پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله پنجم
۱۴۰۵-۰۶	۱۴۰۵/مهر/۲۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	مازیار احمدی‌ناو ـ کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ بابک سادات ـ علی شهرابی مصطفی کرمی ـ محمد گودرزی ـ سروش موئینی ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ حمید گلزاری ـ سید محمدرضا حسینی‌فرد ـ کیوان صارمی ـ صبا مهدوی
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	آرین تفضلی‌زاده ـ سعید قندچی ـ رسول محسنی‌منش ـ سروش موئینی
فیزیک	علیرضا جباری ـ علیرضا جعفری‌آثار ـ هادی حمزه‌پور ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی ـ علی غضنفری احسان محمدی ـ علی محمدی ـ مصطفی واثقی‌پور
شیمی	روح‌الله حاجی سلیمانی ـ وحید فارسیان ـ علی فرزادتبار ـ یاسر عبداللهی ـ محمد عظیمیان زواره مهدیس محبت‌پناه

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	ناظر علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل‌زاده سروش موئینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	سعید قندچی	سروش موئینی	سروش موئینی	عباس حسینی	مریم نظری منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری ماهان فنی‌فر
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری محمدجواد سورچی	علیرضا جباری هادی نجفی	علیرضا جعفری‌آثار پوریا علاقمند مدیا عیدی ادریس محمدی ابوالفضل امیر محمودی انزابی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	پارسا فراهانی مرتضی نصیرزاده	محمدمهدی کریمیان آرین احساندوست عماد ربیعی علیرضا رفتاری مهدیس محبت‌پناه

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجان‌پور

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۶

Azmoonkheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ عادل حسینی ـ مینا کریم‌زاده

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ زهرا صفری الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری ـ محیا غنی‌فرد ساناز فلاحی ـ نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخائی ـ الهام سهرابی طاهره صادق‌نژاد ـ مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند ـ مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

Azmoonkheilisabz.com

۱ دامنهٔ تابع f، بازهٔ $[-۲,۲]$ است. دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(x-۱)+f(x+۱)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

انتقال نمودارها:

	$k>۰$	$k<۰$
افقی	$y=f(x-k)$ نمودار تابع f را $\|k\|$ واحد به راست منتقل می‌کنیم.	$y=f(x-k)$ نمودار تابع f را $\|k\|$ واحد به چپ منتقل می‌کنیم.
عمودی	$y=f(x)+k$ نمودار تابع f را $\|k\|$ واحد به بالا می‌بریم.	$y=f(x)+k$ نمودار تابع f را $\|k\|$ واحد به پایین می‌بریم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا دامنهٔ توابع $y=f(x-۱)$ و $y=f(x+۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=f(x-۱): \ y=f(x) \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} D_۱=[-۱,۳] \\ y=f(x+۱): \ y=f(x) \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} D_۲=[-۳,۱] \end{cases}$$

گام دوم: حالا دامنهٔ تابع g را به دست می‌آوریم:

$$D_g=D_۱\cap D_۲=[-۱,۱]$$

این بازه شامل ۳ عدد صحیح است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

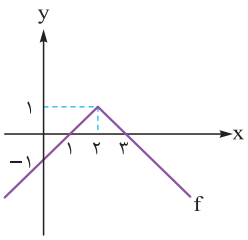
۲ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=1-|x-2|$ مفروض است. نمودار کدام تابع از ناحیهٔ اول دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $y=f(x+2)$
۲) $y=f(x+3)$
۳) $y=f(x)+2$
۴) $y=f(x)+3$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

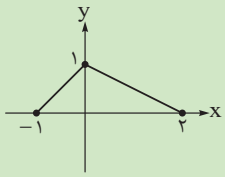


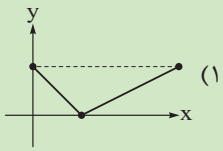
گام دوم: برای این‌که نمودار حاصل از ناحیهٔ اول دستگاه مختصات نگذرد، لازم است که نمودار تابع f را حداقل ۳ واحد به چپ و یا حداقل ۱ واحد به پایین منتقل کنیم:

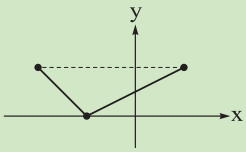
$$\begin{cases} y=f(x+a) & ; \quad a\geq 3 \\ y=f(x)-b & ; \quad b\geq 1 \end{cases}$$

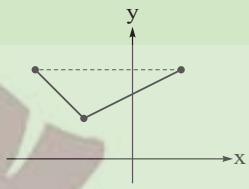
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

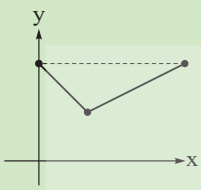
۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=۲-f(x-۱)$ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

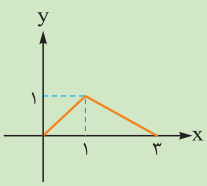
۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به محور x است.

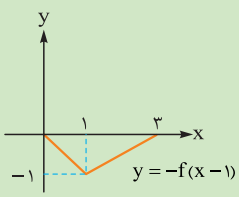
پاسخ خیلی تشریحی مراحل تبدیل را در گام‌های جداگانه انجام می‌دهیم:

گام اول: نمودار تابع f را یک واحد به راست می‌بریم:

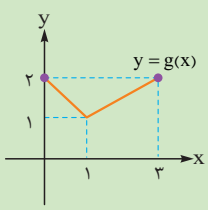


$$y=f(x) \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y=f(x-۱)$$

گام دوم: سپس نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:



گام سوم: در نهایت ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم:



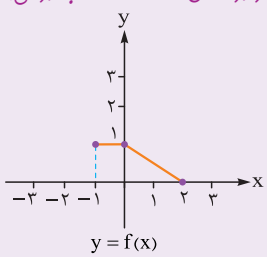
$$y=-f(x-۱) \xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} g(x)=۲-f(x-۱)$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

کتاب درسی

نمودار تابع $y=f(x)$ در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع $y=-f(x-۱)+۲$ را رسم کنید.

(حسابان (۲) ـ کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۸ کتاب درسی)



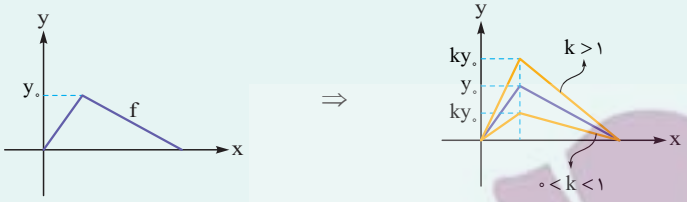
۴ دامنه‌های دو تابع f و $g(x)=f(kx-1)$ به ترتیب بازه‌های $[-2,1]$ و $[-1,2]$ هستند. دامنهٔ تابع h، با ضابطهٔ $h(x)=k-f(2x+k)$ کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{2},1]$ ۲) $[-2,4]$ ۳) $[-\frac{3}{2},0]$ ۴) $[-6,0]$

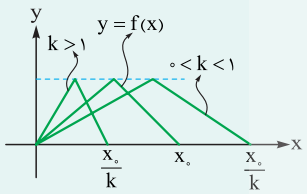
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

انبساط / انقباض عمودی: برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است عرض نقاط روی نمودار تابع f را در k ضریب کنیم؛ اگر $|k|>1$ باشد، انبساط عمودی و اگر $0<|k|<1$ باشد، انقباض عمودی رخ می‌دهد.



انبساط / انقباض افقی: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط روی نمودار تابع f را بر k تقسیم کنیم؛ اگر $|k|>1$ باشد، انقباض افقی و اگر $|k|<1$ باشد، انبساط افقی رخ می‌دهد.



نکته برای رسم نمودار تابع $y=a+bf(cx+d)$، ترتیب اعمال ضرایب به صورت زیر است:

$$a \leftarrow b \leftarrow c \leftarrow d$$

یعنی ابتدا انتقال افقی، سپس انبساط/ انقباض افقی، سپس انبساط/ انقباض عمودی و در نهایت انتقال عمودی را انجام می‌دهیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: دامنهٔ تابع f بازهٔ $[-2,1]$ است؛ حالا دامنهٔ تابع g را به دست می‌آوریم:

$$y=f(x) \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y=f(x-1) \xrightarrow{\text{طول نقاط تقسیم بر } k} g(x)=f(kx-1)$$

حالا همین ترتیب را روی دامنه هم انجام می‌دهیم:

$$D_f=[-2,1] \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} [-1,2] \xrightarrow{\text{تقسیم بر } k} \begin{cases} D_g=[\frac{2}{k},\frac{-1}{k}] \; ; \; k<0 \\ D_g=[-\frac{1}{k},\frac{2}{k}] \; ; \; k>0 \end{cases}$$

گام دوم: اگر $k<0$ باشد، مقداری برای آن در تساوی $[\frac{2}{k},-\frac{1}{k}]=[-1,2]$ به دست نمی‌آید، پس k مثبت است:

$$[-\frac{1}{k},\frac{2}{k}]=[-1,2] \Rightarrow k=1$$

گام سوم: حالا ضابطهٔ تابع h را تکمیل می‌کنیم:

$$h(x)=1-f(2x+1)$$

از آن‌جا که تغییرات روی محور عمودی تأثیری رو دامنهٔ تابع ندارد، کافی است فقط تابع $y=f(2x+1)$ را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ D=[-2,1] \end{cases} \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} \begin{cases} y=f(x+1) \\ D=[-3,0] \end{cases} \xrightarrow{\text{طول تقسیم بر } 2} \begin{cases} y=f(2x+1) \\ D_h=[-\frac{3}{2},0] \end{cases}$$

کنکور

دامنهٔ تابع $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ برابر $[b,c]$ است. اگر $k=2a^2-a-5$ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر a کدام است؟

(سؤال ۱۳۹ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)

۱) -3 ۲) 3 ۳) $-2/5$ ۴) $2/5$

۵ نقطهٔ $(-۱,۲)$ روی نمودار تابع $y = ۳f(۲x-۱)-۱$ به نقطهٔ (α,β) روی نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x) = ۳-۲f(۱-x)$ تبدیل می‌شود. حاصل $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقطهٔ $(-۱,۲)$ را در ضابطهٔ تابع اول جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲ = ۳f(-۳)-۱ \Rightarrow f(-۳) = ۱$$

نقطهٔ (α,β) را نیز در ضابطهٔ تابع g جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\beta = ۳-۲f(۱-\alpha) \Rightarrow f(۱-\alpha) = \frac{۳-\beta}{۲}$$

گام دوم: دو تساوی $f(-۳) = ۱$ و $f(۱-\alpha) = \frac{۳-\beta}{۲}$ باید یکسان باشند:

$$\begin{cases} ۱-\alpha = -۳ \Rightarrow \alpha = ۴ \\ \frac{۳-\beta}{۲} = ۱ \Rightarrow \beta = ۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{۱}{۴}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x-۱|-۱$ را نسبت به نقطهٔ $(۲,-۱)$ قرینه می‌کنیم و سپس طول نقاط روی نمودار حاصل را دو برابر می‌کنیم. نمودار نهایی از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(۰,-۴)$ ۲) $(۲,-۵)$ ۳) $(-۴,-۵)$ ۴) $(۰,۰)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته

- قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=a$، نمودار تابع $y=f(۲a-x)$ است.
- قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=b$، نمودار تابع $y=۲b-f(x)$ است.
- قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به نقطهٔ (a,b)، نمودار تابع $y=۲b-f(۲a-x)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تبدیلات گفته‌شده را به ترتیب اعمال می‌کنیم:

$$y=f(x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به نقطهٔ } (۲,-۱)} y=-۲-f(۴-x) \xrightarrow[x\to\frac{x}{۲}]{\text{ضرب طول نقاط در } ۲} g(x)=-۲-f(۴-\frac{x}{۲})$$

پس داریم:

$$g(x)=-۲-(|(۴-\frac{x}{۲})-۱|-۱) \Rightarrow g(x)=-۱-|۳-\frac{x}{۲}|$$

گام دوم: نمودار تابع g از نقطهٔ $(۰,-۴)$ می‌گذرد:

$g(۰)=-۱-۳=-۴$ ✓

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷ تابع f، با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x$ و دامنهٔ $[۱,+\infty)$ مفروض است. طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم، سپس نمودار حاصل را ۲ واحد به راست می‌بریم و در نهایت نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. حاصل $(gof)(۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته با قرینه‌کردن نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$، نمودار وارون تابع f به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تبدیلات را به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$f(x)=x^۲-۲x=(x-۱)^۲-۱\ ;\ x\geq ۱, y\geq -۱ \xrightarrow[x\to ۲x]{\text{طول نقاط نصف شود.}} y=(۲x-۱)^۲-۱\ ;\ x\geq \frac{۱}{۲}, y\geq -۱$$

$$\xrightarrow[x\to x-۲]{\text{۲ واحد به راست}} y=(۲x-۵)^۲-۱\ ;\ x\geq \frac{۵}{۲}, y\geq -۱ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به خط } y=x} g(x)=\frac{\sqrt{x+۱}+۵}{۲}\ ;\ x\geq -۱$$

دقت کنید که تابع g وارون تابع $y=(۲x-۵)^۲-۱; x\geq \frac{۵}{۲}$ است و کافی است که x را برحسب y به دست آوریم.

گام دوم: حالا خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(۳)=\frac{۲+۵}{۲}=\frac{۷}{۲}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x|-۲$ مفروض است. اگر مساحت سطح بین نمودارهای دو تابع g و h با ضابطه‌های $g(x)=۱-f(۲x)$ و $h(x)=۲f(\frac{x}{۳})-k$، برابر ۶ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) -۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

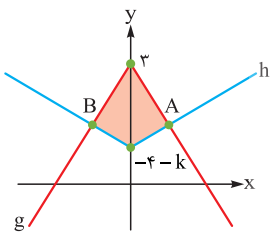
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطه‌های دو تابع g و h را می‌سازیم:

$$g(x)=۱-(|۲x|-۲)=۳-|۲x|$$

$$h(x)=۲(|\frac{x}{۳}|-۲)-k=|\frac{۲x}{۳}|-۴-k$$

گام دوم: حالا نمودارهای این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



طبق فرض، مساحت سطح رنگ‌شدهٔ بالا (که یک کایت است.) برابر ۶ است.

گام سوم: لازم است، طول نقاط برخوردهای دو تابع را به دست آوریم:

$$۳-۲x=\frac{۲x}{۳}-۴-k \Rightarrow \frac{۸x}{۳}=۷+k \Rightarrow x_A=\frac{۳(۷+k)}{۸}$$

به دلیل خاصیت تقارنی در نمودار هر دو تابع $x_B=-\frac{۳}{۸}(۷+k)$ است.

گام چهارم: مساحت چهارضلعی رنگ‌شده را برابر ۶ قرار می‌دهیم:

$$S=\frac{\frac{۳}{۴}(۷+k)\times(۷+k)}{۲}=۶ \Rightarrow (۷+k)^۲=۱۶$$

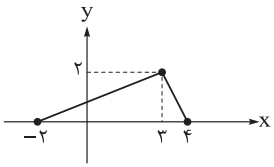
دقت کنید که طول قطرهای چهارضلعی، $۷+k$ و $x_A-x_B=\frac{۳}{۴}(۷+k)$ هستند که بر هم عمود نیز هستند:

$$\Rightarrow ۷+k=\pm ۴ \Rightarrow \begin{cases} k=-۱۱ \\ k=-۳ \end{cases}$$

اما دقت کنید که به ازای $k=-۱۱$، نمودارهای دو تابع هیچ نقطهٔ برخوردی نخواهند داشت، پس $k=-۳$ قابل قبول است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $f(ax+b)=3x$ نامتناهی باشد، مجموع مقادیر ممکن برای ab کدام است؟



بخشی از نمودار $y=f(ax+b)$ روی خط $y=3x$ باشد.

۱) ۳

۲) ۱۲

۳) −۲۱

۴) −۳۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: معادلهٔ $f(ax+b)=3x$ زمانی بی‌شمار جواب دارد که بخشی از نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(ax+b)$ روی خط $y=3x$ قرار گیرد. شیب بخش‌های خطی نمودار تابع f برابر $\frac{2}{5}$ و -2 هستند و با انقباض یا انبساط افقی، این شیب‌ها باید به ۳ تبدیل شوند:

$$\begin{cases}\frac{2}{5}\to 3: \frac{2}{5}a=3 \Rightarrow a=\frac{15}{2}\\ -2\to 3: -2a=3 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

دقت کنید که در تساوی‌های بالا از این نکته استفاده کرده‌ایم که شیب خط‌ها در نمودار تابع $y=f(kx)$، k برابر شیب خط‌ها در نمودار تابع f است.

گام دوم: حالا برای هر مقدار a، مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$a=\frac{15}{2}: g(x)=f(\frac{15}{2}x+b)$$

برای این‌که بخشی از نمودار تابع g روی خط $y=3x$ قرار بگیرد، لازم است نقطهٔ $(-2,0)$ به مبدأ مختصات تبدیل شود:

$$\Rightarrow \frac{15}{2}\times 0+b=-2 \Rightarrow b=-2$$

گام سوم:

$$a=-\frac{3}{2}: g(x)=f(-\frac{3}{2}x+b)$$

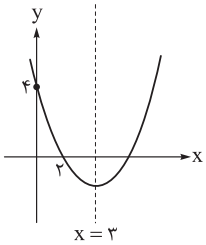
در این حالت، نقطهٔ $(4,0)$ باید به مبدأ مختصات تبدیل شود:

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}\times 0+b=4 \Rightarrow b=4$$

گام چهارم: بنابراین مقادیر قابل قبول برای $a\times b$ برابر -15 و -6 هستند که مجموع آن‌ها برابر می‌شود با -21.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰ سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟



مقدار y به‌ازای $x = ۱$

۱) ۱/۲۵
۲) ۱/۵
۳) ۱/۷۵
۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر طول نقاط برخورد یک سهمی با محور x، برابر x_1 و x_2 باشد، معادلهٔ سهمی به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ نوشته می‌شود، پارامتر a نیز به کمک مختصات یک نقطهٔ دیگر روی سهمی به دست می‌آید.

نکته

طول رأس یک سهمی، میانگین طول نقاط برخورد آن با محور x است:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق نکتهٔ بالا، طول نقطهٔ دیگر برخورد سهمی با محور x، برابر ۴ به دست می‌آید:

$$\frac{2+4}{2} = 3$$

پس معادلهٔ سهمی $y = a(x-2)(x-4)$ است.

گام دوم: حالا به کمک نقطهٔ $(0,4)$، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$4 = a(-2)(-4) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(x-2)(x-4)$$

گام سوم: مجموع ضرایب چندجمله‌ای معادلهٔ سهمی، عرض نقطه‌ای روی آن با طول $x = 1$ است؛ پس کافی است $x = 1$ را در معادلهٔ بالا جای‌گذاری کنیم:

$$\xrightarrow{x=1} a + b + c = \frac{1}{2}(-1)(-3) = 1/5$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱ اگر مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^۲ + ax + b < ۰$ بازهٔ $(۳ - \sqrt{۲}, ۳ + \sqrt{۲})$ باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

تعیین علامت عبارت درجه‌دوم: جدول تعیین علامت عبارت $ax^۲ + bx + c$ که در آن $a \neq ۰$ است، حالت‌های زیر را دارد:

- $\Delta < ۰$

$a < ۰$:

x	
$ax^۲ + bx + c$	همواره منفی

، $a > ۰$:

x	
$ax^۲ + bx + c$	همواره مثبت

- $\Delta = ۰$

$a < ۰$:

x		$-\frac{b}{۲a}$	
$ax^۲ + bx + c$	$-$	۰	$-$

، $a > ۰$:

x		$-\frac{b}{۲a}$	
$ax^۲ + bx + c$	$+$	۰	$+$

- $\Delta > ۰$

x		$x_۱$		$x_۲$	
$ax^۲ + bx + c$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

اگر جواب‌های یک معادلهٔ درجه‌دوم α و β باشند، می‌توان معادله را به صورت $x^۲ - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = ۰$ نوشت.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مشخص است که $۳ - \sqrt{۲}$ و $۳ + \sqrt{۲}$ ریشه‌های چندجمله‌ای $x^۲ + ax + b$ هستند، پس این چندجمله‌ای در اصل برابر بوده است با:

$$x^۲ - (۳ - \sqrt{۲} + ۳ + \sqrt{۲})x + (۳ - \sqrt{۲})(۳ + \sqrt{۲}) = x^۲ - ۶x + ۷$$

گام دوم: یعنی $a = -۶$ و $b = ۷$ و در نتیجه $b - a = ۱۳$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ کوچک‌ترین جواب صحیح نامعادلهٔ $\frac{۵}{x} < \frac{x}{۵}$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint مسئلهٔ نامعادله را به مسئلهٔ تعیین علامت تبدیل کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نامعادلهٔ زیر را داریم:

$$\frac{x}{۵} - \frac{۵}{x} > ۰ \Rightarrow \frac{x^۲ - ۲۵}{۵x} > ۰ \xrightarrow{\times ۵} \frac{(x-۵)(x+۵)}{x} > ۰$$

گام دوم: جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = \frac{(x-۵)(x+۵)}{x}$ را به کمک درس‌باکس پاسخ قبل می‌نویسیم:

x		-۵		۰		۵	
$P(x)$	$-$	∄	$+$	ت‌ان	$-$	∄	$+$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $P(x) > ۰$ برابر است با:

$$(-۵, ۰) \cup (۵, +\infty)$$

کوچک‌ترین عدد صحیح این مجموعه -۴ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ جواب‌های معادلهٔ $3x^2 - x + m = 0$، عدد مثبت α و عدد منفی β هستند. اگر $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} = m^3$ باشد، حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟

حاصل‌ضرب جواب‌ها منفی است.

۱) -1
۲) 1
۳) -2
۴) 2

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اگر جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اعداد α و β باشند، مجموع جواب‌های $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$ است. برخی از روابط مهم بین جواب‌ها برحسب S و P، به شرح زیر هستند:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{S^2}{P} - 2$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مجموع جواب‌های معادلهٔ $3x^2 - x + m = 0$ برابر $S = \frac{1}{3}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $P = \frac{m}{3}$ است. دقت کنید چون طبق فرض، α مثبت و β منفی است، حاصل‌ضرب آن‌ها و در نتیجه عدد m باید منفی باشد.

حال داریم:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} = m^3 \Rightarrow \frac{\frac{m}{3}}{\frac{1}{3}} = m^3 \Rightarrow m = m^3 \xrightarrow[\div m]{m\neq 0} 1 = m^2 \xrightarrow{m<0} m = -1$$

گام دوم: پس S همچنان $\frac{1}{3}$ و $P = -\frac{1}{3}$ است.

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = -1$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴ **جواب‌های کدام معادله، یک واحد از جواب‌های معادلهٔ $x^۲ + ۴x = ۱$ بزرگ‌تر هستند؟**

۱) $x^۲ + ۶x + ۴ = ۰$
۲) $x^۲ + ۲x - ۴ = ۰$
۳) $x^۲ - ۶x + ۴ = ۰$
۴) $x^۲ - ۲x - ۴ = ۰$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box اگر مجموع جواب‌های یک معادله S و حاصل‌ضرب آن‌ها P باشد، معادله را می‌توانیم به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ بنویسیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: معادلهٔ $x^۲ + ۴x - ۱ = ۰$ را داریم که اگر α و β جواب‌های آن باشند، $S = \alpha + \beta = -۴$ مجموع جواب‌ها و $P = \alpha\beta = -۱$ حاصل‌ضرب جواب‌ها است.

گام دوم: حالا اگر فرض کنیم $\alpha' = \alpha + ۱$ و $\beta' = \beta + ۱$ جواب‌های معادلهٔ مجهول مسئله باشند، باید S' و P' را برحسب S و P به دست آوریم:

$$\begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = \alpha + ۱ + \beta + ۱ = S + ۲ = -۴ + ۲ = -۲ \\ P' = \alpha'\beta' = (\alpha + ۱)(\beta + ۱) = \alpha\beta + \alpha + \beta + ۱ = P + S + ۱ = -۱ - ۴ + ۱ = -۴ \end{cases}$$

در نتیجه معادلهٔ مجهول $x^۲ + ۲x - ۴ = ۰$ است.

یه‌جور دیگه فرض کنیم x جواب معادلهٔ مجهول باشد، طبق فرض داریم:

$$X = x + ۱ \Rightarrow x = X - ۱$$

پس اگر $X - ۱$ را به جای x قرار دهیم، معادلهٔ مجهول به دست می‌آید:

$$(X-۱)^۲ + ۴(X-۱) = ۱ \Rightarrow X^۲ - ۲X + ۱ + ۴X - ۴ = ۱ \Rightarrow X^۲ + ۲X - ۴ = ۰$$

کنکور **هر کدام از ریشه‌های معادله‌ای ۵ / ۰ واحد از یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۱/۳۵x - ۱/۳ = ۰$ کم‌تر است، حاصل‌ضرب ریشه‌های آن معادله کدام است؟** (سؤال ۱۱۳ کنکور تجربی ۱۴۰۵)

۱) $-۰/۳۷۵$
۲) $-۰/۳$
۳) $-۱/۳$
۴) $-۱/۳۷۵$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵ معادلهٔ $\frac{x-۲}{x}=\frac{x+۳}{x+۵}+\frac{۳x+a}{x^۲+۵x}$ جواب ندارد. عدد مثبت a کدام است؟ (x مجهول معادله است.)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طرفین تساوی را در $x(x+۵)$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow ۳x+a+x(x+۳)=(x+۵)(x-۲)$$

$$\Rightarrow ۳x+a+x^۲+۳x=x^۲+۳x-۱۰$$

$$\Rightarrow ۳x=-a-۱۰ \Rightarrow x=-\frac{a+۱۰}{۳}$$

گام دوم: برای این‌که معادله جواب نداشته باشد، مقدار x باید یکی از ریشه‌های مخرج باشد:

$$\begin{cases}-\frac{a+۱۰}{۳}=۰ \Rightarrow a=-۱۰\\ -\frac{a+۱۰}{۳}=-۵ \Rightarrow a+۱۰=۱۵ \Rightarrow a=۵\end{cases}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶ کدام گزینه در مورد معادلهٔ $2x = \sqrt{x^2 + 4}$ درست است؟

۱) جواب ندارد.
۲) دو جواب غیرهم‌علامت دارد.
۳) فقط یک جواب دارد.
۴) دو جواب هم‌علامت دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint مشخصه که x باید مثبت باشه.

پاسخ خیلی تشریحی طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4x^2 = x^2 + 4 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

اما سمت چپ تساوی باید مثبت باشد، پس تنها جواب معادله، عدد مثبت $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷ نسبت جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x^۲-۴x+۴}=\frac{۱}{۲}x+۱$ کدام می‌تواند باشد؟

$\sqrt{(x-۲)^۲}=|x-۲|$

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint رادیکال رو قدرمطلقی بنویسید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در ابتدا داریم:

$$|x-۲|=\frac{۱}{۲}x+۱$$

حالا با بازه‌بندی معادله را حل می‌کنیم:

- $x\le ۲:\ -x+۲=\frac{۱}{۲}x+۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x=۱ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$ ✓
- $x\ge ۲:\ x-۲=\frac{۱}{۲}x+۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x=۳ \Rightarrow x=۶$ ✓

گام دوم: پس نسبت جواب‌ها $\frac{\frac{۲}{۳}}{۶}=\frac{۱}{۹}$ یا ۹ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ معادلهٔ $\frac{|x|+1}{|x|-1} = x^2 - 1$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{|x|+1}{|x|-1} = |x|^2 - 1 = (|x|-1)(|x|+1)$$

$|x|+1$ قطعاً مخالف صفر است، پس داریم:

$$\xrightarrow{\div(|x|+1)} \frac{1}{|x|-1} = |x|-1 \Rightarrow (|x|-1)^2 = 1$$

گام دوم: پس داریم:

$$|x|-1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} |x|-1 = -1 \Rightarrow x = 0 \\ |x|-1 = 1 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

پس معادله ۳ جواب دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۹ اگر برای دو ماتریس مربعی A و B داشته باشیم $AB+BA=\bar{O}$، آن‌گاه چه تعداد از روابط زیر درست است؟

الف) $(A-B)^2=(A+B)^2$ ب) $AB^2=B^2A$ پ) $AB^3=-B^3A$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابه‌جایی نیست، یعنی اگر A و B دو ماتریس باشند، در حالت کلی $AB\neq BA$، از این موضوع، می‌توان دو نتیجه گرفت:

۱) اگر بخواهیم طرفین یک تساوی ماتریسی را در یک ماتریس ضرب کنیم، باید این ضرب، در هر دو طرف از یک سمت انجام شود، مثلاً اگر طرفین تساوی $A=B$ را از سمت راست در C ضرب کنیم، داریم $AC=BC$ یا اگر طرفین آن تساوی را از چپ در D ضرب کنیم، داریم $DA=DB$.

۲) در حالت کلی، اتحادهای جبری برای ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی مثلاً اگر A و B دو ماتریس باشند، در حالت کلی نمی‌توان گفت $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$، بلکه داریم:

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

پاسخ‌خیلی‌تشریحی

از $AB+BA=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $AB=-BA$، حالا تک‌تک تساوی‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) از آن‌جا که $(A+B)^2=(A+B)(A+B)$ و $(A-B)^2=(A-B)(A-B)$، داریم:

$$\begin{cases}(A-B)^2=A^2\underbrace{-AB-BA}_{\bar{O}}+B^2=A^2+B^2\\(A+B)^2=A^2\underbrace{+AB+BA}_{\bar{O}}+B^2=A^2+\mathbf{B}^2\end{cases}\Rightarrow (A-B)^2=(A+B)^2$$

ب) طرفین تساوی $AB=-BA$ را از سمت راست در B ضرب می‌کنیم:

$$AB=-BA\xrightarrow{\times B}AB^2=-B\underbrace{AB}_{-BA}\Rightarrow AB^2=B^2A$$

پ) در قسمت «ب» از $AB=-BA$ نتیجه گرفتیم $AB^2=B^2A$، حالا اگر طرفین تساوی اخیر را از سمت راست در B ضرب کنیم، داریم:

$$AB=-BA\xrightarrow{\text{«ب»}}AB^2=B^2A\xrightarrow{\times B}AB^3=B^2\underbrace{AB}_{-BA}\Rightarrow AB^3=-B^3A$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۰ اگر A ماتریسی اسکالر باشد، به طوری که $3A+2I=\begin{bmatrix}2a-b-1 & a+c+4\\ b+c+1 & a+2b+1\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -10
۲) -8
۳) -6
۴) -4

مشاوره تعریف ماتریس‌های خاص (قطری، اسکالر و ...) را به خوبی فرابگیرید، چون به طور مستقیم یا غیرمستقیم، هم در امتحان‌های نهایی و هم در کنکور، مورد پرسش قرار گرفته‌اند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) **ماتریس قطری**: اگر همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی یک ماتریس مربعی صفر باشند، آن ماتریس، قطری نامیده می‌شود.

۲) **ماتریس اسکالر**: اگر همهٔ درایه‌های واقع بر قطر اصلی یک ماتریس قطری با هم برابر باشند، آن ماتریس، اسکالر نامیده می‌شود.

۳) **ماتریس واحد (همانی)**: ماتریس اسکالری است که همهٔ درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن ۱ باشند.

۴) مجموع دو ماتریس اسکالر، یک ماتریس اسکالر است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ماتریس واحد (همانی) یعنی I، خود یک ماتریس اسکالر است، بنابراین حاصل $3A+2I$ نیز ماتریسی اسکالر است.

گام دوم: برای آن‌که ماتریس $3A+2I=\begin{bmatrix}2a-b-1 & a+c+4\\ b+c+1 & a+2b+1\end{bmatrix}$ اسکالر باشد، باید:

$$\begin{cases}2a-b-1=a+2b+1 \Rightarrow a-3b=2\\ a+c+4=0 \Rightarrow a+c=-4\\ b+c+1=0 \Rightarrow b+c=-1\end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a-b=-3$$

$$\begin{cases}a-3b=2\\ a-b=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-\frac{11}{2}\\ b=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$a+b=-\frac{11}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{16}{2}=-8$$

کتاب درسی

اگر $A=\begin{bmatrix}4 & a\\ b & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

(هندسه (۳) ـ تمرین ۶ صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱ سه عدد غیرصفر a، b و c را در نظر بگیرید. اگر $A=\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ -c & 0 & a\\ b & -a & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{bmatrix}$، آن‌گاه کدام گزینه در مورد ماتریس AB نادرست است؟

۱) با ماتریس A تعویض‌پذیر است.
۲) با ماتریس B تعویض‌پذیر است.
۳) قطری است.
۴) حداقل یک درایهٔ مثبت دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) فرض کنید A و B دو ماتریس هستند، به طوری که C = A.B، در این صورت، برای محاسبهٔ درایهٔ سطر iأم و ستون jأم ماتریس C، باید سطر iأم ماتریس A را در ستون jأم ماتریس B ضرب کنید.

۲) ماتریس صفر مربعی، با همهٔ ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبهٔ خود، تعویض‌پذیر است، زیرا: $\bar{O}.A = A.\bar{O} = \bar{O}$

پاسخ خیلی تشریحی

می‌دانیم اگر C = AB، آن‌گاه درایهٔ c_{ij} از ضرب سطر iأم ماتریس A در ستون jأم ماتریس B به دست می‌آید، پس:

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ -c & 0 & a\\ b & -a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+abc-abc & 0+b^2c-b^2c & 0+bc^2-bc^2\\ -ca^2+0+a^2c & -abc+0+abc & -ac^2+0+ac^2\\ a^2b-a^2b+0 & ab^2-ab^2+0 & abc-abc+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

یعنی $AB = \bar{O}$ و می‌دانیم یک ماتریس صفرِ مربعی، قطری است (زیرا تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر هستند.) و با تمام ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبهٔ خود تعویض‌پذیر است (زیرا $AC = CA = BC = CB = \bar{O}$).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲ اگر $A=\begin{bmatrix} a+2 & -3 \\ 2b-1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^2 کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۰۴

۳) ۱۲۸ ۴) ۱۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box دو ماتریس مربعی A و B تعویض‌پذیر نامیده می‌شوند، هرگاه $AB=BA$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا دو ماتریس AB و BA را محاسبه می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix} a+2 & -3 \\ 2b-1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4a-7 & a-4 \\ 8b+1 & 2b+1 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a+2 & -3 \\ 2b-1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4a+2b+7 & -11 \\ 5a+4b+8 & -13 \end{bmatrix}$$

گام دوم: دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر هستند، پس $AB=BA$ و در نتیجه داریم:

$$AB=BA \Rightarrow \begin{cases} a-4=-11 \Rightarrow a=-7 \\ 2b+1=-13 \Rightarrow b=-7 \end{cases}$$

گام سوم: با مقادیر به‌دست‌آمده برای a و b داریم $A=\begin{bmatrix} -7+2 & -3 \\ -14-1 & 1 \end{bmatrix}$، پس در این صورت داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 70 & 12 \\ 60 & 46 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^2، برابر $70+46=116$ است.

یه‌جور دیگه برای محاسبهٔ مقادیر a و b می‌توانید از نکتهٔ زیر استفاده کنید:

نکته شرط تعویض‌پذیربودن دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$، آن است که:

$$\frac{r-u}{m-q}=\frac{s}{n}=\frac{t}{p}$$

پس اگر $A=\begin{bmatrix} a+2 & -3 \\ 2b-1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$، آن‌گاه برای آن‌که A و B تعویض‌پذیر باشند، باید:

$$\frac{(a+2)-1}{4-2}=-\frac{3}{1}=\frac{2b-1}{5} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{2}=-3 \Rightarrow a=-7 \\ -3=\frac{2b-1}{5} \Rightarrow b=-7 \end{cases}$$

ادامهٔ راه حل مثل گام سوم است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۳ اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۲ & -۳\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲۰}+A^{۳۱}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) -۳ ۴) -۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ماتریس $A^۲$ را محاسبه کنید.

درس Box

۱) ماتریس اسکالری که همهٔ درایه‌های قطر اصلی آن ۱ باشند، ماتریس همانی نامیده می‌شود که عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌هاست و با I نمایش داده می‌شود. اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $I^n=I$.

۲) برخی از خواص توان‌رسانی ماتریس‌ها: اگر A یک ماتریس مربعی و k عدد حقیقی باشد، آن‌گاه:

۱) $A^۲=A.A\ ,\ A^۳=A.A^۲=A^۲.A\ ,\ A^۴=A.A^۳=A^۳.A=A^۲.A^۲,\ldots$

۲) $A^m.A^n=A^{m+n}$

۳) $(A^m)^n=(A^n)^m=A^{m.n}$

۴) $(kA)^n=k^nA^n$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ماتریس $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۲ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۲ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=-I$$

گام دوم: به کمک ماتریس $A^۲$، ماتریس‌های $A^{۲۰}$ و $A^{۳۱}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{۲۰}=(A^۲)^{۱۰}=(-I)^{۱۰}=I=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳۱}=(A^۲)^{۱۵}A=-IA=-A=\begin{bmatrix}-۳ & ۵\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$$

گام سوم: با توجه به گام قبل، داریم:

$$A^{۲۰}+A^{۳۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۳ & ۵\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۵\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}$$

بنابراین، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲۰}+A^{۳۱}$، برابر است با: $-۲+۵-۲+۴=۵$

کتاب درسی

اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به صورت $A^۲=AA$ و $A^۳=AA^۲$ و ... و $A^n=AA^{n-۱}\ (n\in\mathbb{N},\ n>۱)$ تعریف کنیم، در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$، حاصل $A^۲$ و $A^۳$ و $A^۷$ را بیابید. (هندسه (۳) ـ تمرین ۵ صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۴ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$، به طوری که $a_{ij}=\begin{cases} ij-a_{ij} & ; i<j \\ ۰ & ; i=j \\ ۱ & ; i>j \end{cases}$، آن‌گاه درایهٔ سطر اول و ستون سوم ماتریس $A^۳$ کدام است؟

۱) ۸/۲۵ ۲) ۸ ۳) ۷/۷۵ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) در ماتریس‌های مربعی:

الف) درایه‌های واقع بر قطر اصلی، شمارهٔ سطر و شمارهٔ ستونشان با هم برابر است.

ب) درایه‌های بالای قطر اصلی، شمارهٔ سطرشان از شمارهٔ ستونشان کم‌تر است.

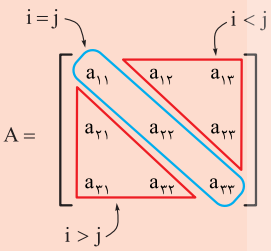
پ) درایه‌های پایین قطر اصلی، شمارهٔ سطرشان از شمارهٔ ستونشان بیشتر است.

۲) فرض کنید A، B و C سه ماتریس هستند، به طوری که $D=ABC$، در این صورت:

درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس D: $d_{ij}=[\text{سطر iاُم } A].B.[\text{ستون jاُم } C]$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با توجه به فرض سؤال، درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم:



(رابطهٔ سوم) $a_{۲۱}=a_{۳۱}=a_{۳۲}=۱$

(رابطهٔ دوم) $a_{۱۱}=a_{۲۲}=a_{۳۳}=۰$

(رابطهٔ اول) $\begin{cases} a_{۱۲}=۱\times ۲-a_{۱۲} \Rightarrow a_{۱۲}=۱ \\ a_{۱۳}=۱\times ۳-a_{۱۳} \Rightarrow a_{۱۳}=۱/۵ \\ a_{۲۳}=۲\times ۳-a_{۲۳} \Rightarrow a_{۲۳}=۳ \end{cases}$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱/۵ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

گام دوم: با توجه به درس‌باکس، درایهٔ سطر اول و ستون سوم ماتریس $A^۳=A.A.A$، برابر است با:

$$[\text{سطر اول } A]\ A\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ \text{سوم}\\ A\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱/۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱/۵ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱/۵ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲/۵ & ۱/۵ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱/۵ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}=۳/۷۵+۴/۵+۰=۸/۲۵$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

کنکور اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & ۱ & ۲\\ ۴ & ۰ & -۳\\ ۲ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۳$، کدام است؟ (سؤال ۱۳۷ کنکور ریاضی ۱۳۹۹)

۱) $[۳۰ \quad ۶ \quad ۶۴]$

۲) $[۳۰ \quad ۶ \quad ۷۸]$

۳) $[۲۴ \quad ۸ \quad ۸۶]$

۴) $[۳۰ \quad ۶ \quad ۸۶]$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵ دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $۶-۷a$ واحد از یکدیگر قرار دارند. اگر تنها یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که به فاصلهٔ $۱-۲a$ واحد از A و به فاصلهٔ $۳+a$ واحد از B باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر قابل قبول برای a، کدام است؟

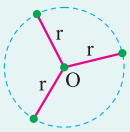
۱) $\frac{۴۳}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۳}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۴۱}{۱۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

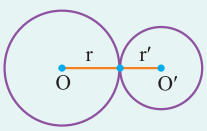
Hint باید دو دایره به مرکزهای A و B بر هم مماس باشند.

درس Box

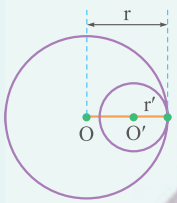
۱) تمام نقاطی از صفحه که از نقطهٔ معلوم O به فاصلهٔ مشخص r هستند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع r واقع‌اند.



۲) دو دایره، زمانی دقیقاً یک نقطهٔ مشترک دارند که بر هم مماس باشند. اگر دو دایرهٔ $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ بر هم مماس خارج باشند، آن‌گاه $OO'=r+r'$ و اگر بر هم مماس داخل باشند، آن‌گاه $OO'=|r-r'|$.



$OO'=r+r'$

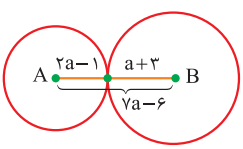


$OO'=|r-r'|$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ $۱-۲a$ واحد باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع $۱-۲a$ واقع‌اند و به طور مشابه نقاطی از صفحه که از نقطهٔ B به فاصلهٔ $۳+a$ واحد باشند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع $۳+a$ قرار دارند. این دو دایره در صورتی که مماس خارج و یا مماس داخل باشند، تنها یک نقطهٔ اشتراک دارند.

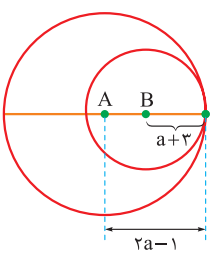
گام دوم: برای آن‌که این دو دایره مماس خارج باشند، باید:



$$۷a-۶=(۲a-۱)+(a+۳) \Rightarrow ۷a-۶=۳a+۲ \Rightarrow ۴a=۸ \Rightarrow a=۲$$

گام سوم: برای آن‌که این دو دایره مماس داخل باشند، دو حالت امکان‌پذیر است:

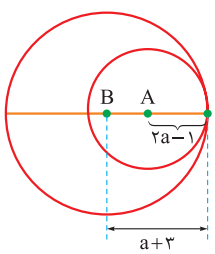
حالت اول:



$$\underbrace{۷a-۶}_{AB}=(۲a-۱)-(a+۳) \Rightarrow ۷a-۶=a-۴ \Rightarrow ۶a=۲ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

این حالت، امکان‌پذیر نیست، چون در این صورت شعاع دایره به مرکز A و همچنین طول پاره‌خط AB منفی می‌شود.

حالت دوم:



$$\underbrace{۷a-۶}_{AB}=(a+۳)-(۲a-۱) \Rightarrow ۷a-۶=-a+۴ \Rightarrow ۸a=۱۰ \Rightarrow a=\frac{۵}{۴}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

گام چهارم: بنابراین دو مقدار ۲ و $\frac{۵}{۴}$ برای a وجود دارد که مجموع آن‌ها، برابر است با:

$$\frac{۵}{۴}+۲=\frac{۱۳}{۴}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶ چند مستطیل متمایز به طول قطر ۵ می‌توان رسم کرد که طول آن سه برابر عرض آن باشد؟

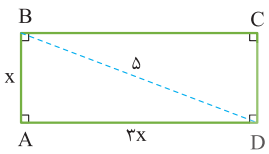
۱) بی‌شمار ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint با اطلاعات مسئله، می‌توانید طول و عرض مستطیل را حساب کنید.

پاسخ خیلی تشریحی مطابق شکل بنا به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABD، داریم:

$$x^۲ + ۹x^۲ = ۲۵ \Rightarrow ۱۰x^۲ = ۲۵ \Rightarrow x^۲ = \frac{۲۵}{۱۰} \Rightarrow x = \frac{۵}{\sqrt{۱۰}}$$



پس:

$$AB = x = \frac{۵}{\sqrt{۱۰}} \quad \text{و} \quad AD = ۳x = \frac{۱۵}{\sqrt{۱۰}}$$

بنابراین طول و عرض مستطیل به دست آمد و فقط یک مستطیل با این ابعاد وجود دارد.

نکته با معلوم‌بودن طول و عرض یک مستطیل، آن مستطیل به صورت منحصربه‌فرد قابل رسم است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۷ در مثلث ABC، $\hat{B} = ۸۰^\circ$ و نقطهٔ D روی ضلع AC قرار دارد به طوری که عمودمنصف پاره‌خط AD از رأس B می‌گذرد. اگر نیمساز زاویهٔ DBC، ضلع AC را در نقطهٔ E قطع کند، زاویهٔ AEB چند درجه است؟

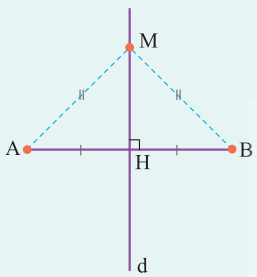
۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) ویژگی عمودمنصف یک پاره‌خط:

الف) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.



$$M \in AB \text{ عمودمنصف} \Rightarrow MA = MB$$

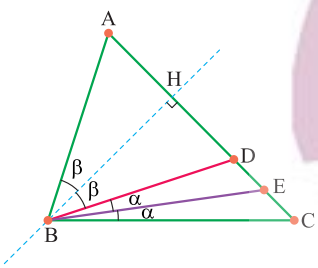
ب) هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

$$MA = MB \Rightarrow M \in AB \text{ عمودمنصف}$$

۲) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، ۱۸۰° است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: شکل مسئله به صورت زیر است. به گفتهٔ سؤال BE، نیمساز زاویهٔ DBC است، پس طبق شکل آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. B هم روی عمودمنصف پاره‌خط AD است، پس فاصله‌اش از A و D به یک اندازه است. $AB = BD$



بنابراین مثلث ABD متساوی‌الساقین و ارتفاع BH، نیمساز هم هست:

$$A\hat{B}H = H\hat{B}D = \beta$$

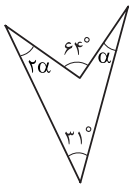
گام دوم: به گفتهٔ سؤال $\hat{B} = ۸۰^\circ$ است، پس با توجه به شکل می‌توانیم بنویسیم:

$$۲\beta + ۲\alpha = ۸۰^\circ \xrightarrow{\div ۲} \alpha + \beta = ۴۰^\circ \Rightarrow H\hat{B}E = ۴۰^\circ$$

گام سوم: به مثلث قائم‌الزاویهٔ HBE نگاه کنید. یک زاویهٔ ۹۰° دارد و یک زاویهٔ ۴۰°، پس $\underbrace{H\hat{E}B}_{A\hat{E}B}$ می‌شود $۹۰^\circ - ۴۰^\circ = ۵۰^\circ$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۸ در شکل مقابل، α چند درجه است؟



۱) ۱۱

۲) ۱۲

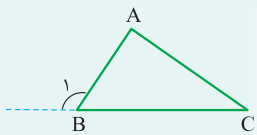
۳) ۱۳

۴) ۱۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

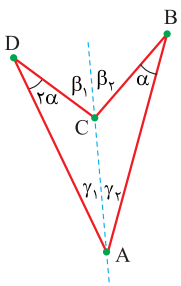
Hint خط گذرنده از رأس‌های دو زاویهٔ 31° و 64° را رسم کنید.

درس Box اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی یک مثلث، برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن.



$$\hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{C}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: خط گذرنده از دو نقطهٔ A و C را رسم می‌کنیم.



گام دوم: زاویهٔ β_2 در مثلث ACD و زاویهٔ β_1 در مثلث ABC، زاویهٔ خارجی است، پس:

$$\beta_1 = \gamma_1 + 2\alpha \quad (1)$$
$$\beta_2 = \gamma_2 + \alpha \quad (2)$$

گام سوم: طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم، داریم:

$$\underbrace{\beta_1 + \beta_2}_{64^\circ} = \underbrace{\gamma_1 + \gamma_2}_{31^\circ} + 3\alpha \Rightarrow 3\alpha = 33^\circ \Rightarrow \alpha = 11^\circ$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۹ در مثلث ABC که $\hat{C} = ۴۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$، ارتفاع‌ها در نقطهٔ H همرس‌اند. اگر نقطهٔ O درون این مثلث از سه ضلع آن مثلث به یک فاصله باشد، آن‌گاه اختلاف اندازه‌های دو زاویهٔ $B\hat{H}C$ و $B\hat{O}C$، چند درجه است؟

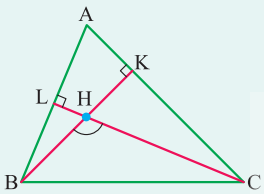
۱) ۳۵ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° و مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی ۳۶۰° است.

۲) در مثلث ABC، اگر H محل همرسی ارتفاع‌ها باشد، آن‌گاه:

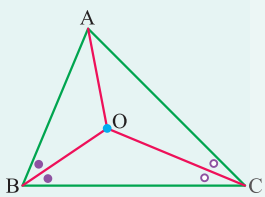


$$B\hat{H}C = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$$

دلیل: در چهارضلعی AKHL، زاویهٔ $K\hat{H}L$ مکمل زاویهٔ $\hat{A}$ است و به دلیل متقابل به رأس بودن، داریم $B\hat{H}C = K\hat{H}L$.

۳) در مثلث ABC، اگر O محل همرسی نیمسازهای داخلی باشد، آن‌گاه $B\hat{O}C = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$.

دلیل: در مثلث BOC، داریم:



$$B\hat{O}C = ۱۸۰^\circ - (\frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲}) = ۱۸۰^\circ - (\frac{۱۸۰^\circ}{۲} - \frac{\hat{A}}{۲}) = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$$

۴) نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی هر مثلث، تنها نقطه‌ای **درون** یک مثلث است که از هر سه ضلع آن به یک فاصله است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ABC، ۱۸۰° است، پس $\hat{A} = ۸۰^\circ$.

گام دوم: با توجه به مورد (۲) درس‌باکس، داریم:

$$B\hat{H}C = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ = ۱۰۰^\circ$$

گام سوم: با توجه به مورد (۴) درس‌باکس، نقطهٔ O نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی مثلث ABC است و با توجه به مورد (۳) درس‌باکس، داریم:

$$B\hat{O}C = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲} = ۹۰^\circ + \frac{۸۰^\circ}{۲} = ۱۳۰^\circ$$

پس:

$$B\hat{O}C - B\hat{H}C = ۱۳۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۳۰^\circ$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

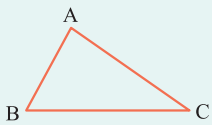
۳۰ در مثلث ABC که BC بزرگ‌ترین ضلع آن است، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم، اگر $BH = ۲AH = ۲HC$، آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $BH > AC$
۲) $\hat{C} > B\hat{A}H$
۳) $AB > AC$
۴) $\hat{B} < C\hat{A}H$

پاسخ: گزینهٔ ۲

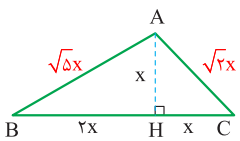
Hint مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH، متساوی‌الساقین است.

درس Box در مثلث ABC، اگر $\hat{A} > \hat{C}$، آن‌گاه $BC > AB$ و بالعکس.



$$\hat{A} > \hat{C} \Leftrightarrow BC > AB$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** از آن‌جا که BC بزرگ‌ترین ضلع مثلث است، ارتفاع وارد بر آن، درون مثلث قرار می‌گیرد و شکل مقابل را خواهیم داشت:



گام دوم: از تساوی $۲AH = ۲HC$ نتیجه می‌شود $AH = HC$، یعنی مثلث ACH متساوی‌الساقین است و داریم $C\hat{A}H = \hat{C} = ۴۵^\circ$.

گام سوم: از $BH = ۲AH$ می‌توان نامساوی $BH > AH$ را نتیجه گرفت و از آن نامساوی در مثلث ABH نتیجه می‌شود $B\hat{A}H > \hat{B}$، بنابراین در مثلث ABH، داریم:

$$B\hat{A}H > \hat{B} \xrightarrow{+B\hat{A}H} ۲B\hat{A}H > \underbrace{\hat{B}+B\hat{A}H}_{۹۰^\circ} \Rightarrow B\hat{A}H > \underbrace{۴۵^\circ}_{\hat{C}}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

و به روش مشابه داریم:

$$\hat{B} < \underbrace{۴۵^\circ}_{C\hat{A}H}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

گام چهارم:

$$\left.\begin{matrix}\hat{B} < ۴۵^\circ \\ \hat{C} = ۴۵^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{C} > \hat{B} \xrightarrow[ABC]{\Delta} AB > AC$$

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

$$\overset{\Delta}{AHC} : AC^۲ = AH^۲ + CH^۲ = x^۲ + x^۲ = ۲x^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۲}x \xrightarrow{BH=۲x} BH > AC$$

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۱ اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۳}$ مضرب ۳ باشد، مجموع مقادیر عدد طبیعی یک‌رقمی n کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۳ ۳) ۲۹ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اثبات با بررسی تمام حالت‌ها $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r)$:

برای بررسی باقی‌ماندهٔ تقسیم یا بخش‌پذیری بر اعداد کوچک (مثلاً بر ۲ و ۳ و ۴ و ...) تمام حالت‌ها را در نظر می‌گیریم. مثلاً در کتاب درسی با بررسی تمام حالت در تقسیم بر ۴ نشان می‌دهیم عدد $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ وقتی زوج است که n بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۰ یا ۳ داشته باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۳}$ مضرب ۳ است، یعنی n یا $n+۱$ مضرب ۳ هستند.

گام دوم: پس در اعداد طبیعی یک‌رقمی، ۲ و ۳ و ۵ و ۶ و ۸ و ۹ مناسب هستند.

گام سوم: جمع این‌ها می‌شود ۳۳.

کتاب درسی

ب) $A = \{۳,۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعهٔ $S = \{۱,۲,\ldots,۶\}$ است و $n \in S$. اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ **یک عدد زوج باشد** ثابت کنید $n \in A$.

(ریاضیات گسسته ـ کار در کلاس صفحهٔ ۵ (قسمت ب) کتاب درسی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۲ در اثبات بازگشتی حکم $a^۲+b^۲\geq ab$ به رابطهٔ بدیهی $(b-\frac{a}{۲})^۲+k\geq ۰$ رسیدیم. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۳b^۲}{۴}$ ۲) $\frac{b^۲}{۴}$ ۳) $\frac{a^۲}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}a^۲$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

مثال اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$a^۲+ab+b^۲\geq ۰$

پاسخ:

$a^۲+ab+b^۲\geq ۰ \Leftrightarrow (a+\frac{b}{۲})^۲+\frac{۳b^۲}{۴}\geq ۰$

اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزارهٔ همیشه درست (سمت راست) هم‌ارز است.

اثبات با روش گزاره‌های هم‌ارز ـ اثبات بازگشتی $(p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r \equiv p \Leftrightarrow r)$:

معمولاً برای اثبات نامساوی‌ها، از خود حکم شروع می‌کنیم و با طی مراحل استنتاجی، به رابطه‌ای درست یا بدیهی می‌رسیم.

سپس جهت فلش‌ها را برعکس می‌کنیم:

دو نتیجهٔ مهم:

$a>۰: a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \quad a,b\geq ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{a+b}{۲}}_{\text{واسطهٔ حسابی}}\geq \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{واسطهٔ هندسی}}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول:

$a^۲-ab+b^۲\geq ۰$

ab را به طرف چپ می‌آوریم:

$b^۲-ab+\frac{a^۲}{۴}$

گام دوم: اتحاد $(b-\frac{a}{۲})^۲$ را می‌نویسیم:

گام سوم: پس باید $k=\frac{۳a^۲}{۴}$ به آن اضافه شود تا به $a^۲-ab+b^۲$ برسیم.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۳ اگر n فرد باشد از بین اعداد $a=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$ و $b=n^3$، کدام حتماً فرد است؟

۱) فقط a
۲) فقط b
۳) هر دو
۴) نه a و نه b

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اثبات مستقیم و نتایج آن

در اثبات‌های مستقیم، از فرض شروع می‌کنیم و به حکم می‌رسیم. عدد فرد را با $2n+1$، عدد زوج را با $2m$ و ... نشان می‌دهیم. مثلاً با این روش ثابت می‌شود که:

۱) مربع و مکعب هر عدد فرد، فرد است.

۲) میانگین ۵ عدد فرد متوالی همان عدد وسطی است.

۳) جمع دو عدد فرد متوالی، مضرب ۴ است.

۴) جمع سه عدد زوج متوالی، مضرب ۶ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $b=n^3$ همواره فرد است چون مکعب یک عدد فرد، فرد است.

گام دوم: حاصل $a=\frac{1+2+\cdots+n}{n}$ می‌شود $\frac{n+1}{2}$ که به ازای $n=3$ زوج است (برای $n=4k+3$ زوج است)، پس این عدد همیشه فرد نیست.

گام سوم: پس باید گزینهٔ (۲) یعنی «فقط b» را انتخاب کنیم.

کتاب درسی

گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائهٔ مثال نقض آن‌ها را رد کنید. *(ریاضیات گسسته ـ تمرین ۶ صفحهٔ ۸ کتاب درسی)*

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۴ اگر α و β دو عدد گنگ متمایز و $\alpha-\beta$ گویا باشند، کدام عدد حتماً گویا است؟

۱) $\beta+\alpha$

۲) $\frac{۱}{\alpha}-\frac{۱}{\beta}$

۳) $\frac{\alpha}{\beta}$

۴) $\frac{\alpha^۳-\beta^۳}{(\alpha-\beta)^۲+۳\alpha\beta}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اثبات غیرمستقیم ـ برهان خلف $(p\Rightarrow q)\equiv\sim q\Rightarrow\sim p$:

معمولاً برای اثبات این‌که عددی گنگ است، از روش برهان خلف می‌رویم. فرض می‌کنیم حکم درست نیست (فرض خلف) و نشان می‌دهیم با این فرض به تناقض می‌رسیم! پس خود حکم درست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول:

اگر α و β گنگ و $\beta-\alpha$ گویا باشند، $\beta+\alpha$ حتماً گنگ است (اثبات در تمرین کتاب با برهان خلف)، پس گزینهٔ (۱) نادرست است.

گام دوم: برای گزینه‌های (۲) و (۳) هم به راحتی مثال نقض داریم:

$\alpha=\sqrt{۲}-۱\ ,\ \beta=\sqrt{۲}$

$\beta-\alpha$ گویا است، اما $\frac{\alpha}{\beta}=۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ و $\frac{۱}{\alpha}-\frac{۱}{\beta}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۲}}$ گنگ است.

گام سوم: پس جواب گزینهٔ (۴) است:

$\frac{\alpha^۳-\beta^۳}{(\alpha-\beta)^۲+۳\alpha\beta}=\frac{\alpha^۳-\beta^۳}{\alpha^۲+\alpha\beta+\beta^۲}\xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}}\alpha-\beta$

که با توجه به فرض سؤال، گویا است.

کتاب درسی

اگر α,β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+۲\beta$ گنگ هستند.

(ریاضیات گسسته ـ تمرین ۳ صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۵ اگر $a \in \mathbb{Q}$، به ازای چند مقدار، عدد $(\sqrt{۲}+۲)(a^۳-a^۲+a-۱)$ گویا می‌شود؟ (a عضو اعداد گویا)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اگر $a \in \mathbb{Q}$ و $b \in \mathbb{Q}'$، اگر $a \neq ۰$ حتماً $a \times b$ گنگ است.

با توجه به صورت سؤال، باید $a^۳-a^۲+a-۱=۰$ باشد.

$$a^۳-a^۲+a-۱=۰ \Rightarrow a^۲(a-۱)+(a-۱)=۰$$

$$(a-۱)(a^۲+۱)=۰ \Rightarrow a=۱$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۶ نقیض گزارهٔ $p \Rightarrow \sim q$ کدام است؟

۱) $p \wedge q$
۲) $\sim p \wedge q$
۳) $p \wedge \sim q$
۴) $\sim p \wedge \sim q$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

نقیض گزاره‌ها

گزاره	p	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\exists x \in A$	$\forall x \in A$
نقیض	$\sim p$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$\forall x \in A$	$\exists x \in A$
شرح		هر کدام نقیض و علامت برعکس شود.	هر کدام نقیض و علامت برعکس شود.	فرض درست و حکم نقیض می‌شود.	فقط یکی نقیض شود.	سور وجودی تبدیل به عمومی می‌شود.	سور عمومی تبدیل به وجودی می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای نقیض گزارهٔ شرطی، فرض را می‌نویسیم، $\Rightarrow$ به $\wedge$ تبدیل شده و حکم نقیض می‌شود.

گام دوم: پس داریم:

$$\sim (p \Rightarrow \sim q) \equiv p \wedge \sim (\sim q) \equiv p \wedge q$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۷ با کدام احتمال $p \Leftrightarrow q$ نادرست و $p \Rightarrow q$ درست است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

ارزش گزاره‌های مرکب

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د
		عطفی وقتی درست است که هر دو درست باشند.	فصلی فقط اگر هر دو نادرست باشند غلط است.	فقط اگر اولی درست و دومی نادرست باشد غلط است.	اگر مثل هم باشند درست است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $p \Leftrightarrow q$ در حالتی نادرست است که ارزش q و p مثل هم نباشد.

گام دوم: $p \Rightarrow q$ در حالتی که p درست و q نادرست باشد، نادرست است و در حالت‌های دیگر درست است.

گام سوم: پس خواستهٔ سؤال در حالت $p \equiv$ ن و $q \equiv$ د برقرار است که احتمالش $\frac{۱}{۴}$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۸ کدام گزاره دارای ارزش نادرست است؟

۱) اگر $a^۲+۱>۰$ باشد ← $\sqrt{۵}$ گویا است.

۲) $\exists x\in\mathbb{R}^+ , x^۲ > x^۳$

۳) اگر n زوج باشد ← $n^۲$ زوج است.

۴) $\forall n\in\mathbb{N} , n^۲+n+۵\in p$ (p نماد مجموعهٔ اعداد اول است.)

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی همهٔ گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): چون فرض نادرست است، پس ارزش کل گزاره صحیح است.

گزینهٔ (۲): مثلاً $x=\frac{۱}{۲}$ در آن صدق می‌کند.

گزینهٔ (۳): $n=۲k \Rightarrow n^۲=۴k^۲=(\underbrace{۲k^۲}_{Q})=۲Q$

گزینهٔ (۴): مثلاً اگر $n=۵$ قرار دهیم، حاصل اول نخواهد بود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۹ کدام گزاره با سور $\forall x \in \mathbb{R}$ درست است؟

۱) $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$

۲) $x^2 + x + 1 \geq 0$

۳) $(\sqrt{|x|})^2 = x$

۴) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

مشاوره دقت کنید که $1 \geq 1$ و $0 \geq 1$ هر دو درست‌اند. علامت «$\geq$» به معنای بیشتر یا مساوی است و اگر یکی از این دوتا برقرار شود، درست است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

سور عمومی و وجودی

نام سور	علامت	چطور بخوانیم	نگارش
عمومی	$\forall$	برای هر، همیشه	گزاره؛ دامنه $\forall x \in$
وجودی	$\exists$	بعضی اوقات، حداقل یکی وجود دارد.	گزاره؛ دامنه $\exists x \in$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: گزاره برای هر x در $\mathbb{R}$ باید درست باشد. همین گفتن هر x در $\mathbb{R}$، گزینه‌های (۱) و (۴) را رد می‌کند چون گزینهٔ (۱) برای $x = 0$ و گزینهٔ (۴) به ازای $x = 1$ بی‌معنی هستند.

گام دوم: در گزینهٔ (۳) جواب $(\sqrt{|x|})^2$ برابر x شده که برای $x < 0$ درست نیست.

گام سوم: پس جواب، گزینهٔ (۲) است. عبارت $x^2 + x + 1$ همواره مثبت است (چون دلتا منفی و ضریب x^2 مثبت است)، پس $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 + x + 1 \geq 0$ همواره درست است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۰ گزارهٔ $(p \wedge q) \vee (\sim p \Rightarrow q)$ با کدام گزاره معادل است؟

۱) p ۲) q ۳) $p \vee q$ ۴) $p \wedge q$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

بررسی گزاره‌ها با جبر گزاره

برای ساده‌کردن عبارت با جبر گزاره‌ها، علاوه بر ویژگی‌های جابه‌جایی و شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری در $\wedge$ و $\vee$، ویژگی‌های زیر را داریم:

۱) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ تبدیل شرطی به فصلی

۲) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ دمورگان

۳) $p \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (p \vee q) \equiv p$ جذب

۴) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ عطف مقدمات

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای ساده‌کردن گزاره، اول شرطی را به فصلی تبدیل می‌کنیم:

$$(p \wedge q) \vee (\sim p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (p \vee q)$$

گام دوم: حالا شرکت‌پذیری:

$$\equiv ((p \wedge q) \vee p) \vee q$$

و قانون جذب:

$$\equiv p \vee q$$

یه‌جور دیگه

جدول ارزش هم سریع است:

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow q$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \Rightarrow q)$
د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	د	ن	ن

همان ارزش‌های $p \vee q$ است.

کنکور

گزارهٔ $r \Rightarrow (p \wedge q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ *(سؤال ۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)*

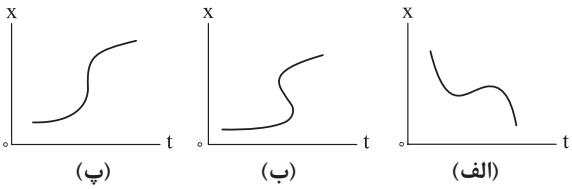
۱) $p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$ ۲) $r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

۳) $\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$ ۴) $\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۱ چه تعداد از نمودارهای زیر، می‌تواند نشان‌دهندهٔ نمودار مکان ـ زمان متحرکی باشد که در راستای محور x حرکت می‌کند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر



مشاوره همواره تعدادی از سؤال‌های کنکور، از دل پرسش‌ها، تمرین‌ها و حتی مثال‌های کتاب درسی مطرح می‌شوند، پس حتماً کتاب درسی را جدی بگیرید و به جزئیات آن دقت کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) معادلهٔ مکان ـ زمان یک جسم، مکان جسم را به صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد:

$$x = f(t)$$

۲) **نمودار مکان ـ زمان**: در این نمودار، مکان را روی محور قائم و زمان را روی محور افقی نشان می‌دهیم؛ در واقع این نمودار، رسم تابع یا معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک است.

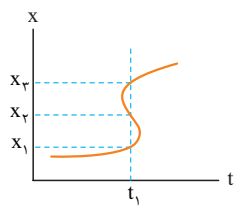
۳) در نمودار مکان ـ زمان یک جسم که روی خط راست حرکت می‌کند، اگر خطی را عمود بر محور افقی رسم کنیم، نمودار مکان ـ زمان را حداکثر در یک نقطه می‌تواند قطع کند؛ چون در غیر این صورت، متحرک باید در یک زمان مشخص، در دو یا چند مکان مختلف قرار داشته باشد که امکان‌پذیر نیست.

پاسخ خیلی تشریحی

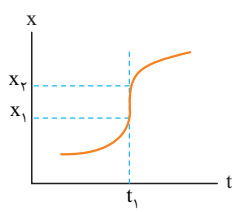
نمودارهای داده‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) درست است؛ چون در بازهٔ زمانی‌ای که نمودار رسم شده است، در هر لحظه، متحرک فقط در یک مکان یکتای x قرار دارد.

ب) نادرست است؛ زیرا مطابق شکل، در لحظهٔ t_1، متحرک هم‌زمان در سه مکان مختلف x_1، x_2 و x_3 قرار دارد که چنین چیزی امکان‌پذیر نیست:



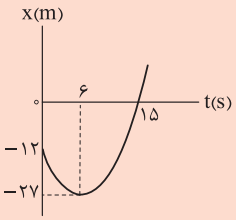
پ) نادرست است؛ چون مطابق شکل، در لحظهٔ t_1، متحرک هم‌زمان در مکان‌های مختلفی بین x_1 تا x_2 قرار دارد که این موضوع غیرممکن است:



بنابراین فقط شکل (الف) درست است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۲ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه‌ای که بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟



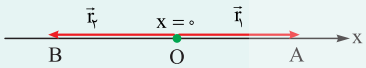
۱) ۰/۸
۲) ۲/۵
۳) ۲/۸
۴) ۳۰

مشاوره در کنکورهای سراسری چند سال اخیر، فقط تعداد محدودی از سؤالات فیزیک به صورت چالشی و سخت مطرح شده‌اند. بسیاری از سؤال‌ها مانند سؤال شاهد در همین تست، به راحتی و با کمی دقت حل می‌شوند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند، بردار مکان جسم در آن لحظه، نام دارد؛ مثلاً در حرکت روی محور x، در لحظه‌هایی که متحرک در مکان‌های مثبت ($x > 0$) قرار دارد، بردار مکان آن در جهت محور x است، اما در لحظه‌هایی که متحرک در مکان‌های منفی ($x < 0$) قرار دارد، بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است.



$\vec{r}_1$: بردار مکان نقطهٔ A

$\vec{r}_2$: بردار مکان نقطهٔ B

۲) تندی متوسط، کمیتی نرده‌ای است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

s_{av}: تندی متوسط (m/s)

ℓ: مسافت پیموده‌شده (m)

Δt: بازهٔ زمانی (s)

۳) مسافت، یعنی طول مسیر پیموده‌شده توسط متحرک و یک کمیت نرده‌ای است.

نکته تندی متوسط و مسافت همواره با علامت مثبت به کار می‌روند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۵ s، $x < 0$ بوده و بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است. مسافت پیموده‌شده توسط متحرک را در این بازهٔ زمانی به دست می‌آوریم:

$$\ell = |-۲۷-(-۱۲)| + (۰-(-۲۷)) = ۱۵ + ۲۷ = ۴۲ \text{ m}$$

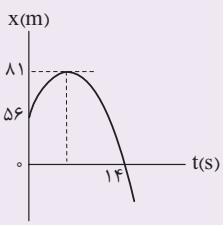
گام دوم: تندی متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۵ s را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۴۲}{۱۵-۰} = ۲/۸ \text{ m/s}$$

گول نخوری اگر به جای مسافت از جابه‌جایی در محاسبات خود استفاده کنید، در دام گزینهٔ (۱) می‌افتید.

کنکور

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل است. تندی متوسط در بازهٔ زمانی که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، چند متر بر ثانیه است؟ *(سؤال ۴۸ کنکور تجربی ۱۴۰۵)*



۱) ۵
۲) ۱۰
۳) $\frac{۵۳}{۷}$
۴) $\frac{۲۳}{۷}$

۴۳ متحرکی با سرعت ثابت در راستای محور x در حرکت است. اگر این متحرک در لحظهٔ $t_1 = 2\ s$ در مکان $x_1 = 6\ m$ و در لحظهٔ $t_2 = 4\ s$ در $x_2 = 14\ m$ قرار داشته باشد، معادلهٔ مکان ـ زمان آن در SI کدام است؟

۱) $x = 2t + 2$
۲) $x = 2t + 6$
۳) $x = 4t - 2$
۴) $x = -4t + 14$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint با استفاده از رابطهٔ $v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$، سرعت متحرک را به دست آورید، سپس با قراردادن مختصات یکی از نقاط داده‌شده در معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت، x_0 را پیدا کنید تا معادلهٔ مکان ـ زمان کامل شود.

درس Box

۱) **رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت روی محور x:**

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

v_{av}: سرعت متوسط (m/s)

Δx: جابه‌جایی (m)

Δt: بازهٔ زمانی (s)

x_1: مکان متحرک در لحظهٔ t_1 (m)

x_2: مکان متحرک در لحظهٔ t_2 (m)

۲) **حرکت با سرعت ثابت:** در این نوع حرکت، اندازه و جهت سرعت متحرک، در طول مسیر ثابت است؛ یعنی سرعت متوسط متحرک (v_{av}) در هر بازهٔ زمانی دلخواه برابر با سرعت لحظه‌ای آن (v) است:

$$v = v_{av}$$

۳) **معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت:**

$$x = vt + x_0$$

x: مکان متحرک در لحظهٔ t (m)

x_0: مکان اولیه یا مبدأ حرکت که مکان متحرک در لحظهٔ $t = 0$ است (m)

v: سرعت متحرک (m/s)

t: زمان (s)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون حرکت با سرعت ثابت است، سرعت متوسط متحرک با سرعت لحظه‌ای آن برابر است و داریم:

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{14 - 6}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4\ m/s$$

گام دوم: مختصات یک نقطهٔ معلوم، مثلاً (t_1, x_1) را در معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت قرار می‌دهیم و مکان اولیهٔ متحرک (x_0) را به دست می‌آوریم:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[t=t_1=2\ s,\ x=x_1=6\ m]{v=4\ m/s} 6 = 4\times 2 + x_0 \Rightarrow x_0 = -2\ m$$

اکنون می‌توانیم معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را بنویسیم:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[x_0=-2\ m]{v=4\ m/s} x = 4t - 2$$

تیزبازی تنها گزینه‌ای که سرعت آن $4\ m/s$ است، گزینهٔ (۳) است و در همان گام اول می‌توانیم جواب درست را بزنیم.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۴ متحرکی ۵ s با سرعت ثابت $\vec{v}_1 = (12\ m/s)\vec{i}$ و در ادامه ۱۵ s با سرعت ثابت $\vec{v}_2 = (-6\ m/s)\vec{i}$ حرکت می‌کند. به ترتیب از راست به چپ، اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک در این ۲۰ s برابر چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۷/۵ ،۱/۵ ۲) ۹،۱/۵ ۳) ۷/۵ ،۳ ۴) ۹ ،۳

مشاوره رسم نمودار سرعت ـ زمان در بسیاری از سؤالات حرکت‌شناسی، کمک بزرگی به فهم بهتر سؤال و حل آن می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

نمودار سرعت ـ زمان متحرک را در دو مرحله رسم کنید و با استفاده از آن، جابه‌جایی و مسافت پیموده‌شده توسط متحرک را به دست آورید، سپس اندازهٔ سرعت متوسط را با رابطهٔ $|v_{av}| = \left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|$ و تندی متوسط را با رابطهٔ $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$ محاسبه کنید.

درس Box

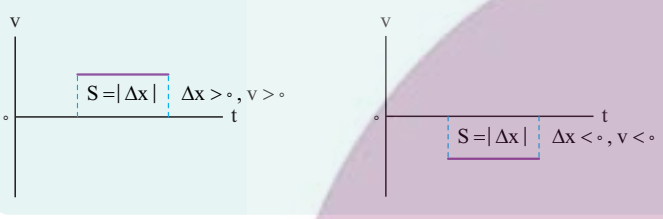
نمودار سرعت ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت:

۱) این نمودار به صورت یک خط افقی موازی با محور زمان است.

۲) مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان در هر بازهٔ زمانی، برابر جابه‌جایی (تغییر مکان) در آن بازه است $(S = \Delta x)$.

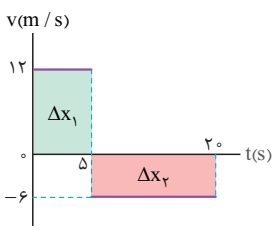
- برای قسمتی از نمودار که بالای محور t قرار دارد، $v > 0$ و $\Delta x > 0$ است.
- برای قسمتی از نمودار که زیر محور t قرار دارد، $v < 0$ و $\Delta x < 0$ است.

۳) قدرمطلق مساحت سطح محدود بین این دو نمودار و محور زمان، در هر بازهٔ زمانی برابر مسافت طی‌شده در آن بازه است $(|S| = \ell)$.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نمودار سرعت ـ زمان متحرک را در بازه‌های زمانی صفر تا ۵ s و ۵ s تا ۲۰ s رسم می‌کنیم و به کمک مساحت محدود بین این نمودار و محور زمان، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط متحرک را پیدا می‌کنیم:



$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (12\times 5) + (-6\times 15)$$
$$\Rightarrow \Delta x = 60 - 90 = -30\ m$$
$$\ell = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 60 + 90 = 150\ m$$

گام دوم: با معلوم‌بودن جابه‌جایی و مسافت طی‌شده، مقادیر خواسته‌شده در سؤال را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-30}{20-0} = -1/5\ m/s \Rightarrow |v_{av}| = 1/5\ m/s$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{150}{20} = 7/5\ m/s$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۵ معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = ۳t^۲ + ۵$ است. در بازه‌ای که تندی متحرک از $۸\ m/s$ به $۳۲\ m/s$ می‌رسد، اندازهٔ شتاب متوسط متحرک چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

با معلوم‌بودن تندی متحرک در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$، زمان‌های مربوطه را به دست آورید، سپس به کمک رابطهٔ شتاب متوسط $(a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t})$ به جواب برسید.

درس Box

شتاب متوسط: در هر بازهٔ زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازهٔ زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم. رابطهٔ شتاب متوسط در حرکت روی خط راست به صورت زیر است:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱}$$

a_{av}: شتاب متوسط $(m/s^۲)$

Δv: تغییر سرعت (m/s)

Δt: بازهٔ زمانی (s)

$v_۱$: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱$ (m/s)

$v_۲$: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲$ (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از آن‌جا که سرعت متحرک در تمام لحظه‌ها، مثبت است، تندی لحظه‌ای متحرک با سرعت لحظه‌ای آن یکسان است:

$$v = ۳t^۲ + ۵ \xrightarrow{t^۲ > ۰} v > ۰$$

گام دوم: تندی‌های داده‌شده را جداگانه در معادلهٔ سرعت ـ زمان قرار می‌دهیم و لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ مربوط به آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$v = ۳t^۲ + ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۸ = ۳t_۱^۲ + ۵ \Rightarrow ۳t_۱^۲ = ۳ \Rightarrow t_۱ = ۱\ s \\ ۳۲ = ۳t_۲^۲ + ۵ \Rightarrow ۳t_۲^۲ = ۲۷ \Rightarrow t_۲^۲ = ۹ \Rightarrow t_۲ = ۳\ s \end{cases}$$

گام سوم: رابطهٔ شتاب متوسط را می‌نویسیم و اندازهٔ آن را در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ پیدا می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۳۲ - ۸}{۳ - ۱} = ۱۲\ m/s^۲$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۶ در مبدأ زمان، متحرکی با تندی $30\ km/h$ در جهت محور x در حال حرکت است. اگر در لحظهٔ $t = 4\ s$، این متحرک با تندی $24\ km/h$ در خلاف جهت محور x در حال حرکت باشد، شتاب متوسط متحرک در ۴ ثانیهٔ اول چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) $\frac{15}{4}\vec{i}$

۲) $-\frac{15}{4}\vec{i}$

۳) $\frac{5}{12}\vec{i}$

۴) $-\frac{5}{12}\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint تغییر سرعت متحرک در ۴ ثانیهٔ اول حرکت را به دست آورید و یکای آن را به m/s تبدیل کنید، سپس به کمک رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$، شتاب متوسط را به دست آورید.

درس Box

۱) تبدیل یکای سرعت از km/h به m/s:

$$km/h \div 3/6 \Rightarrow m/s$$

۲) از آن‌جا که سرعت، کمیتی برداری است، در حرکت روی محور x، هنگامی که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، سرعت آن مثبت است، اما هنگامی که در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، سرعت آن منفی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: تغییر سرعت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $4\ s$ را به دست می‌آوریم و یکای آن را برحسب m/s می‌نویسیم. توجه داشته باشید که سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 4\ s$ در خلاف جهت محور x و منفی است:

$$\Delta v = v - v_0 = -24 - 30 = -54\ km/h$$

$$\Delta v = -54 \div 3/6 = -15\ m/s$$

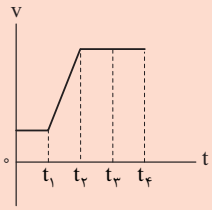
گام دوم: شتاب متوسط متحرک در ۴ ثانیهٔ اول حرکت را به دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-15}{4-0} = -\frac{15}{4}\ m/s^2$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = (-\frac{15}{4}\ m/s^2)\vec{i}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۷ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی مسیری مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در کدام بازهٔ زمانی زیر بزرگ‌تر است؟



۱) $t_۱$ تا $t = ۰$

۲) $t_۲$ تا $t = ۰$

۳) $t_۳$ تا $t = ۰$

۴) $t_۴$ تا $t = ۰$

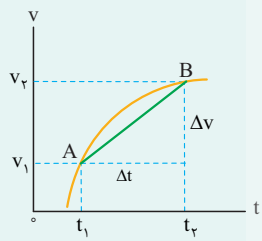
مشاوره در بین نمودارهای مختلف حرکت‌شناسی، نمودار سرعت ـ زمان بیشترین کاربرد را دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

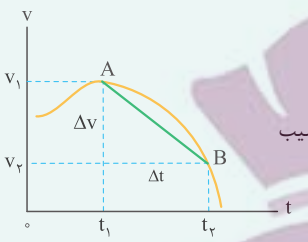
درس Box

شتاب متوسط بین دو لحظه، برابر شیب خطی است که نمودار سرعت ـ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

(شتاب متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$) $= a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ = شیب



$a_{av} > ۰$

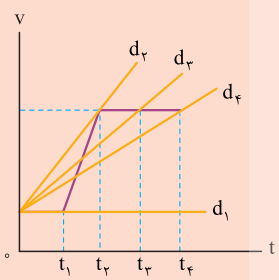


$a_{av} < ۰$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شیب خطی که نمودار سرعت ـ زمان را در هر یک از بازه‌های زمانی مطرح‌شده قطع می‌کند، روی نمودار نشان می‌دهیم، سپس شیب این خط‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. شیب خط‌های $d_۱$، $d_۲$، $d_۳$ و $d_۴$ به ترتیب مربوط به بازه‌های زمانی مطرح‌شده در گزینه‌های (۱) تا (۴) هستند.

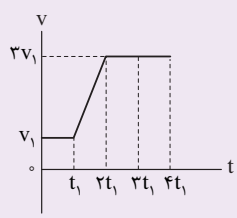
گام دوم: همان‌طور که در نمودار دیده می‌شود، شیب خط $d_۲$ نسبت به شیب سایر خط‌ها، بیشتر است و گزینهٔ (۲) درست است.



نکته در این‌جا امکان مقایسهٔ اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازه‌های زمانی مختلف به وسیلهٔ محاسبات عددی و استفاده از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ وجود نداشت.

کنکور

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی مسیری مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. سرعت متوسط در کدام بازهٔ زمانی بیشتر است؟ *(سؤال ۴۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))*



۱) $t_۱$ تا $t = ۰$

۲) $۲t_۱$ تا $t = ۰$

۳) $۳t_۱$ تا $t = ۰$

۴) $۴t_۱$ تا $t = ۰$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۸ از سطح زمین، گلوله‌ای در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر در ۵ ثانیهٔ اول حرکت گلوله، تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط آن به ترتیب $8\ m/s$ و $2\ m/s$ باشد، بیشینهٔ فاصلهٔ گلوله از سطح زمین چند متر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

مسافت طی‌شده و جابه‌جایی گلوله را در ۵ ثانیهٔ اول حرکت به دست آورید، سپس آن‌ها را روی یک شکل نشان دهید و جواب را پیدا کنید.

دقت کنید که این حرکت، سقوط آزاد نیست؛ بلکه نوعی حرکت با شتاب ثابت است که در راستای محور y صورت می‌گیرد.

درس Box

مقایسهٔ مسافت و جابه‌جایی:

- مسافت یعنی طول مسیر پیموده‌شده توسط متحرک، اما جابه‌جایی، پاره‌خط جهت‌داری است که مکان شروع حرکت را به مکان پایانی آن وصل می‌کند.
- مسافت، یک کمیت نرده‌ای است. اما جابه‌جایی، کمیتی برداری است.
- در صورتی که حرکت بدون تغییر جهت باشد، اندازهٔ جابه‌جایی با مسافت، برابر است، اما در حالت کلی داریم:

اندازهٔ جابه‌جایی ≤ مسافت

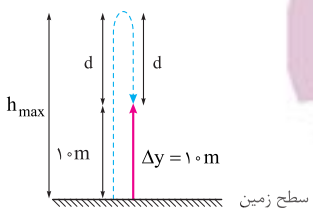
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با معلوم‌بودن تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط، مقادیر مسافت طی‌شده (ℓ) و جابه‌جایی در راستای قائم (Δy) را در ۵ ثانیهٔ اول حرکت به دست می‌آوریم. توجه داشته باشید که چون گلوله از سطح زمین و رو به بالا پرتاب شده است، در تمام بازه‌های زمانی حرکت، جابه‌جایی آن رو به بالا و با علامت مثبت است:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 8 = \frac{\ell}{5} \Rightarrow \ell = 40\ m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{\Delta y}{5} \Rightarrow \Delta y = 10\ m$$

گام دوم: مسیر حرکت جسم را در شکل زیر نشان می‌دهیم. طول مسیر خط‌چین همان مسافت طی‌شده است. با توجه به تقارن در مسیر رفت و برگشت گلوله، می‌توان نوشت:



$$\ell = 10 + d + d \Rightarrow 40 = 10 + 2d$$

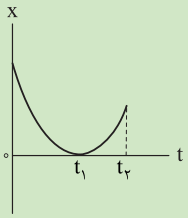
$$\Rightarrow 30 = 2d \Rightarrow d = 15\ m$$

بنابراین بیشینهٔ فاصلهٔ گلوله از سطح زمین (h_{max}) برابر است با:

$$h_{max} = d + 10 = 15 + 10 = 25\ m$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۹ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ این متحرک درست است؟



الف) در لحظهٔ t_1، جهت بردار مکان متحرک تغییر کرده است.

ب) در لحظهٔ t_1، جهت حرکت متحرک تغییر کرده است.

پ) در لحظهٔ t_1، شتاب متحرک برابر صفر است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

نمودار مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

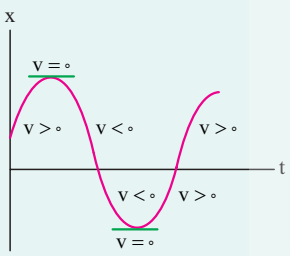
با توجه به این‌که معادلهٔ مکان در این نوع حرکت از درجهٔ دوم می‌باشد، نمودار آن به صورت قسمتی از یک سهمی است و نقطهٔ شروع آن روی محور x، مکان اولیه (x_0) را نشان می‌دهد:

اگر گودی این سهمی رو به بالا باشد، شتاب حرکت، مثبت است، اما اگر گودی این سهمی رو به پایین باشد، شتاب حرکت، منفی است.

تعیین سرعت لحظه‌ای به کمک نمودار مکان ـ زمان:



۱) شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در هر لحظهٔ دلخواه t، سرعت متحرک در آن لحظه را نشان می‌دهد و بزرگی شیب این خط، بیانگر تندی متحرک در آن لحظه است:



۲) اگر علامت سرعت متحرک مثبت باشد، یعنی متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند؛ در این صورت، تندی و سرعت متحرک هم‌علامت‌اند، اما اگر علامت سرعت متحرکی، منفی باشد، یعنی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؛ در این حالت، تندی و سرعت متحرک مختلف‌العلامت هستند.

چند نکته دربارهٔ حرکت روی محور x:

۱) هرگاه متحرک از مبدأ مکان یا مبدأ محور ($x = ۰$) عبور کند، x تغییر علامت می‌دهد و جهت بردار مکان آن عوض می‌شود.

۲) اگر متحرک از مبدأ مکان دور شود، یعنی $|x|$ در حال افزایش است و اگر به مبدأ مکان نزدیک شود، یعنی $|x|$ در حال کاهش است.

۳) در لحظه‌ای که جهت حرکت تغییر می‌کند، $v = ۰$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

درستی یا نادرستی عبارت‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) نادرست است؛ در لحظهٔ t_1، متحرک به مبدأ مکان رسیده و متوقف شده است، اما محور t را قطع نکرده و وارد xهای منفی نشده است، بنابراین هم‌چنان در سوی مثبت محور x بوده و جهت بردار مکان آن تغییر نمی‌کند.

ب) درست است؛ از لحظهٔ صفر تا t_1، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده و سرعت آن منفی بوده است، اما در لحظهٔ t_1 متوقف شده، پس از تغییر جهت، در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 در جهت محور x حرکت کرده است.

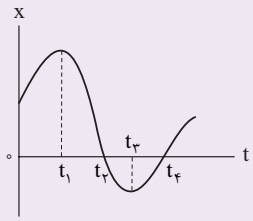
پ) نادرست است؛ در کل بازهٔ زمانی ۰ تا t_2، شتاب حرکت بزرگ‌تر از صفر است. در لحظهٔ t_1، سرعت متحرک صفر شده است؛ نه شتاب آن.

پس فقط یک مورد درست است.

امتحان نهایی

شکل زیر، نمودار مکان ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی مسیر مستقیم حرکت می‌کند.

(سؤال ۲ ـ امتحان نهایی ریاضی خرداد ۱۴۰۴)



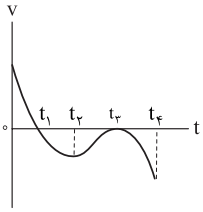
الف) سرعت متحرک در لحظهٔ t_3 چه‌قدر است؟

ب) یک لحظه را مشخص کنید که بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

پ) در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، بردار شتاب متحرک در جهت محور x است یا خلاف آن؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۰ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام موارد زیر دربارهٔ این متحرک درست است؟



الف) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، اندازهٔ شتاب متحرک در حال کاهش است.

ب) در بازهٔ زمانی t_3 تا t_4، تندی متحرک در حال افزایش است.

پ) در بازهٔ زمانی صفر تا t_4، جهت حرکت متحرک دو مرتبه تغییر کرده است.

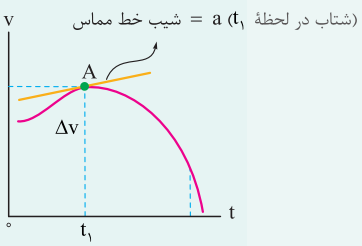
۱) «الف» و «ب»
۲) «الف» و «پ»
۳) «ب» و «پ»
۴) «الف»، «ب» و «پ»

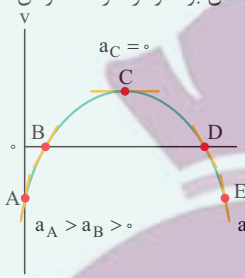
مشاوره هنگام بررسی و تحلیل نمودارهای حرکت‌شناسی، حتماً به محورهای آن دقت کنید؛ چون هر نمودار، ویژگی‌های خاص خود را دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

شتاب در هر لحظهٔ دلخواه t برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در آن لحظه است:





اگر نمودار v ـ t از محور t دور شود، یعنی حرکت تندشونده است؛ در این صورت، سرعت (v) و شتاب (a) هم‌علامت هستند:

$av > 0$

اما اگر نمودار v ـ t به محور t نزدیک شود، یعنی حرکت کندشونده است؛ در این صورت، سرعت (v) و شتاب (a) غیرهم‌علامت هستند:

$av < 0$

پاسخ خیلی تشریحی

درستی یا نادرستی موارد را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) درست است؛ در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان، کاهش می‌یابد و در لحظهٔ t_2 به صفر می‌رسد.

ب) درست است؛ در بازهٔ زمانی t_3 تا t_4، نمودار سرعت ـ زمان از محور t دور می‌شود؛ بنابراین گرچه سرعت آن منفی است، اما اندازهٔ سرعت یا تندی متحرک در حال افزایش است.

پ) نادرست است؛ در کل بازهٔ زمانی حرکت یعنی از صفر تا t_4، نمودار سرعت ـ زمان، فقط یک بار (در لحظهٔ t_1) محور t را قطع کرده است و در این لحظه، علامت سرعت از مثبت به منفی تغییر کرده است؛ یعنی جهت حرکت آن از مثبت به منفی تغییر کرده است.

پس دو مورد «الف» و «ب» درست هستند.

گول نخوری حواستون باشه که در لحظهٔ t_4، شتاب متحرک صفر شده است، اما علامت سرعت تغییر نکرده است. جهت حرکت نیز در لحظهٔ t_4 عوض نشده است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۱ متحرکی در لحظهٔ $t_1 = 0$ از مکان $x_1 = 10\ m$ در خلاف جهت محور x شروع به حرکت کرده و در لحظهٔ $t_2 = 20\ s$ به مکان $x_2 = 40\ m$ می‌رسد. اگر در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، جهت حرکت متحرک تنها یک مرتبه تغییر کرده و اختلاف تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط آن برابر $6\ m/s$ باشد، کدام موارد زیر دربارهٔ حرکت متحرک در این بازه درست است؟

الف) جهت بردار مکان متحرک یک مرتبه تغییر می‌کند.

ب) مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر $150\ m$ است.

پ) جهت حرکت متحرک در مکان $x = -50\ m$ تغییر می‌کند.

ت) متحرک ۴۰ درصد از زمان این بازه را در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۱) «الف» و «پ»
۲) «الف» و «ت»
۳) «ب» و «پ»
۴) «ب» و «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ابتدا جابه‌جایی و سرعت متوسط متحرک را پیدا کنید، سپس تندی متوسط و مسافت پیموده‌شده در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 را به دست آورید. در پایان، مسیر حرکت را روی محور x نشان دهید و موارد مطرح‌شده در گزینه‌ها را بررسی کنید.

درس Box

در حرکت روی محور x، اگر متحرک در یک بازهٔ زمانی معین تغییر جهت دهد، مسافت طی‌شده (ℓ) از اندازهٔ جابه‌جایی آن $|\Delta x|$ بیشتر است، در نتیجه $s_{av} > |v_{av}|$ خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جابه‌جایی و سرعت متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 40 - 10 = 30\ m$$

توجه داشته باشید که چون $\Delta x > 0$ است، سرعت متوسط (v_{av}) نیز مثبت است.

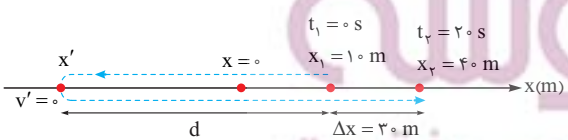
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{30}{20} = 1/5\ m/s$$

گام دوم: تندی متوسط و مسافت پیموده‌شده توسط متحرک را در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 به دست می‌آوریم:

$$s_{av} - v_{av} = 6 \Rightarrow s_{av} - 1/5 = 6 \Rightarrow s_{av} = 7/5\ m/s$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 7/5 = \frac{\ell}{20} \Rightarrow \ell = 150\ m$$

گام سوم: مسیر حرکت متحرک را به صورت خط‌چین روی محور x نشان می‌دهیم. با توجه به متن سؤال، متحرک باید در لحظهٔ t' در مکان x' متوقف شده و تغییر جهت داده باشد:



$$\ell = d + d + \Delta x \Rightarrow 150 = 2d + 30 \Rightarrow d = 60\ m$$

$$d = x_1 - x' \Rightarrow 60 = 10 - x' \Rightarrow x' = -50\ m$$

موارد مطرح‌شده در عبارت‌ها را به ترتیب بررسی کرده و درستی یا نادرستی آن‌ها را تعیین می‌کنیم:

الف) نادرست است؛ در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، جهت بردار مکان دو بار تغییر کرده است، زیرا متحرک در این بازهٔ زمانی، دو بار از مبدأ مکان عبور کرده است.

ب) درست است؛ (با توجه به نتیجهٔ به‌دست‌آمده در گام دوم)

پ) درست است؛ (با توجه به نتیجهٔ به‌دست‌آمده در گام سوم)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ت) نادرست است؛ چون معلوم نیست که نوع حرکت در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 چگونه است؛ در واقع عبارت «ت» تنها در صورتی درست است که کل حرکت با سرعت ثابت بوده باشد، اما لازمهٔ تغییرجهت حرکت آن است که بخشی از حرکت کندشونده و بخشی دیگر تندشونده باشد، بنابراین کل حرکت، نمی‌توانسته با سرعت ثابت باشد.

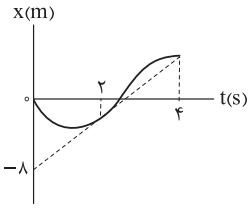
تیزبازی

حتی بدون محاسبات عددی در گام‌های اول و دوم، معلوم بود که عبارت «الف» نادرست است. با توجه به گزینه‌ها، حتماً باید عبارت «ب» درست باشد.

بنابراین به راحتی درستی عبارت «پ» نیز معلوم شده و اصلاً نیازی به بررسی عبارت «ت» نیست.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۲ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۲\ s$ با تندی متوسط آن در ۴ ثانیهٔ اول، یکسان و برابر با $۳\ m/s$ باشد، در لحظه‌ای که جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند، فاصلهٔ آن تا مبدأ مکان چند متر است؟ (خط‌چین رسم‌شده در لحظهٔ $t = ۲\ s$ بر نمودار مماس است.)



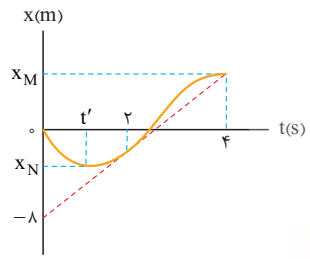
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۴\ s$ را به دست آورید، سپس مسافت طی‌شده در کل بازهٔ زمانی ۰ تا ۴ s را حساب کنید و در پایان، هنگامی که متحرک در جهت منفی محور x قرار دارد، بیشترین فاصلهٔ آن از مبدأ مکان را پیدا کنید.

درس Box شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در هر لحظه، سرعت لحظه‌ای را نشان می‌دهد. اگر سرعت مثبت باشد، شیب این خط، تندی لحظه‌ای را نیز نشان می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۴\ s$ را با x_M و مکان آن را در لحظه‌ای که بیشترین فاصله از مبدأ مکان را در جهت منفی دارد، با x_N نشان می‌دهیم:



$$\text{شیب خط چین} = s_{t=۲\,s} = \frac{x_M - (-۸)}{۴ - ۰}$$

$$\Rightarrow ۳ = \frac{x_M + ۸}{۴} \Rightarrow x_M = ۴\ m$$

گام دوم: مسافت طی‌شده در کل بازهٔ زمانی صفر تا ۴ s را با ℓ نشان می‌دهیم:

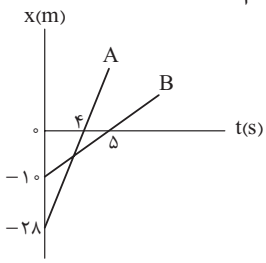
$$\ell = |x_N| + |x_N| + x_M = ۲|x_N| + ۴\ (m)$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۴ - ۰ = ۴\,s]{\ell = ۲|x_N| + ۴\,(m),\ s_{av} = ۳\,m/s} ۳ = \frac{۲|x_N| + ۴}{۴} \Rightarrow ۲|x_N| = ۸ \Rightarrow |x_N| = ۴\ m$$

در لحظهٔ t' که جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند، فاصلهٔ آن تا مبدأ مکان، همان $|x_N|$ یعنی $۴\ m$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۳ نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. در لحظه‌ای که بردار مکان متحرک A برابر $(۳/۵\ m)\vec{i}$ است، بردار مکان متحرک B برحسب متر کدام است؟



۱) $\vec{i}$

۲) $-\vec{i}$

۳) $۳\vec{i}$

۴) $-۳\vec{i}$

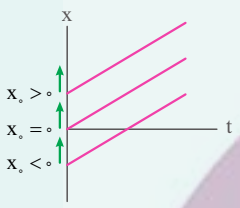
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

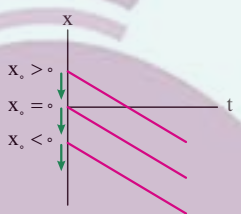
سرعت هر یک از دو متحرک را به دست آورده و معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را بنویسید، سپس لحظه‌ای را که متحرک A به مکان $x = ۳/۵\ m$ می‌رسد، به دست آورید و مکان متحرک B را در این لحظه پیدا کنید.

درس Box

نمودار مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت: با توجه به این‌که معادلهٔ مکان ـ زمان در این نوع حرکت، یک تابع درجه‌اول است، نمودار آن به صورت یک خط شیبدار است که شیب آن، سرعت متحرک را نشان می‌دهد.



$v > ۰$



$v < ۰$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار مکان ـ زمان داده‌شده، هر دو متحرک A و B با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. سرعت‌های v_A و v_B را به دست می‌آوریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} v_A = \frac{۰-(-۲۸)}{۴-۰} = ۷\ m/s \\ v_B = \frac{۰-(-۱۰)}{۵-۰} = ۲\ m/s \end{cases}$$

گام دوم: معادلهٔ مکان ـ زمان هر یک از دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۷t - ۲۸ \\ x_B = ۲t - ۱۰ \end{cases}$$

گام سوم: لحظه‌ای را که در آن، بردار مکان متحرک A برابر $(۳/۵\ m)\vec{i}$ می‌شود، به دست می‌آوریم:

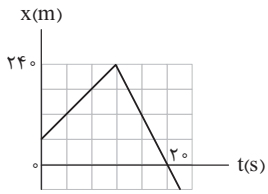
$$x_A = ۷t - ۲۸ \Rightarrow ۳/۵ = ۷t - ۲۸ \Rightarrow ۳۱/۵ = ۷t \Rightarrow t = ۴/۵\ s$$

گام چهارم: مکان متحرک B را در این لحظه حساب می‌کنیم:

$$x_B = ۲t - ۱۰ \xrightarrow{t=۴/۵\ s} x_B = ۲\times ۴/۵ - ۱۰ = -۱\ m \Rightarrow \vec{x}_B = (-۱\ m)\vec{i}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۴ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک در ۲۰ ثانیهٔ اول چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) $2/25\vec{i}$

۲) $-2/25\vec{i}$

۳) $0/75\vec{i}$

۴) $-0/75\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

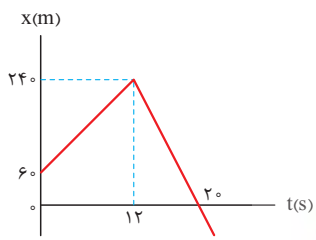
سرعت متحرک در ۱۲ ثانیهٔ اول حرکت، همان سرعت اولیه محسوب می‌شود. سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۱۲ s تا ۲۰ s نیز همان سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 20\ s$ را نشان می‌دهد. این سرعت‌ها را حساب کنید و به کمک آن‌ها، شتاب متوسط متحرک در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت را پیدا کنید.

درس Box

اگر متحرکی در یک بازهٔ زمانی با سرعت ثابت حرکت کند، سرعت متوسط آن در این بازهٔ زمانی، با سرعت لحظه‌ای متحرک در هر یک از لحظه‌ها برابر است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نمودار مکان ـ زمان متحرک را با جزئیات بیشتری رسم می‌کنیم، سپس سرعت متوسط متحرک را در ۱۲ ثانیهٔ اول حرکت و همچنین بازهٔ زمانی ۱۲ s تا ۲۰ s به دست می‌آوریم:



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} v_{av,1} = \frac{240 - 60}{12 - 0} = 15\ m/s \\ v_{av,2} = \frac{0 - 240}{20 - 12} = -30\ m/s \end{cases}$$

گام دوم: در لحظهٔ $t_1 = 0$، سرعت متحرک، همان $v_{av,1}$ است.

$$v_1 = v_{av,1} = 15\ m/s$$

در لحظهٔ $t_2 = 20\ s$، سرعت متحرک، همان $v_{av,2}$ است.

$$v_2 = v_{av,2} = -30\ m/s$$

گام سوم: شتاب متوسط متحرک را در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت به دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-30 - 15}{20 - 0} = \frac{-45}{20} = -2/25\ m/s^2$$

بنابراین بردار شتاب متوسط متحرک در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت برابر با $\vec{a}_{av} = (-2/25\ m/s)\vec{i}$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۵ قطاری به طول ۱۸۰ m با سرعت ثابت از تونلی به طول ۴۲۰ m عبور می‌کند. از لحظه‌ای که ابتدای قطار به ابتدای تونل می‌رسد، در مدت t_1 قطار به طور کامل وارد تونل می‌شود و به مدت t_2 کل قطار داخل تونل است. اگر $t_2 - t_1 = 2/4\ s$ باشد، اندازهٔ سرعت قطار چند متر بر ثانیه است؟

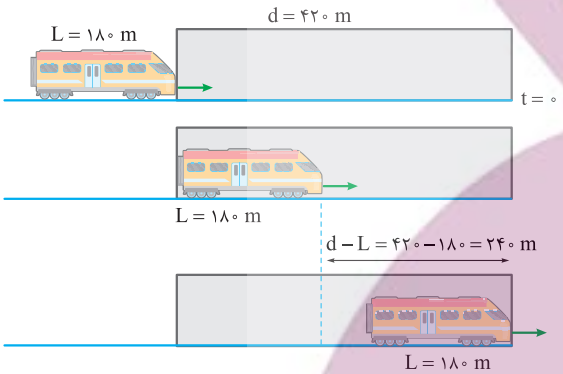
۱) ۱۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint t_1 و t_2 را برحسب سرعت قطار به دست آورید و اختلاف آن‌ها را برابر با $2/4\ s$ قرار دهید تا سرعت قطار به دست آید.

درس Box در مواردی که طول متحرک قابل ملاحظه باشد، به طوری که در سؤال مطرح شود، یک نقطه از متحرک مثلاً ابتدا یا انتهای آن را مبنا قرار داده و براساس آن نقطه، محاسبات را انجام می‌دهیم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدای قطار را به عنوان مبدأ در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که قطاری به طول L با سرعت ثابتی مانند v وارد تونلی به طول d شده و کل طول تونل را طی می‌کند، داریم:



گام دوم: t_1 و t_2 را برحسب سرعت قطار به دست می‌آوریم و اختلاف آن‌ها را برابر با $2/4\ s$ قرار می‌دهیم:

$$t_1 = \frac{L}{v} = \frac{۱۸۰}{v}\ ,\ t_2 = \frac{d-L}{v} = \frac{۲۴۰}{v}$$

$$t_2 - t_1 = 2/4\ s \Rightarrow \frac{۲۴۰}{v} - \frac{۱۸۰}{v} = 2/4 \Rightarrow \frac{۶۰}{v} = 2/4 \Rightarrow v = ۲۵\ m/s$$

گول نخوری حواستان باشد که اگر زمان t_2 را بر مبنای کل طول تونل به دست آورید، در دام گزینهٔ (۱) می‌افتید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۶ **در یک مسیر معین، رأس ساعت ۸ صبح دو خودروی (۱) و (۲) با تندی ثابت به ترتیب از شهرهای A و B به سمت شهر دیگر حرکت می‌کنند. دو خودرو رأس ساعت ۱۱ صبح از کنار یکدیگر عبور می‌کنند. اگر خودروی (۱) ساعت ۱۲ به شهر B برسد، خودروی (۲) چه ساعتی به شهر A می‌رسد؟**

۱) ۲۰ ۲) ۱۹ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

پاسخ: گزینهٔ ۱

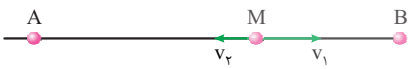
Hint باید مسئله را در دو بخش بررسی کنید. بخش اول تا لحظه‌ای که دو خودرو به هم می‌رسند. در این بخش، نسبت تندی‌های آن‌ها به دست می‌آید. بخش دوم ادامهٔ مسیر تا رسیدن به مقصد است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مراحل مختلف حرکت را به ترتیب زیر دنبال می‌کنیم:

ساعت ۸ حرکت شروع می‌شود.



ساعت ۱۱ دو خودرو در نقطهٔ M به هم می‌رسند.



خودروی (۱) ساعت ۱۲ به شهر B می‌رسد؛ یعنی فاصلهٔ MB را در مدت یک ساعت می‌پیماید؛ در حالی که خودروی (۲) همین فاصله را در مدت ۳ ساعت طی کرده بود:

$$\left.\begin{matrix} MB = v_1 \times 1 \\ MB = v_2 \times 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_1 = 3v_2$$

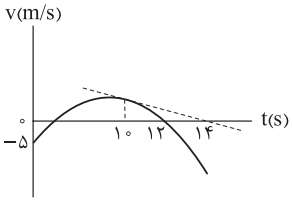
گام دوم: خودروی (۱) مسیر AM را در مدت ۳ ساعت طی کرده است. می‌خواهیم ببینیم خودروی (۲) که تندی کم‌تری دارد، همین مسیر را در چه مدتی می‌پیماید:

$$\left.\begin{matrix} AM = v_1 \times 3 \\ AM = v_2 \times \Delta t \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3v_1 = v_2\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{3v_1}{v_2} = \frac{3(3v_2)}{v_2} = 9\ h$$

بنابراین خودروی (۲)، ۹ ساعت پس از ساعت ۱۱، یعنی ساعت ۲۰ به شهر A می‌رسد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۷ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در ۱۰ s اول، نصف اندازهٔ شتاب آن در لحظهٔ $t_1 = 10\ s$ باشد، تندی متحرک در لحظهٔ t_1 برابر چند متر بر ثانیه است؟ (خط‌چین رسم‌شده در لحظهٔ t_1 بر نمودار مماس است.)



۱) ۱۰

۲) ۲۰

۳) $\frac{10}{3}$

۴) $\frac{20}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint تندی متحرک در لحظهٔ t_1، اندازهٔ سرعت متحرک در همین لحظه است. رابطهٔ بین شتاب متوسط در ۱۰ ثانیهٔ اول با شتاب متحرک، در لحظهٔ $t = 10\ s$ را بنویسید و از آن‌جا تندی متحرک در لحظهٔ t_1 را پیدا کنید.

پاسخ خیلی تشریحی اگر سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 10\ s$ را با v نشان دهیم، طبق متن سؤال داریم:

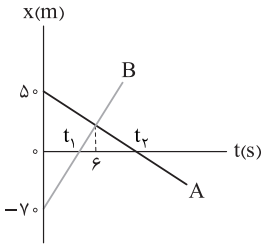
$$\left.\begin{array}{l} |a_{av(10\ s\ \text{تا}\ 0)}| = \frac{1}{2}|a_{t_1}| \\ a_{t_1} = \text{شیب خط‌چین مماس بر نمودار} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2} \times |\text{شیب خط‌چین}|$$

$$\Rightarrow \frac{v-(-5)}{10-0} = \frac{1}{2} \times \frac{v-0}{14-10} \Rightarrow \frac{v+5}{10} = \frac{v}{8} \Rightarrow v+5 = \frac{5}{4}v \Rightarrow 5 = \frac{1}{4}v \Rightarrow v = 20\ m/s$$

در لحظهٔ $t_1 = 10\ s$ که سرعت متحرک، مثبت است، تندی متحرک نیز همین مقدار را دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۸ نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر تندی متحرک A، $۸\ m/s$ کم‌تر از تندی متحرک B باشد، $\frac{t_۲}{t_۱}$ برابر کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۴}$

۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۴}$

۴) $\frac{۷}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint معادلهٔ مکان هر یک از دو متحرک را بنویسید و آن‌ها را در لحظهٔ $t = ۶\ s$ برابر با هم قرار دهید تا سرعت هر یک از دو متحرک را پیدا کنید، سپس با قراردادن $x_A = ۰$ و $x_B = ۰$ در معادله‌های مکان آن‌ها، به ترتیب $t_۲$ و $t_۱$ و در نهایت $\frac{t_۲}{t_۱}$ را حساب کنید.

درس Box هرگاه دو متحرک در لحظه‌ای به هم برسند یا از کنار هم بگذرند، می‌توان در آن لحظه، معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را مساوی با هم قرار داد و مجهول مورد نظر را به دست آورد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: سرعت متحرک B با تندی آن برابر است، زیرا $v_B > ۰$ است، اما تندی متحرک A، قرینهٔ سرعت آن است؛ یعنی $|v_A| = -v_A$ و $v_A < ۰$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_B - |v_A| = ۸\ m/s$$

گام دوم: نمودارهای مکان ـ زمان دو متحرک A و B در لحظهٔ $t = ۶\ s$ یکدیگر را قطع کرده‌اند؛ یعنی در این لحظه، مکان‌های یکسانی دارند:

$$x = vt + x_۰$$

$$t = ۶\ s \Rightarrow x_A = x_B \Rightarrow v_A \times ۶ + ۵۰ = v_B \times ۶ - ۷۰ \Rightarrow ۱۲۰ = ۶(v_B - v_A) \Rightarrow v_B - v_A = ۲۰\ m/s$$

گام سوم: نتایج به‌دست‌آمده در گام‌های اول و دوم را با هم ترکیب می‌کنیم تا v_A و v_B را به دست آوریم:

$$\begin{matrix} v_B - v_A = ۲۰ \\ v_B - |v_A| = ۸ \end{matrix} \Rightarrow -v_A + |v_A| = ۱۲ \xrightarrow{|v_A| = -v_A} -v_A - v_A = ۱۲ \Rightarrow v_A = -۶\ m/s$$

$$v_B - v_A = ۲۰ \Rightarrow v_B - (-۶) = ۲۰ \Rightarrow v_B = ۱۴\ m/s$$

گام چهارم: با قراردادن $x_A = ۰$ و $x_B = ۰$ در معادله‌های مکان دو متحرک، $t_۲$ و $t_۱$ را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} x_A = -۶t + ۵۰ \Rightarrow ۰ = -۶t_۲ + ۵۰ \Rightarrow t_۲ = \frac{۵۰}{۶} = \frac{۲۵}{۳}\ s \\ x_B = ۱۴t - ۷۰ \Rightarrow ۰ = ۱۴t_۱ - ۷۰ \Rightarrow t_۱ = \frac{۷۰}{۱۴} = ۵\ s \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{t_۲}{t_۱} = \frac{\frac{۲۵}{۳}}{\frac{۵}{۱}} = \frac{۵}{۳}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۹ معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -2t^2 + 21t - 40$ است. در بازهٔ زمانی که متحرک در حال دورشدن از مبدأ مکان و نزدیک‌شدن به مکان اولیه‌اش است، سرعت متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟

۱) $16\vec{i}$ ۲) $-16\vec{i}$

۳) $8\vec{i}$ ۴) $-8\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

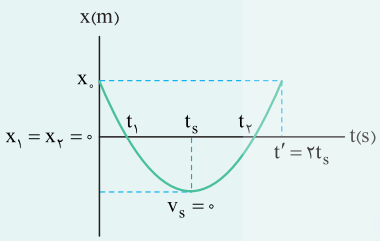
Hint

ریشه‌های معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده را به دست آورید و به کمک سایر اطلاعات موجود در این معادله، نمودار مکان ـ زمان آن را رسم کنید، سپس از تقارن نمودار سهمی شکل حاصل استفاده کنید و خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

درس Box

۱) در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، نمودار مکان ـ زمان به صورت یک سهمی است. در زوج لحظه‌هایی که نسبت به زمان رأس سهمی (t_s) تقارن دارند، متحرک دارای مکان‌های یکسان و تندی‌های یکسان است.

مثال



$$t_s = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

$$t_s = \frac{0 + t'}{2} \Rightarrow t' = 2t_s$$

۲) وقتی نمودار مکان ـ زمان به محور t ($x = 0$) نزدیک می‌شود؛ یعنی متحرک در حال نزدیک‌شدن به طرف مبدأ مکان است.

۳) معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

x: مکان متحرک (m)

x_0: مکان اولیهٔ متحرک یعنی مکان متحرک در لحظهٔ $t = 0$ (m)

a: شتاب حرکت (m/s^2)

t: زمان (s)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده، مکان اولیه، سرعت اولیه و شتاب حرکت را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2t^2 + 21t - 40 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -4\,m/s^2 \,,\ v_0 = 21\,m/s \,,\ x_0 = -40\,m$$

گام دوم: ریشه‌های معادلهٔ مکان ـ زمان را به دست می‌آوریم تا ببینیم نمودار مربوط به آن، در چه لحظه‌هایی محور زمان را قطع می‌کند یا به عبارتی از مبدأ مکان می‌گذرد:

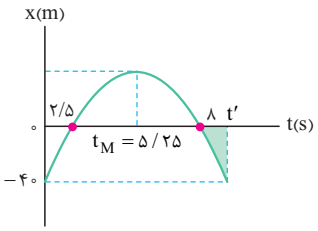
$$x = -2t^2 + 21t - 40 = 0$$

$$t = \frac{-21 \pm \sqrt{(21)^2 - 4(-2)(-40)}}{2(-2)} = \frac{-21 \pm \sqrt{121}}{-4} = \frac{-21 \pm 11}{-4} \left\{\begin{array}{l} t_1 = \frac{-10}{-4} = 2/5\ s \\ t_2 = \frac{-32}{-4} = 8\ s \end{array}\right.$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

گام سوم: نمودار مکان ـ زمان این متحرک به صورت یک سهمی است که گودی آن به طرف پایین است و از مکان $-۴۰\ m$ روی محور x شروع می‌شود.

با توجه به تقارن موجود در سهمی می‌توان نوشت:



$$t_M = \frac{۲/۵ + ۸}{۲} = ۵/۲۵\ s$$

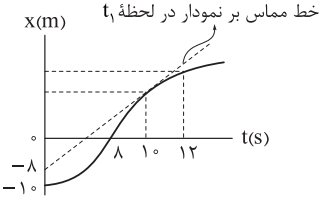
$$t' - ۸ = ۲/۵ - ۰ \Rightarrow t' = ۱۰/۵\ s$$

گام چهارم: در بازهٔ زمانی $۸\ s$ تا $۱۰/۵\ s$، متحرک در حال دورشدن از مبدأ مکان و نزدیک‌شدن به مکان اولیه‌اش است. سرعت متوسط متحرک را در این بازهٔ زمانی به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۴۰ - ۰}{۱۰/۵ - ۸} = \frac{-۴۰}{۲/۵} = -۱۶\ m/s \Rightarrow \vec{v}_{av} = (-۱۶\ m/s)\vec{i}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۰ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ ششم برابر $1\ m/s$ و سرعت متوسط آن در ۱۲ ثانیهٔ اول با سرعت آن در لحظهٔ $t_1 = 10\ s$ برابر باشد، در لحظهٔ t_1 فاصلهٔ متحرک از مکان اولیه‌اش چند متر است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۴

۳) ۲۰

۴) ۲۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

توضیحات متن سؤال در مورد سرعت‌های متوسط و لحظه‌ای را به صورت روابط ریاضی بنویسید تا دو معادله به دست آورید. مجهول‌های این دو معادله، مکان متحرک در لحظه‌های $t_1 = 10\ s$ و $t_2 = 12\ s$ هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مکان متحرک در لحظه‌های $t_1 = 10\ s$ و $t_2 = 12\ s$ را به ترتیب با x_1 و x_2 نشان می‌دهیم. با توجه به این‌که اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ ششم، برابر $1\ m/s$ است، می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 1 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow 1 = \frac{x_2 - x_1}{12 - 10} \Rightarrow x_2 - x_1 = 2\ m$$

گام دوم: سرعت متوسط متحرک در کل بازهٔ زمانی صفر تا ۱۲ s را با سرعت آن در لحظهٔ $t_1 = 10\ s$ که همان شیب خط‌چین مماس است، برابر قرار می‌دهیم تا معادلهٔ دیگری بین x_1 و x_2 پیدا کنیم:

$$v_{av(0\ to\ 12\ s)} = \text{شیب خط‌چین مماس} \Rightarrow \frac{x_2 - (-10)}{12 - 0} = \frac{x_1 - (-8)}{10 - 0}$$

$$\Rightarrow \frac{x_2 + 10}{12} = \frac{x_1 + 8}{10} \Rightarrow 6x_1 + 48 = 5x_2 + 50 \Rightarrow 6x_1 - 5x_2 = 2$$

گام سوم: از ترکیب معادلات به‌دست‌آمده در گام‌های اول و دوم، می‌توانیم فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان و هم‌چنین فاصلهٔ متحرک از مکان اولیه‌اش را به دست آوریم:

$$6x_1 - 5x_2 = 2 \xrightarrow{x_2 = x_1 + 2\ m} 6x_1 - 5(x_1 + 2) = 2 \Rightarrow 6x_1 - 5x_1 - 10 = 2 \Rightarrow x_1 = 12\ m$$

فاصلهٔ متحرک از مکان اولیه‌اش در لحظهٔ t_1 برابر است با:

$$x_1 - x_0 = 12 - (-10) = 22\ m$$

گول نخوری

اگر به خواستهٔ سؤال دقت نکنید و فقط x_1 را به دست آورید، در دام گزینهٔ (۱) می‌افتید و بعد از این همه تلاش با یک بی‌دقتی، نمرهٔ منفی می‌گیرید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت


دانلود رایگان تمام
آزمون‌های آزمایشی
در کانال تلگرام ما :
آزمون‌های آزمایشی
t.me/Azmoonha_Azmayeshi
دسترسی سریع
رایگان و دائمی
معتبر و جامع
ویژه کنکور سراسری
آزمون مخصوص تمام پایه‌ها و تمام رشته‌ها
موفقیت + برنامه تلاش
گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی
سنجش
زبده‌ستاز
گاج
آزمودهای سراسری
خیلی سبز!
کانون فرهنگی آموزش قلم چی
t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۶۱ یکای فرعی کدام کمیت، $\frac{kg}{m.s^2}$ است؟

۱) نیرو ۲) انرژی ۳) توان ۴) فشار

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

در کنار کمیت‌های اصلی، کمیت‌های فیزیکی‌ای وجود دارند که یکای مستقلی ندارند؛ بلکه یکای آن‌ها برحسب یکاهای اصلی بیان می‌شوند. این‌گونه کمیت‌ها را کمیت فرعی و یکای آن‌ها را یکای فرعی می‌نامند.

در واقع رابطه‌ها و وابستگی بین کمیت‌های فیزیکی به ما کمک می‌کنند تا لازم نباشد برای همهٔ کمیت‌های فیزیکی، یکای مستقلی تعریف کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

فشار وارد بر یک سطح برابر است با نیروی عمودی وارد بر یکای سطح و طبق رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{F}{A}$$

می‌دانیم یکای فرعی نیرو طبق رابطهٔ $F = ma$ برابر $\frac{kg.m}{s^2}$ و یکای فرعی مساحت سطح، m^2 است، بنابراین یکای فرعی فشار برابر است با:

$$\text{یکای فرعی فشار} = \frac{\frac{kg.m}{s^2}}{m^2} = \frac{kg}{m.s^2}$$

بنابراین پاسخ این تست، گزینهٔ (۴) است.

حالا برای بررسی بیشتر، یکای فرعی کمیت‌های انرژی و توان را نیز می‌نویسیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \text{یکای فرعی انرژی} = \text{یکای جرم} \times (\text{یکای تندی})^2 = kg(\frac{m}{s})^2 = \frac{kg.m^2}{s^2}$$

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \text{یکای فرعی توان} = \frac{\text{یکای انرژی}}{\text{یکای زمان}} = \frac{\frac{kg.m^2}{s^2}}{s} = \frac{kg.m^2}{s^3}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۲ گیاهی در مدت ۵ شبانه‌روز به اندازهٔ $1/5\ m$ رشد می‌کند. آهنگ رشد این گیاه به صورت نمادگذاری علمی و برحسب سانتی‌متر بر ساعت کدام است؟

نسبت تغییرات طول به مدت‌زمان سپری‌شده

۱) $0/3$
۲) 3×10^{-1}
۳) $1/25$
۴) $12/5\times10^{-1}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

برای این‌که یک عدد را به صورت نمادگذاری علمی بنویسیم، باید آن را به صورت $a\times10^{n}$ بنویسیم، به طوری که:

(۱) $1\le a<10$

(۲) $n=$ عدد صحیح

روش تبدیل زنجیره‌ای یکاها: در این روش، اندازهٔ کمیت را در یک یا چند ضریب تبدیل ضرب می‌کنیم. هر ضریب تبدیل به صورت یک کسر می‌باشد که برابر عدد یک است. ذکر یکاها در صورت و مخرج کسر الزامی است و باید به گونه‌ای انتخاب شوند که ما را به یکای مورد نظر برسانند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به این‌که گیاه در مدت ۵ شبانه‌روز به اندازهٔ $1/5\ m$ رشد می‌کند، طبق روش زنجیره‌ای تبدیل یکا، می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{آهنگ رشد گیاه}=\frac{1/5\ m}{5\ day}\times\frac{1\ cm}{10^{-2}\ m}\times\frac{1\ day}{24\ h}=\frac{1/5\ cm}{1/2\ h}=1/25\ cm/h$$

گام دوم: آهنگ رشد گیاه به صورت نمادگذاری علمی نیز همین می‌شود:

$$1/25\times10^{0}=1/25\ cm/h$$

کتاب درسی

سریع‌ترین رشد گیاه متعلق به گیاهی موسوم به هِسپِرویُوکا است که در مدت ۱۴ روز، ۳/۷ متر رشد می‌کند (شکل زیر). آهنگ رشد این گیاه برحسب میکرومتر بر ثانیه چه‌قدر است؟

(فیزیک (۱) ـ تمرین ۷ صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۳ روی صفحهٔ آمپرسنج مدرج «الف»، فاصلهٔ بین دو عدد متوالی ۲ A و ۴ A به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شده و آمپرسنج رقمی «ب»، مقدار ۰/۵۰ A را نشان می‌دهد. دقت اندازه‌گیری این دو آمپرسنج به ترتیب از راست به چپ چند آمپر است؟

۱) ۰/۱، ۰/۱ ۲) ۰/۰۱، ۰/۱

۳) ۰/۱، ۰/۲ ۴) ۰/۰۱، ۰/۲

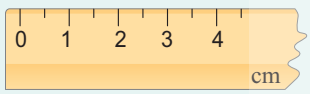
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

دقت اندازه‌گیری ابزارهای مدرج و رقمی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

ابزار مدرج: دقت اندازه‌گیری آن، برابر است با کمینهٔ درجه‌بندی آن ابزار.

ابزار رقمی: دقت اندازه‌گیری آن، برابر است با یک واحد از آخرین رقمی که آن ابزار نشان می‌دهد. مثلاً دقت اندازه‌گیری ابزارهای زیر برابر است با:



دقت: مدرج = ۰/۵ cm

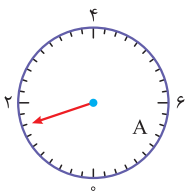


دقت: رقمی = ۱ °C

پاسخ خیلی تشریحی

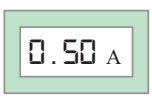
با توجه به درس‌باکس، دقت هر آمپرسنج را به دست می‌آوریم:

الف) آمپرسنج مدرج:



$$\text{دقت} = \frac{۴-۲}{۱۰} = ۰/۲\ \text{A}$$

ب) آمپرسنج رقمی:



دقت = ۰/۰۱ A

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۴ یک ظرف از مایعی به چگالی $1/2\ g/cm^3$ پر شده است. اگر جسمی به جرم ۳۰۰ g را به آرامی وارد این ظرف کنیم، ۱۸۰ g مایع از آن سرریز می‌شود. چگالی جسم چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟

۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۳

چون ظرف ابتدا پُر از مایع بوده، حجم مایع سرریز شده، همان تغییر حجم مایع است که با حجم جسم برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

چگالی یک جسم از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\rho\ (\text{چگالی}\ kg/m^3) = \frac{m\ (\text{جرم}\ kg)}{V\ (\text{حجم}\ m^3)}$$

اگر در رابطهٔ بالا جرم برحسب گرم و حجم برحسب سانتی‌متر مکعب قرار داده شده باشد، چگالی جسم برحسب g/cm^3 به دست می‌آید.

نکته

اگر جسمی را به طور کامل داخل یک مایع فرو ببریم، تغییرات حجم مایع، برابر است با حجم جسم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: حجم جسم را از روی تغییر حجم مایع حساب می‌کنیم:

$$\rho_{\text{مایع}} = \frac{m_{\text{مایع}}}{V_{\text{مایع}}} \Rightarrow 1/2 = \frac{180}{V_{\text{مایع}}} \Rightarrow V_{\text{مایع}} = 150\ cm^3$$

بنابراین با توجه به این‌که $150\ cm^3$ مایع سرریز شده است، درمی‌یابیم حجم جسم نیز $150\ cm^3$ است.

گام دوم: چگالی جسم را به دست می‌آوریم:

$$\rho_{\text{جسم}} = \frac{m_{\text{جسم}}}{V_{\text{جسم}}} \Rightarrow \rho_{\text{جسم}} = \frac{300}{150} = 2\ g/cm^3$$

یه‌جور دیگه

با توجه به این‌که حجم جسم و مایع بیرون‌ریخته یکسان است، از روی نسبت جرم‌ها و چگالی مایع، چگالی جسم را حساب می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow{\text{یکسان: V}} \frac{\rho_{\text{جسم}}}{\rho_{\text{مایع}}} = \frac{m_{\text{جسم}}}{m_{\text{مایع}}} \Rightarrow \frac{\rho_{\text{جسم}}}{1/2} = \frac{300}{180} = \frac{5}{3} \Rightarrow \rho_{\text{جسم}} = 2\ g/cm^3$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۵ **جرم یک کرهٔ توپر، ۳ برابر یک مخروط توپر است. اگر شعاع قاعدهٔ مخروط برابر با شعاع کره و ارتفاع مخروط برابر با قطر کره باشد، چگالی کره چند برابر چگالی مخروط است؟**

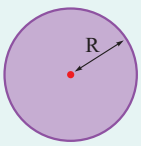
۱) ۶ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

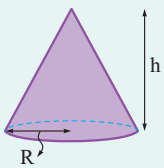
حجم‌های کره و مخروط طبق رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

کره:



$$V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

مخروط:



$$V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ \times h$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نسبت حجم مخروط به حجم کره را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} R_{\text{مخروط}} = R_{\text{کره}} = R \\ h = ۲R \end{cases}$$

$$\frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{کره}}} = \frac{\frac{۱}{۳}\pi R^۲ \times ۲R}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳} = \frac{۱}{۲}$$

گام دوم: نسبت چگالی کره به چگالی مخروط را حساب می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_{\text{کره}}}{\rho_{\text{مخروط}}} = \frac{m_{\text{کره}}}{m_{\text{مخروط}}} \times \frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{کره}}} = ۳ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۶ دو مایع مخلوط‌شدنی A و B با چگالی‌های ρ_A و ρ_B در اختیار داریم. اگر جرم‌های مساوی از این دو مایع را مخلوط کنیم، چگالی مخلوط حاصل $2/4\ g/cm^3$ و اگر حجم‌های مساوی از این دو مایع را مخلوط کنیم، چگالی مخلوط حاصل $2/5\ g/cm^3$ می‌شود. اختلاف چگالی این دو مایع برابر چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟ (از کاهش حجم مایعات هنگام مخلوط‌کردن آن‌ها صرف نظر شود.)

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸

۳) ۱ ۴) ۱/۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

برای دو مایع مخلوط‌شدنی A و B، اگر در اثر مخلوط‌شدن تغییر حجم رخ ندهد:

اگر حجم مساوی از دو مایع را مخلوط کنیم، چگالی مخلوط برابر است با:

$$\rho_{مخلوط} = \frac{\rho_A + \rho_B}{2}$$

اگر جرم مساوی از دو مایع را مخلوط کنیم، چگالی مخلوط برابر است با:

$$\rho_{مخلوط} = \frac{2\rho_A \times \rho_B}{\rho_A + \rho_B}$$

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به این‌که در اثر مخلوط‌شدن دو مایع، تغییر حجم رخ نداده است، می‌توانیم بنویسیم:

حجم مساوی از مایع‌های A و B: $\rho'_{مخلوط} = \frac{\rho_A + \rho_B}{2} = 2/5 \Rightarrow \rho_A + \rho_B = 5$

جرم مساوی از مایع‌های A و B: $\rho_{مخلوط} = \frac{2\rho_A \times \rho_B}{\rho_A + \rho_B} = 2/4 \xrightarrow{\rho_A+\rho_B=5} \frac{2\rho_A \times \rho_B}{5} = 2/4$

$$\Rightarrow \rho_A \times \rho_B = 6$$

در نهایت باید دو عدد داشته باشیم که مجموع آن‌ها ۵ و ضرب آن‌ها ۶ است که درمی‌یابیم این دو عدد ۲ و ۳ هستند، بنابراین اختلاف چگالی دو مایع برابر است با:

$$\Delta\rho = 3 - 2 = 1\ g/cm^3$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۷ کدام‌یک از موارد زیر، درست است؟

الف) فاصلهٔ ذرات سازندهٔ مایع و جامد تقریباً یکسان و کم‌تر از فاصلهٔ ذرات سازندهٔ گاز است.

ب) افزایش دمای یک مایع، سبب افزایش اندازهٔ نیروی هم‌چسبی مولکول‌های آن می‌شود.

پ) وقتی مایعی به آهستگی سرد می‌شود، اغلب جامدهای بی‌شکل (آمورف) تشکیل می‌شوند.

ت) در مسیر حرکت یک شاره در امتداد افق، با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد.

۱) «الف» و «ب»
۲) «الف» و «ت»
۳) «ب» و «پ»
۴) «ب» و «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارات:

الف) طبق متن کتاب درسی، درست است.

ب) نادرست است؛ زیرا افزایش دمای یک مایع، سبب کاهش اندازهٔ نیروی هم‌چسبی مولکول‌های آن می‌شود.

پ) نادرست است؛ زیرا هرگاه مایعی به آهستگی سرد شود، اغلب جامد بلورین تشکیل می‌شود.

ت) طبق اصل برنولی، درست است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۸ در یک ظرف استوانه‌ای به سطح مقطع $150\ cm^2$، $2/4\ kg$ روغن ریخته شده است. فشار در کف این ظرف چند کیلوپاسکال است؟ ($g = 10\ N/kg$، $P_0 = 75\ cmHg$ و چگالی جیوه $13/6\ g/cm^3$ است.)

۱) ۱۰۲/۶
۲) ۱۰۳/۶
۳) ۱۱۷
۴) ۱۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

فشار در کف یک ظرف محتوی مایع از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P = P_{مایع} + P_0$$

نکته

- اگر ظرف محتوی مایع به شکل استوانه باشد، فشار ناشی از مایع در کف ظرف را علاوه بر رابطهٔ $P_{مایع} = \rho gh$، می‌توانیم از رابطهٔ $P_{مایع} = \frac{m_{مایع} g}{A_{ظرف}}$ به دست آوریم.
- اگر چگالی جیوه $13/6\ g/cm^3$ و $g = 10\ N/kg$ باشد، هر سانتی‌متر جیوه معادل $1360\ Pa$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فشار هوا را برحسب kPa به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که چگالی جیوه $13/6\ g/cm^3$ و $g = 10\ N/kg$ است، داریم:

$$P_0 = 75\ cmHg \times \frac{1360\ Pa}{1\ cmHg} \times \frac{1\ kPa}{1000\ Pa} = 102\ kPa$$

گام دوم: فشار ناشی از مایع در کف ظرف را برحسب kPa حساب می‌کنیم. با توجه به این‌که ظرف استوانه‌ای‌شکل است، داریم:

$$P_{مایع} = \frac{m_{مایع} g}{A_{ظرف}} \Rightarrow P_{مایع} = \frac{2/4 \times 10}{150 \times 10^{-4}} = 1600\ Pa = 1/6\ kPa$$

گام سوم: فشار در کف ظرف را برحسب kPa به دست می‌آوریم:

$$P = P_{مایع} + P_0 \Rightarrow P = 1/6 + 102 = 103/6\ kPa$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۹ در مکانی که فشار هوا $98\ kPa$ است، از عمق ۱۶ سانتی‌متری مایعی به چگالی $1/25\ g/cm^3$ چند سانتی‌متر در راستای قائم پایین‌تر برویم تا فشار کل، ۱۰ درصد افزایش یابد؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۸۰ ۲) ۹۶ ۳) ۷۲ ۴) ۸۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ افزایش فشار ناشی از پایین‌رفتن در مایع، برابر است با ۱۰ درصد فشار در حالت اول، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

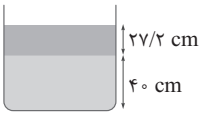
$$\Delta P = \frac{10}{100} \times P_1 \xrightarrow[P_1=\rho gh+P_0]{\Delta P=\rho g\Delta h} \rho g\Delta h = 0/1(\rho gh + P_0)$$

$$\xrightarrow[P_0=98\ kPa=98000\ Pa]{\rho=1/25\ g/cm^3=1250\ kg/m^3,\ h=16\ cm=0/16\ m} 1250\times 10\times \Delta h = 0/1(1250\times 10\times 0/16 + 98000)$$

$$\Rightarrow 12500\Delta h = 0/1(2000+98000) = 10000 \Rightarrow \Delta h = \frac{10000}{12500} = 0/8\ m = 80\ cm$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۰ در شکل زیر، ظرف، حاوی آب با چگالی $1\ g/cm^3$ و یک مایع دیگر با چگالی $1/7\ g/cm^3$ است. اگر فشار در کف ظرف برابر $77\ cmHg$ باشد، فشار هوای محیط چند کیلوپاسکال است؟ $(g = 10\ N/kg$ و $\rho_{جیوه} = 13/6\ g/cm^3)$



۱) ۱۰۸/۸

۲) ۱۰۲

۳) ۹۵/۲

۴) ۸۸/۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

برای بیان فشار یک مایع برحسب cmHg، کافی است فشار ناشی از مایع و جیوه را با هم برابر قرار دهیم و به رابطهٔ زیر برسیم:

$$P_{مایع} = P_{جیوه} \Rightarrow P(cmHg) = h_{جیوه} = \frac{\rho_{مایع}}{\rho_{جیوه}} \times h_{مایع}(cm)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فشار ناشی از هر یک از مایع‌ها را برحسب cmHg به دست می‌آوریم. می‌دانیم مایعی که بالاتر است، چگالی‌اش کم‌تر است، بنابراین داریم:

$$P_{(cmHg)} = \frac{\rho_{مایع}}{\rho_{جیوه}} \times h_{مایع}(cm) \Rightarrow \begin{cases} 1\ g/cm^3 \text{ مایع با چگالی } 27/2\ cm: P_1 = \frac{1}{13/6} \times 27/2 = 2\ cmHg \\ 1/7\ g/cm^3 \text{ مایع با چگالی } 40\ cm: P_2 = \frac{1/7}{13/6} \times 40 = 5\ cmHg \end{cases}$$

گام دوم: با داشتن فشار ناشی از مایع‌ها و فشار در کف ظرف، فشار هوا را به دست می‌آوریم:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 \Rightarrow 77 = P_0 + 2 + 5 \Rightarrow P_0 = 70\ cmHg$$

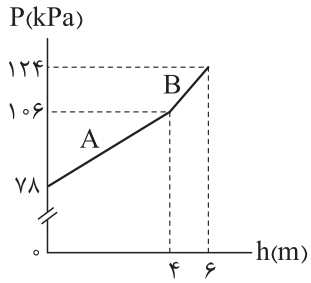
با توجه به این‌که چگالی جیوه $13/6\ g/cm^3$ و $g = 10\ N/kg$ است، داریم:

$$P_0 = 70\ cmHg \times \frac{1360\ Pa}{1\ cmHg} \times \frac{1\ kPa}{10^3\ Pa} = 95/2\ kPa$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۱ درون ظرفی استوانه‌ای، دو مایع مخلوط‌نشدنی A و B ریخته شده است. اگر نمودار فشار برحسب فاصله از سطح آزاد مایع‌ها در این ظرف به شکل زیر باشد، اختلاف فشار دو نقطه به فاصله‌های ۳ و ۵ متری از سطح آزاد مایع‌ها چند کیلوپاسکال است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

در مایع A ← ۳ و ۵ متری → در مایع B

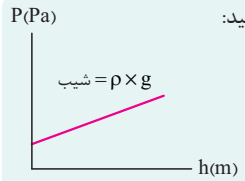


۱) ۱۸
۲) ۱۲
۳) ۲۰
۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

در نمودار فشار برحسب عمق یک مایع، شیب نمودار برابر با $\rho \times g$ است. به نمودار روبه‌رو توجه کنید:



دقت کنید، باید فشار برحسب Pa، عمق برحسب m و چگالی برحسب kg/m^3 باشد.

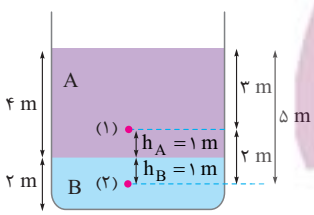
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به شیب نمودار، چگالی مایع‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب}_A = \frac{۱۰۶۰۰۰ - ۷۸۰۰۰}{۴} = ۷۰۰۰ \xrightarrow[g=۱۰\ N/kg]{\text{شیب}=\rho \times g} \rho_A \times ۱۰ = ۷۰۰۰ \Rightarrow \rho_A = ۷۰۰\ kg/m^3$$

$$\text{شیب}_B = \frac{۱۲۴۰۰۰ - ۱۰۶۰۰۰}{۲} = ۹۰۰۰ \Rightarrow \rho_B \times ۱۰ = ۹۰۰۰ \Rightarrow \rho_B = ۹۰۰\ kg/m^3$$

گام دوم: اختلاف فشار در دو نقطه به فاصله‌های ۳ m و ۵ m از سطح آزاد مایع را به دست می‌آوریم. با توجه به شکل مقابل داریم:

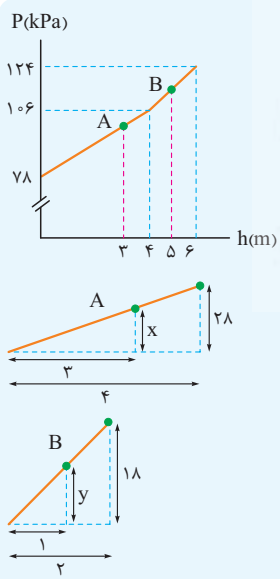


$$\Delta P = \rho_A g h_A + \rho_B g h_B$$

$$\Rightarrow \Delta P = (۷۰۰ \times ۱۰ \times ۱) + (۹۰۰ \times ۱۰ \times ۱) = ۱۶۰۰۰\ Pa = ۱۶\ kPa$$

یه‌جور دیگه

با یک تناسب، به راحتی می‌توانیم این سؤال را حل کنیم. با توجه به نمودار داریم:



$$\frac{x}{۲۸} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = ۲۱$$

$$\Rightarrow P_{\text{متری } ۳} = ۷۸ + ۲۱ = ۹۹\ kPa$$

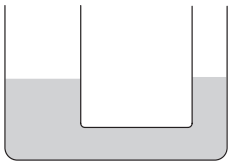
$$\frac{y}{۱۸} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = ۹$$

$$P_{\text{متری } ۵} = ۱۰۶ + ۹ = ۱۱۵\ kPa$$

$$\Rightarrow P_{\text{متری } ۵} - P_{\text{متری } ۳} = ۱۱۵ - ۹۹ = ۱۶\ kPa$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۲ در شکل زیر، مقداری مایع به چگالی $2\ g/cm^3$ درون لولهٔ Uشکل که سطح مقطع شاخه‌های سمت چپ و راست آن، به ترتیب $20\ cm^2$ و $5\ cm^2$ می‌باشد، در حال تعادل است. اگر به اندازهٔ یک لیتر آب در شاخهٔ سمت چپ لوله بریزیم، پس از تعادل، سطح مایع در شاخهٔ سمت راست لوله نسبت به حالت اولیه، چند سانتی‌متر بالاتر خواهد رفت؟ (دو مایع مخلوط ناشدنی‌اند و $\rho_{آب} = 1\ g/cm^3$)

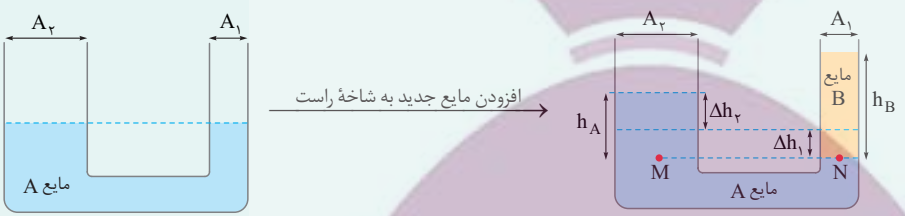


۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۲۵
۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

در لولهٔ Uشکل با سطح مقطع‌های متفاوت، در اثر اضافه‌کردن مایع جدید، حجم مایع اولیهٔ جابه‌جاشده در دو طرف لوله برابر است و مطابق شکل زیر می‌توانیم بنویسیم:



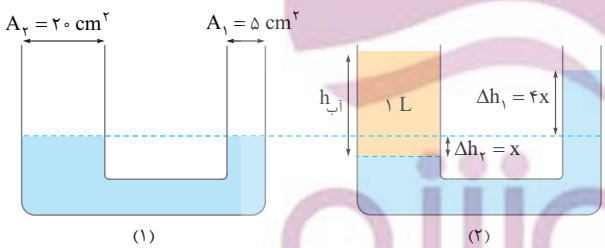
$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

با توجه به برابری فشار در نقاط M و N می‌توانیم بنویسیم:

$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_A g h_A = \rho_B g h_B \Rightarrow \rho_A h_A = \rho_B h_B$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

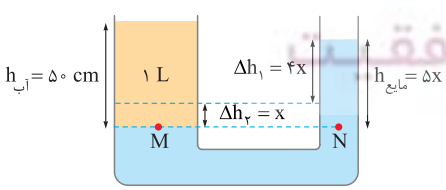
گام اول: لوله را به همراه مایع‌ها در هر دو حالت رسم می‌کنیم:



$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{20}{5} = 4$$

$$h_{آب} = \frac{V_{آب}}{A_2} = \frac{1000\ cm^3}{20\ cm^2} = 50\ cm$$

گام دوم: با توجه به برابری فشار در دو نقطهٔ M و N در شکل زیر، تغییر ارتفاع مایع در شاخهٔ سمت راست، یعنی $\Delta h_1 = 4x$ را حساب می‌کنیم:



$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_{آب} h_{آب} = \rho_{مایع} h_{مایع}$$

$$\Rightarrow 1 \times 50 = 2 \times 5x \Rightarrow x = 5\ cm$$

$$\Delta h_1 = 4x = 20\ cm$$

یه‌جور دیگه

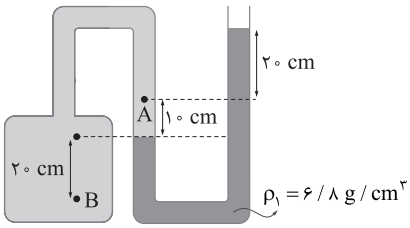
گام اول: افزایش فشاری که به هر نقطه از مایع داخل لوله اضافه می‌شود، به دست می‌آوریم:

$$\Delta P = \frac{mg_{آب}}{A_1 + A_2} = \frac{1 \times 10}{25 \times 10^{-4}} = 4000\ Pa$$

گام دوم: این افزایش فشار، همان افزایش فشار ناشی از تغییر ارتفاع مایع در شاخهٔ راست است، بنابراین داریم:

$$\Delta P = \rho g \Delta h \Rightarrow 4000 = 2000 \times 10 \times \Delta h \Rightarrow \Delta h = 0/2\ m = 20\ cm$$

۷۳ در شکل زیر، اگر اختلاف فشار دو نقطهٔ A و B برابر $۵/۱\ kPa$ باشد، فشار پیمانه‌ای نقطهٔ A چند سانتی‌متر جیوه است؟ $(\rho_{جیوه} = ۱۳/۶\ g/cm^۳ \text{ و } g = ۱۰\ N/kg)$



۱) ۱۵
۲) ۱۳/۷۵
۳) ۱۶/۲۵
۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اول با توجه به اختلاف فشار دو نقطهٔ A و B و داشتن فاصلهٔ قائم دو نقطه، چگالی مایع (۲) را حساب می‌کنیم، سپس برای محاسبهٔ فشار پیمانه‌ای در نقطهٔ A، ابتدا فشار ناشی از ۳۰ cm پایین‌رفتن در مایع (۱) را برحسب cmHg به دست می‌آوریم و بعد از آن، فشار ناشی از ۱۰ cm بالارفتن در مایع (۲) را برحسب cmHg به دست می‌آوریم، در نهایت فشار پیمانه‌ای نقطهٔ A را حساب می‌کنیم (توجه کنید وقتی ۱۰ cm در مایع (۲) بالا می‌رویم، فشار کاهش می‌یابد).

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** چگالی مایع (۲) را حساب می‌کنیم. با توجه به اختلاف فشار نقاط A و B داریم:

$$P_B - P_A = \rho_۲ g\Delta h \xrightarrow[\Delta h = ۳۰\ cm = ۰/۳\ m]{P_B - P_A = ۵۱۰۰\ Pa} ۵۱۰۰ = \rho_۲ \times ۱۰ \times ۰/۳ \Rightarrow \rho_۲ = ۱۷۰۰\ kg/m^۳ = ۱/۷\ g/cm^۳$$

گام دوم: فشار پیمانه‌ای نقطهٔ A را برحسب cmHg حساب می‌کنیم:

$$P(cmHg) = \frac{\rho_{مایع}}{\rho_{جیوه}} \times h_{مایع}(cm) \Rightarrow \begin{cases} (۱)\ \text{مایع}\ ۳۰\ cm : P_۱ = \frac{۶/۸}{۱۳/۶} \times ۳۰ = ۱۵\ cmHg \\ (۲)\ \text{مایع}\ ۱۰\ cm : P_۲ = \frac{۱/۷}{۱۳/۶} \times ۱۰ = ۱/۲۵\ cmHg \end{cases}$$

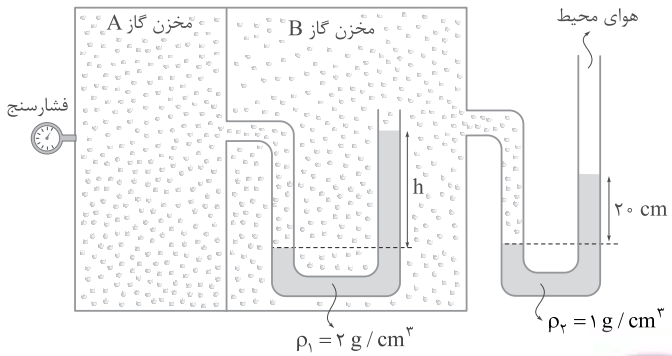
می‌دانیم اگر داخل یک مایع پایین برویم، فشار افزایش و اگر بالا برویم، فشار کاهش می‌یابد؛ بنابراین فشار پیمانه‌ای در نقطهٔ A برابر است با:

$$P_{g_A} = P_۱ - P_۲ = ۱۵ - ۱/۲۵ = ۱۳/۷۵\ cmHg$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۴ در شکل زیر، اگر فشارسنج مقدار ۰/۴ atm را نشان دهد، h چند سانتی‌متر است؟

$(P_0 = 1\,atm = 100\,kPa$ و $g = 10\,N/kg)$

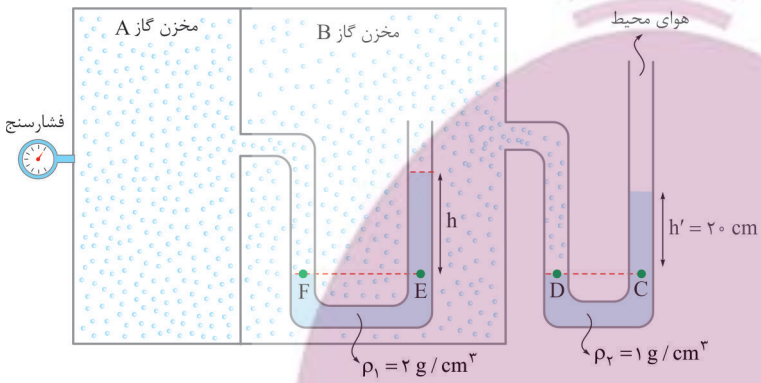


۱) ۱۴۰
۲) ۱۵۰
۳) ۱۹۰
۴) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته فشارسنج، فشار پیمانه‌ای (فشار بدون در نظر گرفتن فشار هوا) را نشان می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی مطابق شکل زیر، می‌توانیم بنویسیم:



$P_{g_A} = 0/4\,atm = 40000\,Pa$

۱) $P_C = P_D = P_B = P_0 + \rho_2 g h' = P_0 + (1000 \times 10 \times 0/2) = P_0 + 2000\,(Pa)$

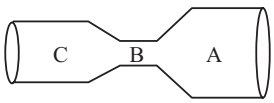
۲) $P_E = P_F = P_A = P_0 + 40000$

۳) $P_E = P_B + \rho_1 g h \xrightarrow{(1),(2)} P_0 + 40000 = P_0 + 2000 + (2000 \times 10 \times h)$

$\Rightarrow h = 1/9\,m = 190\,cm$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۵ در شکل زیر، درون لولهٔ افقی، شاره‌ای به صورت پایا و با جریان لایه‌ای در حال عبور است. وقتی شاره از لولهٔ A وارد لولهٔ B می‌شود، تندی آن ۶۰ درصد افزایش و وقتی از لولهٔ B وارد لولهٔ C می‌شود، تندی آن ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. قطر مقطع لولهٔ A چند برابر قطر مقطع لولهٔ C است؟



۱) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۴}$

۲) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۸}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۵}$

۴) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

طبق معادلهٔ پیوستگی، وقتی که یک شارهٔ تراکم‌ناپذیر در یک لوله با قطر مقطع‌های متفاوت به صورت لایه‌ای و پایا جریان دارد، تندی جریان شاره با سطح مقطع لوله رابطهٔ معکوس دارد و می‌توانیم بنویسیم:

$$A_۱v_۱ = A_۲v_۲ \Rightarrow \frac{v_۱}{v_۲} = \frac{A_۲}{A_۱} = (\frac{D_۲}{D_۱})^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نسبت تندی جریان شاره در لولهٔ C به لولهٔ A را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} v_B = v_A + \frac{۶۰}{۱۰۰}v_A = ۱/۶\, v_A \\ v_C = v_B - \frac{۲۰}{۱۰۰}v_B = ۰/۸\, v_B \end{cases} \Rightarrow v_C = ۰/۸ \times ۱/۶\, v_A = ۱/۲۸\, v_A$$

گام دوم: نسبت قطر مقطع لولهٔ A به لولهٔ C را طبق معادلهٔ پیوستگی به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_C}{v_A} = (\frac{D_A}{D_C})^۲ \Rightarrow (\frac{D_A}{D_C})^۲ = ۱/۲۸ = \frac{۶۴ \times ۲}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{D_A}{D_C} = \frac{۸\sqrt{۲}}{۱۰} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۵}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۶ کدام مطلب **نادرست** است؟

۱) چند هزار سال پیش از میلاد، انسان‌ها به همراه آب از موادی شبیه به صابون امروزی برای نظافت و پاکیزگی استفاده می‌کردند.

۲) با گذشت زمان امید به زندگی در سطح جهان افزایش یافته و امروزه برای بیشتر مردم جهان در حدود شصت تا هفتاد سال است.

۳) امید به زندگی شاخصی است که نشان می‌دهد با توجه به خطراتی که انسان‌ها در طول زندگی با آن مواجه هستند، به طور میانگین چند سال در این جهان زندگی می‌کنند.

۴) امید به زندگی در کشورهای گوناگون و حتی در شهرهای یک کشور نیز با هم تفاوت دارد، زیرا این شاخص به عوامل گوناگونی بستگی دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ امروزه امید زندگی بیشتر مردم جهان در حدود هفتاد تا هشتاد (۸۰ ـ ۷۰) سال است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۷ جدول زیر، برخی ویژگی‌های سه مخلوط را با نمادهای A تا H نشان می‌دهد. با توجه به مفهوم عبارت یا واژهٔ مرتبط با هر نماد، کدام مورد نادرست است؟

مخلوط / ویژگی	شربت معده	روغن در بنزین	شیر
رفتار در برابر نور	A	B	C
همگن‌بودن	D	E	F
پایداری	G	پایدار است. / ته‌نشین نمی‌شود.	H

۱) $G \neq H$

۲) $E = F \neq D$

۳) $A = C \neq B$

۴) $D \neq E$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

شربت معده، مخلوط روغن در بنزین و شیر به ترتیب سوسپانسیون، محلول و کلوئید محسوب می‌شوند.

محلول، همگن، کلوئید و سوسپانسیون ناهمگن هستند، سوسپانسیون و کلوئید نور را پخش می‌کنند، اما محلول نور را عبور می‌دهد، سوسپانسیون ناپایدار بوده و ته‌نشین می‌شود، در حالی که کلوئید و محلول پایدار بوده و ته‌نشین **نمی‌شوند**.

مخلوط / ویژگی	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن‌بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است./ ته‌نشین می‌شود.	پایدار است./ ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است./ ته‌نشین نمی‌شود.
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریزماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌های مجزا
نمونه‌های مهم	آب گل‌آلود، شربت معده، شربت خاکشیر	هوای آلوده، مه، چسب، شیر، ژله، سس مایونز، رنگ، مخلوط آب، روغن و صابون	مخلوط مس (II) سولفات و آب، آب‌قند، آب‌نمک

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۸ **درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**

۱) اگر نمونه آبی دارای مقادیر چشمگیری از یون‌های کلسیم و نیترات باشد، صابون در آن به خوبی کف نمی‌کند.

۲) آب دریا و آب مناطق کویری که شور هستند، مقادیر چشمگیری از یون‌های کلسیم و منیزیم دارند.

۳) در شرایط یکسان، پاک‌کردن لکهٔ چربی توسط صابون، از روی پارچهٔ نخی در مقایسه با پارچهٔ پلی‌استری دشوارتر است.

۴) صابون مراغه افزودنی شیمیایی ندارد و به دلیل خاصیت بازی مناسب، برای موهای چرب استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینهٔ (۳) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *درسته*، زیرا صابون در واکنش با یون‌های کلسیم موجود در آب، رسوب می‌کند.

$$RCOONa(aq) + Ca^{2+}(aq) \rightarrow (RCOO)_2Ca(s) + Na^{+}(aq)$$

نگید چون به جای نیترات، نگفته منیزیم، عبارت غلطه‌ها! جمله رو یه بار دیگه بخونید!

گزینهٔ (۲): آب‌های سخت حاوی مقادیر چشمگیری از یون‌های کلسیم و منیزیم هستند.

گزینهٔ (۳): زدودن لکهٔ چربی از سطح پارچهٔ نخی آسان‌تر از سطح پارچهٔ پلی‌استر است؛ زیرا میزان چسبندگی لکه‌های چربی روی پارچه‌های نخی کم‌تر از پارچه‌های پلی‌استری می‌باشد.

گزینهٔ (۴):



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۹ در بررسی فرایند انحلال کدام ترکیب در آب، نمی‌توان از واژهٔ «یونش» استفاده کرد؟

یعنی ترکیب مولکولی نیست.

۱) HCl
۲) CH_3COOH
۳) HF
۴) $NaOH$

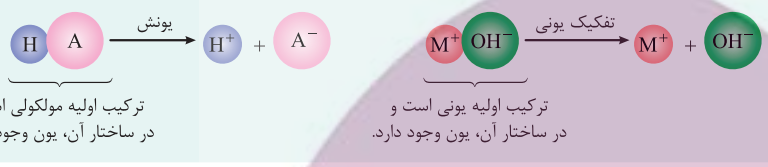
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

یونش در مقابل تفکیک!

یونش فرایندی است که در آن یک **ترکیب مولکولی**، به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود؛ یعنی وقتی ترکیب مورد نظر (مثل HCl) در ابتدا به صورت مولکولی بوده و در ساختار آن یون وجود ندارد، اما بر اثر حل‌شدن در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود، برای آن واژهٔ «یونش» را به کار می‌بریم.

تفکیک یونی، فرایندی است که در آن یک **ترکیب یونی** به یون‌های سازندهٔ خود تبدیل می‌شود؛ پس *هواستون باشه* که حق نداریم برای ترکیب‌های یونی از واژهٔ «یونش» استفاده کنیم. *به جاش* برای این ترکیب‌ها، از واژهٔ «تفکیک یونی» استفاده می‌کنیم، بدین معنی که ترکیب مورد نظر (مانند $NaOH$) از ابتدا در ساختار خود دارای یون بوده است و بر اثر حل‌شدن در آب، یون‌ها فقط از یکدیگر تفکیک شده‌اند.



ترکیب اولیه مولکولی است و در ساختار آن، یون وجود ندارد.

ترکیب اولیه یونی است و در ساختار آن، یون وجود دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ یونش برای ترکیب‌های مولکولی به کار می‌رود. $NaOH$ جزء ترکیب‌های یونی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۰ با توجه به جدول زیر، کدام موارد درست است؟

ردیف	ماده
۱	استون ـ وازلین ـ متانول ـ اوره
۲	روغن زیتون ـ گریس ـ هپتان ـ نفتالن
۳	استیک اسید ـ اتانول ـ اتیلن گلیکول ـ دکان
۴	بنزن ـ سدیم سولفات ـ هپتانول ـ پروپانول

الف) ۵۰٪ از ترکیب‌های ردیف (۱)، همانند اتانول به هر نسبتی در آب محلول‌اند.

ب) در هر کدام از این ۴ ردیف، دست‌کم یک ترکیب محلول در آب وجود دارد.

پ) در هر کدام از ردیف‌های (۱) و (۳)، یک ترکیب وجود دارد که حلال مناسب آن هگزان است.

ت) ۵۰٪ از ترکیب‌های ردیف (۳)، دارای پیوند $O-H$ بوده و توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با آب را دارند.

۱) الف ـ پ
۲) ب ـ ت
۳) الف ـ ت
۴) ب ـ پ

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

طبق قاعدهٔ «**شبیه، شبیه را حل می‌کند**»، می‌توان گفت که:

۱) **مواد قطبی در حلال‌های قطبی حل می‌شوند.** برای نمونه، استون (C_3H_6O) که یک مولکول قطبی است، در حلال قطبی آب (H_2O) حل می‌شود.

۲) **مواد ناقطبی در حلال‌های ناقطبی حل می‌شوند.** برای نمونه، ید (I_2) که مولکولی ناقطبی است، در حلال ناقطبی هگزان (C_6H_{14}) حل می‌شود.

۳) **مولکول‌های کوچک دارای پیوند هیدروژنی، در حلال‌های دارای پیوند هیدروژنی حل می‌شوند.** برای نمونه، اتانول (C_2H_5OH) که دارای پیوند $O-H$ است، با تشکیل پیوند هیدروژنی در آب حل می‌شود.

یادآوری: بین مولکول‌هایی که در ساختار آن‌ها یکی از پیوندهای $O-H$، $N-H$ یا $F-H$ وجود دارد (یعنی H متصل به FON دارند)، می‌تواند پیوند هیدروژنی برقرار شود: مانند HF، NH_3، H_2O، C_2H_5OH و ...!

۴) **ترکیب‌های یونی در آب حل می‌شوند، اما در حلال‌های ناقطبی حل نمی‌شوند.** برای نمونه، $NaCl$ که یک ترکیب یونی است، در آب حل می‌شود، اما در هگزان (C_6H_{14}) که یک حلال ناقطبی است، حل نمی‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) از ۴ مادهٔ ردیف (۱)، ۲ ماده (استون و متانول)، مانند اتانول به هر نسبتی در آب حل می‌شوند.

$$\frac{2}{4} \times 100 = ٪50$$

نکته

مواد که به هر نسبت در آب حل می شوند ←
- متانول (CH_3OH)، اتانول (C_2H_5OH)، پروپانول (C_3H_7OH)
- استون $CH_3-C(=O)-CH_3$
- اتیلن گلیکول (CH_2OHCH_2OH)
- متانوئیک اسید $(HCOOH)$
- اتانوئیک اسید (CH_3COOH)

بدانید و آگاه باشید که گلوکز و اوره، انحلال‌پذیری بالایی در آب دارند، اما به هر نسبتی در آب حل نمی‌شوند.

ب) در ردیف (۲)، هیچ مادهٔ محلول در آبی وجود ندارد.

روغن‌زیتون $(C_{57}H_{104}O_6)$، گریس (C_8H_{18})، هپتان (C_7H_{16}) و نفتالن $(C_{10}H_8)$، همگی ترکیب‌هایی ناقطبی هستند.

پ) در ردیف‌های (۱) و (۳) به ترتیب وازلین ($C_{۲۵}H_{۵۲}$) و دکان ($C_{۱۰}H_{۲۲}$) ناقطبی بوده و حلال مناسب آن‌ها، هگزان ($C_۶H_{۱۴}$) است.

ت) ۳ ترکیب از ۴ ترکیب ردیف (۳)، یعنی ۷۵ درصد آن‌ها، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با آب را دارند.

استیک اسید: $CH_۳COOH$، اتانول: $C_۲H_۵OH$، اتیلن گلیکول: $CH_۲OH - CH_۲OH$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۱ **اگر در مولکول اتیلن گلیکول، به جای هر یک از اتم‌های هیدروژن، گروه متیل قرار گیرد، ..... .**

$(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) انحلال‌پذیری در آب و نقطهٔ جوش ترکیب، افزایش می‌یابد

$C_۸H_{۱۶}O_۲$

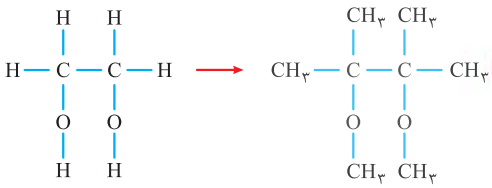
۲) ترکیب به‌دست‌آمده با هشتمین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدهای یک‌عاملی، همپار است

۳) از سوختن کامل ۳۶ / ۵ گرم از ترکیب به‌دست‌آمده، ۴۴ / ۸ لیتر گاز در شرایط STP تولید می‌شود

۴) شمار پیوندهای کووالانسی نسبت به مولکول اتیلن گلیکول، ۴ برابر می‌شود

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اگر در مولکول اتیلن گلیکول به جای هر یک از اتم‌های H گروه $-CH_۳$ قرار گیرد، خواهیم داشت:



بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): قطعاً ترکیب به‌دست‌آمده نسبت به اتیلن گلیکول، انحلال‌پذیری کم‌تری در آب دارد! زیرا بخش‌های ناقطبی آن (هیدروکربنی) بزرگ‌تر شده است.

گزینهٔ (۲): فرمول مولکولی ترکیب به‌دست‌آمده، $C_۸H_{۱۸}O_۲$ است، در حالی که فرمول هشتمین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدهای یک‌عاملی، $C_۸H_{۱۶}O_۲$ است.

نکته فرمول عمومی اسیدهای آلی یک‌عاملی (RCOOH) که در آن‌ها، R اتم هیدروژن یا زنجیر هیدروکربنی سیرشده (گروه آلکیل) است. به صورت $C_nH_{۲n}O_۲$ می‌باشد.

گزینهٔ (۳): واکنش سوختن کامل $C_۸H_{۱۸}O_۲$ به صورت زیر است:

$$۲C_۸H_{۱۸}O_۲ + ۲۳O_۲ \rightarrow ۱۶CO_۲ + ۱۸H_۲O$$

بنابراین از سوختن ۳۶ / ۵ گرم از آن، ۴۴ / ۸ لیتر گاز $CO_۲$ در شرایط STP به دست می‌آید:

$$۳۶/۵\ g\ C_۸H_{۱۸}O_۲ \times \frac{۱\ mol\ C_۸H_{۱۸}O_۲}{۱۴۶\ g\ C_۸H_{۱۸}O_۲} \times \frac{۱۶\ mol\ CO_۲}{۲\ mol\ C_۸H_{۱۸}O_۲} \times \frac{۲۲/۴\ L}{۱\ mol\ CO_۲} = ۴۴/۸\ L\ CO_۲$$

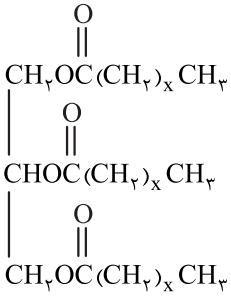
دقت کنید که در شرایط STP، $H_۲O$ به حالت گاز نیست.

گزینهٔ (۴): با توجه به ساختارهای رسم‌شده، شمار پیوندها در اتیلن گلیکول و ترکیب به‌دست‌آمده به ترتیب برابر با ۹ و ۲۷ است؛ بنابراین شمار پیوندها ۳ برابر شده است:

$$\frac{۲۷}{۹} = ۳$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۸۲ **اگر ساختار زیر به چربی کوهان شتر ($C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶$) مربوط باشد، کدام گزینه نادرست است؟**



۱) از واکنش هر مول از آن با مقدار کافی سدیم هیدروکسید، ۳ مول صابون جامد و ۱ مول الکل ۳عاملی تولید می‌شود.

۲) نیروی بین مولکولی غالب بین مولکول‌های آن همانند اسیدهای چرب، از نوع وان‌درواالسی است.

۳) مقدار عددی x در آن، سه برابر شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول شیمیایی اوره است.

۴) شمار پیوندهای C—O در این مولکول، دو برابر شمار گروه‌های $CH_۳$ در آن است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مولکول چربی کوهان شتر، ۵۷ اتم کربن دارد؛ با توجه به شکل به‌جز گروه‌های $CH_۲$، ۹ اتم کربن در ساختار وجود دارد؛ بنابراین ۳ گروه $(CH_۲)_x$ در مجموع دارای $۵۷ - ۹ = ۴۸$ اتم کربن هستند:

$$۳x = ۴۸ \Rightarrow x = ۱۶$$

از طرفی در فرمول شیمیایی اوره $(CO(NH_۲)_۲)$، ۴ اتم هیدروژن وجود دارد؛ پس x، ۴ برابر شمار اتم‌های هیدروژن اوره است.

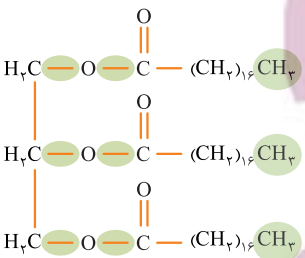
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *درسته!*

$$\text{صابون جامد } ۳ \underbrace{(RCOONa)}_{} + \text{الکل ۳عاملی} \rightarrow \text{استر ۳عاملی} + ۳NaOH$$

گزینهٔ (۲): مولکول‌های اسیدهای چرب و استرهای ۳عاملی، در مجموع ناقطبی‌اند و نیروی بین مولکولی غالب آن‌ها، از نوع وان‌درواالسی است.

گزینهٔ (۴): در ساختار مولکول، ۶ پیوند C—O و ۳ گروه $CH_۳$ وجود دارد.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۳ جرم مولی صابونی با فرمول شیمیایی $RCOONa$ برابر ۳۰۶ گرم بر مول است. اگر ۵۰ گرم محلول ۲۸/۵ درصد جرمی منیزیم کلرید در واکنش با ۱۱۴/۷۵ گرم از این صابون به طور کامل مصرف شده باشد، چند درصد صابون اولیه در این واکنش شرکت نکرده است؟

$(H=1, C=12, O=16, Na=23, Mg=24, Cl=35/5 : g.mol^{-1})$

$RCOONa(aq)+MgCl_2(aq) \rightarrow (RCOO)_2Mg(s)+NaCl(aq)$ (معادله موازنه شود.)

۱) ۸۰ ۲) ۲۰ ۳) ۷۵ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** محاسبهٔ جرم صابون مصرف‌شده:

$$2RCOONa + MgCl_2 \rightarrow (RCOO)_2Mg + 2NaCl$$

$$50g\ \text{محلول} \times \frac{28/5g\ MgCl_2}{100g\ \text{محلول}} \times \frac{1mol\ MgCl_2}{95g\ MgCl_2} \times \frac{2mol\ RCOONa}{1mol\ MgCl_2} \times \frac{306g\ RCOONa}{1mol\ RCOONa} = 91/8g\ RCOONa$$

یه‌جور دیگه

$$\frac{\frac{\text{درصد جرمی}}{100} \times \text{جرم محلول}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{MgCl_2}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{RCOONa}} \Rightarrow \frac{50 \times \frac{28/5}{100}}{1 \times 95} = \frac{x}{2 \times 306} \Rightarrow x = 91/8\ g\ RCOONa$$

گام دوم: محاسبهٔ درصد صابون شرکت نکرده در واکنش:

$$\text{جرم صابون شرکت نکرده} = \text{جرم کل صابون} - \text{جرم صابون مصرف‌شده} = 114/75 - 91/8 = 22/95\ g$$

$$\text{درصد صابون شرکت نکرده} = \frac{\text{جرم صابون شرکت نکرده}}{\text{جرم صابون اولیه}} \times 100 = \frac{22/95}{114/75} \times 100 = \%20$$

کنکور به ۲۰۰ mL آب سخت $(d=1\ g.mL^{-1})$ که دارای یون‌های Ca^{2+} با غلظت ۲۰۰۰ ppm است، ۴/۷۲ گرم از صابون با جرم مولی $236\ g.mol^{-1}$ اضافه شده است. با فرض کامل‌بودن واکنش صابون با یون کلسیم، چند درصد از آن، به صورت رسوب درآمده است؟ (معادله موازنه شود.) *(سؤال ۲۲۸ کنکور ریاضی ۹۸)*

$(Ca=40, Na=23 : g.mol^{-1})$

$RCOONa(aq)+CaCl_2(aq) \rightarrow (RCOO)_2Ca(s)+NaCl(aq)$

۱) ۱۰ ۲) ۲۰

۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۴ کدام گزینه نادرست است؟

۱) جوهرنمک و سدیم هیدروکسید هر دو خاصیت خورندگی دارند و از نظر شیمیایی فعال‌اند.

۲) فلز آلومینیم در واکنش با محلول اسیدها یا بازها، می‌تواند گاز هیدروژن تولید کند.

۳) اگر لوله‌ای با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده باشد، برای بازکردن آن باید از پاک‌کنندهٔ غیرصابونی استفاده کرد.

۴) افزودن ششمین عنصر دورهٔ سوم جدول دوره‌ای به برخی صابون‌ها، باعث می‌شود این صابون‌ها برای از بین بردن جوش صورت مناسب باشند.

$_{16}S$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی برای بازکردن لوله‌های مسدودشده، کارایی ندارند. در این موارد باید از پاک‌کننده‌های خورنده استفاده کرد که با آلاینده‌ها واکنش می‌دهند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): جوهرنمک خاصیت اسیدی و سدیم هیدروکسید خاصیت بازی داشته و هر دو جزء پاک‌کننده‌های خورنده محسوب می‌شوند و از نظر شیمیایی فعال‌اند.

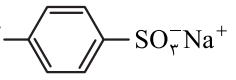
گزینهٔ (۲): به عنوان مثال مخلوط پودر Al و NaOH در حضور آب، گاز H_2 تولید می‌کند. فلز Al با محلول اسیدها نیز گاز H_2 تولید می‌کند.

$$2Al(s)+2NaOH(aq)+6H_2O(l) \rightarrow 2NaH(OH)_4(aq)+3H_2(g)$$

$$2Al(s)+6HCl(aq) \rightarrow 2AlCl_3(aq)+3H_2(g)$$

گزینهٔ (۴): ششمین عنصر دورهٔ سوم جدول دوره‌ای، گوگرد است و صابون‌های گوگرددار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی مناسب‌اند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۵ اگر جرم مولی پاک‌کننده‌های $RCOO^-Na^+$ و  یکسان باشد، تفاوت شمار اتم‌های کربن در بخش ناقطبی این دو پاک‌کننده برابر ..... و شمار پیوندهای $C-H$ در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی ..... واحد کم‌تر است. (R و R' گروه آلکیل هستند.)

$(H=1, C=12, O=16, Na=23, S=32 : g.mol^{-1})$

۱) ۲ ـ ۱۲
۲) ۸ ـ ۱۶
۳) ۲ ـ ۱۶
۴) ۸ ـ ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ اگر فرمول گروه‌های R و R' را به ترتیب C_nH_{2n+1} و C_mH_{2m+1} در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

جرم مولی: $C_nH_{2n+1}COONa = C_mH_{2m+1}C_6H_4SO_3Na \Rightarrow$

$14n+68=14m+180 \Rightarrow 14(n-m)=112 \Rightarrow n-m=8$

بخش ناقطبی پاک‌کنندهٔ صابونی و غیرصابونی به ترتیب R و $R'C_6H_4$ است.

تفاوت شمار اتم‌های کربن: کربن R − کربن $(R'+6) = (n-m)-6 = 8-6 = 2$

شمار پیوندهای $C-H$ در دو پاک‌کننده با شمار اتم‌های هیدروژن آن‌ها برابر است:

شمار اتم‌های هیدروژن $R'C_6H_4SO_3Na$ − شمار اتم‌های هیدروژن $RCOONa$

$= (2n+1)-(2m+1+4) = 2(\underbrace{n-m}_{8})-4 = 12$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۶ در مورد پاک‌کننده‌ای که به صورت مخلوط پودر سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم عرضه می‌شود، کدام موارد درست است؟

الف) گاز تولیدشده در واکنش آن با آب، باعث بروز خاصیت اسیدی و زدودن آلاینده‌ها می‌شود.

ب) فراورده‌های واکنش آن با آب نسبت به واکنش‌دهنده‌ها، از پایداری بیشتری برخوردار هستند.

پ) تولید ناگهانی گاز در واکنش این مخلوط با آب، باعث بالارفتن دما و ذوب‌شدن چربی‌ها و جداشدن آن‌ها از جدارهٔ لوله می‌شود.

ت) این مخلوط یک پاک‌کنندهٔ خورنده به حساب می‌آید و در اثر واکنش محلول آن با چربی‌ها، صابون تشکیل می‌شود.

۱) الف ـ ب
۲) ب ـ ت
۳) ب ـ پ ـ ت
۴) الف ـ پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

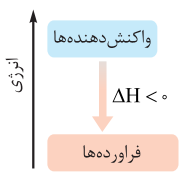
عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید + آب → گاز هیدروژن + فراورده‌های دیگر

بررسی عبارت‌ها:

الف) تولید گاز هیدروژن باعث اسیدی‌شدن محلول نمی‌شود. وجود یون هیدروژن $(H^+(aq))$ باعث اسیدی‌شدن یک محلول می‌شود. تولید گاز با افزایش ناگهانی فشار، باعث جداشدن چربی از لوله می‌شود.

ب) واکنش این مخلوط با آب گرماده است، بنابراین سطح انرژی فراورده‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌هاست و در نتیجه فراورده‌ها پایدارتر از واکنش‌دهنده‌ها هستند.



پ) تولید ناگهانی گاز با افزایش فشار ناگهانی و واردکردن ضربه به ذرات چربی، باعث جداشدن آن‌ها از سطح لوله می‌شود.

ت) سدیم هیدروکسید با چربی واکنش داده، صابون تولید می‌کند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۷ کدام موارد نادرست است؟

الف) یاخته‌های دیوارهٔ معده با ورود مواد غذایی به آن، هیدروکلریک اسید ترشح می‌کنند.

ب) برای کاهش میزان اسیدی‌بودن خاک، به آن آهک (کلسیم کربنات) می‌افزایند.

پ) سوانت آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.

ت) یون‌های موجود در محلول اسیدها به شکل $H_3O^+(aq)$ یافت می‌شوند که به یون هیدرونیوم معروف است.

ث) اگر در سامانه‌ای نسبت غلظت مولی یون‌های هیدرونیوم به هیدروکسید برابر یک باشد، آن سامانه حالت خنثی دارد.

۱) ب ـ ت
۲) الف ـ ب ـ ت
۳) پ ـ ت ـ ث
۴) الف ـ پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «ب» و «ت» نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) فرمول شیمیایی آهک به صورت CaO (کلسیم اکسید) است.

ت) تنها یون $H^+(aq)$ در محلول اسیدها به شکل $H_3O^+(aq)$ یافت می‌شود، نه همهٔ یون‌ها!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۸ عنصر M در واکنش با اکسیژن، اکسیدی با فرمول M_xO_y تولید کرده است. با توجه به آن کدام مطلب نادرست است؟

$_{۳}Li$ $_{۷}N$

۱) اگر M، نخستین فلز جدول دوره‌ای باشد، نسبت x به y برابر ۲ و این اکسید باز آرنیوس محسوب می‌شود.

۲) اگر $x+y=۲$ و M نخستین عنصر گروه ۱۵ جدول دوره‌ای باشد، این اکسید با آب واکنش نمی‌دهد.

۳) اگر شمار الکترون‌های با $l=۱$ در اتم عنصر M برابر ۱۷ باشد، این اکسید یک اکسید اسیدی است.

۴) اگر حالت فیزیکی اکسید تولیدشده در دما و فشار اتاق جامد باشد، اکسید حاصل به یقین یک اکسید فلزی است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نخستین فلز جدول دوره‌ای، لیتیم ($_{۳}Li$) است؛ فرمول اکسید لیتیم به صورت $Li_۲O$ می‌باشد:

$$x=۲\,,\,y=۱ \Rightarrow \frac{x}{y}=۲$$

اکسیدهای فلزی، باز آرنیوس محسوب می‌شوند:

$$Li_۲O+H_۲O \rightarrow ۲Li^+ + ۲OH^-$$

گزینهٔ (۲): نخستین عنصر گروه ۱۵، نیتروژن (N) است که اکسیدهای مختلفی دارد. اگر $x+y=۲$ باشد، اکسید مورد نظر NO است. این اکسید با آب واکنش نمی‌دهد و به صورت مولکولی در آب حل می‌شود.

گزینهٔ (۳): $l=۱$ مربوط به زیرلایه‌های p است. ۱۷ الکترون با $l=۱$، یعنی داشتن زیرلایه‌های $۲p^۶\,,\,۳p^۶\,,\,۴p^۵$!

$$M:[Ar]\,۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۵ \Rightarrow {}_{۳۵}Br$$

اکسیدهای نافلزی جزء اکسیدهای اسیدی محسوب می‌شوند.

گزینهٔ (۴): اکسیدهای فلزی در دما و فشار اتاق به حالت جامدند، اما دقت کنید برخی اکسیدهای نافلزی نیز به حالت جامدند، مانند $N_۲O_۵$ که در کتاب درسی به آن اشاره شده است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۹ **درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**

۱) موادی مانند نمک خوراکی، نقره کلرید و نیتریک اسید را می‌توان الکترولیت قوی در نظر گرفت.

۲) اسید و باز را براساس مدل آرنیوس می‌توان تشخیص داد، اما نمی‌توان دربارهٔ میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول اظهار نظر کرد.

۳) به موادی مانند اتانول و شکر که انحلال آن‌ها در آب به شکل مولکولی است، غیرالکترولیت می‌گویند.

۴) اسیدهایی که به هر نسبتی در آب حل می‌شوند، دارای $\alpha = 1$ و اسیدهایی که به مقدار کم‌تری در آب حل می‌شوند، دارای $\alpha < 1$ هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گزینهٔ (۴) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): به ترکیب‌هایی که به هنگام انحلال در آب، **به طور کامل**، تفکیک یا به یون تبدیل می‌شوند، الکترولیت قوی گفته می‌شود. اسیدهای قوی (مانند HNO_3)، بازهای قوی (مانند $NaOH$) و نمک‌ها (مانند $NaCl$)، جزء این دسته هستند و فرایند انحلال آن‌ها در آب را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$HNO_3(aq) \rightarrow H^+(aq) + NO_3^-(aq)$$

$$NaCl(aq) \rightarrow Na^+(aq) + Cl^-(aq)$$

$$AgCl(aq) \rightarrow Ag^+(aq) + Cl^-(aq)$$

گول نخوری ✘

ترکیب‌های یونی نامحلول در آب مانند $AgCl$ و $BaSO_4$، اگرچه به مقدار بسیار کمی در آب حل می‌شوند (کم‌تر از ۰/۰۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب) اما همان مقدار ناچیز حل‌شده، تقریباً به طور کامل به یون تفکیک می‌شود؛ بنابراین الکترولیت قوی به شمار می‌آیند. حالا به نظر شما محلول حاصل از این ترکیب‌ها، رسانای قوی جریان برق است؟

معلومه که نه! با این‌که مقدار ناچیز حل‌شده از این ترکیب‌ها، تقریباً به طور کامل به یون تبدیل می‌شود، اما تعداد یون‌های حاصل به اندازه‌ای کم است که محلول آن‌ها رسانای قوی الکتریسیته نیست.

ترکیب‌های یونی نامحلول در آب (مانند $AgCl$ و $BaSO_4$) ← الکترولیت قوی هستند. ← چون به طور کامل به یون تفکیک می‌شوند.

ترکیب‌های یونی نامحلول در آب (مانند $AgCl$ و $BaSO_4$) ← رسانای قوی جریان برق نیستند. ← چون غلظت یون‌ها در محلول آن‌ها کافی نیست.

گزینهٔ (۲): با توجه به متن کتاب درسی، *درسته!*

گزینهٔ (۳): **مواد غیرالکترولیت**، موادی هستند که به صورت کاملاً مولکولی در حلال حل شده و بر اثر انحلال، یون تولید نمی‌کنند (**انحلال آن‌ها در آب، مولکولی است**). به محلول این مواد، **محلول غیرالکترولیت** می‌گویند. به طور مثال، شکر $(C_{12}H_{22}O_{11})$ و اتانول (C_2H_5OH) غیرالکترولیت هستند و فرایند انحلال آن‌ها در آب را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$C_{12}H_{22}O_{11}(s) \xrightarrow{\text{آب}} C_{12}H_{22}O_{11}(aq)$$

$$C_2H_5OH(l) \xrightarrow{\text{آب}} \underbrace{C_2H_5OH(aq)}_{\text{خبری از یون نیست.}}$$

گزینهٔ (۴): اسیدها بر مبنای **میزان یونش** در آب، به دو دستهٔ قوی $(\alpha = 1)$ و ضعیف $(\alpha < 1)$ تقسیم می‌شوند و نه بر مبنای میزان انحلال‌پذیری آن‌ها!

۹۰ در دما و حجم یکسان، رسانای الکتریکی محلول آبی کدام ترکیب یونی زیر از بقیه بیشتر است؟

۱) سدیم برمید
۲) پتاسیم نیترات
۳) آلومینیم سولفات
۴) منیزیم کلرید

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در شرایط یکسان، هر چه غلظت مولی یون‌ها در محلولی بیشتر باشد، رسانایی الکتریکی آن محلول بیشتر است.

برای این نمک‌ها در آب می‌توان نوشت:

(۱) گزینهٔ: $NaBr(s) \xrightarrow{\text{در آب}} \underbrace{Na^+(aq) + Br^-(aq)} \Rightarrow ۱+۱=۲$

(۲) گزینهٔ: $KNO_۳(s) \xrightarrow{\text{در آب}} \underbrace{K^+(aq) + NO_۳^-(aq)} \Rightarrow ۱+۱=۲$

(۳) گزینهٔ: $Al_۲(SO_۴)_۳(s) \xrightarrow{\text{در آب}} \underbrace{۲Al^{۳+}(aq) + ۳SO_۴^{۲-}(aq)} \Rightarrow ۲+۳=۵$

(۴) گزینهٔ: $MgCl_۲(s) \xrightarrow{\text{در آب}} \underbrace{Mg^{۲+}(aq) + ۲Cl^-(aq)} \Rightarrow ۱+۲=۳$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۱ اگر در محلول ۰/۰۵ مولار اسید ضعیف HY در دمای $25\ ^\circ C$، غلظت یون Y^- برابر $1/8\times10^{-5}$ مول بر لیتر باشد، درصد یونش این اسید کدام است؟

۱) 9×10^{-3}
۲) $3/6\times10^{-4}$
۳) 9×10^{-5}
۴) $3/6\times10^{-2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته رابطهٔ درجه و درصد یونش اسیدها:

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

$$\text{درجهٔ یونش } (\alpha) = \frac{\text{غلظت مولار اسید یونیده‌شده}}{\text{غلظت مولار اسید حل‌شده}} = \frac{\text{غلظت مولار } H^+ \text{ یا آنیون اسید}}{\text{غلظت مولار (اولیهٔ) اسید}}$$

اگر غلظت اولیهٔ محلول را M مولار در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\alpha = \frac{[H^+]}{M} \quad \text{یا} \quad [H^+] = M\alpha$$

$$\text{درصد یونش } (\%\alpha) = \frac{[H^+]}{M}\times100$$

پاسخ خیلی تشریحی در محلول اسیدهای تک‌پروتون‌دار، غلظت آنیون حاصل از یونش با غلظت H^+ برابر است با:

$$HY \rightleftharpoons H^+ + Y^-$$

$$\text{درصد یونش} = \frac{[Y^-]}{M}\times100 = \frac{1/8\times10^{-5}}{5\times10^{-2}}\times100 = 3/6\times10^{-2}$$

کتاب درسی اگر در محلول ۰/۱ مولار استیک اسید (CH_3COOH)، غلظت یون هیدرونیوم برابر با $1/35\times10^{-3}\ mol.L^{-1}$ باشد:

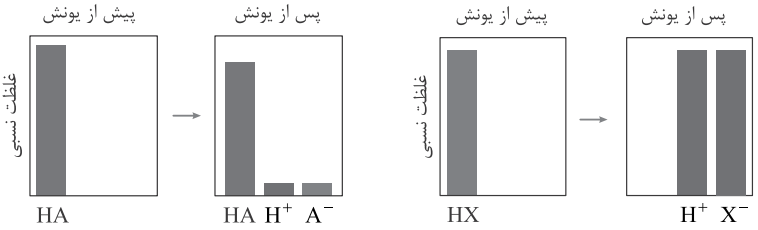
(شیمی (۳) ـ خود را بیازمائید ـ صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

آ) معادلهٔ یونش استیک اسید را بنویسید.

ب) درصد یونش آن را حساب کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۲ با توجه به شکل‌های زیر، کدام مطلب درست است؟



۱) در محلول آبی اسید HA، تنها مولکول‌های HA و یون‌های $H^+(aq)$ و $A^-(aq)$ وجود دارد.

۲) اگر A و X هر دو هالوژن باشند، به یقین شعاع اتمی A از X کم‌تر است.

۳) اگر A و X عناصر گروه ۱۷ جدول دوره‌ای باشند، در شرایط یکسان واکنش‌پذیری عنصر X از A بیشتر است.

۴) در محلول اسید HX، تمامی مولکول‌ها و در محلول اسید HA، بیش از ۵۰٪ مولکول‌های اسید یونش یافته‌اند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

HA به طور جزئی و HX به طور کامل یونش پیدا کرده است، یعنی HA اسید ضعیف و HX اسید قوی است.

اگر A و X از گروه ۱۷ (هالوژن‌ها) باشند، HA باید هیدروفلوئوریک اسید (HF) باشد. اسید HX **می‌تواند HCL**، یا HBr یا HI باشد؛ بنابراین شعاع اتمی A (فلوئور) از اتم X (کلر، برم یا ید) کم‌تر است.

نکته در بین هیدروهالیک اسیدها، HF اسید ضعیف و HCl، HBr و HI، اسید قوی محسوب می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در محلول اسید HA، یون‌های $OH^-(aq)$ و مولکول آب نیز وجود دارند!!

گزینهٔ (۳): واکنش‌پذیری فلوئور از سایر هالوژن‌ها بیشتر است، پس واکنش‌پذیری X از A کم‌تر است!

گزینهٔ (۴): با توجه به نمودار، درصد یونش HA خیلی کم‌تر از ۵۰٪ است.

۹۳ یک نمونه محلول هیدروفلوئوریک اسید با درصد جرمی ۵ / ۰ و چگالی $1/02\ g.mL^{-1}$ داریم. اگر اختلاف غلظت نهایی HF و یون‌های هیدرونیوم در این محلول برابر $0/215\ mol.L^{-1}$ باشد، درصد یونش این اسید در شرایط مورد نظر به تقریب کدام است و رسانایی الکتریکی این محلول با محلول چند مولار هیدروکلریک اسید برابر است؟

$(F=19 , H=1 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۰۲ , ۸/۶۴

۲) ۰/۰۴ , ۸/۶۴

۳) ۰/۰۲ , ۷/۸۴

۴) ۰/۰۴ , ۷/۸۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: محاسبهٔ غلظت مولی محلول:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{درصد جرمی} \times \text{چگالی} \times 10}{\text{جرم مولی}} \left(\frac{10\,ad}{\text{جرم مولی}}\right)$$

$$M = \frac{10 \times 0/5 \times 1/02}{20} = 0/255\ mol.L^{-1}$$

گام دوم: محاسبهٔ درصد یونش اسید:

$$HF \rightleftharpoons H^+ + F^-$$

	HF	H^+	F^-
غلظت اولیه	۰/۲۵۵	۰	۰
تغییر غلظت	$-x$	$+x$	$+x$
غلظت نهایی	$0/255-x$	x	x

$$\text{غلظت } HF - \text{غلظت } H^+ = 0/215 \Rightarrow (0/255-x)-x=0/215 \Rightarrow 2x=0/04 \Rightarrow x=0/02$$

$$\text{درصد یونش اسید} = \frac{[H^+]}{M} \times 100 = \frac{0/02}{0/255} \times 100 \simeq \%7/84$$

گام سوم: محاسبهٔ غلظت محلول هیدروکلریک اسید:

برای برابربودن رسانایی الکتریکی دو محلول، باید مجموع غلظت مولی یون‌ها در آن‌ها برابر باشد. با توجه به تک‌پروتون‌داربودن هر دو اسید، برابری مجموع غلظت یون‌ها در دو محلول، به معنی برابربودن $[H^+]$ در آن‌ها است.

HCl یک اسید قوی است و به طور کامل یونش می‌یابد؛ بنابراین غلظت محلول آن باید ۰/۰۲ مولار باشد تا $[H^+]$ در آن برابر ۰/۰۲ شود.

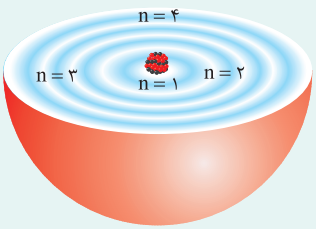
۹۴ **براساس ساختار لایه‌ای، اتم را می‌توان کره‌ای در نظر گرفت که هستهٔ بسیار ..... در مرکز آن جای دارد و الکترون‌ها در فضایی بسیار ..... و در لایه‌هایی پیرامون هسته توزیع می‌شوند.**

۱) کوچک و سنگین ـ بزرگ‌تر
۲) کوچک و سنگین ـ کوچک‌تر
۳) بزرگ و سبک ـ بزرگ‌تر
۴) بزرگ و سبک ـ کوچک‌تر

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

دانشمندان به دنبال توجیه و علت ایجاد طیف نشری خطی دیگر عنصرها و نیز چگونگی نشر نور از اتم‌ها، ساختاری لایه‌ای برای اتم ارائه کردند. در این مدل، اتم را کره‌ای در نظر می‌گیرند که هسته در فضایی بسیار کوچک و در مرکز آن جای دارد و الکترون‌ها در فضای بسیار بزرگ‌تر و در لایه‌هایی پیرامون هسته توزیع می‌شوند. این لایه‌ها را از هسته به سمت بیرون شماره‌گذاری می‌کنند و شمارهٔ هر لایه را با n نمایش می‌دهند. n، **عدد کوانتومی اصلی** نامیده می‌شود که برای لایهٔ اول $n = ۱$، برای لایهٔ دوم $n = ۲$، ... و برای لایهٔ هفتم $n = ۷$ است.



پاسخ خیلی تشریحی

طبق ساختار لایه‌ای، اتم را می‌توان همانند یک کره در نظر گرفت که هستهٔ بسیار کوچک، اما سنگین در مرکز قرار گرفته و الکترون‌ها در فضایی بزرگ‌تر و در لایه‌هایی پیرامون هسته توزیع شده‌اند.

۹۵ کدام مورد درست است؟

۱) همهٔ تکنسیم موجود در جهان باید به طور مصنوعی و با استفاده از واکنش‌های شیمیایی ساخته شود.

۲) از فراوان‌ترین ایزوتوپ طبیعی اورانیم، اغلب به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی استفاده می‌شود.

۳) در فرایند تشخیص تودهٔ سرطانی، علاوه بر گلوکز نشان‌دار، گلوکز معمولی نیز توسط توده جذب می‌شود.

۴) نیم‌عمر ایزوتوپی از هیدروژن با ۳ نوترون، از سایر ایزوتوپ‌های ساختگی هیدروژن بیشتر است.

$^{4}_{1}H$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ برای تودهٔ سرطانی، گلوکز معمولی و گلوکز نشان‌دار فرقی نمی‌کند و هر دو نوع گلوکز را جذب می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): همهٔ تکنسیم موجود در جهان، با استفاده از **واکنش‌های هسته‌ای** ساخته می‌شود.

گزینهٔ (۲): از ایزوتوپ ^{235}U، اغلب به عنوان سوخت راکتورهای اتمی استفاده می‌شود. درصد فراوانی این ایزوتوپ در مخلوط ایزوتوپ‌های طبیعی اورانیم، بسیار کم است.

گزینهٔ (۴): مقایسهٔ نیم‌عمر ایزوتوپ‌های ساختگی هیدروژن به صورت زیر است:

نیم‌عمر: $^{5}_{1}H$ (۴ نوترون) $>$ $^{6}_{1}H$ (۵ نوترون) $>$ $^{4}_{1}H$ (۳ نوترون) $>$ $^{7}_{1}H$ (۶ نوترون)

۹۶ با توجه به ۸ عنصر فراوان‌تر سیاره‌های زمین و مشتری، کدام موارد درست است؟

الف) در مشتری برخلاف زمین، عنصر فلزی وجود ندارد.

ب) به‌جز هیدروژن، درصد فراوانی هر کدام از عنصرهای دیگر این دو سیاره از ۵۰٪ کم‌تر است.

پ) به‌جز هیدروژن، سایر عنصرهای فراوان‌تر سیارهٔ مشتری، به دستهٔ p جدول دوره‌ای تعلق دارند.

ت) در بین این عنصرها، دو عنصر مشترک هستند و در بیرونی‌ترین زیرلایهٔ اتم هر کدام، ۶ الکترون وجود دارد.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ ت

۳) الف ـ ب ۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

عنصرهای سازندهٔ مشتری و زمین برحسب درصد فراوانی به ترتیب عبارت‌اند از:

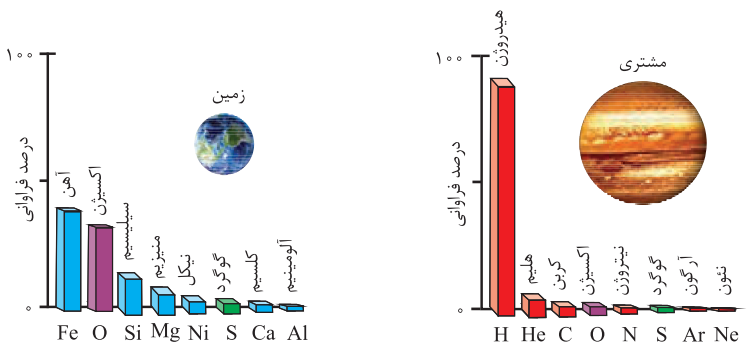
زمین : $Fe, O, Si, Mg, Ni, S, Ca, Al$

مشتری : $H, He, C, O, N, S, Ar, Ne$

بررسی عبارت‌ها:

الف) همهٔ ۸ عنصر فراوان‌تر مشتری، نافلزند اما در زمین، فلزهایی مانند آهن نیز وجود دارد.

ب) فقط درصد فراوانی هیدروژن از ۵۰٪ بیشتر است.



پ) علاوه بر هیدروژن، هلیم (دومین عنصر فراوان مشتری) نیز به دستهٔ s جدول دوره‌ای تعلق دارد.

ت) این دو عنصر مشترک، $_{8}O$ و $_{16}S$ هستند که متعلق به گروه ۱۶ (ns^2np^4) بوده و در بیرونی‌ترین زیرلایهٔ اتم هر کدام، ۴ الکترون وجود دارد.

۹۷ کدام مورد دربارهٔ عنصر منیزیم، نادرست است؟

۱) همانند عنصر هیدروژن، دارای سه ایزوتوپ طبیعی است.

۲) عدد اتمی آن، سه برابر شمار نوترون‌ها در فراوان‌ترین ایزوتوپ طبیعی لیتیم است.

۳) نسبت شمار الکترون‌ها با $l=0$ به $l=1$ در اتم آن، با این نسبت در اتم یکی از عنصرهای دورهٔ دوم جدول دوره‌ای برابر است.

۴) شمار پروتون‌ها در هستهٔ اتم آن، با شمار الکترون‌ها در سومین لایهٔ اتم عنصر $_{24}E$ یکسان است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): هر دو عنصر منیزیم و هیدروژن، ۳ ایزوتوپ طبیعی دارند.

نکته

ایزوتوپ‌های مهم کتاب درسی در جدول زیر آورده شده است:

عنصر	شمار ایزوتوپ‌های طبیعی	نماد ایزوتوپ‌های طبیعی	ایزوتوپی با فراوانی بیشتر
منیزیم ($_{12}Mg$)	۳	$^{24}_{12}Mg$, $^{25}_{12}Mg$, $^{26}_{12}Mg$	$^{24}_{12}Mg$ (ایزوتوپ سبک‌تر)
لیتیم ($_{3}Li$)	۲	$^{6}_{3}Li$, $^{7}_{3}Li$	$^{7}_{3}Li$ (ایزوتوپ سنگین‌تر)
هیدروژن ($_{1}H$)	۳	$^{1}_{1}H$, $^{2}_{1}H$, $^{3}_{1}H$	$^{1}_{1}H$ (ایزوتوپ سبک‌تر)
کلر ($_{17}Cl$)	۲	$^{35}_{17}Cl$, $^{37}_{17}Cl$	$^{35}_{17}Cl$ (ایزوتوپ سبک‌تر)

گزینهٔ (۲): عدد اتمی منیزیم برابر ۱۲ و شمار نوترون‌ها در فراوان‌ترین ایزوتوپ طبیعی لیتیم ($^{7}_{3}Li$) برابر $7-3=4$ است:

$$\frac{12}{4}=3$$

گزینهٔ (۳): $l=0$ و $l=1$ به ترتیب مربوط به زیرلایه‌های s و p هستند:

$$_{12}Mg: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌ها با } l=0}{\text{شمار الکترون‌ها با } l=1}=\frac{6}{6}=1$$

در اتم $_8O$ از دورهٔ دوم نیز شمار الکترون‌ها در زیرلایه‌های s و p برابر بوده و نسبت شمار الکترون‌ها با $l=0$ به $l=1$ برابر عدد یک است.

$$_8O: 1s^2 2s^2 2p^4 \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌ها با } l=0}{\text{شمار الکترون‌ها با } l=1}=\frac{4}{4}=1$$

گزینهٔ (۴): در هستهٔ اتم منیزیم ($_{12}Mg$)، ۱۲ پروتون وجود دارد، اما لایهٔ سوم اتم $_{24}E$، دارای ۱۳ الکترون می‌باشد.

$$_{24}E: 1s^2 2s^2 2p^6 \underbrace{3s^2 3p^6 3d^5}_{\text{۱۳ الکترون با } n=3} 4s^1$$

۹۸ یک بادکنک با $۱۰^{۲۴}$ اتم از ایزوتوپ‌های طبیعی گاز نئون ($^{۲۰}_{۱۰}Ne$, $^{۲۱}_{۱۰}Ne$, $^{۲۲}_{۱۰}Ne$) پُر شده است. اگر در این بادکنک ۹×۱۰^{۲۳} اتم از ایزوتوپ ^{۲۰}Ne و $۹/۵\times۱۰^{۲۲}$ اتم از ایزوتوپ ^{۲۲}Ne وجود داشته باشد، درصد فراوانی ^{۲۱}Ne در این نمونه و جرم اتمی میانگین نئون، به ترتیب از راست به چپ، کدام است؟

۱) ۲۰/۱۹۲۵ ،۰/۲۵
۲) ۲۰/۱۹۵ ،۰/۵
۳) ۲۰/۱۰۰ ،۰/۵
۴) ۲۰/۰۹۵ ،۰/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته برای محاسبهٔ درصد فراوانی ایزوتوپ‌ها و جرم اتمی میانگین یک عنصر می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$\text{درصد فراوانی ایزوتوپ A} = \frac{\text{شمار اتم‌های A}}{\text{شمار کل اتم‌ها}}\times۱۰۰$$

$$M = M_۱ + \frac{F_۲}{F_{کل}}(M_۲ - M_۱) + \frac{F_۳}{F_{کل}}(M_۳ - M_۱) + \cdots$$

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا شمار اتم‌های $^{۲۱}_{۱۰}Ne$ را در بادکنک به دست می‌آوریم:

$$\text{شمار اتم‌های } ^{۲۱}Ne = (\text{شمار کل اتم‌ها}) - (\text{شمار اتم‌های } ^{۲۰}Ne + \text{شمار اتم‌های } ^{۲۲}Ne)$$

$$(۱۰^{۲۴}) - (۹\times۱۰^{۲۳} + ۰/۹۵\times۱۰^{۲۳}) = (۱۰\times۱۰^{۲۳}) - (۹/۹۵\times۱۰^{۲۳}) = ۰/۰۵\times۱۰^{۲۳}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{درصد فراوانی } ^{۲۱}Ne = \frac{\text{شمار اتم‌های } ^{۲۱}Ne}{\text{شمار کل اتم‌های نئون}}\times۱۰۰ = \frac{۰/۰۵\times۱۰^{۲۳}}{۱۰^{۲۴}}\times۱۰۰ = ٪۰/۵$$

برای محاسبهٔ جرم اتمی میانگین نئون، به درصد فراوانی ^{۲۲}Ne هم نیاز داریم:

$$\text{درصد فراوانی } ^{۲۲}Ne = \frac{\text{شمار اتم‌های } ^{۲۲}Ne}{\text{شمار کل اتم‌های نئون}}\times۱۰۰ = \frac{۹/۵\times۱۰^{۲۲}}{۱۰^{۲۴}}\times۱۰۰ = ٪۹/۵$$

حالا از رابطهٔ جرم اتمی میانگین استفاده می‌کنیم:

$$M = M_۱ + \frac{F_۲}{F_{کل}}(M_۲ - M_۱) + \frac{F_۳}{F_{کل}}(M_۳ - M_۱) \Rightarrow M = ۲۰ + (\frac{۰/۵}{۱۰۰}\times۱) + (\frac{۹/۵}{۱۰۰}\times۲) = ۲۰/۱۹۵$$

۹۹ در آلیاژی از آلومینیم و قلع به ازای هر سه اتم آلومینیم، یک اتم قلع وجود دارد. در ۸۰/۴ گرم از این آلیاژ، چند مول آلومینیم وجود دارد؟ $(Sn = ۱۲۰ , Al = ۲۷ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱/۲
۲) ۱/۸
۳) ۲/۲
۴) ۲/۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ اگر شمار مول‌های قلع در آلیاژ برابر x باشد، شمار مول‌های آلومینیم برابر ۳x است. (نسبت شمار مول‌ها با نسبت شمار اتم‌ها برابر است.)

جرم قلع: $x\ mol\ Sn \times \frac{۱۲۰\ g\ Sn}{۱\ mol\ Sn} = ۱۲۰x\ g\ Sn$

جرم آلومینیم: $۳x\ mol\ Al \times \frac{۲۷\ g\ Al}{۱\ mol\ Al} = ۸۱x\ g\ Al$

جرم آلیاژ: $۸۰/۴\ g \Rightarrow ۱۲۰x + ۸۱x = ۸۰/۴$

$\Rightarrow ۲۰۱x = ۸۰/۴ \Rightarrow x = ۰/۴$

$\Rightarrow$ مول $Al = ۳x = ۱/۲$

۱۰۰ از دو رنگ a و b در گسترهٔ مرئی، a بیشترین انحراف در منشور و b کم‌ترین انرژی را دارد، با توجه به آن، کدام موارد درست هستند؟

بنفش ← a بیشترین انحراف در منشور

سرخ ← b کم‌ترین انرژی را دارد

الف) هر دو رنگ a و b، جزء خطوط رنگی طیف نشری خطی هیدروژن هستند.

ب) تفاوت طول موج a با طول موج پرتوهای گاما، بیشتر از تفاوت طول موج b با این پرتوها است.

پ) طول موج رنگ حاصل از شعلهٔ فلزهای سدیم و مس در بین طول موج a و b واقع است.

ت) نسبت طول موج b به a، همانند نسبت طول موج پرتوهای ایکس به ریزموج‌ها، عددی کوچک‌تر از یک است.

۱) الف ـ ب
۲) ب ـ ت
۳) الف ـ پ
۴) الف ـ پ ـ ت

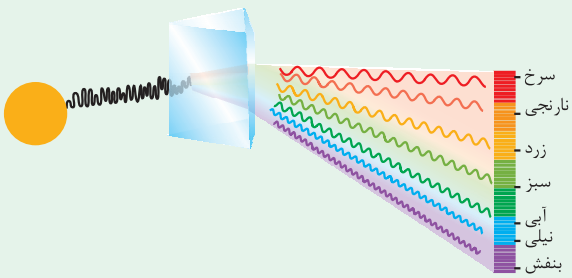
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

نکته

نور خورشید اگرچه سفید به نظر می‌رسد، اما با عبور از یک منشور، تجزیه شده و مطابق شکل زیر، طیف **پیوسته‌ای** از رنگ‌ها را ایجاد می‌کند.



با توجه به شکل، *معلوم* که هر چه طول موج یک نور مرئی کوتاه‌تر باشد یا انرژی آن بیشتر باشد، میزان انحراف آن پس از عبور از منشور، بیشتر است:

انرژی پرتو $\propto$ میزان شکست و انحراف پرتو

مقایسهٔ میزان شکست و انحراف: سرخ < نارنجی < زرد < سبز < آبی < نیلی < بنفش

در گسترهٔ مرئی، نور بنفش بیشترین انحراف در هنگام عبور از منشور را دارد و در بین آن‌ها، کم‌ترین انرژی مربوط به نور سرخ است.

a ← نور بنفش

b ← نور سرخ

بررسی عبارت‌ها:

الف) در طیف نشری خطی هیدروژن در گسترهٔ مرئی، ۴ نوار به رنگ‌های سرخ، آبی، نیلی و بنفش وجود دارد.

ب) طول موج نور بنفش به طول موج پرتوهای گاما نزدیک‌تر است:

مقایسهٔ طول موج: امواج رادیویی < ریزموج‌ها < پرتوهای فروسرخ < مرئی < پرتوهای فرابنفش < پرتوهای ایکس < پرتوهای گاما

سرخ ... بنفش

تفاوت طول موج: پرتوهای گاما و نور سرخ < پرتوهای گاما و نور بنفش

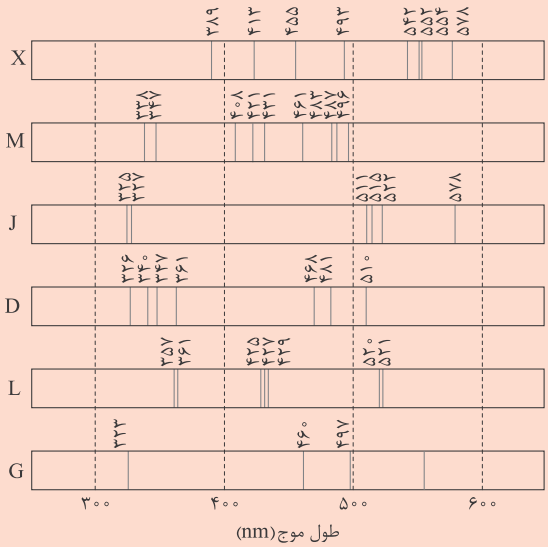
پ) رنگ شعلهٔ فلزهای سدیم و مس به ترتیب زرد و سبز است.

رنگ‌های زرد و سبز از نظر طول موج، بین رنگ‌های سرخ و بنفش قرار دارند:

طول موج: سرخ > نارنجی > زرد > سبز > آبی > نیلی > بنفش

ت) نسبت طول موج نور سرخ به نور بنفش بزرگ‌تر از ۱، اما نسبت طول موج پرتوهای ایکس به ریزموج‌ها، کوچک‌تر از ۱ است، زیرا طول موج نور سرخ نسبت به نور بنفش، بیشتر و طول موج پرتوهای ایکس نسبت به ریزموج‌ها، کم‌تر می‌باشد.

۱۰۱ **با توجه به طیف نشری خطی عنصرها و طول موج خطوط در طیف دو نمونهٔ مجهول داده‌شده، کدام مورد درست است؟ (گاهی تعدادی از خط‌های طیف نشری خطی عنصرها به دلیل شدت کم مشاهده نمی‌شوند.)**



- **نمونهٔ ۱: ۵۷۸ nm و ۵۲۲، ۵۱۵، ۵۱۱، ۴۸۱، ۴۶۸، ۳۶۱، ۳۴۷، ۳۴۰، ۳۲۷**
- **نمونهٔ ۲: ۵۲۱ nm و ۴۹۶، ۴۸۵، ۴۶۱، ۴۳۱، ۴۲۹، ۴۲۷، ۴۲۵، ۴۲۱، ۴۰۸، ۳۶۱، ۳۵۷، ۳۴۷، ۳۳۸**

۱) عنصر G به یقین عدد اتمی کم‌تری نسبت به عنصر L دارد.

۲) شمار عنصرها در نمونهٔ ۲، بیشتر از شمار عنصرها در نمونهٔ ۱ است.

۳) شمار خطوط در ناحیهٔ مرئی عنصر M برابر با عنصر X و بیشتر از شمار این خطوط در ۴ عنصر دیگر است.

۴) D می‌تواند مربوط به طیف نشری خطی اتم سدیم باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ناحیهٔ مرئی، طول موجی بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر دارد. در این گستره، عنصرهای M و X هر دو دارای ۷ خط هستند اما چهار عنصر دیگر کم‌تر از این تعداد در ناحیهٔ مرئی خود دارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با تعداد خطوط در طیف نشری خطی در یک گسترهٔ معین، نمی‌توان عدد اتمی عنصرها را مقایسه کرد.

گزینهٔ (۲): در نمونهٔ ۱، عنصرهای J و D و در نمونهٔ ۲، عنصرهای M و L وجود دارد.

نکته در صورتی یک عنصر در یک نمونهٔ مجهول وجود دارد که همهٔ خطوط طیفی عنصر مورد نظر (با همان طول موج‌ها) در طیف نمونه وجود داشته باشد.

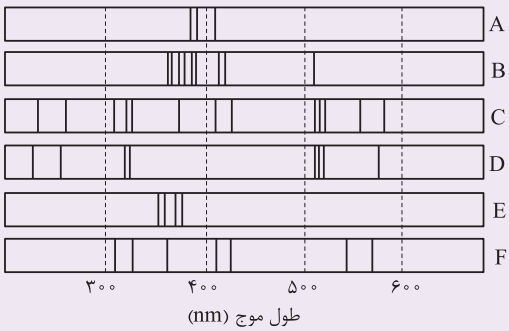
گزینهٔ (۴): طبق شکل کتاب درسی، در طیف نشری خطی سدیم، ۷ خط در ناحیهٔ مرئی وجود دارد، اما در عنصر D تنها ۳ خط در ناحیهٔ مرئی (۴۰۰ ـ ۷۰۰nm) وجود دارد.



کنکور

با توجه به طیف‌های نشری خطی A تا F که به دو مخلوط و چهار عنصر فلزی مربوط است، کدام مورد درست است؟

(سؤال ۷۷ کنکور تجربی ۱۴۰۲ (خارج از کشور))



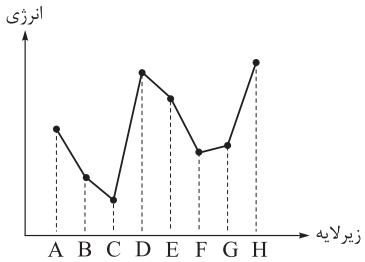
۱) B، مخلوطی از دو عنصر متفاوت است.

۲) طیف نشری خطی F، می‌تواند به اتم‌های دستِ‌کم دو عنصر مربوط باشد.

۳) اگر D و F، طیف‌های نشری خطی اتم دو عنصر فلزی باشند، C طیف نشری خطی یک مخلوط را نشان می‌دهد.

۴) مقایسهٔ طیف‌های نشری خطی A و E نشان می‌دهد که الکترون‌های برانگیخته در اتم A، هنگام بازگشت به حالت پایه، انرژی بیشتری آزاد می‌کنند.

۱۰۲ **با بررسی نمودار زیر که سطح انرژی زیرلایه‌های الکترونی ۱s تا ۴p را قبل از اشغال‌شدن به صورت نامرتب نشان می‌دهد، می‌توان دریافت که:**



۱) $1s:C\ ,\ 4s:E\ ,\ 3s:G$

۲) $2p:A\ ,\ 3d:H\ ,\ 4p:E$

۳) $3p:F\ ,\ 3s:B\ ,\ 3d:E$

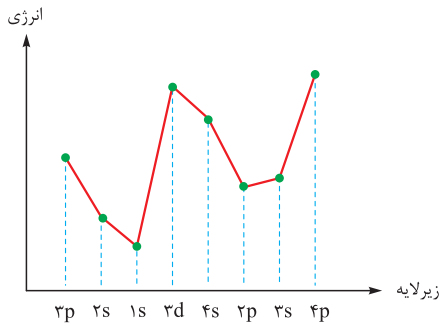
۴) $4p:H\ ,\ 3d:D\ ,\ 1s:F$

پاسخ: گزینهٔ ۱

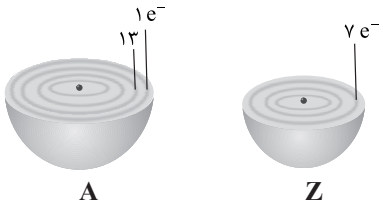
پاسخ خیلی تشریحی

انرژی: $1s < 2s < 2p < 3s < 3p < 4s < 3d < 4p$

با توجه به این‌که انرژی هر زیرلایه به n و $n+l$ آن بستگی دارد، موقعیت هر زیرلایه را در نمودار مشخص می‌کنیم:



۱۰۳ **با توجه به شکل زیر که لایه‌های الکترونی اشغال‌شدهٔ اتم‌های A و Z را نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟**



۱) شمار الکترون‌ها با $l=2$ در اتم A، دو برابر شمار زیرلایه‌های اشغال‌شدهٔ اتم عنصر Z است.

۲) عنصر A نخستین عنصر جدول تناوبی است که اتم آن دو زیرلایهٔ اشغال‌شده با شمار الکترون‌های فرد دارد.

۳) در میان ایزوتوپ‌های طبیعی عنصر Z، ایزوتوپ سنگین‌تر فراوانی بیشتری دارد.

۴) اگر عدد جرمی اتم Z برابر با ۳۷ باشد، هستهٔ آن به احتمال زیاد ناپایدار است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عنصرهای A و Z به ترتیب عنصرهای $_{24}Cr$ و $_{17}Cl$ می‌باشند.

$$\text{عدد اتمی A} = \underbrace{2}_{\text{لایهٔ اول}} + \underbrace{8}_{\text{لایهٔ دوم}} + \underbrace{13}_{\text{لایهٔ سوم}} + \underbrace{1}_{\text{لایهٔ چهارم}} = 24$$

$$\text{عدد اتمی Z} = \underbrace{2}_{\text{لایهٔ اول}} + \underbrace{8}_{\text{لایهٔ دوم}} + \underbrace{7}_{\text{لایهٔ سوم}} = 17$$

عنصر $_{24}Cr$، اولین عنصر در جدول تناوبی است که در آرایش الکترونی اتم آن، دو زیرلایهٔ الکترونی با شمار الکترون‌های فرد وجود دارد.

$$_{24}Cr : [_{18}Ar]3d^5 4s^1$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $_{24}Cr$، پنج الکترون با $l=2$ (d) و $_{17}Cl$، پنج زیرلایهٔ اشغال‌شده از الکترون دارد.

$$_{17}Cl : 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^5$$

گزینهٔ (۳): کلر دو ایزوتوپ طبیعی $_{17}^{35}Cl$ و $_{17}^{37}Cl$ دارد که فراوانی ایزوتوپ سبک‌تر آن ($_{17}^{35}Cl$) در طبیعت بیشتر است.

گزینهٔ (۴): هستهٔ این اتم پایدار است، زیرا نسبت شمار نوترون‌ها به پروتون‌ها در آن کم‌تر از ۱/۵ است.

$$_{17}^{37}Cl : \frac{\text{شمار نوترون}}{\text{شمار پروتون}} = \frac{20}{17} \simeq 1/2$$

۱۰۴ **کدام مورد، جملهٔ زیر را به درستی کامل نمی‌کند؟**

«مجموع عدد اتمی عنصرهایی از دورهٔ ..... جدول تناوبی که ..... ، برابر ..... است.»

۱) دوم ـ نماد شیمیایی تک‌حرفی دارند ـ ۳۵

۲) سوم ـ بیرونی‌ترین زیرلایهٔ اتم آن‌ها، دوالکترونی است ـ ۲۶

۳) چهارم ـ شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم آن‌ها برابر ۷ است ـ ۶۰

۴) چهارم ـ در آرایش الکترونی اتم آن‌ها زیرلایهٔ نیمه‌پر وجود دارد ـ ۹۷

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در دورهٔ دوم، ۵ عنصر با نماد شیمیایی دوحرفی وجود دارد:

$$_{3}Li\ ,\ _{4}Be\ ,\ \underbrace{_{5}B\ ,\ _{6}C\ ,\ _{7}N\ ,\ _{8}O\ ,\ _{9}F}_{5+6+7+8+9=35}\ ,\ _{10}Ne$$

گزینهٔ (۲): در اتم‌های دورهٔ سوم، زیرلایه‌های 3s و 3p در حال پرشدن هستند. می‌خواهیم این زیرلایه‌ها دو الکترونی باشند:

$$_{12}Mg:[Ne]3s^{2}\quad ,\quad _{14}Si:[Ne]3s^{2}3p^{2}$$

$$\text{مجموع عدد اتمی عنصرها} = 12+14 = 26$$

گزینهٔ (۳): عنصرهای گروه‌های ۷ و ۱۷ دارای ۷ الکترون ظرفیتی هستند:

$$_{25}Mn:[Ar]3d^{5}4s^{2}\quad ,\quad _{35}Br:[Ar]3d^{10}4s^{2}4p^{5}$$

$$\text{مجموع عدد اتمی عنصرها} = 25+35 = 60$$

گزینهٔ (۴): در اتم‌های دورهٔ چهارم، زیرلایه‌های 4s ، 3d و 4p در حال پرشدن هستند؛ این زیرلایه‌ها به ترتیب حداکثر گنجایش ۲، ۱۰ و ۶ الکترون را دارند. می‌خواهیم این زیرلایه‌ها، نیمه‌پر باشند، یعنی دارای ۱، ۵ و ۳ الکترون باشند:

$$_{19}K:[Ar]4s^{1}\quad ,\quad _{24}Cr:[Ar]3d^{5}4s^{1}\quad ,\quad _{25}Mn:[Ar]3d^{5}4s^{2}$$

$$_{29}Cu:[Ar]3d^{10}4s^{1}\quad ,\quad _{33}As:[Ar]3d^{10}4s^{2}4p^{3}$$

$$\text{مجموع عدد اتمی عنصرها} = 19+24+25+29+33 = 130$$

۱۰۵ **اگر عنصر X، شانزدهمین عنصر دستهٔ p و عنصر M، چهارمین عنصر دستهٔ d جدول تناوبی باشد، مقایسهٔ شمار الکترون‌های ظرفیتی (a) و مجموع (n + l) الکترون‌های ظرفیتی (b) اتم‌های X و M، در کدام گزینه به درستی آمده است؟**

۱) $a_X = a_M \quad , \quad b_X = b_M$

۲) $a_X = a_M \quad , \quad b_M = b_X + ۱$

۳) $a_X = a_M + ۱ \quad , \quad b_X = b_M + ۱$

۴) $a_M = a_X + ۱ \quad , \quad b_M = b_X + ۵$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

شانزدهمین عنصر دستهٔ p، عنصری است که اتم آن، ۱۶ الکترون در زیرلایه‌های p دارد، یعنی در آرایش الکترونی آن، زیرلایه‌های $۲p^۶, ۳p^۶, ۴p^۴$ وجود دارد:

$$X: [Ar]۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۴ \Rightarrow {}_{۳۴}Se \quad (\text{گروه } ۱۶)$$

عدد اتمی اولین عنصر دستهٔ d برابر ۲۱ است؛ بنابراین چهارمین عنصر دستهٔ d، عنصری با عدد اتمی ۲۴ می‌باشد:

$$M: [Ar]۳d^۵۴s^۱ \Rightarrow {}_{۲۴}Cr \quad (\text{گروه } ۶)$$

عنصرهای X و M به ترتیب در گروه ۱۶ و ۶ قرار دارند و هر دو دارای ۶ الکترون ظرفیتی هستند.

حالا بیایید مجموع (n + l) الکترون‌های ظرفیتی اتم این دو عنصر را حساب کنیم:

$$X: ۴s^۲۴p^۴ \Rightarrow (n+l) = ۲(\underbrace{۴+۰}_{۴s}) + ۴(\underbrace{۴+۱}_{۴p}) = ۲۸$$

$$M: ۳d^۵۴s^۱ \Rightarrow (n+l) = ۵(\underbrace{۳+۲}_{۳d}) + ۱(\underbrace{۴+۰}_{۴s}) = ۲۹$$

مجموع (n + l) الکترون‌های ظرفیتی اتم M، ۱ واحد بیشتر از اتم X است.