پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه یازدهم	مرحله پنجم
سال تحصیلی ۰۶-۱۴۰۵	۲۴/مهر/۱۴۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۱)	فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ میثم حصارکی ـ محسن علی نجاری ـ محمد گودرزی ـ سروش موئینی
هندسه (۲)	امیرحسین ابومحبوب
آمار و احتمال	مصطفی دیداری ـ سوگند روشنی ـ سعید قندچی
فیزیک (۲)	یاشار انگوتی ـ نوید شاهی
شیمی (۲)	یاسر عبداللهی ـ وحید فارسیان

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۱)	محسن علی نجاری	محسن علی نجاری	عادل حسینی	علی افضل‌زاده سروش موئینی مازیار احمدی‌ناو	محمد بهرامی مرضیه فرشید سهند محمد کریم‌نژاد
هندسه (۲)	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	محمد خندان	منصور زرکش اصفهانی ماهک کناره ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	سعید قندچی	عباس حسینی منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر مریم نظری ابوالفضل ناصری
فیزیک (۲)	نوید شاهی	یاشار انگوتی	محمدجواد سورچی	علیرضا جباری هادی نجفی	علیرضا جعفری‌آثار پوریا علاقه‌مند مدیا عیدی مریم گلی‌حسنلو امیر محمودی انزابی
شیمی (۲)	یاسر عبداللهی	وحید فارسیان	وحید فارسیان	مرتضی نصیرزاده محمدمهدی کریمیان یاشار ذریه	عماد ربیعی عرشیا شفیعی امیر قاسمی‌پور مهدیس محبت‌پناه

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۵

Azmoonkheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۵

تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ عادل حسینی ـ مینا کریم‌زاده
سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ زهرا صفری الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری ـ محیا غنی‌فرد ساناز فلاحی ـ نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخائی ـ الهام سهرابی طاهره صادق‌نژاد ـ مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند ـ مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ مجموع همهٔ اعداد سه‌رقمی مضرب ۷ کدام است؟ ← دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند.

۱) ۷۰۳۲۲
۲) ۷۰۳۲۹
۳) ۷۰۳۳۶
۴) ۷۰۳۴۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی a_n با قدرنسبت d از روابط زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی مضرب ۷ عدد ۱۰۵ و بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی مضرب ۷ عدد ۹۹۴ است.

دقت کنید که $7\times11\times13 = 1001$ است، بنابراین $1001-7$ بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی مضرب ۷ می‌شود.

گام دوم: حالا باید تعداد اعداد دنبالهٔ $a_n: 105, 112, \ldots, 994$ را پیدا کنیم:

$$n = \frac{994-105}{7} + 1 = \frac{889}{7} + 1 = 128$$

گام سوم: حالا می‌توانیم از روابط درس‌باکس استفاده کنیم:

$$\begin{cases} S = \frac{128}{2}(2\times105 + 127\times7) = 64\times1099 = 70336 \\ S = \frac{128(105+994)}{2} = 64\times1099 = 70336 \end{cases}$$

کتاب درسی مجموع همهٔ اعداد طبیعی سه‌رقمی که مضرب شش هستند چه‌قدر می‌شود؟ *(حسابان (۱) ـ تمرین ۲ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)*

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲ مجموع تمام جملات دورقمی دنبالهٔ حسابی ... , ۳ , ۱ , −۱ کدام است؟

۱) ۲۴۷۵ ۲) ۲۴۸۵

۳) ۲۴۷۰ ۴) ۲۴۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا جملهٔ عمومی دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} a_1 = -1 \\ d = 1-(-1) = 2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} a_n = -1 + 2(n-1) = 2n - 3$$

گام دوم: اولین جملهٔ دورقمی دنبالهٔ a_n، $a_7 = 11$ و آخرین جملهٔ دورقمی $a_{51} = 99$ است. تعداد این جملات دورقمی برابر $51 - 7 + 1 = 45$ است.

گام سوم: حالا می‌توانیم مجموع این ۴۵ عدد را پیدا کنیم:

$$S = \frac{45(11+99)}{2} = 45 \times 55 = (50-5)(50+5) = 2500 - 25 = 2475$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع چهار جملهٔ اول، ۳ برابر مجموع دو جملهٔ اول است. مجموع جملات هفتم و چهارم این دنباله، چند برابر جملهٔ اول آن است؟

جملات a_1 تا a_4 — جملات a_1 و a_2

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جملهٔ عمومی دنباله را a_n می‌گیریم و از درس‌باکس پاسخ سؤال اول داریم:

$$\begin{cases} S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + d) = 2a_1 + d \\ S_4 = \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 4a_1 + 6d \end{cases}$$

حالا طبق فرض S_4 را سه برابر S_2 قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{S_4 = 3S_2} 4a_1 + 6d = 3(2a_1 + d) = 6a_1 + 3d \Rightarrow 2a_1 = 3d \Rightarrow d = \frac{2}{3}a_1$$

گام دوم: در این صورت جملهٔ عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + \frac{2}{3}(n-1)a_1 = \frac{2n+1}{3}a_1$$

حالا می‌توانیم خواستهٔ سؤال را به دست آوریم:

$$\frac{a_4 + a_7}{a_1} = \frac{3a_1 + 5a_1}{a_1} = 8$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴ شعاع دایره‌ای $\frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{\pi}}$ است. در مرحلهٔ اول نصف مساحت آن، سپس در مرحلهٔ دوم $\frac{۱}{۲}$ مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. اگر به همین ترتیب در هر مرحله، نصف مساحت باقی‌مانده از مرحلهٔ قبل را رنگ کنیم، پس از چند مرحله، حداقل ۹۶ درصد سطح دایره رنگ شده است؟

قدرنسبت دنبالهٔ هندسی حاصل $\frac{۱}{۲}$ است.

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

مشاوره در مسائلی از این دست اصلاً شکل اولیه و مساحت آن اهمیتی ندارد و ذهن خود را درگیر آن نکنید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی a_n با قدرنسبت q از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مساحت دایره را A می‌گیریم. در مرحلهٔ اول $\frac{A}{۲}$، در مرحلهٔ دوم $\frac{A}{۴}$، ... و در مرحلهٔ n اُم $\frac{A}{۲^n}$ را رنگ می‌کنیم. مشخص است که دنبالهٔ حاصل هندسی است که جملهٔ اول آن $\frac{A}{۲}$ و قدرنسبت آن $\frac{۱}{۲}$ است.

گام دوم: حالا مجموع n جملهٔ اول این دنباله را حساب می‌کنیم:

$$S_n = \frac{\frac{A}{۲}(۱-\frac{۱}{۲^n})}{۱-\frac{۱}{۲}} = A(۱-\frac{۱}{۲^n})$$

گام سوم: هدف این است که S_n حداقل برابر ۰/۹۶ A باشد:

$$\xrightarrow{S_n \geq ۰/۹۶A} A(۱-\frac{۱}{۲^n}) \geq ۰/۹۶A \Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲^n} \geq ۰/۹۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲^n} \leq ۰/۰۴ \Rightarrow ۲^n \geq \frac{۱}{۰/۰۴} = ۲۵ \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq ۵$$

پس باید حداقل ۵ مرحله رنگ‌آمیزی کنیم.

کتاب درسی

طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست‌کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟ *(مسابان (۱) ـ تمرین ۶ صفحهٔ ۶ کتاب درسی)*

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵ در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع چهار جملهٔ اول، ۴ برابر مجموع دو جملهٔ اول آن است. جملهٔ هشتم این دنباله چند برابر جملهٔ دوم است؟

۱) $۹\sqrt{۳}$
۲) ۹
۳) ۲۷
۴) $۳\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ (۳)

نکته در دنبالهٔ هندسی a_n با قدرنسبت q داریم:

$$\frac{S_{۲n}}{S_n}=\frac{\frac{a_۱(۱-q^{۲n})}{۱-q}}{\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}}=\frac{(۱-q^n)(۱+q^n)}{۱-q^n}=۱+q^n$$

یعنی مجموع $۲n$ جملهٔ اول دنباله، $۱+q^n$ برابر مجموع n جملهٔ اول آن است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مجموع دو جملهٔ اول را $S_۲$ و مجموع چهار جملهٔ اول را $S_۴$ می‌نامیم و مطابق نکتهٔ بالا داریم:

$$\frac{S_۴}{S_۲}=۱+q^۲=۴ \Rightarrow q^۲=۳ \Rightarrow q=\pm\sqrt{۳}$$

گام دوم: حالا اگر جملهٔ عمومی دنباله را $t_n=t_۱q^{n-۱}$ در نظر بگیریم، می‌توانیم خواستهٔ سؤال را به دست آوریم:

$$\frac{t_۸}{t_۲}=\frac{t_۱q^۷}{t_۱q}=q^۶=(q^۲)^۳=۳^۳=۲۷$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶ در دنبالهٔ هندسی ... , ۱۲ , ۶ , ۳ مجموع چهار جملهٔ اول چند برابر مجموع چهار جملهٔ دوم آن است؟

قدرنسبت برابر ۲ است.

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۳۲}$

۳) $\frac{۱}{۶۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مجموع چهار جملهٔ اول را $S_۴$ و مجموع هشت جملهٔ اول را $S_۸$ می‌نامیم. براساس نکتهٔ پاسخ قبل داریم:

$$\frac{S_۸}{S_۴} = ۱ + q^۴ = ۱ + ۲^۴ = ۱۷$$

گام دوم: حالا اگر مجموع چهار جملهٔ دوم این دنباله را $S'_۴$ بنامیم، داریم:

$$\frac{S_۴ + S'_۴}{S_۴} = ۱۷ \Rightarrow ۱ + \frac{S'_۴}{S_۴} = ۱۷ \Rightarrow \frac{S'_۴}{S_۴} = ۱۶$$

خواستهٔ سؤال برابر $\frac{S_۴}{S'_۴} = \frac{۱}{۱۶}$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷ کدام‌یک از معادلات زیر **دو جواب دارد** که حاصل‌ضرب آن‌ها از مجموع آن‌ها بزرگ‌تر است؟

Δ ی آن باید مثبت باشد.

۱) $3x^2+10x+9=0$

۲) $3x^2+10x-12=0$

۳) $3x^2+11x+9=0$

۴) $3x^2+11x-12=0$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ را (که $a\neq 0$ است) در نظر بگیرید. با توجه به مشخصهٔ مهم Δ (مبین معادله) که برابر است با $\Delta=b^2-4ac$ داریم:

$$\begin{cases}\Delta<0: \text{معادله جواب حقیقی ندارد.}\\ \Delta=0: \text{تنها جواب معادله } x=-\frac{b}{2a} \text{ است.}\\ \Delta>0: \text{معادله دو جواب حقیقی متمایز دارد.}\end{cases}$$

در حالت $\Delta>0$، اگر جواب‌های معادله را α و β بنامیم، می‌توانیم مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را بدون محاسبهٔ آن‌ها به دست آوریم:

$$\begin{cases}\text{مجموع جواب‌ها: } S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\\ \text{حاصل‌ضرب جواب‌ها: } P=\alpha\beta=\frac{c}{a}\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در ابتدا برای هر معادله، مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها را به دست می‌آوریم:

گزینهٔ (۱): $3x^2+10x+9=0:\begin{cases}S=-\frac{10}{3}\\ P=3\end{cases}\Rightarrow S<P$ ✓

گزینهٔ (۲): $3x^2+10x-12=0:\begin{cases}S=-\frac{10}{3}\\ P=-4\end{cases}\Rightarrow S>P$ ×

گزینهٔ (۳): $3x^2+11x+9=0:\begin{cases}S=-\frac{11}{3}\\ P=3\end{cases}\Rightarrow S<P$ ✓

گزینهٔ (۴): $3x^2+11x-12=0:\begin{cases}S=-\frac{11}{3}\\ P=-4\end{cases}\Rightarrow S>P$ ×

گام دوم: مشخص است که در معادلات گزینه‌های (۱) و (۳)، حاصل‌ضرب جواب‌ها از مجموع آن‌ها بزرگ‌تر است، اما فقط معادلهٔ گزینهٔ (۳) است که Δ ی آن مثبت است:

گزینهٔ (۱): $\Delta=10^2-4\times3\times9=100-108<0$ ×

گزینهٔ (۳): $\Delta=11^2-4\times3\times9=121-108>0$ ✓

توجه! لازم به ذکر است که روابط $S=-\frac{b}{a}$ و $P=\frac{c}{a}$، فقط زمانی درست و قابل استفاده هستند که $\Delta>0$ باشد، اما در این سؤال به دلیل سادگی و جلوگیری از محاسبهٔ Δها، ابتدا سراغ S و P رفته‌ایم.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸ به ازای کدام مقدار m، یکی از جواب‌های معادلهٔ $x^۲ + ۳x - m + ۲ = ۰$ از نصف جواب دیگر آن، دو واحد بیشتر است؟

۱) $-\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۲۸}{۹}$ ۳) $-\frac{۸}{۹}$ ۴) $\frac{۲۸}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، مجموع جواب‌ها $S = -\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $P = \frac{c}{a}$ است.

روابط دیگر بین α و β به صورت زیر است:

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P$$
$$\alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳SP \xrightarrow{\alpha,\beta>۰} \begin{cases} \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + ۲\sqrt{P}} \\ \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \sqrt{SP + ۲P\sqrt{P}} \\ \alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta} = \sqrt{S^۳ - ۳SP + ۲P\sqrt{P}} \end{cases}$$
$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{S^۲}{P} - ۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اگر جواب‌های معادله α و β باشند، داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -۳ \\ P = \alpha\beta = -m + ۲ \end{cases}$$

طبق فرض داریم: $\alpha = \frac{\beta}{۲} + ۲$؛ بنابراین به کمک S می‌توانیم مقادیر α و β را بیابیم:

$$\xrightarrow{\alpha = \frac{\beta}{۲} + ۲} \frac{\beta}{۲} + ۲ + \beta = -۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\beta = -۵ \Rightarrow \beta = -\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۳}$$

گام دوم: حالا به کمک P، می‌توانیم مقدار m را به دست آوریم:

$$P = \alpha\beta = \frac{۱}{۳} \times (-\frac{۱۰}{۳}) = ۲ - m \Rightarrow ۲ - m = -\frac{۱۰}{۹} \Rightarrow m = \frac{۲۸}{۹}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲+(m-۱)x-m^۲=۰$ باشند، کم‌ترین مقدار عبارت $\alpha^۲+\beta^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا حاصل $\alpha^۲+\beta^۲$ را، مطابق درس‌باکس سؤال قبل، برحسب m به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix}S=۱-m\\P=-m^۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow \alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=m^۲-۲m+۱+۲m^۲=۳m^۲-۲m+۱$$

گام دوم: کم‌ترین مقدار عبارت $۳m^۲-۲m+۱$ به ازای $m=\frac{۱}{۳}$ به دست می‌آید:

$$(\alpha^۲+\beta^۲)_{min}=۳(\frac{۱}{۳})^۲-۲(\frac{۱}{۳})+۱=\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۳}+۱=\frac{۲}{۳}$$

کنکور اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+x-۱-m^۲=۰$ باشند، کم‌ترین مقدار ممکن برای $\alpha^۲+\beta^۲$ کدام است؟

(سؤال ۱۱۸ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\beta^۲+۱}{\alpha^۲+\alpha+۱} + \frac{\alpha^۲+۱}{\beta^۲+\beta+۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۸}{۳}$

۲) $\frac{۵۶}{۳}$

۳) $\frac{۱۱۵}{۶}$

۴) $\frac{۱۱۵}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint از خود معادله استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جواب‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند؛ پس داریم:

$$\alpha^۲ - ۵\alpha + ۱ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ + ۱ = ۵\alpha$$

$$\beta^۲ - ۵\beta + ۱ = ۰ \Rightarrow \beta^۲ + ۱ = ۵\beta$$

بنابراین عبارت مطلوب سؤال به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$A = \frac{\beta^۲+۱}{(\alpha^۲+۱)+\alpha} + \frac{\alpha^۲+۱}{(\beta^۲+۱)+\beta} = \frac{۵\beta}{۶\alpha} + \frac{۵\alpha}{۶\beta}$$

$$\Rightarrow A = \frac{۵}{۶}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

گام دوم: طبق درس‌باکس پاسخ ۵۸، داریم:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta} = \frac{S^۲ - ۲P}{P} = \frac{S^۲}{P} - ۲$$

در این سؤال $S = ۵$ و $P = ۱$ است:

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{۲۵}{۱} - ۲ = ۲۳$$

در نهایت خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$A = \frac{۵}{۶}(۲۳) = \frac{۱۱۵}{۶}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - x - ۱ = ۰$ باشند، حاصل $\beta^۸ + ۲۱\alpha$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۴ ۳) ۳۸ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته اگر $x^۲ = x + ۱$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$x^n = F_n x + F_{n-۱}$$

که در آن F_n جملهٔ nاُم دنبالهٔ فیبوناچی است:

$$F_n : ۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,۸۹,\cdots$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** $x = \beta$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\beta^۲ - \beta - ۱ = ۰ \Rightarrow \beta^۲ = \beta + ۱$$

$$\xrightarrow{\times\beta} \beta^۳ = \beta^۲ + \beta = (\beta + ۱) + \beta = ۲\beta + ۱$$

$$\xrightarrow{\times\beta} \beta^۴ = ۲\beta^۲ + \beta = ۲(\beta + ۱) + \beta = ۳\beta + ۲$$

$$\xrightarrow{\text{توان }۲} \beta^۸ = ۹\beta^۲ + ۱۲\beta + ۴ = ۹(\beta + ۱) + ۱۲\beta + ۴ = ۲۱\beta + ۱۳$$

چیزی که در نکتهٔ بالا گفته‌ایم، نتیجهٔ تکرار این فرآیند و الگویابی ضرایب β است:

$$\beta^۸ = F_۸\beta + F_۷ \xrightarrow{F_۷=۱۳,\ F_۸=۲۱} \beta^۸ = ۲۱\beta + ۱۳$$

گام دوم: در معادلهٔ داده‌شده، $\alpha + \beta = ۱$ است؛ بنابراین خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\beta^۸ + ۲۱\alpha = ۲۱\beta + ۱۳ + ۲۱\alpha = ۲۱(\alpha + \beta) + ۱۳ = ۲۱ + ۱۳ = ۳۴$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ جواب‌های کدام معادله $4-\sqrt{3}$ و $4+\sqrt{3}$ هستند؟

۱) $x^2-8x+1=0$
۲) $x^2+8x+1=0$
۳) $x^2-8x+13=0$
۴) $x^2+8x+13=0$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اگر جواب‌های یک معادلهٔ درجه‌دوم را بدانیم، معادله به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$x^2-Sx+P=0$$

که در آن S مجموع جواب‌ها و P حاصل‌ضرب آن‌هاست.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جواب‌های معادله $\alpha=4-\sqrt{3}$ و $\beta=4+\sqrt{3}$ هستند و در ابتدا باید $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را به دست آوریم:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=8 \\ P=\alpha\beta=(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=16-3=13 \end{cases}$$

گام دوم: مطابق درس‌باکس، معادلهٔ مورد نظر $x^2-8x+13=0$ است.

امتحان نهایی

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. *(سؤال ۲ (قسمت الف) ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲)*

الف) معادلهٔ درجه‌دوم ..... دارای ریشه‌های $3\pm2\sqrt{5}$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ اگر مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x^۴ + ۲ = ۶x^۲$ را به ترتیب S و P بنامیم، حاصل عبارت $(S - ۲P)^۳$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۸

۳) -۲۷ ۴) -۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

معادلهٔ $ax^۴ + bx^۲ + c = ۰$ را با شرط $a \neq ۰$، معادلهٔ درجه‌چهارم دومجذوری می‌نامند. این معادله با تغییر متغیر $t = x^۲ \geq ۰$ به یک معادلهٔ درجه‌دوم تبدیل می‌شود. با در نظر گرفتن پارامترهای a، b، c و $\Delta = b^۲ - ۴ac$، حالت‌های زیر را برای جواب‌های این معادله داریم:

ردیف	شرایط	وضعیت جواب‌های معادله
۱	$\Delta < ۰$	جواب حقیقی ندارد.
۲	$\Delta = ۰ , ab > ۰$	جواب حقیقی ندارد.
۳	$\Delta = ۰ , ab < ۰$	$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{۲a}}$ جواب‌های معادله هستند.
۴	$ab > ۰ , c = ۰$	$x = ۰$ تنها جواب معادله است.
۵	$ab < ۰ , c = ۰$	$x = ۰$ و $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$، سه جواب معادله هستند.
۶	$\Delta > ۰, ac > ۰ , ab > ۰$	معادله جواب حقیقی ندارد.
۷	$\Delta > ۰ , ac > ۰ , ab < ۰$	معادله چهار جواب دارد که دوبه‌دو قرینهٔ یکدیگرند.
۸	$ac < ۰$	معادله دو جواب دارد که قرینهٔ یکدیگرند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ زیر را داریم:

$$x^۴ - ۶x^۲ + ۲ = ۰$$

که با تغییر متغیر $x^۲ = t$ به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$t^۲ - ۶t + ۲ = ۰$$

معادله را برحسب t حل می‌کنیم:

$$t = \frac{۶ \pm \sqrt{۲۸}}{۲} = \frac{۶ \pm ۲\sqrt{۷}}{۲} = ۳ \pm \sqrt{۷}$$

حالا می‌توانیم مقادیر x را پیدا کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{۱,۲} = \pm\sqrt{۳ - \sqrt{۷}} \\ x_{۳,۴} = \pm\sqrt{۳ + \sqrt{۷}} \end{cases}$$

گام دوم: مجموع جواب‌ها برابر صفر است؛ زیرا جواب‌ها دوبه‌دو قرینهٔ یکدیگرند، برای P نیز داریم:

$$P = (-(۳ - \sqrt{۷}))(-(۳ + \sqrt{۷})) = ۲$$

در این صورت حاصل عبارت $(S - ۲P)^۳$ برابر است با:

$$(۰ - ۴)^۳ = -۶۴$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴ به ازای چند مقدار a عضو مجموعهٔ $\{۵ , ۴ , ۳ , ۲\}$، معادلهٔ $x^۴ - (a+۶)x^۲ + a = -۸$ چهار جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\underbrace{۱}_{A}x^۴ - \underbrace{(a+۶)}_{B}x^۲ + \underbrace{a+۸}_{C} = ۰$$

از آن‌جا که در این معادله $A = ۱$ است، با توجه به جدول درس‌باکس پاسخ قبل، زمانی این معادله چهار جواب خواهد داشت که هر سه پارامتر B، C و Δ مثبت باشند.

گام دوم: شرط‌های بالا را اعمال می‌کنیم:

$$\begin{cases} B = (a+۶) > ۰ \Rightarrow a > -۶ \\ C = a+۸ > ۰ \Rightarrow a > -۸ \\ \Delta = (a+۶)^۲ - ۴(a+۸) = a^۲ + ۸a + ۴ = (a+۴)^۲ - ۱۲ > ۰ \Rightarrow a < -۴ - ۲\sqrt{۳} \text{ یا } a > -۴ + ۲\sqrt{۳} \end{cases}$$

گام سوم: با اشتراک‌گرفتن از محدوده‌های به‌دست‌آمده، مجموعهٔ قابل قبول برای مقادیر a برابر است با:

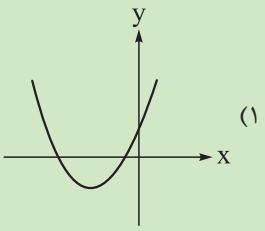
$$(۲\sqrt{۳} - ۴ , +\infty)$$

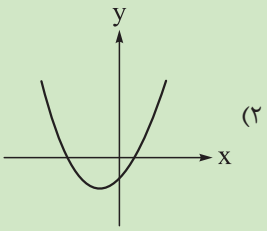
که شامل تمام اعضای مجموعهٔ $\{۵ , ۴ , ۳ , ۲\}$ است.

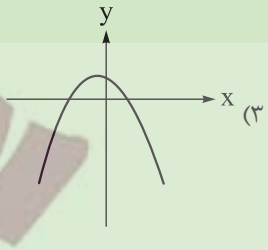
یه‌جور دیگه می‌توانیم بدون حل نامعادلهٔ $\Delta > ۰$، اعضای مجموعهٔ $\{۵ , ۴ , ۳ , ۲\}$ را در شرط $\Delta > ۰$ امتحان کنیم.

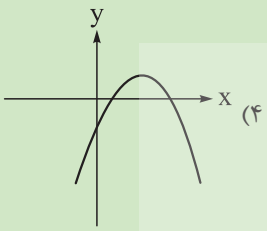
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵ سهمی به معادله‌های $y = ax^2 + bx + c$ در شکل‌های زیر رسم شده‌اند. در کدام سهمی حاصل عبارت **abc** عددی منفی است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۲

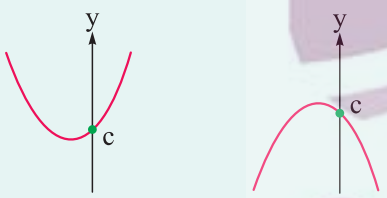
درس Box

در سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ داریم:

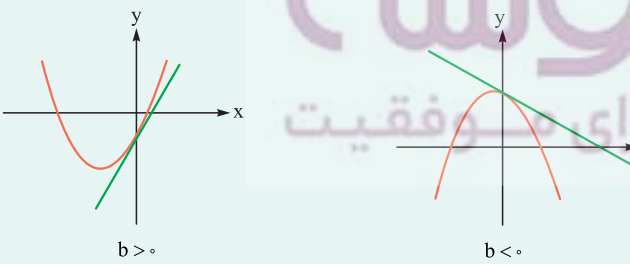
- علامت a جهت دهانهٔ سهمی را مشخص می‌کند؛ به این ترتیب که اگر $a > 0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین است:



- c عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور y است:

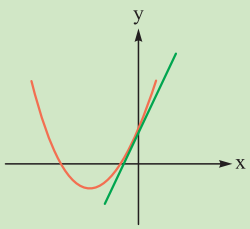


- b برابر شیب خط مماس بر سهمی در $x = 0$ است:



پاسخ خیلی تشریحی ✔ علامت‌های a، b و c را در هر سهمی جداگانه بررسی می‌کنیم:

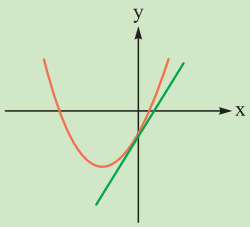
گزینهٔ (۱):



$a > 0, b > 0, c > 0 \Rightarrow abc > 0$ ✗

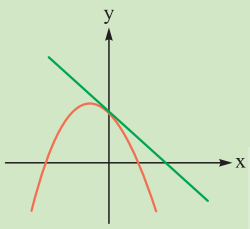
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گزینهٔ (۲):



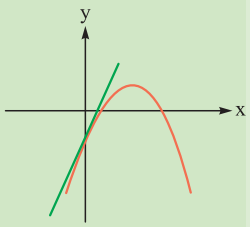
$a>0, b>0, c<0 \Rightarrow abc<0$ ✓

گزینهٔ (۳):



$a<0, b<0, c>0 \Rightarrow abc>0$ ×

گزینهٔ (۴):

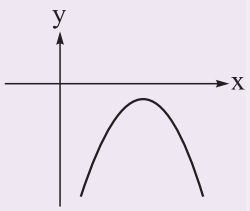


$a<0, b>0, c<0 \Rightarrow abc>0$ ×

امتحان نهایی

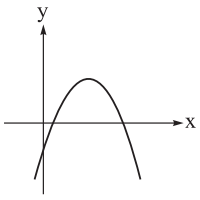
شکل زیر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد. علامت ضرایب b و c را تعیین کنید.

(سؤال ۴ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶ سهمی به معادلهٔ $y=(۲m-۳)x^۲+۲mnx+\frac{n-۳}{n-m}$ در شکل زیر رسم شده است. اگر m و n اعداد طبیعی باشند، عرض رأس این سهمی کدام است؟



۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: دهانهٔ این سهمی رو به پایین است، پس ضریب $x^۲$ باید منفی باشد:

$$۲m-۳<۰ \Rightarrow m<\frac{۳}{۲} \xrightarrow{m\in\mathbb{N}} m=۱$$

پس تا این‌جا معادلهٔ سهمی $y=-x^۲+۲nx+\frac{n-۳}{n-۱}$ است.

گام دوم: هم‌چنین عرض از مبدأ سهمی منفی است:

$$\frac{n-۳}{n-۱}<۰ \Rightarrow ۱<n<۳ \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=۲$$

در نتیجه $y=-x^۲+۴x-۱$ معادلهٔ سهمی است که در آن $\Delta>۰$ است.

گام سوم: عرض رأس این سهمی برابر است با:

$$y_S=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۱۶-۴}{-۴}=۳$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷ سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ از نقاط $(۲,۲)$، $(۰,۲)$ و $(-۱,۳)$ می‌گذرد. این سهمی از کدام نقطهٔ دیگر می‌گذرد؟

۱) $(۱,\frac{۳}{۴})$
۲) $(۱,\frac{۵}{۳})$
۳) $(۳,\frac{۷}{۳})$
۴) $(۳,\frac{۸}{۳})$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

به عرض نقاط دقت کنین.

درس Box

- معادله‌ای به فرم $y = a(x - x_S)^۲ + y_S$ که در آن $a \neq ۰$ است، معادلهٔ یک سهمی است. در این سهمی، نقطهٔ $S(x_S, y_S)$ رأس سهمی است.
- اگر نقاط $(x_۱, y_۰)$ و $(x_۲, y_۰)$ (دو نقطه با عرض یکسان) روی یک سهمی قرار بگیرند، طول رأس سهمی برابر میانگین طول این دو نقطه است:

$$x_S = \frac{x_۱ + x_۲}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با دقت در عرض نقاط داده‌شده، می‌بینیم که عرض دو نقطهٔ $(۰,۲)$ و $(۲,۲)$ روی این سهمی یکسان است؛ بنابراین طبق درس‌باکس داریم:

$$x_S = \frac{۰ + ۲}{۲} = ۱$$

و در نتیجه معادلهٔ سهمی $y = a(x - ۱)^۲ + y_S$ است.

گام دوم: حالا یکی از نقاط $(۰,۲)$ و $(۲,۲)$ را به همراه $(-۱,۳)$ انتخاب می‌کنیم و مختصات این دو نقطه را در معادلهٔ بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}(۰,۲): ۲ = a + y_S \\ (-۱,۳): ۳ = ۴a + y_S\end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{۱}{۳}, y_S = \frac{۵}{۳}$$

گام سوم: بنابراین معادلهٔ سهمی $y = \frac{(x - ۱)^۲ + ۵}{۳}$ است و براساس گزینه‌ها این سهمی از نقطهٔ $(۱,\frac{۵}{۳})$ می‌گذرد.

کنکور

فرض کنید نقاط $(-۲,۵)$، $(۰,۵)$ و $(۱,۱۱)$، بر سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ واقع باشند. **این سهمی، از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟** *(سؤال ۱۳۱ کنکور تجربی ۱۳۹۹)*

۱) $(-۱,۳)$
۲) $(-۱,۴)$
۳) $(۲,۹)$
۴) $(۲,۱۵)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ عرض پایین‌ترین نقطهٔ سهمی $y = mx^۲ + ۲x + m + ۱$ برابر ۱ است. معادلهٔ محور تقارن این سهمی کدام است؟

ضریب $x^۲$ مثبت است.

۱) $x = ۰$
۲) $x = ۱$
۳) $x = -۱$
۴) $x = ۲$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: y_S را برحسب m به دست می‌آوریم:

$$y_S = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{۴ - ۴m(m+۱)}{۴m} = \frac{m^۲ + m - ۱}{m}$$

گام دوم: حالا براساس فرض، y_S را مساوی ۱ قرار می‌دهیم:

$$\frac{m^۲ + m - ۱}{m} = ۱ \Rightarrow m^۲ + m - ۱ = m \Rightarrow m^۲ = ۱ \Rightarrow m = \pm ۱$$

گام سوم: اما طبق فرض، سهمی پایین‌ترین نقطه دارد، یعنی دهانهٔ آن باید رو به بالا باشد، در نتیجه مقدار مثبت m قابل قبول است:

$$\xrightarrow{m=۱} y = x^۲ + ۲x + ۲$$

معادلهٔ محور تقارن این سهمی $x = x_S = -۱$ است.

کنکور

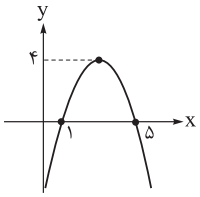
کم‌ترین مقدار تابع $y = mx^۲ - ۱۲x + ۵m - ۱$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟

(سؤال ۱۰۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $x = ۲$
۲) $x = ۲/۵$
۳) $x = ۳$
۴) $x = ۳/۵$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۹ اگر نمودار تابع درجه‌دوم $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، مقدار $f(-2)$ کدام است؟



۱) -29

۲) -28

۳) -21

۴) -20

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint نقطهٔ رأس سهمی رو داری.

نکته اگر یک سهمی محور x را در نقاطی به طول x_1 و x_2 قطع کند، طول رأس این سهمی $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق نکتهٔ بالا، طول رأس سهمی $x_S = \frac{1+5}{2} = 3$ و هم‌چنین طبق نمودار، عرض آن ۴ است.

پس می‌توانیم ضابطهٔ تابع f را $f(x) = a(x-3)^2 + 4$ در نظر بگیریم.

گام دوم: حالا به کمک یکی از نقاط $(1,0)$ یا $(5,0)$، مقدار a را به دست می‌آوریم:

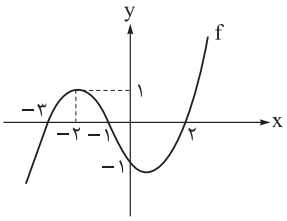
$$0 = a(\pm 2)^2 + 4 \Rightarrow 4a = -4 \Rightarrow a = -1$$

گام سوم: پس ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x) = 4 - (x-3)^2$ است و در نتیجه داریم:

$$f(-2) = 4 - 5^2 = -21$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۰ **نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. کدام گزینه دربارهٔ جواب‌های معادلهٔ $f(x) = -2x + 3$ درست است؟**



۱) یک جواب مثبت دارد.

۲) یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

۳) یک جواب منفی دارد.

۴) دو جواب منفی دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint خط $y = -2x + 3$ رو هم رسم کن.

درس Box

روش هندسی حل معادلات

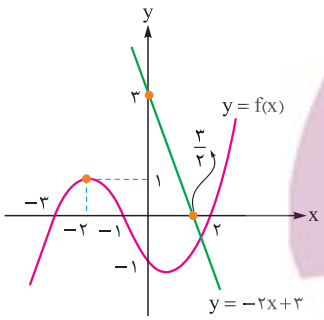
اگر در یک معادله، صرفاً تعداد و یا علامت جواب‌ها مورد نظر باشد، می‌توانیم از روش رسم کمک بگیریم؛ به این ترتیب که دو تابع f و g را چنان فرض می‌کنیم که:

۱) نمودارهای این دو تابع قابل رسم باشند.

۲) تساوی $f(x) = g(x)$ همان معادلهٔ اصلی را نتیجه بدهد.

در این صورت تعداد نقاط مشترک نمودارهای دو تابع f و g، برابر تعداد جواب‌های معادلهٔ اصلی است.

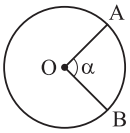
پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس بالا، جواب‌های معادلهٔ $f(x) = -2x + 3$ طول نقاط مشترک نمودار تابع f و خط $y = -2x + 3$ است، پس کافی است در کنار نمودار تابع f، خط $y = -2x + 3$ را نیز رسم کنیم:



مطابق شکل بالا، معادلهٔ $f(x) = -2x + 3$ یک جواب مثبت دارد، زیرا طول نقطهٔ برخورد دو نمودار مثبت است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱ در شکل زیر طول کمان AB برابر شعاع دایره است. اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه کدام است؟



۱) $\frac{۳۶۰}{\pi}$
۲) $\frac{۱۸۰}{\pi}$
۳) $\frac{\pi}{۱۸۰}$
۴) $\frac{\pi}{۳۶۰}$

مشاوره برای تسلط به مباحث فصل دایره در کتاب هندسهٔ (۲)، مطالعهٔ دقیق مفاهیم اولیهٔ دایره مانند کمان، اندازهٔ کمان، طول کمان و ... ضروری است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اندازهٔ کمان: همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمان بوده و واحد آن درجه است.

طول کمان: طول کمان برحسب واحد طول (متر، سانتی‌متر و ...) بیان می‌شود و مقدار آن بستگی به شعاع دایره و اندازهٔ کمان دارد.

طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی α در دایره‌ای به شعاع R، برابر $L=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ}$ است.

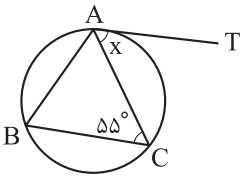
پاسخ خیلی تشریحی

مطابق فرض، طول کمان AB برابر شعاع دایره است، پس کافی است در رابطهٔ طول کمان به جای L، مقدار R را جای‌گذاری کرده و اندازهٔ زاویهٔ α را پیدا کنیم:

$$L=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ} \xrightarrow{L=R} R=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow ۱=\frac{\pi\alpha}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow \alpha=\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲ در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الساقین (AB = BC) و AT در نقطهٔ A بر دایره مماس است. اندازهٔ x چند درجه است؟



۱) ۵۵

۲) ۶۰

۳) ۶۵

۴) ۷۰

مشاوره بسیاری از سؤالات مربوط به محاسبهٔ زاویه در دایره، ترکیبی از چند مدل زاویه را شامل می‌شود و لازم است که تمامی این حالت‌ها را به طور جداگانه به خوبی به خاطر داشته باشیم.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint دقت کنید که اندازهٔ کمان‌های AB و BC برابر یکدیگر است.

درس Box

۱) کمان‌های نظیر دو وتر مساوی در دایره برابر یکدیگرند و برعکس.

۲) اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی، نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه است.

۳) اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی، نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: زاویهٔ C یک زاویهٔ محاطی است، پس اندازهٔ آن نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن است.

$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow ۵۵^\circ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۱۱۰^\circ$$

گام دوم: طبق فرض، اضلاع AB و BC در مثلث ABC برابر یکدیگرند، یعنی دو وتر AB و BC برابرند. از طرفی کمان‌های نظیر دو وتر مساوی هم‌اندازه‌اند، پس $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB} = ۱۱۰^\circ$. می‌دانیم مجموع کمان‌های دایره برابر ۳۶۰° است، بنابراین داریم:

$$\overset{\frown}{AC} = ۳۶۰^\circ - ۲\times ۱۱۰^\circ = ۱۴۰^\circ$$

گام سوم: AT در نقطهٔ A بر دایره مماس است، پس زاویهٔ TAC یک زاویهٔ ظلی بوده و اندازهٔ آن نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه است، پس می‌توان نوشت:

$$T\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

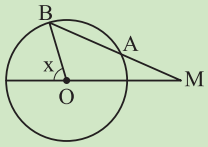
۲۳ در شکل زیر O مرکز دایره و $x = ۷۸^\circ$ است. اگر طول پاره‌خط MA برابر اندازهٔ شعاع دایره باشد، اندازهٔ کمان AB چند درجه است؟

۱) ۷۲

۲) ۷۴

۳) ۷۶

۴) ۷۸



مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی هندسهٔ (۲) طراحی شده است و در آن مفاهیمی مانند زاویهٔ مرکزی و زاویهٔ بین امتداد دو وتر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

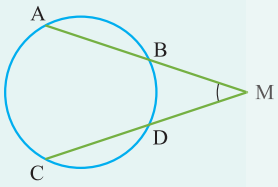
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint از مرکز دایره به نقطهٔ A وصل کرده و از متساوی‌الساقین‌بودن مثلث OAM استفاده کنید.

درس Box

زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره و اضلاع آن دو شعاع از دایره هستند.

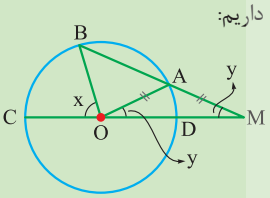
زاویهٔ بین امتداد دو وتر: مطابق شکل اگر امتداد وترهای AB و CD در نقطهٔ M خارج از دایره متقاطع باشند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ M برابر است با:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از مرکز دایره به نقطهٔ A روی دایره وصل می‌کنیم. اگر $\hat{M} = y$، آن‌گاه مطابق فرض داریم:



$$MA = OA = R \Rightarrow \overset{\Delta}{OAM} \text{ متساوی‌الساقین است.} \Rightarrow A\hat{O}M = \hat{M} = y \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = y$$

گام دوم: با توجه به رابطهٔ زاویهٔ بین امتداد دو وتر، برای زاویهٔ M داریم:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow y = \frac{x - y}{۲} \Rightarrow x - y = ۲y \Rightarrow x = ۳y \xrightarrow{x=۷۸^\circ} y = ۲۶^\circ$$

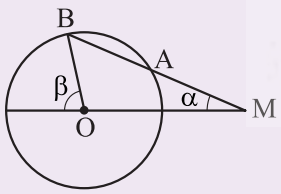
گام سوم: CD قطر دایره است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲۶^\circ + \overset{\frown}{AB} + ۷۸^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۷۶^\circ$$

کتاب درسی

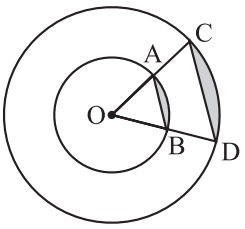
دایرهٔ $C(O, R)$ مفروض است. از نقطهٔ M خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و $MA = R$، نشان دهید: $B = ۳\alpha$

(هندسهٔ (۲) ـ تمرین ۶ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴ در شکل زیر دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های ۳ و ۶ مفروض‌اند و $A\hat{O}B = ۶۰^\circ$. مساحت ناحیهٔ سایه‌زده کدام است؟



۱) $\frac{۱۵}{۲}(\pi - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲})$

۲) $\frac{۱۵}{۲}(\pi - \frac{\sqrt{۳}}{۲})$

۳) $\frac{۵}{۲}(\pi - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲})$

۴) $\frac{۵}{۲}(\pi - \frac{\sqrt{۳}}{۲})$

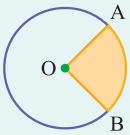
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

مساحت مثلثی که طول دو ضلع آن برابر a و b و اندازهٔ زاویهٔ بین آن دو ضلع برابر α باشد، از رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$ به دست می‌آید.

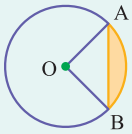
درس Box

قطاع دایره: اگر $\overset{\frown}{AB}$ کمانی از دایرهٔ $C(O,r)$ باشد، آن‌گاه ناحیهٔ سایه‌زده در شکل مقابل، یک قطاع از دایره نامیده می‌شود. در صورتی که $A\hat{O}B = \alpha$ باشد، مساحت قطاع AOB برابر است با:



$$S = \frac{\pi r^۲ \alpha}{۳۶۰^\circ}$$

قطعه در دایره: اگر از قطاع AOB، مثلث AOB را حذف کنیم، ناحیهٔ باقی‌مانده در شکل، یک قطعه از دایره نامیده می‌شود.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای محاسبهٔ مساحت قطعهٔ ایجادشده در دایرهٔ کوچک‌تر، مساحت مثلث AOB را از مساحت قطاع AOB کم می‌کنیم:

$$\text{مساحت قطاع AOB} = \frac{\pi \times ۳^۲ \times ۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{۳\pi}{۲}$$

$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{AOB} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\text{مساحت قطعهٔ کوچک‌تر} = \frac{۳\pi}{۲} - \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

گام دوم: به طریق مشابه با گام اول، مساحت قطعهٔ ایجادشده در دایرهٔ بزرگ‌تر را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مساحت قطاع COD} = \frac{\pi \times ۶^۲ \times ۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = ۶\pi$$

$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{COD} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۹\sqrt{۳}$$

$$\text{مساحت قطعهٔ بزرگ‌تر} = ۶\pi - ۹\sqrt{۳}$$

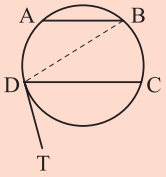
گام سوم: مساحت ناحیهٔ سایه‌زده در شکل برابر مجموع مساحت‌های دو قطعهٔ دایره‌ها است.

$$\text{مساحت ناحیهٔ سایه‌زده} = (\frac{۳\pi}{۲} - \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}) + (۶\pi - ۹\sqrt{۳}) = \frac{۱۵\pi}{۲} - \frac{۴۵\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۱۵}{۲}(\pi - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲})$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مشابه کنکور

۲۵ در شکل زیر $AB \parallel CD$ و اندازهٔ کمان‌های AB، BC و CD با همین ترتیب یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲ تشکیل داده‌اند. اگر DT در نقطهٔ D بر دایره مماس باشد، اندازهٔ زاویهٔ BDT چند درجه است؟



۱) ۱۰۰
۲) ۱۱۰
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۰

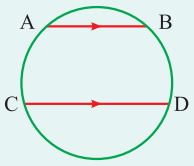
مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۱۲۵ کنکور ریاضی داخل ۹۸ و با توجه به مفهوم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint اندازهٔ کمان‌های AB، BC و CD را به ترتیب x، ۲x و ۴x در نظر بگیرید.

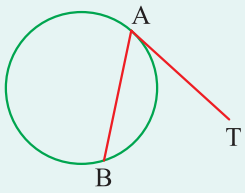
درس Box

۱) در هر دایره، اندازهٔ کمان‌های محصور به دو وتر موازی، برابر یکدیگرند.



$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

۲) زاویهٔ ظلی در دایره، زاویه‌ای است که یک ضلع آن وتری از دایره و ضلع دیگر آن خط مماس بر دایره است. اندازهٔ زاویهٔ ظلی، نصف اندازهٔ کمان مقابل آن است.



$$B\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق فرض اندازهٔ کمان‌های AB، BC و CD، یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲ تشکیل داده‌اند، بنابراین اگر $AB = x$ باشد، آن‌گاه $BC = ۲x$ و $CD = ۴x$ است.

از طرفی دو وتر AB و CD موازی یکدیگرند، بنابراین طبق مورد (۱) درس‌باکس داریم:

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = ۲x$$

گام دوم: مجموع کمان‌های دایره برابر ۳۶۰° است، پس داریم:

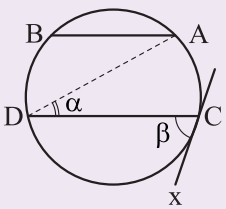
$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x + ۲x + ۴x + ۲x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۹x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

گام سوم: زاویهٔ BDT یک زاویهٔ ظلی است، بنابراین اندازهٔ آن نصف اندازهٔ کمان BCD است و در نتیجه داریم:

$$B\hat{D}T = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{۲} = \frac{۲x + ۴x}{۲} = ۳x = ۳ \times ۴۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

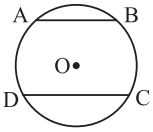
کنکور

در شکل زیر، وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$، زاویهٔ $\beta = ۲\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\overset{\frown}{BD}$ چند درجه است؟ (سؤال ۱۲۵ کنکور ریاضی ۱۳۹۸)



۱) ۵۰
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۷۵

۲۶ در شکل زیر، فاصلهٔ مرکز دایره از دو وتر موازی AB و CD به ترتیب برابر ۱۵ و ۷ است. اگر نسبت اندازهٔ وتر AB به اندازهٔ وتر CD برابر $\frac{۵}{۶}$ باشد، مساحت ذوزنقهٔ ABCD کدام است؟



۱) ۳۹۶

۲) ۴۸۴

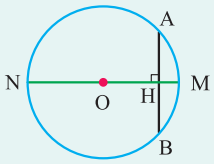
۳) ۷۹۲

۴) ۹۶۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

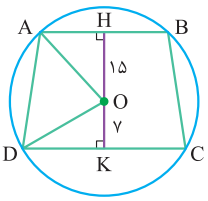
Hint از مرکز دایره عمودهایی بر دو وتر AB و CD رسم کنید.

درس Box در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند. به عبارت دیگر اگر در شکل زیر $OH \perp AB$، آن‌گاه $AH = BH$، $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$ و $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}$ است.



نتیجه اگر از مرکز دایره عمودی بر یک وتر رسم کنیم، آن خط عمود، وتر را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** از مرکز دایره (نقطهٔ O) دو عمود OH و OK را به ترتیب بر دو وتر AB و CD رسم می‌کنیم. می‌دانیم هر کدام از این دو خط عمود، وترهای AB و CD را نصف می‌کنند، یعنی $AH = BH$ و $CK = DK$ است.



گام دوم: طبق فرض نسبت اندازهٔ وتر AB به اندازهٔ وتر CD برابر $\frac{۵}{۶}$ است، بنابراین با فرض $AB = ۱۰x$، طول وتر CD برابر $۱۲x$ است و در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} AH = \frac{AB}{۲} = ۵x \\ DK = \frac{CD}{۲} = ۶x \end{cases}$$

گام سوم: قضیهٔ فیثاغورس را در دو مثلث OAH و ODK می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{OAH} : AH^۲ + OH^۲ = OA^۲ \\ \overset{\Delta}{ODK} : DK^۲ + OK^۲ = OD^۲ \end{cases} \xrightarrow{OA=OD} AH^۲ + OH^۲ = DK^۲ + OK^۲$$

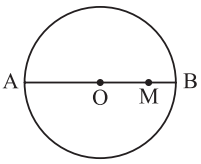
$$\Rightarrow ۲۵x^۲ + ۲۲۵ = ۳۶x^۲ + ۴۹ \Rightarrow ۱۱x^۲ = ۱۷۶ \Rightarrow x^۲ = ۱۶ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow \begin{cases} AB = ۱۰x = ۴۰ \\ CD = ۱۲x = ۴۸ \end{cases}$$

گام چهارم: مساحت ذوزنقهٔ ABCD برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} HK(AB + CD) = \frac{۱}{۲} \times ۲۲(۴۰ + ۴۸) = ۹۶۸$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۷ در شکل زیر **O** مرکز دایره و $\frac{AM}{BM}=۵$ است. چند وتر در این دایره می‌توان رسم کرد که از نقطهٔ **M** گذشته و اندازهٔ آن‌ها برابر اندازهٔ شعاع دایره باشد؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

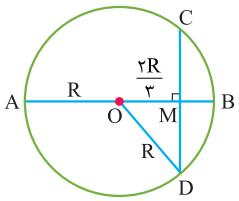
Hint طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ M درون این دایره را پیدا کنید.

درس Box ۱) بلندترین وتر گذرنده از هر نقطه در دایره، قطری از آن دایره است که از نقطهٔ مورد نظر عبور می‌کند.

۲) کوتاه‌ترین وتر گذرنده از هر نقطه در دایره، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق فرض $\frac{AM}{BM}=۵$، پس داریم:



$$\frac{AM}{BM}=\frac{۵}{۱} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AM}{AM+BM}=\frac{۵}{۵+۱} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{۵}{۶} \xrightarrow{AB=۲R} AM=\frac{۵}{۶}\times ۲R=\frac{۵R}{۳}$$

$$\Rightarrow OM=AM-OA=\frac{۵R}{۳}-R=\frac{۲R}{۳}$$

گام دوم: کوتاه‌ترین وتر گذرنده از هر نقطهٔ درون دایره، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است؛ بنابراین از نقطهٔ M خطی بر قطر AB عمود رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط C و D قطع کند. می‌دانیم $CM=DM$، پس داریم:

$$\overset{\Delta}{ODM}: DM^۲=OD^۲-OM^۲=R^۲-\frac{۴R^۲}{۹}=\frac{۵R^۲}{۹} \Rightarrow DM=\frac{\sqrt{۵}}{۳}R \Rightarrow CD=\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}R>\frac{۲\times ۱/۵\,R}{۳}=R$$

گام سوم: اندازهٔ شعاع دایره از اندازهٔ وتر CD (کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ M) کوچک‌تر است، پس وتری در این دایره وجود ندارد که از نقطهٔ M بگذرد و اندازهٔ آن برابر اندازهٔ شعاع دایره باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۸ دایرهٔ $C(O,14-3x)$ و خط d در صفحه مفروض‌اند، به گونه‌ای که فاصلهٔ نقطهٔ O از خط d برابر x^2-8x است. به ازای چند مقدار صحیح x، خط d و دایرهٔ C، دو نقطهٔ مشترک دارند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

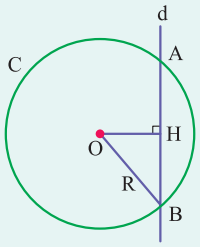
فاصلهٔ مرکز دایره از خط d باید کم‌تر از اندازهٔ شعاع دایره باشد.

درس Box

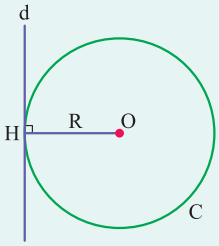
وضعیت نسبی خط و دایره:

خط و دایره براساس مقایسهٔ بین اندازهٔ شعاع و فاصلهٔ مرکز دایره از خط، یکی از سه حالت زیر را دارند:

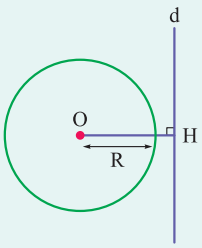
۱) اگر فاصلهٔ مرکز دایره از خط d، کوچک‌تر از شعاع دایره باشد $(OH < R)$، آن‌گاه خط و دایره متقاطع‌اند و دو نقطهٔ مشترک دارند.



۲) اگر فاصلهٔ مرکز دایره از خط d، برابر شعاع دایره باشد $(OH = R)$، آن‌گاه خط بر دایره مماس است و یک نقطهٔ مشترک دارند.



۳) اگر فاصلهٔ مرکز دایره از خط d، بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد $(OH > R)$، آن‌گاه خط بیرون دایره است و خط و دایره نقطهٔ مشترکی ندارند.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق فرض سؤال خط و دایره دو نقطهٔ اشتراک دارند، پس فاصلهٔ مرکز دایره از خط d، کوچک‌تر از شعاع دایره است و در نتیجه داریم:

$$x^2-8x<14-3x \Rightarrow x^2-5x-14<0 \Rightarrow (x-7)(x+2)<0 \Rightarrow -2<x<7$$

گام دوم: اندازهٔ شعاع دایره عددی مثبت و فاصلهٔ نقطهٔ O از خط d عددی نامنفی است، بنابراین داریم:

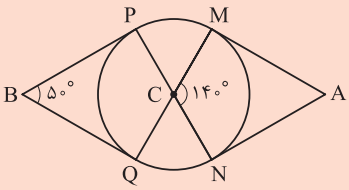
$$14-3x>0 \Rightarrow 3x<14 \Rightarrow x<\frac{14}{3}$$

$$x^2-8x\geq 0 \Rightarrow x(x-8)\geq 0 \Rightarrow x\geq 8 \text{ یا } x\leq 0$$

گام سوم: اشتراک مقادیر به‌دست‌آمده برای x در گام‌های اول و دوم به صورت $-2<x\leq 0$ است که شامل دو مقدار صحیح $x=0$ و $x=-1$ می‌باشد.

مشابه کنکور

۲۹ در شکل زیر پاره‌خط‌های AM، AN، BP و BQ بر دایره مماس‌اند. اگر $\overset{\frown}{MP} = \overset{\frown}{QN}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ AMQ چند درجه است؟



۱) ۹۰
۲) ۹۵
۳) ۱۰۰
۴) ۱۰۵

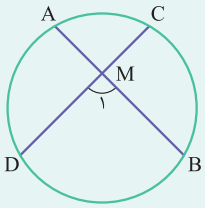
مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۱۴۸ کنکور ریاضی خارج ۱۴۰۰ طراحی شده است. این سؤال کنکور و چند نمونهٔ مشابه دیگر آن از تمرین ۳ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی هندسهٔ (۲) الهام گرفته شده‌اند که دو مبحث زاویهٔ بین دو مماس و زاویهٔ بین دو وتر در دایره را در بر می‌گیرد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا اندازهٔ کمان PQ و سپس به کمک آن اندازهٔ کمان MN را محاسبه کنید.

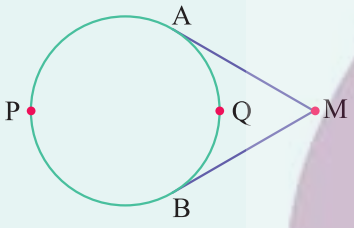
درس Box

۱) اگر دو وتر AB و CD در نقطهٔ M درون دایره متقاطع باشند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $\hat{M}_1$ برابر است با:



$$\hat{M}_1 = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

۲) فرض کنید از نقطهٔ M، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده باشد. مطابق شکل اندازهٔ زاویهٔ M برابر است با:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{APB} - \overset{\frown}{AQB}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مطابق شکل $M\hat{C}P = ۱۸۰^\circ - ۱۴۰^\circ = ۴۰^\circ$. حال طبق مورد (۱) درس‌باکس داریم:

$$M\hat{C}P = \frac{\overset{\frown}{MP} + \overset{\frown}{QN}}{۲} = ۴۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{MP} + \overset{\frown}{QN} = ۸۰^\circ \xrightarrow{MP=QN} \overset{\frown}{MP} = \overset{\frown}{QN} = ۴۰^\circ$$

گام دوم: فرض کنید x و $\overset{\frown}{PQ}$ و y و $\overset{\frown}{MN}$ باشد، در این صورت طبق مورد (۲) درس‌باکس داریم:

$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{PMQ} - \overset{\frown}{PQ}}{۲} \Rightarrow ۵۰^\circ = \frac{(y + ۸۰^\circ) - x}{۲} \Rightarrow y + ۸۰^\circ - x = ۱۰۰^\circ \Rightarrow y - x = ۲۰^\circ$$

از طرفی مجموع کمان‌های یک دایره برابر ۳۶۰° است، پس:

$$\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{MP} + \overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{QN} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x + ۴۰^\circ + y + ۴۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x + y = ۲۸۰^\circ$$

$$\begin{cases} x + y = ۲۸۰^\circ \\ y - x = ۲۰^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲y = ۳۰۰^\circ \Rightarrow y = ۱۵۰^\circ$$

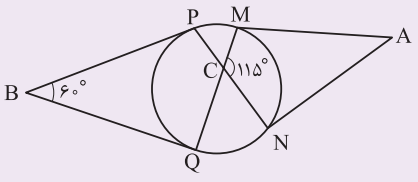
گام سوم: زاویهٔ AMQ زاویهٔ ظلی و روبه‌رو به کمان MNQ است، بنابراین داریم:

$$A\hat{M}Q = \frac{۱۵۰^\circ + ۴۰^\circ}{۲} = ۹۵^\circ$$

کنکور

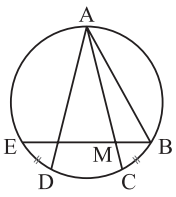
پاره‌خط‌های AM، AN، BP و BQ مطابق شکل زیر بر دایره مماس‌اند. زاویهٔ MAN به درجه، کدام است؟

(سؤال ۱۴۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۰ (خارج از کشور))



۱) ۶۰
۲) ۶۵
۳) ۷۰
۴) ۷۵

۳۰ در شکل زیر دو کمان BC و DE هم‌اندازه‌اند. اگر $AB = ۶$ ، $ME = ۸$ و $BD = ۱۰$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط AM کدام است؟

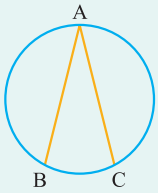


۱) ۴/۵
۲) ۴/۸
۳) ۵
۴) ۵/۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

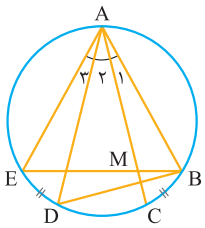
Hint از A به E وصل کنید و از تساوی دو زاویهٔ محاطی BAC و DAE استفاده کنید.

درس Box زاویهٔ محاطی در دایره، زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و اضلاع زاویه دو وتر از دایره هستند. اندازهٔ زاویهٔ محاطی نصف اندازهٔ کمان مقابل آن است.



$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** دو کمان BC و DE هم‌اندازه‌اند، بنابراین زوایای محاطی روبه‌رو به این دو کمان نیز برابر یکدیگرند. حال اگر از A به E وصل کنیم، آن‌گاه مطابق شکل داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \hat{A}_۳ = \frac{\overset{\frown}{DE}}{۲}\end{array}\right\} \xrightarrow{\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۳ \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \hat{A}_۲ + \hat{A}_۳ \Rightarrow B\hat{A}D = M\hat{A}E$$

گام دوم: دو مثلث ABD و AME را در نظر بگیرید. طبق حالت اول تشابه برای این دو مثلث داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{D} = \hat{E} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \text{ (زاویهٔ محاطی)} \\ B\hat{A}D = M\hat{A}E\end{array}\right\} \xrightarrow{(ز\,ز)} \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{AME} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BD}{ME} \Rightarrow \frac{۶}{AM} = \frac{۱۰}{۸} \Rightarrow AM = ۴/۸$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۱ کدام گزینه نادرست است؟

۱) ترکیب فصلی دو گزاره وقتی نادرست است که حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشد.

۲) در گزارهٔ $p \Rightarrow q \sim$ اگر p درست باشد، گزاره به انتفای مقدم درست است.

۳) ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

۴) ترکیب دوشرطی دو گزاره وقتی درست است که هر دو گزاره هم‌ارزش باشند.

مشاوره جدول ارزش $\vee$ و $\wedge$ و $\Rightarrow$ و $\Leftrightarrow$ را خوب بلد باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

جدول ارزش گزاره‌ها:

ترکیب	فارسی	جدول ارزش	نکات
نقیض $\sim p$	چنین نیست که p	p | $\sim p$ د | ن ن | د	۱) ارزش آن برعکس p است. ۲) $\sim(\sim p) \equiv p$
عطفی $p \wedge q$	p و q	p | q | $p \wedge q$ د | د | د د | ن | ن ن | د | ن ن | ن | ن	۱) فقط در حالتی که هر دو درست باشند، $p \wedge q$ درست می‌شود. ۲) اگر یکی هم نادرست باشد، $p \wedge q$ نادرست می‌شود. ۳) $p \wedge T \equiv p$ ۴) $p \wedge F \equiv F$ ۵) $p \wedge \sim p \equiv F$
فصلی $p \vee q$	p یا q	p | q | $p \vee q$ د | د | د د | ن | د ن | د | د ن | ن | ن	۱) اگر حداقل یکی درست باشد، $p \vee q$ درست می‌شود. ۲) فقط در حالتی که هر دو نادرست باشند، $p \vee q$ نادرست است. ۳) $p \vee T = T$ ۴) $p \vee F = p$ ۵) $\sim p \vee p \equiv T$ ۶) پخشی $\begin{cases} p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{cases}$ ۷) دمورگان $\begin{cases} \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$ ۸) جذب $\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$
شرطی $p \Rightarrow q$	اگر p آن‌گاه q	p | q | $p \Rightarrow q$ د | د | د د | ن | ن ن | د | د ن | ن | د	۱) p را فرض (مقدم) و q را حکم (تالی) می‌گوییم. ۲) فقط در حالتی که فرض درست و حکم نادرست باشد، نادرست است و در بقیهٔ حالات درست است. ۳) اگر فرض (p) نادرست باشد، $p \Rightarrow q$ (صرف‌نظر از ارزش q) درست است. در این حالت می‌گوییم گزاره به انتفای مقدم درست است. ۴) اگر حکم (q) درست باشد، $p \Rightarrow q$ (صرف‌نظر از ارزش p) درست است. ۵) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ ۶) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$ ۷) $p \Rightarrow q \equiv \underbrace{\sim q \Rightarrow \sim p}_{\text{(عکس نقیض)}}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ترکیب	فارسی	جدول ارزش	نکات
دوشرطی $p \Leftrightarrow q$	p اگر و فقط اگر q p شرط لازم و کافی برای q است. اگر p آن‌گاه q و برعکس	$p \Leftrightarrow q$ / q / p د / د / د ن / ن / د ن / د / ن د / ن / ن	۱) فقط در حالتی درست است که ارزش دو گزاره یکسان باشد. ۲) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

ترکیب فصلی (∨) دو گزاره وقتی درست است که حداقل یکی درست باشد، پس ترکیب فصلی وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

سایر گزینه‌ها درست هستند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۲ جدول ارزش گزارهٔ $p \vee (q \wedge s) \Rightarrow r \vee q \sim$، چند ردیف دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۳۱ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ جدول ارزش n گزاره، 2^n ردیف دارد، چون ۴ گزارهٔ p و q و r و s داریم، پس جدول ارزش $2^4 = 16$ ردیف دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۳ **ارزش کدام گزاره درست است؟**

۱) (π عددی گویا است.) $\wedge$ ($۳ \geq ۵$)

۲) (۴ فرد است.) $\vee$ (۱ عددی اول است.)

۳) $(\frac{۱}{۲} \neq \frac{۳}{۶}) \Rightarrow ۱ \in \{۲,۳,۴\}$

۴) $۲^{۰} = ۰ \Leftrightarrow ۵^{-۱} = \frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): ($\underbrace{\pi \text{ عددی گویا است}}_{\text{نادرست}}$) $\wedge$ ($\underbrace{۳ \geq ۵}_{\text{درست}}$) $\Leftarrow$ نادرست

گزینهٔ (۲): ($\underbrace{۴ \text{ فرد است}}_{\text{نادرست}}$) $\vee$ ($\underbrace{۱ \text{ عددی اول است}}_{\text{نادرست}}$) $\Leftarrow$ نادرست

گزینهٔ (۳): $\underbrace{(\frac{۱}{۲} \neq \frac{۳}{۶})}_{\text{نادرست}} \Rightarrow ۱ \in \{۲,۳,۴\}$ $\Leftarrow$ درست (به انتفای مقدم)

گزینهٔ (۴): $\underbrace{۲^{۰} = ۰}_{\text{نادرست}} \Leftrightarrow \underbrace{۵^{-۱} = \frac{۱}{۵}}_{\text{درست}}$ $\Leftarrow$ نادرست است.

کتاب درسی

ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید. *(آمار و احتمال ـ تمرین ۳ صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)*

الف) $(۲ < ۳) \wedge (۴ + ۳ = ۱۰)$

ب) $(۵ > ۳) \vee ((-۱)^{۲} + ۱ = ۰)$

پ) $(۱ \in \{۲,۳,۴\}) \vee (\frac{۱}{۲} \neq \frac{۳}{۲})$

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست.

ث) ۲ عدد اول نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.

ج) $۲ > ۳ \Leftrightarrow ۲ < -۳$

چ) اگر $a \in \{b\}$ آن‌گاه $a = b$ و برعکس.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۴ **p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه است. ارزش گزاره‌های $(q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$ و $\sim (p \wedge r) \Rightarrow q \vee r$ به ترتیب چگونه است؟**

۱) هم‌ارز r ـ هم‌ارز r

۲) هم‌ارز r ـ هم‌ارز $\sim r$

۳) هم‌ارز r ـ هم‌ارز $\sim r$

۴) هم‌ارز r ـ هم‌ارز $\sim r$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint برای r دو حالت در نظر گرفته و جدول ارزش را تشکیل دهید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** برای گزارهٔ اول دو حالت برای r در نظر می‌گیریم:

p	q	r	$(q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$(q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$
د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن

یکسان

پس ارزش گزارهٔ اول مثل r است.

گام دوم: برای گزارهٔ دوم هم داریم:

p	q	r	$p \wedge r$	$\sim (p \wedge r)$	$q \vee r$	$\sim (p \wedge q) \Rightarrow q \vee r$
د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د	ن	ن

یکسان

پس ارزش گزارهٔ دوم نیز مانند r است.

کنکور **اگر p گزارهٔ درست، q گزارهٔ نادرست و r گزارهٔ دلخواه باشد. گزارهٔ $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟**

(سؤال ۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

۱) r ۲) T

۳) $\sim r$ ۴) $\sim T$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۵ اگر ارزش گزارهٔ $((p \wedge (\sim p \vee q)) \vee (\sim p \vee (q \wedge \sim p))$ نادرست باشد. ارزش کدام گزینه، قطعاً درست است؟

۱) q

۲) $\sim p$

۳) $s \Rightarrow p$

۴) $\sim q \Rightarrow s$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint $p \vee q$ وقتی نادرست است که p و q هر دو نادرست باشند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ترکیب فصلی $(\vee)$ دو گزاره، نادرست است، پس هر دو گزارهٔ $\sim p \vee (q \wedge \sim p)$ و $p \wedge (\sim p \vee q)$ نادرست هستند.

گام دوم: طبق قانون جذب داریم:

$$\sim p \vee (q \wedge \sim p) \equiv \sim p$$

حالا $\sim p$ نادرست است، پس p باید درست باشد. در این مرحله هم مشخصه که $s \Rightarrow p$ درست است.

گام سوم: p درست و $p \wedge (\sim p \vee q)$ نادرست است، پس $\sim p \vee q$ نادرست بوده، پس q نیز باید نادرست باشد.

گام چهارم: p درست و q نادرست است، پس صرف‌نظر از ارزش s، گزارهٔ $s \Rightarrow p$ درست است.

گول نخوری

طبق قانون جذب داریم:

$$\overbrace{p \wedge (p \vee q)}^{\text{فرق دارند.}} \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

دقت کنید که علامت‌ها باید فرق داشته باشند و این‌که p داخل پرانتز تکرار شده باشد که در این صورت پرانتز جذب p می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۶ در گزاره‌نمای «در پرتاب دو تاس، احتمال رخ‌دادن پیشامد A برابر $\frac{۱}{۳}$ است.» دامنهٔ متغیر و مجموعهٔ جواب آن به ترتیب چند عضو دارد؟

۱) $۱۲-۲^{۶}$

۲) $\binom{۶}{۲}-۲^{۶}$

۳) $\binom{۳۶}{۱۲}-۲^{۳۶}$

۴) $\binom{۱۲}{۴}-۲^{۳۶}$

مشاوره مبحث شمارش که در سال دهم یاد گرفتید خیلی مهم است و یک‌جورهایی پایهٔ احتمال محسوب می‌شود. تا قبل از شروع فصل احتمال، حتماً آن را مرور کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

تعداد راه‌های انتخاب r شیء از n شیء متمایز برابر $\binom{n}{r}$ است.

درس Box

هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها، یک‌متغیره، دومتغیره و ... می‌نامیم.

در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا این‌که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، **دامنهٔ متغیر** گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، **مجموعهٔ جواب** گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند. همواره داریم: $S \subseteq D$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فضای نمونهٔ پرتاب دو تاس ۳۶ = ۶×۶ عضو دارد.

گام دوم: به جای متغیر (همان A) می‌توانیم هر کدام از پیشامد (زیرمجموعه)های فضای نمونه را قرار دهیم، پس به جای A، $۲^{۳۶}$ مجموعه می‌توانیم قرار دهیم، پس دامنهٔ متغیر $۲^{۳۶}$ عضو دارد.

گام سوم: مجموعهٔ جواب عضوهایی از دامنهٔ متغیر است که با قراردادن آن گزارهٔ $P(A)=\frac{۱}{۳}$ درست باشد. از طرفی $\frac{۱}{۳}=\frac{۱۲}{۳۶}$ است، پس اگر مجموعهٔ A دارای ۱۲ عضو باشد، احتمال رخ‌دادن آن برابر $\frac{۱۲}{۳۶}$ شده و گزارهٔ $P(A)=\frac{۱}{۳}$ درست می‌شود.

گام چهارم: تعداد داده‌های انتخاب ۱۲ عضو از ۳۶ عضو فضای نمونه، برابر $\binom{۳۶}{۱۲}$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۷ در جدول مقابل، کدام گزاره را می‌توانیم به جای x قرار دهیم؟

p	q	x
د	د	د
د	ن	د
ن	د	ن
د	ن	ن

۱) $(\sim p \wedge q) \vee (q \Rightarrow p)$

۲) $(\sim q \vee p) \wedge (\sim p \wedge q)$

۳) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (\sim q \vee p)$

۴) $(\sim p \wedge q) \vee (q \Rightarrow \sim p)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint در هر ردیف ارزش گزینه‌ها را بررسی کرده و رد گزینه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر p و q هر دو درست باشند، طبق جدول، گزارهٔ x درست است، اما در گزینهٔ (۲) گزارهٔ $\sim p \wedge q$ نادرست و ترکیب عطفی آن با $\sim q \vee p$ نیز نادرست است، پس گزینهٔ (۲) نمی‌تواند در x قرار گیرد. در همین حالت گزینهٔ (۴) نیز نادرست است چون $\sim p \wedge q$ و $q \Rightarrow \sim p$ هر دو نادرست بوده و ترکیب فصلی آن‌ها نیز نادرست می‌شود.

گام دوم: با توجه به ردیف دوم جدول در حالتی که p درست و q نادرست باشد، گزارهٔ x باید درست باشد، اما داریم:

p	q	$\sim p \wedge q$	$q \Rightarrow p$	$(\sim p \wedge q) \vee (q \Rightarrow p)$
د	ن	ن	د	د

p	q	$\sim p \wedge q$	$\sim q \vee p$	$(\sim p \wedge q) \Rightarrow (\sim q \vee p)$
د	ن	ن	د	د

پس با چک‌کردن ردیف دوم جدول، نتیجهٔ خاصی به دست نمی‌آید چون هر دو گزینهٔ (۱) و (۳) درست درمی‌آیند.

گام سوم: با توجه به ردیف سوم، جدول اگر p نادرست و q درست باشد، گزارهٔ x باید نادرست باشد اما در این حالت $\sim p \wedge q$ درست بوده و در نتیجه گزینهٔ (۱) نمی‌تواند در x قرار گیرد، پس در نهایت گزینهٔ (۳) می‌تواند در x قرار گیرد.

یه جور دیگه جدول ارزش گزینهٔ (۳) را تشکیل می‌دهیم:

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \vee p$	$(\sim p \wedge q) \Rightarrow (\sim q \vee p)$
د	د	ن	ن	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	د	د

امتحان نهایی با واردکردن جدول زیر در پاسخ‌برگ و سپس تکمیل آن، نشان دهید که: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$.

(سؤال ۳ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)

p	q			
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مشابه کنکور

مشاوره از منطق ریاضی حتماً یک سؤال در کنکور می‌آید که یک چیزی شبیه این سؤال است.

۳۸ گزارهٔ $p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$، هم‌ارز کدام گزاره است؟

در همهٔ ردیف‌های جدول، هم‌ارزش

۱) $\sim p \wedge r \wedge q$

۲) $\sim p \vee r \vee q$

۳) $p \vee \sim r \vee q$

۴) $(\sim p \vee q) \wedge r$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint p را نادرست در نظر بگیرید.

درس Box

جبر گزاره‌ها:

گزاره	اسم قانون
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	قوانین شرکت‌پذیری
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	قوانین پخشی (عکس آن فاکتورگیری)
$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	قوانین دمورگان
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	قوانین جذب
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$	ترکیب شرطی
$p \vee \sim p \equiv T, p \vee T \equiv T, p \vee F \equiv p$ $p \wedge \sim p \equiv F, p \wedge T \equiv p, p \wedge F \equiv F$	مقدماتی
$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$	ترکیب شرطی دوگانه

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر p نادرست باشد، گزارهٔ داده‌شده به انتفای مقدم درست است. دقت کنید که در این حالت ارزش q و r مهم نیست، پس اگر p نادرست و r و q هر چه باشند، گزارهٔ داده‌شده درست است.

گام دوم: اگر p را نادرست و r را نیز نادرست بگیریم:

$\sim p \wedge r \wedge q$ نادرست می‌شود، پس گزینهٔ (۱) هم‌ارز گزارهٔ داده شده نیست.

گام سوم: اگر p را نادرست، r را درست و q را نیز نادرست بگیریم، گزارهٔ $p \vee \sim r \vee q$ نادرست می‌شود، پس گزینهٔ (۳) نیز نمی‌تواند هم‌ارز گزارهٔ داده‌شده باشد.

گام چهارم: اگر p را نادرست و r را نیز نادرست بگیریم، گزینهٔ (۴) نیز نادرست می‌شود، پس گزینهٔ (۴) نیز نمی‌تواند هم‌ارز باشد.

یه‌جور دیگه

با استفاده از هم‌ارزی ترکیب شرطی دوگانه داریم:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

$$p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r) \equiv \underbrace{(p \wedge \sim q) \Rightarrow r}_{\text{هم‌ارزی ترکیب شرطی}} \equiv \underbrace{\sim (p \wedge \sim q) \vee r}_{\text{۱}} \equiv \sim p \vee q \vee r$$

کنکور

گزارهٔ $p \Leftrightarrow q \sim$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (سؤال ۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$

۲) $\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$

۳) $(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

۴) $\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

کنکور

گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (سؤال ۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) $p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

۲) $r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

۳) $\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

۴) $\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۹ گزارهٔ $p \Rightarrow \sim q \vee r$ نادرست است. کدام گزاره درست است؟

۱) $r \Leftrightarrow q$

۲) $p \vee q \Rightarrow r$

۳) $\sim (p \wedge q)$

۴) $p \wedge q \Leftrightarrow \sim r$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ترکیب شرطی فقط در حالتی که فرض درست و حکم نادرست باشد، نادرست می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: گزارهٔ شرطی ○ ⇒ □ فقط در حالتی نادرست است که □ (فرض) درست و ○ (حکم) نادرست باشد، پس p درست و $\sim q \vee r$ نادرست است.

گام دوم: ترکیب فصلی $\sim q \vee r$ نادرست است، پس $\sim q$ و r هر دو نادرست هستند، پس q درست و r نادرست است.

گام سوم: ارزش گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

p	q	r	$r \Leftrightarrow q$	$p \vee q \Rightarrow r$	$\sim (p \wedge q)$	$p \wedge q \Leftrightarrow \sim r$
د	د	ن	ن	ن	ن	د

فقط گزینهٔ (۴) درست است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

به‌سبک امتحان نهایی

۴۰ نقیض گزارهٔ «اگر x عددی بین صفر و یک باشد، مربع آن از خودش کوچک‌تر است.»، به کدام صورت است؟

۱) $x \notin (0,1) \Rightarrow x^2 \geq x$

۲) $x \in (0,1) \Rightarrow x^2 \geq x$

۳) $[(x \leq 0) \vee (x \geq 1)] \wedge (x^2 < x)$

۴) $(0 < x < 1) \wedge (x^2 \geq x)$

مشاوره جدول ارزش ترکیب شرطی، هم‌ارزی‌های آن و نقیض آن خیلی خیلی مهم است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $p \wedge \sim q$ می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: گزاره را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$$

گام دوم: نقیض گزارهٔ شرطی به صورت زیر است:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

گام سوم: برای نقیض‌کردن عبارت شرطی، کافی است فرض را نگه داشته و حکم را نقیض کنیم، پس نقیض آن می‌شود:

$$(0 < x < 1) \wedge \sim (x^2 < x) \equiv (0 < x < 1) \wedge (x^2 \geq x)$$

کتاب درسی

نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید. (آمار و احتمال ـ تمرین ۲ صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

الف) اگر $0 < x < 1$، آن‌گاه $x^2 < x$

ب) ابوالوفا محمد بوزجانی، ریاضی‌دان است.

پ) $a \in \{a,c,d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۱ یک میلهٔ سربی خنثی را با یک میلهٔ پلاستیکی خنثی مالش می‌دهیم. اگر در حین مالش ۵×۱۰^{۱۰} الکترون بین این دو میله جابه‌جا شود، پس از مالش، بار الکتریکی میلهٔ پلاستیکی برحسب نانوکولن کدام است؟ $(e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$

۱) -۸

۲) -۸۰

۳) ۸

۴) ۸۰

انتهای مثبت سری
سرب
پلاستیک
انتهای منفی سری

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) در روش مالش، وقتی دو جسم غیرهم‌جنس را به هم مالش می‌دهیم، جسمی که در جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی (مطابق شکل زیر) بالاتر است، تعدادی الکترون از دست می‌دهد و جسمی که در جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی پایین‌تر است همان تعداد الکترون را دریافت می‌کند؛ بنابراین بار جسم پایین‌تر (جسمی که به انتهای منفی سری نزدیک‌تر است.)، برابر با $q=-ne$ و بار جسم بالاتر (جسمی که به انتهای مثبت سری نزدیک‌تر است.)، برابر با $q=+ne$ می‌شود.

انتهای مثبت سری
A
B
C
D
انتهای منفی سری

افزایش الکترون‌خواهی

سری الکتریسیتهٔ مالشی (تریبوالکتریک)

۲) **اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی:** بار یک جسم همواره مضرب صحیحی از بار الکترون $(e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C)$ است. در واقع هرگاه از یک جسم تعداد n الکترون بگیریم، بار جسم برابر با $+ne$ و اگر به جسم، تعداد n الکترون بدهیم، بار جسم برابر با $-ne$ می‌شود:

$$q=\pm ne \quad (n=۱,۲,۳,\dots)$$

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به این‌که در جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی داده‌شده در سؤال، پلاستیک پایین‌تر از سرب قرار دارد، درمی‌یابیم پلاستیک الکترون گرفته و بار الکتریکی آن برابر است با:

$$q=-ne \xrightarrow[e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,C]{n=۵\times۱۰^{۱۰}} q=-۵\times۱۰^{۱۰}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}=-۸\times۱۰^{-۹}\,C\times\frac{۱\,nC}{۱۰^{-۹}\,C}=-۸\,nC$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۲ **میلهٔ بارداری را به کلاهک یک الکتروسکوپ باردار نزدیک می‌کنیم. مشاهده می‌شود که ورقه‌های الکتروسکوپ ابتدا بسته و سپس باز می‌شوند. کدام مورد نادرست است؟**

۱) علامت بار میله و الکتروسکوپ مخالف یکدیگرند.

۲) بار نهایی ورقه‌ها با بار میله، هم‌علامت است.

۳) بار خالص الکتروسکوپ ثابت مانده است.

۴) علامت بار نهایی کلاهک و بار اولیهٔ آن مخالف یکدیگرند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

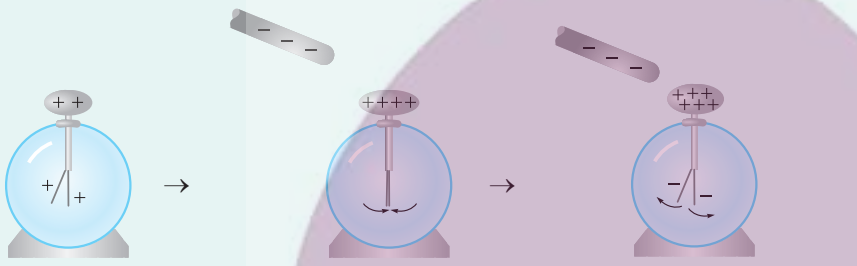
وقتی یک میلهٔ باردار را به یک الکتروسکوپ باردار نزدیک می‌کنیم و بار آن‌ها ناهمنام است، سه حالت ممکن است رخ دهد:

۱) ممکن است فاصلهٔ ورقه‌های الکتروسکوپ مقداری کاهش یابد، ولی کاملاً بسته نشوند.

۲) ممکن است ورقه‌های الکتروسکوپ کاملاً بسته شوند.

۳) ممکن است فاصلهٔ ورقه‌های الکتروسکوپ ابتدا کاهش یابد و ورقه‌ها کاملاً بسته شوند، سپس بار مخالف حالت قبل را پیدا کنند و مجدداً از هم دور شوند.

به عنوان مثال اگر میلهٔ رسانایی با بار الکتریکی منفی را به کلاهک یک الکتروسکوپ با بار مثبت نزدیک کنیم، مطابق شکل زیر خواهیم داشت:



با نزدیک‌کردن بیشتر میله، الکترون بیشتری از کلاهک به ورقه‌ها منتقل می‌شود.

با نزدیک‌کردن میله، ورقه‌ها خنثی می‌شوند.

الکتروسکوپ با بار مثبت

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به این‌که پس از نزدیک‌کردن میلهٔ باردار به الکتروسکوپ باردار، ورقه‌های الکتروسکوپ ابتدا بسته و سپس باز می‌شوند، درمی‌یابیم بار میله مخالف بار اولیهٔ الکتروسکوپ است؛ بنابراین طبق توضیحی که در درس‌باکس نوشتیم، باید بار نهایی ورقه‌های الکتروسکوپ، همنام با بار میله و بار کلاهک الکتروسکوپ، ناهمنام با بار میله باشد. در نتیجه علامت بار ورقه‌ها مخالف حالت اول می‌شود ولی علامت بار کلاهک الکتروسکوپ تغییری نمی‌کند.

توجه کنید چون الکتروسکوپ تبادل بار با محیط بیرون نداشته، بار خالص آن ثابت می‌ماند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۳ **با گرفتن ۶×۱۰^{۱۱} الکترون از جسم بارداری، اندازهٔ بار جسم دو برابر شده و علامت آن نیز تغییر می‌کند. بار اولیهٔ این جسم چند نانوکولن است؟ $(e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$**

۱) ۹۶ ۲) ۳۲

۳) -۹۶ ۴) -۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته اگر با گرفتن الکترون از جسمی علامت بار آن عوض شود، یعنی علامت بار اولیهٔ جسم، منفی بوده است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: با توجه به این‌که در اثر گرفتن الکترون از جسم، اندازهٔ بار جسم دو برابر شده و علامت بار عوض شده است، می‌توانیم بنویسیم:

$$q_۲=-۲q_۱ \Rightarrow \Delta q=q_۲-q_۱=-۲q_۱-q_۱=-۳q_۱$$

گام دوم: از طرفی طبق اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی داریم:

$\Delta q>۰$:گرفتن الکترون از جسم

$$\Delta q=+ne \xrightarrow[n=۶\times۱۰^{۱۱}]{\Delta q=-۳q_۱} -۳q_۱=۶\times۱۰^{۱۱}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}$$

$$\Rightarrow q_۱=-۳/۲\times۱۰^{-۸}\ C\times\frac{۱\ nC}{۱۰^{-۹}\ C}=-۳۲\ nC$$

گول نخوری اگر حواست نباشه و تغییرات بار رو به عنوان جواب انتخاب کنی، توی دام گزینه‌های (۱) یا (۳) می‌افتی.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۴ دو ذره با بارهای الکتریکی $q_1 = 4\ \mu C$ و q_2 در فاصلهٔ $6\ m$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. اگر نیروی الکتریکی بین این دو ذره از نوع جاذبه و بزرگی آن برابر با ۵ میلی‌نیوتون باشد، q_2 چند میکروکولن است؟ $(k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$

پس نتیجه می‌گیریم بارها ناهمنام‌اند.

۱) ۵
۲) ۱۰
۳) -5
۴) -10

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

دو ذرهٔ باردار با بارهای q_1 و q_2 که در فاصلهٔ r از همدیگر ثابت شده‌اند، بر یکدیگر نیروی الکتریکی وارد می‌کنند که اندازهٔ آن طبق قانون کولن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2}$$

F: نیروی الکتریکی (N)، k: ثابت کولن $(\frac{N.m^2}{C^2})$، q_1 و q_2: اندازهٔ بارها (C)، r: فاصلهٔ بین دو ذرهٔ باردار (m)

نکته

اگر در رابطهٔ $F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2}$، بارهای الکتریکی را برحسب میکروکولن (μC) و فاصله را برحسب سانتی‌متر (cm) جای‌گذاری کنیم، به جای k، عدد ۹۰ را قرار می‌دهیم تا نیروی الکتریکی برحسب نیوتون (N) به دست آید. به رابطهٔ زیر توجه کنید:

$$F = \frac{90|q_1||q_2|}{r^2}$$

F: نیروی الکتریکی (N)، q_1 و q_2: اندازهٔ بارها (μC)، r: فاصلهٔ بین دو ذرهٔ باردار (cm)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

طبق قانون کولن می‌توانیم بنویسیم:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \xrightarrow[q_1=4\ \mu C=4\times10^{-6}\ C,\ r=6\ m]{F=5\ mN=5\times10^{-3}\ N} 5\times10^{-3} = \frac{9\times10^9\times4\times10^{-6}\times|q_2|}{6^2}$$

$$\Rightarrow |q_2| = \frac{5\times10^{-3}\times36}{9\times4\times10^3} \Rightarrow |q_2| = 5\times10^{-6}\ C = 5\ \mu C$$

از طرفی با توجه به این‌که نیروی الکتریکی بین بارها جاذبه است، درمی‌یابیم q_1 و q_2 ناهمنام هستند؛ بنابراین $q_2 = -5\ \mu C$ است.

تیزبازی

اول با توجه به نیروی جاذبهٔ بین q_1 و q_2 و در نتیجه، ناهمنام‌بودن بارها، گزینه‌های (۱) و (۲) رو رد کن. بعدش بدون در نظر گرفتن تبدیل یکا و صفرها قالب عددی بار q_2 رو به دست بیار.

$$5 = \frac{9\times4\times|q_2|}{36} \Rightarrow |q_2| = 5\ \mu C$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۵ دو ذره با بارهای الکتریکی q و $-q$ در فاصلهٔ معینی قرار گرفته‌اند و بر هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند، اگر بار الکتریکی Q را به هر یک از ذرات اضافه کرده و فاصلهٔ بین دو ذره را دو برابر کنیم، بزرگی نیروی الکتریکی بین دو ذره تغییر نمی‌کند. Q چند برابر q است؟

۱) $\pm\sqrt{۲}$ ۲) $\pm\sqrt{۳}$

۳) ±۲ ۴) $\pm\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

طبق قانون کولن، نیروی الکتریکی بین دو ذرهٔ باردار، با حاصل‌ضرب اندازهٔ بارها نسبت مستقیم و با مربع فاصلهٔ بارها از همدیگر نسبت معکوس دارد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{F'}{F}=\frac{|q_۱'||q_۲'|}{|q_۱||q_۲|}\times(\frac{r}{r'})^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

قانون کولن را به صورت نسبتی می‌نویسیم:

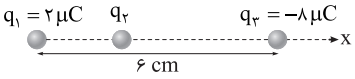
$$\frac{F'}{F}=\frac{|q_۱'||q_۲'|}{|q_۱||q_۲|}\times(\frac{r}{r'})^۲ \xrightarrow[q_۱'=q+Q,q_۲'=-q+Q,r'=۲r]{F'=F,q_۱=q,q_۲=-q} \frac{F}{F}=\frac{|q+Q||-q+Q|}{|q|\cdot|q|}\times(\frac{r}{۲r})^۲$$

$$\Rightarrow ۱=\frac{|q^۲-Q^۲|}{q^۲}\times\frac{۱}{۴} \Rightarrow |q^۲-Q^۲|=۴q^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^۲-Q^۲=۴q^۲ \Rightarrow -Q^۲=۳q^۲ & \text{غیرقابل قبول} \\ q^۲-Q^۲=-۴q^۲ \Rightarrow Q^۲=۵q^۲ \Rightarrow |Q|=\sqrt{۵}|q| \Rightarrow Q=\pm\sqrt{۵}q \end{cases}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۶ در شکل زیر، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار الکتریکی $q_۳$ برابر صفر است. اگر مقدار بار الکتریکی $q_۲$، بدون تغییر علامت دو برابر شود، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$ چند نیوتون خواهد شد؟ $(k = ۹\times۱۰^۹ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



۱) $۴۰\vec{i}$

۲) $-۴۰\vec{i}$

۳) $۸۰\vec{i}$

۴) $-۸۰\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

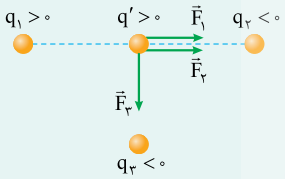
اصل برهم‌نهی نیروهای الکتریکی:

اگر اطراف ذرهٔ باردار q'، چند ذرهٔ باردار وجود داشته باشد، برای محاسبهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q' مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) نیرویی که هر کدام از بارها به صورت جداگانه بر آن وارد می‌کند را طبق قانون کولن محاسبه و جهت آن را مشخص می‌کنیم.

۲) بردارهای به‌دست‌آمده را با هم جمع برداری می‌کنیم (برایند می‌گیریم).

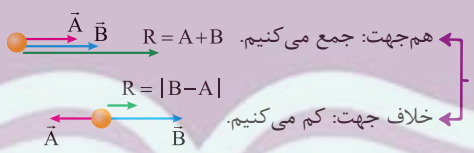
مثال



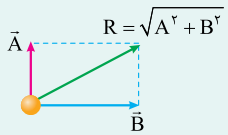
$$\vec{F}_t = \vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ + \vec{F}_۳$$

روش‌های جمع برداری دو بردار:

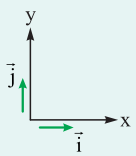
۱) **هم‌راستا**



۲) **عمود بر هم:** به کمک رابطهٔ فیثاغورس مقدار برایند را حساب می‌کنیم:



اگر نیروی الکتریکی برحسب بردارهای یکه نوشته شود:



$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

اگر دو بردار برحسب بردارهای یکه باشند، برای برایندگیری باید مؤلفه‌های محور x $(\vec{i})$ را با هم و مؤلفه‌های محور y $(\vec{j})$ را با هم جمع کنیم و برای محاسبهٔ مقدار برایند، از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیرویی که بار $q_۲$ به بار $q_۳$ وارد می‌کند را برحسب نیروی بار $q_۱$ بر $q_۳$ به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$ صفر است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{F}_{t_۳} = \vec{F}_{۱۳} + \vec{F}_{۲۳} = ۰ \Rightarrow \vec{F}_{۲۳} = -\vec{F}_{۱۳}$$

گام دوم: اندازهٔ نیروی خالص وارد بر بار q_3 را در حالتی که اندازهٔ q_2، دو برابر شود به دست می‌آوریم. می‌دانیم با دو برابر شدن اندازهٔ بار q_2، نیروی q_2 بر q_3 هم دو برابر می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$\vec{F}'_{t_3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}'_{23} \xrightarrow{\vec{F}'_{23}=2\vec{F}_{23}} \vec{F}'_{t_3} = \vec{F}_{13} + 2\vec{F}_{23}$$

$$\xrightarrow{\vec{F}_{23}=-\vec{F}_{13}} \vec{F}'_{t_3} = \vec{F}_{13} - 2\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{13}$$

$$F_{13} = \frac{k|q_1||q_3|}{r_{13}^2} \Rightarrow F_{13} = \frac{9\times10^9\times2\times10^{-6}\times8\times10^{-6}}{(6\times10^{-2})^2} = \frac{90\times2\times8}{36} = 40\,N \Rightarrow \vec{F}_{13} = (-40\,N)\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{F}'_{t_3} = -\vec{F}_{13} \Rightarrow \vec{F}'_{t_3} = (40\,N)\vec{i}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

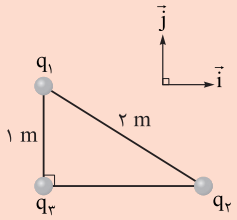
۴۷ در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی سه رأس مثلث قائم‌الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$ در SI برابر $\vec{F}_T = ۴\times۱۰^{-۳}\vec{i} - ۶\times۱۰^{-۳}\vec{j}$ باشد، $\frac{q_۲}{q_۱}$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۲

۳) -۳

۴) -۲

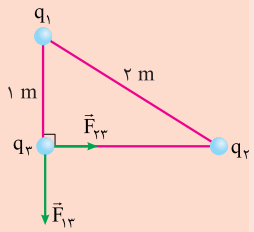


پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint اول با توجه به بردار نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$، نیروهای $\vec{F}_{۱۳}$ و $\vec{F}_{۲۳}$ رو به دست بیار. بعدش با داشتن نسبت نیروها و فاصله‌ها به کمک قانون کولن نسبت بارها رو حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$ به صورت $\vec{F}_T = ۴\times۱۰^{-۳}\vec{i} - ۶\times۱۰^{-۳}\vec{j}$ است؛ بنابراین به کمک آن، نیرویی که هر یک از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ به بار $q_۳$ وارد می‌کند را به دست می‌آوریم. با توجه به بردار نیروی خالص وارد بر $q_۳$، مطابق شکل زیر داریم:

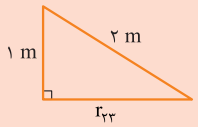


$$\vec{F}_T = ۴\times۱۰^{-۳}\vec{i} - ۶\times۱۰^{-۳}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{۱۳} = -۶\times۱۰^{-۳}\vec{j} \\ \vec{F}_{۲۳} = ۴\times۱۰^{-۳}\vec{i} \end{cases}$$

با توجه به شکل بالا درمی‌یابیم بار $q_۲$، بار $q_۳$ را جذب و بار $q_۱$، بار $q_۳$ را دفع می‌کند؛ بنابراین بار $q_۲$ ناهمنام با بار $q_۳$ و بار $q_۱$ همنام با بار $q_۳$ است؛ در نتیجه بارهای $q_۱$ و $q_۲$ ناهمنام هستند (رد گزینه‌های (۱) و (۲)).

گام دوم: طبق رابطهٔ فیثاغورس، فاصلهٔ بار $q_۲$ از بار $q_۳$ را به دست می‌آوریم. با توجه به شکل زیر داریم:



$$۲^۲ = ۱^۲ + r_{۲۳}^۲ \Rightarrow r_{۲۳}^۲ = ۳ \Rightarrow r_{۲۳} = \sqrt{۳}\ \text{m}$$

گام سوم: طبق قانون کولن، نسبت بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{F_{۲۳}}{F_{۱۳}} = \frac{|q_۲||q_۳|}{|q_۱||q_۳|}\times\left(\frac{r_{۱۳}}{r_{۲۳}}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۴\times۱۰^{-۳}}{۶\times۱۰^{-۳}} = \left|\frac{q_۲}{q_۱}\right|\times\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^۲$$

$$\Rightarrow \left|\frac{q_۲}{q_۱}\right| = ۲ \xrightarrow{q_۱ \text{ و } q_۲ \text{ ناهمنام‌اند.}} \frac{q_۲}{q_۱} = -۲$$

کنکور

سه ذره مطابق شکل زیر، در سه رأس مثلث قائم‌الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$ در SI، $\vec{F}_T = ۸\times۱۰^{-۳}\vec{i} + ۶\times۱۰^{-۳}\vec{j}$ باشد، $\frac{q_۳}{q_۱}$ کدام است؟ $\left(k = ۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲}\right)$

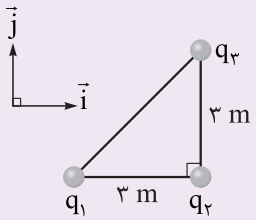
(سؤال ۶۴ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) $-\frac{۳}{۲}$

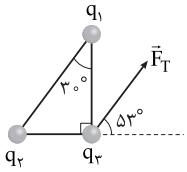
۲) $-\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۴}$



۴۸ در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل زیر، بردار $\vec{F}_T$، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار الکتریکی q_3 است. $\frac{q_1}{q_2}$ کدام است؟ $(\tan 53^\circ = \frac{4}{3})$



۱) ۳

۲) ۴

۳) -3

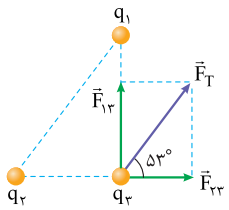
۴) -4

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint اول با توجه به زاویهٔ 53° نسبت $\frac{F_{13}}{F_{23}}$ رو به دست بیار. بعدش از زاویهٔ 30° نسبت $\frac{r_{23}}{r_{13}}$ رو حساب کن. در نهایت با استفاده از قانون کولن، نسبت بارها رو حساب کن.

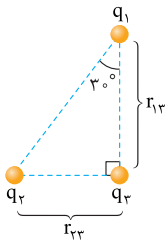
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نسبت نیروی الکتریکی q_1 بر q_3 به نیروی الکتریکی q_2 بر q_3 را به دست می‌آوریم. با توجه به شکل زیر می‌توانیم بنویسیم:



$$\tan 53^\circ = \frac{F_{13}}{F_{23}} = \frac{4}{3}$$

گام دوم: نسبت فاصلهٔ q_2 از q_3 به فاصلهٔ q_1 از q_3 را به دست می‌آوریم:



$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{r_{23}}{r_{13}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

گام سوم: قانون کولن را به صورت نسبتی می‌نویسیم تا نسبت بار q_1 به q_2 را به دست آوریم:

$$\frac{F_{13}}{F_{23}} = \frac{|q_1||q_3|}{|q_2||q_3|} \times (\frac{r_{23}}{r_{13}})^2 \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{|q_1|}{|q_2|} \times (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = 4$$

با توجه به جهت نیروها نتیجه می‌گیریم که بار q_1، بار q_3 را جذب و بار q_2، بار q_3 را دفع می‌کند، بنابراین q_2 همنام با q_3 و q_1 ناهمنام با q_3 است؛ بنابراین q_1 و q_2 نیز ناهمنام هستند و $\frac{q_1}{q_2} = -4$ است.

ایران توانا
توسعه ای برای موفقیت

۴۹ چهار ذرهٔ باردار مشابه با فاصله‌های یکسان روی محیط دایره‌ای ثابت شده‌اند. بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر یک از بارها چند برابر بزرگی نیروی الکتریکی بین دو بار مجاور است؟ $(\sqrt{۲}=۱/۴)$

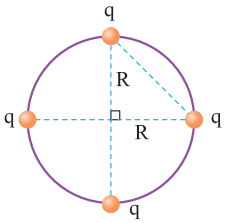
۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴

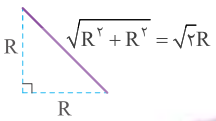
۳) ۱/۷ ۴) ۱/۹

پاسخ: گزینهٔ ۴

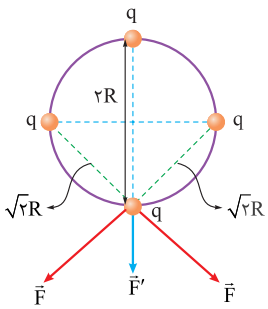
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فاصلهٔ دو بار الکتریکی مجاور را برحسب شعاع دایره به دست می‌آوریم. مطابق شکل زیر داریم:





گام دوم: نیرویی که دو بار الکتریکی q در فاصلهٔ $\sqrt{۲}R$ به یکدیگر وارد می‌کنند را F می‌نامیم و با توجه به قانون کولن که نیروی الکتریکی بین دو ذرهٔ باردار با مربع فاصلهٔ آن‌ها از هم نسبت عکس دارد، سایر نیروها و نیروی خالص وارد بر هر بار را برحسب F به دست می‌آوریم:



$$\frac{F'}{F}=(\frac{r}{r'})^۲=(\frac{\sqrt{۲}R}{۲R})^۲=\frac{۱}{۲}$$

گام سوم: ابتدا بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر یکی از بارها (F_t) را برحسب F محاسبه کرده و سپس نسبت F_t به F را به دست می‌آوریم:



$$F_t=\sqrt{۲}F+\frac{F}{۲}=F(\sqrt{۲}+\frac{۱}{۲})\Rightarrow\frac{F_t}{F}=\sqrt{۲}+\frac{۱}{۲}=۱/۴+۰/۵=۱/۹$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۰ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_0 = 56\,nC$ در SI، برابر $\vec{F} = 2/1\times10^{-3}\vec{i} + 2/8\times10^{-3}\vec{j}$ است. بزرگی میدان الکتریکی در محل بار q_0 چند نیوتون بر کولن است؟

۱) $3/75\times10^{4}$
۲) $6/25\times10^{4}$
۳) $3/75\times10^{5}$
۴) $6/25\times10^{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اول مقدار نیرو را به دست آورید، سپس به کمک رابطهٔ $E = \frac{F}{q_0}$، بزرگی میدان الکتریکی را حساب کنید.

درس Box

چگونه در یک نقطه، میدان الکتریکی را حساب کنیم؟

ابتدا یک بار الکتریکی مثبت و کوچک به نام بار آزمون (q_0) در آن نقطه قرار می‌دهیم، سپس نیروی الکتریکی وارد بر این بار را به دست می‌آوریم. در نهایت مطابق رابطهٔ زیر از تقسیم نیروی الکتریکی بر مقدار بار آزمون، میدان الکتریکی را در آن محل به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{F}{q_0} \leftarrow \text{میدان الکتریکی } (N/C) \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{نیروی الکتریکی } (N) \\ \rightarrow \text{بار آزمون } (C) \end{matrix}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر بار q_0 را به دست می‌آوریم:

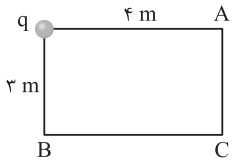
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \xrightarrow[F_y = 2/8\times10^{-3}\,N]{F_x = 2/1\times10^{-3}\,N} F = \sqrt{(2/1\times10^{-3})^2 + (2/8\times10^{-3})^2} = 0/7\times10^{-3}\sqrt{3^2+4^2} = 3/5\times10^{-3}\,N$$

گام دوم: اندازهٔ میدان الکتریکی را حساب می‌کنیم:

$$E = \frac{F}{q_0} \xrightarrow[q_0 = 56\,nC = 56\times10^{-9}\,C]{F = 3/5\times10^{-3}\,N} E = \frac{3/5\times10^{-3}}{56\times10^{-9}} = \frac{10^6}{16} = 6/25\times10^{4}\,N/C$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۱ مطابق شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای q در رأس مستطیلی قرار دارد. اگر اختلاف بزرگی میدان الکتریکی حاصل از این بار در رأس‌های A و B برابر با ۳۵۰ N / C باشد، بزرگی میدان الکتریکی حاصل از این بار در رأس C، چند نیوتون بر کولن است؟



۱) ۴۲۰

۲) ۳۲۰

۳) ۲۸۸

۴) ۲۵۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

میدان الکتریکی ناشی از بار q در فاصلهٔ r از آن، طبق رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

ثابت کولن $\left(\frac{N.m^2}{C^2}\right)$ — اندازهٔ بار الکتریکی (C) — میدان الکتریکی (N / C) — فاصلهٔ بار الکتریکی تا نقطهٔ مورد نظر (m)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از اختلاف بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌های ۳ m و ۴ m از بار q، حاصل $k|q|$ را به دست می‌آوریم:

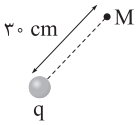
$$E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_A = \frac{k|q|}{16} \\ E_B = \frac{k|q|}{9} \end{cases} \Rightarrow E_B - E_A = k|q|\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) = \frac{7k|q|}{144} = 350 \Rightarrow k|q| = 7200 \frac{N.m^2}{C}$$

گام دوم: اندازهٔ میدان الکتریکی را در رأس C که فاصلهٔ آن از بار q برابر با $r_C = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ m$ است، به دست می‌آوریم:

$$E_C = \frac{k|q|}{r_C^2} \xrightarrow[r_C = 5\ m]{k|q| = 7200\ \frac{N.m^2}{C}} E_C = \frac{7200}{25} = 288\ N/C$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۲ در شکل زیر، میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای q در نقطهٔ M برابر با $\vec{E}$ است. از نقطهٔ M، چند سانتی‌متر جابه‌جا شویم تا میدان الکتریکی حاصل از این بار برابر با $-\frac{۴}{۹}\vec{E}$ شود؟



۱) ۲۰
۲) ۴۵
۳) ۵۰
۴) ۷۵

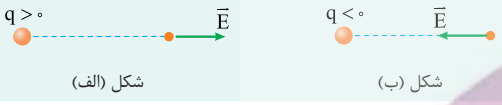
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

میدان الکتریکی ناشی از بار q در یک نقطه با مربع فاصله از بار، نسبت معکوس دارد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{E_۲}{E_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲$$

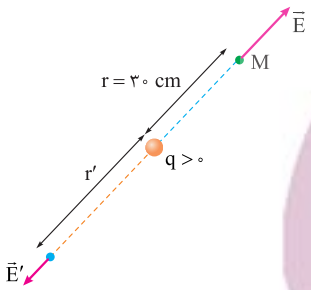
از طرفی میدان الکتریکی ناشی از بار مثبت در یک نقطه، در امتداد خط واصل نقطه و بار مثبت و در جهت دورشدن از بار مثبت است. میدان الکتریکی ناشی از بار منفی در یک نقطه، بر روی خط واصل نقطه و بار منفی و در جهت نزدیک‌شدن به بار منفی است. به شکل‌های «الف» و «ب» توجه کنید:



شکل (الف) شکل (ب)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به این‌که میدان الکتریکی در حالت دوم، در خلاف جهت حالت اول است، اگر بار q را مثبت فرض کنیم، مطابق شکل زیر داریم:



$$E=\frac{k|q|}{r^۲}\xrightarrow{|q|=\text{ثابت}}\frac{E'}{E}=(\frac{r}{r'})^۲\Rightarrow\frac{۴}{۹}=(\frac{۳۰}{r'})^۲\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{۳۰}{r'}\Rightarrow r'=۴۵\ \text{cm}$$

بنابراین نقطهٔ M باید اندازهٔ $r+r'=۳۰+۴۵=۷۵\ \text{cm}$ جابه‌جا شود.

گول نخوری ✘

حواست باشه، سؤال نگفته فاصلهٔ نقطهٔ M باید به چند سانتی‌متر برسه، گفته چه‌قدر جابه‌جا می‌شه. اگه اشتباه کنی تو دام گزینهٔ (۲) می‌افتی!

تیزبازی

اگه بچهٔ زرنگی باشی با توجه به این‌که هم، اندازهٔ میدان کم شده و هم علامتش عوض شده، می‌فهمی باید فاصله بیشتر از حالت اول باشه و اون طرف بار، یعنی باید نقطهٔ M بیشتر از ۶۰ cm جابه‌جا بشه که فقط گزینهٔ (۴) می‌مونه!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۳ دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 5\,\mu C$ و $q_2 = -20\,\mu C$ در فاصلهٔ $10\,cm$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. اگر در نقطه‌ای که میدان الکتریکی خالص این دو ذره برابر صفر است، بار الکتریکی نقطه‌ای $q_3 = -10\,\mu C$ را قرار دهیم، بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر q_2 چند نیوتون می‌شود؟ $(k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$

۱) ۴۵ ۲) ۹۰

۳) ۱۳۵ ۴) ۱۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

نقطهٔ مورد نظر رو پیدا کن و بار q_3 رو توی اون قرار بده. بعدش نیرویی که بارهای q_1 و q_3 بر q_2 وارد می‌کنن رو طبق قانون کولن حساب کن و در نهایت به کمک جمع برداری، نیروی خالص رو به دست بیار.

درس Box

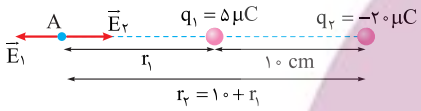
نقطه‌ای که در آن میدان الکتریکی خالص ناشی از بارهای ناهمنام q_1 و q_2 صفر است، کجاست؟

این نقطه در امتداد خط واصل دو بار q_1 و q_2، خارج از فاصلهٔ دو بار و نزدیک به باری است که اندازهٔ کوچک‌تری دارد. از طرفی طبق رابطهٔ $E = k\frac{|q|}{r^2}$ با توجه به برابربودن اندازهٔ میدان ناشی از هر یک از بارهای q_1 و q_2 در این نقطه داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow k\frac{|q_1|}{r_1^2} = k\frac{|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow \left|\frac{q_2}{q_1}\right| = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

پاسخ خیلی تشریحی

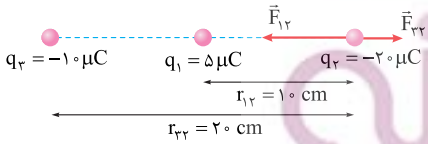
گام اول: نقطه‌ای که میدان الکتریکی خالص ناشی از بارهای q_1 و q_2 در آن‌جا صفر می‌شود را پیدا می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow k\frac{|q_1|}{r_1^2} = k\frac{|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow \left|\frac{q_2}{q_1}\right| = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{20}{5} = \left(\frac{10+r_1}{r_1}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{10+r_1}{r_1} \Rightarrow r_1 = 10\ cm\ ,\ r_2 = 20\ cm$$

گام دوم: بار $q_3 = -10\,\mu C$ را در نقطهٔ A قرار می‌دهیم و نیروی الکتریکی که هر یک از بارهای q_1 و q_3 بر بار q_2 وارد می‌کنند را به کمک شکل زیر به دست می‌آوریم:



$$F_{12} = k\frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2} = \frac{9\times10^9\times5\times10^{-6}\times20\times10^{-6}}{(0/1)^2} = 90\ N$$

$$F_{32} = k\frac{|q_3||q_2|}{r_{32}^2} = \frac{9\times10^9\times10\times10^{-6}\times20\times10^{-6}}{(0/2)^2} = 45\ N$$

$$\begin{cases}\vec{F}_{12} = (-90\ N)\vec{i}\\ \vec{F}_{32} = (45\ N)\vec{i}\end{cases}$$

گام سوم: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{t_2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = -90\vec{i} + 45\vec{i} = (-45\ N)\vec{i}$$

بنابراین اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر q_2، ۴۵ نیوتون است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۴ دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 2\,\mu C$ و $q_2 = -4\,\mu C$ در فاصلهٔ $3\,m$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. بیشترین مقدار ممکن برای میدان الکتریکی خالص در فاصلهٔ یک متری از بار q_1 چند نیوتون بر کولن است؟ $(k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$

۱) ۱۸۰۰۰

۲) ۲۷۰۰۰

۳) ۳۲۰۰۰

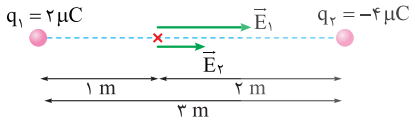
۴) ۳۶۰۰۰

با توجه به ناهمنام بودن بارها، در نقطه‌ای بر روی خط واصل دو بار و بین دو بار، میدان الکتریکی هر دو بار در یک جهت است؛ پس نقطهٔ مورد نظر، بین دو بار است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقطه‌ای را که در آن بیشترین مقدار ممکن برای میدان الکتریکی خالص در فاصلهٔ یک متری از بار q_1 وجود دارد، مشخص می‌کنیم. مطابق شکل زیر، این نقطه باید بین دو بار و بر روی خط واصل دو بار باشد تا میدان الکتریکی ناشی از q_2 در آن نقطه همسو با میدان الکتریکی ناشی از q_1 باشد.



گام دوم: میدان الکتریکی خالص را در نقطهٔ مورد نظر به دست می‌آوریم:

$$E = k\frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \frac{9\times10^9\times2\times10^{-6}}{1^2} = 1/8\times10^4\ N/C \\ E_2 = \frac{9\times10^9\times4\times10^{-6}}{4} = 0/9\times10^4\ N/C \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_t = E_1 + E_2 = 1/8\times10^4 + 0/9\times10^4 = 2/7\times10^4\ N/C \Rightarrow E_t = 27000\ N/C$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

دانلود رایگان تمام
آزمون‌های آزمایشی
در کانال تلگرام ما :

آزمون‌های آزمایشی

- دسترسی سریع
- رایگان و دائمی
- معتبر و جامع
- ویژه کنکور سراسری

آزمون مخصوص تمام پایه‌ها و تمام رشته‌ها

موفقیت + برنامه تلاش

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

گزینه دو
موسسه آموزشی فرهنگی
جلی سبز
سازمان سنجش آموزش کشور
آزمون
سازمان سنجش آموزش کشور
زیده‌ستان
آزمون
آزمون‌های سراسری گاج
کانون فرهنگی آموزش قلم‌چی
خیلی سبز!

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

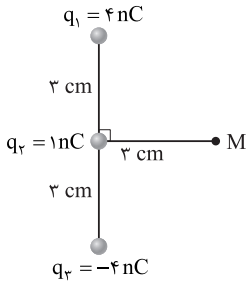
۵۵ در شکل زیر، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M، چند کیلونیوتون بر کولن است؟ $(k = ۹\times ۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}})$

۱) ۳۰

۲) ۴۰

۳) $۲۰\sqrt{۲}$

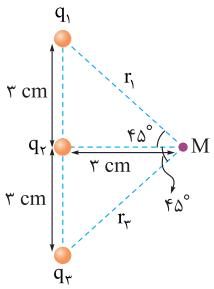
۴) $۳۰\sqrt{۲}$



پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint اول فاصلهٔ بارهای $q_۱$ و $q_۳$ تا نقطهٔ M رو حساب کن. بعدش میدان الکتریکی تک‌تک بارها رو تو نقطهٔ M به دست بیار. در نهایت به کمک جمع برداری، میدان خالص رو حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فاصلهٔ هر یک از بارهای $q_۱$ و $q_۳$ را از نقطهٔ M به دست می‌آوریم. مطابق شکل زیر داریم:

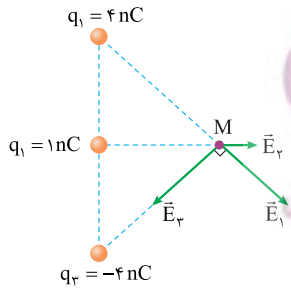


$$r_۱ = r_۳ = \sqrt{۳^{۲} + ۳^{۲}} = ۳\sqrt{۲}\ cm$$

گام دوم: میدان الکتریکی ناشی از هر یک از بارهای $q_۱$، $q_۲$ و $q_۳$ را در نقطهٔ M به دست می‌آوریم:

$$E = k\frac{|q|}{r^{۲}} \Rightarrow \begin{cases} E_۱ = E_۳ = \dfrac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۴\times ۱۰^{-۹}}{(۳\sqrt{۲}\times ۱۰^{-۲})^{۲}} = ۲\times ۱۰^{۴}\ N/C \\ E_۲ = \dfrac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۱\times ۱۰^{-۹}}{(۳\times ۱۰^{-۲})^{۲}} = ۱۰^{۴}\ N/C \end{cases}$$

گام سوم: مطابق شکل زیر، میدان الکتریکی خالص را در نقطهٔ M به دست می‌آوریم:

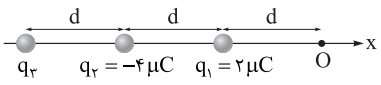


$$\begin{cases} E_{۱,۳} = \sqrt{E_۱^{۲} + E_۳^{۲}} = \sqrt{(۲\times ۱۰^{۴})^{۲} + (۲\times ۱۰^{۴})^{۲}} = ۲\sqrt{۲}\times ۱۰^{۴}\ N/C \\ E_۲ = ۱۰^{۴}\ N/C \end{cases}$$



$$E_t = \sqrt{E_{۱,۳}^{۲} + E_۲^{۲}} = \sqrt{(۲\sqrt{۲}\times ۱۰^{۴})^{۲} + (۱۰^{۴})^{۲}} = ۳\times ۱۰^{۴}\ N/C \times \frac{۱\,kN}{۱۰^{۳}\,N} = ۳۰\ kN/C$$

۵۶ در شکل زیر، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ O برابر با صفر است. بار الکتریکی $q_۳$ چند میکروکولن است؟



۱) -۹

۲) ۹

۳) -۱۸

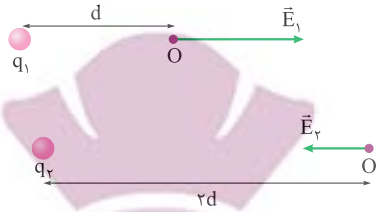
۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به این‌که میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ O صفر است، طبق رابطهٔ $E = k\frac{|q|}{r^۲}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$q_۱ > ۰:\ \vec{E}_۱ = \frac{k|q_۱|}{d^۲}\vec{i} = \frac{k(۲)}{d^۲}\vec{i}$$

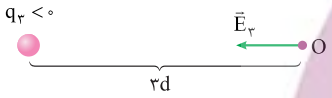
$$q_۲ < ۰:\ \vec{E}_۲ = -\frac{k|q_۲|}{(۲d)^۲}\vec{i} = -\frac{k(۴)}{۴d^۲}\vec{i} = -\frac{k}{d^۲}\vec{i}$$



$$\vec{E}_o = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ + \vec{E}_۳ = ۰ \xrightarrow[\vec{E}_۲ = -\frac{k}{d^۲}\vec{i}]{\vec{E}_۱ = \frac{۲k}{d^۲}\vec{i}} \frac{۲k}{d^۲}\vec{i} - \frac{k}{d^۲}\vec{i} + \vec{E}_۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \vec{E}_۳ = -\frac{k}{d^۲}\vec{i}$$

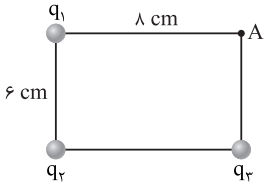
بنابراین داریم:



$$\frac{k}{d^۲} = \frac{k|q_۳|}{(۳d)^۲} = \frac{k|q_۳|}{۹d^۲} \Rightarrow |q_۳| = ۹\ \mu C \xrightarrow{q_۳ < ۰} q_۳ = -۹\ \mu C$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۷ در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای روی سه رأس مستطیلی ثابت شده‌اند. اگر میدان الکتریکی خالص در رأس A برابر با صفر باشد، کدام مورد درست است؟



۱) $q_1 = -\frac{۴}{۵}q_2 = \frac{۳}{۴}q_3$

۲) $q_1 = -\frac{۴}{۵}q_2 = \frac{۴}{۳}q_3$

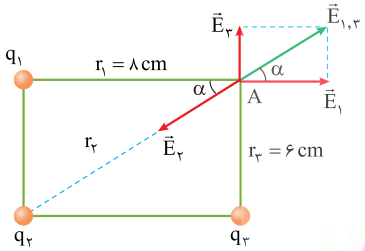
۳) $q_1 = -\frac{۶۴}{۱۲۵}q_2 = \frac{۲۷}{۶۴}q_3$

۴) $q_1 = -\frac{۶۴}{۱۲۵}q_2 = \frac{۶۴}{۲۷}q_3$

پاسخ: گزینهٔ ۴

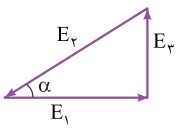
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای این‌که میدان الکتریکی خالص در رأس A صفر شود، باید بارهای q_1 و q_3 همنام و با بار q_2 ناهمنام باشند؛ بنابراین اگر فرض کنیم q_1 و q_3 مثبت باشند، باید q_2 منفی باشد تا میدان خالص در رأس A صفر شود؛ در نتیجه مطابق شکل زیر داریم:



$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{E}_{1,3} + \vec{E}_2 = 0 \Rightarrow \vec{E}_{1,3} = -\vec{E}_2$$

از طرفی داریم:



$$\tan\alpha = \frac{E_3}{E_1} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow E_3 = \frac{۳}{۴}E_1$$

$$E_{1,3} = E_2 = \sqrt{E_1^2 + E_3^2} = \sqrt{E_1^2 + (\frac{۳}{۴}E_1)^2} = \frac{۵}{۴}E_1$$

گام دوم: در نهایت طبق رابطهٔ $E = \frac{k|q|}{r^2}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$r_2 = \sqrt{۸^2 + ۶^2} = ۱۰ \text{ cm}$$

$$\frac{E_3}{E_1} = |\frac{q_3}{q_1}| \times (\frac{r_1}{r_3})^2 \Rightarrow \frac{۳}{۴} = |\frac{q_3}{q_1}| \times (\frac{۸}{۶})^2 \Rightarrow |\frac{q_1}{q_3}| = \frac{۶۴}{۲۷}$$

$\xrightarrow{q_3 \text{ و } q_1 \text{ همنام‌اند.}}$ $\frac{q_1}{q_3} = \frac{۶۴}{۲۷} \Rightarrow q_1 = \frac{۶۴}{۲۷}q_3$

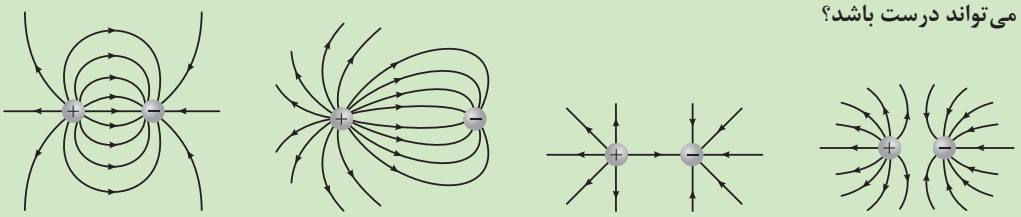
همین‌جا به جواب گزینهٔ (۴) رسیدی، ولی من تا آخرش باهاتم:

$$\frac{E_2}{E_1} = |\frac{q_2}{q_1}| \times (\frac{r_1}{r_2})^2 \Rightarrow \frac{۵}{۴} = |\frac{q_2}{q_1}| \times (\frac{۸}{۱۰})^2 \Rightarrow |\frac{q_1}{q_2}| = \frac{۶۴}{۱۲۵}$$

$\xrightarrow{q_1 \text{ و } q_2 \text{ ناهمنام‌اند.}}$ $\frac{q_1}{q_2} = \frac{-۶۴}{۱۲۵} \Rightarrow q_1 = \frac{-۶۴}{۱۲۵}q_2$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۸ در هر یک از شکل‌های زیر، خطوط میدان الکتریکی در اطراف دو ذرهٔ باردار رسم شده است. چه تعداد از این شکل‌ها، می‌تواند درست باشد؟



(الف) (ب) (پ) (ت)

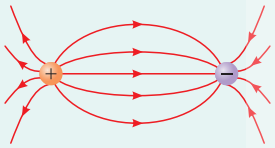
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

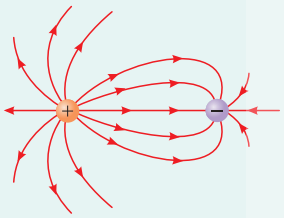
درس Box

آرایش خطوط میدان اطراف دو ذره با بارهای ناهمنام، مطابق شکل‌های زیر است:

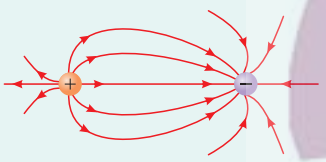
بارهای مثبت و منفی هم‌اندازه‌اند:



اندازهٔ بار مثبت از اندازهٔ بار منفی بیشتر است:



اندازهٔ بار منفی از اندازهٔ بار مثبت بیشتر است:

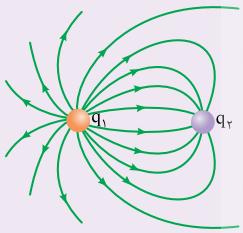


نکته جهت میدان الکتریکی از بارهای مثبت رو به خارج و به طرف بارهای منفی است.

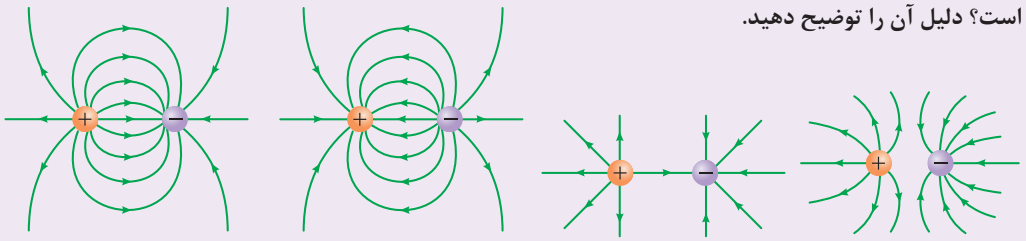
پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق «درس‌باکس» شکل‌های «پ» و «ت» درست هستند.

کتاب درسی

● **خطوط میدان الکتریکی برای دو کرهٔ رسانای باردار کوچک در شکل مقابل نشان داده شده است. نوع بار هر کره را تعیین کرده و اندازهٔ آن‌ها را مقایسه کنید.** *(فیزیک (۲) - تمرین‌های ۱۳ و ۱۴ صفحهٔ ۴۲ کتاب درسی)*



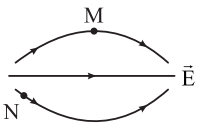
● **در شکل‌های زیر، اندازهٔ دو بار، یکسان ولی علامت آن‌ها مخالف هم است. کدام آرایش‌های خطوط میدان نادرست است؟ دلیل آن را توضیح دهید.**



(الف) (ب) (پ) (ت)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۹ **خطوط میدان الکتریکی در بخشی از فضا به شکل زیر است. اگر یک ذرهٔ کوچک با بار منفی را ابتدا در نقطهٔ M و سپس در نقطهٔ N قرار دهیم، کدام مورد، بردار نیروی وارد بر ذره در این دو نقطه را به ترتیب از راست به چپ، درست نشان می‌دهد؟ (طول هر بردار، نشان‌دهندهٔ اندازهٔ نیرو است.)**



۱) ، ⟶

۲) ، ↘

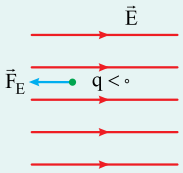
۳) ، ⟵

۴) ، ↙

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ باردار با بار الکتریکی منفی در هر نقطه، در خلاف جهت میدان الکتریکی در آن نقطه است. به شکل زیر توجه کنید:



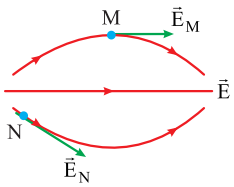
دو ویژگی مهم میدان الکتریکی:

۱) میدان الکتریکی در هر نقطه، مماس بر خط میدان الکتریکی در آن نقطه و هم‌جهت با آن است.

۲) هر جا تراکم خطوط میدان الکتریکی بیشتر باشد، میدان قوی‌تر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

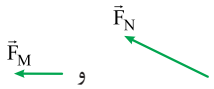
گام اول: می‌دانیم جهت میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا، مماس بر خط میدان الکتریکی در آن نقطه است؛ بنابراین بردار میدان الکتریکی در نقاط M و N به صورت زیر است:





با توجه به این‌که تراکم خطوط میدان الکتریکی در نقطهٔ N از نقطهٔ M بیشتر است، طول بردار $\vec{E}_N$ از طول بردار $\vec{E}_M$ بیشتر است.

گام دوم: جهت نیروی وارد بر بار منفی در نقاط M و N، در خلاف جهت خطوط میدان است؛ بنابراین داریم:



۶۰ در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $۵\times۱۰^{۵}\ N/C$ که جهت آن قائم و رو به پایین است، ذرهٔ بارداری به جرم $۴\times۱۰^{-۱۱}\ g$ معلق و به حال سکون قرار دارد. این ذره چه تعداد الکترون و چگونه مبادله کند تا بار الکتریکی آن خنثی شود؟ $(e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C\ ,\ g=۱۰\ N/kg)$

۱) ۸ الکترون از دست بدهد.
۲) ۸ الکترون بگیرد.
۳) ۵ الکترون از دست بدهد.
۴) ۵ الکترون بگیرد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

اول از روی وزن ذره و تعادل ذره نیروی الکتریکی رو به دست بیار، بعدش با داشتن $\vec{F}_E$ و $\vec{E}$، بار ذره رو حساب کن در نهایت طبق رابطهٔ $\Delta q=ne$، تعداد الکترونی که ذره باید از دست بده تا خنثی بشه رو حساب کن.

درس Box

اگر جسمی تحت تأثیر دو نیروی الکتریکی و وزن در حال تعادل باشد، دو نتیجه می‌گیریم:

۱) نیروی الکتریکی هم‌اندازه با وزن جسم است تا آن را خنثی کند.

۲) جهت نیروی الکتریکی به سمت بالا است.



اگر ذره‌ای با بار الکتریکی q در میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرار گیرد، اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر آن برابر است با:

$$F_E=E|q|$$

F_E: نیروی الکتریکی (N)، $|q|$: بار الکتریکی (C)، E: میدان الکتریکی (N/C)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروی الکتریکی وارد بر ذره را به دست می‌آوریم. با توجه به معلق‌بودن ذره داریم:



$$F_{net}=۰ \Rightarrow F_E=mg \xrightarrow[g=۱۰\ N/kg]{m=۴\times۱۰^{-۱۱}\ g=۴\times۱۰^{-۱۴}\ kg} F_E=۴\times۱۰^{-۱۴}\times۱۰=۴\times۱۰^{-۱۳}\ N$$

گام دوم: بار الکتریکی ذره را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که جهت نیروی الکتریکی رو به بالا و جهت میدان الکتریکی رو به پایین است، درمی‌یابیم که بار ذره باید منفی باشد تا $\vec{E}$ و $\vec{F}_E$ در خلاف جهت هم باشند، بنابراین داریم:

$$F_E=E|q| \xrightarrow[E=۵\times۱۰^{۵}\ N/C]{F_E=۴\times۱۰^{-۱۳}\ N} ۴\times۱۰^{-۱۳}=۵\times۱۰^{۵}\times|q|$$

$$|q|=۸\times۱۰^{-۱۹}\ C \xrightarrow{q<۰} q=-۸\times۱۰^{-۱۹}\ C$$

گام سوم: طبق اصل کوانتیده‌بودن بار، تعداد الکترونی که باید از دست بدهد تا خنثی شود را به دست می‌آوریم:

$$\Delta q=ne \Rightarrow ۸\times۱۰^{-۱۹}=n\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹} \Rightarrow n=۵$$

بنابراین ذره برای این‌که خنثی شود، باید ۵ الکترون از دست بدهد.

گول نخوری

اگر به اشتباه فکر کنی، سؤال گفته ذرهٔ خنثی چند الکترون گرفته تا باردار بشه، توی دام گزینهٔ (۴) می‌افتی!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۱ کدام موارد زیر درست است؟

الف) فولاد و نیمه‌رساناها از جمله موادی هستند که نقش مهمی در توسعهٔ فناوری در دنیای امروزی ایفا کرده‌اند.

ب) با گسترش دانش تجربی، شیمی‌دان‌ها دریافتند که خواص مواد، تنها به عنصرهای سازندهٔ آن‌ها بستگی دارد.

پ) پیش از تولید ورقه‌های فولادی و تایر دوچرخه، مواد استخراج‌شده از معادن و سکوهای نفتی را فراوری می‌کنند.

ت) با توجه به تولید مداوم مواد ساختگی، جرم کل مواد موجود در کرهٔ زمین همواره در حال افزایش است.

۱) «الف» و «ب»
۲) «الف» و «پ»
۳) «ب» و «ت»
۴) «پ» و «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

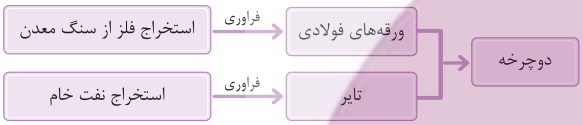
عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) کشف و درک مواد جدیدی مانند فولاد و نیم‌رساناها، پرچم‌دار توسعهٔ فناوری است. به طوری که گسترش صنعت خودرو و پیشرفت صنعت الکترونیک به ترتیب به فولاد و نیمه‌رساناها مبتنی است.

ب) خواص مواد علاوه‌بر عنصرهای سازنده، به ساختار آن‌ها نیز بستگی دارد.

پ) در فرایند تولید دوچرخه، ابتدا فلز را از سنگ معدن آن و نفت خام را از چاه‌های نفتی استخراج می‌کنند و سپس با انجام فراوری‌های لازم، آن‌ها را به ورقه‌های فولادی و تایر (لاستیک) دوچرخه تبدیل می‌کنند.



ت) با توجه به این‌که همهٔ موادی که از طبیعت به دست می‌آیند، به شکلی به طبیعت برمی‌گردند، در نهایت جرم کل مواد در کرهٔ زمین **ثابت** است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر به ترتیب کدام است؟

- **پراکندگی توزیع برخی عنصرها در جهان، می‌تواند دلیلی بر پیدایش تجارت جهانی باشد.**
- **شیشه از شن و ماسه و نمک خوراکی از خشکی و دریا تأمین می‌شود.**
- **میزان تولید و استخراج مواد معدنی در چندین سال اخیر، بیشتر از سوخت‌های فسیلی و فلزها بوده است.**

۱) درست ـ درست ـ درست
۲) نادرست ـ نادرست ـ درست
۳) نادرست ـ درست ـ درست
۴) درست ـ درست ـ نادرست

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- عنصرها در جهان به طور یکسان توزیع نشده‌اند و همین موضوع می‌تواند دلیلی بر پیدایش تجارت جهانی باشد.
- کاملاً درسته! *دیگه چی بگم!*
- مقایسهٔ مقادیر استخراج سالانهٔ فلزها، مواد معدنی و سوخت‌های فسیلی به صورت زیر است:

مقایسهٔ مقادیر استخراج سالانه از کرهٔ زمین: مواد معدنی > سوخت‌های فسیلی > فلزها

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۳ کدام مورد دربارهٔ «جدول تناوبی عنصرها» نادرست است؟

۱) اغلب عنصرهایی که لایهٔ ظرفیت اتم آن‌ها مشابه است، در یک گروه قرار می‌گیرند.

۲) به طور کلی مجموع عدد اتمی عنصرهای فلزی، بیشتر از مجموع عدد اتمی عنصرهای نافلزی در جدول است.

۳) فلزهای دستهٔ d، همانند همهٔ عنصرهای دستهٔ s و p، چکش‌خوارند و قابلیت ورقه‌شدن دارند.

۴) با بررسی رفتار عناصر در جدول، می‌توان به روندها و الگوهای موجود در خواص آن‌ها پی برد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

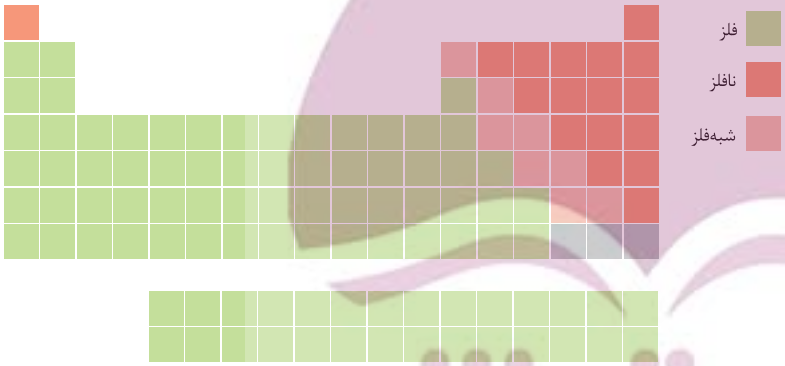
پاسخ خیلی تشریحی ✔ چکش‌خواربودن و قابلیت ورقه‌شدن از جمله ویژگی‌های «فلزها» است، اما توجه داشته باشید که فقط **فلزهای** دستهٔ s و p این ویژگی را دارا هستند؛ نه همهٔ عنصرهای این دسته!

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به این‌که در این گزینه از کلمهٔ «اغلب» استفاده شده است، این عبارت *کاملاً درسته!* زیرا به‌جز $_{2}He$ در گروه ۱۸، عنصرهایی که آرایش الکترونی لایهٔ ظرفیت اتم آن‌ها مشابه است، در یک گروه قرار می‌گیرند.

گزینهٔ (۲): بیشتر عنصرهای جدول تناوبی را فلزها تشکیل می‌دهند، فلزها در هر چهار دستهٔ s، p، d و f قرار دارند و تعداد آن‌ها بسیار بیشتر از تعداد عنصرهای نافلزی و شبه‌فلزی جدول تناوبی است.

ترتیب فراوانی عنصرها در جدول دوره‌ای: شبه‌فلز (فقط در دستهٔ p قرار دارند.) < نافلز (در دستهٔ s، p قرار دارند.) < فلز (در هر چهار دستهٔ s، p، d و f قرار دارند.)



گزینهٔ (۴): *متن کتاب درسیه!*

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۴ **کدام دو عنصر، از نظر ویژگی رسانایی الکتریکی متفاوت هستند، اما رفتار شیمیایی مشابهی دارند؟**

۱) ${}_{11}A$ و ${}_{82}D$

۲) ${}_{9}G$ و ${}_{12}E$

۳) ${}_{16}M$ و ${}_{32}Z$

۴) ${}_{35}L$ و ${}_{15}Q$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ${}_{16}M$ و ${}_{32}Z$ به ترتیب عنصرهای گوگرد (${}_{16}S$) و ژرمانیم (${}_{32}Ge$) هستند که هر دو رفتار شیمیایی مشابهی دارند، اما از نظر رسانایی الکتریکی، گوگرد نافلزی نارسانا و ژرمانیم، شبه‌فلزی رسانا است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): ${}_{11}A$ و ${}_{82}D$ به ترتیب فلزهای سدیم (${}_{11}Na$) و سرب (${}_{82}Pb$) بوده و رفتار شیمیایی مشابهی دارند. در ضمن هر دو فلز رسانای خوب جریان الکتریکی هستند.

گزینهٔ (۲): ${}_{9}G$ و ${}_{12}E$ به ترتیب نافلز فلوئور (${}_{9}F$) و فلز منیزیم (${}_{12}Mg$) بوده که هم از نظر رسانایی و هم از نظر شیمیایی، با هم متفاوت‌اند.

گزینهٔ (۴): ${}_{35}L$ و ${}_{15}Q$ به ترتیب نافلزهای برم (${}_{35}Br$) و فسفر (${}_{15}P$) بوده که از هر دو نظر، یعنی رفتار شیمیایی و نارسایی جریان الکتریکی، مشابه هستند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۵ **اگر قطر یک اتم منیزیم برابر با ۳۲۰ پیکومتر باشد، شعاع اتمی کلسیم برحسب پیکومتر کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۱۶۰
۲) ۱۵۲
۳) ۱۹۷
۴) ۳۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

در یک دوره از چپ به راست ← با بیشترشدن عدد اتمی عنصرها، نیروی جاذبهٔ هسته افزایش و شعاع اتمی کاهش می‌یابد.

در یک گروه از بالا به پایین ← با بیشترشدن عدد اتمی عنصرها، نیروی جاذبهٔ هسته افزایش، اما شعاع اتمی هم افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی

شعاع اتمی منیزیم نصف قطر آن است:

$$\text{شعاع اتمی Mg} = \frac{۳۲۰}{۲} = ۱۶۰\ \text{pm}$$

منیزیم و کلسیم در یک گروه از جدول تناوبی قرار دارند؛ با توجه به این‌که در یک گروه از بالا به پایین شعاع اتمی افزایش می‌یابد، شعاع اتمی کلسیم باید بزرگ‌تر از شعاع اتمی منیزیم باشد؛ بنابراین تا این‌جا گزینه‌های (۱) و (۲) پَررر!

با توجه به اعداد شعاع اتمی در کتاب درسی و اختلاف میان آن‌ها، تفاوت شعاع اتمی دو عضو متوالی در یک گروه از جدول تناوبی حداکثر ۵۰ پیکومتر خواهد بود و گزینهٔ (۴) هم پَررر! تنها عدد قابل‌قبول، ۱۹۷ پیکومتر است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۶ پنج عنصر نخست گروه ۱۴ جدول تناوبی، در کدام ویژگی زیر مشترک هستند؟

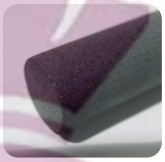
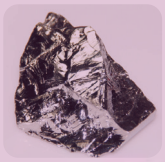
۱) داشتن سطح صیقلی و براق
۲) حالت فیزیکی در دمای اتاق
۳) داشتن رسانایی الکتریکی بالا
۴) تمایل به از دست دادن الکترون

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته **عنصرهای گروه ۱۴ جدول تناوبی:**

آرایش الکترونی اتم عنصرهای گروه ۱۴ به ns^2np^2 ختم می‌شود؛ یعنی اتم همهٔ عنصرهای این گروه در لایهٔ ظرفیت خود، ۴ الکترون دارند. در جدول زیر خواص و ویژگی‌های ۵ عنصر اول این گروه را می‌بینید:

راستی! در این‌جا خواصی که در مورد کربن گفته می‌شود، مربوط به دگرشکل گرافیت است.

نام و نماد عنصر	شکل ظاهری	خواص
کربن ($_{۶}C$)		در دورهٔ دوم جدول تناوبی قرار دارد و نافلز است. سطح این عنصر، تیره است و در اثر ضربه خرد می‌شود. رسانایی الکتریکی دارد، اما رسانایی گرمایی ندارد. در واکنش با دیگر اتم‌ها فقط می‌تواند الکترون به اشتراک بگذارد.
سیلیسیم ($_{۱۴}Si$)		در دورهٔ سوم جدول تناوبی قرار دارد و شبه‌فلز است. سطح صیقلی (براق) دارد و شکننده است و در اثر ضربه خرد می‌شود. رسانایی الکتریکی کمی داشته، اما رسانایی گرمایی نسبتاً بالایی دارد. در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون به اشتراک می‌گذارد.
ژرمانیم ($_{۳۲}Ge$)		در دورهٔ چهارم جدول تناوبی قرار دارد و شبه‌فلز است. سطح صیقلی (براق) دارد و شکننده است و در اثر ضربه خرد می‌شود. رسانایی الکتریکی کمی داشته، اما رسانایی گرمایی نسبتاً بالایی دارد. در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون به اشتراک می‌گذارد.
قلع ($_{۵۰}Sn$)		در دورهٔ پنجم جدول تناوبی قرار دارد و فلز است. سطح صیقلی دارد و جامدی شکل‌پذیر یا چکش‌خوار است. رسانایی الکتریکی و گرمایی بالایی دارد. در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون از دست می‌دهد.
سرب ($_{۸۲}Pb$)		در دورهٔ ششم جدول تناوبی قرار دارد و فلز است. سطح صیقلی دارد و جامدی شکل‌پذیر یا چکش‌خوار است. رسانایی الکتریکی و گرمایی بالایی دارد. در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون از دست می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی همهٔ عنصرهای گروه ۱۴ در دما و فشار اتاق به حالت جامدند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): کربن (به شکل گرافیت)، سطحی تیره دارد.

گزینهٔ (۳): شبه‌فلزهای سیلیسیم و ژرمانیم، رسانایی الکتریکی کمی دارند.

گزینهٔ (۴): فلزها تمایل به از دست دادن الکترون دارند. در گروه ۱۴، نافلز کربن و شبه‌فلزهای سیلیسیم و ژرمانیم، تمایل به اشتراک الکترون دارند.

تـوشـه‌ای بـرای مـوفـقـیـت

۶۷ **براساس قانون دوره‌ای عنصرها، خواص ..... عنصرها به صورت دوره‌ای تکرار می‌شود و در هر ..... با افزایش عدد اتمی، ..... افزایش می‌یابد. (بدون در نظرگرفتن گاز نجیب)**

۱) فیزیکی و شیمیایی ـ گروه ـ تمایل به از دست دادن الکترون همانند تعداد الکترون‌های ظرفیت

شعاع اتمی ۲) فیزیکی ـ گروه ـ تمایل به از دست دادن الکترون همانند تعداد الکترون‌های ظرفیت

نافلزها برخلاف شعاع اتمی ۳) فیزیکی و شیمیایی ـ دوره ـ واکنش‌پذیری نافلزها برخلاف

۴) فیزیکی ـ دوره ـ واکنش‌پذیری

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مطابق قانون دوره‌ای عنصرها، خواص **فیزیکی و شیمیایی** عنصرها به صورت دوره‌ای در جدول تناوبی تکرار می‌شود. (رد گزینه‌های (۲) و (۴)).

در هر گروه از جدول تناوبی، با افزایش عدد اتمی یعنی از بالا به پایین، شعاع اتمی و تمایل اتم‌ها برای از دست دادن الکترون افزایش می‌یابد، اما تعداد الکترون‌های ظرفیت عنصرهای هر گروه، ثابت است و تغییری نمی‌کند. (رد گزینهٔ (۱))

در هر دوره با افزایش عدد اتمی یعنی از چپ به راست جدول تناوبی، شعاع اتمی کاهش می‌یابد، اما خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۸ با توجه به جدول زیر (بخشی از جدول تناوبی)، کدام مورد نادرست است؟

گروه / دوره	۱	۲	۱۵	۱۶
۲	Y	E	M	
۳	X	G	D	Z
۴	Q			

مشاوره در پاسخ به این سؤال، اگر نکتهٔ موجود در گزینهٔ چهارم رو نمی‌دونستین یا یادتون نبود، کافی بود که سه گزینهٔ اول که گزینه‌های راحتی هستند رو بررسی می‌کردین و سریع به پاسخ می‌رسیدین!

۱) شعاع اتمی Y از M بزرگ‌تر، اما از X کوچک‌تر است.

۲) تفاوت شعاع اتمی عنصرهای X و G، بیشتر از تفاوت شعاع اتمی عنصرهای D و Z است.

۳) انرژی نور نشرشده در واکنش گاز کلر با عنصر Q، بیشتر از انرژی نور نشرشده در واکنش گاز کلر با عنصر X است.

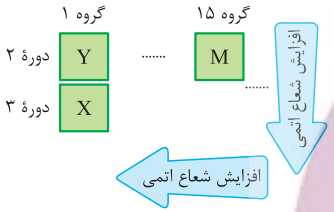
۴) شمار الکترون‌های مبادله‌شده هنگام تشکیل هر واحد فرمولی از واکنش M با Q، دو برابر این تعداد در واکنش M با G است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): می‌دانیم که در هر گروه از بالا به پایین و در هر دوره از راست به چپ شعاع اتمی عناصر افزایش می‌یابد؛ بنابراین شعاع اتمی Y بزرگ‌تر از M است و شعاع اتمی X که با Y در یک گروه قرار دارند، بزرگ‌تر از Y است.

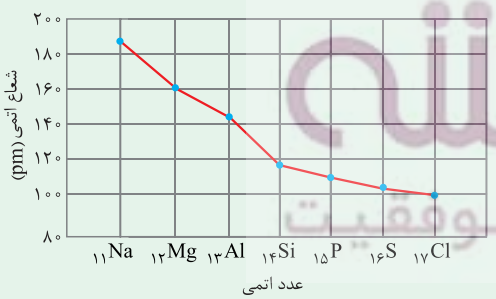


گزینهٔ (۲): به طور کلی تفاوت بین شعاع اتمی فلزهای متوالی دورهٔ سوم (G, X)، بیشتر از تفاوت شعاع اتمی نافلزهای متوالی این دوره (D, Z) است؛ بنابراین:

تفاوت شعاع اتمی: $X , G > D , Z$

نکته

نمودار زیر روند کاهش شعاع اتمی عنصرها در دورهٔ سوم جدول دوره‌ای را نشان می‌دهد:



شعاع اتمی در دورهٔ سوم: $Na > Mg > Al > Si > P > S > Cl$

به طور کلی، تفاوت بین شعاع اتمی نافلزهای متوالی دورهٔ سوم، کم‌تر از تفاوت بین شعاع اتمی فلزهای متوالی این دوره است. مثلاً تفاوت شعاع اتمی $_{16}S$ و $_{17}Cl$، کم‌تر از این تفاوت در $_{11}Na$ و $_{12}Mg$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گزینهٔ (۳): X و Q به ترتیب عنصرهای $_{11}Na$ و $_{19}K$ هستند. در واکنش گاز کلر با عنصرهای $_{11}Na$ و $_{19}K$، نور حاصل به ترتیب زرد و بنفش‌رنگ خواهد بود. با توجه به این‌که طول موج نور بنفش، کوتاه‌تر از طول موج نور زرد است؛ بنابراین انرژی نور بنفش بیشتر از انرژی نور زرد است.

انرژی نور: بنفش > زرد

گزینهٔ (۴): عنصرهای Q، G و M به ترتیب در گروه‌های ۱، ۲ و ۱۵ قرار دارند و یون‌های Q^+، G^{2+} و M^{3-} را تشکیل می‌دهند:

$$Q_3M \Rightarrow e^- = 3\times1 = 3$$

$$G_3M_2 \Rightarrow e^- = 3\times2 = 6$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۹ کدام مورد، **نادرست** است؟

۱) هر فلز رفتار ویژهٔ خود را دارد، اما فلزها از نظر رفتار کلی مشابه یکدیگر هستند.

۲) اغلب عنصرهای نافلزی در دستهٔ p جدول دوره‌ای قرار دارند.

۳) آخرین زیرلایهٔ الکترونی اشغال‌شده در اتم همهٔ شبه‌فلزهای جدول تناوبی، دارای $l=1$ است.

۴) همهٔ عنصرهای دستهٔ s جدول تناوبی با تشکیل کاتیون، به آرایش گاز نجیب دورهٔ پیش از خود می‌رسند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

هر سه عنصر زیر متعلق به دستهٔ s جدول تناوبی هستند:

- هیدروژن ($_1H$) ← با فرض تشکیل کاتیون، گاز نجیبی پیش از آن وجود ندارد!
- هلیم ($_2He$) ← گازی واکنش‌ناپذیر است.
- بریلیم ($_4Be$) ← فلزی که تمایل به تشکیل کاتیون ندارد!

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *عین متن کتابه!*

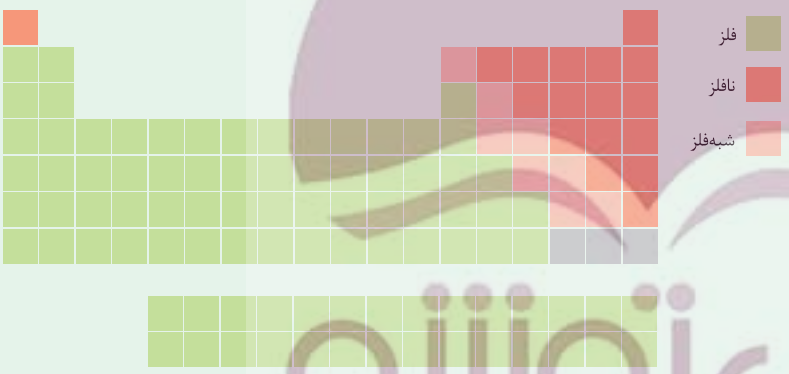
گزینهٔ (۲): به‌جز هیدروژن ($_1H$) و هلیم ($_2He$) که متعلق به دستهٔ s جدول تناوبی هستند، بقیهٔ نافلزهای جدول در دستهٔ p قرار دارند.

گزینهٔ (۳): همهٔ شبه‌فلزها در دستهٔ p قرار دارند و عدد کوانتومی فرعی (l) برای آخرین زیرلایهٔ الکترونی اشغال‌شده در اتم همهٔ آن‌ها برابر با ۱ است.

نکته

شبه فلزها:

- همهٔ شبه‌فلزها به دستهٔ p جدول دوره‌ای تعلق دارند. **این عنصرها در جدول دوره‌ای همانند مرزی بین فلزها و نافلزها قرار دارند.**



- عنصرهایی که در سمت راست این شبه‌فلزها قرار گرفته‌اند، نافلز و عنصرهایی که در سمت چپ این شبه‌فلزها قرار گرفته‌اند، فلز هستند (البته به‌جز هیدروژن که یک نافلز است).
- *بدانید و آگاه باشید!* که در هر دوره (به‌جز دورهٔ اول که شامل H و He است و دورهٔ هفتم که چند عنصر با ویژگی‌های نامشخص دارد!) حداقل یک عنصر شبه‌فلز وجود دارد.

ایران توانا
تو شبه‌ای برای موفقیت

۷۰ **عنصر X هالوژنی است که مولکول آن می‌تواند در دمای ۱۰۰ K با گاز هیدروژن واکنش دهد. کدام مورد دربارهٔ آن درست است؟**

۱) با عنصر $_{۴}D$ هم‌دوره و با عنصر $_{۳۴}M$ هم‌گروه است.

۲) اتم آن دارای ۱۱ الکترون با $l=۱$ است.

۳) نقطهٔ جوش آن $(X_۲)$ نسبت به فراوردهٔ واکنش، کم‌تر است.

۴) در ترکیب HX، یون هالید وجود دارد که آرایش الکترونی آن مشابه با گاز نجیب هم‌دورهٔ آن است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

نکته

جدول زیر شرایط واکنش هالوژن‌ها را با گاز $H_۲$ نمایش می‌دهد:

نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلوئور	حتی در دمای $-۲۰۰\ ^\circ C$ به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم	در دمای $۲۰۰\ ^\circ C$ واکنش می‌دهد.
ید	در دمای بالاتر از $۴۰۰\ ^\circ C$ واکنش می‌دهد.

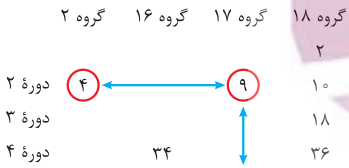
در دمای $-۱۷۳\ ^\circ C\ (-۱۷۳+۲۷۳=۱۰۰\ K)$، فقط فلوئور با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

$$H_۲(g)+F_۲(g)\rightarrow ۲HF(g)$$

نقطهٔ جوش $F_۲$ نسبت به HF پایین‌تر است، زیرا هم ناقطبی است و هم برخلاف HF، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): فلوئور $(_۹F)$، مانند $_۴D$ (بریلیم) در دورهٔ دوم قرار دارد، اما با $_{۳۴}M$ (سلنیم) هم‌گروه نیست.



گزینهٔ (۲):

$$_۹F: ۱s^۲\ ۲s^۲\ \underbrace{۲p^۵}_{\text{۵ الکترون با } l=۱}$$

گزینهٔ (۴): در ترکیب HF، اتم فلوئور با اشتراک الکترون، به آرایش هشت‌تایی رسیده است و به یون فلوئورید (F^-) تبدیل نشده است! به طور کلی، هالوژن‌ها در واکنش با فلزها به یون هالید (X^-) تبدیل شده و به آرایش الکترونی گاز نجیب پس از خود می‌رسند.

$$_۹F^-: ۱s^۲\ ۲s^۲\ ۲p^۶$$

۷۱ با توجه به شکل‌های زیر که سه عنصر واکنش‌پذیر از دورهٔ سوم جدول تناوبی را نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟


(C)


(B)


(A)

۱) نقش آب در ظرف حاوی دگرشکل (A)، همانند نقش آنزیم در بدن انسان است.

۲) ویژگی‌های مشترک عنصرهای A و C، بیشتر از ویژگی‌های مشترک بین A و سیلیسیم است.

۳) جلای نقره‌ای عنصر B در مجاورت هوا به کندی از بین می‌رود و سطح آن کدر می‌شود.

۴) عدد اتمی هر سه عنصر با شمارهٔ گروه آن‌ها در جدول تناوبی برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔

با توجه به شکل‌های صفحهٔ ۸ کتاب درسی، A، B و C به ترتیب فسفر، سدیم و کلر هستند.

می‌دانیم که سیلیسیم ($_{14}Si$) یک شبه‌فلز است؛ بنابراین ویژگی‌های مشترک بین دو نافلز فسفر و کلر، بیشتر از ویژگی‌های مشترک بین شبه‌فلز سیلیسیم و نافلز فسفر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): از علوم هشتم به یاد دارید که آنزیم‌ها نقش کاتالیزگر را دارند و باعث افزایش سرعت واکنش می‌شوند در حالی‌که فسفر سفید را به دلیل واکنش‌پذیری بالا، در زیر آب و نبود اکسیژن قرار می‌دهند؛ یعنی آب مانع از انجام واکنش با اکسیژن می‌شود و *بعداً می‌خوانید* که آب در این‌جا نقش **بازدارنده** را دارد.

گزینهٔ (۳): در حاشیهٔ صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی می‌خوانیم که جلای نقره‌ای فلز سدیم ($_{11}Na$) در مجاورت هوا **به سرعت** از بین می‌رود و کدر می‌شود.

گزینهٔ (۴): عنصرهای فسفر ($_{15}P$)، سدیم ($_{11}Na$) و کلر ($_{17}Cl$) به ترتیب در گروه‌های ۱۵، ۱ و ۱۷ قرار دارند؛ بنابراین عدد اتمی و شمارهٔ گروه برای دو عنصر فسفر و کلر یکسان است.

کتاب درسی

در شکل‌های زیر، عنصرهای دورهٔ سوم جدول دوره‌ای همراه با برخی ویژگی‌های آن‌ها نشان داده شده است. با بررسی آن‌ها به پرسش‌ها پاسخ دهید: *(شیمی (۲) ـ با هم بیندیشیم صفحه ۷ تا ۹ کتاب درسی)*


سدیم

منیزیم

آلومینیم


فسفر


گوگرد


کلر

- رسانایی گرمایی و الکتریکی بالایی دارند.
- در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون از دست می‌دهند.
- در اثر ضربه تغییر شکل می‌دهند، ولی خرد نمی‌شوند.
- سطح درخشانی دارند.

- جریان برق و گرما را عبور نمی‌دهند.
- در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون به اشتراک می‌گذارند یا می‌گیرند.
- در اثر ضربه خرد می‌شوند.
- سطح آن‌ها درخشان نبوده بلکه کدر است.

کدام عنصرها ویژگی‌های مشترک بیشتری با یکدیگر دارند (رفتارهای فیزیکی و شیمیایی آن‌ها شبیه هم هستند)؟

روند تغییر خصلت فلزی و نافلزی در دورهٔ سوم جدول را بررسی کنید.

۷۲ اگر آرایش الکترونی یون‌های A^+، B^- و C^{3-} به ترتیب به $2p^6$، $3p^6$ و $3p^6$ ختم شود، کدام گزینه دربارهٔ مقایسهٔ شعاع اتمی این عنصرها درست است؟

۱) $A > C > B$
۲) $A > B > C$
۳) $C > B > A$
۴) $B > C > A$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

ابتدا باید از آرایش یون‌ها به اتم خنثی برسیم:

اتم A، یک الکترون نسبت به A^+ بیشتر دارد؛ بنابراین:

$$A^+ : 1s^2, 2s^2 2p^6 \xrightarrow{+1e^-} A : 1s^2, 2s^2 2p^6, 3s^1 \Rightarrow {}_{11}Na$$

اتم B، یک الکترون نسبت به B^- کم‌تر دارد؛ بنابراین:

$$B^- : 1s^2, 2s^2 2p^2, 3s^2 3p^6 \xrightarrow{-1e^-} B : 1s^2, 2s^2 2p^6, 3s^2 3p^5 \Rightarrow {}_{17}Cl$$

اتم C، سه الکترون نسبت به C^{3-} کم‌تر دارد؛ بنابراین:

$$C^{3-} : 1s^2, 2s^2 2p^6, 3s^2 3p^6 \xrightarrow{-3e^-} C : 1s^2, 2s^2 2p^6, 3s^2 3p^3 \Rightarrow {}_{15}P$$

هر سه عنصر در دورهٔ سوم جدول تناوبی قرار دارند، با توجه به این‌که با افزایش عدد اتمی در هر دوره شعاع اتمی کاهش می‌یابد، خواهیم داشت:

$$\underset{A}{{}_{11}Na} > \underset{C}{{}_{15}P} > \underset{B}{{}_{17}Cl}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۳ تفاوت شمار عنصرهای دستهٔ s و p جدول تناوبی، دو برابر عدد اتمی ..... است.

$۳۶ - ۱۴ = ۲۲$

۱) دومین فلز قلیایی ← $_{۱۱}Na$

۲) اولین فلز قلیایی خاکی ← $_{۴}Be$

۳) دومین فلز قلیایی خاکی ← $_{۱۲}Mg$

۴) اولین فلز قلیایی ← $_{۳}Li$

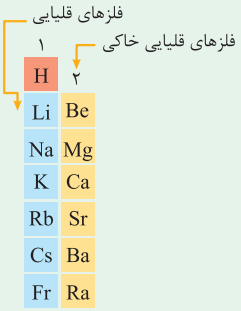
پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته

فلزهای قلیایی و قلیایی خاکی به ترتیب در گروه‌های ۱ و ۲ جدول تناوبی قرار دارند و عدد اتمی آن‌ها ۱ و ۲ واحد بیشتر از گاز نجیب دورهٔ قبل است.

گروه ۱ ← $_{۳}Li$, $_{۱۱}Na$, $_{۱۹}K$, $_{۳۷}Rb$, $_{۵۵}Cs$, $_{۸۷}Fr$

گروه ۲ ← $_{۴}Be$, $_{۱۲}Mg$, $_{۲۰}Ca$, $_{۳۸}Sr$, $_{۵۶}Ba$, $_{۸۸}Ra$



پاسخ خیلی تشریحی

عنصرهای دستهٔ s جدول تناوبی در دوره‌های ۱ تا ۷ جدول (۷ دوره) و گروه‌های ۱، ۲ و عنصر $_{۲}He$ از گروه ۱۸ قرار دارند، که شامل دو ستون ۷تایی یا به عبارتی $۲ \times ۷ = ۱۴$ عنصر می‌شود.

عنصرهای دستهٔ p جدول تناوبی در دوره‌های ۲ تا ۷ جدول (۶ دوره) و گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ (۶ گروه) قرار دارند؛ بنابراین شامل $۶ \times ۶ = ۳۶$ عنصرند.

تفاوت شمار عنصرهای دستهٔ s و p $= ۳۶ - ۱۴ = ۲۲$

همان‌طورکه می‌بینید، حاصل این تفاوت، دو برابر عدد اتمی دومین فلز قلیایی، یعنی سدیم ($_{۱۱}Na$) است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۴ **توصیف زیر نشان‌دهندهٔ یکی از عنصرهای جدول تناوبی عنصرهاست. کدام ویژگی در مورد آن عنصر درست است؟**

«عنصری از دستهٔ p که شمار الکترون‌های ظرفیت آن، برابر مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های نخستین فلز جدول تناوبی عنصرها است و تفاوت عدد اتمی آن با آخرین فلز دورهٔ چهارم جدول، برابر ۱۹ است.»

$_{3}Li$ ← نخستین فلز جدول تناوبی

$_{31}Ga$ ← آخرین فلز دورهٔ چهارم جدول

۱) در دورهٔ خود، همانند مرزی بین یک فلز و یک نافلز قرار گرفته است.

۲) نخستین فلز گروه ۱۴ جدول تناوبی است.

۳) نافلزی جامد و زردرنگ است که در اثر ضربه خرد می‌شود.

۴) اتم آن دارای ۱۴ الکترون با $l=1$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

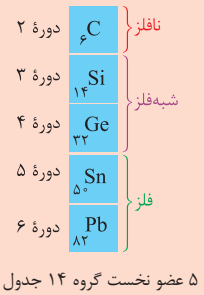
نخستین فلز جدول تناوبی، لیتیم ($_{3}Li$) است: $_{3}Li: 1s^{2}, 2s^{1} \Rightarrow$ الکترون $(n+l)=2(1+0)+1(2+0)=4$

پس عنصر مورد نظر در گروه ۱۴ جدول تناوبی و ۴ الکترون ظرفیت دارد $\Leftarrow ns^{2}np^{2}$.

آخرین فلز دورهٔ چهارم جدول تناوبی، گالیم ($_{31}Ga$) است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$Z-31=19 \Rightarrow Z=50$$

پس عنصر مورد نظر قلع ($_{50}Sn$)، نخستین فلز گروه ۱۴ جدول تناوبی است.



۵ عضو نخست گروه ۱۴ جدول

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): شبه‌فلزها همانند مرزی بین فلزها و نافلزها قرار دارند، در صورتی که قلع یک فلز است.

گزینهٔ (۳): گوگرد ($_{16}S$) نافلزی جامد و زردرنگ است که چکش‌خوار نیست.

گزینهٔ (۴): با توجه به آرایش الکترونی ظرفیت عنصرهای گروه ۱۴ و این‌که قلع در دورهٔ پنجم جدول تناوبی قرار دارد، می‌توان تعداد الکترون‌های موجود در زیرلایه‌های p $(l=1)$ را بدون نوشتن کامل آرایش الکترونی، خیلی سریع حساب کرد:

$$_{50}Sn \Rightarrow \text{آرایش الکترونی لایهٔ ظرفیت} = ns^{2}np^{2} \Rightarrow \text{دورهٔ ۵} = 5s^{2}5p^{2} \xrightarrow[(p)]{\text{زیرلایه‌های با } l=1} 2p^{6}3p^{6}4p^{6}5p^{2} \Rightarrow \text{الکترون ۲۰}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

کنکور

توصیف زیر نشان‌دهندهٔ یکی از عنصرهای جدول تناوبی عنصرهاست. کدام ویژگی در مورد آن عنصر درست است؟

«عنصری از دستهٔ p که شمار الکترون‌های ظرفیت اتم آن، برابر مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های دومین فلز جدول تناوبی عنصرها است و تفاوت عدد اتمی آن با یون فلزی موجود در ساختار صابون جامد برابر ۵ است.»

۱) نافلزی جامد و زردرنگ که جریان برق و گرما را عبور نمی‌دهد. *(سؤال ۸۷ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)*

۲) نافلزی که قوی‌ترین اکسندهٔ موجود در جدول تناوبی است.

۳) گازی زردرنگ که قوی‌ترین نافلز دورهٔ خود در جدول تناوبی است.

۴) ۵ درصد حجمی از مخلوط گازی که در پرکردن تایر خودرو استفاده می‌شود.

۷۵ **کدام ویژگی مربوط به عنصری از دورهٔ دوم جدول تناوبی است که پس از گاز نجیب آن دوره، کم‌ترین واکنش‌پذیری را دارد؟**

${}_{6}C$

۱) جریان برق و گرما را عبور نمی‌دهد.

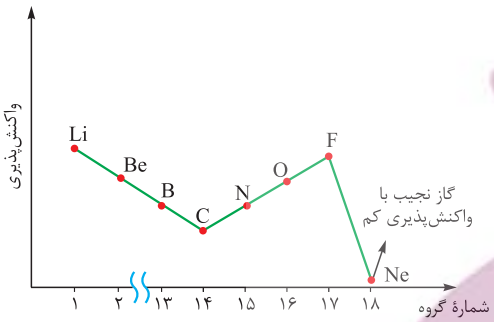
۲) در اثر ضربه تغییر شکل می‌دهد، ولی خرد نمی‌شود.

۳) کوچک‌ترین شعاع اتمی را در میان نافلزهای آن دوره دارد.

۴) یون تک‌اتمی پایدار از آن شناخته نشده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اول نمودار واکنش‌پذیری عنصرهای دورهٔ دوم که در تمرین‌های دوره‌ای اومده رو ببینیم:



همان‌طور که می‌بینید بعد از نئون (${}_{10}Ne$) که واکنش‌پذیری ناچیزی دارد، کربن کم‌ترین واکنش‌پذیری را در بین عنصرهای دورهٔ دوم دارد.

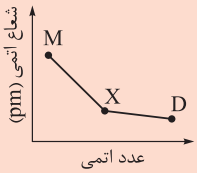
از کربن تاکنون هیچ یون تک‌اتمی پایدار شناخته نشده است.

در ضمن کربن به شکل گرافیت رسانایی الکتریکی خوبی دارد، در اثر ضربه خرد می‌شود و بزرگ‌ترین شعاع اتمی را در میان نافلزهای هم‌دورهٔ خود دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۶ نمودار زیر، تغییرات شعاع اتمی برخی عنصرهای واکنش‌پذیر دورهٔ سوم جدول تناوبی را نشان می‌دهد. اگر X، شبه‌فلز باشد، کدام مورد نادرست است؟ (عنصرها لزوماً متوالی نیستند.)

$_{14}Si$



۱) رسانایی الکتریکی X از D بیشتر، اما از M به یقین کم‌تر است.

۲) تعداد الکترون‌های ظرفیت اتم X، از تعداد الکترون‌های زیرلایهٔ آخر اتم‌های D و M به ترتیب کم‌تر و بیشتر است.

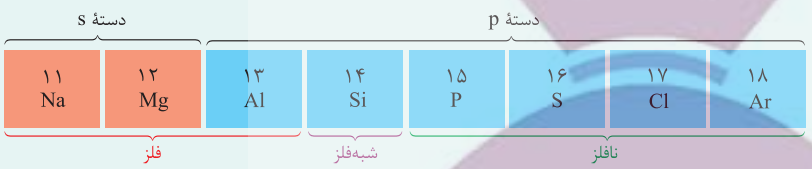
۳) از واکنش D با X و M به ترتیب می‌تواند ترکیباتی با فرمول XD_4 و MD تشکیل شود.

۴) نماد شیمیایی عنصرهای X و M، دوحرفی، اما نماد شیمیایی D می‌تواند دو یا تک‌حرفی باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) آشنایی با عنصرهای دورهٔ سوم:



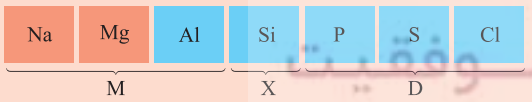
- این دوره شامل ۸ عنصر است.
- از میان این ۸ عنصر، ۳ عنصر ابتدایی (دو عنصر دستهٔ s و یک عنصر دستهٔ p) فلز بوده، عنصر چهارم آن‌که متعلق به گروه ۱۴ جدول است، شبه‌فلز بوده و ۴ عنصر باقی‌مانده نافلزند.
- در دما و فشار اتاق، حالت فیزیکی ۶ عنصر ابتدایی این دوره جامد بوده و حالت فیزیکی دو عنصر آخر آن (هالوژن کلر و گاز نجیب آرگون)، گاز است.
- از بین ۶ عنصر جامد این دوره، عناصر فلزی Na، Mg و Al به همراه شبه‌فلز Si، دارای سطح براق و صیقلی هستند، ولی تنها سه عنصر فلزی آن چکش‌خوار هستند و در اثر ضربه خرد نمی‌شوند. (شبه‌فلز Si و نافلزهای جامد P و S در اثر ضربه خرد می‌شوند.)

۲) روند تغییر شعاع اتمی و خصلت فلزی و نافلزی عناصر یک دورهٔ جدول دوره‌ای:

در یک دوره از چپ به راست ← • شعاع اتمی عناصر کاهش • خاصیت فلزی کاهش • خاصیت نافلزی افزایش ← عنصرهای ابتدای هر دوره، خاصیت فلزی بیشتر و عنصرهای انتهای هر دوره (بدون در نظر گرفتن گاز نجیب) خاصیت نافلزی بیشتر دارند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر X، سیلیسیم ($_{14}Si$) باشد، M می‌تواند یکی از فلزها و D می‌تواند یکی از نافلزهای این دوره باشد، ببینید:



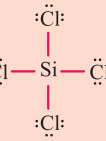
توجه داشته باشید که گاز نجیب آرگون ($_{18}Ar$)، عنصری واکنش‌پذیر نیست و با توجه به سؤال، *کاری باهاش نداریم!*

سیلیسیم ($_{14}Si$)، ۴ الکترون ظرفیت دارد. هر یک از فلزهای $_{11}Na$، $_{12}Mg$ و $_{13}Al$ به ترتیب ۱، ۲ و ۱ الکترون در زیرلایهٔ آخر خود دارند و از تعداد الکترون‌های ظرفیت $_{14}Si$ کم‌تر است، اما در نافلزهای $_{15}P$، $_{16}S$ و $_{17}Cl$ به ترتیب ۳، ۴ و ۵ الکترون در زیرلایهٔ آخر خود دارند که به ترتیب کم‌تر، برابر و بیشتر از تعداد الکترون‌های ظرفیت $_{14}Si$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): شبه‌فلزها، رسانایی الکتریکی و گرمایی دارند، اما این رسانایی از نافلزها بیشتر و از فلزها کم‌تر است.

گزینهٔ (۳): اگر D را نافلز کلر ($_{17}Cl$) و M را فلز سدیم ($_{11}Na$) در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

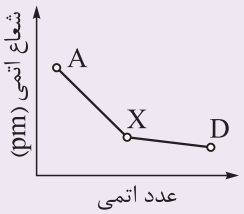
$_{14}Si , _{17}Cl \rightarrow$  سیلیسیم‌تتراکلرید $SiCl_4$ یا

$_{11}Na , _{17}Cl \rightarrow NaCl$ سدیم‌کلرید

گزینهٔ (۴): نماد شیمیایی هر سه فلز ابتدایی دورهٔ سوم همانند سیلیسیم ($_{14}Si$)، دو حرفی اما نافلزهای این دوره مانند فسفر ($_{15}P$) و گوگرد ($_{16}S$) تک‌حرفی و عنصر کلر ($_{17}Cl$)، دوحرفی است.

کنکور

با توجه به نمودار داده شده که تغییر شعاع اتمی عنصرهای واکنش‌پذیر دورهٔ سوم جدول تناوبی با عدد اتمی را نشان می‌دهد، اگر X، شبه فلز باشد، کدام مورد درست است؟ *(سؤال ۸۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))*



۱) با افزایش عدد اتمی، واکنش‌پذیری و خصلت نافلزی افزایش می‌یابد.

۲) بیشترین جاذبهٔ هسته بر الکترون‌های ظرفیت، مربوط به گاز نجیب D است.

۳) نسبت شمار الکترون‌های ظرفیت اتم D به X، کوچک‌تر از همین نسبت در اتم X به A است.

۴) در شرایط مناسب، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در ترکیب حاصل از واکنش X و D، بیشتر از همین شمار در ترکیب حاصل از واکنش A و D است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۷ اگر تفاوت شمار الکترون‌ها و نوترون‌ها در یون $^{۸۸}X^{۲+}$، برابر ۱۴ باشد، شمار نوترون‌های آن چند واحد با شمار پروتون‌های نخستین فلز گروه ۱۴ جدول تناوبی، تفاوت دارد؟

$_{۵۰}Sn$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا باید عنصر X را شناسایی کنیم:

$$^{۸۸}X^{۲+}\begin{cases}n+p=۸۸\\n-e=۱۴\\e=p-۲\end{cases}\Rightarrow n-p=۱۲\Rightarrow\begin{cases}n+p=۸۸\\n-p=۱۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=۳۸\\n=۵۰\end{cases}$$

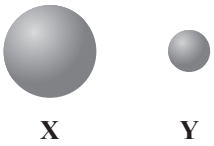
یه‌جور دیگه به کمک فرمول هم می‌توان سریع‌تر عدد اتمی رو پیدا کرد:

$$Z=\frac{A-(\text{تفاوت شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها})+\text{بار یون با علامت}}{۲}=\frac{۸۸-۱۴+۲}{۲}=۳۸$$

یون $^{۸۸}_{۳۸}X^{۲+}$ دارای $۵۰=۳۸-۸۸$ نوترون است که با شمار پروتون‌های اولین فلز گروه ۱۴ $(_{۵۰}Sn)$ برابر است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۸ **با توجه به شکل‌های زیر که شعاع اتمی نسبی دو عنصر X و Y را نشان می‌دهد، کدام مورد به یقین درست است؟**



۱) اگر عنصر X یک شبه‌فلز باشد، Y می‌تواند نافلز یا فلز هم‌دورهٔ آن باشد.

۲) اگر عنصر Y یک شبه‌فلز باشد، X می‌تواند نافلز هم‌گروه آن باشد.

۳) اگر عنصر X، نافلز مایع جدول در دمای اتاق باشد، Y می‌تواند گاز واکنش‌پذیر هم‌گروه آن باشد.

۴) اگر عنصر Y، هشتمین عنصر دستهٔ p باشد، X می‌تواند دومین عنصر دستهٔ p باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عنصر برم ($_{35}Br$) نافلز مایع در دمای اتاق از گروه ۱۷ جدول تناوبی است که نسبت به عنصرهای گازی هم‌گروه خود در موقعیت پایین‌تری در جدول قرار گرفته و شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد.

گروه ۱۷

F	گاز (Y)
Cl	
Br	مایع (X)
I	جامد

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): می‌دانیم که شبه‌فلزها همانند مرزی بین فلزها و نافلزها قرار دارند | نافلز | شبه‌فلز | فلز |، پس اگر (X) که شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد، یک شبه‌فلز باشد، Y با شعاع اتمی کوچک‌تر می‌تواند نافلز هم‌دورهٔ آن باشد و فلز هم‌دورهٔ آن قطعاً شعاع اتمی بزرگ‌تری از شبه‌فلز دارد و نمی‌تواند عنصر (Y) باشد!

گزینهٔ (۲): نافلزها در دوره‌های بالاتری نسبت به شبه‌فلزها در جدول تناوبی قرار دارند، به طوری که در یک گروه، نافلزها شعاع اتمی کوچک‌تری نسبت به شبه‌فلزها دارند؛ بنابراین شعاع اتمی نافلز باید از شعاع اتمی شبه‌فلز (Y) کوچک‌تر باشد.

گزینهٔ (۴): هشتمین و دومین عنصر دستهٔ p در جدول تناوبی به ترتیب سیلیسیم ($_{14}Si$) و کربن ($_{6}C$) هستند. با توجه به این‌که در یک گروه از بالا به پایین شعاع اتمی افزایش می‌یابد، شعاع اتمی سیلیسیم ($_{14}Si$) باید بزرگ‌تر از شعاع اتمی کربن ($_{6}C$) باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۹ با توجه به اطلاعات داده‌شده در مورد عنصرهای A تا C، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

A: دومین عنصر دورهٔ سوم که خاصیت شکنندگی دارد.

B: عنصری که لایهٔ دوم اتم آن نیمه‌پر است.

C: فلز قلیایی هم‌دوره با دومین شبه‌فلز گروه چهاردهم جدول تناوبی است.

الف) تعداد عنصرهای گازی دارای فعالیت شیمیایی میان دو عنصر B و C در جدول تناوبی، دو برابر تعداد عنصرهای فلزی میان این دو عنصر است.

ب) نسبت شمار الکترون‌ها با $l=1$ در اتم A به تعداد الکترون‌های لایهٔ دوم اتم B، برابر ۲/۲۵ است.

پ) در هر سه عنصر، شمار الکترون‌های ظرفیت اتم، برابر با مجموع شمار الکترون‌ها در بیرونی‌ترین لایهٔ اشغال‌شده است.

ت) تفاوت شمار عنصرهای دستهٔ s و p میان دو عنصر A و C برابر ۲ است.

۱) «الف» و «ب»
۲) «الف» و «ت»
۳) «ب» و «پ»
۴) «پ» و «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

ابتدا عنصرهای مورد نظر را پیدا می‌کنیم:

A: فسفر ($_{15}P$)، دومین عنصر از دورهٔ سوم است که خاصیت شکنندگی دارد.

۱۱ Na	۱۲ Mg	۱۳ Al	۱۴ Si	۱۵ P	۱۶ S	۱۷ Cl	۱۸ Ar
عنصرهای چکش‌خوار			عنصرهای شکننده				

B: لایهٔ دوم گنجایش حداکثر ۸ الکترون را دارد و در اتم کربن ($_6C$)، این لایه ۴ الکترونی بوده و نیمه‌پر است.

$_6C: 1s^2, 2s^2 2p^2$

C: پتاسیم ($_{19}K$)، فلز قلیایی است که با ژرمانیم ($_{32}Ge$) در یک دوره قرار دارند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) میان دو عنصر کربن ($_6C$) و پتاسیم ($_{19}K$)، ۴ عنصر گازی دارای فعالیت شیمیایی ($_{17}Cl$، $_9F$، $_8O$ و $_7N$) و ۳ عنصر فلزی ($_{13}Al$، $_{12}Mg$ و $_{11}Na$) وجود دارد.

ب) با توجه به عنصرهای فسفر ($_{15}P$) و کربن ($_6C$)، خواهیم داشت:

$$_{15}P: 1s^2, 2s^2 \underbrace{2p^6}, 3s^2 \underbrace{3p^3} \Rightarrow \text{۹ الکترون با } l=1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2/25$$

$$_6C: 1s^2, 2s^2 2p^2 \Rightarrow \text{۴ الکترون در لایهٔ دوم } (n=2)$$

پ) با توجه به این‌که هر ۳ عنصر، جزء عنصرهای دستهٔ s و p جدول تناوبی هستند، شمار الکترون‌های ظرفیت با شمار الکترون‌های بیرونی‌ترین لایهٔ اشغال‌شده برابر است.

$_{15}P: [_{10}Ne] \underbrace{3s^2 3p^3}_{\text{بیرونی‌ترین لایه}} \Rightarrow$ ۵ الکترون ظرفیت و ۵ الکترون در بیرونی‌ترین لایه

$_6C: [_2He] \underbrace{2s^2 2p^2}_{\text{بیرونی‌ترین لایه}} \Rightarrow$ ۴ الکترون ظرفیت و ۴ الکترون در بیرونی‌ترین لایه

$_{19}K: [_{18}Ar] \underbrace{4s^1}_{\text{بیرونی‌ترین لایه}} \Rightarrow$ ۱ الکترون ظرفیت و ۱ الکترون در بیرونی‌ترین لایه

ت) میان دو عنصر فسفر ($_{15}P$) و پتاسیم ($_{19}K$)، ۳ عنصر دستهٔ p ($_{18}Ar$، $_{17}Cl$ و $_{16}S$) وجود دارد و *خبری از عنصر دستهٔ s نیست!*

$3 - 0 = 3$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۸۰ **۲۳/۵ گرم مخلوطی از مولکول‌های فلوئور و کلر را در دمای $-۲۵\ ^\circ C$ با مقدار کافی گاز هیدروژن واکنش می‌دهیم. اگر پس از انجام کامل واکنش، جرم مخلوط اولیه، ۹/۵ گرم کاهش یابد، به ترتیب از راست به چپ، مقدار کلر در نمونه چند گرم بوده است و طی این فرایند، چند مول فراورده تولید شده است؟ $(F = ۱۹ , Cl = ۳۵/۵ : g.mol^{-۱})$**

۱) ۱۴ ـ ۰/۲۵
۲) ۱۴ ـ ۰/۵
۳) ۹/۵ ـ ۰/۲۵
۴) ۹/۵ ـ ۰/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در دمای $-۲۵\ ^\circ C$ تنها گاز فلوئور $(F_۲)$ با گاز هیدروژن $(H_۲)$ واکنش می‌دهد؛ بنابراین کاهش جرم مخلوط اولیه به دلیل واکنش گاز فلوئور با مقدار کافی گاز هیدروژن است:

$$\text{جرم فلوئور} = ۹/۵\ g$$

$$\text{جرم کلر} = ۲۳/۵ - ۹/۵ = ۱۴\ g$$

پس این‌جا جواب یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) خواهد بود.

بریم سراغ قسمت دوم سؤال:

با توجه به معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش انجام‌شده خواهیم داشت:

$$H_۲(g) + F_۲(g) \rightarrow ۲HF(g)$$

$$?\,mol\ HF = ۹/۵\ g\ F_۲ \times \frac{۱\ mol\ F_۲}{۳۸\ g\ F_۲} \times \frac{۲\ mol\ HF}{۱\ mol\ F_۲} = ۰/۵\ mol$$

یه‌جور دیگه

$$F_۲ \sim ۲HF$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{F_۲}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{HF}} \Rightarrow \frac{۹/۵}{۳۸} = \frac{x}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲ \times ۹/۵}{۳۸} = ۰/۵\ mol\ HF$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت