

شبیه‌سازی کامل امتحان نهایی

- منطبق بر بارم‌بندی آموزش و پرورش
- تشابه کامل فرم برگه سوال، پاسخ‌برگ، کلید، پاسخنامه و حتی فونت سوال‌ها با امتحان نهایی
- پوشش همه مطالب و انواع سوالات
- ارائه یک یا دو تست عیناً مشابه امتحان نهایی
- هم‌سطح با دشواری سوالات امتحان نهایی



پاسخنامه‌های خیلی تشریحی

- ارائه پاسخ کامل و مرحله به مرحله
- محتوای یاددهنده شامل درسنامه
- ارائه نکات کلیدی هر سوال

تصحیح کاملاً مکانیزه

- تصحیح کاملاً حرفه‌ای توسط دو مصحح
- تصحیح سوم در صورت اختلاف نظر دو مصحح قبل
- تصحیح به صورت بررسی یک سوال برای گروهی از دانش‌آموزان
- امکان کامنت‌گذاری مصحح در فرایند تصحیح
- امکان درخواست تصحیح مجدد در پل ثبت اعتراض

کارنامه‌های بسیار کاربردی

- کارنامه تحلیلی و مقایسه‌ای
- نمره به تفکیک سوال
- کارنامه مبحثی

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله چهارم

پایه یازدهم

۱۴۰۵/۰۳/مهر

۱۴۰۵-۰۶

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
ریاضی	میثم حصارکی - محسن علی نجاری
هندسه	امیرحسین ابومحبوب
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	هادی عبادی - یاسر عبداللهی - محمد عظیمیان زواره - محمد قهرمانی نژاد - مهدیس محبت پناه محمد مرادی - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
ریاضی	محسن علی نجاری	محسن علی نجاری	محمدرضا راسخ	علی افضل زاده سروش موثینی مازیار احمدی ناو	محبوبه اصفهانی محمد بهرامی سهند محمدکریم نژاد
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	سید عباس حسینی محمد خندان	منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری مریم نظری
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علی محمدی	علیرضا جباری هادی نجفی	مدیا عیدی مریم گلی حسنلو آراس محمدی امیر محمودی انزلی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده محمد مهدی کریمیان	عماد ربیعی امیر قاسمی پور هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاچانپور

ویژه یازدهمی های ۱۴۰۵



آزمون آزمایشی خلی سبز

بیتا ابراهیمی - عادل حسینی - مینا کریمزاده

تیم اجرایی و تألیف آزمون

الناز علی یاری زاده

سرپرست تولید

نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - زهرا صفری
الهه صفری - فاطمه علی اکبری - محیا غنی فرد
ساناز فلاحتی - نادره نازآوری - ساعده نمازی

ویراستاران فنی

ندا فخاری
سارا گنجی آزادپور

رسم

مریم حسین زاده - سپیده سخائی - الهام سهرابی
طاہره صادق نژاد - مائده صبری - نیلوفر فرخجسته
فاطمه قیاسوند - مهدیه گل پور - دریا لطفی

صفحه آرایی

ویژه یازدهمی های ۱۴۰۵



ریاضی دهم

۱

در بین متغیرهای زیر، فراوانی کدام نوع کم تر است؟

«گروه خونی دانش آموزان یک کلاس / قد دانش آموزان شهر تهران / رشته تحصیلی دانش آموزان یک مدرسه / تعداد مورچه های جهان / میزان بارندگی سالانه در یک شهر»

- | | |
|----------------|-----------------|
| (۱) کمی پیوسته | (۲) کیفی اسمی |
| (۳) کمی گسسته | (۴) کیفی ترتیبی |

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

متغیر و انواع آن در آمار:

متغیر: ویژگی ای از اعضای یک جامعه است که بررسی می شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می کند.

مقدار متغیر: عددی یا صفتی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می شود، مقدار متغیر می نامند.

۱ متغیرهای کمی (قابل اندازه گیری): متغیرهایی را که قابل اندازه گیری اند، متغیرهای کمی می نامند. این متغیرها بر دو نوع اند: متغیر پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن ها را نیز بتواند اختیار کند (مثال: وزن افراد و دمای محیط).

متغیر گسسته: متغیری است که پیوسته نباشد؛ یعنی فقط مقادیر مشخص و مجزایی را می پذیرد (مثال: تعداد خودروهایی که در طول یک روز از یک خیابان رد می شوند).

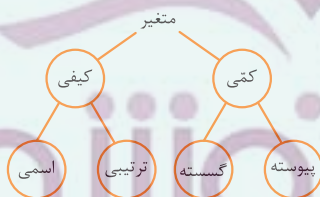
۲ متغیرهای کیفی (غیر قابل اندازه گیری): متغیرهایی را که قابل اندازه گیری نیستند، متغیرهای کیفی می نامند (مثال: میزان رضایت مندی از شغل).

این متغیرها نیز بر دو نوع اند:

متغیر ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد (مثال: پایه تحصیلی مانند ابتدایی، متوسطه دوره اول، متوسطه دوره دوم).

متغیر اسمی (غیر ترتیبی): متغیری که هیچ گونه ترتیبی در مقادیر آن نیست (مثال: گروه خونی).

انواع متغیر در یک نگاه (نمودار درختی):



گام اول: ابتدا نوع هر یک از متغیرهای داده شده را مشخص می کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گروه خونی دانش آموزان یک کلاس: کیفی اسمی

قد دانش آموزان شهر تهران: کمی پیوسته

رشته تحصیلی دانش آموزان یک مدرسه: کیفی اسمی

تعداد مورچه های جهان: کمی گسسته

میزان بارندگی سالانه در یک شهر: کمی پیوسته

گام دوم: همان طور که مشخص است، فراوانی متغیر کیفی ترتیبی، صفر و از سایرین کم تر است.

نوع متغیرهای زیر را از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی مشخص کنید.

کتاب
درسی

(سوال ۱۸ - امتحان نهایی فرداد ۱۴۰۳)

الف) میزان بارندگی بر حسب سانتی متر در یک شهر

ب) گروه خونی دانش آموزان یک کلاس

۲ برای چند عدد طبیعی n ، بازه $(\frac{n+4}{3}, \frac{n+2}{n})$ شامل فقط یک عدد صحیح است؟

۱ (۲)

۱ (صفر)

۳ (۴)

۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

برای این که بازه اصلاً وجود داشته باشد، اولاً باید ابتدای بازه از انتهای بازه کوچکتر باشد؛ با به طرفین وسطین ساده و n طبیعی، محدوده‌اش رو پیدا کنید!

درس Box

انواع بازه:

بازه‌ها، زیرمجموعه‌هایی از عددهای حقیقی هستند که کاربردهای زیادی دارند. انواع بازه‌ها را در جدول زیر نوشته‌ایم (با فرض $a < b$).

نمایش روی محور اعداد حقیقی (هندسی)	نمایش مجموعه‌ای	نوع بازه	بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	باز	(a, b)
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	بسته	$[a, b]$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	نیم‌باز	$[a, b)$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	نیم‌باز	$(a, b]$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	نیم‌باز	$[a, +\infty)$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	نیم‌باز	$(-\infty, a]$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	باز	$(a, +\infty)$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	باز	$(-\infty, a)$
	$\{x \in \mathbb{R}\}$	باز	$(-\infty, +\infty)$

گام اول: برای این که بازه معنا داشته باشد، باید ابتدای بازه، کوچکتر از انتهای آن باشد:

پاسخ خیلی تشریحی

$$\frac{n+4}{3} < \frac{n+2}{n}$$

گام دوم: برای حل این نامعادله، با توجه به این که n یک عدد طبیعی است ($n \geq 1$)، مخرج‌ها همواره مثبت هستند و می‌توانیم طرفین وسطین انجام دهیم:

$$n(n+4) < 3(n+2) \Rightarrow n^2 + 4n < 3n + 6$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 6 < 0 \Rightarrow \underbrace{(n+3)}_{n \geq 1} \underbrace{(n-2)}_{n+3 \geq 4} < 0 \Rightarrow n-2 < 0 \Rightarrow n < 2$$

گام سوم: تنها عدد طبیعی که در شرط $n < 2$ صدق می‌کند، $n = 1$ است که به ازای آن داریم:

$$(\frac{5}{3}, 3) \Rightarrow \text{تنها شامل یک عدد صحیح } \{2\} \text{ است.}$$

بنابراین به ازای ۱ عدد طبیعی، بازه مورد نظر، شامل فقط یک عدد صحیح است.

چون n عددی طبیعی است، با جای‌گذاری داریم:

تیزبازی

$$n = 1: (\frac{5}{3}, 3) \checkmark$$

$$n = 2: (2, 2) \times \text{بازه نیست.}$$

$$n = 3: (\frac{7}{3}, \frac{5}{3}) \times \text{بازه نیست.}$$

بازه نیست. $\ast$: $(\frac{1}{3}, \frac{6}{4})$: $n = 4$

همان طور که مشاهده می شود، از $n \geq 2$ دیگر بازه ای نداریم، پس فقط به ازای $n = 1$ رابطه برقرار است.

برای چند عدد طبیعی n ، بازه $(\frac{3-n}{2}, \frac{n+3}{n})$ شامل فقط یک عدد صحیح است؟ (سوال ۱۱۲ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت اول)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

کنکور



طول اضلاع یک مستطیل x و y هستند و z طول قطر آن است. اگر اعداد x ، y و z با همین ترتیب، تشکیل دنباله حسابی و اعداد ۱۲ و $۳x$ و y نیز با همین ترتیب تشکیل دنباله هندسی دهند، مقدار z کدام است؟

$$\frac{۸}{۲۷} (۴)$$

$$\frac{۶۴}{۲۷} (۳)$$

$$\frac{۲۴}{۲۷} (۲)$$

$$\frac{۱۶}{۲۷} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴



از ویژگی واسطه حسابی و قضیه فیثاغورس استفاده کنید تا رابطه بین طول و عرض و قطر دربیاد؛ بعدش با واسطه هندسی کار رو تموم کنید!

درس Box

واسطه حسابی:

در یک دنباله حسابی، اگر سه عدد a ، b و c به طور متوالی (پشت سر هم) قرار گرفته باشند، به جمله میانی یعنی c ، «واسطه حسابی» بین دو عدد a و b گفته می‌شود.

از آنجایی که در دنباله حسابی فاصله (قدرنسبت) جملات متوالی با هم برابر است، جمله وسط همواره دقیقاً میانگین حسابی دو جمله کناری خود است، بنابراین رابطه زیر همواره برقرار خواهد بود:

$$c = \frac{a+b}{۲}$$

واسطه هندسی:

در یک دنباله هندسی، اگر سه عدد a ، b و c به صورت متوالی قرار داشته باشند، به جمله وسطی یعنی c ، «واسطه هندسی» بین دو عدد a و b می‌گویند.

در دنباله هندسی، چون نسبت هر جمله به جمله قبلی‌اش مقداری ثابت است، مربع (توان دوم) جمله وسط، همیشه با حاصل ضرب دو جمله کناری‌اش برابر می‌شود، پس می‌توانیم این رابطه مهم را بنویسیم:

$$c^2 = a \times b$$

گام اول: ابتدا با توجه به رابطه واسطه حسابی، می‌توان نوشت:

$$2y = x + z \quad (۱)$$

گام دوم: هم‌چنین بین اضلاع مستطیل و قطر آن، رابطه فیثاغورس برقرار است، پس:

$$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow y^2 = z^2 - x^2 \Rightarrow y^2 = (z-x)(z+x)$$

$$\xrightarrow{(۱)} y^2 = 2y(z-x) \xrightarrow{y \neq 0} \frac{y}{2} = z-x \quad (۲)$$

گام سوم: حال به کمک رابطه‌های (۱) و (۲)، مقدار y و x را بر حسب z می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 2y = z + x \\ \frac{y}{2} = z - x \end{cases} \Rightarrow 2z = \frac{5}{2}y \Rightarrow y = \frac{4}{5}z \Rightarrow x = \frac{3}{5}z \quad (۳)$$

گام چهارم: حال در دنباله هندسی، با توجه به رابطه واسطه هندسی داریم:

$$(3x)^2 = 12y \Rightarrow 9x^2 = 12y \xrightarrow{(۲)} 9\left(\frac{3}{5}z\right)^2 = 12\left(\frac{4}{5}z\right) \Rightarrow \frac{81}{25}z^2 = \frac{48}{5}z$$

$$\xrightarrow{z \neq 0} z = \frac{48}{5} \times \frac{25}{81} = \frac{48 \times 5}{81} = \frac{80}{27}$$

تنها مثلی که اضلاع آن دنباله حسابی می‌سازند، مثلث معروف ۵ - ۴ - ۳ و مضارب آن است، پس:

$$x = 3k, y = 4k, z = 5k \Rightarrow 9x^2 = 12y \Rightarrow 9(3k)^2 = 12(4k) \Rightarrow 81k^2 = 48k$$

$$\Rightarrow 81k^2 - 48k = 0 \xrightarrow{k \neq 0} k = \frac{48}{81} \Rightarrow z = \frac{5 \times 48}{81} = \frac{80}{27}$$



امید می‌خواهد ارتفاع یک ساختمان را که طول سایه آن، ۱۵ متر است، حساب کند. قد امید ۱/۸ متر و طول سایه او در همان لحظه ۰/۶ متر است. ارتفاع ساختمان بر حسب متر کدام است؟

۶۰ (۴)

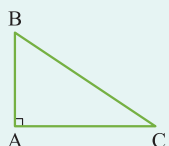
۴۵ (۳)

۴۲ (۲)

۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box



نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه، برای معرفی و محاسبه نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه حاده (تند)، ابتدا باید اضلاع مثلث را نسبت به آن زاویه نام‌گذاری کنیم (ضلع مقابل، ضلع مجاور و وتر) و سپس نسبت طول این اضلاع را به یکدیگر بسنجیم.

با فرض این‌که زاویه A قائمه باشد (وتر مثلث ضلع BC است)، برای دو زاویه حاده B و C، چهار نسبت اصلی مثلثاتی به شکل زیر تعریف می‌شوند:

● سینوس (sin): نسبت طول «ضلع مقابل» به آن زاویه، به طول «وتر» مثلث:

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}, \quad \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$$

● کسینوس (cos): نسبت طول «ضلع مجاور» به آن زاویه، به طول «وتر» مثلث:

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}, \quad \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC}$$

● تانژانت (tan): نسبت طول «ضلع مقابل» به زاویه، به طول «ضلع مجاور» همان زاویه:

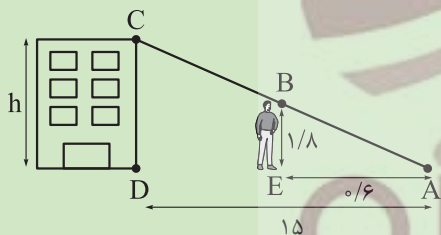
$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}, \quad \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC}$$

● کتانژانت (cot): نسبت طول «ضلع مجاور» به زاویه، به طول «ضلع مقابل» همان زاویه (این نسبت، دقیقاً معکوس نسبت تانژانت است).

$$\cot \hat{B} = \frac{AB}{AC}, \quad \cot \hat{C} = \frac{AC}{AB}$$

گام اول، ابتدا شکل زیر را در نظر بگیرید:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

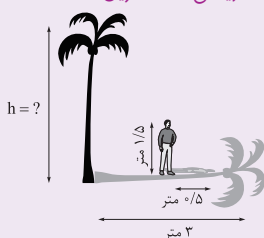


گام دوم، با توجه به شکل، در مثلث‌های ABE و ACD داریم:

$$\begin{aligned} \triangle ABE &= \tan \hat{A} = \frac{BE}{AE} = \frac{1/8}{0/6} = 3 \\ \triangle ACD &= \tan \hat{A} = \frac{CD}{AD} = \frac{h}{15} \end{aligned} \Rightarrow \frac{h}{15} = 3 \Rightarrow h = 45$$

علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی، ۱/۵ متر و طول سایه او در همان لحظه، ۰/۵ متر است. ارتفاع درخت چه قدر است؟

(ریاضی (۱) - تمرین صفحه ۳۴)



۵ اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\cos 3x = 1 - 2m$ باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -1 (۲) $\frac{1}{3}$
(۳) 1 (۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

Hint

اول، محدوده زاویه $3x$ رو مشخص کنید و روی دایره مثلثاتی ببینید کسینوس تو این بازه بین چه اعدادی نوسان می‌کنه؛ بعدش عبارت $1 - 2m$ رو تو همون محدوده گیر بنذارید!

درس Box

دایره مثلثاتی: دایره مثلثاتی، یک دایره استاندارد در صفحه مختصات است که دو ویژگی اساسی دارد: (۱) مرکز آن دقیقاً روی مبدأ مختصات $O(0,0)$ قرار دارد. (۲) شعاع آن دقیقاً برابر با ۱ واحد است ($R = 1$).

برای اندازه‌گیری زاویه‌ها روی این دایره، یک قرارداد جهانی داریم: همیشه نقطه $A(1,0)$ محل تقاطع دایره با بخش مثبت محور طول‌ها را به عنوان نقطه شروع در نظر می‌گیریم. پاره خط OA ، «ضلع ابتدایی» تمام زاویه‌هاست. حالا اگر این پاره خط را به اندازه زاویه α حول مبدأ دوران دهیم، به نقطه جدیدی مثل P روی محیط دایره می‌رسیم. زاویه α ، همان زاویه مثلثاتی متناظر با نقطه P است. جهت چرخش پادساعتگرد (خلاف عقربه‌های ساعت) به عنوان جهت مثبت و چرخش ساعت‌گرد به عنوان جهت منفی در نظر گرفته می‌شود.

محورهای سینوس و کسینوس روی دایره مثلثاتی: زیبایی و قدرت دایره مثلثاتی در این است که نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه را مستقیماً به مختصات یک نقطه روی دایره تبدیل می‌کند! فرض کنید نقطه $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی قرار دارد و زاویه α را می‌سازد. اگر از نقطه P به محورهای مختصات عمود کنیم، یک مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شود که وتر آن همان شعاع دایره (یعنی ۱) است. طبق تعریف نسبت‌های مثلثاتی در این مثلث:

$$\cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{1} = x \quad \sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{1} = y$$

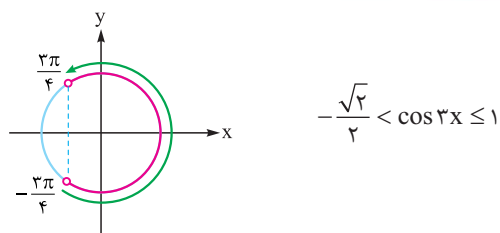
بنابراین:

- محور طول‌ها (محور x ها) همان محور کسینوس‌ها است. طول نقطه P دقیقاً مقدار $\cos \alpha$ را نشان می‌دهد.
- محور عرض‌ها (محور y ها) همان محور سینوس‌ها است. عرض نقطه P دقیقاً مقدار $\sin \alpha$ را نشان می‌دهد.
- حدود سینوس و کسینوس: چون نقطه P همیشه روی محیط دایره‌ای به شعاع ۱ حرکت می‌کند، مختصات طول (x) و عرض (y) آن هرگز نمی‌تواند از ۱ بیشتر یا از -1 کمتر شود. به همین دلیل، برای هر زاویه دلخواه α ، همواره داریم:
 $-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا توجه کنید که:

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{3\pi}{4} < 3x < \frac{3\pi}{4}$$

گام دوم: حال با مشخص کردن محدوده x روی دایره مثلثاتی، بیشترین و کمترین مقدار $\cos 3x$ را به دست می‌آوریم:



گام سوم: با جای‌گذاری مقدار $\cos 3x$ بر حسب m داریم:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 - 2m \leq 1 \Rightarrow \frac{-\sqrt{2}-2}{2} < -2m \leq 0 \Rightarrow 0 \leq m < \frac{2+\sqrt{2}}{4} \approx 0.85$$

در نتیجه مقدار m می‌تواند برابر صفر باشد.

۶ حاصل عبارت $\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^{-1}} \sqrt{\sqrt{3}-1}$ کدام است؟

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ (۴)

$\sqrt[4]{2}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

دروس Box

روش‌های گویا کردن مخرج‌های کنگ:

بسته به ظاهر مخرج کسر، از یکی از سه ترفند زیر استفاده می‌کنیم:

• از بین بردن ریشه (برای رادیکال‌های تکی): اگر مخرج کسر فقط شامل یک عبارت رادیکالی به فرم $\sqrt[n]{a^m}$ باشد (با شرط $m < n$)، صورت و مخرج کسر را در عامل $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.

• استفاده از اتحاد مزدوج (برای جمع و تفریق ریشه‌های دوم): اگر در مخرج کسر یکی از عبارت‌های دوجمله‌ای $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ یا $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ وجود داشته باشد، صورت و مخرج کسر را در عبارت مزدوج آن (یعنی همان عبارت ولی با علامت وسط قرینه) ضرب می‌کنیم. با این کار، مخرج کسر از طریق اتحاد مزدوج به فرم بدون رادیکال $a - b$ درمی‌آید.

• استفاده از اتحاد چاق و لاغر (برای جمع و تفریق ریشه‌های سوم): اگر در مخرج کسر، یکی از عبارت‌های لاغر ($\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$) یا استفاده از اتحاد چاق و لاغر ($\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$) وجود داشته باشد، برای ساختن اتحاد مکعب دوجمله‌ای، صورت و مخرج کسر را در عبارت غایب (مکمل آن) ضرب می‌کنیم (پرانتر لاغر در چاق و چاق در لاغر).

گام اول: ابتدا توجه کنید که: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$(2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

گام دوم: حال عبارت داده‌شده را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sqrt[4]{2+\sqrt{3}} \sqrt[4]{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[4]{(2+\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} = \sqrt[4]{8-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6} = \sqrt[4]{2}$$

(سؤال ۱۱ کنکور تهری ۱۴۰۱)

حاصل عبارت $\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}} \sqrt{1+\sqrt{7}}$ کدام است؟

$\sqrt[4]{2}$ (۲)

۱ (۱)

$2\sqrt[4]{2}$ (۴)

۲ (۳)

کنکور

توشه ای برای موفقیت

در حل معادله $3x^2 - 18x + 8 = 0$ به روش مربع کامل، به معادله $(x - \frac{k}{4})^2 = 19L$ رسیدیم. حاصل $3L - k$ کدام است؟

(۱) -۵ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) -۶

پاسخ: گزینه ۱

Hint

یادتون نره تو روش مربع کامل، اول کار باید کل معادله رو به ضریب x^2 تقسیم کنید تا خیالتون راحت بشه، بعد برید سراغ نصف کردن x !

دروس Box

معادله درجه دوم و روش‌های حل آن: هر معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن، $a \neq 0$ را معادله درجه دوم می‌نامند. عددهای a ، b و c را ضرایب‌های این معادله می‌نامند و x مجهول است. منظور از حل کردن این معادله، پیدا کردن عددهایی حقیقی مانند x است که به ازای آن‌ها تساوی برقرار است. اگر هیچ کدام از ضرایب‌های a ، b و c صفر نباشند، معادله را کامل می‌نامند. روش تجزیه: گاهی با استفاده از اتحاد جمله مشترک یا روش‌های دیگر تجزیه، می‌توان معادله درجه دوم را به حاصل ضرب دو عبارت درجه اول تبدیل کرد. با برابر صفر قراردادن هر پرانتز، معادله به دو معادله درجه اول ساده تبدیل شده و جواب‌ها به دست می‌آیند. روش ریشه‌گیری: اگر معادله درجه دوم پس از ساده‌سازی به فرم مربع کامل $(ax + b)^2 = c$ درآید (با این شرط که $a \neq 0$ و سمت راست یعنی $c \geq 0$ باشد)، می‌توانیم با ریشه‌گیری از دو طرف تساوی، جواب‌های آن را به صورت زیر به دست آوریم:

$$ax + b = \pm \sqrt{c} \Rightarrow ax = -b \pm \sqrt{c} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-b - \sqrt{c}}{a} \\ x = \frac{-b + \sqrt{c}}{a} \end{cases}$$

روش مربع کامل کردن: اگر معادله درجه دوم به صورت $x^2 + mx = n$ باشد، می‌توانیم با اضافه کردن مقدار $\frac{m^2}{4}$ (یعنی مربع نصف ضریب x) به هر دو طرف معادله، سمت چپ را به صورت مربع یک دوجمله‌ای درآوریم و سپس معادله را با روش ریشه‌گیری حل کنیم:

$$x^2 + mx = n \Rightarrow x^2 + mx + \frac{m^2}{4} = n + \frac{m^2}{4} \Rightarrow (x + \frac{m}{2})^2 = \frac{4n + m^2}{4}$$

نکته مهم در روش مربع کامل کردن: در استفاده از روش مربع کامل کردن، همواره به یاد داشته باشید که ضریب x^2 باید برابر با ۱ باشد. اگر ضریب x^2 عددی غیر از ۱ بود، در اولین گام حتماً باید کل معادله (هر دو طرف) را بر ضریب x^2 تقسیم کنیم و سپس مراحل را پیش ببریم.

روش کلی (روش دلتا Δ): برای حل هر معادله درجه دوم استاندارد به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ ، ابتدا عبارتی به نام «مبین» یا «دلتا» را با فرمول $\Delta = b^2 - 4ac$ محاسبه می‌کنیم.

• اگر $\Delta \geq 0$ باشد، معادله دارای جواب حقیقی است و این جواب‌ها از فرمول کلی زیر به دست می‌آیند:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

• اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله هیچ ریشه حقیقی‌ای ندارد (جواب ندارد).

گام اول: ابتدا معادله داده شده را به روش مربع کامل بازنویسی می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$3x^2 - 18x + 8 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 6x + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow x^2 - 6x = -\frac{8}{3}$$

$$\xrightarrow{+9} x^2 - 6x + 9 = -\frac{8}{3} + 9 \Rightarrow (x - 3)^2 = \frac{19}{3}$$

گام دوم: با مقایسه معادله به دست آمده با معادله صورت سؤال، داریم:

$$\begin{cases} \frac{k}{2} = 3 \Rightarrow k = 6 \\ 19L = \frac{19}{3} \Rightarrow L = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 3L - k = 3(\frac{1}{3}) - 6 = -5$$



اگر سهمی به معادله $y = (1-2a)x^2 + 2x - 3$ نسبت به خط $x = -1$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام

طول منفی قطع می کند؟

-۱ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

خط تقارن سهمی همون طول رأس سهمیه! با فرمول طول رأس، ضریب مجهول رو پیدا کنید و بعدش برید سراغ پیدا کردن محل برخورد نمودار با محور طول ها.

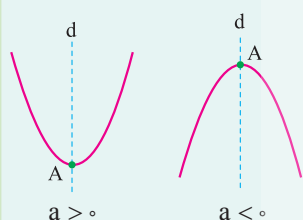
درس Box

سهمی و ویژگی های ظاهری آن: به نمودار تابع درجه دوم با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ (که در آن $a \neq 0$)، a, b, c ، عددی حقیقی اند، سهمی می گویند.

شکل ظاهری سهمی کاملاً به علامت ضریب a بستگی دارد:

• اگر $a > 0$ باشد، دهانه سهمی رو به بالا باز می شود و نقطه A در نمودار، پایین ترین نقطه سهمی است.

• اگر $a < 0$ باشد، دهانه سهمی رو به پایین باز می شود و نقطه A در نمودار، بالاترین نقطه سهمی است.



در هر دو حالت، به نقطه A رأس سهمی می گویند، همچنین خط d که دقیقاً از رأس سهمی می گذرد و موازی با محور عرض ها (محور y) است، محور تقارن سهمی نامیده می شود (زیرا سهمی را به دو نیمه کاملاً متقارن تقسیم می کند).

مختصات رأس و معادله خط تقارن سهمی: برای یافتن دقیق موقعیت سهمی در صفحه مختصات، شناختن مختصات رأس و خط تقارن آن از روی معادله استاندارد $y = ax^2 + bx + c$ بسیار ضروری است:

• مختصات رأس سهمی: نقطه رأس سهمی، همواره دارای مختصات زیر است (که طول آن از روی ضرایب و عرض آن از روی مقدار دلتا به دست می آید):

$$\text{رأس سهمی} = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

• معادله محور تقارن: از آن جا که محور تقارن همواره یک خط کاملاً عمودی است که دقیقاً از نقطه رأس سهمی عبور می کند، معادله آن برابر با طول همان نقطه رأس خواهد بود:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

گام اول: با توجه به این که سهمی نسبت به خط $x = -1$ متقارن است، طول رأس آن $x_s = -1$ است:

$$x_s = \frac{-b}{2(1-2a)} = -1 \Rightarrow 1 = 1-2a \Rightarrow a = 0$$

گام دوم: با جای گذاری مقدار a ، معادله سهمی را نوشته و طول نقاط برخورد آن با محور x ها را مشخص می کنیم:

$$a = 0 \Rightarrow y = x^2 + 2x - 3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

سهمی در نقطه ای با طول منفی $x = -3$ با محور x ها برخورد دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در سهمی $y = ax^2 + 2x + 3$ ، خط $x = 2$ محور تقارن آن است. مقدار a را به دست آورید. (سوال ۱۰- امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)

کتاب
درسی

در بازه (a, b) عبارت $17x - \frac{1}{3}x^2 - 48$ مثبت و عبارت $1 + \frac{x-2}{3}$ کوچک‌تر از ۲ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

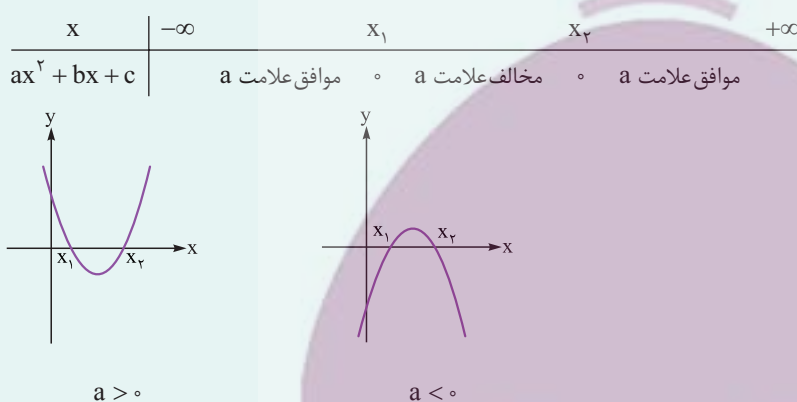
Hint

هر کدام از نامعادلات رو جداگانه حل کنید (یکی با تعیین علامت و یکی با بازکردن قدرمطلق)؛ در آخر از جواب‌هاشون اشتراک بگیرید تا مرزهای بازه نهایی مشخص بشه.

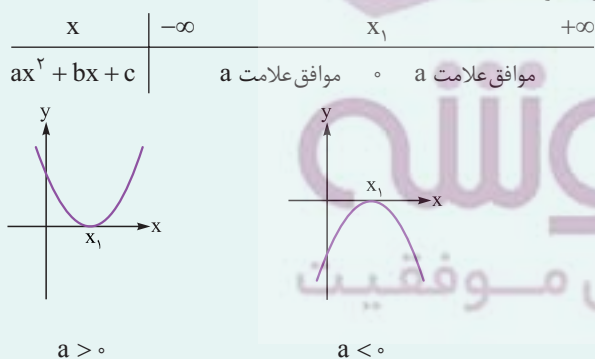
دانش‌Box

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم: چندجمله‌ای $P(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید (با فرض $a \neq 0$)، هنگام تعیین علامت این چندجمله‌ای، بسته به مقدار دلتا ($\Delta = b^2 - 4ac$)، دقیقاً با یکی از سه حالت زیر روبه‌رو می‌شویم:

حالت اول: $\Delta > 0$ در این حالت معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه حقیقی و متمایز دارد. این جواب‌ها را x_1 و x_2 می‌نامیم و فرض می‌کنیم $x_1 < x_2$ ، در این صورت علامت چندجمله‌ای فقط در بین دو ریشه مخالف علامت a و در خارج از دو ریشه موافق علامت a است:

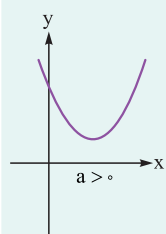


حالت دوم: $\Delta = 0$ در این حالت معادله یک جواب (ریشه مضاعف) دارد. این جواب را x_1 می‌نامیم. چندجمله‌ای در ریشه برابر صفر است و در بقیه نقاط، همواره موافق علامت a خواهد بود:



حالت سوم: $\Delta < 0$ در این حالت معادله هیچ جواب حقیقی ای ندارد (نمودار محور طول ها را قطع نمی کند). در این شرایط، علامت چندجمله ای در کل دامنه اعداد حقیقی، همواره موافق علامت a است:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	



حل نامعادلات قدرمطلق: برای حل نامعادلاتی که شامل قدرمطلق هستند، با توجه به تعریف قدرمطلق (فاصله تا مبدأ)، می توانیم از ویژگی های استاندارد زیر استفاده کنیم:

● حالت $|x| < a$: اگر $a > 0$ باشد، جواب نامعادله به فرم $-a < x < a$ است (اگر $a \leq 0$ باشد، نامعادله جواب ندارد، چون قدرمطلق نمی تواند اکیداً منفی باشد).

● حالت $|x| \leq a$: اگر $a \geq 0$ باشد، جواب نامعادله به فرم $-a \leq x \leq a$ است (اگر $a < 0$ باشد، نامعادله جواب ندارد).

● حالت $|x| > a$: اگر $a \geq 0$ باشد، جواب نامعادله شامل دو بازه جداگانه است: $x > a$ یا $x < -a$. (اگر $a < 0$ باشد، مجموعه جواب نامعادله برابر کل اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است، زیرا قدرمطلق همواره نامنفی و در نتیجه بزرگ تر از یک عدد منفی است).

● حالت $|x| \geq a$: اگر $a \geq 0$ باشد، جواب نامعادله شامل بازه های $x \geq a$ یا $x \leq -a$ است (اگر $a < 0$ باشد، مجموعه جواب نامعادله باز هم برابر $\mathbb{R}$ است).

گام اول: عبارت اول را تعیین علامت می کنیم:

$$-\frac{1}{3}x^2 + 17x - 48 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \times \frac{1}{3} \times 48}}{-\frac{2}{3}} = \frac{-17 \pm 15}{-\frac{2}{3}} = 48 \text{ و } 3$$

x	$-\infty$	3	48	$+\infty$
$-\frac{1}{3}x^2 + 17x - 48$	-	0	0	-

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 + 17x - 48 > 0 \Rightarrow x \in (3, 48) \quad (1)$$

جواب های معادله $-\frac{1}{3}x^2 + 17x - 48 = 0$ را به کمک روش روسی به دست می آوریم:

$$\xrightarrow{a \times c} r^2 + 17r + 16 = (r+1)(r+16) = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = -16 \xrightarrow{\div -\frac{1}{3}} x_1 = 3, x_2 = 48$$

گام دوم: هم چنین با توجه به ویژگی های قدرمطلق برای عبارت دوم داریم:

$$|\frac{x-2}{3} + 1| < 2 \Rightarrow -2 < \frac{x-2}{3} + 1 < 2 \Rightarrow -3 < \frac{x-2}{3} < 1 \Rightarrow -9 < x-2 < 3 \Rightarrow -7 < x < 5 \quad (2)$$

گام سوم: برای این که هم زمان هر دو نامعادله برقرار باشند، از (1) و (2) اشتراک می گیریم:

$$(1) \cap (2): (3, 48) \cap (-7, 5) = (3, 5)$$

بنابراین بزرگ ترین بازه ممکن برای (a, b) بازه $(3, 5)$ و در نتیجه بیشترین مقدار $b - a$ برابر 2 است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

په جور دیگه ➡

۱۰ اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 - ax^2 - bx}{x^2 + 2x - 3}$ روی $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$ همانی و تابع g با ضابطه

$g(x) = |2x - a + 2| + |2x + b - 1|$ روی بازه $[m, n]$ ثابت باشد، بیشترین مقدار $n - m$ کدام است؟

۱ (۲)

۲ (۱)

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

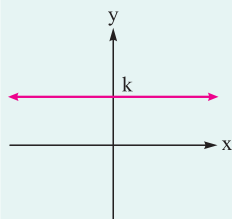
تابع f که همانیه، یعنی خروجیش دقیقاً خود x می‌شه. برای تابع g هم ریشه‌های داخل قدرمطلق رو پیدا کنید و ببینید تو کدوم بازه، x ها خط می‌خورن و به عدد ثابت می‌مونه.

درس‌Box

معرفی تابع ثابت و ویژگی‌های آن:

تابع ثابت، به تابعی گفته می‌شود که خروجی آن فارغ از نوع ورودی، همواره یک مقدار مشخص و بدون تغییر است. به بیان ریاضی، برد این تابع تنها از یک عضو تشکیل شده است.

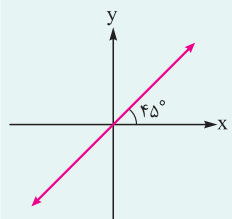
اگر تابع f را یک تابع ثابت در نظر بگیریم، فرمول یا ضابطه آن به صورت $f(x) = k$ نوشته می‌شود که در آن k نمایانگر یک عدد حقیقی ثابت است. در شرایطی که دامنه این تابع تمام اعداد حقیقی (مجموعه $\mathbb{R}$) باشد، نمودار آن به شکل یک خط کاملاً افقی و موازی با محور طول‌ها (محور x) رسم می‌شود که از نقطه k روی محور عرض‌ها می‌گذرد:



آشنایی با تابع همانی:

تابع همانی تابعی است که مانند یک آینه عمل می‌کند، یعنی هیچ تغییری روی ورودی‌های خود اعمال نمی‌کند و هر مقداری که از دامنه به آن داده شود، دقیقاً همان مقدار را در برد به عنوان خروجی تحویل می‌دهد، از این‌رو در تابع همانی همواره دامنه و برد با یکدیگر برابر هستند.

چنانچه دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی در نظر گرفته شود؛ ضابطه آن به صورت $y = x$ (یا $f(x) = x$) خواهد بود. نمودار چنین تابعی، یک خط راست است که از مبدأ مختصات عبور کرده و به عنوان نیمساز ربع اول و سوم شناخته می‌شود، بنابراین با بخش مثبت محور x ، زاویه دقیق 45° درجه می‌سازد.



گام اول: تابع f ، روی دامنه‌اش تابعی همانی است، پس ضابطه آن باید به صورت $f(x) = x$ باشد:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\frac{x^3 - ax^2 - bx}{x^2 + 2x - 3} = x \Rightarrow x^3 - ax^2 - bx = x^3 + 2x^2 - 3x$$

$$(2+a)x^2 + (b-3)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

با فاکتورگیری از x در صورت ضابطه تابع f داریم:

$$f(x) = \frac{x(x^2 - ax - b)}{x^2 + 2x - 3}$$

$$a = -2, b = 3$$

حال برای این که f تابعی همانی باشد، باید:

گام دوم: با جای گذاری مقادیر a و b ، ضابطه تابع g را بازنویسی کرده و به کمک ریشه های داخل قدرمطلق ضابطه تابع را به

صورت چندضابطه ای می نویسیم:

$$g(x) = |2x + 4| + |2x + 2| \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -4x - 6 & ; x < -2 \\ 2 & ; -2 \leq x \leq -1 \\ 4x + 6 & ; x > -1 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه های تابع g ، بزرگ ترین بازه ای که تابع g روی آن ثابت است، بازه $[-2, -1]$ است؛ بنابراین بیشترین مقدار

$$n - m \text{ برابر می شود با } 1 = -1 - (-2).$$



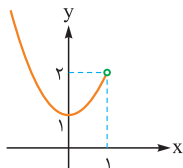
۱۱ اگر برد تابع $f(x) = \begin{cases} ax-b & ; x \geq 1 \\ x^2+1 & ; x < 1 \end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، مقدار $b-a$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) صفر
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) -۱

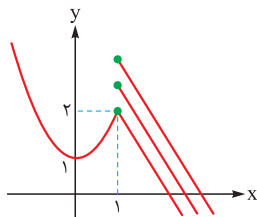
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا نمودار تابع f را در محدوده $x < 1$ رسم می‌کنیم:



گام دوم: حال برای این‌که برد تابع برابر $\mathbb{R}$ باشد، باید خط $y = ax - b$ دارای شیب منفی و مقدار آن در $x = 1$ بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد:



$$x = 1: a - b \geq 1 \Rightarrow b - a \leq -1$$

ایران توننه
توشه‌ای برای موفقیت

به چند طریق می‌توان به ۶ سؤال چهارگزینه‌ای و ۴ سؤال دوگزینه‌ای جواب داد، در صورتی که مجبور نباشیم به همه سؤالات پاسخ دهیم؟

$$5^6 \times 3^4 \quad (2)$$

$$12^4 \quad (1)$$

$$6^4 + 2^4 \quad (4)$$

$$5^6 + 3^4 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

وقتی مجبور نیستید به سؤالی جواب دهید، «سفیدگذاشتن» هم خودش یک گزینه جدید حساب می‌شود! پس به گزینه‌های هر سؤال یکی اضافه کنید و از اصل ضرب کمک بگیرید.

Hint

درس Box

اصل ضرب در آنالیز ترکیبی:

شرایطی را در نظر بگیرید که انجام یک کار، نیازمند طی کردن دقیقاً k مرحله پی‌درپی و وابسته به هم باشد. اگر بتوانید مرحله اول را به m_1 طریق، مرحله دوم را به m_2 طریق و در نهایت مرحله k ام را به m_k طریق انجام دهید، برای محاسبه تعداد کل حالت‌های انجام این کار چندمرحله‌ای، باید تعداد انتخاب‌های هر مرحله را در یکدیگر ضرب کنید؛ در نتیجه، کل کار مورد نظر به تعداد دفعات زیر قابل انجام است:

$$m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$$

اصل جمع در آنالیز ترکیبی:

تصور کنید برای انجام یک کار مشخص، k مسیر یا روش کاملاً مجزا پیش روی شماست. اگر روش اول به m_1 طریق، روش دوم به m_2 طریق و به همین ترتیب روش k ام به m_k طریق قابل انجام باشد، در صورتی که مجاز باشید برای انجام کار مورد نظر فقط یکی از این k روش را انتخاب کنید، کافی است تعداد حالت‌های هر روش را با هم جمع کنید.

بنابراین، کل راه‌های ممکن برای انجام آن کار برابر خواهد بود با:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: برای ۶ سؤال، چهار گزینه برای جواب‌دادن و یک حالت هم برای پاسخ‌ندادن داریم:

5^6 : کل حالت‌ها برای ۶ سؤال

گام دوم: برای ۴ سؤال نیز دو گزینه برای جواب‌دادن و یک حالت هم برای پاسخ‌ندادن داریم:

3^4 : کل حالت‌ها برای ۴ سؤال

گام سوم: تعداد کل حالت‌های جواب‌دادن به این ۱۰ سؤال برابر است با:

$$5^6 \times 3^4$$

یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال چهارگزینه‌ای و ۵ سؤال دوگزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤالات به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد، اگر:

الف) اگر مجبور باشد به همه سؤالات جواب دهد؟

ب) بتواند سؤالات را بدون جواب هم بگذارد؟

(ریاضی (۱) - تمرین ۶ صفحه ۱۲۶ - کتاب درسی)

کتاب
درسی

۱۳ اگر $(n+1)! = 42(n-1)!$ باشد، آن گاه $(\frac{n}{3})!$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۲۴ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

دروس Box

فاکتوریل: اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل ضرب تمام اعداد طبیعی از ۱ تا n (یعنی $1 \times 2 \times \dots \times n$) را با نماد $n!$ نشان می‌دهیم و آن را « n فاکتوریل» می‌خوانیم، همچنین در ریاضیات، یک قرارداد بسیار مهم داریم:

$$0! = 1, 1! = 1$$

ویژگی بازگشتی فاکتوریل: توجه کنید که همیشه می‌توانیم فاکتوریل یک عدد را برحسب فاکتوریل عدد قبل از آن بازنویسی کنیم. این ویژگی در ساده کردن کسرها به شدت کاربرد دارد:

$$n! = (n-1)! \times n$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا با توجه به تعریف فاکتوریل، معادله را به صورت زیر بازنویسی و مقدار n را به دست می‌آوریم:

$$(n+1)(n)(n-1)! = 42(n-1)! \Rightarrow (n+1)(n) = 42 = 7 \times 6 \Rightarrow n = 6$$

گام دوم: حال با داشتن مقدار n می‌توان نوشت:

$$(\frac{n}{3})! = (\frac{6}{3})! = 2! = 2$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

در یک ظرف، چهار مهره آبی و ۷ مهره قرمز وجود دارد. چهار مهره را به صورت متوالی و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که رنگ مهره‌های اول و سوم یکسان و رنگ مهره‌های دوم و چهارم نیز یکسان باشد (اما هر چهار مهره همرنگ نباشند)، کدام است؟

$$\frac{2}{11} \text{ (۴)} \quad \frac{3}{11} \text{ (۳)} \quad \frac{14}{55} \text{ (۲)} \quad \frac{7}{55} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۱

درس‌Box

ترکیب‌های r تایی و محاسبه تعداد آن‌ها: به هر انتخاب r شیء متمایز ($0 \leq r \leq n$) که در آن ترتیب انتخاب مهم نیست، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم.

تعداد ترکیب‌های r تایی: تعداد ترکیب‌های r شیء از n شیء متمایز ($0 \leq r \leq n$) را با نماد $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم که مقدار آن از طریق فرمول فاکتوریل زیر محاسبه می‌شود:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مفاهیم اولیه احتمال (آزمایش تصادفی): برای ورود به بحث احتمال، ابتدا باید با سه مفهوم کلیدی آشنا شویم:

● **آزمایش تصادفی:** آزمایشی را که همه حالت‌های ممکن نتیجه آن را بدانیم، اما نتیجه آن از پیش معلوم نباشد، آزمایش تصادفی می‌نامند (مانند پرتاب یک تاس یا سکه).

● **فضای نمونه‌ای:** مجموعه همه حالت‌های ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی می‌نامند (معمولاً با حرف S نشان داده می‌شود).

● **پیشامد تصادفی:** هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد تصادفی از این فضای نمونه‌ای می‌نامند (معمولاً با حروفی مثل A و B نشان داده می‌شوند).

احتمال رخداد یک پیشامد: فرض کنید فضای نمونه‌ای S، مجموعه‌ای متناهی (قابل شمارش) و ناتهی باشد و A نیز پیشامدی از این فضای نمونه‌ای باشد.

در این صورت، احتمال رخداد پیشامد را با نماد $P(A)$ نشان می‌دهیم. این احتمال به ساده‌ترین شکل ممکن، از تقسیم تعداد حالت‌های مطلوب (تعداد اعضای پیشامد A) بر تعداد کل حالت‌های ممکن (تعداد اعضای فضای نمونه‌ای S) به دست می‌آید:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام اول: ابتدا توجه کنید که تعداد کل حالت‌های خارج کردن ۴ مهره به صورت متوالی و بدون جای‌گذاری برابر است با:

$$n(S) = \binom{11}{1} \times \binom{10}{1} \times \binom{9}{1} \times \binom{8}{1} = 11 \times 10 \times 9 \times 8$$

$\downarrow$ مهره اول $\downarrow$ مهره دوم $\downarrow$ مهره سوم $\downarrow$ مهره چهارم

گام دوم: حال تعداد حالت‌هایی که در آن رنگ مهره‌های اول و سوم و سوم و مهره‌های دوم و چهارم یکسان باشد (اما هر چهار مهره همرنگ نباشند)، برابر است با:

$$n(A) = \binom{4}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{6}{1} + \binom{7}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{3}{1} = 2(7 \times 6 \times 4 \times 3)$$

$\downarrow$ اول آبی $\downarrow$ دوم قرمز $\downarrow$ سوم آبی $\downarrow$ چهارم قرمز یا $\downarrow$ اول قرمز $\downarrow$ دوم آبی $\downarrow$ سوم قرمز $\downarrow$ چهارم آبی

گام سوم: احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times 7 \times 6 \times 4 \times 3}{11 \times 10 \times 9 \times 8} = \frac{14}{110} = \frac{7}{55}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۷ کتاب متمایز به طور تصادفی روی هم قرار گرفته‌اند که ۲ کتاب از میان آن‌ها، ریاضی است. با کدام احتمال، این ۲ کتاب ریاضی در جایگاه‌های دوم و ششم هستند؟

$$\frac{1}{21} (۴)$$

$$\frac{1}{42} (۳)$$

$$\frac{1}{۱۲} (۲)$$

$$\frac{1}{۱۴} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

Hint

جایگاه‌های دوم و ششم رو برای کتاب‌های ریاضی رزرو کنید! اول حالت‌های چیدمان این دو کتاب تو جاهای خودشون رو حساب کنید و بعد برید سراغ جایگشت بقیه کتاب‌ها تو جاهای خالی.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا تعداد حالت‌های کل یعنی تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۷ کتاب متمایز کنار هم را حساب می‌کنیم:

$$n(S) = ۷!$$

گام دوم: حال تعداد حالت‌هایی که ۲ کتاب ریاضی در جایگاه‌های دوم و ششم قرار بگیرند را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۵}{\text{ریاضی}} \quad \frac{۴}{\text{ریاضی}} \quad \frac{۳}{\text{ریاضی}} \quad \frac{۲}{\text{ریاضی}} \quad \frac{۱}{\text{ریاضی}}$$

$$n(A) = ۲! \times ۵! = ۲ \times ۵!$$

جایگشت ۲ کتاب ریاضی

گام سوم: احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲ \times ۵!}{۷!} = \frac{۲ \times ۵!}{۷ \times ۶ \times ۵!} = \frac{۱}{۲۱}$$

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

فرض کنید H نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث ABC باشد. اگر زوایای $\hat{A}HC$ ، $\hat{B}HC$ و $\hat{A}HB$ با همین ترتیب یک دنباله حسابی تشکیل دهند، اندازه زاویه $\hat{A}$ بر حسب درجه کدام است؟

۹۰ (۴)

۷۵ (۳)

۶۰ (۲)

۴۵ (۱)

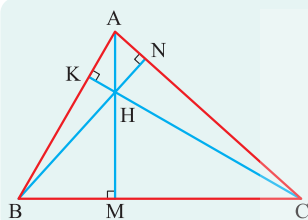
پاسخ: گزینه ۲

Hint

درس Box

دقت کنید که جمله وسط، واسطه حسابی دو جمله دیگر است.

ارتفاع‌های هر مثلث در یک نقطه هم‌رسانند. نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها:

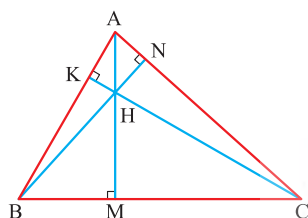


(۱) در مثلث حاده‌الزاویه درون مثلث است.

(۲) در مثلث قائم‌الزاویه روی مثلث (روی رأس قائمه) است.

(۳) در مثلث منفرجه‌الزاویه، بیرون مثلث است.

گام اول: اندازه زوایای $\hat{A}HC$ ، $\hat{B}HC$ و $\hat{A}HB$ مطابق فرض، یک دنباله حسابی تشکیل داده‌اند، یعنی $\hat{B}HC$ واسطه حسابی $\hat{A}HB$ و $\hat{A}HC$ است. از طرفی مطابق شکل، واضح است که مجموع اندازه‌های این سه زاویه، برابر با 36° می‌باشد، پس داریم:



$$\hat{B}HC = \frac{\hat{A}HC + \hat{A}HB}{2} \Rightarrow \hat{A}HC + \hat{A}HB = 2\hat{B}HC$$

$$\hat{A}HB + \hat{A}HC + \hat{B}HC = 36^\circ \Rightarrow 2\hat{B}HC + \hat{B}HC = 36^\circ \Rightarrow 3\hat{B}HC = 36^\circ \Rightarrow \hat{B}HC = 12^\circ$$

گام دوم: دو زاویه $\hat{B}HC$ و $\hat{KHN}$ متقابل به رأس هستند، پس $\hat{KHN} = \hat{B}HC = 12^\circ$. از طرفی، مجموع زوایای چهارضلعی $AKHN$ برابر 360° است، پس می‌توان نوشت:

$$\hat{A} + \hat{K} + \hat{KHN} + \hat{N} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + 90^\circ + 12^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

۱۷ اگر O نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC و $OC > OB > OA$ باشد، کدام رابطه بین اضلاع این

مثلث درست است؟

$$AB > BC > AC \quad (۲)$$

$$AB > AC > BC \quad (۱)$$

$$BC > AB > AC \quad (۴)$$

$$BC > AC > AB \quad (۳)$$

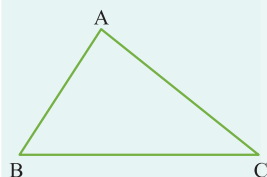
پاسخ: گزینه ۳

در هر کدام از مثلثهای OAB، OAC و OBC از قضیه ضلع برتر استفاده کنید.

Hint

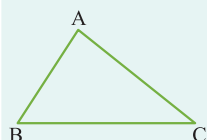
دکتر Box

(۱) قضیه ضلع برتر: اگر در یک مثلث، دو ضلع نابرابر باشند، آن گاه زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است:



$$AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

(۲) قضیه زاویه برتر: اگر در یک مثلث، دو زاویه نابرابر باشند، آن گاه ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

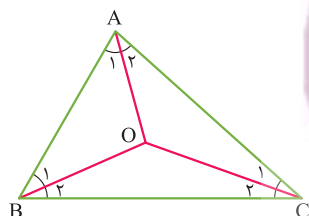


$$\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$$

گام اول: مطابق شکل، فرض کنید O نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC باشد. در این صورت OA، OB و OC

پاسخ خیلی تشریحی

نیمسازهای زوایای A، B و C هستند و در نتیجه $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3$ ، $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{B}_3$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{C}_3$ است.

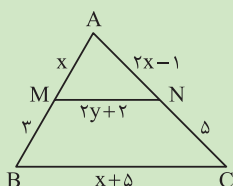


گام دوم: با استفاده از قضیه ضلع برتر در مثلثهای OAB و OBC داریم:

$$\begin{cases} \triangle OBC : OC > OB \Rightarrow \hat{B}_3 > \hat{C}_3 \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} > \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{B} > \hat{C} \\ \triangle OAB : OB > OA \Rightarrow \hat{A}_1 > \hat{B}_1 \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} > \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} > \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$$

گام سوم: به کمک قضیه زاویه برتر و با توجه به نتیجه حاصل از گام دوم می‌توان نوشت:

$$\hat{A} > \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow BC > AC > AB$$



در شکل زیر، $MN \parallel BC$ است. حاصل $x + y$ کدام است؟

۱۸

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

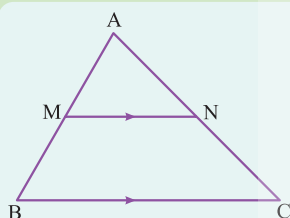
مشاوره این سؤال از مبحث قضیه تالس و مشابه تمرین ۳ صفحه ۳۶ کتاب درسی هندسه (۱) طراحی شده است. سؤالات مربوط به قضیه تالس در مثلث و دوزنقه از پرتکرارترین سؤالات کنکورهای سال‌های گذشته بوده‌اند که به طور مستقیم یا ترکیبی با مباحث دیگر به کار رفته‌اند.

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا به کمک قضیه تالس، مقدار x را پیدا کرده و سپس از تعمیم قضیه تالس استفاده کنید.

Hint

درسی Box



فرض کنید در مثلث ABC ، پاره خط MN موازی با ضلع BC باشد. در این صورت:

(۱) قضیه تالس:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

(۲) تعمیم قضیه تالس:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

گام اول: طبق قضیه تالس در مثلث ABC داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{2x-1}{5} \Rightarrow 5x = 6x - 3 \Rightarrow x = 3$$

گام دوم: حال از تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC کمک می‌گیریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{2y+2}{x+5} = \frac{x}{x+3}$$

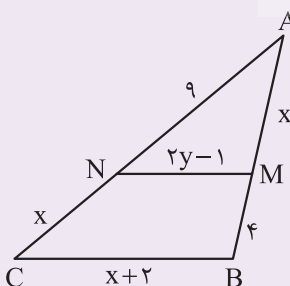
$$\xrightarrow{x=3} \frac{2y+2}{8} = \frac{3}{6} \Rightarrow \frac{y+1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow y+1 = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = 1$$

گام سوم: حاصل عبارت $x + y$ برابر است با:

$$x + y = 3 + 1 = 4$$

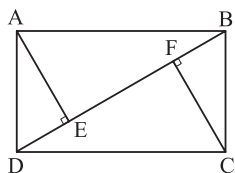
پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر $MN \parallel BC$ ؛ مقادیر x و y را به دست آورید. (هندسه (۱) - تمرین ۳ صفحه ۳۶ کتاب درسی)



کتاب
درسی

در شکل زیر، در مستطیل ABCD با اضلاع $AB = 3\sqrt{13}$ و $AD = 2\sqrt{13}$ ، پاره‌خط‌های AE و CF بر قطر BD عمود هستند. اگر عمود منصف EF، ضلع CD را در نقطه M قطع کند، مساحت مثلث EMF کدام است؟



$$\frac{65}{6} \quad (4)$$

$$\frac{21}{2} \quad (3)$$

$$\frac{32}{3} \quad (2)$$

$$10 \quad (1)$$

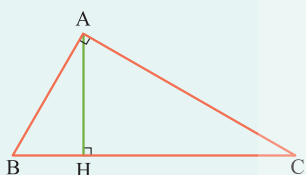
پاسخ: گزینه ۴

Hint

درس Box

با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، اندازه پاره‌خط‌های DE و BF و به کمک آن EF را پیدا کنید.

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه: فرض کنید ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه ABC باشد. در این صورت روابط زیر برقرار است:



$$1) AH \times BC = AB \times AC$$

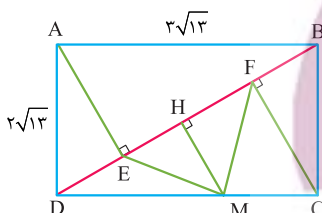
$$2) AH^2 = BH \times CH$$

$$3) AB^2 = BH \times BC$$

$$4) AC^2 = CH \times BC$$

گام اول: طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ABD داریم:

پاسخ خیلی تشریحی



$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = (3\sqrt{13})^2 + (2\sqrt{13})^2 = 9 \times 13 + 4 \times 13 = 13 \times 13 \Rightarrow BD = 13$$

از طرفی، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABD می‌توان نوشت:

$$AD^2 = DE \times BD \Rightarrow (2\sqrt{13})^2 = DE \times 13 \Rightarrow DE = 4$$

به طور مشابه $BF = 4$ و در نتیجه داریم:

$$EF = BD - (DE + BF) = 13 - 2 \times 4 = 5$$

گام دوم: طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه BCD داریم:

$$CF^2 = BF \times DF = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow CF = 6$$

گام سوم: مطابق شکل، H وسط پاره‌خط EF است و عمود منصف EF، ضلع CD را در نقطه M قطع می‌کند، بنابراین

$$DH = DE + \frac{EF}{2} = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$

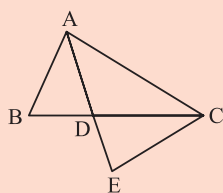
و در نتیجه، طبق تعمیم قضیه تالس می‌توان نوشت:

$$\triangle DFC : MH \parallel CF \Rightarrow \frac{MH}{CF} = \frac{DH}{DF} \Rightarrow \frac{MH}{6} = \frac{\frac{13}{2}}{9} \Rightarrow MH = \frac{13}{3}$$

گام چهارم: مساحت مثلث EMF برابر است با:

$$S_{EMF} = \frac{1}{2} MH \times EF = \frac{1}{2} \times \frac{13}{3} \times 5 = \frac{65}{6}$$

۲۰ در شکل زیر، AD نیمساز زاویه A و $CD = CE$ است. اگر $BD = ۳$ و $CD = ۸$ باشد، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث ACD کدام است؟



مشاوره این سؤال به صورت ترکیبی از دو مبحث تشابه مثلث‌ها و نسبت مساحت‌ها و قاعده‌های دو مثلث و مشابه سؤال ۱۵۵ کنکور تجربی خارج از کشور ۹۹ طراحی شده است.

$\frac{۵}{۳}$ (۴)

$\frac{۳}{۵}$ (۳)

$\frac{۳}{۸}$ (۲)

$\frac{۸}{۳}$ (۱)

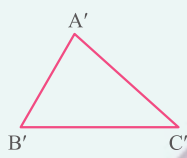
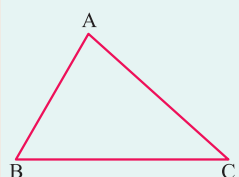
پاسخ: گزینه ۴

نشان دهید دو مثلث ABD و ACE متشابه هستند.

Hint

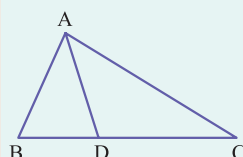
دروس Box

(۱) تشابه مثلث‌ها: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:



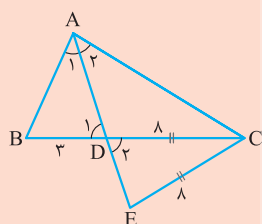
$$\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

(۲) اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعده مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه قاعده‌های آن‌ها است:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$$

گام اول: طبق فرض $CD = CE$ ، پس مثلث CDE متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\hat{D}_\gamma = \hat{E}$. از طرفی، دو زاویه $\hat{D}_\gamma$ و $\hat{D}_\delta$ متقابل به رأس هستند، پس $\hat{D}_\delta = \hat{E}$. حال برای دو مثلث ABD و ACE داریم:



$$\begin{cases} \hat{A}_\delta = \hat{A}_\gamma \\ \hat{D}_\delta = \hat{E} \end{cases} \xrightarrow{(ز.ز)} \triangle ABD \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE} = \frac{۳}{۸}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}} \frac{AD}{AE - AD} = \frac{۳}{۸ - ۳} \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{۳}{۵}$$

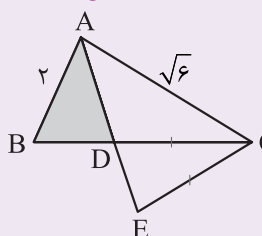
گام دوم: دو مثلث ACD و CDE در ارتفاع رسم‌شده از رأس مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است، یعنی داریم:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CDE}} = \frac{AD}{DE} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{S_{CDE}}{S_{ACD}} = \frac{۵}{۳}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، AD نیمساز زاویه A و $CE = CD$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE ، کدام است؟

(سؤال ۱۵۵ کنکور تهرمی ۱۳۹۹ (خارج از کشور))



$\frac{۲}{۳}$ (۲)

$\frac{۱}{۳}$ (۱)

$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۴)

$\frac{۳}{۴}$ (۳)

کنکور

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، اگر $AB = 2\sqrt{3}$ و $AC = 2\sqrt{6}$ باشد، فاصله رأس B از میانه وارد بر وتر در این مثلث کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) ۳
(۴) $2\sqrt{3}$

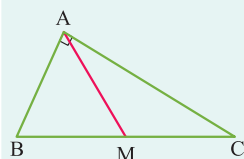
پاسخ: گزینه ۲

مساحت مثلث ABC و اندازه میانه AM را تعیین کنید.

Hint

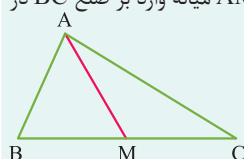
درس Box

(۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه میانه وارد بر وتر، نصف اندازه وتر است. به عنوان مثال، در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، اگر M وسط ضلع BC باشد، آن‌گاه:



$$AM = \frac{1}{2} BC$$

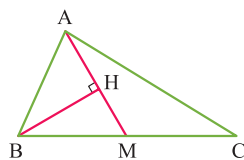
(۲) با رسم هر کدام از میانه‌های یک مثلث، دو مثلث هم‌مساحت پدید می‌آید. به عنوان مثال، اگر AM میانه وارد بر ضلع BC در مثلث ABC باشد، آن‌گاه:



$$S_{AMB} = S_{AMC}$$

گام اول: طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2 = 36 \Rightarrow BC = 6$$

از طرفی، اندازه میانه وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، نصف اندازه وتر است، پس:

$$AM = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

گام دوم: مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} = 6\sqrt{2}$$

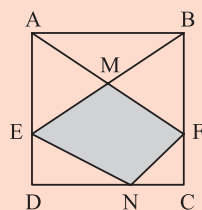
از طرفی با رسم هر میانه، دو مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود، پس برای میانه AM می‌توان نوشت:

$$S_{AMB} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 3\sqrt{2}$$

گام سوم: در مثلث AMB ، ارتفاع وارد بر قاعده AM است، پس داریم:

$$S_{AMB} = \frac{1}{2} \times BH \times AM \Rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{1}{2} BH \times 3 \Rightarrow BH = 2\sqrt{2}$$

۲۲ در مربع ABCD شکل زیر، اگر $ED = FC = \frac{AE}{3}$ باشد، مساحت ناحیه سایه زده چه کسری از مساحت مربع است؟



(۱) $\frac{5}{16}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{3}{8}$

(۴) $\frac{7}{16}$

مشاوره این سؤال از بحث مساحت چندضلعی‌ها و مشابه سؤال ۱۴۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۰ طراحی شده است. سؤالات متعددی در این زمینه (مساحت متوازی‌الاضلاع، دوزنقه، شش‌ضلعی منظم و ...) در میان سؤالات کنکورهای گذشته دیده می‌شود.

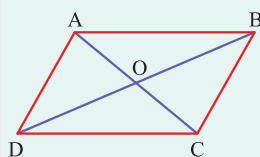
پاسخ: گزینه ۱

Hint

از E به F وصل کنید و مساحت دو مثلث EMF و ENF را برحسب مساحت مربع به دست آورید.

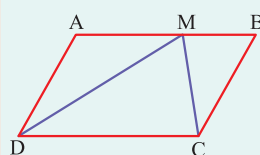
درس Box

(۱) از رسم دو قطر یک متوازی‌الاضلاع (مستطیل، لوزی، مربع)، چهار مثلث هم‌مساحت پدید می‌آید:



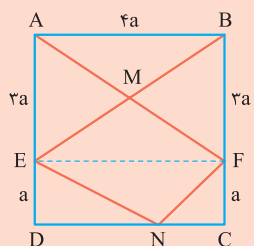
$$S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OCD} = S_{ODA}$$

(۲) اگر از یک نقطه واقع بر یکی از اضلاع یک متوازی‌الاضلاع (مستطیل، لوزی، مربع) به دو رأس مقابل آن ضلع وصل کنیم، مثلی



پدید می‌آید که مساحت آن نصف مساحت متوازی‌الاضلاع (مستطیل، لوزی، مربع) است:

گام اول: دو نقطه E و F را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا دو مثلث EMF و ENF پدید آید. فرض کنید طول هر ضلع مربع برابر ۴a باشد. در این صورت $ED = a$ و $AE = 3a$ است. چهارضلعی ABFE مستطیل و AF و BE قطرهای آن هستند، بنابراین طبق مورد (۱) درس باکس داریم:



$$S_{EMF} = \frac{1}{4} S_{ABFE} = \frac{1}{4} \times 4a \times 3a = 3a^2$$

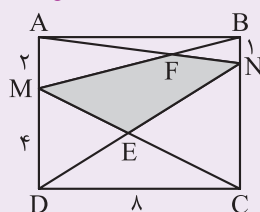
گام دوم: در مستطیل EFCD، N نقطه دلخواهی روی ضلع CD است، پس طبق مورد (۲) درس باکس می‌توان نوشت:

$$S_{ENF} = \frac{1}{4} S_{EFCD} = \frac{1}{4} \times 4a \times a = a^2$$

گام سوم: با توجه به نتایج گام‌های اول و دوم داریم:

$$\frac{S_{EMFN}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{EMF} + S_{ENF}}{S_{ABCD}} = \frac{3a^2 + a^2}{4a \times 4a} = \frac{5}{16}$$

مستطیل ABCD مطابق شکل زیر مفروض است. مساحت چهارضلعی MENF، کدام است؟ (سؤال ۱۴۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)



(۲) ۱۳

(۴) ۱۶

(۱) $\frac{104}{9}$

(۳) $\frac{47}{3}$

کنکور

در مثلث ABC ، $BC = ۱۵$ و طول میانه‌های BM و CN به ترتیب برابر $۱۳/۵$ و ۱۸ است. طول میانه سوم این مثلث کدام است؟

۲۴ (۴)

۲۲/۵ (۳)

۱۶/۵ (۲)

۱۵ (۱)

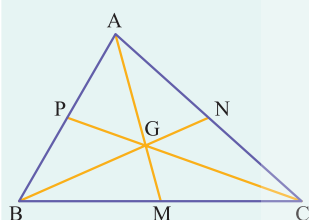
پاسخ: گزینه ۳

Hint

درس Box

نوع مثلثی که سه رأس آن B ، C و نقطه هم‌رسی میانه‌های مثلث ABC است را تعیین کنید.

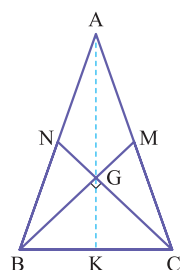
میانه‌های هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث هم‌رس‌اند. نقطه هم‌رسی میانه‌ها، هر کدام از میانه‌ها را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند، یعنی فاصله نقطه هم‌رسی میانه‌ها از هر رأس، $\frac{۲}{۳}$ اندازه میانه نظیر آن رأس و فاصله این نقطه از وسط هر ضلع، $\frac{۱}{۳}$ اندازه میانه نظیر آن ضلع است:



$$\begin{cases} AG = \frac{۲}{۳} AM, & GM = \frac{۱}{۳} AM \\ BG = \frac{۲}{۳} BN, & GN = \frac{۱}{۳} BN \\ CG = \frac{۲}{۳} CP, & GP = \frac{۱}{۳} CP \end{cases}$$

گام اول: فرض کنید G نقطه هم‌رسی میانه‌های مثلث ABC باشد. در این صورت طبق درس باکس داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\begin{cases} BG = \frac{۲}{۳} BM = \frac{۲}{۳} \times \frac{۲۷}{۲} = ۹ \\ CG = \frac{۲}{۳} CN = \frac{۲}{۳} \times ۱۸ = ۱۲ \end{cases}$$

گام دوم: طول اضلاع مثلث BGC در رابطه فیثاغورس صدق می‌کند، یعنی $۱۵^2 = ۹^2 + ۱۲^2$ ، بنابراین مثلث BGC قائم‌الزاویه و BC وتر آن است. می‌دانیم اندازه میانه وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، نصف اندازه وتر است، پس:

$$GK = \frac{۱}{۲} BC = \frac{۱۵}{۲}$$

گام سوم: طبق درس باکس، فاصله نقطه G از وسط ضلع BC ، $\frac{۱}{۳}$ طول میانه نظیر این ضلع است، بنابراین داریم:

$$GK = \frac{۱}{۳} AK \Rightarrow \frac{۱۵}{۲} = \frac{۱}{۳} AK \Rightarrow AK = \frac{۴۵}{۲} = ۲۲/۵$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

دو خط متمایز d_1 و d_2 درون صفحه P قرار دارند. از نقطه A واقع در خارج صفحه P ، چند خط عبور می‌کند به طوری که هر دو خط d_1 و d_2 را قطع کند؟

- (۱) همواره صفر
(۲) همواره یک
(۳) صفر یا یک
(۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۳

Hint

درس‌Box

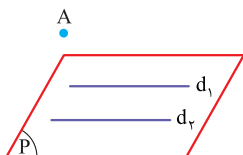
ابتدا تعیین کنید که دو خط d_1 و d_2 چه وضعی نسبت به یکدیگر دارند.

دو خط در فضا نسبت به هم یکی از سه حالت زیر را دارند:

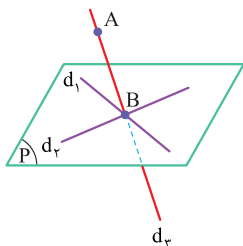
- (۱) موازی: دو خط را که نقطه اشتراکی ندارند و صفحه‌ای شامل هر دوی آن‌ها وجود دارد، موازی می‌نامیم.
(۲) متقاطع: دو خط که در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، متقاطع می‌نامیم. همواره یک صفحه یکتا شامل دو خط متقاطع وجود دارد.
(۳) متناظر: دو خط را که هیچ صفحه‌ای شامل هر دوی آن‌ها وجود ندارد، متناظر می‌نامیم.

گام اول: با توجه به توضیحات ارائه‌شده در درس‌باکس، هرگاه دو خط متمایز d_1 و d_2 درون صفحه‌ای مانند P قرار داشته باشند، نسبت به هم موازی یا متقاطع هستند.

گام دوم: اگر دو خط d_1 و d_2 موازی باشند، آن‌گاه از نقطه A خارج از صفحه P ، هیچ خطی عبور نمی‌کند که هر دو خط d_1 و d_2 را قطع کند:



گام سوم: اگر دو خط d_1 و d_2 در نقطه‌ای مانند B متقاطع باشند، آن‌گاه خطی مانند d_3 که از دو نقطه A و B عبور می‌کند، تنها خطی است که از A گذشته و هر دو خط d_1 و d_2 را قطع می‌کند:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

از دوران مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a حول یکی از اضلاع آن، دو مخروط یکسان پدید آمده است. ارتفاع و شعاع قاعده هر کدام از آن‌ها به ترتیب از راست به چپ برابر کدام است؟

$$\frac{a}{\sqrt{3}} \text{ و } \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ و } \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (۱)$$

$$\frac{a}{\sqrt{3}} \text{ و } a \quad (۴)$$

$$a \text{ و } \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (۳)$$

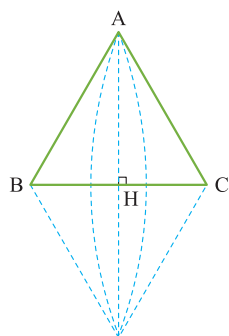
پاسخ: گزینه ۱

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دقت کنید دو مخروط پدیدآمده، از قاعده به هم چسبیده‌اند.

گام اول: مطابق شکل، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را حول ضلع BC دوران می‌دهیم. در این صورت دو مخروط یکسان پدید می‌آید که از قاعده به هم چسبیده‌اند:



گام دوم: همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، ارتفاع هر کدام از دو مخروط برابر نصف اندازه ضلع مثلث، یعنی $BH = CH = \frac{a}{2}$ است. هم‌چنین شعاع قاعده دو مخروط برابر طول ارتفاع مثلث، یعنی $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

فاصله ستاره‌ای تا کره زمین برابر ۸۱×۱۰^{۱۲} km است. این فاصله بر حسب یکای نجومی و به صورت نمادگذاری علمی کدام است؟ ($۱ \text{ AU} = ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} \text{ m}$)

$$\begin{aligned} & ۵۴ \times ۱۰^۳ \quad (۲) \\ & ۵/۴ \times ۱۰^۴ \quad (۴) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ۵۴ \times ۱۰^۴ \quad (۱) \\ & ۵/۴ \times ۱۰^۵ \quad (۳) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۳

دروس Box

۱) تبدیل زنجیره‌ای: برای تبدیل یکای یک کمیت به یکاهای دیگر، از روش تبدیل زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. مثلاً برای این که بینیم ۲° in معادل چند cm است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

(الف) ابتدا تساوی بین هر یک را می‌نویسیم، تا ضریب تبدیل مناسب به دست آید:

$$۱ \text{ in} = ۲/۵۴ \text{ cm} \Rightarrow \frac{۱ \text{ in}}{۲/۵۴ \text{ cm}} = ۱ \quad \text{یا} \quad \frac{۲/۵۴ \text{ cm}}{۱ \text{ in}} = ۱$$

(ب) سپس به کمک ضریب تبدیل مناسب، تبدیل زنجیره‌ای را می‌نویسیم:

$$۲^\circ \text{ in} = ۲^\circ \text{ in} \times \frac{۲/۵۴ \text{ cm}}{۱ \text{ in}} = ۵^\circ/۸ \text{ cm}$$

۲) نمادگذاری علمی:

برای آن که نوشتن و محاسبه مقادیر خیلی بزرگ یا خیلی کوچک ساده شود از روشی به نام نمادگذاری علمی استفاده می‌کنیم. در این روش، اندازه هر کمیت فیزیکی به صورت کلی $X \times ۱۰^n$ نوشته می‌شود که در آن $۱ < X \leq ۱۰$ و n عددی صحیح است.

با استفاده از روش تبدیل زنجیره‌ای، یکای خواسته شده را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$۸۱ \times ۱۰^{۱۲} \text{ km} \times \frac{۱۰^۳ \text{ m}}{۱ \text{ km}} \times \frac{۱ \text{ AU}}{۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} \text{ m}} = ۵۴ \times ۱۰^۴ = ۵/۴ \times ۱۰^۵ \text{ AU}$$

الف) یکای نجومی برابر میانگین فاصله زمین تا خورشید است ($۱ \text{ AU} \approx ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} \text{ m}$). با توجه به جدول ۱ - ۳، فاصله منظومه شمسی تا نزدیک‌ترین ستاره بر حسب یکای نجومی چه قدر است؟

(فیزیک ۱) - تمرین ۱ - (قسمت الف) صفحه ۸ کتاب درسی

مکعبی به ضلع ۲۰ cm و جرم ۳۷/۵ kg از آلیاژی به چگالی ۵ g/cm^۳ ساخته شده است. درون این مکعب، حفره‌ای کروی وجود دارد، قطر این حفره چند سانتی‌متر است؟ (π = ۳)

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

دانش‌Box

نسبت جرم به حجم یک جسم را چگالی آن جسم می‌گوییم.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

چگالی (kg/m^۳) جرم (kg)

حجم (m^۳)

حجم کره از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

هنگامی که جسم حفره‌دار است، حجم ماده به کاررفته در آن، برابر است با اختلاف حجم ظاهری و حجم حفره؛ یعنی:

$$V_{\text{حفره}} = V_{\text{ظاهری}} - V_{\text{واقعی}}$$

نکته

گام اول: ابتدا حجم واقعی جسم را از رابطه چگالی به دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V_{\text{واقعی}} = \frac{m}{\rho} = \frac{m=37.5 \text{ kg}=37.5 \times 10^3 \text{ g}}{\rho=5 \text{ g/cm}^3} \rightarrow V_{\text{واقعی}} = \frac{37.5 \times 10^3 \text{ g}}{5 \text{ g/cm}^3} = 7500 \text{ cm}^3$$

گام دوم: اکنون حجم ظاهری و واقعی را از هم کم می‌کنیم تا حجم حفره به دست آید:

$$V_{\text{ظاهری}} = (20)^3 = 8000 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{حفره}} = 8000 - 7500 = 500 \text{ cm}^3$$

گام سوم: با توجه به کروی بودن حفره، قطر آن را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{\text{حفره}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times r^3 = 500 \Rightarrow r = 5 \text{ cm} \Rightarrow D = 2r = 10 \text{ cm}$$

پاسخ خیلی تشریحی

خواست باشد که قطر خواسته شده، نه شعاع کره.

گول نخوری

از همون اول چون قطر بر حسب سانتی‌متر خواسته شده بود، فرمول چگالی رو طوری نوشتیم که میم بر حسب cm^۳ در بیاد.

تیزبازی

ایران تونش
توشه ای برای موفقیت

چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) فاصله مولکول‌ها در حالت جامد، کم‌تر از حالت مایع است.

ب) شیشه یک نوع جامد بی‌شکل است که از سرد شدن آهسته مایع به وجود می‌آید.

پ) مولکول‌های آب، حرکات کاتوره‌ای و نامنظم دارند.

ت) کشش سطحی، ناشی از دگرچسبی مولکول‌های سطح مایع است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس‌Box





بررسی موارد:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

الف) فاصله مولکول‌های جامد و مایع تقریباً یکسان است. ✗

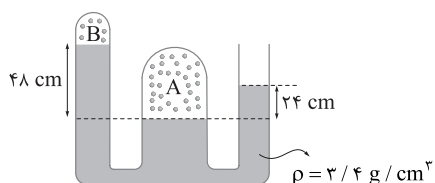
ب) جامد بی‌شکل از سرد شدن سریع مایع به دست می‌آید. ✗

پ) درست ✓

ت) کشش سطحی، ناشی از همچسبی مولکول‌های مایع است. ✗

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

۲۹ در شکل زیر، فشار گاز محبوس A، چند برابر فشار گاز محبوس B است؟ ($P_0 = 66 \text{ cmHg}$ ، $\rho = 13/6 \text{ g/cm}^3$)



(۱) $\frac{5}{6}$

(۲) $\frac{6}{5}$

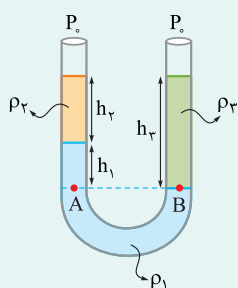
(۳) $\frac{4}{3}$

(۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه ۲

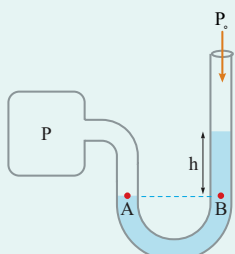
درس Box

(۱) در لوله‌های U شکل، دو نقطه هم‌تراز که در مایع یکسانی قرار دارند، فشار برابری دارند، مثال:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 + P_0 = \rho_2 g h_2 + P_0 \Rightarrow \rho_2 h_2 + \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

(۲) مانومتر: وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری فشار یک شارژ محصور (P) به کار می‌رود.

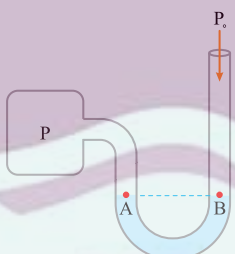


$$P = P_0 + \rho g h$$

$$P_0 + \rho g h$$

$$+ \rho g h$$

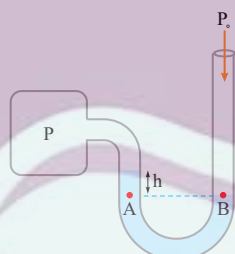
$$P_g = P - P_0$$



$$P = P_0$$

$$P_0$$

$$\text{صفر}$$



$$P + \rho g h = P_0$$

$$P_0 - \rho g h$$

$$- \rho g h$$

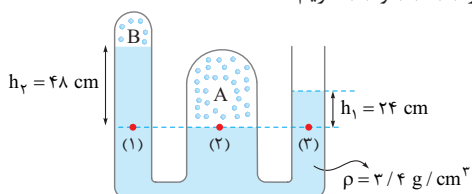
رابطه فشار:

فشار مطلق (P):

فشار پیمانه‌ای (P_g):

اختلاف فشار مطلق با فشار جو را فشار پیمانه‌ای (P_g) می‌گوییم:

گام اول: با توجه به نکات درس باکس، از برابری فشار در نقاط هم‌تراز (۱)، (۲) و (۳) داریم:



$$P_1 = P_2 \Rightarrow P_A = \rho g h_1 + P_0$$

$$P_1 = P_2 \Rightarrow P_B + \rho g h_2 = P_0 + \rho g h_1 \Rightarrow$$

$$P_B = P_0 - \rho g (h_2 - h_1)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: با توجه به این که چگالی مایع و جیوه را داریم، نسبت ارتفاع مایع به ارتفاع ستون جیوه را به دست می آوریم تا بتوانیم به راحتی محاسبات را انجام دهیم.

$$P_{\text{مایع}} = P_{\text{جیوه}} \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} g h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}} \Rightarrow \frac{\rho_{\text{مایع}}}{\rho_{\text{جیوه}}} = \frac{h_{\text{جیوه}}}{h_{\text{مایع}}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \frac{\rho_{\text{مایع}}}{\rho_{\text{جیوه}}} \times h_{\text{مایع}} = \frac{\rho_{\text{مایع}} = 3/4 \text{ g/cm}^3}{\rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \text{ g/cm}^3} \times h_{\text{مایع}} = \frac{3/4}{13/6} \times h_{\text{مایع}} = \frac{h_{\text{مایع}}}{4}$$

$$\begin{cases} h_1 = \frac{24}{4} = 6 \text{ cmHg} \\ h_2 = \frac{48}{4} = 12 \text{ cmHg} \end{cases}$$

گام سوم: اکنون فشارها را به دست می آوریم و نسبت $\frac{P_A}{P_B}$ را می گیریم:

$$P_A = \rho g h_1 + P_0 = 6 \text{ cmHg} + 66 \text{ cmHg} = 72 \text{ cmHg}$$

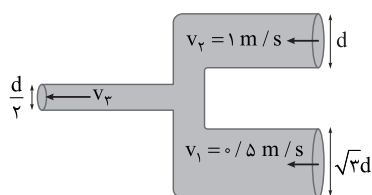
$$P_B = P_0 - \rho g (h_2 - h_1) = 66 \text{ cmHg} - 6 \text{ cmHg} = 60 \text{ cmHg}$$

$$\Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{72 \text{ cmHg}}{60 \text{ cmHg}} = \frac{6}{5}$$

ایران توننده
توشه ای برای موفقیت

۳۰

در شکل زیر، جریان آب در لوله‌ها، پایا و از سمت راست به چپ است. با توجه به قطر مقطع لوله‌ها و تندی آب در لوله‌های ورودی، تندی آب در لوله خروجی (v_3)، چند متر بر ثانیه است؟



۶ (۱)

۸ (۲)

۱۰ (۳)

۱۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

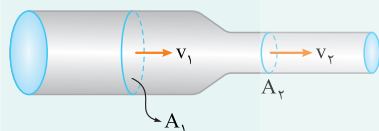
کافی است معادله پیوستگی را برای مجموعه ورودی به لوله و خروجی از لوله بنویسید.

Hint

درس Box

معادله پیوستگی:

همانند شکل زیر، اگر شاره تراکم‌ناپذیری درون لوله با جریان لایه‌ای در حال حرکت باشد، در حالت پایا، آهنگ شارش حجمی شاره از همه مقاطع لوله یکسان است:



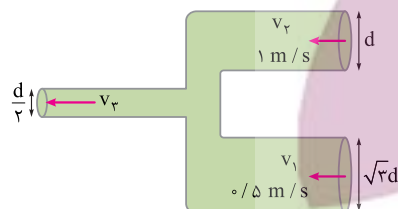
$$A_1 v_1 = A_r v_r$$

v_1 = تندی شاره هنگام عبور از مساحت A_1 (m/s)

v_r = تندی شاره هنگام عبور از مساحت A_r (m/s)

گام اول: طبق معادله پیوستگی، حاصل ضرب Av ورودی باید با Av خروجی برابر شود و با توجه به دو قسمتی بودن ورودی Av هر دو قسمت با هم جمع می‌شوند.

پاسخ خیلی تشریحی



$$A_1 v_1 + A_r v_r = A_3 v_3$$

گام دوم: مساحت هر سه مقطع را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$A_1 = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d \right)^2 = \frac{3\pi}{4} d^2$$

$$A_r = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$A_3 = \pi \left(\frac{d}{4} \right)^2 = \frac{\pi d^2}{16}$$

گام سوم: با جای‌گذاری داده‌ها خواهیم داشت:

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

$$\left[\frac{3\pi}{4} d^2 \times 0.5 \right] + \left[\frac{\pi d^2}{4} \times 1 \right] = \frac{\pi d^2}{16} v_3 \Rightarrow \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{16} v_3 \Rightarrow v_3 = 10 \text{ m/s}$$

۳۱ اگر تندی جسمی، 8 m/s افزایش یابد، انرژی جنبشی آن ۹۶ درصد تغییر می‌کند. تندی اولیه این جسم چند متر بر ثانیه است؟

- ۱۰ (۱) ۱۴ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از رابطه نسبتی انرژی جنبشی، مقدار تندی اولیه را به دست آورید.

Hint

درس Box

انرژی جنبشی:

هر چیزی که حرکت کند، انرژی دارد و انرژی وابسته به حرکت یک جسم را انرژی حرکتی یا انرژی جنبشی می‌نامیم. هر چه جسمی تندتر حرکت کند، انرژی جنبشی بیشتری دارد و هنگامی که جسم ساکن باشد، انرژی جنبشی آن صفر است، برای جسمی به جرم m که با تندی v حرکت می‌کند، انرژی جنبشی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

رابطه نسبتی انرژی جنبشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

رابطه انرژی جنبشی را به صورت نسبتی می‌نویسیم:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \xrightarrow{K_2=1/96 K_1, v_2=v_1+8} \frac{1/96 K_1}{K_1} = \left(\frac{v_1+8}{v_1}\right)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 1/4 = \frac{v_1+8}{v_1} \Rightarrow 1/4 v_1 = v_1+8$$

$$\Rightarrow v_1 = 20 \text{ m/s}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

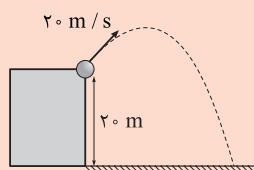
جرم اتومبیلی m و تندی آن v است. اگر 6 m/s بر تندی اتومبیل اضافه شود، انرژی جنبشی آن ۶۹ درصد افزایش می‌یابد. v چند کیلومتر بر ساعت است؟

(سوال ۷۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (فاج از کشور))

- ۳۶ (۱) ۶۰ (۲) ۷۲ (۳) ۹۰ (۴)

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

در شکل زیر، سنگی از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین با تندی 20 m/s پرتاب می‌شود. اگر از لحظه پرتاب سنگ تا لحظه برخورد آن به سطح زمین، اندازه کار نیروی مقاومت هوا از کار نیروی وزن سنگ ۸۰ درصد کم‌تر باشد، تندی برخورد سنگ به سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



(۱) $10\sqrt{3}$

(۲) $12\sqrt{3}$

(۳) $10\sqrt{5}$

(۴) $12\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) اگر جسمی به جرم m از ارتفاع h_1 تا ارتفاع h_2 جابه‌جا شود، تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی جسم از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی (J) تغییرات ارتفاع (m)

$$\Delta U = m g \Delta h = m g (h_2 - h_1)$$

جرم (kg) شتاب گرانش (N/kg)

کار نیروی وزن برابر با منفی تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی جسم است:

$$W_{mg} = -\Delta U$$

(۲) انرژی مکانیکی جسم، برابر با مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل جسم است:

$$E = K + U$$

E: انرژی مکانیکی (J)

K: انرژی جنبشی (J)

U: انرژی پتانسیل گرانشی (J)

(۳) تغییرات انرژی مکانیکی برابر با کار نیروی اتلافی است:

انرژی مکانیکی کار نیروی

ثانویه (J) اتلافی (J)

$$W_f = E_2 - E_1$$

انرژی مکانیکی اولیه (J)

گام اول: کار نیروی مقاومت هوا برابر است با تغییرات انرژی مکانیکی. اگر سطح زمین را مبدأ پتانسیل در نظر بگیریم، داریم:

$$E_2 - E_1 = W_f$$

$$U_2 + K_2 - (U_1 + K_1) = W_f \quad , \quad |W_f| = U_1 - \frac{80}{100} U_1 = \frac{20}{100} U_1 \Rightarrow W_f = -\frac{20}{100} U_1 = -\frac{20}{100} mgh_1$$

صفر

گام دوم: با جای گذاری داده‌ها، تندی برخورد سنگ به سطح زمین را محاسبه می‌کنیم:

$$0 + \frac{1}{2} m v_2^2 - (mgh_1 + \frac{1}{2} m v_1^2) = -\frac{20}{100} mgh_1 \quad \xrightarrow{h_1=20 \text{ m}, v_1=20 \text{ m/s}, g=10 \text{ m/s}^2}$$

$$\frac{1}{2} v_2^2 - (10 \times 20 + \frac{1}{2} (20)^2) = -\frac{20}{100} \times 10 \times 20 \Rightarrow \frac{v_2^2}{2} - (200 + 200) = -40$$

$$\Rightarrow \frac{v_2^2}{2} = 400 - 40 \Rightarrow v_2^2 = 720 \Rightarrow v_2 = 12\sqrt{5} \text{ m/s}$$

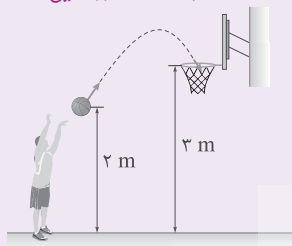


پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران توانسته
توشه‌ای برای موفقیت

در شکل زیر، توپ با تندی اولیه 8 m/s پرتاب می‌شود. اگر کار نیروی مقاومت هوا تا رسیدن توپ به سبد، $\frac{1}{8} K$ باشد، تندی توپ در لحظه ورود به سبد، چند متر بر ثانیه است؟ (K انرژی جنبشی اولیه و $g = 10 \text{ m/s}^2$ است.)

(سوال ۲۰۸ کنکور تجربی ۱۴۰۱)



(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) $4\sqrt{2}$

(۳) ۵

(۴) ۶



توان مصرفی یک پمپ آب، ۸ اسب بخار است. اگر این پمپ در هر ساعت ۵۴ m^3 آب را از عمق ۲۵ متری زمین به منبعی

در سطح زمین منتقل کند، بازده آن چند درصد است؟ ($1 \text{ hp} = ۷۵۰ \text{ W}$, $\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$)

۷۵ (۱) ۷۲/۵ (۲) ۶۲/۵ (۳) ۶۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

دانش Box

(۱) توان: در فیزیک، آهنگ انجام کار را با کمیتی به نام توان توصیف می‌کنیم. توان همانند کار و انرژی، کمیتی است نرده‌ای و به

صورت آهنگ انجام کار بیان می‌شود. یکای آن در SI وات ($\frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$) است.

کار (J) توان (W)

$$P = \frac{W}{t}$$

زمان (s)

(۲) بازده: تنها بخشی از انرژی ورودی قابل استفاده است که به آن انرژی خروجی یا کار مفید می‌گویند، نسبت انرژی خروجی به انرژی ورودی را بازده می‌نامیم.

بازده هر سامانه را برحسب درصد بیان می‌کنند که همواره عددی کوچک‌تر از ۱۰۰ است. از رابطه زیر می‌توان بازده هر سامانه را برحسب درصد محاسبه کرد.

$$\text{بازده برحسب درصد} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 = \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} \times 100$$

گام اول: توان مصرفی یک وسیله همان توان ورودی آن است و داریم:

$$P_{\text{ورودی}} = 8 \text{ hp} \times \frac{750 \text{ W}}{1 \text{ hp}} = 6000 \text{ W} \Rightarrow E = Pt = 6000 \times 3600 = 216 \times 10^5 \text{ J} \quad (\text{انرژی ورودی}) \quad \text{در مدت ۱ ساعت}$$

گام دوم: انرژی مصرف‌شده برای انتقال آب، برابر انرژی خروجی پمپ است:

$$E_{\text{خروجی}} = mgh = \rho Vgh = 1000 \times 54 \times 10 \times 25 = 135 \times 10^5 \text{ J}$$

$$\text{بازده} = \frac{E_{\text{خروجی}}}{E_{\text{ورودی}}} \times 100 = \frac{135 \times 10^5}{216 \times 10^5} \times 100 = 62.5\%$$

پاسخ خیلی تشریحی

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۳۴ دمای جسمی ۲۵۸ K است. اگر دمای این جسم ۲۵ °C افزایش یابد. دمای آن در مقیاس فارنهایت چند برابر شده است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا دماهای اولیه و ثانویه را برحسب درجه سلسیوس به دست آورید، سپس آن‌ها را به فارنهایت تبدیل کرده و به صورت نسبی بنویسید.

درس Box

مقیاس دمای:

رابطه کلون با سلسیوس به صورت زیر است:

$$T = \theta + ۲۷۳, \Delta T = \Delta \theta$$

مقیاس فارنهایت:

رابطه درجه فارنهایت (°F) و درجه سلسیوس (°C) به صورت زیر است.

$$F = \frac{9}{5}\theta + ۳۲, \Delta F = \frac{9}{5}\Delta \theta$$

گام اول: ابتدا دمای اولیه جسم را برحسب درجه سلسیوس می‌نویسیم و سپس آن را به فارنهایت تبدیل می‌کنیم:

$$T_1 = \theta_1 + ۲۷۳ \xrightarrow{T_1 = ۲۵۸ \text{ K}} \theta_1 = ۲۵۸ - ۲۷۳ = -۱۵ \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$F_1 = \frac{9}{5}\theta_1 + ۳۲ \xrightarrow{\theta_1 = -۱۵ \text{ } ^\circ\text{C}} F_1 = \frac{9}{5} \times -۱۵ + ۳۲ = ۵ \text{ } ^\circ\text{F}$$

گام دوم: حالا با توجه به مقدار افزایش دما، θ_2 را به دست می‌آوریم و سپس F_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$\theta_2 = \theta_1 + ۲۵ \xrightarrow{\theta_1 = -۱۵ \text{ } ^\circ\text{C}} \theta_2 = ۱۰ \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$F_2 = \frac{9}{5}\theta_2 + ۳۲ \xrightarrow{\theta_2 = ۱۰ \text{ } ^\circ\text{C}} F_2 = ۵۰ \text{ } ^\circ\text{F}$$

گام سوم: حالا خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{۵۰}{۵} = ۱۰$$

✓ پاسخ خیلی تشریحی

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

روی یک ورقه فلزی با ظرفیت گرمایی $C = 400 \text{ J/}^\circ\text{C}$ ، حفره‌ای وجود دارد. به این ورقه چند کیلوژول گرما بدهیم تا

مساحت حفره آن، یک درصد افزایش یابد؟ $(\alpha = 2/5 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1})$

۱۶۰ (۴)

۱۶ (۳)

۸۰ (۲)

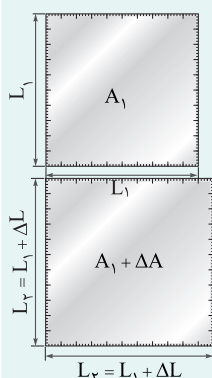
۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

(۱) انبساط سطحی:

درس Box

سطح بیشتر اجسام با افزایش دما زیاد می‌شود. تجربه نشان می‌دهد با انبساط جسم جامد، شکل آن عوض نمی‌شود و همه ابعاد آن به تناسب افزایش می‌یابد. اگر مساحت اولیه جسم جامد، A_1 و افزایش دما، ΔT باشد، افزایش مساحت جسم به اندازه ΔA خواهد بود که این افزایش مساحت به طور تقریبی از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$A_2 = A_1(1 + \alpha \Delta T) ; \Delta A = \alpha A_1 \Delta T$$

در این رابطه به α ، ضریب انبساط طولی می‌گویند.

$$\text{درصد تغییرات سطح} = \frac{\Delta A}{A_1} \times 100 = \frac{\alpha A_1 \Delta T}{A_1} \times 100 = \alpha \Delta T \times 100$$

(۲) گرما:

اگر جسمی با محیط اطراف خود، گرمای Q را مبادله کند و در اثر این مبادله گرما، دمایش به اندازه ΔT تغییر کند، Q متناسب با ΔT است که ضریب این تناسب را با C نشان می‌دهند و آن را ظرفیت گرمایی جسم می‌گویند، به طوری که داریم:

$$Q = C \Delta T$$

• اگر جسم گرما بگیرد و دمای جسم بالا رود، Q مثبت است.

• اگر جسم گرما از دست بدهد و دمای جسم پایین بیاید، Q منفی است.

گام اول: ابتدا با استفاده از رابطه انبساط سطحی، مقدار افزایش دما را به دست می‌آوریم:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{\Delta A}{A} \times 100 = 1$$

$$\frac{\alpha A_1 \Delta T}{A_1} \times 100 = 1 \xrightarrow{\alpha = 2/5 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}} 2 \times 2/5 \times 10^{-5} \times \Delta T \times 100 = 1 \Rightarrow \Delta T = 200^\circ\text{C}$$

گام دوم: حالا گرمای مورد نیاز را به دست می‌آوریم:

$$Q = C \Delta T \xrightarrow{C = 400 \text{ J/}^\circ\text{C}, \Delta T = 200^\circ\text{C}} Q = 400 \times 200 = 80000 \text{ J} = 80 \text{ kJ}$$

یک قطعه فلزی با دمای 52°C را درون ظرف عایقی در مجاورت یک قطعه یخ 50°C گرمی با دمای 10°C ، قرار می‌دهیم و دمای نهایی قطعه فلز به 10°C می‌رسد. اگر تبادل گرمایی فقط بین قطعه فلز و قطعه یخ انجام شده باشد،

ظرفیت گرمایی قطعه فلز در SI کدام است؟ $L_F = 336 \text{ kJ/kg}$ ، J 4200 $\text{kg}\cdot\text{K}$ $c_{\text{آب}} = 4200$

(۲) ۴۷۵

(۱) ۵۰۰

(۴) ۴۲۵

(۳) ۴۵۰

پاسخ: گزینه ۲

گرمای نهان ذوب - انجماد:

درس Box

گرمای منتقل شده برای تغییر حالت جسم از جامد به مایع یا از مایع به جامد، با جرم جسم نسبت مستقیم دارد. نسبت این گرما به جرم جسم را گرمای نهان ویژه ذوب می‌گویند که به اختصار، آن را گرمای نهان ذوب می‌نامیم و آن را با L_F نشان می‌دهیم.

$$Q = \pm mL_F$$

گرمای نهان ذوب به جنس جسم ماده بستگی دارد و یکای آن در SI ژول بر کیلوگرم (J/kg) است.

وقتی تغییر حالت از جامد به مایع انجام می‌شود، جسم گرما می‌گیرد، یعنی علامت Q مثبت است.

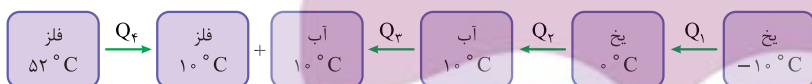
$$Q = +mL_F$$

وقتی تغییر حالت از مایع به جامد انجام شود، جسم گرما از دست می‌دهد، یعنی علامت Q منفی است.

$$Q = -mL_F$$

طبق طرح‌واره زیر داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$$

$$\Rightarrow mc_{\text{یخ}}(0 - (-10)) + mL_F + mc_{\text{آب}}(10 - 0) + C_{\text{فلز}}(10 - 52) = 0 \Rightarrow \frac{c_{\text{آب}}}{L_F} = \frac{c_{\text{یخ}}}{L_F} \Rightarrow \frac{4200}{336000} = \frac{c_{\text{یخ}}}{336000}$$

$$= 0 / 0.5 \times \frac{C}{4} \times 10 + 0 / 0.5 \times 10 \times C - 4200 C_{\text{فلز}} = 0$$

$$\Rightarrow 4200(0 / 25 + 4 + 0 / 5) = 4200 C_{\text{فلز}} \Rightarrow C_{\text{فلز}} = 475 \text{ J/K}$$

ایران توشه ای برای موفقیت

۳۷ دمای گاز درون یک کپسول برابر با 127°C و فشار پیمانه‌ای آن 5 cmHg است. در حجم ثابت، دمای گاز را چند کلوین

افزایش دهیم تا فشار پیمانه‌ای آن، 10 برابر شود؟ ($P_0 = 75\text{ cmHg}$)

- | | |
|---------|---------|
| ۵۵۰ (۲) | ۶۲۵ (۱) |
| ۲۲۵ (۴) | ۲۵۰ (۳) |

پاسخ: گزینه ۴

کافی است رابطه نسبتی مقدار معینی گاز کامل در حجم ثابت (رابطه گی لوساک) را بنویسید.

Hint

قانون گی لوساک:

درس Box

بررسی گاز در حجم ثابت:

اگر حجم مقدار معینی از یک گاز کامل، ثابت نگه داشته شود، فشار آن با دما (برحسب کلوین) متناسب است.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

با استفاده از فشار پیمانه‌ای گاز درون کپسول، فشار مطلق آن را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$P_1 = P_0 + P_g = 75 + 5 = 80\text{ cmHg}$$

$$P_2 = P_0 + 10 \cdot P_g = 75 + 50 = 125\text{ cmHg}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad T_1 = 273 + 127 = 400\text{ K} \quad \rightarrow \quad \frac{80\text{ cmHg}}{125\text{ cmHg}} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow T_2 = 625\text{ K}$$

$$\Rightarrow \Delta T = 625 - 400 = 225\text{ K}$$

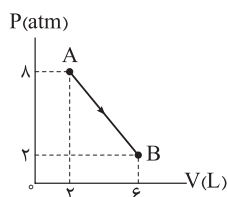
دمای گاز درون یک کپسول، صفر درجه سلسیوس و فشار پیمانه‌ای گاز نیز صفر است. در حجم ثابت، دمای گاز را به آرامی به چند درجه سلسیوس برسانیم تا فشار پیمانه‌ای آن برابر 10 سانتی‌متر جیوه شود؟ ($P_0 = 75\text{ cmHg}$)

(سؤال ۷۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

- | | |
|------------|------------|
| ۳۶ / ۴ (۲) | ۱۷ / ۲ (۱) |
| ۶۴ / ۶ (۴) | ۵۸ / ۳ (۳) |

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

نمودار $P-V$ مقدار معینی گاز کامل در طی فرایند AB به شکل زیر است. اگر انرژی درونی گاز در نقطه A برابر 4800 J باشد، در این فرایند، گاز چند ژول گرما و چگونه مبادله کرده است؟



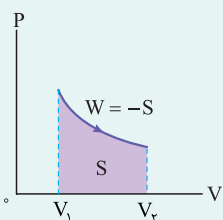
- (۱) 800 ، دریافت کرده است.
- (۲) 800 ، از دست داده است.
- (۳) 3200 ، دریافت کرده است.
- (۴) 3200 ، از دست داده است.

پاسخ: گزینه ۱

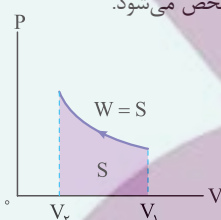
درس Box

(۱) کار انجام شده توسط گاز در نمودار $P-V$:

- اندازه کار انجام شده برابر مساحت بین نمودار $(P-V)$ و محور V است، $(|W| = S)$.
- علامت کار هم با توجه به انبساط یا تراکم دستگاه مشخص می شود.



($\uparrow$: حجم $\Rightarrow W < 0$)



($\downarrow$: حجم $\Rightarrow W > 0$)

(۲) انرژی درونی (U):

- مجموع انرژی های جنبشی و پتانسیل ذرات یک ماده، انرژی درونی آن نامیده می شود و با (U) نمایش داده می شود.
- انرژی درونی گازهای آرمانی (با جرم ثابت) فقط تابع دمای مطلق گاز است و با آن رابطه مستقیم دارد. به این معنا که با افزایش دمای گاز، انرژی درونی آن نیز به طور متناسب افزایش پیدا می کند. یعنی:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{\Delta U}{U_1} = \frac{\Delta T}{T_1}, \quad \frac{\Delta U}{U_2} = \frac{\Delta T}{T_2}, \quad PV = nRT \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1}$$

(۳) قانون اول ترمودینامیک:

قانون اول ترمودینامیک در واقع همان قانون پایستگی انرژی است، با در نظر گرفتن این که گرما نیز صورتی از انرژی است، اگر دستگاه در فرایندی گرمای Q را بگیرد و کار W روی آن انجام شود، تغییر انرژی درونی آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta U = W + Q$$

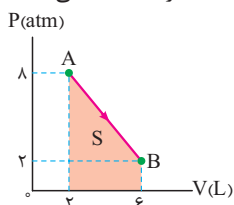
اگر W کار دستگاه روی محیط در نظر گرفته شود، با توجه به این که در هر فرایند ترمودینامیکی، کار دستگاه روی محیط (W') قرینه کار محیط روی دستگاه است، $W' = -W$.

گام اول: ابتدا انرژی درونی گاز در نقطه انتهای فرایند و تغییر انرژی درونی گاز در فرایند را به دست می آوریم:

$$\frac{U_B}{U_A} = \frac{P_B V_B}{P_A V_A} \Rightarrow \frac{U_B}{4800} = \frac{6 \times 2}{8 \times 2}$$

$$\Rightarrow U_B = 3600 \Rightarrow \Delta U = U_B - U_A = 3600 - 4800 = -1200 \text{ J}$$

گام دوم: می دانیم مساحت زیر نمودار $P-V$ برابر با کار انجام شده است. فرایند انبساطی است، پس علامت کار دستگاه منفی است.



$$S = |W|$$

$$W = -S = -\frac{(2+8) \times 4}{2} \times 10^{-3} \times 10^5 = -2000 \text{ J}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام سوم: اکنون با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، گرمای مبادله شده را به دست می‌آوریم:

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow -1200 = -2000 + Q$$

$\Rightarrow Q = +800 \text{ J} \Rightarrow$ محیط 800 J گرما به دستگاه داده است.



مقدار معینی گاز کامل با فشار و حجم معین در اختیار داریم. در آزمایش A، حجم این گاز را در طی فرایند هم‌دما نصف می‌کنیم. در آزمایش B، حجم همان گاز اولیه را به صورت بی‌دررو نصف می‌کنیم. دمای نهایی گاز، فشار نهایی گاز و کار انجام‌شده روی گاز به ترتیب در کدام آزمایش بزرگ‌تر است؟

(۲) A، A، B

(۱) B، B، A

(۴) B، B، B

(۳) A، A، A

پاسخ: گزینه ۴

نمودار ($P - V$) هر دو فرایند را رسم کنید و به سؤالات پاسخ دهید.

Hint

درس‌Box

فرایند تراکم هم‌دما:

- گاز با منبع گرما در تماس بوده و مبادله گرما سبب می‌شود که دمای گاز ثابت بماند.
- با کاهش حجم، فشار گاز افزایش می‌یابد.

فرایند تراکم بی‌دررو:

- گرمای مبادله‌شده صفر است.

- محیط روی دستگاه کار انجام می‌دهد.

- چون $W > 0$ ، پس:

$$\Delta U = W$$

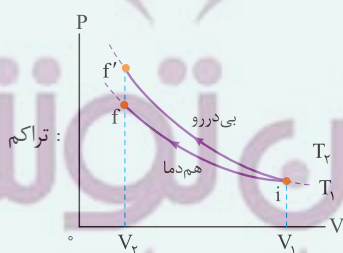
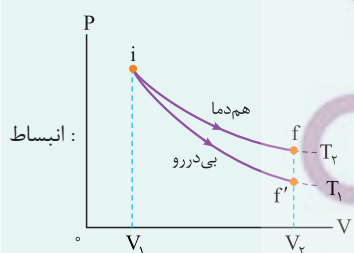
$$\Delta U > 0 \Rightarrow \Delta T > 0 \Rightarrow T_f > T_i$$

بنابراین، نمودار بی‌دررو همیشه شیب تندتری نسبت به نمودار هم‌دما دارد؛ زیرا در تراکم بی‌دررو، افزایش فشار بیشتر از فرایند هم‌دما است.

کمی متفاوت‌تر ...

به طور کلی شیب منحنی‌های بی‌دررو بیشتر از منحنی‌های هم‌دما است.

یعنی به ازای یک تغییر حجم معین، تغییر فشار فرایند بی‌دررو بیشتر از تغییر فشار فرایند هم‌دما است.

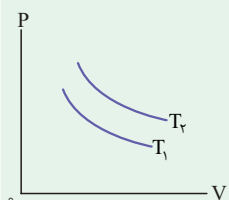


نتیجه کلی:

نمودار بی‌دررو در تراکم، بالاتر از فرایند هم‌دما و در انبساط پایین‌تر از فرایند هم‌دما قرار می‌گیرد.

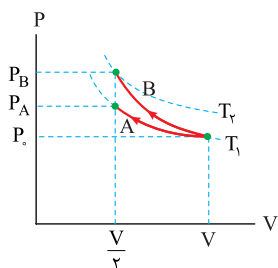
اگر دو فرایند هم‌دما در یک دستگاه مختصات $P - V$ رسم شوند، نموداری که بالاتر قرار می‌گیرد، دمای بیشتری دارد.

نکته



$$T_f > T_i$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به نکات درس باکس و رسم نمودار $P - V$ هر دو فرایند داریم:



$$T_2 > T_1$$

فرایند A : همدم

فرایند B : بی دررو

بالارفتن در منحنی‌های همدم نشان می‌دهد که $T_B > T_A$ است.

مساحت زیر نمودار بی دررو بیشتر است و چون فرایند از نوع تراکم است، $W > 0$ است. $W_B > W_A \Leftarrow$

شیب در نمودار بی دررو بیشتر است $P_B > P_A \Leftarrow$

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

یک ماشین گرمایی درون سوز با بازده 20° درصد، در هر ثانیه 50° چرخه انجام می دهد و در هر چرخه، 4 kJ کار تحویل می دهد. اگر گرمای حاصل از هر گرم سوخت $5 \times 10^4 \text{ J/g}$ باشد، ماشین در هر دقیقه چند گرم سوخت مصرف می کند؟

(۲) 120

(۱) 96

(۴) 1200

(۳) 960

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) بازده ماشین گرمایی (η)، برابر با نسبت کار انجام شده توسط دستگاه به گرمای داده شده به آن است.

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow \eta = \frac{Q_H - |Q_L|}{Q_H} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H}$$

با توجه به قانون اول ترمودینامیک (قانون پایستگی انرژی) برای یک ماشین گرمایی داریم:

$$Q_H = |Q_L| + |W|$$

و چون Q_H را از محیط می گیرد و W و Q_L را به محیط می دهد، پس $Q_H > 0$ ، $Q_L < 0$ و $W < 0$ است.

(۲) قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی:

ممکن نیست دستگاه چرخه ای را بپیماید که در طی آن مقداری گرما را از منبع دمای بالا جذب و تمام آن را به کار تبدیل کند.

گام اول: ابتدا Q_H هر چرخه را به دست می آوریم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow Q_H = \frac{|W|}{\eta} = \frac{4}{0.2} = 20 \text{ kJ}$$

گام دوم: حالا گرمای دریافتی توسط ماشین را در هر ثانیه و هر دقیقه به دست می آوریم:

$$Q_{\text{ثانیه}} = 20 \times 50 = 1000 \text{ kJ}$$

$$Q_{\text{دقیقه}} = 60 \times 1000 = 60000 \text{ kJ} = 6 \times 10^7 \text{ J}$$

گام سوم: جرم سوخت مصرفی در هر دقیقه را محاسبه می کنیم:

$$\text{جرم سوخت} = \frac{6 \times 10^7 \text{ J}}{5 \times 10^4 \text{ J/g}} = 1200 \text{ g}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یک ماشین گرمایی درون سوز در هر چرخه $8/00 \text{ kJ}$ گرما از سوزاندن سوخت دریافت می کند و $42/00 \text{ kJ}$ کار تحویل می دهد. گرمای حاصل از سوخت $5/0 \times 10^4 \text{ J/g}$ است و ماشین در هر ثانیه $40/0^\circ$ چرخه را می پیماید. کمیت های زیر را حساب کنید.

(فیزیک (۱) - سوال ۱۴ صفحه ۱۴۹ کتاب درسی)

(الف) بازده ماشین، (ب) سوخت مصرف شده در هر چرخه و (پ) توان ماشین.

توشه ای برای موفقیت

شیمی دهم

۴۱

در میان ۷ ایزوتوپ هیدروژن، در اتم a ایزوتوپ، شمار نوترون‌ها از شمار پروتون‌ها بیشتر و در اتم b ایزوتوپ، شمار نوترون‌ها با شمار پروتون‌ها برابر است. حاصل $(a - b)$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



هیدروژن دارای ۷ ایزوتوپ است که از بین آن‌ها، ۳ ایزوتوپ، طبیعی و ۴ ایزوتوپ، ساختگی هستند.



در بین همه اتم‌ها، ${}^1_1\text{H}$ تنها اتمی است که نوترون ندارد و عدد اتمی آن با عدد جرمی‌اش برابر است.

در ایزوتوپ ${}^2_1\text{H}$ ، شمار نوترون‌ها $(n = 1)$ با شمار پروتون‌ها $(p = 1)$ برابر است $(b = 1)$.

در ایزوتوپ‌های ${}^3_1\text{H}$, ${}^4_1\text{H}$, ${}^5_1\text{H}$, ${}^6_1\text{H}$, ${}^7_1\text{H}$ ، شمار نوترون بیشتر از ۱ است؛ بنابراین در این ایزوتوپ‌ها، شمار نوترون‌ها از شمار پروتون‌ها بیشتر می‌باشد $(a = 5)$ ، پس $a - b$ برابر ۴ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ایران تونلنه
توشه ای برای موفقیت

کدام مورد درست است؟ ۴۲

- (۱) انرژی همانند ماده، در نگاه ماکروسکوپی پیوسته است.
- (۲) با استفاده از رنگ شعله سدیم سولفات، رنگ شعله لیتیم سولفات نیز قابل پیش‌بینی است.
- (۳) طیف نشری خطی گونه‌های تک‌الکترونی مانند ${}^1\text{H}$ ، ${}^2\text{Li}^+$ و ${}^2\text{He}^+$ یکسان است.
- (۴) با توجه به عدم موفقیت بور در توجیه طیف نشری خطی هیدروژن، ساختار لایه‌ای توسط دانشمندان برای اتم پیشنهاد شد.

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

انرژی نیز همانند ماده در نگاه ماکروسکوپی، پیوسته اما در نگاه میکروسکوپی، گسسته یا کوانتومی است. بررسی گزینه‌های نادرست:

- گزینه (۲): نه! رنگ شعله لیتیم و همه ترکیب‌های آن، سرخ و رنگ شعله سدیم و همه ترکیب‌های آن، زرد است.
- گزینه (۳): از اون جایی که انرژی لایه‌های الکترونی اطراف هسته هر اتم، به عدد اتمی آن (Z) وابسته است، انرژی لایه‌ها و تفاوت انرژی میان آن‌ها در اتم عنصرهای گوناگون متفاوت است، در نتیجه هر عنصر، طیف نشری خطی مخصوص به خود را دارد.
- گزینه (۴): اگر چه مدل بور با موفقیت توانست طیف نشری خطی هیدروژن را توجیه کند اما توانایی توجیه طیف نشری خطی دیگر عنصرها را نداشت.

ایران تونلنه
توشه ای برای موفقیت

کدام مطلب درست است؟ ۴۳

- (۱) اگر اتم عنصری دارای ۱۷ الکترون با $l = 1$ باشد، در آرایش الکترونی فشرده آن از نماد $[Ar]$ استفاده می‌شود.
- (۲) تمامی عنصرهایی که اتم آن‌ها حداکثر دارای ۱۰ الکترون با $l = 2$ هستند، در دوره چهارم جدول دوره‌ای واقع‌اند.
- (۳) شمار الکترون‌ها در سومین لایه الکترونی اتم هیچ دو عنصر دسته d دوره چهارم، نمی‌تواند با هم یکسان باشد.
- (۴) اگر در آرایش الکترونی فشرده اتم عنصر D از $[Ar]$ استفاده شود، شمار الکترون‌های با $l = 1$ در اتم D به یقین با اتم Ar متفاوت است.

پاسخ: گزینه ۱

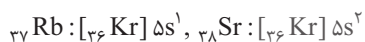
✓ پاسخ خیلی تشریحی

عدد کوانتومی $l = 1$ مربوط به زیرلایه‌های p است؛ بنابراین در آرایش الکترونی اتم عنصری دارای ۱۷ الکترون با $l = 1$ ، زیرلایه‌های $4p^5$ و $3p^6$ وجود دارد؛ در نتیجه این عنصر متعلق به دوره چهارم جدول تناوبی است و برای نوشتن آرایش الکترونی فشرده آن باید از گاز نجیب آرگون استفاده کرد:



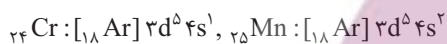
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۲): اولین و دومین عنصر دوره پنجم نیز دارای ۱۰ الکترون با $l = 2$ ($3d^1$) هستند:



از عدد اتمی ۳۹ به بعد، زیرلایه $4d$ نیز اشغال می‌شود و شمار الکترون‌ها با $l = 2$ ، بیشتر از ۱۰ خواهد شد.

گزینه (۳): مثلاً در هر دو اتم Cr و Mn ، لایه سوم، ۱۳ الکترونی ($3s^2 3p^6 3d^5$) است:



گزینه (۴): در آرایش الکترونی فشرده اتم عنصرهای دوره چهارم، از گاز نجیب آرگون استفاده می‌شود. برای ۱۲ عنصر اول دوره چهارم (از عدد اتمی ۱۹ تا ۳۰) مانند Ar ، زیرلایه‌های $3p$ و $3p$ تنها زیرلایه‌های با $l = 1$ هستند:



ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

کدام مورد نادرست است؟

۴۴

- (۱) آرگون گازی بی‌رنگ، بی‌بو و غیرسمی است که در پتروشیمی شیراز از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع با خلوص بسیار زیاد تهیه می‌شود.
- (۲) هلیوم از واکنش‌های هسته‌ای در ژرفای زمین تولید می‌شود و حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را تشکیل می‌دهد.
- (۳) تهیه هلیوم از هوا، مقرون‌به‌صرفه‌تر از تهیه آن از تقطیر جزءبه‌جزء گاز طبیعی است.
- (۴) در فرایند تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع، آرگون دومین گاز خارج‌شده از ستون تقطیر است.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مقدار هلیوم در کره زمین خیلی کم است، ولی مقدار این گاز در لایه‌های زیرین پوسته زمین، بیشتر از مقدار آن در هوا است. به همین دلیل منابع زمینی هلیوم، از هوا، سرشارتر و برای تولید هلیوم در مقیاس صنعتی، مناسب‌ترند، به عبارت دیگر، با توجه به بالاتر بودن درصد حجمی هلیوم در گاز طبیعی (۷٪) نسبت به هوا (۰/۰۰۵٪)، برای تهیه گاز هلیوم، تقطیر جزءبه‌جزء گاز طبیعی مقرون‌به‌صرفه‌تر است.

در مورد گزینه (۴) می‌دانید که هر چه نقطه جوش ماده‌ای پایین‌تر باشد، در ستون تقطیر زودتر از هوای مایع جدا می‌شود:

$N_2 < Ar < O_2$: مقایسه نقطه جوش

$-196^\circ C \quad -186^\circ C \quad -183^\circ C$

ترتیب جداشدن گازها: $N_2 \rightarrow Ar \rightarrow O_2$

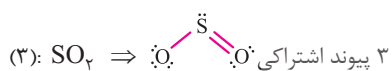
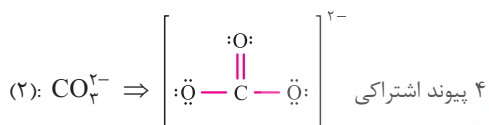
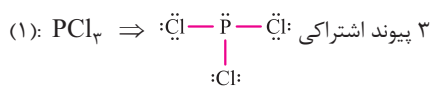
ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار لوویس کدام گونه با سه گونه دیگر متفاوت است؟

- (۱) فسفر تری کلرید
(۲) یون کربنات
(۳) گوگرد دی اکسید
(۴) کربن مونوکسید

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ساختار لوویس گونه‌های داده شده به صورت زیر است:



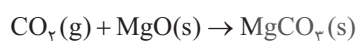
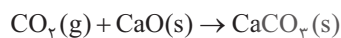
کدام مورد دربارهٔ شیمی سبز، نادرست است؟

- (۱) برای به دام انداختن کربن دی‌اکسید تولیدشده در نیروگاه‌ها و مراکز صنعتی، آن را با اکسید اسیدی واکنش می‌دهند.
- (۲) سوخت‌های سبز از پسماندهای گیاهانی مانند سویا، نیشکر و دانه‌های روغنی به دست می‌آیند.
- (۳) پلاستیک‌های سبز، پلیمرهای زیست‌تخریب‌پذیرند که بر پایهٔ مواد گیاهی مثل نشاسته ساخته می‌شوند.
- (۴) میدان‌های قدیمی گاز و چاه‌های قدیمی نفت و همچنین سنگ‌های متخلخل در زیر زمین، جاهای مناسبی برای دفن گاز CO_2 هستند.

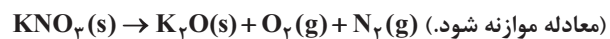
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای به دام‌انداختن CO_2 تولیدشده در نیروگاه‌ها، آن را با اکسیدهای MgO و CaO واکنش می‌دهند. به طور کلی، اکسیدهای فلزی، اکسیدهای بازی محسوب می‌شوند:



در نمونه‌ای از پتاسیم نیترات، ۲۰ گرم اکسیژن وجود دارد. از تجزیه این نمونه مطابق معادله زیر، به تقریب چند لیتر گاز نیتروژن در شرایط STP تولید می‌شود؟
(N = ۱۴, O = ۱۶, K = ۳۹ : g.mol⁻¹)



۳ / ۳۶ (۲)

۲ / ۳۳ (۱)

۵ / ۸۰ (۴)

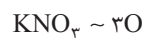
۴ / ۶۷ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: موازنه معادله واکنش:



گام دوم: محاسبه تعداد مول KNO_3 به کمک جرم اکسیژن موجود در آن:



$20 \text{ g O} \times \frac{1 \text{ mol O}}{16 \text{ g O}} \times \frac{1 \text{ mol KNO}_3}{3 \text{ mol O}} = \frac{5}{12} \text{ mol KNO}_3$

گام سوم: محاسبه حجم گاز نیتروژن به کمک تعداد مول KNO_3 :

$\frac{5}{12} \text{ mol KNO}_3 \times \frac{2 \text{ mol N}_2}{4 \text{ mol KNO}_3} \times \frac{22.4 \text{ L N}_2}{1 \text{ mol N}_2} = \frac{56}{12} = \frac{14}{3} \approx 4.67 \text{ L N}_2$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

در نمونه‌ای از کلسیم کلرید، مجموع شمار یون‌ها برابر $۴۵/۱۵ \times ۱۰^{۲۲}$ است. از واکنش کامل این نمونه با ۲ لیتر

محلول نقره نیترات، چند گرم رسوب تشکیل می‌شود و غلظت مولی محلول نقره نیترات چند مولار است؟

$$(Cl = ۳۵/۵, Ag = ۱۰۸ : g.mol^{-1})$$

$$۰/۲۵ - ۱۴۳/۵ (۲)$$

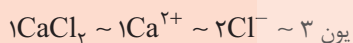
$$۰/۲۵ - ۷۱/۷۵ (۱)$$

$$۰/۵ - ۱۴۳/۵ (۴)$$

$$۰/۵ - ۷۱/۷۵ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا مقدار مول کلسیم کلرید ($CaCl_2$) را محاسبه می‌کنیم:



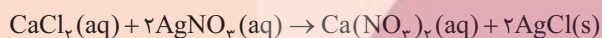
$$? \text{ mol } CaCl_2 = ۴۵/۱۵ \times ۱۰^{۲۲} \times \frac{۱ \text{ mol یون}}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}} \times \frac{۱ \text{ mol } CaCl_2}{۳ \text{ mol یون}} = ۰/۲۵ \text{ mol}$$

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد}}{\text{ضریب} \times ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}} = \frac{x}{۱} = \frac{۴۵/۱۵ \times ۱۰^{۲۲}}{۳ \times ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}} \Rightarrow x = ۰/۲۵ \text{ mol}$$

استفاده از کسر تناسب:

په‌چور دیگه

گام دوم: معادله واکنش $CaCl_2$ با $AgNO_3$ به صورت زیر است:



گام سوم: جرم $AgCl$ تولیدشده و غلظت مولی $AgNO_3$ مصرف‌شده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$? g AgCl = ۰/۲۵ \text{ mol } CaCl_2 \times \frac{۲ \text{ mol } AgCl}{۱ \text{ mol } CaCl_2} \times \frac{۱۴۳/۵ g AgCl}{۱ \text{ mol } AgCl} = ۷۱/۷۵ g$$

$$? \text{ mol } AgNO_3 = ۰/۲۵ \text{ mol } CaCl_2 \times \frac{۲ \text{ mol } AgNO_3}{۱ \text{ mol } CaCl_2} = ۰/۵ \text{ mol}$$

$$M_{AgNO_3} = \frac{\text{مول } AgNO_3}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۰/۵}{۲} = ۰/۲۵ \text{ mol.L}^{-۱}$$

استفاده از کسر تناسب:

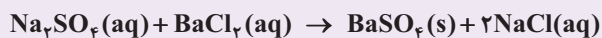
په‌چور دیگه

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{۰/۲۵}{۱} = \frac{x}{۲ \times ۱۴۳/۵} = \frac{y \times ۲}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۷۱/۷۵ g \\ y = ۰/۲۵ \text{ mol.L}^{-۱} \end{cases}$$

اگر مجموع غلظت مولی یون‌ها در یک نمونه محلول سدیم سولفات، برابر $۰/۱۲$ باشد، چند میلی‌لیتر از آن در واکنش

با مقدار کافی محلول باریم کلرید، $۱۳/۹۸$ گرم رسوب تشکیل می‌دهد؟ (سوال ۸۶ کنکور ۱۴۰۴ - خارج از کشور)

$$(Ba = ۱۳۷, S = ۳۲, O = ۱۶ : g.mol^{-1})$$



$$۷۵۰ (۲)$$

$$۵۰۰ (۱)$$

$$۳۰۰۰ (۴)$$

$$۱۵۰۰ (۳)$$

۴۹

معادله انحلال پذیری سدیم نیترات بر حسب دما به صورت $S = \circ / \lambda \theta + ۷۲$ است. دمای ۲۷° گرم محلول سیرشده این نمک را از $۳۵^{\circ}C$ به چند درجه سلسیوس برسانیم تا جرم محلول باقی مانده پس از جداسازی رسوب، برابر با ۲۴۳ گرم باشد؟

- ۱۰ (۴) ۱۵ (۳) ۲۵ (۲) ۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

جرم محلول از ۲۷° به ۲۴۳ گرم رسیده است، پس طی فرایند کاهش دما، $۲۷ - ۲۴۳ = ۲۷$ گرم نمک رسوب کرده است:

$$S_1 = (\circ / \lambda \times ۳۵) + ۷۲ = ۱۰۰ \text{ g} \Rightarrow \text{جرم محلول سیرشده به ازای } ۱۰۰ \text{ گرم آب} = ۱۰۰ + ۱۰۰ = ۲۰۰ \text{ g}$$

فرض می کنیم انحلال پذیری نمک در دمای نهایی برابر S_2 باشد:

$$S_1 - S_2 = \text{جرم رسوب به ازای } ۱۰۰ \text{ گرم آب}$$

$$\text{رسوب } ۲۷ \text{ g} = \frac{\text{رسوب } (۱۰۰ - S_2) \text{ g}}{\text{محلول سیرشده } ۲۰۰ \text{ g}} \times \text{محلول سیرشده } ۲۷^{\circ} \text{ g}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ - S_2 = ۲۰ \Rightarrow S_2 = ۸۰$$

حالا به کمک معادله انحلال پذیری، باید ببینیم در چه دمایی، انحلال پذیری نمک برابر ۸۰ است:

$$S = \circ / \lambda \theta + ۷۲ \Rightarrow ۸۰ = \circ / \lambda \theta + ۷۲ \Rightarrow \circ / \lambda \theta = ۸ \Rightarrow \theta = ۱۰^{\circ}C$$

ایران تونلنه
توشه ای برای موفقیت

اگر در شکل‌های زیر، غشای نیمه‌تراوا فقط به مولکول‌های آب اجازه عبور دهد، در کدام مورد، غلظت محلول در سمت چپ غشا به مرور کاهش می‌یابد؟ ($H = 1, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1}$)



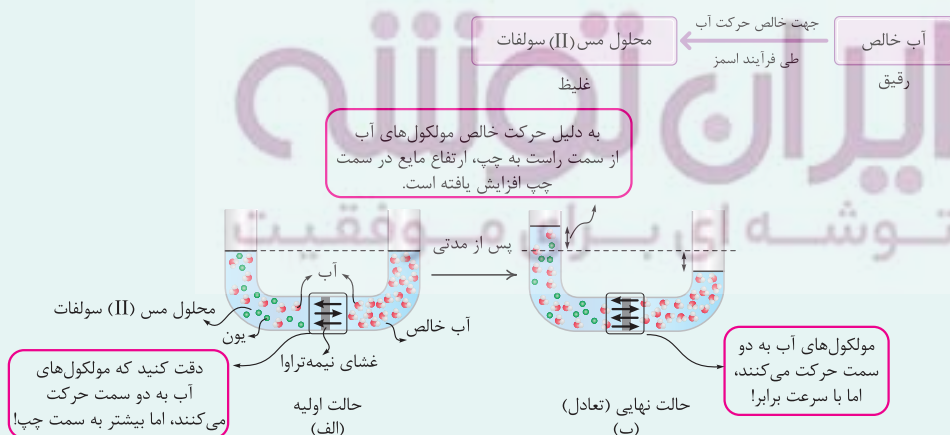
پاسخ: گزینه ۴

اسمز و اسمز معکوس

درس Box

اسمز (گذرندگی): به زبان ساده، اسمز یعنی حرکت مولکول‌های آب از محیط رقیق‌تر (پرآب‌تر) به محیط غلیظ‌تر (کم‌آب‌تر) از طریق یک غشای نیمه‌تراوا! اگر بفوایم اسمز رو خیلی شیک‌تر تعریف کنیم، باید بگیم که: «به حرکت خودبه‌خودی مولکول‌های حلال از طریق یک غشای نیمه‌تراوا از یک محلول با غلظت پایین‌تر به محلولی با غلظت بالاتر (یا از سمت حلال خالص به سمت محلول)، اسمز یا گذرندگی می‌گویند.»

فرض کنید مطابق شکل زیر «الف»، حجم‌های برابری از آب مقطر و محلول مس (II) سولفات به کمک یک غشای نیمه‌تراوا از هم جدا شده‌اند. محلول سمت چپ به دلیل حل‌شونده‌ای که دارد، نسبت به مایع سمت راست (آب خالص)، کم‌آب‌تر و غلیظ‌تر است؛ بنابراین به دلیل پدیده اسمز، مولکول‌های آب به طور عمده از جایی که تعداد مولکول‌های بیشتری دارد (آب خالص) به جایی که تعداد مولکول‌های کم‌تری دارد (محلول مس (II) سولفات) وارد می‌شود؛ در نتیجه پس از مدتی از شکل «الف» می‌رسیم به شکل «ب»!



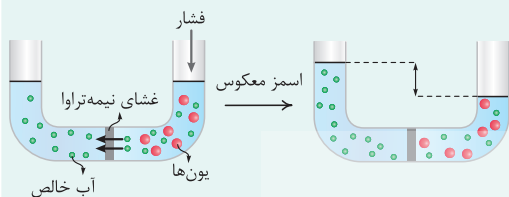
اسمز وارونه (معکوس):

خواندیم که در فرایند اسمز، مولکول‌های آب به طور خودبه‌خودی از محلول رقیق‌تر وارد محلول غلیظ‌تر می‌شوند. در فرایندی به نام اسمز معکوس، همان‌طور که از اسمش معلوم، اتفاقی برخلاف فرایند اسمز رخ می‌دهد؛ یعنی آب از محلول غلیظ‌تر وارد محلول رقیق‌تر می‌شود. از اون جایی که این فرایند برخلاف قاعده کلی و طبیعی است، باید زور بالا سرش باشه! به عبارت دیگر اسمز معکوس با اعمال فشار انجام خواهد شد.

اسمز معکوس

فرایندی غیر خودبه‌خودی است که طی آن با اعمال فشار بر سطح محلول غلیظ‌تر، مولکول‌های آب برخلاف روند طبیعی (فرایند اسمز) از محلول غلیظ‌تر وارد محلول رقیق‌تر می‌شوند.

مثال: اگر حجم‌های برابری از آب خالص و آب‌نمک با یک غشای نیمه‌تراوا از هم جدا شده باشند، با اعمال فشار بر محلول آب‌نمک، مولکول‌های آب از محلول آب‌نمک به سمت آب خالص رفته و حجم آب خالص افزایش می‌یابد. **واضح و مبرهن است** که با جابه‌جایی مولکول‌های آب، محلول غلیظ اولیه به مرور غلیظ‌تر می‌شود.



بررسی گزینه‌ها:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): با ایجاد فشار بر محلول سمت چپ، آب از سمت چپ به سمت راست جابه‌جا می‌شود، با خروج آب از محلول سمت چپ، این محلول غلیظ‌تر می‌شود.

گزینه (۲): غلظت محلول سمت چپ کمتر از غلظت محلول سمت راست است؛ بنابراین آب از سمت چپ به سمت راست جابه‌جا می‌شود؛ بنابراین با گذشت زمان، غلظت محلول سمت راست، کاهش و غلظت محلول سمت چپ، افزایش می‌یابد.

گزینه (۳): محلول سیرنشده شکر نسبت به محلول سیرشده آن، غلظت کم‌تری دارد؛ در نتیجه آب از سمت چپ به سمت راست جابه‌جا خواهد شد و غلظت محلول سمت چپ با گذشت زمان افزایش می‌یابد.

گزینه (۴): ابتدا باید غلظت محلول سمت راست را به مول بر لیتر تبدیل کنیم:

$$40 \frac{\text{g}}{\text{L}} \times \frac{1 \text{ mol}}{40 \text{ g NaOH}} = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$

بنابراین غلظت محلول سمت راست کمتر از غلظت محلول سمت چپ است و آب از سمت راست به سمت چپ جابه‌جا می‌شود؛ بدین ترتیب با ورود آب به محلول سمت چپ، این محلول رقیق‌تر شده و غلظت آن کاهش می‌یابد.

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت