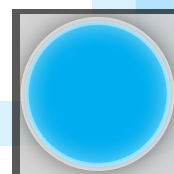




ایران توننه
توشه ای برای موفقیت



قانون احتمال کل

یادآوری

در پایه‌های قبل با مفهوم احتمال و برخی تعاریف مرتبط با آن آشنا شده‌اید. در زیر خلاصه‌ای از این مطالب آورده شده است.

۱- پدیده تصادفی: پدیده یا آزمایشی است که نتیج آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش بینی کرد.

۲- فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳- پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه ای S می‌نامیم.

۴- پیشامدها و اعمال روی آنها: فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد: پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

$$P(A') = 1 - P(A)$$

۵- رابطه محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت های ممکن}}$$

۶- رابطه محاسبه احتمال اجتماع دو پیشامد A و B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۷- پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ به بیان دیگر $A \cap B = \emptyset$ در این صورت داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۸- تعمیم پیشامدهای ناسازگار: پیشامدهای A_1 و A_2 و $\dots$ و A_n را دو به دو ناسازگار می‌گوییم، هرگاه هیچ دوتایی از آنها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

۹- احتمال شرطی: منظور از «احتمال A به شرط B » که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0)$$

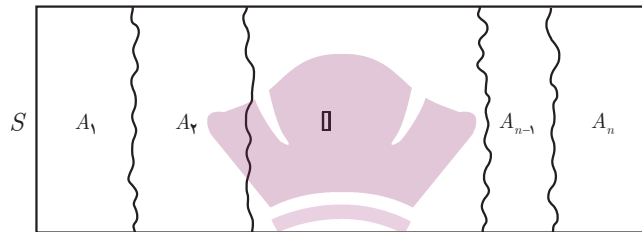
۱۰- پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B از هم مستقل اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B معادل است با اینکه $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

قانون احتمال کل

— افراز^۱ فرض کنیم A_1 و A_2 و $\dots$ و A_n زیر مجموعه‌هایی ناتهی از مجموعه‌ S باشند، به گونه‌ای که اجتماع همه آنها برابر S ، و اشتراک هر دوتای آنها برابر $\emptyset$ باشد، در این صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک افراز روی S درست کرده‌اند. به عبارتی داریم:

$$۱) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S \quad \left(\bigcup_{i=1}^n A_i = S \right)$$

$$۲) A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cap A_3 = \emptyset, \dots, A_{n-1} \cap A_n = \emptyset \quad (A_i \cap A_j = \emptyset, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j)$$

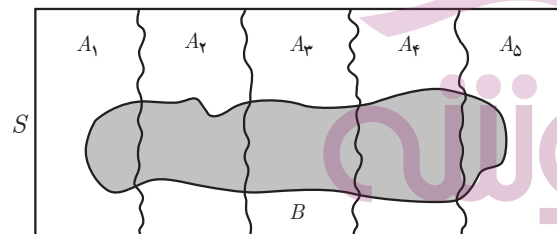


مثال: کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال: اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C = \{1\}$ باشند، در این صورت A ، B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی هستند.

مثال: مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

سؤال: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد و A_1 ، A_2 ، $\dots$ و A_n مانند آنچه گفته شد یک افراز روی S درست کنند. آیا پیشامدهای A_1 ، A_2 ، $\dots$ و A_n دو به دو ناسازگاراند؟ چرا؟ آیا امکان دارد هیچ کدام از پیشامدهای A_1 ، A_2 ، $\dots$ و A_n اتفاق نیفتند؟



فرض کنید پیشامدهای A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 و A_5 مانند شکل مقابل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S درست کرده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد. در این صورت داریم:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4) \cup (B \cap A_5)$$

که در آن $B \cap A_i$ و $B \cap A_j$ برای هر $i \neq j$ ناسازگاراند. چرا؟
بنابراین داریم^۲:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4) + P(B \cap A_5) = \sum_{i=1}^5 P(B \cap A_i)$$

اما از آنچه در احتمال شرطی مشاهده کردیم داریم:

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$$

۱- مفهوم افراز صرفاً جهت استفاده در قانون احتمال کل بیان شده است و طرح سؤال از آن در ارزشیابی مدنظر نیست.

۲- نماد $\sum$ که سیگما خوانده می‌شود برای نمایش جمع چند عبارت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

و بنابراین رابطه زیر حاصل خواهد شد :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

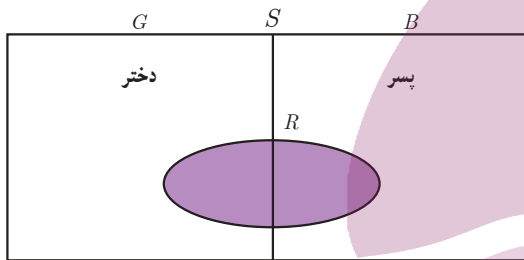
حال اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می گوئیم :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

مثال : اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر 0.08 و نوزاد دختر 0.03 باشد و خانواده ای قصد بچه دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟
قبل از اینکه مسئله فوق را حل کنیم فرض کنید یکی از اعداد زیر جواب مسئله فوق است. حدس بزنید کدام عدد می تواند جواب باشد؟
برای رد کردن گزینه هایی که فکر می کنید نادرست اند، دلیل بیاورید.

۱ 0.09 0.08 0.55 0.03 0.01 ۰

حل :



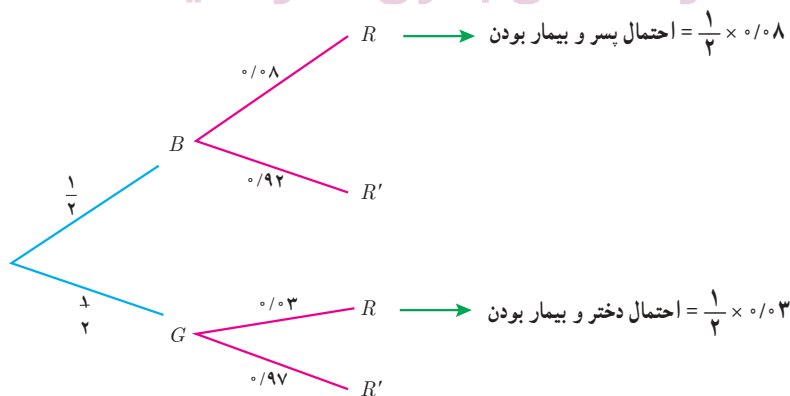
از آنجا که در ابتدا نسبت نوزادان بیمار به کل نوزادان را نداریم، لذا نمی توانیم به طور مستقیم احتمال مورد نظر را محاسبه نماییم. اما می دانیم نسبت نوزادان پسر بیمار به کل نوزادان پسر برابر $\frac{8}{100}$ و همین نسبت برای نوزادان دختر $\frac{3}{100}$ است و احتمال پسر (دختر) بودن نوزاد نیز $\frac{1}{2}$ است. بنابراین با توجه به قانون احتمال کل خواهیم داشت :

$$P(\text{دختر بودن} | \text{بیمار بودن}) = P(\text{دختر بودن}) \cdot P(\text{پسر بودن} | \text{بیمار بودن}) + P(\text{پسر بودن}) \cdot P(\text{دختر بودن} | \text{بیمار بودن})$$

و اگر پیشامد پسر بودن را با B و دختر بودن را با G و بیمار بودن را با R نمایش دهیم داریم :

$$P(R) = P(B)P(R|B) + P(G)P(R|G) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200}$$

برای حل این مثال می توان از نمودار درختی نیز استفاده کرد. به نمودار درختی زیر دقت کنید و علت نوشتن هر عدد و راه حل ارائه شده را شرح دهید.



$$\Rightarrow \text{احتمال بیمار بودن} = \frac{1}{2} \times 0.08 + \frac{1}{2} \times 0.03$$

مثال: ۴ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می آوریم. احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

حل: پیشامد انتخاب ظرف ها را به ترتیب با A_1, A_2, A_3, A_4 و پیشامد خارج شدن مهره قرمز را با B نمایش می دهیم. بنابراین به دنبال یافتن $P(B)$ هستیم و داریم:

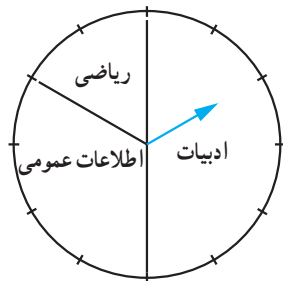
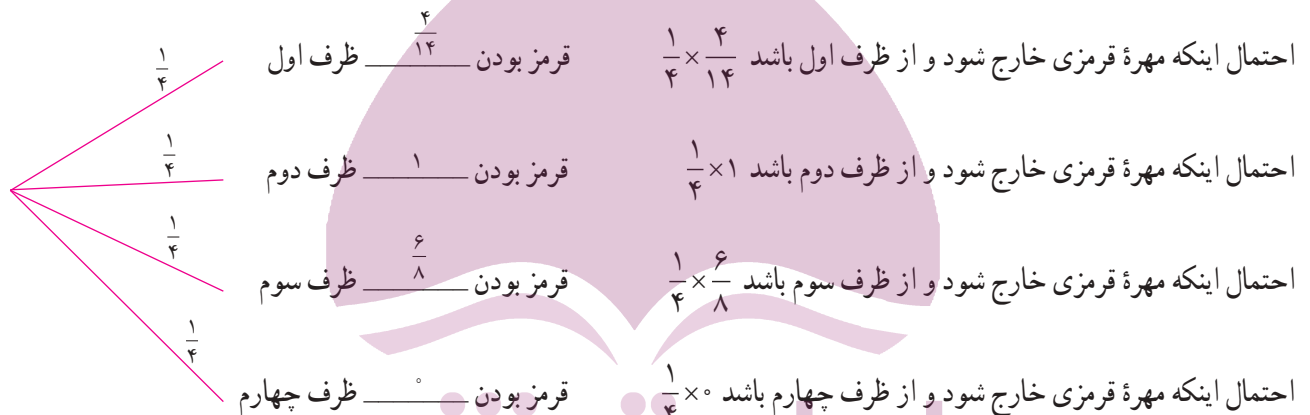
$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$$

$$P(B|A_1) = \frac{4}{14} \quad P(B|A_2) = 1 \quad P(B|A_3) = \frac{6}{8} \quad P(B|A_4) = 0$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4) =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{14} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{57}{112}$$

با نمودار درختی به صورت زیر نیز می توان مسئله را حل کرد:



مثال: سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سؤال که یکی شامل سؤال های ادبیات، یکی ریاضی و یکی اطلاعات عمومی است، وجود دارد. اگر بسته سؤال های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد برنده خواهد شد. اگر بسته سؤال های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر بسته سؤال های اطلاعات عمومی را به او بدهند، به احتمال ۸۵ درصد برنده خواهد شد. در صورتی که با چرخاندن عقربه چرخان در شکل مقابل نوع سؤال هایی که به او داده می شود مشخص شود تعیین کنید او به چه احتمالی برنده خواهد شد؟

حل: اگر انتخاب ادبیات، ریاضی و اطلاعات عمومی را به ترتیب با A_1, A_2, A_3 و برنده شدن سامان را با B نمایش دهیم، خواهیم داشت:

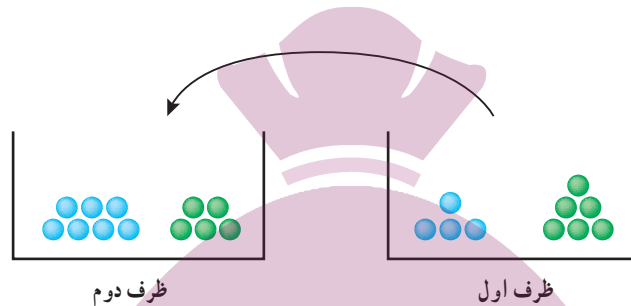
$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{90}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{60}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{85}{100} = \frac{5}{6}$$

مثال: دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

حل: مهره انتخاب شده از ظرف اول یا سبز است و یا آبی. اگر این پیشامدها را به ترتیب با G و B و پیشامد انتخاب مهره سبز از ظرف دوم را با A نمایش دهیم خواهیم داشت: $P(B) = \frac{4}{10}$ و $P(G) = \frac{6}{10}$ و $P(A|G) = \frac{6}{13}$ (چرا؟) و $P(A|B) = \frac{5}{13}$ (چرا؟). در این صورت داریم:

$$P(A) = P(G)P(A|G) + P(B)P(A|B) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{130}$$



تمرین ها

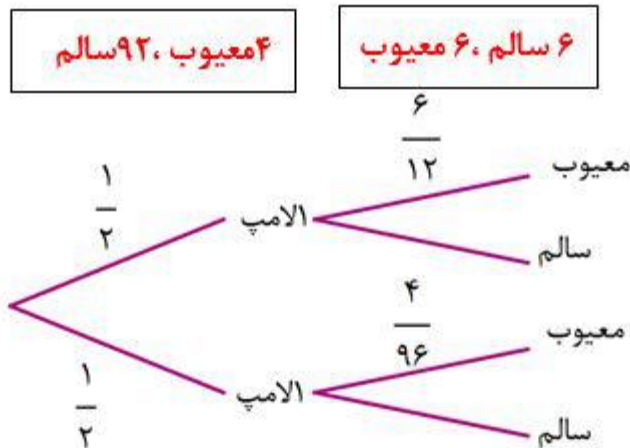
- دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب اند. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟
- فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟
- یک سکه را پرتاب می کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

- در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A ، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A ، $\frac{4}{5}$ برای نوع B ، $\frac{9}{10}$ برای نوع C ، $\frac{1}{4}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

- مینا در انتخاب رشته خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشته ریاضی را انتخاب کند، به احتمال ۴۵٪، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۱٪ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۳٪ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشته ریاضی را انتخاب کند ۱٪، احتمال اینکه رشته تجربی را انتخاب کند ۶٪ و احتمال اینکه رشته انسانی را انتخاب کند ۳٪ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

تمرین ۱:

جعبه در باز



$$\frac{1}{2} \times \frac{6}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{96} = \frac{48}{192} + \frac{4}{192} = \frac{52}{192} = \frac{13}{48}$$

تمرین ۲:

$$p(A) = \frac{۲۰}{۱۰۰} \text{ ، } p(B) = \frac{۵۰}{۱۰۰} \text{ ، } p(C) = \frac{۳۰}{۱۰۰}$$

$$p(D|A) = \frac{۳}{۱۰۰} \text{ ، } p(D|B) = \frac{۵}{۱۰۰} \text{ ، } p(D|C) = \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$P(D) = p(A) \times p(D|A) + p(B) \times p(D|B) + p(C) \times p(D|C) = \frac{۲۰}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۵۰}{۱۰۰} \times \frac{۵}{۱۰۰} + \frac{۳۰}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\frac{۶ + ۲۵ + ۳}{۱۰۰۰} = ۰ / ۰۳۴ = ۳ / ۴ \%$$

ایران تونش

توشه ای برای موفقیت

تمرین ۳:

$$S = \{R, PPPP, PPPR, PPRP, PRPP, PRRP, PRPR, PPRR, PRRR\}$$

$$A = \{R, PPPR, PPRP, PRPP\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

تمرین ۴:

A	۵
B	۲
C	۱۵

۲۲

$$P(kh | A) = \frac{4}{5}$$

$$P(kh | B) = \frac{9}{10}$$

$$P(kh | C) = \frac{1}{2}$$

$$P(kh) = P(A) \times P(kh | A) + P(B) \times P(kh | B) + P(C) \times P(kh | C)$$

$$P(kh) = \frac{5}{22} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{22} \times \frac{9}{10} + \frac{15}{22} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{11} + \frac{9}{110} + \frac{15}{44} = \frac{40 + 9 + 15}{44} = \frac{64}{44} = \frac{16}{11}$$

تمرین ۵:

$$P(\text{ق}) = P(\text{رياضی}) \times P(\text{رياضی|ق}) + P(\text{تجربی}) \times P(\text{تجربی|ق}) + P(\text{انسانی}) \times P(\text{انسانی|ق})$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{45}{100} + \frac{6}{10} \times \frac{10}{100} + \frac{3}{10} \times \frac{30}{100} = \frac{45 + 60 + 90}{1000} = \frac{195}{1000} = 19.5\%$$

منابع

فارسی :

- ۱- استوارت، جیمز. (۲۰۱۲). حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمه حمیدی، ارشک. جلد اول. تهران: انتشارات فاطمی (۱۳۹۵).
- ۲- اسدی، محمدباقر. رنجبری، علی. ریحانی، ابراهیم. طاهری تنجانی، محمد تقی. قربانی آرانی، مجتبی. مین باشیان، هادی. (۱۳۹۶). حسابان (۱) - پایه یازدهم دوره دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.
- ۳- اصلاح پذیر، بهمن. بروجردیان، ناصر. ریحانی، ابراهیم. طاهری تنجانی، محمدتقی و عالمیان، وحید. (۱۳۹۵). حسابان سال سوم متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.
- ۴- امیری، حمیدرضا. بیژن زاده، محمد حسن. بهرامی سامانی، احسان. حیدری قزلجه، رضا. داورزنی، محمود. ریحانی، ابراهیم. سیدصالحی، محمد رضا. قربانی آرانی، مجتبی. (۱۳۹۵). ریاضی (۱) - پایه دهم دوره دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.
- ۵- ایرانمنش، علی. جمالی، محسن. ربیعی، حمیدرضا. ریحانی، ابراهیم. شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید. (۱۳۹۲). ریاضیات (۲) سال دوم آموزش متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.
- ۶- بهزاد، مهدی. رجالی، علی. عمیدی، علی و محمودیان، عبداللہ. (۱۳۹۳). ریاضیات گسسته، دوره پیش دانشگاهی، رشته علوم ریاضی. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. چاپ بیستم. تهران: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.
- ۷- بیژن زاده، محمد حسن. رحیمی، زهرا. سیدصالحی، محمد رضا. شرقی، هوشنگ و نصیری، محمود. (۱۳۹۶)، هندسه (۲)، پایه یازدهم دوره دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، دفتر تألیف کتابهای درسی عمومی و متوسطه نظری، تهران: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.
- ۸- بیژن زاده، محمد حسن. پاشا، عین الله. یوحناپی، که کو. (۱۳۹۰). ریاضی عمومی. دوره پیش دانشگاهی، رشته تجربی. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.
- ۹- بیژن زاده، محمد حسن. عالمیان، وحید و فرشادی، غلامعلی. (۱۳۹۶). حساب دیفرانسیل و انتگرال، دوره پیش دانشگاهی - رشته علوم ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. چاپ ششم. تهران: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.
- ۱۰- تلگینی، محمود. خرد پژوه، فروزان. رجالی، (۱۳۷۸). حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، تهران: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.

- ۱۱- حاجی بابایی، جواد. رستمی، محمد هاشم. ظهوری زنگنه، بیژن. غلام آزاد، سهیلا. گویا، زهرا. نیوشا، جعفر. اصلاح پذیر، بهمن. بروجردیان، ناصر. رحمانی، عزیزه. رضوی، اسداله و میرمحمد رضایی، مرتضی. (۱۳۷۵). هندسه (۲)، سال سوم آموزش متوسطه، رشته ریاضی و فیزیک، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
- ۱۲- حیدری قزلجه، رضا. خداکریم، سهیلا. ریحانی، ابراهیم. سید صالحی، محمدرضا. فربرزی عراقی، محمدعلی. قصاب، علی و کمیجانی، آناهیتا. (۱۳۹۶). ریاضی (۲) - پایه یازدهم دوره دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
- ۱۳- رحیمی، زهرا. سید صالحی، محمدرضا. شرقی، هوشنگ و نصیری، محمود. (۱۳۹۵)، هندسه (۱)، پایه دهم دوره دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، دفتر تألیف کتاب های درسی عمومی و متوسطه نظری، تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
- ۱۴- رستمی، محمد هاشم. (۱۳۷۹). مکان هندسی، مکان های هندسی وابسته به نقطه های ثابت (یک نقطه، دو نقطه، ... n نقطه)، تهران: سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه.
- ۱۵- رستمی، محمد هاشم. عطوفی، عبدالحمید. گودرزی، محمد. امیری، حمیدرضا. (۱۳۹۵). ریاضیات ۳. سال سوم علوم تجربی. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
- ۱۶- ریحانی، ابراهیم. رحیمی، زهرا. کلاهدوز، فهیمه. نوروزی، سپیده. یافتیان، نرگس. شریف پور، شقایق. عابدی، ربابه. کتابدار، زهره. سید صالحی، محمدرضا، امیری، محمدرضا. ایزدی، مهدی. زمانی، ایرج. بهرامی سامانی، احسان. پرنک، حسن. مین باشیان، هادی و نیرو، محمد. (۱۳۹۵). تحلیل خط مشی ها، اسناد مصوب، پژوهش ها و منابع معتبر مرتبط با حوزه یادگیری ریاضی، واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی.
- ۱۷- فروند، جان. (۱). آمار ریاضی. ترجمه وحیدی اصل، قاسم و عمیدی، علی. تهران: انتشارات نشر دانشگاهی.

انگلیسی:

- 18- Berchie Holliday .(2008) California Algebra 2. Concepts, Skills, and Problem Solving. Glencoe/McGraw-Hill.
- 19- Bittinger, M. L., Ellenbogen, D., & Surgent, S. A. (2000). Calculus and its applications. Reading, MA, Harlow: Addison-Wesley.
- 20- Briggs, W. L., Cochran, L., & Gillett, B. (2014). Calculus for scientists and engineers: Early transcendentals. Pearson Education.
- 21- Cohen D., Lee T. & Sklar D. (2010). Precalculus: A Problems-Oriented Approach. Sixth Edition, Brooks/Cole.
- 22- Hemmerling, E. M., & Hemmerling, E. M. (1964). Fundamentals of college geometry. Wiley.
- 23- Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., Flath, D., Lock, P. F., Gordon, S. P., Lomen, D. O., ... & Pasquale, A. (1998). Calculus: Single Variable. Wiley.
- 24- Larson, Ron. & Hodgkins, Amme V. (2013). college algebra and calculus an applied approach. The Pennsylvania State University, The Behrend College, second edition.
- 25- Lial, M. L., Greenwell, R. N., & Ritchey, N. P. (2008). Calculus with applications. Pearson/Addison Wesley.
- 26- Lial, M., Greenwell, R., & Ritchey., N. (2017). Calculus with Applications. Pearson Education.
- 27- Rogawski, J., & Adams, C. (2015). Calculus: Early Transcendentals. Palgrave Macmillan.
- 28- Serra, M. (1997). Discovering geometry. An Inductive Approach
- 29- Sullivan, M. (2008). Algebra and Trigonometry. Eighth edition, Pearson Prentice Hall.
- 30- Sullivan, M. (2015). Precalculus: Concepts Through Functions A Unit Circle Approach To Trigonometry. Third edition, Pearson Education.

