.
- (۴) در ساختار لوویس یون‌های PO_4^{3-} و ICl_4^+ ، اتم مرکزی فاقد جفت الکترون ناپیوندی است.

پاسخ: گزینه ۴

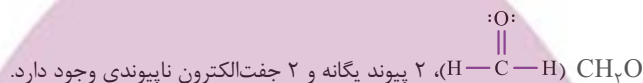
بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

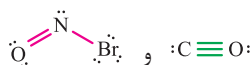
گزینه (۱): در ساختار لوویس هر دو گونه، اتم مرکزی (نیترژن) یک جفت الکترون ناپیوندی دارد:



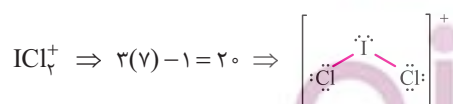
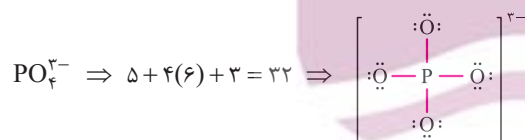
گزینه (۲): در ساختار لوویس هیدروژن سیانید ($\text{H}-\text{C}\equiv\text{N}$)، ۱ پیوند یگانه و ۱ جفت الکترون ناپیوندی و در ساختار لوویس



گزینه (۳): در ساختار لوویس هر دو مولکول، ۳ پیوند اشتراکی وجود دارد:



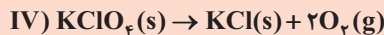
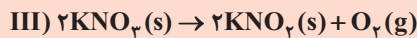
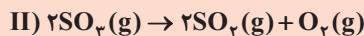
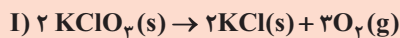
گزینه (۴): فقط در PO_4^{3-} ، اتم مرکزی الکترون ناپیوندی ندارد:



ایران تونش

توشه ای برای موفقیت

بر اثر تجزیه برخی مواد، می توان گاز اکسیژن تولید کرد. برای تولید جرم معینی گاز اکسیژن، در کدام واکنش به جرم کمتری از واکنش دهنده نیاز است؟ ($\text{KClO}_3 = 122/5$, $\text{KClO}_4 = 138/5$: g.mol^{-1} , $\text{KNO}_3 = 101$, $\text{SO}_3 = 80$)



IV (۴)

III (۳)

II (۲)

I (۱)

پاسخ: گزینه ۴

فرض می کنیم در هر واکنش، ۱ مول O_2 تولید شده و به کمک آن، جرم هر واکنش دهنده را حساب می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}$$

واکنش دهنده O_2

I) $\frac{x}{2 \times 122/5} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{244}{3} \approx 81/33 \text{ g KClO}_3$

II) $\frac{x}{2 \times 80} = \frac{1}{1} \Rightarrow x = 160 \text{ g SO}_3$

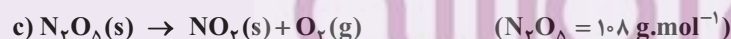
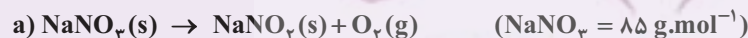
III) $\frac{x}{2 \times 101} = \frac{1}{1} \Rightarrow x = 202 \text{ g KNO}_3$

IV) $\frac{x}{1 \times 138/5} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 69/25 \text{ g KClO}_4$

در واکنش (IV) به جرم کمتری از واکنش دهنده نیاز است.

شمار مول های گاز اکسیژن تولید شده به ازای تجزیه ۵ گرم از کدام ترکیب (های) داده شده، بیشتر از ترکیب (های) دیگر است؟ (معادله واکنش ها موازنه شود.)

(سؤال ۲۲۰ کنکور مجدد تجربی ۱۴۰۱)



b, c (۴)

a, c (۳)

b (۲)

a (۱)

ایران توانسته
توشه ای برای موفقیت

۶۰ در جدول زیر کاربرد برخی از گونه‌های شیمیایی مطرح شده است. داده‌های چه تعداد از ردیف‌های این جدول درست است؟

ردیف	گونه شیمیایی	کاربرد
۱	F^-	جلوگیری از پوسیدگی دندان
۲	$(NH_4)_2SO_4$	کود شیمیایی برای تأمین عنصرهای نیتروژن و گوگرد
۳	PCl_3	ماده اولیه تولید حشره‌کش‌ها
۴	O_3	از بین بردن جانداران ذره‌بینی موجود در آب

(۱) یک

(۲) دو

(۳) سه

(۴) چهار

پاسخ: گزینه ۴

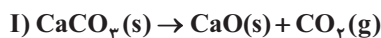
همه ردیف‌های جدول درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

به ردیف‌های (۱) و (۲) در فصل ۳ و به ردیف‌های (۳) و (۴) در فصل ۲ شیمی دهم اشاره شده است.

ایران توننده
توشه‌ای برای موفقیت

واکنش‌های داده‌شده در دو ظرف جداگانه انجام می‌شوند. اگر مجموع جرم کلسیم کربنات و آمونیاک مصرف‌شده برابر $25/1$ گرم و مجموع جرم گازهای تولیدی برابری $13/9$ گرم باشد، اختلاف حجم گازهای تولیدی در واکنش (II) در شرایط STP، برابر چند لیتر است؟ ($H = 1, N = 14, O = 16, Ca = 40 : g.mol^{-1}$)



$5/6 (2)$

$4/48 (1)$

$8/96 (4)$

$6/72 (3)$

پاسخ: گزینه ۳



مول اولیه هر دو واکنش‌دهنده را X و Y در نظر می‌گیریم و با توجه به مجموع جرم گازهای تولیدشده و مجموع جرم واکنش‌دهنده‌های اولیه، X و Y را محاسبه و با توجه به مول آمونیاک مصرف‌شده، اختلاف حجم گازهای تولیدی واکنش (II) را محاسبه می‌کنیم.

گام اول: فرض می‌کنیم X مول کلسیم کربنات و Y مول آمونیاک در واکنش‌ها، مصرف می‌شود:

$100x + 17y = 25/1 \quad (*)$

طبق قانون پایستگی جرم، در واکنش (II) مجموع جرم گازهای تولیدشده با جرم آمونیاک مصرفی (17y) برابر است؛ حالا جرم CO_2 واکنش (I) را محاسبه می‌کنیم:

$$x \text{ mol } CaCO_3 \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } CaCO_3} \times \frac{44 \text{ g } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 44x \text{ g } CO_2$$

مجموع جرم گازهای تولیدی:

$17y + 44x = 13/9 \quad (**)$

با توجه به دو معادله (*) و (**) داریم:

$$\begin{cases} 17y + 44x = 13/9 \\ 17y + 100x = 25/1 \end{cases} \Rightarrow 56x = 11/2 \Rightarrow x = 0/2 \text{ mol} \Rightarrow y = 0/3 \text{ mol}$$

گام دوم: با توجه به تعداد مول اولیه آمونیاک، اختلاف حجم گازهای تولیدی در واکنش (II) را محاسبه می‌کنیم. به ازای مصرف هر دو مول آمونیاک، ۳ مول هیدروژن و یک مول نیتروژن تولید می‌شود که اختلاف آن‌ها برابر ۲ مول است:

$$0/3 \text{ mol } NH_3 \times \frac{2 \text{ mol گازها}}{2 \text{ mol } NH_3} \times \frac{22/4 \text{ L}}{1 \text{ mol گاز}} = 0/3 \times 22/4 = 6/72 \text{ L}$$

با در نظر گرفتن واکنش‌های زیر، کدام موارد درست است؟

- I) واکنش محلول‌های باریم کلرید و سدیم سولفات
II) واکنش محلول‌های سدیم فسفات و کلسیم کلرید
- الف) در معادلهٔ مربوط به هر دو واکنش، ترکیبی یونی با نسبت شمار کاتیون به آنیون برابر ۲ وجود دارد.
ب) در هر دو واکنش، رسوبی سفیدرنگ تشکیل می‌شود.
پ) یکی از فراورده‌های دو واکنش، یک ترکیب یونی دوتایی است.
ت) در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ هر دو واکنش، مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها، ۱ واحد بیشتر از مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها است.

۲) ب - پ

۱) الف - ت

۴) پ - ت

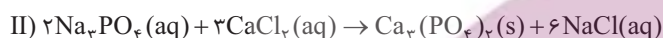
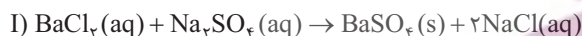
۳) الف - ب

پاسخ: گزینهٔ ۲

عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

✓ پاسخ خیلی تشریحی

معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌ها به صورت زیر است:



بررسی عبارت‌ها:

- الف) در واکنش (I)، نسبت شمار کاتیون به آنیون در Na_2SO_4 برابر ۲ است، اما در واکنش (II) ترکیبی با این نسبت وجود ندارد.
ب) در واکنش (I)، رسوب سفیدرنگ باریم سولفات (BaSO_4) و در واکنش (II)، رسوب سفیدرنگ کلسیم فسفات ($\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$) تشکیل می‌شود.

پ) در هر دو واکنش، ترکیب دوتایی NaCl تولید می‌شود.

ت)

$$\text{I واکنش} \begin{cases} 1 + 1 = 2 = \text{مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها} \\ 1 + 2 = 3 = \text{مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها} \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف} = 3 - 2 = 1$$

$$\text{II واکنش} \begin{cases} 2 + 3 = 5 = \text{مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها} \\ 1 + 6 = 7 = \text{مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها} \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف} = 7 - 5 = 2$$

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

اگر در ۴ کیلوگرم از یک محلول که دارای باریم هیدروکسید و سدیم هیدروکسید است، اختلاف غلظت یون های سدیم و هیدروکسید برابر ۷۰۰ ppm باشد، غلظت مولی یون باریم در محلول کدام است؟ (چگالی محلول $1/2 \text{ g.mL}^{-1}$ و شمار یون های سدیم و باریم در محلول یکسان است، $\text{Na} = 23, \text{O} = 16, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

۰/۰۶ (۲)

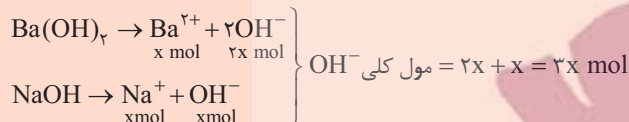
۰/۰۳ (۱)

۰/۰۵ (۴)

۰/۰۲۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به اطلاعات سؤال، مول یون های Na^+ و Ba^{2+} در محلول برابر است، هر دو را برابر x در نظر می گیریم:



حالا رابطه اختلاف غلظت یون های Na^+ و OH^- را بر حسب ppm می نویسیم تا x به دست آید:

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \xrightarrow{\text{جرم مولی} \times \text{مول} = \text{جرم}} \frac{3x \times 17}{4000} \times 10^6 - \frac{x \times 23}{4000} \times 10^6 = 700$$

$$\Rightarrow \frac{28x}{4000} \times 10^6 = 700 \Rightarrow x = 0/1$$

پس تعداد مول یون باریم در محلول، ۰/۱ است:

$$\text{حجم محلول} = 4000 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mL}}{1/2 \text{ g}} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} \text{ L}$$

$$\text{غلظت مولی } \text{Ba}^{2+} = \frac{\text{مول } \text{Ba}^{2+}}{\text{حجم محلول (L)}} = \frac{0/1}{10/3} = 0/03 \text{ mol.L}^{-1}$$

در ۵۰۰ گرم از یک نمونه محلول دارای نمک های سدیم سولفید و سدیم فلوئورید، در مجموع ۶ گرم نمک حل شده است. اگر غلظت مولی دو نمک در محلول برابر باشد، غلظت یون سولفید، برابر چند ppm است؟

$$(\text{F} = 19, \text{Na} = 23, \text{S} = 32: \text{g.mol}^{-1})$$

(سؤال ۸۵ کنکور تهری ۱۳۰۴ - نوبت اول)

۳۲۰۰ (۲)

۱۶۰۰ (۱)

۶۴۰۰ (۴)

۴۸۰۰ (۳)

به ۶۰۰ گرم محلول فراسیرشده از نمک A در دمای 50°C ، به مقدار ۱۰ g از نمک A اضافه کرده و در اثر آن 50°C گرم نمک A ته‌نشین می‌شود. با حرارت‌دادن محلول باقی‌مانده و تبخیر کامل حلال، مجموع جرم نمک بر جای مانده به 210°C گرم می‌رسد. چند کیلوگرم آب باید برای حل کردن این مقدار نمک استفاده شود تا محلولی سیرشده در دمای 50°C تهیه کرد؟

$$0/525(2)$$

$$5/25(1)$$

$$0/350(4)$$

$$3/50(3)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

باید به کمک اطلاعات داده‌شده، انحلال‌پذیری نمک را در دمای 50°C به دست آوریم.

گام اول: محاسبه جرم محلول سیرشده:

$$g\ 560 = 600 + 10 - 50 = \text{جرم کل نمک ته‌نشین شده} - \text{جرم نمک اضافه شده} + \text{جرم محلول فراسیرشده} = \text{جرم محلول سیرشده}$$

گام دوم: محاسبه جرم نمک و آب در محلول سیرشده: با تبخیر آب، جرم نمک بر جای مانده از 50°C به 210°C گرم رسیده است، یعنی در 560°C گرم از محلول، $160 = 210 - 50$ گرم نمک وجود داشته است:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{نمک } 160\text{ g} \\ \text{محلول سیرشده } 560\text{ g} \end{array} \right. \Rightarrow \text{آب } 560 - 160 = 400\text{ g}$$

گام سوم: محاسبه انحلال‌پذیری نمک: انحلال‌پذیری، حداکثر مقدار نمک حل‌شده به ازای 100°C گرم آب است:

$$S = 40 \Rightarrow \text{نمک } 40\text{ g} = \frac{160\text{ g نمک}}{400\text{ g آب}} \times 100\text{ g آب}$$

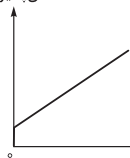
گام چهارم: محاسبه مقدار آب برای حل کردن 210°C گرم نمک:

$$\text{آب } 525\text{ kg} = \frac{210\text{ g نمک}}{40\text{ g نمک}} \times \frac{1\text{ kg آب}}{1000\text{ g آب}} \times 100\text{ g آب}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

کدام مورد درست است؟ ۶۵

انحلال پذیری



(۱) در بین دو ماده استون و اتانول، ماده‌ای با جرم مولی بیشتر، نقطه جوش بالاتری دارد.

(۲) آب با ایجاد پیوند هیدروژنی با NaF، باعث حل شدن این ماده در خود می‌شود.

(۳) طبق قانون هنری، می‌توان نمودار مقابل را برای گاز O_2 رسم کرد.

(۴) اگر گشتاور دوقطبی مولکول A کم‌تر از B باشد، انحلال‌پذیری A در هگزان بیشتر است. فشار گاز

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

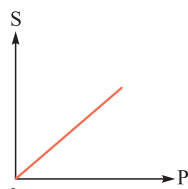
هگزان (C_6H_{14})، مولکولی ناقطبی ($\mu = 0$) است؛ بنابراین هر چه گشتاور دوقطبی مولکولی کم‌تر باشد، بیشتر در هگزان حل می‌شود. (شبیه، شبیه را حل می‌کند).

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): با این که جرم مولی استون (CH_3COCH_3) از اتانول (C_2H_5OH) بیشتر است، اما نقطه جوش استون پایین‌تر است، زیرا اتانول به دلیل پیوند $O-H$ ، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را داشته و نقطه جوش بالاتری دارد.

گزینه (۲): نیروی جاذبه بین آب و ترکیب‌های یونی، از نوع یون - دوقطبی است و نه پیوند هیدروژنی!

گزینه (۳): با افزایش فشار، انحلال‌پذیری گازها در آب به صورت خطی افزایش می‌یابد، اما دقت کنید که عرض از مبدأ این نمودار برابر صفر است. ($P = 0$ ، یعنی مولکول گازی اصلاً وجود ندارد!)



ایران توننده
توشه ای برای موفقیت

پایه یازدهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۱)	کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - بابک سادات - علی شهرابی - مصطفی کرمی محمد گودرزی - سروش موئینی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه (۲)	امیرحسین ابومحبوب - حمید گلزاری
آمار و احتمال	سروش موئینی
فیزیک (۲)	علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی (۲)	مهدی براتی - سلیم بهرامی - سروش عبادی - یاسر عبداللهی - محمد قهرمانی نژاد - امیرحسین مسلمی محمد مرادی - محسن مجنون - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۱)	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	محمد رضا راسخ	علی افضل زاده سروش موئینی مازیار احمدی ناو	عاطفه خانمحمدی منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری
هندسه (۲)	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	زهرا جالینوسی ماهان فتی فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	سعید قندچی	سروش موئینی	سروش موئینی	عباس حسینی	آرمان علیزاده مریم نظری منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری ماهان فتی فر
فیزیک (۲)	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جعفری آثار علی محمدی	علیرضا جباری هادی نجفی	مدیا عیدی امیر محمودی انزلی ادریس محمدی
شیمی (۲)	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده پارسا فراهانی محمد مهدی کریمیان	عماد ربیعی عرشیا شفیعی علیرضا فرضعلی هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آفجانپور

حسابان یازدهم

۶۶

 مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حسابی ... ، ۲ ، ۱ : a_n کدام است؟

۵۶۰ (۴)

۵۵۵ (۳)

۵۵۰ (۲)

۵۴۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درسی Box

دنباله حسابی و مجموع جملات آن:

 فرض کنید در یک دنباله حسابی، جمله نخست برابر با a_1 و قدرنسبت دنباله برابر با d باشد.

 برای محاسبه هر جمله دلخواه، فرمول جمله عمومی (جمله n ام) این دنباله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

 برای محاسبه مجموع n جمله نخست این دنباله (که با نماد S_n نشان داده می‌شود)، در صورتی که جمله اول و جمله آخر در دسترس باشند، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

 با جای‌گذاری فرمول جمله عمومی (a_n) در رابطه فوق، فرمول دوم برای محاسبه مجموع n جمله اول، صرفاً برحسب جمله اول و قدرنسبت، به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

 قدرنسبت دنباله برابر $d = 2 - (-1) = 3$ است. حال با استفاده از رابطه مجموع n جمله اول دنباله حسابی داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2(-1) + (20-1)3] = 10(55) = 550$$

ایران توننه

توشه ای برای موفقیت

۶۷ اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟

۴۷ (۴)

۶۱ (۳)

۶۶ (۲)

۵۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

Hint

عبارت خواسته شده را به کمک اتحادها برحسب مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها بازنویسی کن!

درس Box

روابط بین ضرایب و جواب‌های معادله درجه دوم:

فرض کنید معادله درجه دومی به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ مفروض باشد.

جواب‌های این معادله با استفاده از روابط زیر تعیین می‌گردند:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

برای محاسبه مستقیم مجموع (S) و حاصل ضرب (P) این جواب‌ها، روابط زیر برقرار است:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

هم‌چنین، قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادله از طریق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

نکته

بازنویسی عبارت‌های متقارن برحسب S و P:

فرض کنید α و β جواب‌های یک معادله درجه دوم باشند؛ در این صورت می‌توان برخی عبارت‌های جبری را برحسب مجموع (S) و حاصل ضرب (P) جواب‌ها، ساده‌سازی و بازنویسی کرد.

مجموع معکوس‌های جواب‌ها:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$$

مجموع مربع‌های جواب‌ها:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

مجموع مکعب‌های جواب‌ها:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$$

محاسبه قدرمطلق تفاضل جواب‌ها با استفاده از مقادیر S و P:

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{S^2 - 4P}$$

گام اول: با توجه به روابط بین جواب‌ها و ضرایب در معادله درجه دوم می‌توان نوشت:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

گام دوم: حال با کمک اتحادهای جبری، عبارت خواسته شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2SP = 4^2 - 2(4)(1) = 16 - 8 = 8$$

پاسخ خیلی تشریحی

اگر α و β دو عدد حقیقی و متمایز باشند به طوری که $\alpha^2 = \alpha + 3$ و $\beta^2 = \beta + 3$ باشد، مقدار $\alpha^5 + \beta^5$ کدام است؟

(سؤال ۱۳۰۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۵)

۷۹ (۴)

۷۳ (۳)

۶۷ (۲)

۶۱ (۱)

اگر $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ باشد، حاصل $f^{-1}(f(5)) + f(f^{-1}(2))$ کدام است؟ **۶۸**

۸ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

ترکیب تابع با وارون خود:



فرض کنید f یک تابع وارون پذیر باشد. در این صورت، ترکیب تابع f و تابع وارون آن (f^{-1})، به شرط رعایت دامنه های مربوطه، خروجی معادل با تابع همانی (تطابق ورودی و خروجی) تولید می کند.

به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f ، ترکیب زیر برقرار است:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

به طور مشابه، به ازای هر x متعلق به دامنه تابع f^{-1} (که در واقع همان برد تابع f است)، ترکیب زیر برقرار است:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

با توجه به نکته داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f^{-1}(f(5)) + f(f^{-1}(2)) = 5 + 2 = 7$$

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{5-x}$ مفروض‌اند. دامنه تابع $f \circ (f - g)$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

تعریف ترکیب دو تابع:

کارت Box

فرض کنید f و g دو تابع مفروض باشند. ترکیب تابع f با تابع g را با نماد $f \circ g$ نشان می‌دهیم.

دامنه این تابع جدید (تابع مرکب)، شامل آن دسته از مقادیر x در دامنه تابع g است که مقدار خروجی آن‌ها یعنی $g(x)$ ، در دامنه تابع f قرار داشته باشد:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

ضابطه تابع مرکب $f \circ g$ به ازای هر x متعلق به دامنه آن، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

اعمال جبری روی توابع:

فرض کنید f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند. عملیات جبری روی این دو تابع براساس ضوابط زیر تعریف می‌گردد:

حاصل جمع: تابعی است با نماد $f + g$ که دامنه آن برابر با $D_f \cap D_g$ بوده و ضابطه آن به صورت زیر است:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

تفاضل: تابعی است با نماد $f - g$ که دامنه آن برابر با $D_f \cap D_g$ بوده و ضابطه آن به صورت زیر است:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

حاصل ضرب: تابعی است با نماد $f \times g$ که دامنه آن برابر با $D_f \cap D_g$ بوده و ضابطه آن به صورت زیر است:

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

تقسیم: تابعی است با نماد $\frac{f}{g}$ که برای تعیین دامنه آن، علاوه بر اشتراک دامنه‌ها، باید ریشه‌های مخرج حذف شوند

($D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$)، ضابطه آن به شکل زیر است:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

گام اول: ابتدا دامنه توابع f ، g و $f - g$ را مشخص می‌کنیم:

$$D_f = [0, +\infty), D_g = (-\infty, 5] \Rightarrow D_{f-g} = D_f \cap D_g = [0, 5] \quad (I)$$

گام دوم: حال با کمک تعریف دامنه تابع مرکب داریم:

$$D_{f \circ (f-g)} = \{x \in D_{f-g} \mid (f-g)(x) \in D_f\} \Rightarrow (f-g)(x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{5-x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{5-x}$$

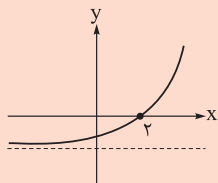
$$\Rightarrow x \geq 5-x \Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \quad (II)$$

گام سوم: حال از اشتراک (I) و (II)، دامنه تابع $f \circ (f - g)$ مشخص می‌شود.

$$I \cap II = \left[\frac{5}{2}, 5\right] \Rightarrow \text{شامل ۳ عدد طبیعی } \{3, 4, 5\} \text{ است.}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۷۰ نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a \times 2^{ax-1} - a$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f^{-1}(a)$ کدام است؟



۶ (۱)

۴ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

تابع نمایی:

درس Box

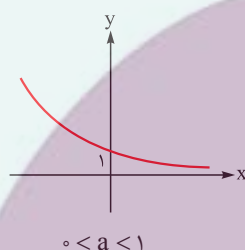
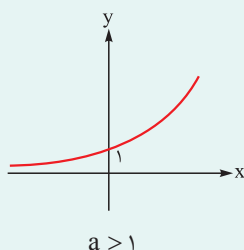
فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد ($a > 0, a \neq 1$).

تابعی با دامنه مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) و ضابطه زیر را یک تابع نمایی می‌نامند:

$$f(x) = a^x$$

نمودار تابع نمایی:

نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x$ براساس مقدار پایه a ، همواره به یکی از دو صورت زیر است:



حالت اول ($a > 1$): در این نمودار، هر چه مقدار x کوچک و کوچک‌تر می‌شود و به سمت $-\infty$ میل می‌کند، نمودار تابع به محور x نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، ولی هیچ‌گاه به این محور برخورد نمی‌کند.

حالت دوم ($0 < a < 1$): در این نمودار، هر چه مقدار x بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود و به سمت $+\infty$ میل می‌کند، نمودار تابع به محور x نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، ولی هیچ‌گاه به این محور برخورد نمی‌کند.

گام اول: با توجه به شکل، نقطه $(2, 0)$ روی نمودار تابع f قرار دارد، بنابراین:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f(2) = 0 \Rightarrow a \cdot 2^{2a-1} - a = 0 \Rightarrow a(2^{2a-1} - 1) = 0 \xrightarrow{a \neq 0} 2^{2a-1} - 1 = 0 \Rightarrow 2^{2a-1} = 1$$

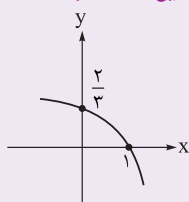
$$\Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

گام دوم: حال با جای گذاری مقدار $a = \frac{1}{2}$ ، ضابطه تابع f را می‌نویسیم و مقدار $f^{-1}(a)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2^{\frac{1}{2}x-1} - \frac{1}{2}$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = t \rightarrow f(t) = \frac{1}{2} \times 2^{\frac{1}{2}t-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}t-1} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}t - 1 = 1 \Rightarrow t = 4$$

شکل زیر نمودار تابع $f(x) = 1 + c \times 3^{a+bx}$ است. مقدار $f(-1)$ کدام است؟ (سوال ۱۱۶ کنکور تهری ۱۴۰۳ - نوبت اول)



$\frac{1}{9}$ (۲)

$\frac{1}{9}$ (۱)

$\frac{7}{8}$ (۴)

$\frac{5}{3}$ (۳)

۷۱ کم‌ترین مقدار تابع f با ضابطه $f(x) = \log_2(2^x + 2^{-x})$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مجموع هر عدد با معکوس آن:



فرض کنید x یک عدد حقیقی و غیرصفر مفروض باشد.

مجموع هر عدد حقیقی مثبت با معکوس آن، همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. حالت تساوی تنها به ازای $x = 1$ برقرار می‌شود:

$$x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

مجموع هر عدد حقیقی منفی با معکوس آن، همواره کوچک‌تر یا مساوی -۲ است. حالت تساوی تنها به ازای $x = -1$ برقرار می‌شود:

$$x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$$

گام اول: ابتدا با توجه به نکته توجه کنید که:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$2^x + \frac{1}{2^x} = 2^x + 2^{-x} \geq 2$$

گام دوم: حال به کمک رابطه بالا داریم:

$$\log_2(2^x + 2^{-x}) \geq \log_2 2 \Rightarrow f(x) \geq 1$$

در نتیجه کم‌ترین مقدار تابع f ، برابر ۱ است.

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

۷۲ اگر $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ و $\cot(\frac{5\pi}{4} + x) = \frac{5}{12}$ باشند، حاصل $\sin(x - \frac{3\pi}{4})$ کدام است؟

$$\frac{5}{13} \quad (۴)$$

$$-\frac{5}{13} \quad (۳)$$

$$\frac{12}{13} \quad (۲)$$

$$-\frac{12}{13} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها:

درس Box

- برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مختلف برحسب زوایای حاده، مراحل پنج‌گانه زیر به ترتیب اجرا می‌شود.
- ابتدا زاویه مورد نظر به یکی از دو فرم $k\pi \pm \alpha$ (با شرط صحیح بودن k) و یا $\frac{k\pi}{4} \pm \alpha$ (با شرط صحیح و فرد بودن k) تفکیک و بازنویسی می‌گردد.

با فرض حاده بودن زاویه α ، ناحیه‌ای از دایره مثلثاتی که انتهای کمان نظیر زاویه اصلی در آن قرار دارد، مشخص می‌شود.

علامت نسبت مثلثاتی (مثبت یا منفی بودن) براساس ناحیه به‌دست‌آمده تعیین و یادداشت می‌گردد.

عبارت $k\pi \pm \alpha$ و یا $\frac{k\pi}{4} \pm \alpha$ از درون آرگومان تابع مثلثاتی حذف می‌شوند.

چنانچه در مرحله پیشین عبارت $\frac{k\pi}{4} \pm \alpha$ (مضارب فرد $\frac{\pi}{4}$) حذف شده باشد، نسبت مثلثاتی با توجه به الگوهای زیر تغییر می‌یابد:

تابع سینوس به تابع کسینوس

تابع کسینوس به تابع سینوس

تابع تانژانت به تابع کتانژانت

تابع کتانژانت به تابع تانژانت

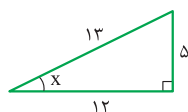
گام اول: ابتدا توجه کنید که طبق درس‌بکس داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\cot(\frac{5\pi}{4} + x) = \frac{5}{12} \Rightarrow -\tan(x) = \frac{5}{12} \Rightarrow \tan(x) = -\frac{5}{12}$$

$$\sin(x - \frac{3\pi}{4}) = -\sin(\frac{3\pi}{4} - x) = \cos x$$

گام دوم: حال برای محاسبه مقدار خواسته‌شده به کمک مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$\frac{\frac{\pi}{4} < x < \pi}{\cos x < 0} \rightarrow \cos x = -\frac{12}{13}$$

ایران توتنت

توشه ای برای موفقیت

۷۳ اگر $x + y = \frac{\pi}{6}$ باشد، بیشترین مقدار عبارت $A = \frac{\sin^2 x}{2} + \cos^2 y$ کدام است؟

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه:

فرض کنید α و β دو زاویه دلخواه باشند. در این صورت، برای بسط نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل این زوایا، روابط زیر همواره برقرار است:

بسط مجموع دو زاویه:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

بسط تفاضل دو زاویه:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

گام اول: ابتدا با توجه به شرط داده‌شده، مقدار y را بر حسب x نوشته و در عبارت خواسته‌شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x + y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} - x \Rightarrow A = \frac{\sin^2 x}{2} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$$

گام دوم: به کمک بسط کسینوس تفاضل دو زاویه داریم:

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right)^2 = \frac{3}{4} \cos^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x$$

گام سوم: حال با جای‌گذاری عبارت به‌دست‌آمده و با کمک اتحاد $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ داریم:

$$A = \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{3}{4} \cos^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x \Rightarrow A = \frac{3}{4} (\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{\sqrt{3}}{4} (2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x$$

گام چهارم: بیشترین مقدار عبارت A برابر است با:

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \leq \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \max\{A\} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۷۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - \cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

حالت مبهم $\frac{0}{0}$ و رفع ابهام آن:

فرض کنید تابع‌های f و g در نقطه $x = a$ دارای حد باشند و حد تابع مخرج (g) در این نقطه برابر با صفر نباشد؛ در این شرایط، حد حاصل تقسیم این توابع برابر با حاصل تقسیم حدهای آن‌ها است:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

چنانچه حد هر دو تابع f و g در نقطه $x = a$ برابر با صفر باشد (و این توابع در اطراف نقطه a ، تابع ثابت صفر نباشند)، محاسبه حد به شیوه پیشین امکان‌پذیر نیست.

این وضعیت، «حالت مبهم $\frac{0}{0}$ » نامیده می‌شود و در این حالت ممکن است حد وجود داشته باشد یا نداشته باشد.

یافتن تابعی معادل با $\frac{f}{g}$ در همسایگی نقطه $x = a$ که حد آن در این نقطه قابل محاسبه باشد را فرایند «رفع ابهام حالت مبهم $\frac{0}{0}$ » می‌گویند.

ابهام در تابع‌های گویا:

برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع گویا، از روش تجزیه برای حذف عامل صفرکننده (یعنی عبارت $x - a$) استفاده می‌شود.

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ باشد، در نتیجه $f(a) = g(a) = 0$ خواهد بود.

بر این اساس، چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ دارای عامل مشترک $(x - a)$ هستند و می‌توان آن‌ها را به فرم $f(x) = (x - a)F(x)$ و $g(x) = (x - a)G(x)$ بازنویسی کرد.

در نهایت، محاسبه حد با ساده‌سازی و حذف عامل صفرکننده از صورت و مخرج به صورت زیر انجام می‌پذیرد:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)F(x)}{(x - a)G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)}$$

وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، حاصل حد صورت و مخرج برابر صفر است. برای رفع ابهام با کمک اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - (\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4})}{\sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x)}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{\sin x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x - \cos x)}{\sin x - \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۷۵ اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۳ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پیوستگی در نقطه:

درستی Box

تابع f در نقطه $x = a$ ، به شرطی پیوسته نامیده می‌شود که تساوی حد تابع در آن نقطه با مقدار تابع در همان نقطه برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

شروط لازم برای پیوستگی در نقطه:

با استناد به تعریف پیوستگی، تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است اگر و تنها اگر هر سه شرط زیر به طور هم‌زمان برقرار باشند:

(۱) تابع f در نقطه $x = a$ تعریف‌شده باشد (نقطه a متعلق به دامنه تابع باشد).

(۲) تابع f در نقطه $x = a$ دارای حد متناهی باشد.

(۳) مقدار حد تابع در نقطه $x = a$ ، دقیقاً با مقدار تابع در آن نقطه، یعنی $f(a)$ برابر باشد.

در صورت نقض هر یک از شروط سه‌گانه فوق، تابع f در نقطه $x = a$ ناپیوسته خواهد بود.

گام اول: با توجه به تعریف پیوستگی در نقطه باید:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

گام دوم: با توجه به ضابطه تابع f می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۷۶ شعاع دایره محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول دو ضلع بزرگ‌تر آن ۱۲ و ۱۳ است، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینه ۲

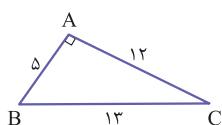
اگر مساحت و محیط یک چندضلعی محیطی به ترتیب S و ۲P باشد، شعاع دایره محاطی آن برابر است با $r = \frac{S}{P}$.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: طول ضلع کوچک‌تر این مثلث، بنا به قضیه فیثاغورس می‌شود:

$$\sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$



گام دوم: محیط این مثلث، برابر است با:

$$2P = 5 + 12 + 13 = 30$$

$$S = \frac{5 \times 12}{2} = 30$$

و مساحت آن برابر است با:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{30}{15} = 2$$

گام سوم: پس شعاع دایره محاطی داخلی آن می‌شود:

ایران توننه
توشه‌ای برای موفقیت

۷۷ طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره متخارج به ترتیب ۱۲ و $6\sqrt{6}$ است. اگر طول خط‌المركزین دو دایره

برابر ۱۵ باشد، نسبت اندازه شعاع‌های دو دایره کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

مشاوره این سؤال از میحث مماس مشترک دو دایره و مشابه تمرین ۵ صفحه ۲۳ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است. فرمول‌های طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره از روابط پرکاربرد در کنکور هستند.

پاسخ: گزینه ۱

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با طول خط‌المركزین $OO' = d$ را در نظر بگیرید. طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره در صورت وجود از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

گام اول: فرض کنید شعاع‌های دو دایره برابر R و R' باشند ($R > R'$). در این صورت با توجه به فرمول‌های طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره می‌توان نوشت:

$$\sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{15^2 - (R + R')^2} \Rightarrow 12 = \sqrt{15^2 - (R + R')^2} \xrightarrow{\text{توان}^2} 144 = 225 - (R + R')^2$$

$$\Rightarrow (R + R')^2 = 81 \Rightarrow R + R' = 9$$

$$\sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{15^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 6\sqrt{6} = \sqrt{15^2 - (R - R')^2} \xrightarrow{\text{توان}^2} 216 = 225 - (R - R')^2$$

$$\Rightarrow (R - R')^2 = 9 \Rightarrow R - R' = 3$$

گام دوم: با توجه به نتایج گام اول و با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم:

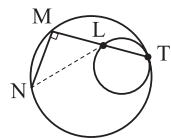
$$\begin{cases} R + R' = 9 \\ R - R' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 6 \\ R' = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

طول شعاع‌های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{15}$ و طول خط‌المركزین آن‌ها مساوی ۸ واحد است.

(هندسه (۲) - تمرین ۵ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

کتاب
درسی

مطابق شکل، دو دایره مماس داخل که شعاع یکی دو برابر دیگری است، رسم شده‌اند. اگر طول TL ، $1/5$ برابر شعاع دایره کوچک‌تر باشد، طول LN چند برابر شعاع دایره کوچک است؟



- (۱) $2/5$
(۲) $\sqrt{8/75}$
(۳) $2/75$
(۴) $\sqrt{9/25}$

مشاوره سؤال ترکیبی از «قضیه فیثاغورس»، «تالس» و «دایره» که با ایده‌گرفتن از سؤال‌های کنکورهای قبل طرح شده است. سؤال بسیار مهمی است.

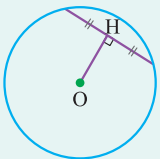
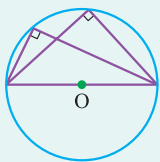
پاسخ: گزینه ۴

نقطه تقاطع وتر MT با دایره کوچک، وسط MT است.

Hint

درس‌Box

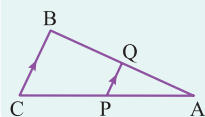
- (۱) اگر دو دایره مماس داخل داشته باشیم که شعاع یکی نصف دیگری باشد، دایره کوچک از مرکز دایره بزرگ می‌گذرد.
(۲) زاویه محاطی روبه‌روی قطر، در هر دایره، قائمه است.



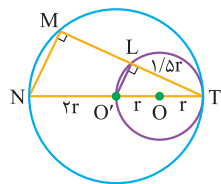
- (۳) اگر از مرکز هر دایره به یک وتر آن عمود کنیم، پای عمود، وتر را نصف می‌کند.

(۴) قضیه تالس؛ در شکل رسم‌شده که PQ با BC موازی است، داریم:

$$\frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AB}$$



گام اول (تحلیل سؤال): چون شعاع دایره بزرگ، دو برابر شعاع دایره کوچک است؛ بنابراین دایره کوچک، از مرکز دایره بزرگ می‌گذرد.
گام دوم (افزودن پاره‌خط مناسب به شکل): اگر از O' (مرکز دایره بزرگ‌تر) به L وصل کنیم، زاویه $\angle TLO'$ در دایره کوچک‌تر، زاویه محاطی روبه‌روی قطر است؛ پس $\angle TLO' = 90^\circ$.



گام سوم (محاسبه طول LO' برحسب r): در مثلث قائم‌الزاویه LTO' داریم:

$$LO' = \sqrt{O'T^2 - LT^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{5}r\right)^2} = \frac{\sqrt{24}}{5}r$$

گام چهارم (محاسبه MN برحسب r): با استفاده از قضیه تالس در مثلث قائم‌الزاویه MNT داریم:

$$MN \parallel LO' \Rightarrow \frac{LT}{MT} = \frac{LO'}{MN} = \frac{TO'}{TN} = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{LO'}{MN} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} MN = 2LO' = \frac{2\sqrt{24}}{5}r \\ MT = 2LT \Rightarrow ML = LT = \frac{1}{5}r \end{cases}$$

گام پنجم: در نهایت بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث LMN داریم:

$$NL = \sqrt{MN^2 + ML^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{24}}{5}r\right)^2 + \left(\frac{1}{5}r\right)^2} = \sqrt{\frac{97}{5}}r = \sqrt{9/25}r$$

اگر پاره خط $A'B'$ دوران یافته پاره خط AB به مرکز نقطه‌ای غیر واقع بر AB (و یا امتداد آن) باشد، مرکز دوران کدام است؟ (A' و B' به ترتیب دوران یافته A و B هستند).

- (۱) محل تلاقی پاره خط‌های AB و $A'B'$
- (۲) محل تلاقی پاره خط‌های AA' و BB'
- (۳) محل تلاقی عمودمنصف‌های AB و $A'B'$
- (۴) محل تلاقی عمودمنصف‌های AA' و BB'

مشاوره این سؤال براساس تمرین ۳ صفحه ۴۲ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است که هدف آن، روش یافتن مرکز دوران در صورتی است که یک شکل و تصویر آن تحت دوران را در اختیار داشته باشیم.

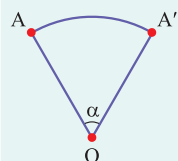
پاسخ: گزینه ۴

هر نقطه و تصویر آن تحت دوران، از مرکز دوران به یک فاصله قرار دارند.

Hint

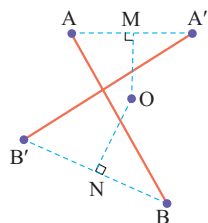
درس‌Box

دوران: دوران به مرکز O و زاویه α تبدیلی است که در آن نقطه A بر نقطه A' تصویر می‌شود به طوری که: $\angle AOA' = \alpha$ و $OA = OA'$ با توجه به تعریف فوق، بدیهی است نقطه O (مرکز دوران) روی عمودمنصف پاره خط AA' قرار دارد.



گام اول: فرض کنید نقطه O مرکز دوران باشد. اگر A' و B' به ترتیب تصاویر نقاط A و B تحت این دوران باشند، آن‌گاه طبق تعریف دوران، $OA = OA'$ و $OB = OB'$ است، یعنی A و A' از O به یک فاصله و به طور مشابه B و B' از O به یک فاصله برابر هستند.

گام دوم: می‌دانیم هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد؛ بنابراین با توجه به توضیحات گام اول، O روی عمودمنصف پاره خط AA' و به طور مشابه روی عمودمنصف پاره خط BB' قرار دارد. به عبارت دیگر نقطه O (مرکز دوران) محل تلاقی عمودمنصف‌های دو پاره خط AA' و BB' است.



پاسخ خیلی تشریحی

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

در تجانس به مرکز O و نسبت $-\frac{1}{4}$ ، نقطه A روی نقطه A' تصویر شده است. نسبت تجانسی به مرکز A' که O را روی وسط AA' تصویر می‌کند، کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

Hint

درس Box

تجانس: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ عددی حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت

تجانس k گوئیم، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(الف) سه نقطه M، O و M' روی یک خط راست باشند.

(ب) $OM' = |k| OM$

(پ) اگر k مثبت باشد، M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند.

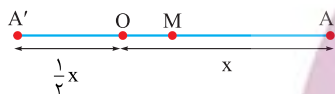
اگر k منفی باشد، M و M' در دو طرف نقطه O قرار دارند.

نکته

اگر $k > 0$ ، تجانس را مستقیم و در صورتی که $k < 0$ ، تجانس را معکوس می‌نامند.

گام اول: فرض کنید، طول پاره خط OA برابر x باشد. مجانس نقطه A به مرکز O و نسبت $-\frac{1}{4}$ را A' می‌نامیم. مطابق شکل

$OA' = \frac{1}{4}x$ است:



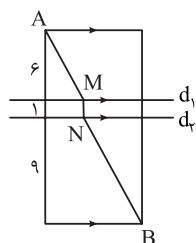
گام دوم: M وسط پاره خط AA' است؛ بنابراین داریم:

$$AM = A'M = \frac{AA'}{2} = \frac{x + \frac{1}{4}x}{2} = \frac{5}{8}x$$

گام سوم: دو نقطه O و M در یک طرف نقطه A' قرار دارند، پس تجانس مستقیم بوده و نسبت تجانس مورد نظر، برابر است با:

$$k = \frac{A'M}{A'O} = \frac{\frac{5}{8}x}{\frac{1}{4}x} = \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

در شکل زیر، A و B دو رأس از مستطیلی هستند که طول آن دو برابر عرض آن است. در حرکت از A به B می‌خواهیم مسیر بین دو خط موازی d_1 و d_2 ، عمود بر این دو خط باشد. اگر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد،



طول AM کدام است؟

- (۱) ۶ / ۸
(۲) ۶ / ۷
(۳) ۶ / ۶
(۴) ۶ / ۵

مشاوره این سؤال مشابه کار در کلاس صفحه ۵۳ کتاب درسی هندسه (۲) طرح شده است.

پاسخ: گزینه ۱

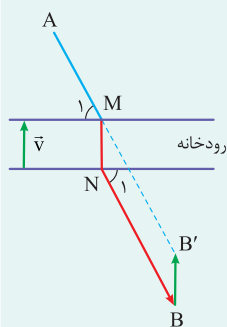
برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر، کافی است نقطه A یا B را به اندازه فاصله دو خط d_1 و d_2 در جهت عمود بر آن‌ها انتقال دهید.

Hint

مسئله احداث پل:

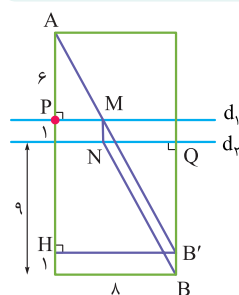
دو شهر A و B در دو طرف رودخانه‌ای واقع هستند و می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم، به طوری که پل MN عمود بر راستای رودخانه باشد. برای این که مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد، کافی است نقطه B را با بردار $\vec{v}$ (به اندازه عرض رودخانه) به سمت بالا انتقال دهیم تا نقطه B' حاصل شود. محل برخورد AB' با ساحل بالای رودخانه را M می‌نامیم و سپس از نقطه M، پل MN را عمود بر راستای رودخانه می‌سازیم. در این صورت به دلیل آن که چهارضلعی MNBB' متوازی‌الاضلاع است، پس $MN = BB'$ است و داریم:

$$\text{طول مسیر AMNB} = AM + MN + NB = AM + MB' + BB' = AB' + BB'$$



در شکل مقابل، داریم $\hat{M}_1 = \hat{N}_1$:

نکته



گام اول: طول مستطیل، برابر ۱۶ است و چون طول مستطیل، دو برابر عرض آن است، پس عرض مستطیل برابر ۸ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: نقطه B را با برداری به طول ۱ واحد و در راستای عمودی به طرف بالا انتقال می‌دهیم تا نقطه B' به دست آید و B' را به A وصل می‌کنیم. محل برخورد AB' با خط d_1 را M می‌نامیم و از M، عمود MN را بر d_2 وارد می‌کنیم، مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

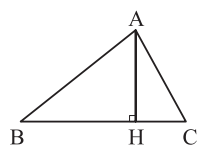
گام سوم: طول AH برابر ۱۵ و طول B'H برابر ۸ است. طبق قضیه فیثاغورس در مثلث AHB' داریم:

$$AB'^2 = AH^2 + B'H^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Rightarrow AB' = 17$$

گام چهارم: طبق توضیحات ارائه شده در درس باکس، داریم $\hat{AMP} = \hat{BNQ}$ ، پس دو مثلث APM و BQN، بنا به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AM}{BN} = \frac{AP}{BQ} \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\frac{AM+BN=17}{AM+BN=AB'}} \frac{AM}{17-AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3AM = 34 - 2AM \Rightarrow 5AM = 34 \Rightarrow AM = \frac{34}{5} = 6 \frac{4}{5}$$

۸۲ در شکل زیر، اگر $\hat{B} = 2\hat{A}$ و $BC = \frac{\sqrt{10}}{2} AC$ ، آن گاه طول AH ، چند برابر طول AB است؟



$$\frac{\sqrt{10}}{5} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{4} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

مشاوره بسیاری از مباحث فصل سوم هندسه (۲)، قابلیت ترکیب شدن با مبحث مثلثات را دارند. در این جا، با ترکیبی از قضیه سینوس ها و روابط مثلثاتی $2 \times$ مواجهیم، یادتان باشد که سؤال های ترکیبی، سؤال های مهمی هستند.

پاسخ: گزینه ۱

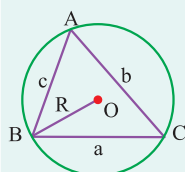
Hint از $\hat{A} = 2\hat{B}$ نتیجه می گیریم $\sin \hat{A} = 2 \sin \hat{B} \cos \hat{B}$.

(۱) یادآوری دو اتحاد مثلثاتی:

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

(۲) قضیه سینوس ها

در مثلث ABC رابطه زیر برقرار است. در این رابطه که به قضیه سینوس ها معروف است، R شعاع دایره محیطی مثلث ABC است.

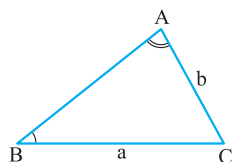


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

گام اول (نوشتن رابطه مثلثاتی زوایا): طبق آن چه در مثلثات آموختیم داریم:

$$\hat{A} = 2\hat{B} \Rightarrow \sin \hat{A} = \sin 2\hat{B} \Rightarrow \sin \hat{A} = 2 \sin \hat{B} \cos \hat{B} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\sin \hat{A}}{2 \sin \hat{B}} \quad (I)$$

گام دوم (نوشتن قضیه سینوس ها): از طرفی طبق قضیه سینوس ها در مثلث داریم:

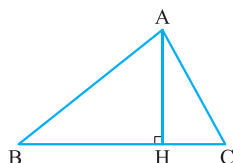


$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (II)$$

گام سوم (محاسبه $\cos \hat{B}$): رابطه (II) را در رابطه (I) جای گذاری می کنیم:

$$\cos \hat{B} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \right) = \frac{\sqrt{10}}{4} \quad (III)$$

گام چهارم: با توجه به شکل، در مثلث قائم الزاویه ABH ، داریم $\frac{AH}{AB} = \sin \hat{B}$ ، پس:



$$\sin \hat{B} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{B}} \xrightarrow{(III)} \sin \hat{B} = \sqrt{1 - \frac{10}{16}} = \sqrt{\frac{6}{16}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

نسبت طول اضلاع یک متوازی‌الاضلاع با زاویه 135° برابر با $\sqrt{2}$ است. نسبت طول قطر بزرگ این متوازی‌الاضلاع به طول قطر کوچک آن کدام است؟

۲ (۲)

$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (۱)

$\sqrt{5}$ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

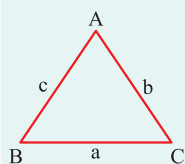
پاسخ: گزینه ۴

Hint

کرتس Box

قضیه کسینوس‌ها

در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازه دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن‌ها:

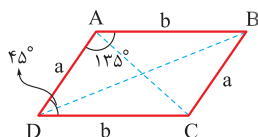


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \hat{C}$$

گام اول: مطابق شکل، طول اضلاع متوازی‌الاضلاع را a و b در نظر گرفته، طول قطر کوچک را با استفاده از قضیه کسینوس‌ها برحسب a به دست می‌آوریم: (توجه کنید که اگر زاویه بزرگ‌تر متوازی‌الاضلاع 135° باشد، زاویه کوچک آن 45° در مثلث ACD است):



$$\triangle ACD: AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos 45^\circ \Rightarrow AC^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$$

$$\xrightarrow{b=\sqrt{2}a} AC^2 = a^2 + 2a^2 - 2a^2 \Rightarrow AC = a$$

گام دوم: با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABD ، طول قطر بزرگ را برحسب a به دست می‌آوریم:

$$\triangle ABD: BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos 135^\circ \Rightarrow BD^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab \xrightarrow{b=\sqrt{2}a} BD^2 = a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 5a^2$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{5}a$$

گام سوم: خواسته سوال، برابر است با:

$$\frac{BD}{AC} = \frac{\sqrt{5}a}{a} = \sqrt{5}$$

در مثلث ABC به اضلاع $AB = AC = ۶$ و $BC = ۴\sqrt{2}$ ، نقطه M وسط ضلع AC است و نیمسازهای دو زاویه AMB و BMC به ترتیب AB و BC را در نقاط E و D قطع می‌کنند. مساحت مثلث ABC ، چند برابر مساحت مثلث BDE است؟

(۱) ۲/۵۶

(۲) ۲/۵

(۳) ۲/۲۵

(۴) ۲/۴

مشاوره این سؤال براساس تمرین ۱ صفحه ۷۰ کتاب درسی هندسه (۲) و مشابه سؤال ۳۰ از کنکور ریاضی ۱۴۰۳ نوبت دوم طراحی شده است. در واقع این سؤال ترکیبی از دو مبحث قضیه میانه‌ها و قضیه نیمسازهای زوایای داخلی مثلث است.

پاسخ: گزینه ۱

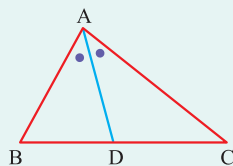
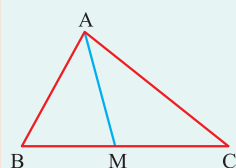
مطابق تمرین کتاب درسی، پاره‌خط DE با AC موازی است.

(۱) اگر AM میانه نظیر ضلع BC در مثلث ABC باشد، آن‌گاه طبق قضیه میانه‌ها داریم:

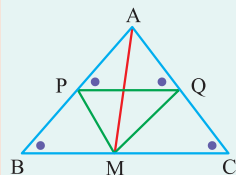
$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

(۲) در شکل زیر، AD نیمساز زاویه داخلی A است، داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$



(۳) در شکل زیر، اگر AM میانه نظیر ضلع BC و پاره‌خط‌های MP و MQ به ترتیب نیمسازهای زوایای AMB و AMC باشند، آن‌گاه $PQ \parallel BC$ ، پس بنا به قضیه موازی - مورب $\hat{A}PQ = \hat{B}$ و $\hat{A}QP = \hat{C}$.



(۴) اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث متشابه‌اند.

(۵) نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر است با مجذور نسبت تشابه آن‌ها.

گام اول: طبق قضیه میانه‌ها در مثلث ABC داریم:

$$AB^2 + BC^2 = 2BM^2 + \frac{AC^2}{2} \Rightarrow 6^2 + (4\sqrt{2})^2 = 2BM^2 + \frac{6^2}{2}$$

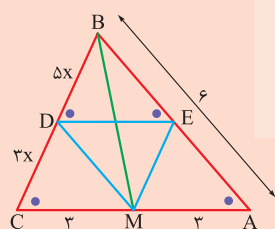
$$\Rightarrow 2BM^2 = 50 \Rightarrow BM^2 = 25 \Rightarrow BM = 5$$

گام دوم: با توجه به قضیه نیمسازها در مثلث BMC داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BM}{CM} = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} BD = 5x \\ CD = 3x \end{cases}$$

گام سوم: طبق مورد (۳) درس باکس، $DE \parallel AC$ ، پس:

$$\triangle BDE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BDE}} = \left(\frac{BC}{BD}\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{5x}\right)^2 = \frac{64}{25} = 2/56$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

توشه ای برای موفقیت

مساحت دایره محیطی هشت ضلعی منتظمی به مساحت 10 ، چند برابر π است؟

۵ (۴)

$\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$5\sqrt{2}$ (۲)

$\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (۱)

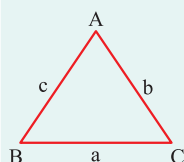
پاسخ: گزینه ۱

هشت ضلعی منتظم را به ۸ مثلث هم‌نهشت تقسیم کنید.

Hint

کرتس Box

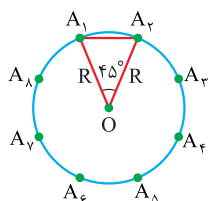
مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع مثلث در سینوس زاویه بین آن‌ها.



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \times \sin \hat{C} = \frac{1}{2}ac \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2}bc \times \sin \hat{A}$$

گام اول: اگر از مرکز دایره محیطی این هشت ضلعی منتظم به رئوس آن وصل کنیم، هشت مثلث هم‌نهشت و در نتیجه هم‌مساحت پدید می‌آید:

پاسخ خیلی تشریحی



$$\hat{O} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

گام دوم: مساحت هر یک از این هشت مثلث برابر است با $\frac{1}{8} \times \frac{5}{4}$ ، از طرفی:

$$S_{\triangle OA_1A_2} = \frac{1}{2}OA_1 \times OA_2 \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times R \times R \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}R^2$$

گام سوم: با توجه به گام دوم، باید:

$$\frac{\sqrt{2}}{4}R^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow R^2 = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

پس مساحت دایره محیطی، برابر است با:

$$S = \pi R^2 = \frac{5\sqrt{2}}{2} \pi$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

آمار و احتمال

۸۶

در پرتاب دو تاس، با کدام احتمال حداقل یکی از اعداد رو شده مضرب ۳ و مجموع آن‌ها مضرب ۴ است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{5}{36}$ (۳) $\frac{7}{36}$ (۴) $\frac{2}{9}$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

احتمال پیشامد A از فضای نمونه‌ای یکنواخت S برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مجموع ارقام ۲ تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند باشد و برای هر مجموع، حالت‌های مختلف داریم:

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

گام اول: مجموع‌های ۴، ۸ و ۱۲ را می‌خواهیم و باید حداقل یکی از اعداد رو شده مضرب ۳ باشد.

گام دوم: در مجموع ۴، حالت‌های (۱،۳) و (۳،۱)، در مجموع ۸، حالت‌های (۲،۶) و (۶،۲) و (۳،۵) و (۵،۳) و در مجموع ۱۲ حالت (۶،۶) مورد نظر ما است (روی هم ۷ تا).

گام سوم: پس احتمال می‌شود:

$$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{36}$$

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهر شده یکی از تاس‌ها، اول بوده و مجموع آن‌ها حداقل ۶ است؟

(سوال ۲۳ کنکور ۱۴۰۳ - نوبت اول)

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{11}{18}$ (۴) $\frac{13}{18}$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

می‌خواهیم ۷ کتاب که دوتای آن‌ها ریاضی و فیزیک هستند را روی هم قرار دهیم. در چند حالت بین ریاضی و فیزیک حداکثر ۲ کتاب قرار دارد و کتاب ریاضی بالاتر از فیزیک است؟

۱۸۰۰ (۴)

۱۴۴۰ (۳)

۱۲۰۰ (۲)

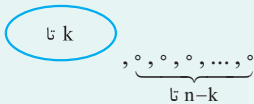
۷۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درسی Box

جایگشت: برای کنار هم قرارگرفتن n شیء متمایز، $n!$ حالت داریم.

(۱) اگر k تا از اشیاء کنار هم باشند، آن‌ها را در دسته می‌گذاریم:



تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$(n-k+1)! \cdot k!$$

توی دسته

(۲) اگر گروه‌های n تایی و $n+1$ تایی یک‌درمیان باشند:

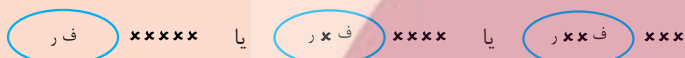
$$n!(n+1)!$$

(۳) اگر دو گروه n تایی یک‌درمیان باشند:

$$2 \times n!n!$$

گام اول: بین ریاضی و فیزیک باید ۰، ۱ یا ۲ کتاب باشد:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم: باید کتاب‌های بین «ر» و «ف» را انتخاب کنیم، درون دسته را مرتب کنیم (ریاضی قبل از فیزیک باشد) و دسته را کنار بقیه قرار دهیم:

الف) $\Rightarrow \binom{5}{0} \times 6! = 720$

ب) $\Rightarrow \binom{5}{1} \times 1 \times 5! = 600$

ج) $\Rightarrow \binom{5}{2} \times 2! \times 4! = 480$

گام سوم: طبق اصل جمع، روی هم ۱۸۰۰ حالت داریم.

رضا می‌خواهد کتاب ریاضی و ۵ کتاب درسی دیگرش را روی هم بچیند. در چند حالت مختلف هنگام چیدن کتاب‌ها، کتاب‌های بیشتری بالای کتاب ریاضی قرار می‌گیرد؟

(سؤال ۲۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

۲۰۰ (۴)

۲۴۰ (۳)

۳۰۰ (۲)

۳۶۰ (۱)

چندتا از جملات زیر درست است؟

- (الف) رتبهٔ کنکور و نمرهٔ امتحان نهایی، یک نوع متغیر هستند.
 (ب) در نمونه‌گیری طبقه‌ای، تعداد انتخاب از هر طبقه با هم برابر است.
 (پ) در نمونه‌گیری سیستماتیک (سامانمند) شانس انتخاب به عنوان اولین عضو نمونه، بیشتر از بقیه است.
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

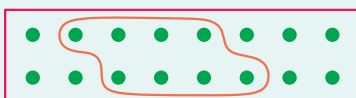
پاسخ: گزینهٔ ۱

روش‌های نمونه‌گیری احتمالی:

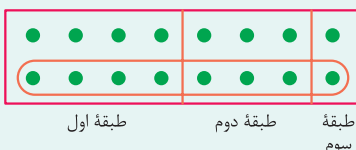
کارتی Box

گسسته: قابل شمارش، بین هر دو مقدارش را ممکن است نپذیرد.	تعداد، نمرهٔ نهایی، درصد کنکور	کمی
پیوسته: قابل اندازه‌گیری، بین هر دو مقدارش باید هر عددی را بپذیرد.	طول، جرم، زمان، شدت جریان و مصرف بنزین	
اسمی: فقط نوع یا حالت آن معلوم می‌شود.	رنگ، گروه خون و نوع شغل	کیفی
ترتیبی: قابل مرتب کردن است یا در آن ترتیب طبیعی هست.	مراحل تحصیل، مراحل رشد و مقام ورزشکار در مسابقه	

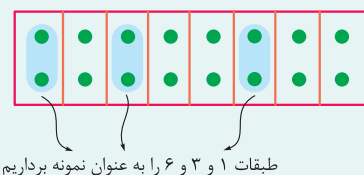
ساده: مثل قرعه‌کشی، n تا از N عضو را انتخاب کنیم:



طبقه‌ای: از هر طبقه، متناسب با مقدارش نمونه برداریم:



خوشه‌ای: از بین طبقات جامعه، چندتا برابر داریم:



سیستماتیک: طبقات با تعداد مساوی داریم، از طبقهٔ اول نمونه می‌گیریم و در طبقات بعدی با همان نظم می‌رویم.



از هر دسته سومی را به عنوان نمونه برداریم

پاسخ خیلی تشریحی

- (الف) نادرست؛ رتبهٔ کنکور، کیفی ترتیبی و نمرهٔ امتحان نهایی، کمی گسسته است.
 (ب) نادرست؛ در نمونه‌گیری طبقه‌ای، تعداد انتخاب از هر طبقه متناسب با تعداد اعضای آن است.
 (ج) نادرست؛ در نمونه‌گیری سیستماتیک هم مثل سایر روش‌های احتمالی، شانس انتخاب در نمونه برای همهٔ اعضا برابر است.

گزارهٔ $p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$ با کدام گزاره هم‌ارز منطقی است؟ **۸۹**

$$r \vee \sim (p \wedge q) \quad (۲)$$

$$r \vee (p \wedge q) \quad (۱)$$

$$r \vee (p \wedge \sim q) \quad (۴)$$

$$r \vee (\sim p \wedge q) \quad (۳)$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

قواعد مهم در جبر گزاره‌ها:

دستی Box

تبدیل $\Rightarrow$ به $\vee$	دمورگان	شرکت پذیری	پخش و فاکتورگیری
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

گام اول: کار با گزاره‌های شرطی معمولاً از تبدیل $\Rightarrow$ به $\vee$ شروع می‌شود:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$(X \Rightarrow Y) \equiv \sim X \vee Y$$

$$p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q) \equiv p \Rightarrow (r \vee \sim q) \equiv p \vee (r \vee \sim q)$$

گام دوم: حال، شرکت پذیری و دمورگان:

$$r \vee (\sim p \vee \sim q) \equiv r \vee \sim (p \wedge q)$$

(سؤال ۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

$$r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q) \quad (۲)$$

$$p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q) \quad (۱)$$

$$\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q) \quad (۴)$$

$$\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q) \quad (۳)$$

کنکور

علی پاسخ $\frac{2}{3}$ سؤالات را بلد است و در سایر سؤالات، از بین ۴ گزینه یکی را شانسی می‌زند. اگر علی به ۴ سؤال جواب دهد، با کدام احتمال نیمی از آن‌ها را درست می‌زند؟

$$\frac{27}{256} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{256} \quad (۳)$$

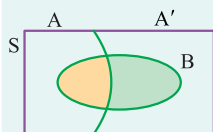
$$\frac{27}{128} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{128} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

فرمول احتمال کل:

دروس Box



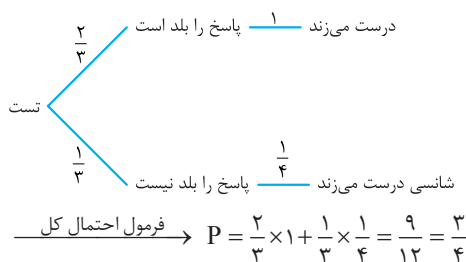
$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')$$

اگر احتمال پیروزی در هر بار آزمایش p باشد، احتمال این‌که در n بار تکرار آزمایش، k تا پیروزی داشته باشیم، برابر است با $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. مثال را ببینید:

آزمایش	پرتاب تاس	شانس تست‌زدن	پرتاب سکه
تعداد تکرار	۴ بار	۵ تست	۷ بار
پیروزی	۶ بیاید	درست‌زدن	روآمدن
تعداد پیروزی	۱ بار	۳ بار	۴ بار
احتمال	$\binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^3$	$\binom{5}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\binom{7}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^3$

گام اول: اول ببینیم چه‌قدر احتمال دارد تست را درست بزنند:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم: حالا از ۴ تست، دو درست و دو نادرست دارد:

$$P(\text{دو درست}) = \binom{4}{2} \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2}_{\text{دو درست}} \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^2}_{\text{دو نادرست}} = 6 \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{27}{128}$$

ساده شده عبارت $[(B' - A') \cup (A' \cup B')]' - (A' \cap B)$ کدام است؟

B (۴)

B - A (۳)

A (۲)

A - B (۱)

پاسخ: گزینه ۲

روابط مجموعه‌ها:

کرتی Box

	U	$\cap$	-
با تهی	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A - \emptyset = A$, $\emptyset - A = \emptyset$
با مرجع	$A \cup U = U$	$A \cap U = A$	$U - A = A'$, $A - U = \emptyset$
با متمم	$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \emptyset$	$A - A' = A$, $A' - A = A'$
با زیرمجموعه $B \subseteq A$	$A \cup B = A$	$A \cap B = B$	$B - A = \emptyset$

قوانین جبر مجموع:

پخش	دمورگان	تبدیل - به $\cap$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$	$A - B = A \cap B'$

گام اول: برای پرانتز وسط، دمورگان بنویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$[(B' - A') \cup (A \cap B)] - (A' \cap B)$$

گام دوم: $B' - A'$ همان $A - B$ است، $A' \cap B$ هم همان $B - A$ است:

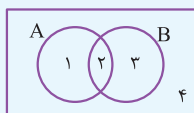
$$[(A - B) \cup (A \cap B)] - (B - A)$$

گام سوم: جواب قسمت اول می‌شود A و داریم:

$$A - (B - A) = A$$

روش شماره گذاری نواحی:

به‌جور دیگر



$$[(B' - A') \cup (A' \cup B')]' - (A' \cap B) = \{1, 2\} - \{3\} = \{1, 2\} = A$$



ساده شده عبارت $(A' \cap B) \cup [((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)]$ کدام است؟ (سؤال ۳۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

A (۴)

B (۳)

B - A (۲)

A - B (۱)

کنکور

با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ اعداد دورقمی می‌سازیم. اگر عدد انتخابی بیشتر از ۲۲ باشد، با کدام احتمال مضرب ۳ است؟

۰/۴ (۴)

۰/۳ (۳)

۰/۲ (۲)

۰/۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

احتمال ساده:

کرتی Box

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

احتمال شرطی با فرض رخ دادن B:

$$P(A | B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

در صورت سؤال عباراتی از قبیل «می‌بینیم که، می‌دانیم که، به فرض آن که، مشروط بر آن که» نشان می‌دهند احتمال شرطی داریم.

چه تغییراتی نسبت به احتمال ساده داریم:

(۱) کل حالت‌ها دیگر S نیست، بلکه فقط B است.

(۲) حالت‌های مورد نظر تمام A نیست، بلکه فقط $(A \cap B)$ است.

(۳) احتمال را با $P(A | B)$ نشان می‌دهیم.

گام اول: فضای نمونه‌ای محدودشده شامل اعداد ۲۳، ۲۴، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۴۱، ۴۲، ۴۳ و ۴۴ است؛ یعنی ۱۰ عضو دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

{۴۲، ۳۳، ۲۴}

گام دوم: در این فضا، مضارب ۳ عبارت‌اند از:

گام سوم: پس داریم:

$$P(۳ \text{ مضرب} | ۲۲ \text{ از} ۲۲) = \frac{۳}{۱۰}$$

۹۳

در n داده آماری، میانگین ۱۲ است. اگر ۳ داده جدید با مقدار a را اضافه کنیم، میانگین ثابت مانده و واریانس $۹۶/۰$ برابر می‌شود. مجموع داده‌های اولیه چه قدر است؟

۹۰۰ (۴)

۸۶۴ (۳)

۷۹۲ (۲)

۷۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

کرتی Box

اگر به n داده آماری چند داده جدید اضافه کنیم و $\bar{X}$ تغییر نکند، میانگین داده‌های اضافه‌شده با میانگین اولیه برابر بوده است. در این مسائل، عبارت صورت واریانس برای n داده اولیه، در واریانس جدید هم عیناً ظاهر می‌شود. اگر k داده مساوی با میانگین اضافه شوند، داریم:

$$\sigma_{\text{اولیه}}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n + k}$$

گام اول: حتماً a با میانگین داده‌ها یعنی ۱۲ برابر بوده است (پهن $\bar{x}$ فرقی نکرده).

گام دوم: نسبت واریانس‌ها را ببینید:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 12)^2}{n} = \sigma_{\text{اولیه}}^2 \\ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 12)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2}{n + 3} = \sigma_{\text{جدید}}^2 \end{array} \right. \quad \div \rightarrow \quad \frac{n}{n + 3} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}^2}{\sigma_{\text{اولیه}}^2} = \frac{96}{100} = \frac{24}{25}$$

پس: $n = 72$.

گام سوم: جمع داده‌های اولیه برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{72} x_i = 72 \bar{x} = 72 \times 12 = 864$$

در ۱۷ داده آماری، چارک سوم ۲۰ و میانگین داده‌های بیشتر و کم‌تر از چارک سوم به ترتیب ۲۸ و ۱۱ است. میانگین

کل داده‌ها کدام است؟

$$۱۵/۴(۴)$$

$$۱۵/۲(۳)$$

$$۱۵(۲)$$

$$۱۴/۸(۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

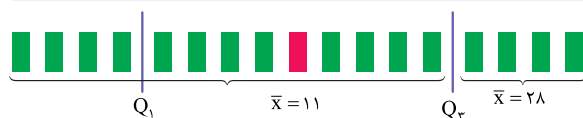
میانۀ عددی است که در وسط داده‌های مرتب‌شده قرار دارد.

الف) اگر تعداد داده‌ها (n) فرد باشد، شماره میانۀ $\frac{n+1}{2}$ است (مثلاً در ۱۱ داده، ششمی است).

ب) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، معدل دوتای وسطی یعنی $\frac{n}{2}$ و بعدی‌اش میانۀ است (مثلاً در ۲۰ داده، $\bar{x}$ می‌شود معدل داده دهمی و یازدهمی).

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ۱۷ تا داده داریم:



گام دوم: پس میانگین ۴ تایی بزرگ‌تر برابر ۲۸ و میانگین ۱۳ تایی دیگر برابر ۱۱ است، جمع آن‌ها می‌شود:

$$\sum x_i = 11 \times 13 + 4 \times 28 = 143 + 112 = 255$$

گام سوم: پس میانگین کل داده‌ها برابر است با:

$$\frac{\text{جمع}}{\text{تعداد}} = \frac{255}{17} = 15$$

تعداد اعضای نمونه اولیه ۶۵ تا بوده، اگر تعداد اعضا را ۱۹۵ تا افزایش دهیم، انحراف معیار برآورد میانگین چند برابر می شود؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (۴)$$

$$\frac{1}{3} (۳)$$

$$\frac{1}{2} (۲)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

کرتی Box

اگر برای برآورد میانگین از نمونه های n عضوی استفاده شود، انحراف معیار برآورد میانگین $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ است، پس با توجه به ثابت بودن σ جامعه داریم:

$$\frac{\sigma_{\bar{x}_2}}{\sigma_{\bar{x}_1}} = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: فرمول انحراف معیار برآورد $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ است، پس:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$$

گام دوم: نسبت انحراف معیارها برابر است با:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{195+65}} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{260}} = \frac{1}{2}$$

فیزیک یازدهم

۹۶

ذره‌ای به جرم ۵ میلی‌گرم و بار الکتریکی $q = -4 \mu\text{C}$ در میدان الکتریکی $\vec{E} = (6 \times 10^3 \text{ N/C})\vec{i}$ قرار دارد. اگر تنها نیروی وارد بر ذره، نیروی الکتریکی باشد، شتاب ذره در SI کدام است؟

- (۱) $4800\vec{i}$ (۲) $-4800\vec{i}$
(۳) $4/81\vec{i}$ (۴) $-4/81\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

نیروی وارد بر بار الکتریکی در میدان الکتریکی: اگر بار الکتریکی q در میدان الکتریکی ناشی از اجسام باردار دیگری قرار گیرد، بر آن نیرویی وارد می‌شود که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

F: اندازه نیرو (N)

q: بار الکتریکی (C)

E: اندازه میدان الکتریکی (N/C)

مطابق رابطه فوق به دو نتیجه زیر می‌رسیم:

(۱) اندازه نیروی الکتریکی از رابطه $|F| = |q||E|$ محاسبه می‌شود.

(۲) نیروی وارد بر بار مثبت در جهت میدان الکتریکی و نیروی وارد بر بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

گام اول: طبق قانون دوم نیوتون می‌دانیم اگر بر ایند نیروهای وارد بر جسم صفر نباشد، جسم در جهت بر ایند نیروها شتاب خواهد گرفت. در این جا تنها نیرویی که بر بار الکتریکی اثر می‌کند، نیروی ناشی از میدان الکتریکی است:

$$F_{\text{net}} = \vec{F}_E = q\vec{E} \Rightarrow \vec{F}_{\text{net}} = (-4 \times 10^{-6})(6 \times 10^3 \vec{i}) = (-24 \times 10^{-3} \text{ N})\vec{i}$$

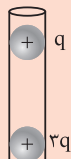
گام دوم: طبق قانون دوم نیوتون، نیرو و شتاب هم‌جهت هستند، داریم:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m} \xrightarrow{m = \Delta \text{ mg} = \Delta \times 10^{-3} \times 10^{-3} = \Delta \times 10^{-6} \text{ kg}} \vec{a} = \frac{-24 \times 10^{-3} \vec{i}}{5 \times 10^{-6}} = (-4800 \text{ m/s}^2)\vec{i}$$

پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر، دو گوی باردار مثبت که جرم هر یک $30 \mu\text{g}$ است، در فاصله $1/5 \text{ cm}$ از هم قرار دارند. به طوری که گوی بالایی معلق مانده است. تعداد الکترون های کنده شده از گوی پایینی کدام است؟

$$(g = 10 \text{ m/s}^2, k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$



$$3/125 \times 10^{10} \quad (1)$$

$$9/375 \times 10^8 \quad (2)$$

$$3/125 \times 10^8 \quad (3)$$

$$9/375 \times 10^{10} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

بار الکتریکی:

(۱) بار الکتریکی، کمیتی گسسته (کوانتیده) است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$q = \pm ne, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

در رابطه فوق، e بار بنیادی و برابر $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ است.

(۲) اگر تعداد الکترون های یک جسم، بیشتر از تعداد پروتون های آن باشد، علامت بار آن جسم منفی خواهد بود و اگر تعداد الکترون های آن کمتر از تعداد پروتون هایش باشد، علامت بار آن جسم مثبت خواهد بود.

قانون کولن:

اگر دو بار ذره ای q_1 و q_2 در فاصله r از یکدیگر باشند، نیروی الکتریکی F را به یکدیگر وارد می کنند که بزرگی آن از رابطه زیر محاسبه می شود:

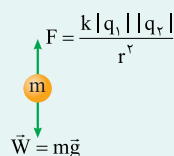
$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$$

$|q_1|, |q_2|$: اندازه بارهای الکتریکی برحسب کولن (C)

r : فاصله بین دو بار برحسب متر (m)

k : ثابت کولن که تقریباً برابر با $9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$ است.

تعادل بین نیروی الکتریکی و وزن: وقتی جسم بارداری تحت تأثیر نیروی الکتریکی و نیروی وزن در حال تعادل قرار دارد، نیروی خالص وارد بر آن صفر است.

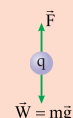


شکل مقابل، نیروهای وارد بر این جسم را نشان می دهد:

با توجه به این که جسم در تعادل قرار دارد، نیروی وزن و نیروی الکتریکی، هم اندازه هستند و می توان نوشت:

$$F_E = W \Rightarrow |qE| = mg$$

گام اول: ابتدا با اعمال شرط تعادل، مقدار بار q را به دست می آوریم. طبق شکل، شرط تعادل برای جسم بالایی (معلق) این گونه است:



$$F = W$$

$\vec{F}$: نیروی الکتریکی (N)

$\vec{W}$: وزن (N)

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی

$$\Rightarrow \frac{k|q||3q|}{r^2} = mg \Rightarrow \frac{9 \times 10^9 \times q \times 3q}{(1/5 \times 10^{-2})^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 3q^2}{2/25 \times 10^{-4}} = 30 \times 10^{-6} \times 10^{-3} \times 10$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{3 \times 2/25 \times 10^{-11}}{9 \times 3 \times 10^9} = 0/25 \times 10^{-20} \xrightarrow{\text{جذر}} q = 0/5 \times 10^{-10} \text{ C}$$

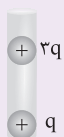
گام دوم: برای بار پایینی ($3q$)، تعداد الکترون‌های کنده شده را به دست می‌آوریم:

$$3q = ne$$

$$\Rightarrow 3 \times 0/5 \times 10^{-10} = n \times 1/6 \times 10^{-19} \Rightarrow n = \frac{15}{16} \times 10^9 = 9/375 \times 10^8$$

در شکل زیر، دو گوی باردار که جرم هر یک $7/5 \mu\text{g}$ است در فاصله 3 cm از هم قرار دارند؛ به طوری که گوی بالایی معلق مانده است. تعداد الکترون‌های کنده‌شده از گوی بالایی چه قدر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$, $k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

(سوال ۶۳ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت دوم)



$$3/125 \times 10^{-10} \quad (1)$$

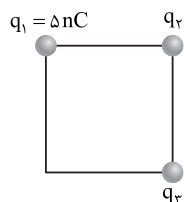
$$9/375 \times 10^{-8} \quad (2)$$

$$3/125 \times 10^{-8} \quad (3)$$

$$9/375 \times 10^{-10} \quad (4)$$

در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی سه رأس یک مربع به ضلع ۱۵ cm قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در رأس چهارم مربع برابر صفر باشد، اندازه میدان الکتریکی خالص در مرکز مربع چند نیوتون بر کولن است؟

$$(k = ۹ \times ۱۰^۹ \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$



$$۴ \times ۱۰^۳ \quad (۱)$$

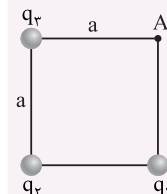
$$۸ \times ۱۰^۳ \quad (۲)$$

$$۴\sqrt{۲} \times ۱۰^۳ \quad (۳)$$

$$۸\sqrt{۲} \times ۱۰^۳ \quad (۴)$$

مشاوره چون این حالت در کنکورهای اخیر به شدت تکرار شده است، بهتر است نتیجه را به صورتی که در زیر آمده است، فرا بگیرید:

صفر شدن میدان خالص در یک رأس مربع: هنگامی که سه بار الکتریکی مطابق شکل، روی رأس‌های یک مربع قرار دارند، برای آن که میدان خالص در رأس چهارم صفر شود، باید روابط زیر برقرار باشد:

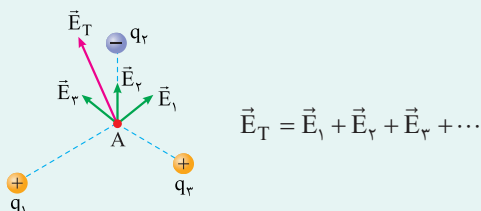


$$q_1 = q_3$$

$$q_2 = -۲\sqrt{۲}q_1$$

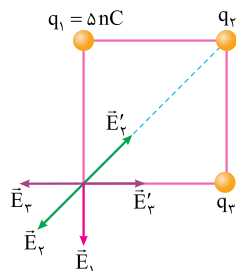
پاسخ: گزینه ۴

اصل برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی: میدان الکتریکی ناشی از چند بار نقطه‌ای در نقطه‌ای از فضا، برابر با جمع برداری میدان‌های الکتریکی‌ای است که هر یک از بارها به طور مستقل در آن نقطه ایجاد می‌کنند.



میدان الکتریکی $\vec{E}_T$ در محل بار آزمون، جمع برداری میدان‌های $\vec{E}_1$ ، $\vec{E}_2$ و $\vec{E}_3$ در محل این بار است.

گام اول: میدان‌ها براساس تمامی حالات ممکن به صورت شکل زیر است:

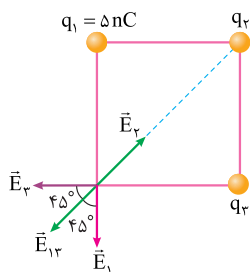


با توجه به این که میدان در رأس چهارم باید صفر شود، فقط حالاتی مورد قبول است که بتواند میدان براینده را صفر کند، یعنی $\vec{E}_3$ و $\vec{E}'_3$.

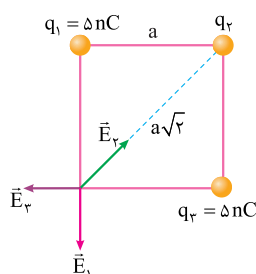
- اگر q_3 منفی باشد. $\vec{E}'_3 \leftarrow$
- اگر q_3 مثبت باشد. $\vec{E}_3 \leftarrow$
- اگر q_2 مثبت باشد. $\vec{E}_2 \leftarrow$
- اگر q_2 منفی باشد. $\vec{E}'_2 \leftarrow$

✓ پاسخ خیلی تشریحی

از طرفی برای صفر شدن میدان در رأس چهارم، باید برایندهای $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_3$ دقیقاً هم‌راستا با میدان ناشی از q_4 که روی قطر مربع است، باشد و نتیجه می‌شود که برایندهای $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_3$ زاویه 45° بسازد که یعنی $E_1 = E_3$.



گام دوم: q_4 حتماً باید منفی باشد و $q_1 = q_2 = \Delta nC$.



$$\vec{E}_{1,3} = \vec{E}_1 + \vec{E}_3 = -\vec{E}_2$$

دو بردار $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_3$ هم‌اندازه هستند: $E_1 = E_3 = E \Rightarrow E_1 = E_3 = E$ ؛ $E_1 = \frac{kq_1}{a^2}$ ؛ $E_3 = \frac{kq_3}{a^2}$ از طرفی بر هم عمودند، پس اندازه برایندها برابر است با:

$$E_{1,3} = E\sqrt{2} = \frac{9 \times 10^9 \times \Delta \times 10^{-9}}{225 \times 10^{-4}} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times 10^3 \text{ N/C}$$

گام سوم: برای این که میدان برایندها صفر شود، باید مقدار $\vec{E}_2$ با اندازه برایندهای $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_3$ برابر باشد:

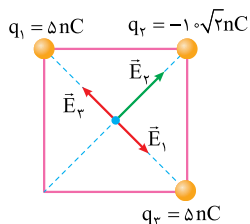
$$E_2 = \frac{k|q_2|}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{9 \times 10^9 \times |q_2|}{450 \times 10^{-4}} = 2\sqrt{2} \times 10^3 \Rightarrow |q_2| = 10^{-9} \sqrt{2} \text{ C} = 10^{-9} \sqrt{2} \text{ nC}$$

با توجه به گام اول، $q_2 = -10^{-9} \sqrt{2} \text{ nC}$ خواهد بود.

تذیبات

وقتی چنین حالت خاصی، پیش می‌آید، طبق مطالب مشاوره، می‌توانستید بگویید: $q_2 = -2\sqrt{2}q_1$ (که می‌شود همین $-10^{-9} \sqrt{2} \text{ nC}$) تا ناکولن فودمون!

گام چهارم: محاسبه میدان برایندها در مرکز مربع:



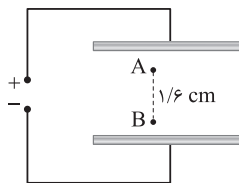
همون طور که مشفیه، اندازه بارهای q_1 و q_3 برابره؛ حاصله‌ها هم از مرکز مربع تا رأس برابر با $\frac{1}{2}a\sqrt{2} \text{ cm}$ هست که اوتا هم برابره، پس می‌تونیم نتیجه بگیریم:

$$|E_1| = |E_3|$$

چون $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_3$ خلاف جهت هم هستند، همدیگر را خنثی می‌کنند و تنها باری که میدان آن باقی می‌ماند، بار q_2 هست که باید اندازه میدان آن را حساب کنیم:

$$|E_2| = \frac{k|q_2|}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-9} \sqrt{2} \times 10^{-9}}{112/5 \times 10^{-4}} = 8\sqrt{2} \times 10^3 \text{ N/C}$$

در شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو صفحهٔ رسانا که در فاصلهٔ ۲ سانتی‌متری از هم قرار دارند، برابر $V = ۶۰۰$ است. اگر ذره‌ای به بار الکتریکی $q = -۵ \mu C$ از نقطهٔ A تا نقطهٔ B جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن، چند میلی‌ژول و چگونه تغییر می‌کند؟



(۱) $۲/۴$ ، کاهش می‌یابد.

(۲) $۲/۴$ ، افزایش می‌یابد.

(۳) ۳ ، کاهش می‌یابد.

(۴) ۳ ، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکتهٔ Box

کار میدان الکتریکی و تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی، برابر قرینهٔ کار نیروی میدان الکتریکی است و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} W = Fd \cos \theta \\ \Delta U = -W \end{cases} \Rightarrow \Delta U = -Fd \cos \theta \xrightarrow{F=E|q|} \Delta U = -E|q|d \cos \theta \Rightarrow |\Delta U| = |Eqd \cos \theta|$$

دقت کنید که کار نیروی الکتریکی فقط به مبدأ و مقصد حرکت بار ربط دارد و مستقل از مسیر حرکت است، بنابراین تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی هم فقط به مبدأ و مقصد حرکت ربط دارد.

از رابطهٔ فوق، برای محاسبهٔ تغییرات انرژی پتانسیل در یک میدان الکتریکی استفاده می‌کنیم. دقت کنید در حالتی که عمود بر خطوط میدان حرکت کنیم ($\cos \theta = ۰$)، پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی ثابت می‌مانند.

نوع بار ذره در نحوهٔ تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی (ΔU) مؤثر است، ولی در نحوهٔ تغییرات پتانسیل الکتریکی (ΔV) تأثیری ندارد.



تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی و اختلاف پتانسیل الکتریکی:

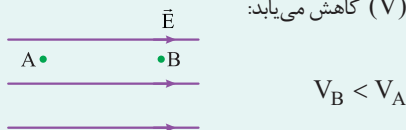
(۱) هنگامی که بار q بین دو نقطه که اختلاف پتانسیل آن‌ها برابر ΔV است، جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن تغییر می‌کند. تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی بار، یعنی ΔU به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta U = q\Delta V$$

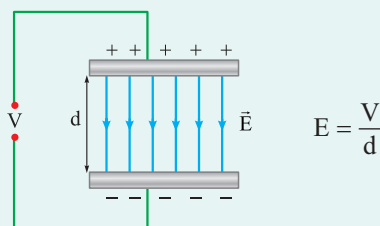
(۲) مطابق رابطهٔ بالا، بار مثبت با حرکت به سمت پتانسیل‌های بیشتر، انرژی پتانسیل الکتریکی‌اش زیاد می‌شود و انرژی پتانسیل الکتریکی بار منفی با حرکت به سمت پتانسیل‌های کم‌تر، بیشتر می‌شود.

(۳) اگر یک بار الکتریکی در جهت خودبه‌خودی حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن حتماً کم می‌شود. جهت حرکت خودبه‌خودی بار مثبت در جهت خطوط میدان الکتریکی است، در حالی که جهت حرکت خودبه‌خودی بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

(۴) مانند شکل زیر، با حرکت در جهت خطوط میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی (V) کاهش می‌یابد:



میدان الکتریکی یکنواخت: اگر دو صفحهٔ بزرگ فلزی را با بارهای $+q$ و $-q$ باردار کنیم و در مقابل هم در فاصلهٔ d قرار دهیم، میدان الکتریکی یکنواختی بین آن‌ها ایجاد می‌شود (دور از لبه‌ها) که اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



مطابق رابطهٔ $E = \frac{V}{d}$ ، یکای میدان الکتریکی علاوه بر $\frac{\text{نیوتون}}{\text{کولن}}$ که در گذشته خواندیم، می‌تواند $\frac{\text{ولت}}{\text{متر}}$ هم باشد.

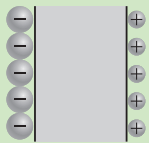
بار منفی به سمت صفحه منفی جابه‌جا شده است و حرکت آن اجباری است؛ در نتیجه، انرژی پتانسیل الکتریکی بار افزایش می‌یابد:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{600}{2 \times 10^{-2}} = 3 \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$\Delta U = -E |q| d \cos \theta$$

$$\Rightarrow \Delta U = -3 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-6} \times 1 / 6 \times 10^{-2} \times (-1) = 24 \times 10^{-4} \text{ J} = 2 / 4 \times 10^{-3} \text{ J} = 2 / 4 \text{ mJ}$$

غشای یاختهٔ عصبی شکل زیر، دارای ثابت دی‌الکتریک ۳، ضخامت 9 nm و مساحت سطح 10^{-10} m^2 است. اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر غشا برابر 80 mV باشد، انرژی ذخیره‌شده در آن چند ژول است؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$)



(۱) $4 / 8 \times 10^{-15}$

(۲) $4 / 8 \times 10^{-16}$

(۳) $9 / 6 \times 10^{-15}$

(۴) $9 / 6 \times 10^{-16}$

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

ظرفیت خازن: هر چه اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ خازن بیشتر باشد، بار ذخیره‌شده در آن بیشتر می‌شود. نسبت بار ذخیره‌شده به اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ آن را ظرفیت خازن می‌نامند. ظرفیت خازن را با C نشان می‌دهند و یکای آن فاراد یا کولن بر ولت است.

بار الکتریکی (C) $\rightarrow C = \frac{Q}{V}$ $\leftarrow$ ظرفیت خازن (F)
اختلاف پتانسیل (V) $\rightarrow$

هنگامی که یک خازن به ظرفیت C توسط یک باتری با ولتاژ V باردار می‌شود، بار ذخیره‌شده در آن، از رابطهٔ $Q = CV$ به دست می‌آید. عوامل مؤثر بر ظرفیت خازن تحت: تنها ویژگی‌های ساختمانی، می‌توانند بر روی ظرفیت خازن مؤثر باشند.

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

κ : ثابت دی‌الکتریک

ϵ_0 : گذردهی الکتریکی خلأ (F/m)

A : مساحت صفحه‌های خازن (m^2)

d : فاصلهٔ بین دو صفحهٔ خازن (m)

انرژی ذخیره‌شده در خازن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

U : انرژی (J)

C : ظرفیت (F)

V : اختلاف پتانسیل (V)

گام اول: ابتدا ظرفیت خازن را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

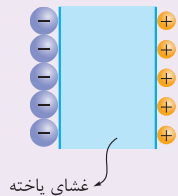
$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} = \frac{3 \times 9 \times 10^{-12} \times 10^{-10}}{9 \times 10^{-9}} = 3 \times 10^{-13} \text{ F}$$

گام دوم: انرژی ذخیره شده در خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^{-13} \times 6400 \times 10^{-6} = 9 / 6 \times 10^{-16} \text{ J}$$

یک یاختهٔ عصبی (نورون) را می‌توان با یک خازن تخت مدل‌سازی کرد؛ به طوری که غشای سلول به عنوان دی‌الکتریک و یون‌های باردار با علامت مخالف که در دو طرف غشا هستند، به عنوان بارهای روی صفحه‌های خازن عمل کنند (شکل زیر). ظرفیت یک سلول عصبی و تعداد یون‌های لازم (با فرض آن که هر یون یک بار یونیده باشد)، برای آن که یک اختلاف پتانسیل 85 mV ایجاد شود، چه قدر است؟ فرض کنید غشا دارای ثابت دی‌الکتریک $\kappa = 3/0$ ، ضخامت $10/0 \text{ nm}$ و مساحت سطح 10^{-10} m^2 است.

(تمرین ۱ - ۱۲ صفحه ۳۸ کتاب درسی)



شعاع کره فلزی A دو برابر شعاع کره فلزی B است. اگر بار الکتریکی کره B، ۲۰ درصد کم تر از بار الکتریکی کره A باشد، چگالی سطحی بار الکتریکی کره A، چند برابر چگالی سطحی بار الکتریکی کره B است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ۵ (۳) $\frac{16}{5}$ (۴) $\frac{5}{16}$

پاسخ: گزینه ۴

کافی است فرمول نسبتی چگالی سطحی بار الکتریکی رو بنویسیم و داده های مسئله را جای گذاری کنیم.

Hint

درس Box

پخش بار در سطح خارجی اجسام رسانا چگونه است؟

بار الکتریکی در سطح خارجی جسم رسانا، با توجه به شکل جسم توزیع می شود. به این صورت که در نقاط نوک تیز، تجمع بار بیشتر است و برای جسمی مانند کره، بار به شکل یکنواخت در همه نقاط آن توزیع می شود.

در یک جسم رسانا توزیع بار به گونه ای انجام می شود که تعادل الکتروستاتیکی برقرار شود. برای فهم این مسئله برای اجسام رسانا، کمیتی به نام چگالی سطحی بار الکتریکی تعریف می شود و برابر با نسبت بار الکتریکی به مساحت سطح جسم است:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \xrightarrow{A=4\pi r^2} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \quad \text{Q: بار الکتریکی (C)}$$

r: شعاع کره (m)

σ : چگالی سطحی بار الکتریکی (C/m^2)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$r_A = 2r_B$$

$$Q_B = Q_A - \frac{1}{2}Q_A = \frac{1}{2}Q_A$$

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{Q_A}{Q_B} \times \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 = \frac{Q_A}{\frac{1}{2}Q_A} \times \left(\frac{r_B}{2r_B}\right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

شعاع کره فلزی A دو برابر شعاع کره فلزی B است. اگر بار الکتریکی کره B، ۵۰ درصد بار الکتریکی کره A باشد، چگالی سطحی بار الکتریکی کره A، چند برابر چگالی سطحی بار کره B است؟ (سوال ۶۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ - نوبت اول)

کنکور

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۲ کدام یک از موارد زیر، درست است؟

- (۱) مقاومت‌های ترکیبی معمولاً از برخی نارساناها و لایه‌های نازک کربنی ساخته می‌شوند.
- (۲) با افزایش شدت نور تابیده به مقاومت نوری، مقاومت آن افزایش می‌یابد.
- (۳) رنگ نور گسیل‌شده از دیودهای نورگسیل، بسته به نوع نیم‌رسانای به‌کاررفته در آن‌ها، می‌تواند از فروسرخ تا فرابنفش باشد.
- (۴) مقاومت‌های پیچ‌های برای به دست آوردن مقاومت‌های پایین بسیار دقیق و هم‌چنین توان‌های پایین ساخته می‌شوند.

پاسخ: گزینه (۳)

بررسی همه گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

- گزینه (۱): **مقاومت‌های ترکیبی**: معمولاً از کربن، برخی نیم‌رساناها و یا لایه‌های نازک فلزی ساخته شده‌اند. (نادرست) ✗
- گزینه (۲): مقاومت نوری، نوعی مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به نور تابیده شده به آن، بستگی دارد؛ به طوری که با افزایش شدت نور، از مقاومت آن کاسته می‌شود؛ مثلاً یک LDR در تاریکی مقاومتی چند مگا اهمی دارد؛ در حالی که در یک نور مناسب، مقاومت آن به چند صد اهم می‌رسد. (نادرست) ✗
- گزینه (۳): بسته به نوع نیم‌رسانای به‌کاررفته، رنگ نور گسیل‌شده از LED می‌تواند از فروسرخ تا فرابنفش باشد. (درست) ✓
- گزینه (۴): مقاومت‌های پیچ‌های برای به دست آوردن مقاومت‌های پایین با دقت بالا یا مقاومت‌های با توان بالا به کار می‌روند. (نادرست) ✗

دو میله فلزی A و B، سطح مقطع و مقاومت الکتریکی یکسانی دارند. اگر مقاومت ویژه میله A، دو برابر مقاومت ویژه میله B و چگالی آن، ۳ برابر چگالی میله B باشد، جرم میله A چند برابر جرم میله B است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

مقاومت الکتریکی یک سیم به ویژگی های ساختمانی و دمای آن وابسته است و از رابطه زیر به دست می آید:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

R: مقاومت الکتریکی (Ω)

ρ : مقاومت ویژه ($\Omega.m$)

L: طول سیم (m)

A: سطح مقطع سیم (m^2)

گاهی در سؤالات مربوط به محاسبه مقاومت، از جرم و چگالی سیم هم استفاده می شود. برای حل این سؤالات می توانیم به صورت زیر عمل کنیم. دقت کنید که چگالی را با ρ' نشان داده ایم تا با مقاومت ویژه اشتباه نشود.

$$L = A$$

$$\rho' = \frac{m}{V} = \frac{m}{AL} \Rightarrow A = \frac{m}{\rho' L}, L = \frac{m}{A \rho'}$$

$$R = \rho \frac{L}{A} \xrightarrow{A = \frac{m}{\rho' L}} R = \rho \rho' \frac{L^2}{m}; R = \frac{\rho \frac{m}{A \rho'}}{A} = \frac{\rho m}{A^2 \rho'}$$

طبق درس باکس و نکاتی که گفته شد، داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$R = \frac{\rho m}{A^2 \rho'} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{\rho'_B}{\rho'_A} \times \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2 \times \frac{m_A}{m_B}$$

$$\left. \begin{array}{l} R_A = R_B \\ \rho_A = 2\rho_B \text{ (مقاومت ویژه)} \\ \rho'_A = 3\rho'_B \text{ (چگالی)} \\ A_A = A_B \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = 1 = \frac{2\rho_B}{\rho_B} \times \frac{\rho'_B}{3\rho'_B} \times 1 \times \frac{m_A}{m_B}$$

$$1 = \frac{2}{3} \times \frac{m_A}{m_B} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{3}{2}$$

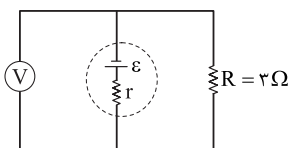
دو میله فلزی A و B، طول و مقاومت الکتریکی یکسانی دارند. اگر مقاومت ویژه میله A، دو برابر مقاومت ویژه میله B باشد و چگالی آن، ۳ برابر چگالی میله B باشد، جرم میله A چند برابر جرم میله B است؟

(سؤال ۶۵ کنکور تهری ۱۴۰۳ - نوبت دوم)

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۶

کنکور

۱۰۴ در مدار شکل زیر، اگر مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، برابر ۶ V باشد، توان خروجی باتری چند وات است؟



(۱) ۶

(۲) ۹

(۳) ۱۲

(۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۳

توان خروجی باتری (مولد): توان خروجی از یک مولد (توان مفید) از رابطه زیر به دست می‌آید:

کوتاه‌ترین

$$\begin{cases} P = VI \\ V = \varepsilon - rI \end{cases} \Rightarrow P = \varepsilon I - rI^2$$

P: توان (W)

ε: نیروی محرکه (V)

I: جریان الکتریکی (A)

r: مقاومت درونی (Ω)

به عبارتی، می‌توان گفت که باتری توان εI را تولید می‌کند و مقدار rI^2 در مقاومت درونی آن تلف می‌شود.

دقت کنید توان خروجی از باتری $(P = \varepsilon I - rI^2)$ ، برابر توان مصرفی در کل مقاومت‌های خارجی مدار $(P = R_{eq} I^2 = \frac{V^2}{R_{eq}})$ است.

نکته

ولت‌سنج آرمانی:

وسایله‌ای برای اندازه‌گیری ولتاژ یا همان اختلاف پتانسیل دو سر یک قسمت از مدار است و به صورت موازی با آن قسمت بسته می‌شود.

مقاومت ولت‌سنج آرمانی خیلی بزرگ است و در نتیجه جریانی از ولت‌سنج آرمانی عبور نمی‌کند.

آمپرسنج آرمانی:

وسایله‌ای برای اندازه‌گیری جریان عبوری از یک قسمت مدار است و به صورت متوالی با آن قسمت بسته می‌شود.

مقاومت داخلی آمپرسنج آرمانی خیلی ناچیز و تقریباً صفر است، بنابراین مثل یک سیم بدون مقاومت است.

با توجه به مدار داده‌شده، می‌توانیم بفهمیم ولت‌سنج در حال نشان دادن ولتاژ خروجی از باتری است؛ هم‌چنین ولتاژ باتری، همان

پاسخ خیلی تشریحی

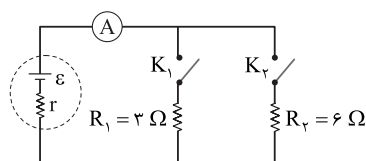
ولتاژ مقاومت $R = 3 \Omega$ است.

طبق نکته درس‌بکس، توان خروجی از باتری، همان توان کل مصرفی مدار است، پس می‌توان نوشت:

$$P_{\text{خروجی باتری}} = P_{\text{مصرفی مدار}} \Rightarrow P_{\text{خروجی باتری}} = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P_{\text{خروجی باتری}} = \frac{36}{3} = 12 \text{ W}$$

۱۰۵

در مدار شکل زیر، وقتی فقط کلید K_1 بسته است، آمپرسنج آرمانی 3 A و وقتی فقط کلید K_2 بسته است، آمپرسنج آرمانی 2 A را نشان می‌دهد؛ در حالتی که هر دو کلید بسته باشند، آمپرسنج چند آمپر را نشان می‌دهد؟



(۱) $2/5$

(۲) $3/2$

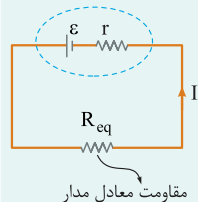
(۳) $3/6$

(۴) $4/5$

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

می‌توانیم مقاومت‌های مدار را ساده کنیم و همه آن‌ها را در یک «مقاومت معادل» خلاصه کنیم.



$$I = \frac{\varepsilon}{r + R_{eq}}$$

ε : نیروی محرکه مولد (V)

R_{eq} : مقاومت معادل خارجی مدار (Ω)

r : مقاومت درونی مولد (Ω)

I : جریان خروجی از باتری (A)

rI : افت پتانسیل در باتری (V)

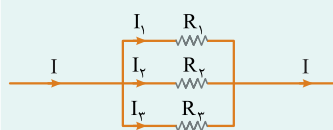
$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI$$

$V_{\text{باتری}}$: ولتاژ دو سر باتری (V)

$$V = \frac{\varepsilon R_{eq}}{r + R_{eq}}, \text{ ولتاژ دو سر باتری دقیقاً با ولتاژ دو سر مقاومت معادل } (R_{eq}) \text{ برابر است.}$$

به هم بستن موازی مقاومت‌ها:

وقتی چند مقاومت به صورت موازی بسته می‌شوند، اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها یکسان است، اما جریان الکتریکی کل، بین آن‌ها تقسیم می‌شود.



$$V_1 = V_2 = V_3 = V_{\text{کل}}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

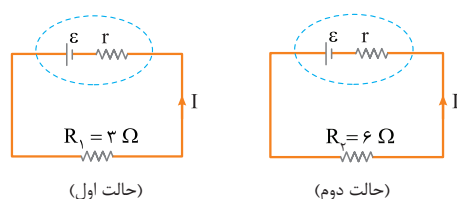
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

R_{eq} : مقاومت معادل مدار (Ω)

برای دو مقاومت موازی R_1 و R_2 می‌توان نوشت:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

گام اول: با استفاده از داده‌های سؤال، اول می‌رویم سراغ مشخصات باتری، یعنی نیروی محرکه (ε) و مقاومت درونی آن. در دو حالتی

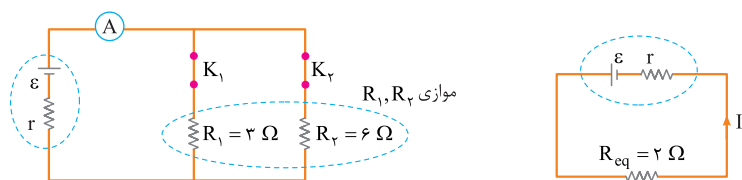


$$\left. \begin{aligned} \text{حالت اول: } I &= \frac{\varepsilon}{R_1 + r} \Rightarrow 3 = \frac{\varepsilon}{3 + r} \rightarrow 9 + 3r = \varepsilon \\ \text{حالت دوم: } I &= \frac{\varepsilon}{R_2 + r} \Rightarrow 2 = \frac{\varepsilon}{6 + r} \rightarrow 12 + 2r = \varepsilon \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon &= 18 \text{ V} \\ r &= 3 \Omega \end{aligned}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

که سؤال گفته، مدارها به شکل زیر درمی‌آیند:

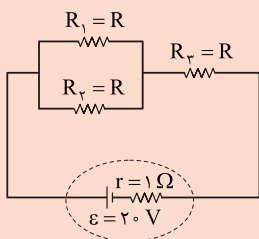
گام دوم: حالا مدار را در حالت بسته بودن هر دو کلید K_1 و K_2 بررسی می کنیم:



$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2 \Omega \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{18}{2 + 3} = \frac{18}{5} = 3.6 \text{ A}$$

در مدار زیر، مقاومت معادل $R_{eq} = 9 \Omega$ است. اگر جای مقاومت R_1 و باتری عوض شود، توان مصرفی در مقاومت R_1

چند وات تغییر می‌کند؟



(۱) ۱۸

(۲) ۶

(۳) $\frac{14}{3}$

(۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳

مقایسه توان مقاومت‌ها:

درس Box

برای این که بتوانیم توان مصرفی مقاومت‌های یک مدار را با هم مقایسه کنیم، اول از همه، باید برویم سراغ مقایسه جریان‌های آن‌ها.

چند نکته:

(الف) جریان مقاومت‌هایی که با هم متوالی هستند با هم برابرند.

(ب) در مقاومت‌های موازی، جریان عبوری با اندازه مقاومت، رابطه عکس دارد. (یعنی مقاومت بیشتر، جریان کم‌تر!)

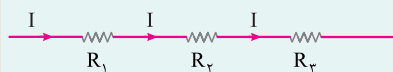
(پ) یک نکته برای مقایسه جریان‌ها: جریان یکی از شاخه‌های مدار را برابر X در نظر بگیرید. بهتر است شاخه‌ای را انتخاب کنید که بیشترین مقاومت را دارد، بعد جریان بقیه قسمت‌ها را برحسب همان X به دست آورید.

(ت) حالا که جریان‌ها را بر حسب X به دست آوردیم می‌توانیم از رابطه $P = RI^2$ استفاده کنیم و توان مقاومت‌ها را با یکدیگر مقایسه کنیم. اگر نسبت توان‌ها خواسته شود، رابطه نهایی هم به این شکل خواهد بود

$$P = RI^2 \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} \times \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2$$

به هم بستن متوالی مقاومت‌ها:

در این حالت، جریان عبوری از مقاومت‌ها یکسان است.

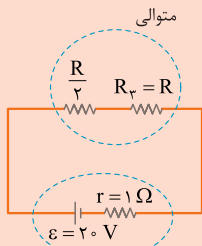
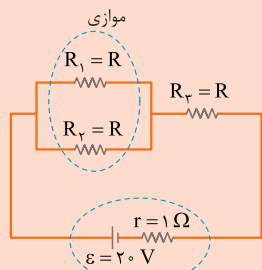


$$I = I_1 = I_2 = I_3$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

گام اول: ابتدا با توجه به اطلاعات سؤال، مقدار R را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R}{2}$$

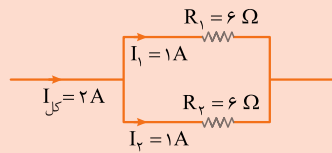
$$R_{eq} = R_{12} + R_3 = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}$$

$$R_{eq} = 9 = \frac{3R}{2} \Rightarrow R = 6 \Omega$$

گام دوم: در حالت اول، توان مصرفی R_1 را با توزیع جریان پیدا می‌کنیم؛ برای این کار، باید اول جریان کل مدار را به دست آوریم:

$$I_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R_{\text{eq}} + r} = \frac{20}{9 + 1} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}$$

این ۲ آمپر باید بین مقاومت‌های R_1 و R_2 که با هم برابر هستند، تقسیم شود، بنابراین هر کدام به میزان یکسانی جریان خواهند داشت:

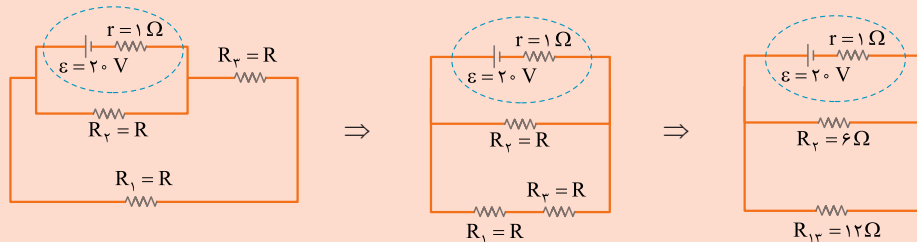


$$I_{\text{کل}} = I_1 + I_2 = 2 \text{ A} \Rightarrow I_1 = 1 \text{ A}$$

$$I_1 = I_2 \Rightarrow I_2 = 1 \text{ A}$$

$$P_{R_1} = R_1 I_1^2 = 6 \times 1 = 6 \text{ W}$$

گام سوم: توان R_1 را برای حالت دوم به دست می‌آوریم:



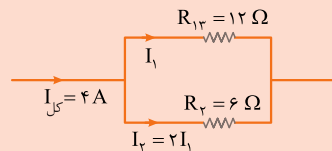
R_1 و R_2 با هم متوالی هستند و معادل آن‌ها با R_3 موازی است.

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 12 \Omega ; R_{\text{eq}} = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4 \Omega$$

حالا جریان کل و توان مصرفی R_1 را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{eq}} + r} = \frac{20}{4 + 1} = \frac{20}{5} = 4 \text{ A}$$

جریان کل $I = 4 \text{ A}$ باید بین دو مقاومت ۶ اهمی و ۱۲ اهمی تقسیم شود:



$$I_1 + 2I_1 = I_{\text{کل}} \Rightarrow 3I_1 = 4 \text{ A} \Rightarrow I_1 = \frac{4}{3} \text{ A}$$

چون R_1 و R_2 با هم متوالی هستند، جریان یکسانی از آن‌ها عبور می‌کند.

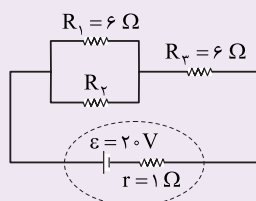
$$P'_1 = R_1 I'^2 = 6 \times \frac{16}{9} = \frac{32}{3} \text{ W}$$

گام چهارم: اختلاف توان‌های اولیه و ثانویه را برای مقاومت R_1 به دست می‌آوریم:

$$P'_1 - P_1 = \frac{32}{3} - 6 = \frac{32}{3} - \frac{18}{3} = \frac{14}{3} \text{ W}$$

در مدار زیر، مقاومت معادل $R_{\text{eq}} = 9 \Omega$ است. اگر جای مقاومت R_2 و باتری عوض شود، توان مصرفی در مقاومت R_2

(سوال ۶۶ کنکور تهرانی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)



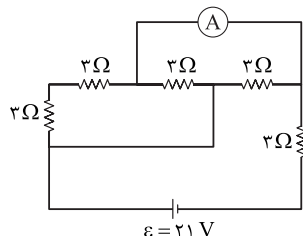
(۱) ۱۸

(۲) ۶

(۳) $\frac{14}{3}$

(۴) صفر

در مدار شکل زیر، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، برابر چند آمپر است؟ ۱۰۷



۱ (۱)

۲ (۲)

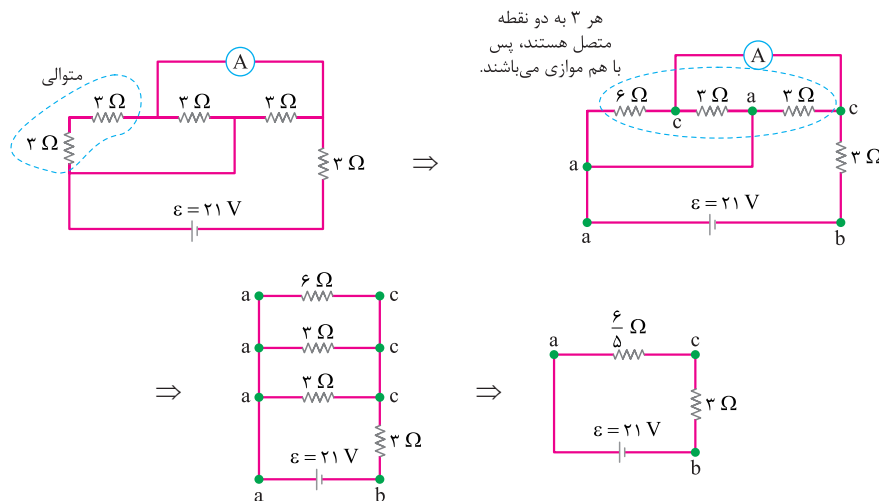
۳ (۳)

۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی

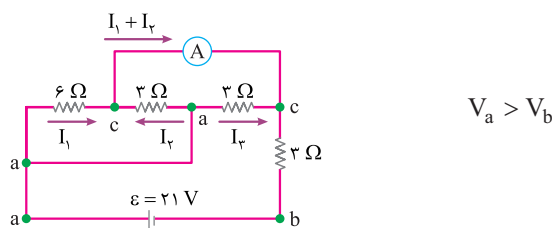
گام اول: ابتدا جریان کل مدار را با ساده کردن آن و معادل گیری مقاومت‌ها به دست می‌آوریم:



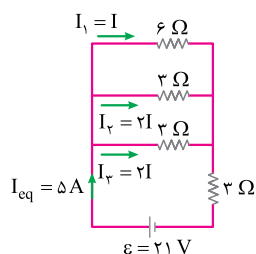
$$R_{eq} = \frac{6}{2} + 3 = 4.5 \Omega$$

$$I_{eq} = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{21}{4.5} = 4.67 \text{ A}$$

گام دوم: در یک مدار، جهت جریان از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کمتر است، بنابراین اگر گره‌های مدار را نام‌گذاری کنیم، جریان این‌گونه خواهد بود:



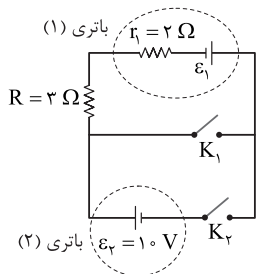
گام سوم: همان‌طور که در شکل مشخص است، از آمپرسنج، جریان $I_1 + I_2$ عبور می‌کند و کافی است I_1 و I_2 را بیابیم:



$$\left. \begin{aligned} 2I + 2I + I &= I_{eq} = 4.67 \text{ A} \\ \Delta I &= 4.67 \Rightarrow I = 1.5 \text{ A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} I_1 &= 1.5 \text{ A} \\ I_2 &= 3.17 \text{ A} \end{aligned} \Rightarrow I_1 + I_2 = 4.67 \text{ A} \rightarrow \text{عدد آمپرسنج}$$

در مدار شکل زیر، ابتدا کلید K_1 بسته و کلید K_2 باز کرده و کلید K_3 را ببندیم،

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۱) چند ولت و چگونه تغییر می‌کند؟



(۱) ۲، کاهش می‌یابد.

(۲) ۲، افزایش می‌یابد.

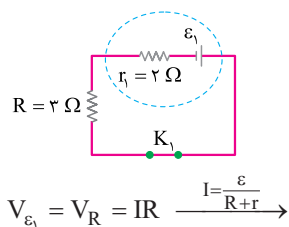
(۳) ۴، کاهش می‌یابد.

(۴) ۴، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۳

حالت اول: اگر K_1 بسته باشد، باتری (۲) در مدار نخواهد بود و مدار این گونه می‌شود:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

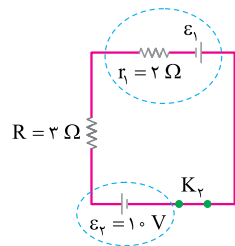


$$V_{\varepsilon_1} = V_R = IR \xrightarrow{I = \frac{\varepsilon}{R+r}}$$

بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر باتری (۱) در حالت اول برابر است با:

$$V_{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon R}{R+r_1} = \frac{3\varepsilon_1}{2+3} = \frac{3\varepsilon_1}{5}$$

حالت دوم: اگر K_1 باز و K_2 بسته شود، مدار به شکل زیر تغییر می‌کند. در این حالت، ولتاژ دو سر باتری ε_1 برابر $\varepsilon_1 - I'r_1$ خواهد بود، برای به دست آوردن I' چون ε_1 و ε_2 هر دو هم‌جهت هستند، داریم:



$$I' = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{R+r_1} = \frac{10 + \varepsilon_1}{3+2} = \frac{10 + \varepsilon_1}{5}$$

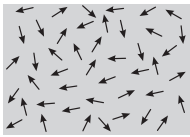
$$V'_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 - I'r = \varepsilon_1 - \left(\frac{10 + \varepsilon_1}{5}\right)(2) = \varepsilon_1 - \frac{20 + 2\varepsilon_1}{5} = \frac{5\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1 - 20}{5} \Rightarrow V'_{\varepsilon_1} = \frac{3\varepsilon_1 - 20}{5}$$

اکنون اختلاف V_{ε_1} و V'_{ε_1} را به دست می‌آوریم:

$$\Delta V_{\varepsilon_1} = V'_{\varepsilon_1} - V_{\varepsilon_1} = \frac{3\varepsilon_1 - 20}{5} - \frac{3\varepsilon_1}{5} = \frac{-20}{5} = -4 \text{ V}$$

بنابراین ولتاژ دو سر باتری (۱)، ۴ ولت کاهش می‌یابد.

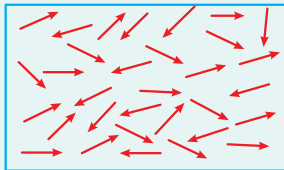
سمت‌گیری دوقطبی‌های مغناطیسی در یک ماده، در نبود میدان مغناطیسی خارجی به شکل زیر است. این ماده از نظر مغناطیسی در کدام دسته قرار می‌گیرد؟



- (۱) مواد دیامغناطیسی
- (۲) مواد پارامغناطیسی
- (۳) مواد فرومغناطیسی نرم
- (۴) مواد فرومغناطیسی سخت

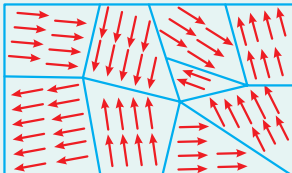
پاسخ: گزینه ۲

درس‌Box

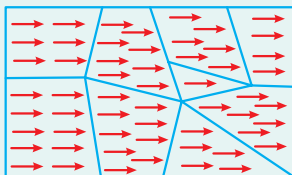


مواد پارامغناطیس: اتم‌های مواد پارامغناطیسی، خاصیت مغناطیسی دارند، اما دوقطبی‌های مغناطیسی وابسته به آن‌ها مانند شکل مقابل، به طور کاتوره‌ای سمت‌گیری کرده‌اند و میدان مغناطیسی خالصی ایجاد نمی‌کنند.

با قراردادن مواد پارامغناطیس درون میدان مغناطیسی خارجی قوی، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها، مانند عقربه قطب‌نما در نزدیکی آهنربا رفتار می‌کنند و به مقدار مختصری در راستای خط‌های میدان مغناطیسی منظم می‌شوند. با دور کردن آهنربا از این مواد، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها، دوباره به طور کاتوره‌ای سمت‌گیری می‌کنند؛ به این ترتیب می‌توان گفت مواد پارامغناطیس در حضور میدان‌های مغناطیسی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می‌کنند. اورانیم، پلاتین، آلومینیم، سدیم، اکسیژن و اکسید نیتروژن از جمله مواد پارامغناطیسی‌اند.



مواد فرومغناطیس: در این مواد مانند شکل مقابل، دوقطبی‌های مغناطیسی به صورت گروهی، حوزه‌های مغناطیسی تشکیل می‌دهند.



با قرارگرفتن این مواد در میدان مغناطیسی، مانند شکل مقابل، حوزه‌هایی که دوقطبی‌های آن‌ها در جهت میدان است، گسترش می‌یابند و ماده خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کند، در حالت اشباع، تمام دوقطبی‌ها در راستای میدان قرار می‌گیرند.

مواد دیامغناطیس: اتم‌های مواد دیامغناطیس نظیر مس، نقره، سرب و بیسموت به طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی‌اند؛ به عبارت دیگر، هیچ‌یک از اتم‌های این مواد، دارای دوقطبی مغناطیسی خالصی نیستند. با وجود این، حضور میدان مغناطیسی خارجی، می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف سوی میدان خارجی، در مواد دیامغناطیسی شود (توسط آهنربا دفع می‌شوند).

القای خاصیت مغناطیسی:

نکته مهم: وقتی که مواد پارامغناطیسی یا فرومغناطیسی در میدان مغناطیسی قرار بگیرند، دوقطبی‌های آن‌ها، همانند عقربه مغناطیسی عمل کرده و در جهت میدان قرار می‌گیرند. از این‌رو بر خاصیت مغناطیسی‌شان افزوده می‌شود و آثار آهنربایی از خود نشان می‌دهند. اگر این میدان حذف شود:

- در مواد پارامغناطیسی دوقطبی‌ها به وضعیت اولیه‌شان برمی‌گردند.
- در مواد فرومغناطیسی نرم، حوزه‌ها به حالت اولیه برمی‌گردند.
- در مواد فرومغناطیسی سخت با حذف میدان، حوزه‌ها تقریباً در همین وضعیت باقی می‌مانند و حالت آهنربای دائم تشکیل می‌دهند.

با توجه به خاصیت مغناطیسی کاتوره‌ای، بدون داشتن حوزه مغناطیسی، ماده فوق پارامغناطیس است.

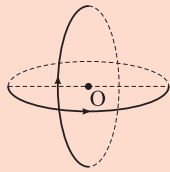
مواد فرومغناطیس دارای حوزه مغناطیسی هستند، ولی شکل، در این‌جا مربوط به ماده پارامغناطیس هست.

✓ پاسخ خیلی تشریحی

• گول‌نخوری

مطابق شکل دو حلقه با جریان یکسان 5 A که شعاع هر یک 15 cm است، قرار دارند. سطح هر حلقه بر حلقه دیگر عمود است. میدان مغناطیسی در نقطه O (مرکز حلقه‌ها) چند گاوس و در چه جهتی است؟

$$(\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}})$$



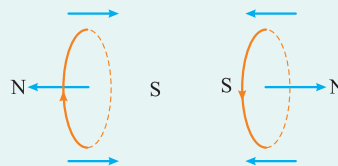
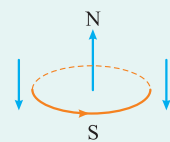
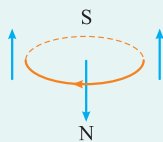
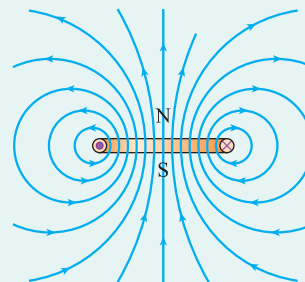
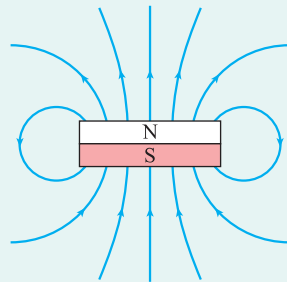
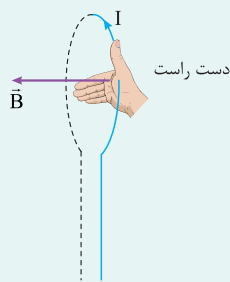
$$\begin{aligned} & \swarrow, \frac{\sqrt{2}}{5} \quad (2) \\ & \swarrow, \frac{2\sqrt{2}}{5} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nearrow, \frac{\sqrt{2}}{5} \quad (1) \\ & \nearrow, \frac{2\sqrt{2}}{5} \quad (3) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

میدان مغناطیسی ناشی از یک حلقه دایره‌ای حامل جریان: یک حلقه دایره‌ای حامل جریان در درون و بیرون حلقه، میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند که اگر شست خود را در جهت جریان قرار دهیم، جهت چرخش انگشت‌ها، جهت میدان را نشان می‌دهد.



مقدار این میدان در مرکز حلقه برابر است با:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$$

$$\mu_0: \text{تراوایی مغناطیسی خلا} = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}$$

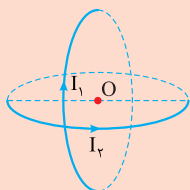
R : شعاع پیچه (m)

N : تعداد حلقه‌ها

I : جریان حلقه (A)

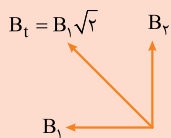
ابتدا با استفاده از قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی ناشی از دو حلقه را در مرکز آن‌ها به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



جهت میدان ناشی از حلقه (۱) به سمت چپ و جهت میدان ناشی از حلقه (۲) به سمت بالا است.

چون جریان و شعاع دو حلقه برابر است و میدان‌ها بر هم عمودند، میدان برابری است با:



$$B_1 = B_2 \quad ; \quad B_T = B_1 \sqrt{2}$$

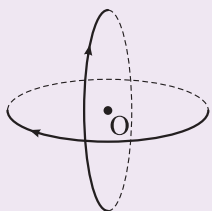
$$B_1 = \frac{\mu_0 N I}{2R} = \frac{12 \times 10^{-7} \times 1 \times 5}{2 \times 15 \times 10^{-2}} = 2 \times 10^{-5} \text{ T} = 2 \text{ G}$$

$$B_T = 2\sqrt{2} \text{ G} \Rightarrow B_T = \frac{2\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{5} \text{ G}$$

مطابق شکل زیر، دو حلقه با جریان یکسان ۲A که شعاع هر یک از آن‌ها ۲۰ cm است، عمود بر هم و عمود بر این صفحه قرار دارند. بزرگی میدان مغناطیسی خالص در مرکز حلقه‌ها (نقطه O) چند تسلا و در چه جهتی است؟

$$(\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}})$$

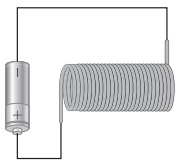
(سؤال ۶۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ (فارج از کشور))



- (۱) $\nwarrow, 12\sqrt{2} \times 10^{-6}$
- (۲) $\nwarrow, 6\sqrt{2} \times 10^{-6}$
- (۳) $\swarrow, 12\sqrt{2} \times 10^{-6}$
- (۴) $\swarrow, 6\sqrt{2} \times 10^{-6}$

در شکل زیر، طول سیملوله آرمانی ۵ cm و تعداد حلقه‌های آن برابر ۳۰ است. اگر جریان الکتریکی عبوری از سیملوله برابر ۲/۵ A باشد، میدان مغناطیسی در نقطه‌ای روی محور سیملوله چند گاوس و در چه جهتی است؟

$$(\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A})$$



→ ۱۸ (۱)

← ۱۸ (۲)

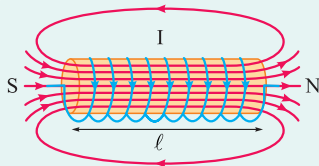
→ ۱۸۰ (۳)

← ۱۸۰ (۴)

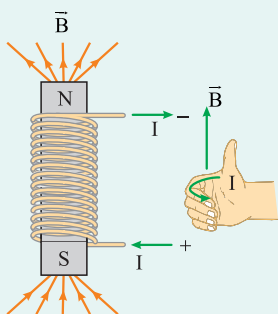
پاسخ: گزینه ۱

میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله حامل جریان:

درس Box



قاعده دست راست: اگر چهار انگشت دست راست خود را در جهت جریان روی حلقه خم کنید؛ انگشت شست باز شده، جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.



سیملوله آرمانی: اگر قطر حلقه‌های سیملوله در مقایسه با طول آن، بسیار کوچک و حلقه‌های آن، خیلی به هم نزدیک باشند، به این سیملوله، سیملوله آرمانی گفته می‌شود.



میدان مغناطیسی سیملوله آرمانی: میدان مغناطیسی داخل یک سیملوله آرمانی در نقطه‌های دور از لبه‌ها یکنواخت است و اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

μ_0 : تراوایی مغناطیسی خلأ $(\frac{T \cdot m}{A})$

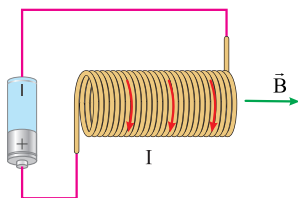
N: تعداد دورهای سیملوله

I: جریان عبوری از سیملوله (A)

l: طول سیملوله (m)

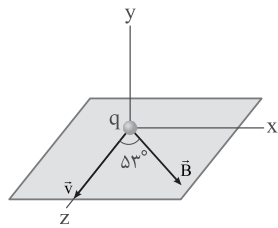
با توجه به درس باکس و شکل صورت سؤال، با دنبال کردن جهت جریان مدار، جهت جریان روی سیملوله به سمت پایین است که میدان مغناطیسی حاصل از آن با قانون دست راست به سمت راست خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \frac{12 \times 10^{-7} \times 30 \times 2/5}{5 \times 10^{-2}} = 180 \times 10^{-5} T = 18 G$$

در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -4 \mu\text{C}$ با تندی $v = 500 \text{ m/s}$ در جهتی حرکت می‌کند که با میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 125 \text{ G}$ زاویه 53° می‌سازد. نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره برحسب نیوتون کدام است؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)



است؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)

$$(1) \vec{j} \times 10^{-5} \times 2$$

$$(2) \vec{j} \times 10^{-5} \times 1/5$$

$$(3) \vec{j} \times 10^{-5} \times 2$$

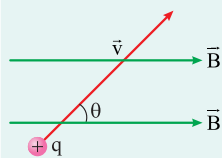
$$(4) \vec{j} \times 10^{-5} \times 1/5$$

پاسخ: گزینه ۱

درس‌Box

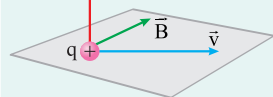
نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی: اگر ذره باردار q با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت کند، از طرف میدان مغناطیسی بر آن، نیروی $\vec{F}$ وارد خواهد شد که این نیرو را نیروی مغناطیسی می‌نامند.

الف) محاسبه اندازه نیروی مغناطیسی:

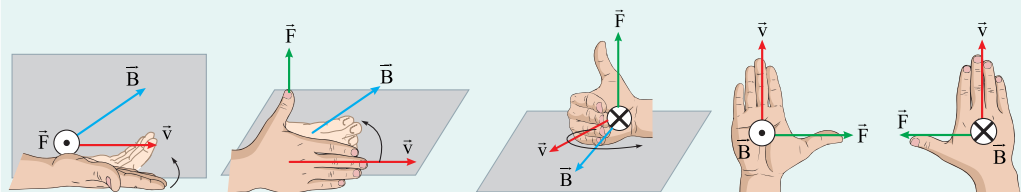


$$F_B = |q| v B \sin \theta$$

نیروی $\vec{F}$ بر هر دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{B}$ عمود است، یعنی نیروی مغناطیسی بر صفحه‌ای که توسط بردارهای سرعت و میدان مغناطیسی تشکیل می‌شود، عمود است.



ب) تعیین جهت نیروی مغناطیسی: اگر دست راست خود را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده دست ما در جهت سرعت ($\vec{v}$) باشد؛ به گونه‌ای که وقتی آن‌ها را در جهت چرخش طبیعی انگشتان خم کنیم، در جهت $\vec{B}$ قرار گیرد، در این حالت انگشت شست ما در جهت نیروی ($\vec{F}$) وارد بر ذره باردار مثبت خواهد بود.

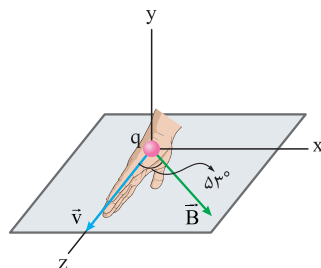


دقت کنید، اگر بار الکتریکی ذره منفی بود، پس از استفاده از قاعده دست راست و به دست آوردن جهت نیروی $\vec{F}$ ، باید جهت آن را برعکس کنیم (یا می‌توانیم از همان ابتدا چون بار ذره منفی است، از قاعده دست چپ استفاده کنیم).

نکته

چون بار الکتریکی منفی است، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر آن به سمت پایین است.

پاسخ خیلی تشریحی

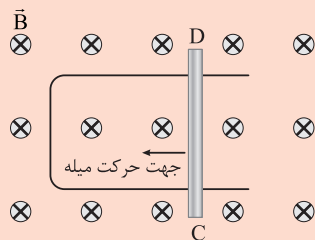


$$F = |q| v B \sin \theta \rightarrow \frac{|q| = 4 \mu\text{C} = 4 \times 10^{-6} \text{ C}, v = 500 \text{ m/s}}{B = 125 \text{ G} = 125 \times 10^{-4} \text{ T}, \sin 53^\circ = 0.4} \rightarrow 4 \times 10^{-6} \times 500 \times 125 \times 10^{-4} \times 0.4 = 2 \times 10^{-5} \text{ N}$$

$$\vec{F} = (-2 \times 10^{-5} \text{ N}) \vec{j}$$

جهت این نیرو با توجه به قاعده دست راست در جهت منفی محور y است.

شکل زیر، رسانای U شکلی را درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ که عمود بر صفحه و رو به داخل صفحه است، نشان می‌دهد. اگر سطح رسانا با آهنگ ثابت $25 \text{ cm}^2 / \text{s}$ تغییر کند و بزرگی میدان مغناطیسی 400 G باشد، جهت جریان القایی در میله کدام است و بزرگی نیروی محرکه متوسط القایی چند میلی‌ولت است؟

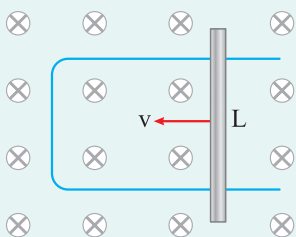


- (۱) از C به D - ۱/۰
- (۲) از D به C - ۱/۰
- (۳) از D به C - ۱
- (۴) از C به D - ۱

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

نیروی محرکه القایی در میله متحرک در میدان مغناطیسی؛ هرگاه مطابق شکل، میله‌ای به طول L در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ با تندی ثابت v حرکت کند، شار عبوری از حلقه بسته ایجاد شده تغییر کرده و اندازه نیروی محرکه القایی در دو سر میله از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$|\varepsilon_{av}| = \left| \frac{N\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \left| \frac{NB\Delta A}{\Delta t} \right|$$

با حرکت میله به سمت چپ، مساحت مدار کاهش می‌یابد، در نتیجه شار عبوری از مدار کم شده و بنابر قانون لنز، باید با تغییر شار مخالفت شود و میدان القایی باید هم‌جهت میدان مغناطیسی اصلی شود، یعنی میدان القایی درون‌سو خواهد بود که با این حساب، جهت جریان القایی ساعتگرد و از D به C می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

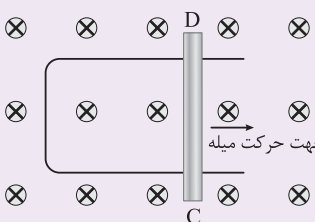
$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{آهنگ تغییر مساحت}$$

$$|\varepsilon_{av}| = \frac{NB\Delta A}{\Delta t} = 1 \times 400 \times 10^{-4} \times 25 \times 10^{-4} = 10^{-4} \text{ V} = 0.1 \text{ mV}$$

قانون لنز: جریان حاصل از نیروی محرکه القایی در یک مدار یا پیچ در جهتی است که آثار مغناطیسی ناشی از آن، با عامل به وجود آورنده جریان القایی، یعنی تغییر شار مغناطیسی مخالفت می‌کند.
الف) وقتی شار افزایشی است، میدان القایی با میدان اصلی (اولیه) در جهت مخالف‌اند.
ب) وقتی شار کاهشی است، میدان القایی با میدان اصلی (اولیه) هم‌جهت‌اند.

شکل زیر، رسانای U شکلی را درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ که عمود بر صفحه و رو به داخل صفحه است، نشان می‌دهد. اگر سطح رسانا با آهنگ ثابت $20 \text{ cm}^2 / \text{s}$ افزایش یابد و بزرگی میدان مغناطیسی، 5 T باشد، جهت جریان القایی در میله، کدام است و بزرگی نیروی محرکه متوسط القایی، چند میلی‌ولت است؟

(سوال ۶۶ کنکور تهری ۱۴۰۳ - نوبت دوم)



- (۱) از C به D و ۲
- (۲) از D به C و ۲
- (۳) از D به C و ۱
- (۴) از C به D و ۱

مشاوره برای سؤالات مقایسه‌ای، بهتره اول داده‌های سؤال رو برای جلوگیری از اشتباه یه گوشه بنویسین.

طول سیملوله A، ۲ برابر طول سیملوله B، تعداد حلقه‌های سیملوله A، ۳ برابر تعداد حلقه‌های سیملوله B و سطح مقطع سیملوله A، ۴ برابر سطح مقطع سیملوله B است. اگر جریان عبوری از سیملوله A، نصف جریان عبوری از سیملوله B باشد، انرژی ذخیره‌شده در سیملوله A چند برابر انرژی ذخیره‌شده در سیملوله B است؟ (هر دو سیملوله آرمانی‌اند.)

$$\frac{4}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{4} \quad (۳)$$

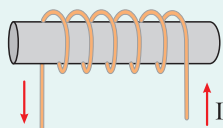
$$\frac{2}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

ضریب القاوری: ضریب القاوری که با نماد L نمایش داده می‌شود، به عواملی همچون تعداد دور، طول و سطح مقطع القاگر و جنس هسته‌ای که داخل آن قرار می‌گیرد، بستگی دارد. برای مثال، ضریب القاوری سیملوله‌ای آرمانی و بدون هسته که دارای طول ℓ ، سطح مقطع A و N حلقه نزدیک به هم است، از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{\ell} ; \quad \frac{L_2}{L_1} = \frac{A_2}{A_1} \times \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \times \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

دقت کنید در رابطه فوق، A سطح مقطع سیم سازنده سیملوله نیست؛ بلکه سطح مقطع خود سیملوله است.

اگر القاگر (سیملوله) دارای هسته باشد، ثابت آن ماده در ضریب القاوری ضرب می‌شود و القاوری را افزایش می‌دهد.

انرژی ذخیره‌شده در القاگرها: وقتی توسط باتری جریانی در القاگر برقرار شود، مولد به القاگر انرژی می‌دهد. اگر القاگر غیرآرمانی باشد، بخشی از این انرژی در مقاومت الکتریکی سیم‌های القاگر به صورت گرما تلف و بقیه آن در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود. مقدار انرژی ذخیره‌شده در میدان القاگر با ضریب القاوری L ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 ; \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2$$

پاسخ خیلی تشریحی

$$\ell_A = 2\ell_B$$

$$N_A = 3N_B$$

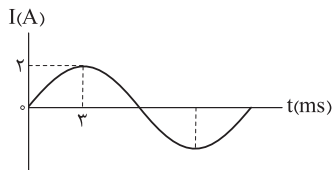
$$A_A = 4A_B$$

$$I_A = \frac{1}{2}I_B \Rightarrow 2I_A = I_B$$

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{A_A}{A_B} \times \left(\frac{N_A}{N_B}\right)^2 \times \frac{\ell_B}{\ell_A} = \frac{4A_B}{A_B} \times \left(\frac{3N_B}{N_B}\right)^2 \times \frac{\ell_B}{2\ell_B} = 4 \times 9 \times \frac{1}{2} = 18$$

$$\frac{U_A}{U_B} = \frac{L_A}{L_B} \times \left(\frac{I_A}{I_B}\right)^2 = 18 \times \left(\frac{I_A}{2I_A}\right)^2 = 18 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{2}$$

نمودار جریان متناوب سینوسی که یک مولد جریان متناوب تولید کرده، برحسب زمان به شکل زیر است. اندازه جریان تولیدی مولد در لحظه $t = 0.01 \text{ s}$ برابر چند آمپر است؟



۱ (۱)

$\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۳)

۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

انواع جریان:

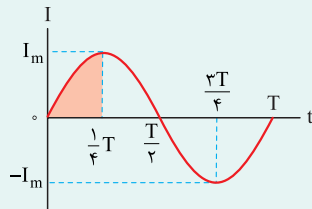
دستی Box

جریان مستقیم: جریانی که با گذشت زمان تغییر نمی‌کند.

جریان متناوب: جریانی که در آن ولتاژ و جریان با گذشت زمان به طور سینوسی تغییر می‌کنند.

تمامی نیروگاه‌های تولید برق در دنیا و از جمله ایران، جریان متناوب تولید می‌کنند که

تابعی سینوسی از زمان است و به همین دلیل، جریان متناوب سینوسی نامیده می‌شود.



I : جریان الکتریکی (A)

I_m : بیشینه جریان الکتریکی (A)

T : دوره تناوب (s)

دوره (زمان تناوب): زمان یک دور چرخش کامل پیچه را دوره یا زمان تناوب می‌نامند. با تغییر شار مغناطیسی، جریانی که در پیچه القا می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:

معادله جریان برحسب زمان:

$$I = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t$$

گام اول: ابتدا با توجه به نمودار، دوره و بیشینه جریان را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{T}{4} = 3 \times 10^{-3} \text{ s} \Rightarrow T = 12 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$I_m = 2 \text{ A}$$

$$I = I_m \sin \frac{2\pi t}{T} \Rightarrow I = 2 \sin \left(\frac{2\pi t}{12 \times 10^{-3}} \right) = 2 \sin \left(\frac{2000}{12} \pi t \right)$$

گام دوم: اکنون جریان را در لحظه $t = 0.01 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:

$$I = 2 \sin \left(\frac{2000}{12} \pi \times 10^{-2} \right) = 2 \sin \frac{20\pi}{12} = 2 \sin \frac{5\pi}{3}$$

$$\Rightarrow I = 2 \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -2 \sin \frac{\pi}{3} = -2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\sqrt{3} \text{ A} \Rightarrow |I| = \sqrt{3} \text{ A}$$

شیمی یازدهم

۱۱۶

اگر اتم‌های داده‌شده در جدول زیر جزء عنصرهای اصلی دوره چهارم جدول تناوبی باشند، مقایسه شعاع اتمی آن‌ها به کدام صورت است؟

D	X	B	A	اتم
۳	۴	۶	۸	نسبت شمار الکترون‌ها با $n = 3$ به $n = 4$

$$A > X > B > D \quad (2)$$

$$A > B > X > D \quad (1)$$

$$X > D > B > A \quad (4)$$

$$D > X > B > A \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

منظور از عنصرهای اصلی، عنصرهای دسته s و p است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$A: 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 / 4s^1 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌های } n=3}{\text{شمار الکترون‌های } n=4} = \frac{8}{1} = 8$$

عنصر مورد نظر، K_{19} است.

$$B: 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^1 / 4s^2 4p^1 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌های } n=3}{\text{شمار الکترون‌های } n=4} = \frac{18}{3} = 6$$

عنصر مورد نظر Ga_{31} است.

$$X: 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 / 4s^2 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌های } n=3}{\text{شمار الکترون‌های } n=4} = \frac{8}{2} = 4$$

عنصر مورد نظر Ca_{20} است.

$$D: 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^1 / 4s^2 4p^2 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌های } n=3}{\text{شمار الکترون‌های } n=4} = \frac{18}{6} = 3$$

عنصر مورد نظر Se_{34} است.

در هر دوره از چپ به راست شعاع اتمی کاهش می‌یابد؛ بنابراین مقایسه شعاع اتمی عناصر به صورت زیر است:

$$K_{19} > Ca_{20} > Ga_{31} > Se_{34} \quad \text{شعاع اتمی}$$

کدام مورد دربارهٔ دومین عنصر گروه ۱۷ جدول تناوبی درست است؟

^{17}Cl

- (۱) در بین عنصرهای هم‌گروه و هم‌دورهٔ خود، بیشترین واکنش‌پذیری را دارد.
- (۲) فقط در دماهای بالاتر از 473°C کلورین، می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد.
- (۳) انرژی نور ایجادشده در واکنش آن با سدیم، بیشتر از انرژی نور ایجادشده در واکنش آن با لیتیم است.
- (۴) حالت فیزیکی آن در دما و فشار اتاق، مانند واکنش‌پذیرترین نافلز دورهٔ چهارم است.

^{35}Br

پاسخ: گزینهٔ (۳)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دومین عنصر گروه ۱۷، کلر (^{35}Cl) است.

انرژی نور ایجادشده در واکنش کلر با سدیم، زرد و انرژی نور ایجادشده در واکنش کلر با لیتیم، سرخ است. انرژی نور زرد بیشتر از نور سرخ می‌باشد.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۱): در بین عناصر گروه ۱۷، فلوئور بیشترین واکنش‌پذیری را دارد.

در بین نافلزهای دورهٔ سوم، کلر بیشترین واکنش‌پذیری و در بین فلزها، سدیم بیشترین واکنش‌پذیری را دارد.

گزینهٔ (۲): کلر در دمای اتاق (298 K) به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

شرایط واکنش هالوژن‌ها (عنصرهای گروه ۱۷) با گاز هیدروژن در جدول زیر آورده شده است.

نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلوئور	حتی در دمای 200°C به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم	در دمای 200°C واکنش می‌دهد.
ید	در دمای بالاتر از 400°C واکنش می‌دهد.



نکته

گزینهٔ (۴): حالت فیزیکی کلر در دما و فشار اتاق، گاز بوده، در حالی که واکنش‌پذیرترین نافلز دورهٔ چهارم که برم می‌باشد، مایع است.

۴۰۰ میلی لیتر محلول ۰/۸ مولار نیتریک اسید با مقدار کافی هیدروژن سولفید مطابق معادله زیر واکنش داده و ۹/۲۱۶ گرم گوگرد تولید می شود. بازده درصدی واکنش کدام است؟ ($S = 32 \text{ g.mol}^{-1}$)



۹۰ (۴)

۸۰ (۳)

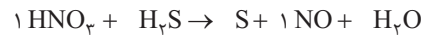
۶۰ (۲)

۴۰ (۱)

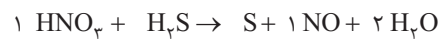
پاسخ: گزینه ۲

ابتدا معادله واکنش را موازنه می کنیم:

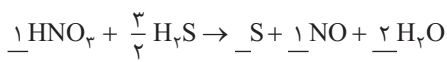
پاسخ خیلی تشریحی ✓



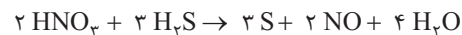
موازنه N:



موازنه O:



موازنه H:



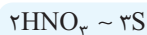
موازنه S:

حالا به کمک اطلاعات داده شده در مورد محلول نیتریک اسید و جرم گوگرد تولید شده، بازده درصدی واکنش را حساب می کنیم:

$$\frac{400}{1000} \text{ L HNO}_3(\text{aq}) \times \frac{0.8 \text{ mol HNO}_3}{1 \text{ L HNO}_3(\text{aq})} \times \frac{3 \text{ mol S}}{2 \text{ mol HNO}_3} \times \frac{32 \text{ g S}}{1 \text{ mol S}} \times \frac{R}{100} = 9.216 \text{ g S}$$

بازده درصدی

$$\Rightarrow R = \frac{9.216 \times 2}{4 \times 0.8 \times 3 \times 32} = \frac{2880}{48} = \frac{1440}{24} = 60\%$$

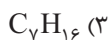
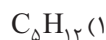
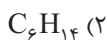


$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0.8 \times 400 \times R}{100} = \frac{9.216}{3 \times 32}$$

$$\Rightarrow R = \frac{9.216 \times 2 \times 100}{3 \times 32 \times 32} = 60\%$$

یه جور دیگه

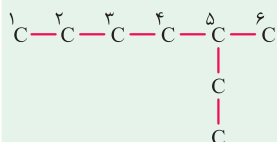
۱۱۹ فرمول مولکولی سبک‌ترین آلکانی که در ساختار آن، شاخهٔ فرعی اتیل وجود دارد، کدام است؟



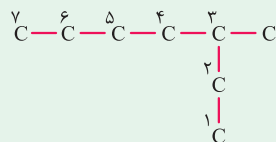
پاسخ: گزینه ۳

 نکته

اتیل (C_2H_5-) هیچ‌گاه نمی‌تواند به عنوان شاخهٔ فرعی روی کربن شمارهٔ (۱) و (۲) آلکان‌های شاخه‌دار قرار بگیرد و حتماً جزء زنجیر اصلی است؛ یعنی نام هیچ آلکانی نمی‌تونه با ۲- اتیل شروع بشه! در ضمن امکان ندارد شمارهٔ شاخهٔ فرعی اتیل، برابر با یک واحد کمتر از شمار اتم‌های کربن زنجیر اصلی باشد. به طور مثال **پشم‌پسته می‌شه گفت نام ۵- اتیل هگزان غلطه!** زیرا زنجیر اصلی (هگزان) ۶ اتم کربن دارد و شمارهٔ شاخهٔ اتیل شده ۵!



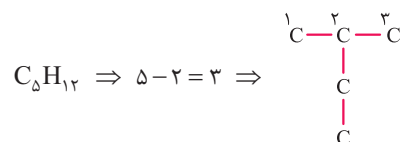
انتخاب نادرست زنجیر اصلی
(نام نادرست: ۵ - اتیل هگزان)



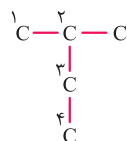
انتخاب درست زنجیر اصلی
(نام درست: ۳ - متیل هپتان)

شاخه فرعی اتیل، ۲ اتم کربن دارد؛ پس اگر تعداد کل اتم‌های کربن آلکان را منهای ۲ کنیم، تعداد اتم‌های کربن زنجیر اصلی به دست می‌آید. حالا گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

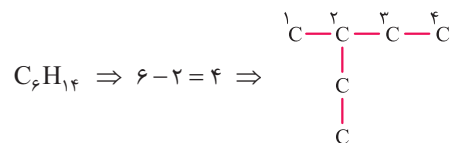
گزینہ (۱):



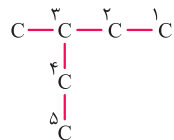
امکان ندارد، زیرا شاخه فرعی اتیل، در واقع جزء زنجیر اصلی است:



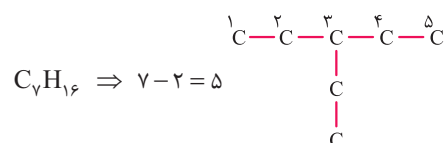
گزینہ (۲):



بازم شاخه فرعی اتیل، جزء زنجیر اصلی محسوب می شود:

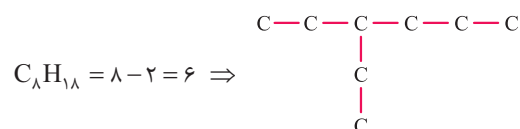


گزینہ (۳):



امکان پذیر است و آلکان ۷ کربنه، سبک ترین آلکانی است که می تواند شاخه فرعی اتیل داشته باشد.

گزینه (۴): آکان ۸ کر بنه هم می تواند شاخه اتیل داشته باشد، ولی فب! دیگه سبک ترین آکان مسوب نمی شه!



در مخلوطی از اتان و پروپین، درصد جرمی کربن برابر ۸۴ درصد می‌باشد. برای سوختن ۲۵۰ گرم از این مخلوط، چند

لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP لازم است؟ ($H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)

۶۱۶ (۱)

۵۰۴ (۲)

۷۲۸ (۳)

۸۴۰ (۴)

مشاوره مسائل مربوط به مخلوط هیدروکربن‌ها و واکنش‌های مربوط به آن (واکنش سوختن، واکنش آن‌ها با آب، گاز هیدروژن و ...) از مباحث ترمز است که در هر دوره از کنکور سراسری از آن سؤال طرح می‌شود و مورد علاقه طراحان کنکور سراسری است؛ پس حتماً لازمه که از این مبحث به اندازه کافی تست حل کنید.

پاسخ: گزینه ۱

گام اول: معادله واکنش سوختن کامل اتان (C_2H_6) و پروپین (C_3H_4) را نوشته و موازنه می‌کنیم:



گام دوم: مقدار گازهای اتان و پروپین موجود در ۲۵۰ گرم مخلوط مورد نظر را حساب می‌کنیم:

اگر جرم مخلوط را برابر با ۱۰۰ گرم در نظر بگیریم، ۸۴ گرم کربن (C) در آن وجود دارد. حال اگر شمار مول‌های اتان و پروپین موجود در این مخلوط را به ترتیب برابر با X و Y در نظر بگیریم، $2X + 3Y$ مول اتم کربن، $30X + 40Y$ گرم اتان و ۴۰Y گرم پروپین در آن وجود دارد؛ بنابراین داریم:

$$C \text{ جرم } 12 \times (2X + 3Y) = 84 \text{ g} \Rightarrow 2X + 3Y = 7 \Rightarrow 30X + 40Y = 105$$

$$\text{جرم مخلوط } 30X + 40Y = 100 \text{ g}$$

$$\Rightarrow 5Y = 5 \Rightarrow Y = 1 \text{ mol}, X = 2 \text{ mol}$$

در نتیجه می‌توان گفت که در ۲۵۰ گرم از مخلوط مورد نظر، $X = 2$ مول گاز اتان و $Y = 1$ مول گاز پروپین وجود دارد.

گام سوم: حجم گاز اکسیژن (O_2) مورد نیاز برای سوختن کامل ۲۵۰ گرم از مخلوط این گازها را در شرایط STP محاسبه می‌کنیم:

$$5 \text{ mol } C_3H_4 \times \frac{7 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } C_3H_4} \times \frac{22.4 \text{ L } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 392 \text{ L } O_2$$

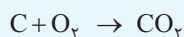
$$2/5 \text{ mol } C_3H_4 \times \frac{4 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } C_3H_4} \times \frac{22.4 \text{ L } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 224 \text{ L } O_2$$

بنابراین در مجموع، $392 + 224 = 616$ لیتر گاز اکسیژن (O_2)، برای سوختن کامل ۲۵۰ گرم از مخلوط مورد نظر، لازمه!

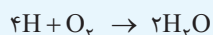
به طور کلی از سوختن کامل هیدروکربن‌ها، کربن دی‌اکسید (CO_2) و آب (H_2O) تولید می‌شود. براساس قانون پایستگی

جرم، تمام اتم‌های کربن هیدروکربن به CO_2 و تمام اتم‌های هیدروژن به H_2O منتقل می‌شوند؛ پس به کمک جرم H و C موجود در این هیدروژن می‌توانیم مقدار دو فراورده را حساب کنیم.

با توجه به این که جرم مخلوط ۲۵۰ گرم است، در این مخلوط، $40 = 16 \times 2/5$ گرم H و $210 = 12 \times 2/5 \times 84$ گرم C وجود دارد.



$$210 \text{ g C} \times \frac{1 \text{ mol C}}{12 \text{ g C}} \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{1 \text{ mol C}} = 17.5 \text{ mol } O_2$$



$$40 \text{ g H} \times \frac{1 \text{ mol H}}{1 \text{ g H}} \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{4 \text{ mol H}} = 10 \text{ mol } O_2$$

بنابراین در این فرایند، در مجموع ۲۷/۵ مول گاز O_2 مصرف شده است. حجم این مقدار گاز O_2 در شرایط STP برابر است با:

$$27/5 \text{ mol } O_2 \times \frac{22.4 \text{ L } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 616 \text{ L } O_2$$

په‌چور دیگه

کدام مورد درست است؟ ۱۲۱

- (۱) یکای رایج اندازه‌گیری گرما، ژول (J) است، در حالی که در (SI)، از یکای کالری (cal) برای بیان مقدار گرما استفاده می‌شود.
- (۲) به مقدار گرمای لازم برای افزایش دمای ۱ گرم از یک ماده به میزان 1°C ، ظرفیت گرمایی آن ماده می‌گویند.
- (۳) انرژی گرمایی 400 میلی‌لیتر آب بادمای 39°C ، از انرژی گرمایی 400 میلی‌لیتر آب بادمای 321 K ، کمتر است.
- (۴) انرژی گرمایی همواره از جسمی با انرژی گرمایی بالاتر به جسمی با انرژی گرمایی پایین‌تر، جاری می‌شود.

پاسخ: گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): یکای اندازه‌گیری گرما در (SI)، ژول است و نه کالری!

گزینه (۲): گرمای ویژه به ازای یک گرم ماده تعریف می‌شود و نه ظرفیت گرمایی!

کمیت	تعریف	وابستگی به جرم ماده	رابطه برای محاسبه آن	یکا
ظرفیت گرمایی ویژه یا گرمای ویژه (c)	مقدار گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای ۱ گرم ماده به اندازه 1°C یا ۱ K	ندارد	$c = \frac{Q}{m\Delta\theta}$	$\text{J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$ یا $\text{J.g}^{-1}.\text{C}^{-1}$
ظرفیت گرمایی (C)	مقدار گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای ماده به اندازه 1°C یا ۱ K	دارد	$C = \frac{Q}{\Delta\theta}$ گرمای ویژه $C = mc$ جرم	J.K^{-1} یا $\text{J}.\text{C}^{-1}$

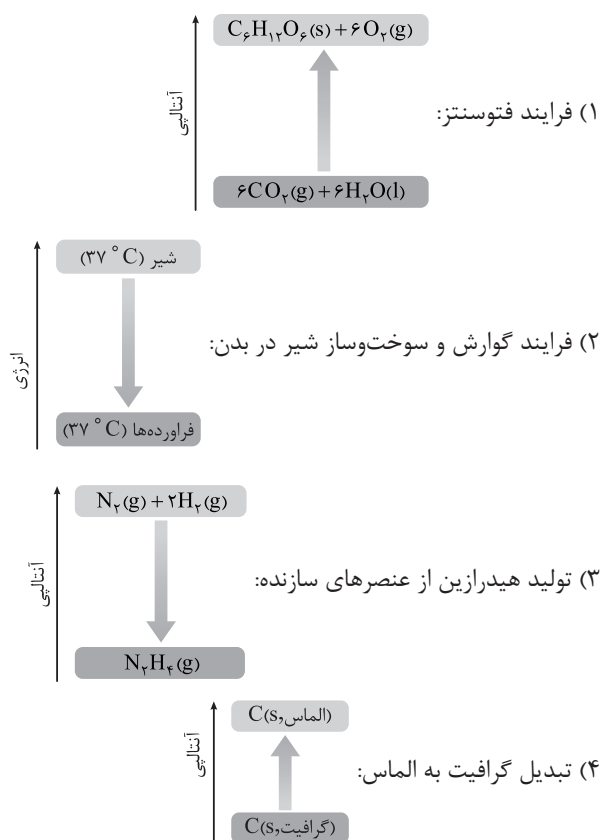
گزینه (۳): در مقدار یکسان، انرژی گرمایی نمونه‌ای با دمای بالاتر، بیشتر است.

$$T(\text{K}) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273 = 39 + 273 = 312\text{ K}$$

دمای نمونه اول (۳۱۲ K) از دمای نمونه دوم (۳۲۱ K) کمتر است؛ از این رو انرژی گرمایی آن کمتر می‌باشد.

گزینه (۴): جهت جاری شدن انرژی گرمایی راه دمای دو نمونه مشخص می‌کند و نه انرژی گرمایی آن‌ها! انرژی گرمایی همواره از ماده‌ای با دمای بیشتر به ماده‌ای با دمای کمتر جاری می‌شود. ممکن است ماده‌ای با دمای بیشتر، انرژی گرمایی کمتری داشته باشد.

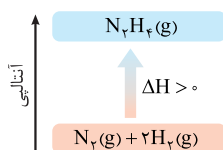
۱۲۲ نمودار انرژی یا آنتالپی در کدام مورد، با فرایند اشاره شده، مطابقت ندارد؟



پاسخ: گزینه ۳

تولید هیدرازین از عنصرهای سازنده، گرماگیر است، پس سطح انرژی فرآورده در آن، باید بیشتر از واکنش‌دهنده‌ها باشد.

✓ پاسخ خیلی تشریحی



در مورد گزینه (۴) دقت کنید که الماس ناپایدارتر از گرافیت بوده و سطح انرژی بالاتری دارد؛ بنابراین تبدیل گرافیت به الماس، فرایندی گرماگیر است.

۱۲۳ شمار کل پیوندهای اشتراکی در ساختار کدام ترکیب، با مجموع شمار اتم‌ها در فرمول مولکولی آن برابر است؟

(۲) اتیل استات

(۱) تری‌متیل آمین

(۴) سیانو اتن

(۳) ۱-اوکتانول

پاسخ: گزینه ۲



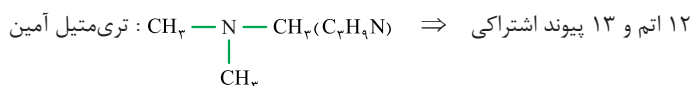
شمار پیوندهای اشتراکی در مولکول ترکیب‌های آلی شامل اتم‌های کربن، هیدروژن و هالوژن، اکسیژن و نیتروژن را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{(\text{شمار اتم‌های نیتروژن} \times ۳) + (\text{شمار اتم‌های اکسیژن} \times ۲) + (\text{شمار اتم‌های هیدروژن یا هالوژن} \times ۱) + (\text{شمار اتم‌های کربن} \times ۴)}{۲}$$

می‌توانیم به کمک فرمول و یا کشیدن ساختار ترکیب‌ها، شمار پیوندهای اشتراکی در آن‌ها را به دست آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱):



گزینه (۲):



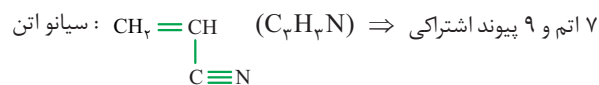
$$\text{شمار پیوندها} = \frac{(\text{C} \times ۴) + (\text{H} \times ۸) + (\text{O} \times ۲)}{۲} = ۱۴$$

گزینه (۳):

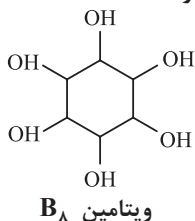
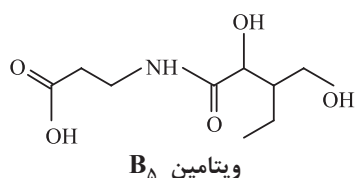


$$\text{شمار پیوند} = \frac{(\text{C} \times ۸) + (\text{H} \times ۱۸) + (\text{O} \times ۱)}{۲} = ۲۶$$

گزینه (۴):



با توجه به ساختارهای داده شده، کدام موارد درست است؟



الف) ویتامین B_۵ در آب محلول و دارای دو گروه عاملی کربوکسیل است.

ب) شمار پیوندهای C—H، C—C، C—O، O—H در مولکول ویتامین B_۸ برابر است.

پ) ویتامین B_۵ همانند بنزوئیک اسید، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکولهای آب را دارد.

ت) درصد جرمی کربن در ویتامین B_۸، با درصد جرمی کربن در آشناترین اسید آلی برابر است.

- (۱) «ب» - «پ» - «ت»
(۲) «الف» - «ب» - «پ»
(۳) «ب» - «ت»
(۴) «الف» - «پ»

استیک اسید

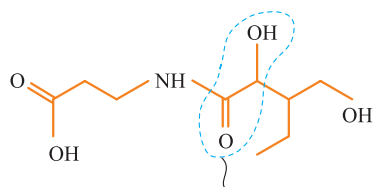
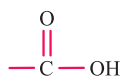
پاسخ: گزینه ۱

بررسی عبارت‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

الف) ویتامین B_۵ در آب محلول است، زیرا بخش قطبی مولکول آن بر بخش ناقطبی غلبه دارد، اما این مولکول، تنها دارای یک

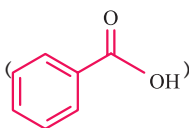
گروه عاملی کربوکسیل (—COOH) است. دقت کنید که در گروه کربوکسیل، OH به همان کربن گروه C متصل است.



این گروه کربوکسیل نیست، زیرا OH و O به دو کربن متفاوت متصل‌اند.

ب) با توجه به ساختار ویتامین B_۸ (C_۶H_{۱۲}O_۶)، در این مولکول، ۶ پیوند O—H، ۶ پیوند C—O، ۶ پیوند C—C و ۶ پیوند C—H وجود دارد.

پ) در ساختار ویتامین B_۵ مانند بنزوئیک اسید (C_۷H_۶O_۲) پیوند O—H وجود دارد؛ از این رو هر دو مولکول

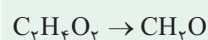
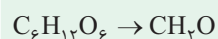


توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکولهای آب را دارند.

ت) فرمول مولکولی ویتامین B_۸ و آشناترین اسید آلی یعنی استیک اسید، به ترتیب به صورت C_۶H_{۱۲}O_۶ و C_۲H_۴O_۲ است.

فرمول ساده شده هر دو مولکول به صورت CH_۲O است؛ بنابراین درصد جرمی کربن در آن‌ها برابر است.

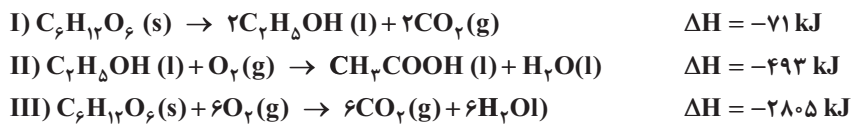
اگر فرمول مولکولی دو ترکیب مضربی از هم باشد (یا فرمول ساده شده آن‌ها یکسان باشد)، درصد جرمی عنصرهای سازنده آن‌ها با هم برابر است.



$$\text{درصد جرمی} = \frac{1 \times 12}{30} \times 100 = 40\%$$

نکته

۱۲۵ با توجه به واکنش‌های زیر، آنتالپی سوختن استیک اسید، چند کیلوژول بر مول است؟



$$-1391 (2)$$

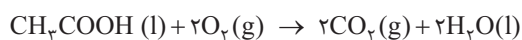
$$-847 (1)$$

$$-1931 (4)$$

$$-874 (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

معادله واکنش سوختن کامل ۱ مول استیک اسید به صورت زیر است:



برای رسیدن به این واکنش، باید تغییرات زیر را روی معادله‌ها اعمال کنیم:

ایجاد CH_3COOH در سمت چپ $\leftarrow$ وارونه کردن معادله (II)

حذف $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ $\leftarrow$ وارونه کردن معادله (I) و ضرب آن در $\frac{1}{2}$

حذف $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$ $\leftarrow$ در $\frac{1}{6}$ ضرب کردن معادله (III)

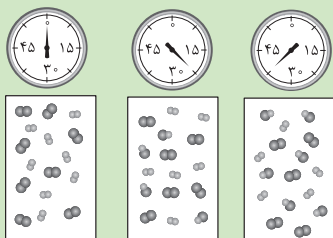
$$\Delta H (\text{واکنش کلی}) = -\frac{1}{2}\Delta H_{\text{I}} + (-\Delta H_{\text{II}}) + \frac{1}{6}\Delta H_{\text{III}}$$

$$= -\frac{1}{2}(-71) + 493 + \frac{1}{6}(-2805)$$

$$= 35.5 + 493 - 467.5 = -874 \text{ kJ}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به شکل زیر که واکنش ید با هیدروژن را در دمای معین در یک ظرف دربسته ۲/۵ لیتری نشان می‌دهد، اگر هر ذره ارزش ۰/۰۵ مول از هر ماده را نشان دهد، سرعت متوسط واکنش در ۲۰ دقیقه آغازی واکنش برابر مولار بر دقیقه و برابر سرعت متوسط واکنش در ۲۰ دقیقه دوم است.



$$(۱) \quad ۱/۲ - ۵ \times ۱۰^{-۳}$$

$$(۲) \quad ۲ - ۵ \times ۱۰^{-۳}$$

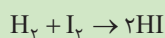
$$(۳) \quad ۲ - ۲ \times ۱۰^{-۳}$$

$$(۴) \quad ۱/۲ - ۲ \times ۱۰^{-۳}$$

پاسخ: گزینه ۳

معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



با توجه به یک بودن ضرایب استوکیومتری H_2 و I_2 ، سرعت متوسط واکنش با سرعت متوسط مصرف این مواد برابر است. در ۲۰ دقیقه اول تعداد ذرات این دو گاز از ۸ ذره به ۶ ذره رسیده است، یعنی $۰/۱ = ۰/۰۵ \times ۲$ مول از آن‌ها مصرف شده است:

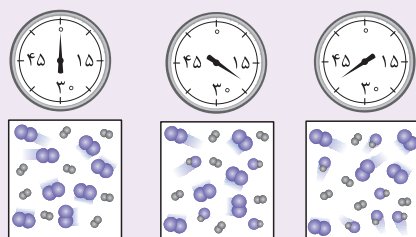
$$R^-(\text{واکنش}) = \bar{R}(H_2) = \frac{۰/۱ \text{ mol}}{۲ \text{ min} \times ۲/۵ \text{ L}} = \frac{۱}{۵۰۰} = ۲ \times ۱۰^{-۳} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

در ۲۰ دقیقه اول، تعداد ذرات واکنش‌دهنده از ۸ به ۶ و در ۲۰ دقیقه دوم از ۶ به ۵ رسیده است، یعنی تغییرات تعداد مول واکنش‌دهنده در ۲۰ دقیقه اول، ۲ برابر ۲۰ دقیقه دوم است، از این سرعت واکنش در ۲۰ دقیقه اول، ۲ برابر ۲۰ دقیقه دوم است.

شکل زیر واکنش‌های میان گاز هیدروژن و بخار بنفش‌رنگ ید را در دمای میعین نشان می‌دهد.

کتاب درسی

(شیمی (۲) - تمرین‌های دوره‌ای صفحه ۹۷ کتاب درسی)



(a)

(b)

(c)

اگر هر ذره هم‌ارز با ۰/۱ مول از ماده و سامانه دولیتری باشد، سرعت واکنش را پس از ۲۰ دقیقه (b) و پس از ۴۰ دقیقه (c) برحسب $\text{mol L}^{-1} \text{h}^{-1}$ حساب و با یکدیگر مقایسه کنید.

اگر شمار پیوندهای دوگانه در ساختار یک مولکول پلی‌استیرن، ۵ برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در هر مولکول پلی‌وینیل کلرید با ۱۲۰۰ واحد تکرارشونده باشد، برای سوختن کامل یک میلی‌مول از این پلی‌استیرن به چند لیتر گاز اکسیژن در شرایطی که حجم مولی گازها برابر ۲۴ لیتر بر مول است، نیاز می‌باشد؟

۱۴۴۰ (۲)

۴۳۲ (۱)

۸۶۴۰ (۴)

۲۸۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

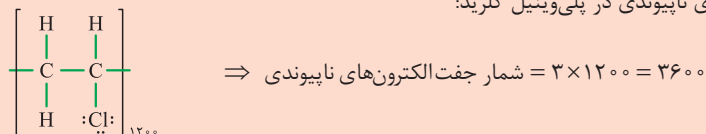
پلی‌اتن و مشتقات آن:



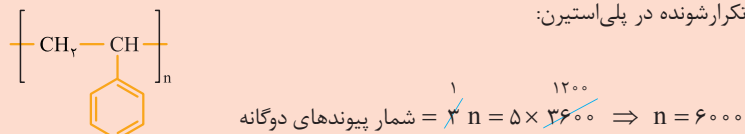
واکنش تهیه	کاربرد پلیمر	نام پلیمر
$n \begin{array}{c} \text{H} & & \text{H} \\ & \diagdown & / \\ & \text{C} = \text{C} \\ & / & \diagdown \\ \text{H} & & \text{H} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{H} & \text{H} \\ & \\ -\text{C} & - & \text{C}- \\ & \\ \text{H} & \text{H} \end{array} \right]_n$ اتن پلی‌اتن	کیسه‌های پلاستیکی، لوله‌های پلاستیکی، دبه‌های آب یا بطری پلاستیکی	پلی‌اتن
$n \text{H}_2\text{C} = \underset{\text{CH}_3}{\text{CH}} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{H} & \text{H} \\ & \\ -\text{C} & - & \text{C}- \\ & \\ \text{H} & \text{CH}_3 \end{array} \right]_n$ پروپن پلی‌پروپن	سرنگ	پلی‌پروپن
$n \text{H}_2\text{C} = \underset{\text{C}_6\text{H}_5}{\text{CH}} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{H} & \text{H} \\ & \\ -\text{C} & - & \text{C}- \\ & \\ \text{H} & \text{C}_6\text{H}_5 \end{array} \right]_n$ استیرن پلی‌استیرن	ظروف یکبار مصرف	پلی‌استیرن
$n \text{H}_2\text{C} = \underset{\text{C}\equiv\text{N}}{\text{CH}} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{H} & \text{H} \\ & \\ -\text{C} & - & \text{C}- \\ & \\ \text{H} & \text{C}\equiv\text{N} \end{array} \right]_n$ سیانو اتن پلی‌سیانو اتن	پتو	پلی‌سیانو اتن
$n \text{H}_2\text{C} = \underset{\text{Cl}}{\text{CH}} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{H} & \text{H} \\ & \\ -\text{C} & - & \text{C}- \\ & \\ \text{H} & \text{Cl} \end{array} \right]_n$ وینیل کلرید پلی‌وینیل کلرید	کیسه خون	پلی‌وینیل کلرید
$n \begin{array}{c} \text{F} & \text{F} \\ & \\ \text{C} = \text{C} \\ & \\ \text{F} & \text{F} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{F} & \text{F} \\ & \\ -\text{C} & - & \text{C}- \\ & \\ \text{F} & \text{F} \end{array} \right]_n$ تترافلورو اتن پلی‌تترافلورو اتن (تفلون)	ظروف نجسب، نخ‌دندان، کفی اتو، نوارهای آب‌بندی لوله‌ها	پلی‌تترافلورو اتن یا تفلون

گام اول: محاسبه شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در پلی‌وینیل کلرید:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

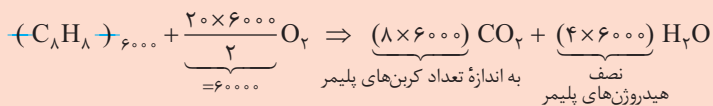


گام دوم: محاسبه شمار واحدهای تکرارشونده در پلی‌استیرن:



گام سوم: محاسبه حجم گاز اکسیژن در سوختن کامل پلی استیرن:

اگر فرمول پلی استیرن را به صورت $(C_8H_8)_n$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



$$1 \times 10^{-3} \text{ mol پلی استیرن} \times \frac{60000 \text{ mol } O_2}{1 \text{ mol پلی استیرن}} \times \frac{24 \text{ L } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 60 \times 24 = 1440 \text{ L } O_2$$

کنکور

در هر زنجیر از یک نمونه پلی سیانواتن، میانگین شمار پیوندهای سه گانه، ۲ برابر میانگین شمار پیوندهای دوگانه در هر زنجیر از یک نمونه پلی استیرن است. اگر میانگین شمار مونومرهای سیانواتن در هر زنجیر از پلیمر آن، برابر ۱۸۰۰۰ باشد، میانگین جرم مولی پلی استیرن، برابر چند گرم است؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

(سؤال ۹۸ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

$$6 / 24 \times 10^5 \quad (2)$$

$$1 / 56 \times 10^5 \quad (4)$$

$$9 / 36 \times 10^5 \quad (1)$$

$$3 / 12 \times 10^5 \quad (3)$$

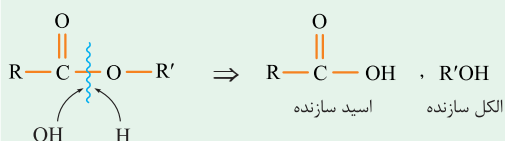
اگر الکل سازنده استری با فرمول $C_5H_{10}O_2$ به هر نسبتی در آب حل نشود، کدام مورد دربارهٔ اسید سازندهٔ این استر درست است؟

- (۱) با متیل فورمات ایزومر است.
- (۲) پرکاربردترین کربوکسیلیک اسید است.
- (۳) خاصیت چربی‌گریزی آن از $CH_3(CH_2)_3COOH$ ، بیشتر است.
- (۴) به صورت مصنوعی تهیه می‌شود و در طبیعت یافت نمی‌شود.

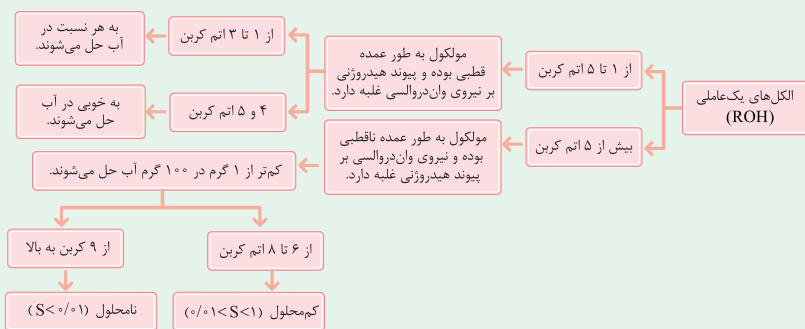
پاسخ: گزینهٔ ۳



(۱) فرمول عمومی استرهای یک‌عاملی $(R-C(=O)-O-R')$ با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است. این مواد از واکنش الکل‌ها و اسیدها به دست می‌آیند:

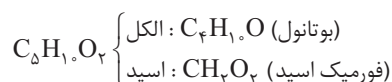


(۲) با افزایش شمار اتم‌های کربن در الکل‌ها، انحلال‌پذیری آن‌ها در آب کاهش می‌یابد:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

الکل سازندهٔ استر ۵ کربنی، می‌تواند ۱ تا ۴ کربنی باشد. الکل‌های ۱ تا ۳ کربنی به هر نسبتی در آب حل می‌شوند؛ پس در این‌جا الکل سازندهٔ استر، ۴ کربنی است؛ بدین ترتیب اسید سازندهٔ آن، ۱ کربنی می‌باشد:



بررسی گزینه‌ها:

- گزینهٔ (۱): متیل فورمات، یک استر ۲ کربنی است، در حالی که دیدیم اسید مورد نظر، فقط یک اتم کربن دارد.
- گزینهٔ (۲): پرکاربردترین کربوکسیلیک اسید، استیک اسید $(C_2H_4O_2)$ است.
- گزینهٔ (۳): هر چه شمار اتم‌های کربن اسید کم‌تر باشد، خاصیت آب‌دوستی و چربی‌گریزی آن بیشتر است:
- $HCOOH > CH_3(CH_2)_3COOH$ خاصیت چربی‌گریزی
- گزینهٔ (۴): فورمیک اسید در طبیعت وجود دارد. گزش مورچه سرخ *روکه یادتون نرفته؟*

برای فرمول مولکولی C_3H_9N ، چند ساختار آمینی می‌توان در نظر گرفت و چه تعداد از آن‌ها می‌توانند به همراه یک اسید آلی، در واکنش تولید آمید شرکت کنند؟

۱ - ۳ (۲)

۳ - ۴ (۱)

۴ - ۴ (۴)

۲ - ۳ (۳)

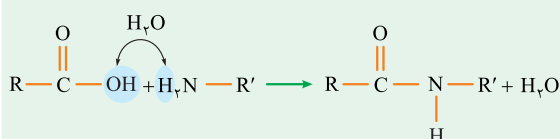
پاسخ: گزینه ۱



فرمول عمومی آمین‌های سیرشده یک‌عاملی غیرحلقوی به صورت $C_nH_{2n+3}N$ است.

$n=1 \Rightarrow CH_5N$, $n=2 \Rightarrow C_2H_7N$, $n=3 \Rightarrow C_3H_9N$

آمین‌ها در واکنش با اسیدها می‌توانند آمید تولید کنند، معادله کلی این واکنش‌ها به صورت زیر است:



با توجه به این معادله، آمینی می‌تواند در واکنش تولید آمید شرکت کند که H متصل به N داشته باشد.

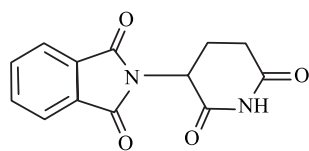
فرمول C_3H_9N مربوط به آمین سیرشده یک‌عاملی است و ساختارهای زیر را می‌توان برای آن در نظر گرفت:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



فقط مولکول (۴)، یعنی همان تری‌متیل آمین، نمی‌تواند در واکنش تولید آمید شرکت کند، زیرا H متصل به N ندارد.

۱۳۰ در مولکول سازنده ترکیب زیر، شمار اتم‌های هیدروژن چند برابر شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی است و در اثر آبکافت کامل آن، چند نوع ترکیب به دست می‌آید؟



۱) ۳، ۱

۲) ۲، ۱

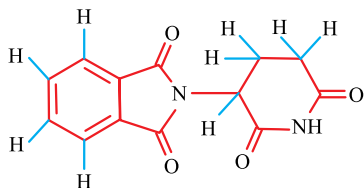
۳) ۴، ۰ / ۸

۴) ۳، ۰ / ۸

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در ساختار مولکول مورد نظر، ۱۰ اتم هیدروژن وجود دارد:



از طرفی هر اتم اکسیژن، ۲ جفت‌الکترون ناپیوندی و هر اتم نیتروژن، ۱ جفت‌الکترون ناپیوندی دارد:

$$\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی} = \underbrace{(4 \times 2)}_{\text{O}} + \underbrace{(2 \times 1)}_{\text{N}} = 10$$

بنابراین شمار اتم‌های هیدروژن مولکول، با شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی آن، برابر است.

برای قسمت دوم سؤال، باید بدانیم که در آبکافت ترکیب، پیوند بین C و N گروه آمیدی شکسته می‌شود:

