



ایران توننده

توشه ای برای موفقیت

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی



دایره

درس اول

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی



به مسیری که هر روز از خانه تا مدرسه طی می کنید، فکر کنید. آیا می توانید این مسیر را با رسم یک تصویر مناسب توضیح دهید؟

برای دوستان توصیف کنید که خانه تان چه شکلی است؟ تصور کنید یک اتاق کمتر یا آشپزخانه بزرگ تری داشتید، در این صورت خانه جدید، چه شکلی بود؟

در حالت های بالا شما به موضوعی فکر کردید، اما از عبارات، جملات و شیوه های زبانی برای تفکر استفاده نکردید. در واقع به جای کلمات، تصاویری در ذهن شما نقش بستند و این تصویرسازی ذهنی، به شما کمک کرد که به آن موضوع یا موقعیت فکر کنید. این شیوه از تفکر را **تفکر تجسمی** می نامیم.

فرایند تفکر تجسمی، مستلزم تشکیل و دست ورزی تصاویر با قلم و کاغذ، فناوری و یا به صورت ذهنی است که به بررسی، کشف و درک مفاهیم منجر می شود. این نوع از تفکر، نقش مهمی در حل مسئله های ریاضی و همین طور حل مسائل در زندگی روزمره دارد. موقعیت هایی که می تواند به تقویت تفکر تجسمی کمک کنند عبارت اند از: تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا، ترسیم سطح گسترده اجسام هندسی و ترسیم یک جسم سه بعدی روی سطح، ترسیم نماهای مختلف اجسام، دوران شکل حول یک نقطه یا حول یک محور در صفحه و فضا و تجسم اجسام هندسی بعد از برش. از آنجا که هدف کلی این درس آشنایی با مقاطع مخروطی است، از بین این موقعیت ها، **دوران** اشکال هندسی حول یک محور و **برش** اجسام را بررسی می کنیم.

دوران حول محور



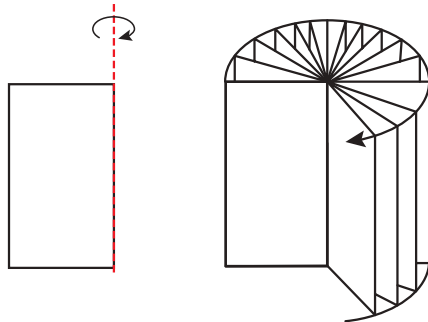
سفالگری کلپورگان (سیستان و بلوچستان)



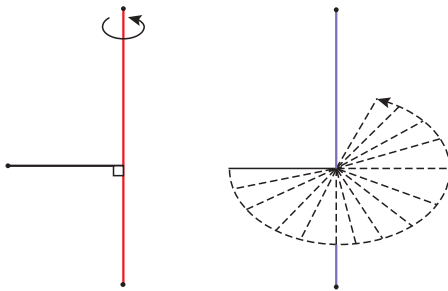
وقتی شکل های هندسی متفاوت حول یک محور دوران داده شود، جسم های مختلف هندسی ساخته می شود. در فعالیت زیر نمونه هایی از این مفهوم ارائه شده است. در هر مورد، شکل حاصل از دوران حول محور را مشخص کنید.

فعالیت

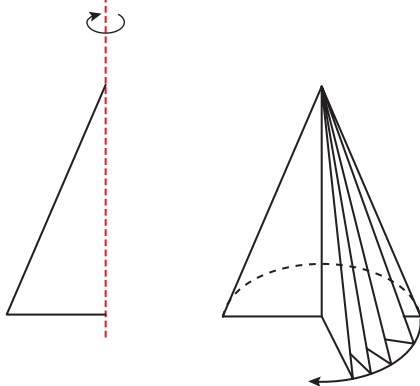
الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن: **استوانه تشکیل می شود...**



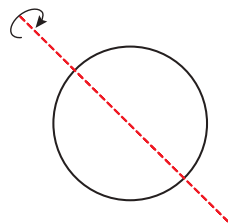
ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است: **دایره توپر تشکیل می شود**



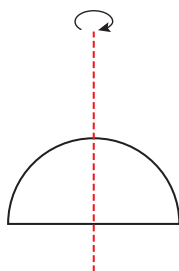
پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه: **مخروط قائم توخالی تشکیل می شود زیرا مثلث را رنگی نکرده است**



ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن: **کره تو خالی**



ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن: **نیم کره تو خالی**



برش

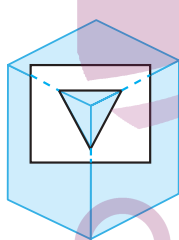
در فعالیت قبل، از دوران شکل حول یک محور، یک جسم دو بعدی یا سه بعدی تشکیل شد. حال فرض کنید می خواهیم اجسام سه بعدی را برش یزنیم و تغییرات آن را بعد از برش تجسم کنیم. در زندگی روزمره بارها با برش اجسام مختلف هندسی مواجه بوده اید. این اجسام می توانند توپ یا توخالی باشند.



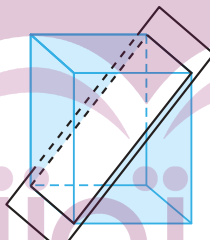
شکلی که از برخورد یک صفحه^۱ با یک جسم هندسی حاصل می شود، سطح مقطع آن نامیده می شود.

فعالیت

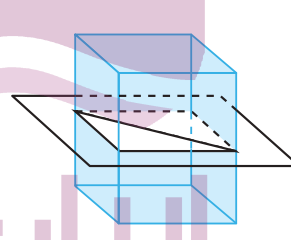
الف) بعضی از حالت های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعده مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هر یک از حالت ها سطح مقطع را مشخص کنید.



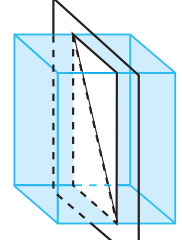
مثلث



مستطیل



مربع



مستطیل

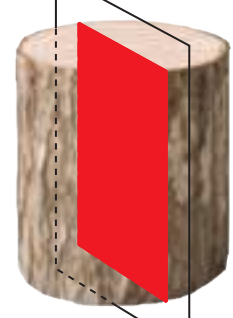
ب) سطح مقطع استوانه با صفحه های عمودی، افقی و صفحه های مایل که با قاعده های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟



بیضی

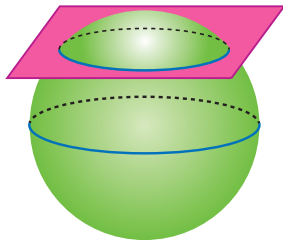


دایره



مستطیل

۱- خط و صفحه از مفاهیم اساسی هندسه هستند. همان طور که خط از هر دو طرف نامحدود است، صفحه نیز از هر طرف ادامه دارد و ضخامت ندارد.



پ) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ **دایره**
در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟

وقتی که شامل مرکز دایره باشد

کار در کلاس

۱) شکل حاصل از دوران حول محور را در حالت های زیر مشخص کنید و آنها را با هم مقایسه کنید :

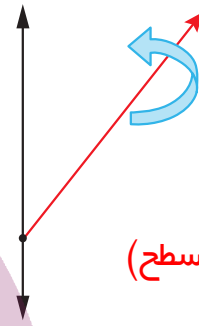
ب) شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه حول محور

مخروط تو پر



الف) شکل حاصل از دوران نیم خط حول محور

مخروط نامتناهی (سطح)



۲) مستطیلی را حول عرض آن دوران داده ایم.

الف) شکل حاصل را رسم کنید .

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد یک استوانه و یک صفحه در چه

حالتی یک مربع است؟

پ) اگر ابعاد مستطیل ۳ و ۴ باشد مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه موازی

با قاعده این استوانه چقدر است $r=4 \rightarrow S=\pi r^2=\pi(4)^2=16\pi$

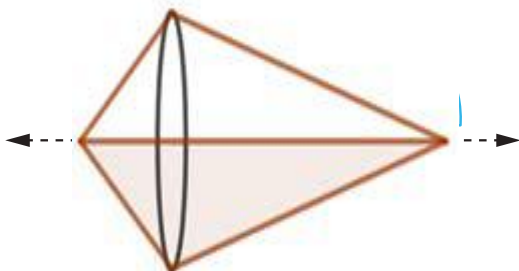
ت) در حالت ، پاگر صفحه ای عمود بر قاعده استوانه آن را قطع کند بیشترین

مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟



مخازن نفتی در زنجان

وقتی صفحه از محور بگذرد بر قاعده عمود باشد همان مساحت مستطیلی است که طول آن دو برابر طول مستطیل و عرض آن ، عرض مستطیل یعنی ۳ است



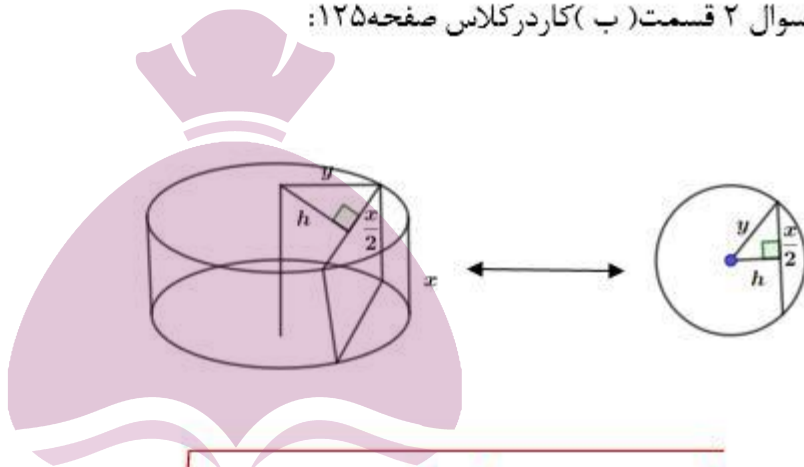
$$S = 3 \times 8 = 24$$

مستطیلی به ابعاد ۸ و ۳

۳) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن چیست؟

دو مخروط با قاعده مشترک

حل سوال ۲ قسمت (ب) کاردرکلاس صفحه ۱۲۵:



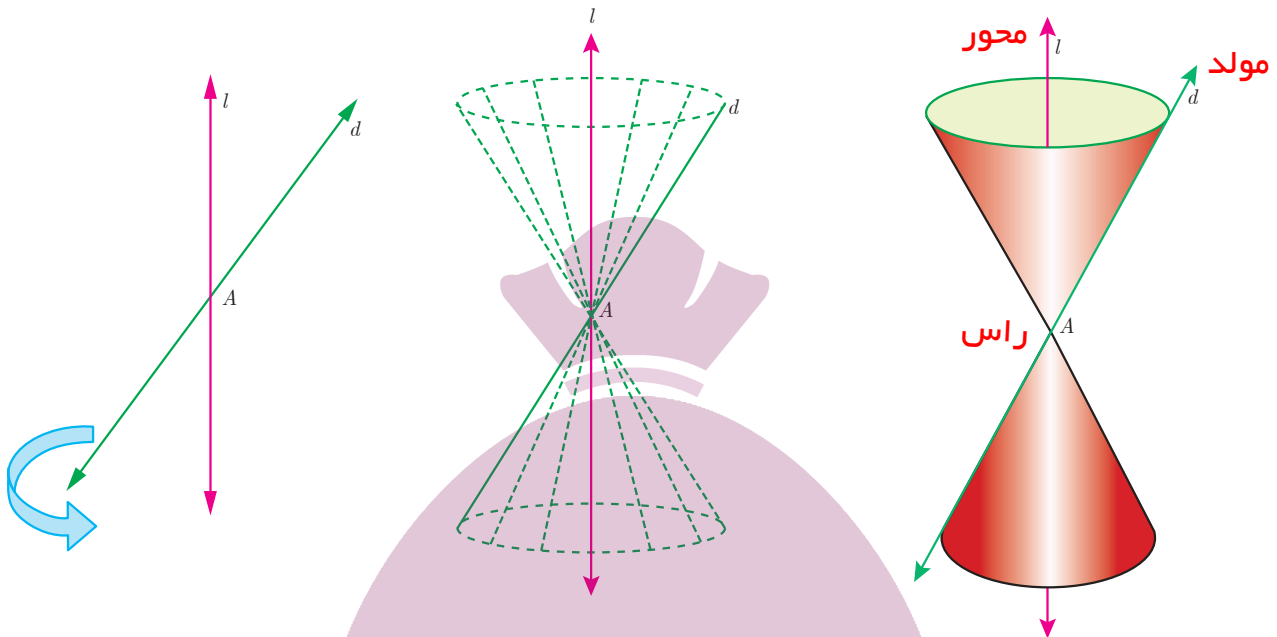
$$\text{فاصله صفحه قاطع تا محور دوران} = \sqrt{\left(\text{عرض مستطیل}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\text{طول مستطیل}\right)^2}$$

توشه ای برای موفقیت

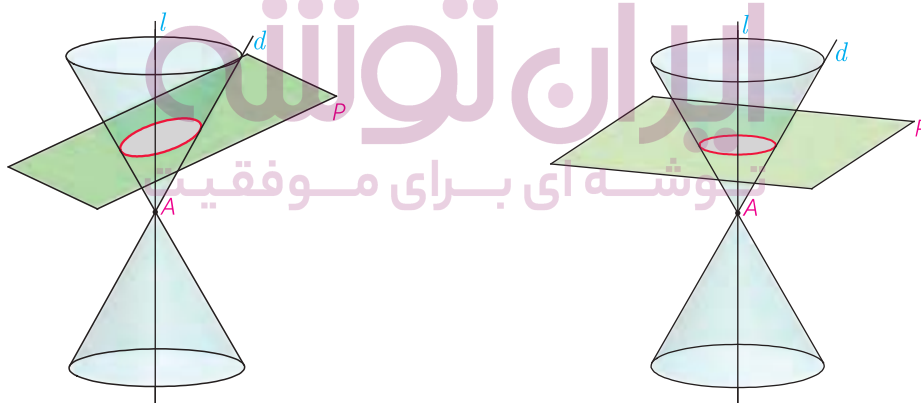
$$\rightarrow h = \sqrt{y^2 - \frac{1}{4}x^2}$$

آشنایی با مقاطع مخروطی

دو خط d و l در نقطه ای مثل A متقاطع اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک **سطح مخروطی** نامیده می شود. در این حالت خط l **محور**، نقطه A ، **رأس** و خط d ، **مولد** این سطح مخروطی است.

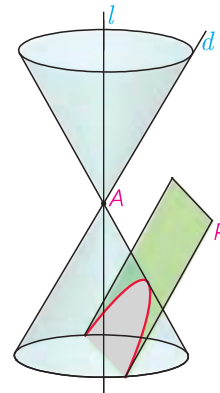
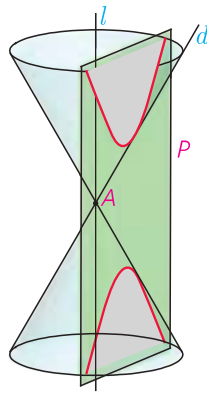


وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می شود، معمولاً سطح مقطع، یک منحنی است. از آنجا که این منحنی ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، **مقاطع مخروطی** نامیده می شوند. در ادامه با انواع مقاطع مخروطی آشنا خواهیم شد.



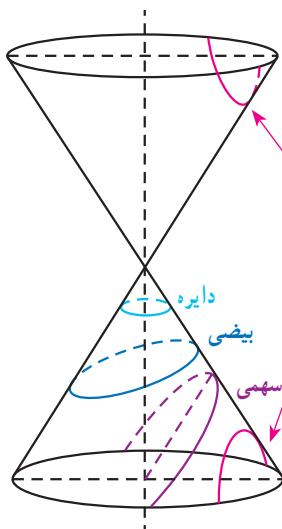
(ب) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل **بیضی** خواهد بود.

(الف) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل **دایره** است.



ت) اگر صفحه P سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را **هذلولی**^۱ می نامیم.

پ) اگر صفحه P در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک **سهمی** است.

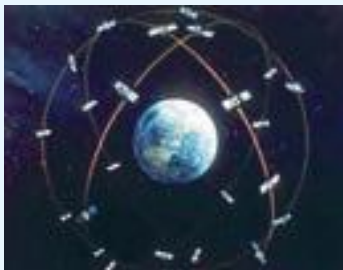


بدین ترتیب مقاطع مخروطی عبارت اند از دایره، بیضی، سهمی و هذلولی.

در ادامه این درس قصد داریم بیضی و ویژگی های آن را بدون معرفی معادله آن، مورد بررسی قرار دهیم.

خواندنی

مقاطع مخروطی ابتدا توسط یونانیان باستان مورد مطالعه قرار گرفتند و به مرور زمان در مطالعات سیاره ها، ستاره های دنباله دار و قمرهای مصنوعی کاربردهای زیادی پیدا کردند. این منحنی ها همچنین در مطالعات اختراعات، سیستم های راهنمای هواپیماها، ساخت عدسی ها، نقشه برداری، وسایل نوری، وسایل پیش بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی، ساختن پل و علاوه بر آن در علوم نظامی، پزشکی و اقتصاد به کار می روند.

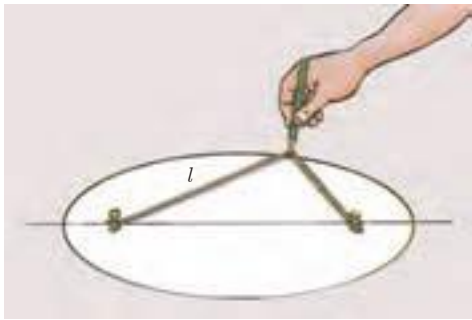


۱- معادله هذلولی و بررسی ویژگی های آن، جزء اهداف این کتاب نیست.

بیضی

حتملی دانید که به کمک یک تکه نخ چگونه می توان یک دایره رسم کرد. در این فعالیت می خواهیم ببینیم طریقهٔ رسم بیضی به کمک یک تکه نخ چگونه است و حین انجام این فعالیت، ویژگی های بیضی را بهتر بشناسیم.

فعالیت



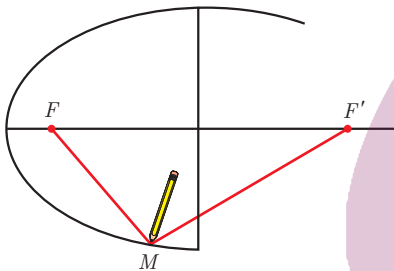
مانند شکل دو سر نخ به طول l را روی یک صفحه ثابت کنید. دقت داشته باشید که برای رسم بیضی لازم است که طول نخ از فاصلهٔ بین دو میخ، بیشتر باشد. حالا مطابق شکل، مدادتان را در حالتی که تکه نخ از دو طرف کاملاً کشیده شده است، روی صفحه حرکت دهید.

شکل حاصل منحنی بسته ای است که به آن **بیضی** می گویم. همان طور که دیدید دو میخ در واقع نشان دهندهٔ دو نقطهٔ ثابت در بیضی هستند. این دو نقطه را **کانون های بیضی** می نامند.

اگر کانون های بیضی را با F و F' نمایش دهیم و نقطه ای مثل M یک نقطهٔ دلخواه از بیضی باشد، مجموع فواصل این نقطه از نقاط F و F' یعنی $MF + MF'$ برابر با چیست؟

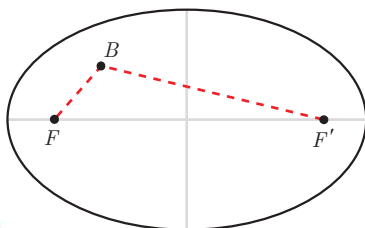
طول نخ (L)

بدین ترتیب:

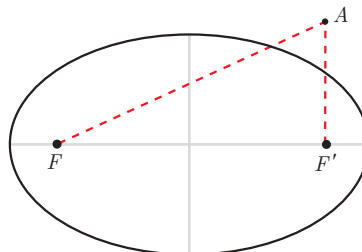


بیضی، مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت واقع در صفحه، برابر با مقداری ثابت است.^۲

می توان نشان داد که اگر نقطهٔ دلخواه A بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از نقاط F و F' بیشتر از l و اگر نقطهٔ دلخواه B ، داخل بیضی باشد، مجموع فاصلهٔ آن از دو نقطهٔ F و F' کمتر از l خواهد بود.



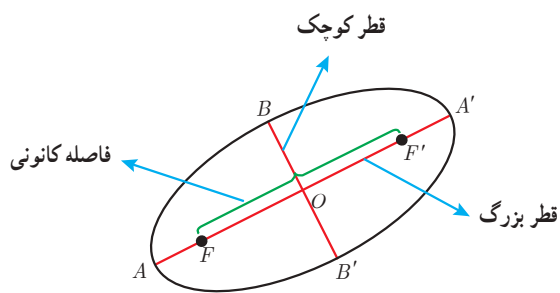
$$BF + BF' < L$$



$$AF + AF' > L$$

^۱ - Foci

^۲ - اثبات اینکه سطح مقطع مخروطی معرفی شده به عنوان بیضی، با این تعریف همخوانی دارد، خارج از اهداف این کتاب است.



بیضی مقابل را در نظر بگیرید.

در این بیضی کانون ها را F و F' نامیده ایم.

در هر بیضی اندازه FF' ، **فاصله کانونی** بیضی نامیده می شود.

نقطه میانی پاره خط FF' ، **مرکز بیضی** است که آن را نقطه O نامیده ایم.

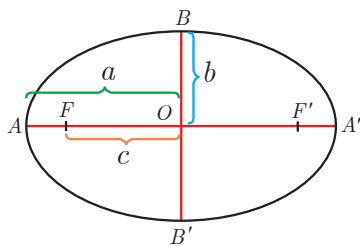
پاره خطی که از کانون های بیضی می گذرد یعنی AA' ، **قطر بزرگ** یا **قطر**

کانونی بیضی است. پاره خطی که در مرکز بیضی بر قطر بزرگ بیضی

عمود است، یعنی قطر BB' ، **قطر کوچک** بیضی نامیده می شود.

اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن بیضی را **بیضی افقی** و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی را **بیضی قائم** می نامیم.

فعالیت



بیضی مقابل را در نظر بگیرید. اندازه پاره خط های OA ، OB و OF را به ترتیب با a ، b و c نمایش داده ایم. می دانیم که مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون بیضی مقداری ثابت است.

۱ می خواهیم نشان دهیم قطر بزرگ بیضی طولی برابر با همین مقدار ثابت دارد.

در رسم بیضی، حالتی را در نظر بگیرید که نوک مداد روی نقطه A قرار دارد. در این صورت:

$$\text{مقدار ثابت} = AF + AF' = AF + (AF + FF') = 2AF + FF' \quad (1)$$

به همین ترتیب فرض کنید نوک مداد روی نقطه A' قرار دارد. در این صورت داریم:

$$\text{مقدار ثابت} = A'F' + A'F = A'F' + (A'F + FF') = 2A'F' + FF' \quad (2)$$

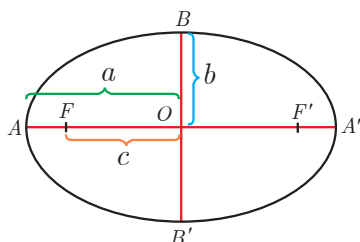
از مقایسه رابطه

پس:

بنابراین:

مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

سؤال: با توجه به تساوی $AF = A'F'$ نشان دهید که مرکز بیضی قطر بزرگ آن را نصف می کند و از آن نتیجه بگیرید طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.



۲ حال قصد داریم رابطه بین a ، b و c را پیدا کنیم.

الف) نقطه B را مطابق شکل روی بیضی در نظر بگیرید. می دانیم این نقطه روی عمود منصف

پاره خط FF' است. (چرا؟)

O وسط FF' است از طرفی BB' بر AA' عمود است پس نتیجه میگیریم **OB** عمود منصف FF' است

$$\left. \begin{array}{l} AF = OA - OF \Rightarrow OF = OA - AF \\ A'F' = OA' - OF' \Rightarrow OF' = OA' - A'F' \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{نقطه میانی یاره خط } FF']{O} OA - AF = OA' - A'F'$$

$$\xrightarrow[\text{بنا بر فرض } AF=A'F']{OA = OA' = a \Rightarrow AA' = OA + OA' = a + a = 2a}$$

(ب) به کمک قسمت قبلی فعالیت، اندازه BF را پیدا کنید.

$$\left. \begin{array}{l} BF = BF' \\ BF + BF' = 2a \end{array} \right\} \rightarrow BF = BF' = a$$

هر نقطه روی عمود منصف از دوسر پاره خط بیک فاصله است

(پ) چه رابطه ای بین a ، b و c وجود دارد؟

$$\triangle BOF : BF^2 = OB^2 + OF^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

(ت) آیا مرکز بیضی قطر کوچک را هم نصف می کند؟ چرا؟ بله می توان قسمتهای الف و ب را برای قطر کوچک تحقیق کرد

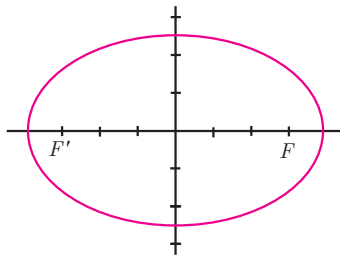
بنابراین :

در یک بیضی، اندازه نیم قطر بزرگ را a ، اندازه نیم قطر کوچک را b و نصف فاصله

مثال :

اگر در یک بیضی $c=3$ و $a=4$ باشد، اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟

حل :



$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

و بنابراین اندازه قطر کوچک برابر است با $2\sqrt{7}$.

کار در کلاس

۱) اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=5$ و $b=3$ ، در این صورت اندازه فاصله کانونی را محاسبه کنید.

$$\left. \begin{array}{l} 2a = 6 \rightarrow a = 3 \\ 2b = 4 \rightarrow b = 2 \end{array} \right\} \rightarrow c^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \rightarrow c = \sqrt{5} \rightarrow FF' = 2\sqrt{5}$$

۲) در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.

اگر مرکز این بیضی نقطه ای با مختصات $(4, 5)$ باشد :

الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.

$$\left. \begin{array}{l} 2a = 6 \rightarrow a = 3 \\ 2b = 4 \rightarrow b = 2 \end{array} \right\} \rightarrow c^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \rightarrow c = \sqrt{5}$$

(ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون های بیضی را بنویسید.

$$O \left| \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta = 5 \end{array} \right. \quad A \left| \begin{array}{l} \alpha + a = 4 + 3 = 7 \\ \beta = 5 \end{array} \right. \quad A' \left| \begin{array}{l} \alpha - a = 4 - 3 = 1 \\ \beta = 5 \end{array} \right.$$

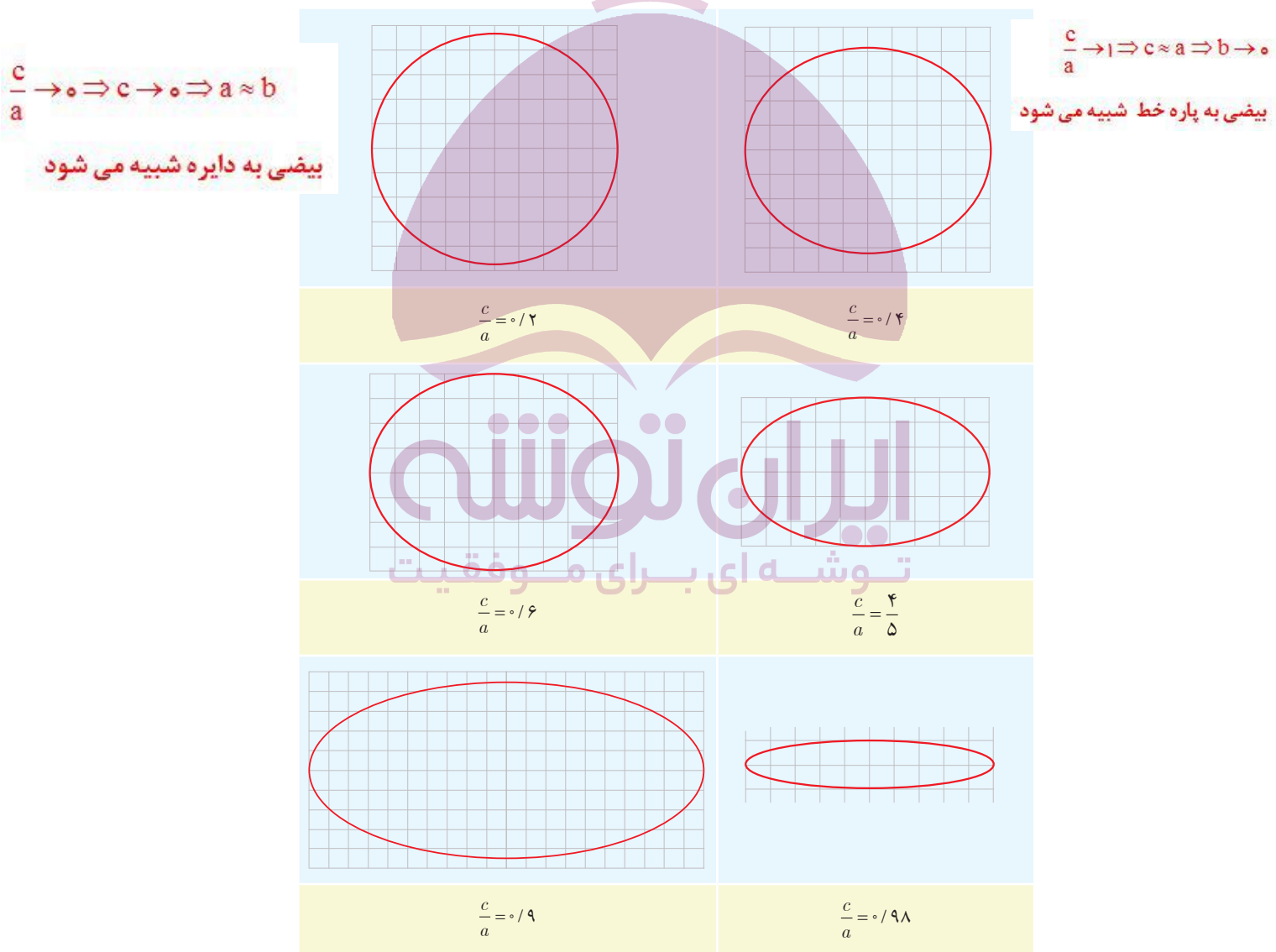
$$B \left| \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta + b = 5 + 2 = 7 \end{array} \right. \quad B' \left| \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta - b = 5 - 2 = 3 \end{array} \right. \quad F \left| \begin{array}{l} \alpha + c = 4 + \sqrt{5} \\ \beta = 5 \end{array} \right. \quad F' \left| \begin{array}{l} \alpha - c = 4 - \sqrt{5} \\ \beta = 5 \end{array} \right.$$

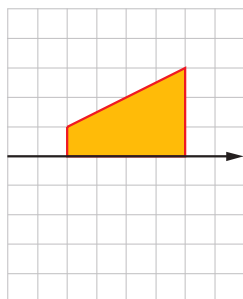
خروج از مرکز

همان طور که دیدید اندازه قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصله کانونی یک بیضی مقادیری به هم وابسته اند. بدیهی است که همیشه مقدار a از مقدار b و c بیشتر است (چرا؟). **چون فاصله مرکز تا کانون کمتر از فاصله مرکز تا راس است**
اندازه های a ، b و c بر شکل بیضی تأثیرگذار است و همواره $\frac{c}{a}$ مقداری بین ۰ و ۱ است. (چرا؟). هر چه نسبت $\frac{c}{a}$ ، بزرگ تر و به ۱ نزدیک تر باشد، شکل بیضی کشیده تر می شود و هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ کوچک تر و به صفر نزدیک تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک تر خواهد شد.

مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می دهند.

در ادامه چند بیضی با مقادیر مختلف e رسم شده است. تأثیر اندازه خروج از مرکز را بر شکل بیضی بررسی کنید.

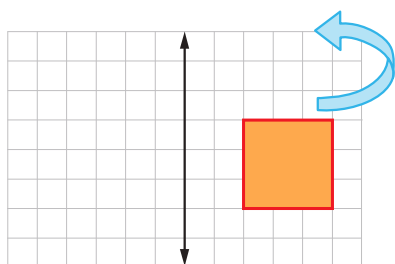




۱ در شکل روبه رو می خواهیم دوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟



۲ مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه رو در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه ای موازی با قاعده آن توصیف کنید.

۳ اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

۴ کانون های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(-5, 1)$ است.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a=6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

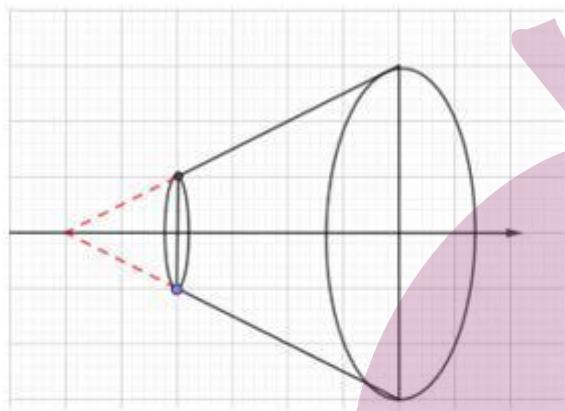
توشه ای برای موفقیت

۵ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-1, -4)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

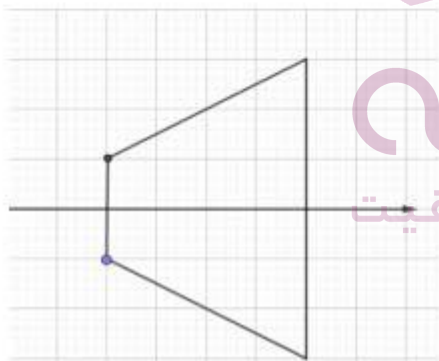
ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون های بیضی را پیدا کنید.

تمرین ۱



$$V - V_1 = \frac{1}{3} \pi (3)^2 \times 6 - \frac{1}{3} \pi (1)^2 \times 2 = \frac{52}{3} \pi$$

ب) دوزنقه



$$S = \frac{1}{2} (1 + 6) \times 4 = 14$$

توشه ای برای موفقیت

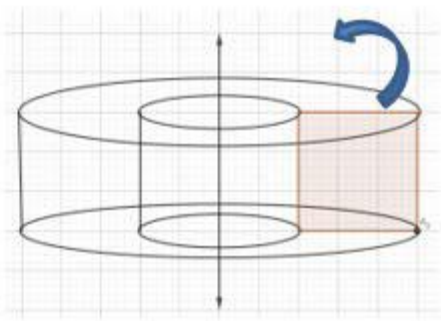
تمرین ۲

الف) حجم شکل = حجم استوانه بزرگ - حجم استوانه کوچک

$$\pi \times 5^2 \times 3 - \pi \times 2^2 \times 3 = 75\pi - 12\pi = 63\pi$$

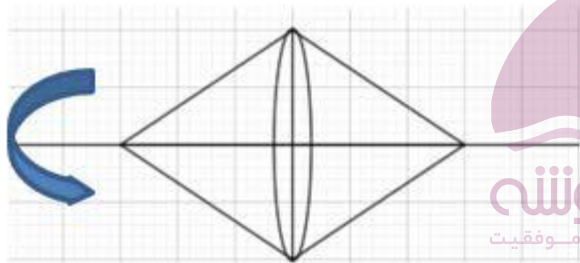
ب) سطح مقطع موای با قاعده یک دایره تو خالی شعاع خارجی ۵

و شعاع داخلی ۲ است



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

تمرین ۳



ایران توننده
توشه ای برای موفقیت

$$V = \mu \left(\frac{\pi}{\mu} \times \mu^{\mu} \times \mu \right) = 8\pi$$

تمرین ۴: الف)

$$F \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} 1 \\ -5 \end{vmatrix} \quad \text{مرکز } O \begin{vmatrix} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3+(-5)}{2} = -1 \end{vmatrix}$$

$x = 1$ معادله قطر بزرگ
 $y = -1$ معادله قطر کوچک

$$FF' = |3 - (-5)| = 8 = 2c \rightarrow c = 4$$

(ب)

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \rightarrow b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \rightarrow BB' = 4\sqrt{5}$$

خروج از مرکز $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

تمرین ۵: الف)

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \rightarrow c = \frac{4}{5}a \quad BB' = 2b = 6 \rightarrow b = 3$$

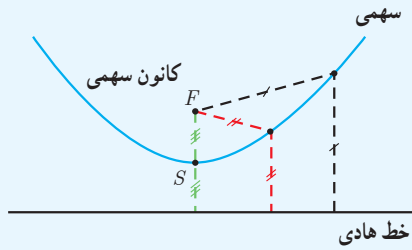
$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow \frac{16}{25}a^2 = a^2 - 9 \rightarrow \frac{9}{25}a^2 = 9 \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow a = 5 \rightarrow c = 4$$

توشه ای برای موفقیت

(ب)

$$F \begin{vmatrix} -4+4=0 \\ -1 \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} -4-4=-8 \\ -1 \end{vmatrix} \quad A \begin{vmatrix} -4+5=1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad A' \begin{vmatrix} -4-5=-9 \\ -1 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} -4 \\ -1+3=2 \end{vmatrix} \quad B' \begin{vmatrix} -4 \\ -1-3=-4 \end{vmatrix}$$

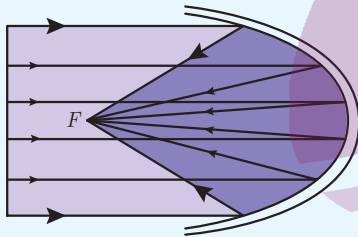
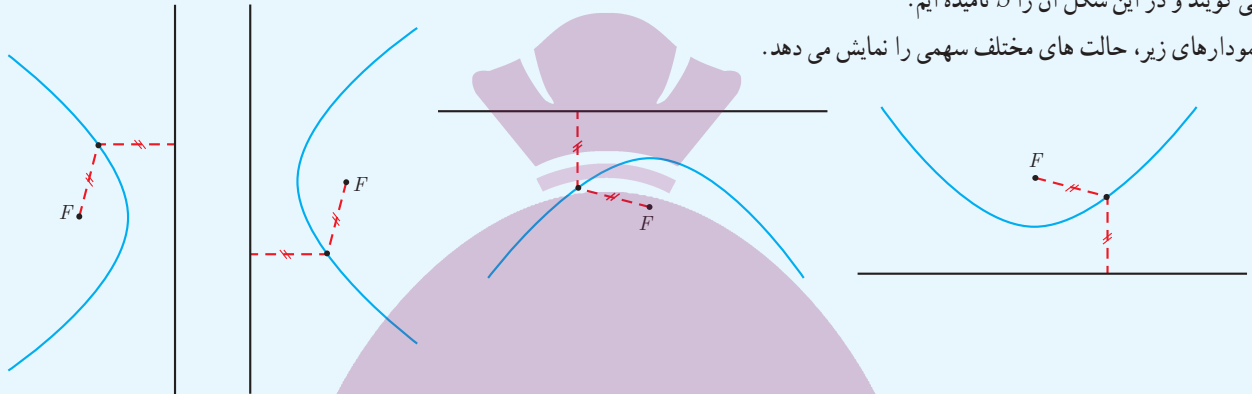
خواندنی



در سال های گذشته با معادله $y = ax^2 + bx + c$ ؛ $a \neq 0$ آشنا شدید و نمودار آن را سهمی نامیدید. سهمی به بیان دقیق تر، مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت داده شده در آن صفحه و یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط و در همان صفحه، به یک فاصله است. این نقطه ثابت را کانون سهمی و خط ثابت را خط هادی سهمی می نامند.

شکل مقابل یک سهمی را نمایش می دهد. همان طور که می بینید تمام نقاط روی سهمی از نقطه ثابت F و خط هادی فاصله ای برابر دارند. اگر از نقطه F به خط هادی عمود کنیم، محل تقاطع خط عمود و سهمی، نقطه ای است که به آن رأس سهمی می گویند و در این شکل آن را S نامیده ایم.

نمودارهای زیر، حالت های مختلف سهمی را نمایش می دهد.

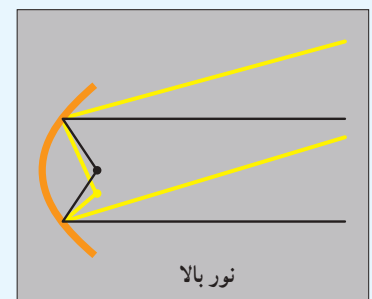
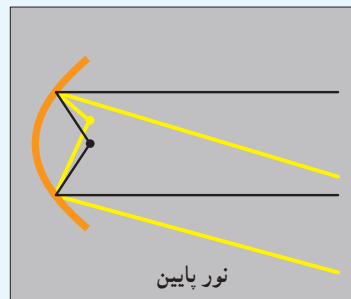


سهمی ها ویژگی جالبی دارند که در ساخت آینه های سهمی، تلسکوپ ها، چراغ های جلوی اتومبیل، آنتن های سهمی رادار و گیرنده های بشقابی تلویزیون کاربرد دارد. پرتوهایی که از کانون سهمی به سهمی برخورد می کنند، موازی با محور سهمی (عمود بر خط هادی) خارج می شوند و بالعکس، پرتوهایی که موازی با محور سهمی به آن می تابند، دقیقاً از کانون سهمی می گذرند.



به عنوان مثال معمولاً جداره پشت لامپ خودروها، آینه ای به شکل سهمی است. چراغ خودرو دقیقاً در کانون این سهمی قرار داده می شود و بدین ترتیب شعاع های نور بعد از برخورد با جداره آینه ای به صورت پرتوهای موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می یابند و روشنایی بیشتری را موجب می شوند.

جابه جایی اندک لامپ در راستای عمودی، باعث خروج پرتوهای نور رو به بالا یا رو به پایین می شود که اصطلاحاً به آن نور بالا یا نور پایین گفته می شود.



درس دوم

دایره

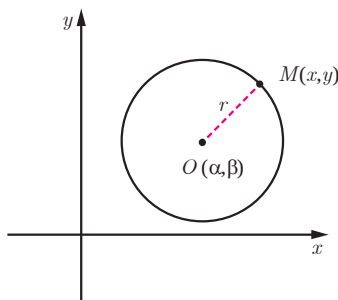


زیربنای برج میلاد با نقشه دایره‌ای شکل به قطر ۶۶ متر



زیربنای دایره ای شکل مجموعه تئاتر شهر، تهران

دایره یکی از شکل های مهم هندسی است که با تعریف و برخی ویژگی های آن در سال های قبل آشنا شده اید. می دانیم دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از نقطه ثابتی در همان صفحه، مقداری ثابت و مثبت باشد. این نقطه ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را اندازه شعاع دایره می نامیم. دایره C را به مرکز O و شعاع r معمولاً $C(O, r)$ نمایش می دهیم. در این درس به تحلیل برخی از ویژگی های دایره در دستگاه مختصات خواهیم پرداخت.



دایره $C(O, r)$ را به گونه ای در نظر بگیرید که مرکز آن نقطه $O(\alpha, \beta)$ و نقطه $M(x, y)$ نقطه دلخواهی روی آن باشد. می دانیم که فاصله مرکز دایره از تمام نقاط روی آن برابر با مقدار ثابت r است. بنابراین به کمک رابطه فاصله دو نقطه که در سال های گذشته با آن آشنا شدیم، داریم:

$$OM = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$$

$$OM = r \text{ از طرفی}$$

$$\Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

رابطه $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ معادله دایره ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در صفحه مختصات است که به آن معادله استاندارد دایره می گوئیم.

می توان دید که :

الف) اگر نقطه ای مثل B روی دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است، یعنی

$$OB = r$$

ب) اگر نقطه ای مثل A درون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره ... **کمتر از** ... شعاع دایرهاست، یعنی $OA < r$ پ) اگر نقطه ای مثل C بیرون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره ... **بیشتر از** ... شعاع دایرهاست، یعنی $OC > r$

بدین ترتیب اگر معادله (O, r) به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می توان وضعیت نقاط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد :

نقاطی که در معادله $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ صدق کنند، نقاطی از صفحه هستند که روی دایره قرار دارند.

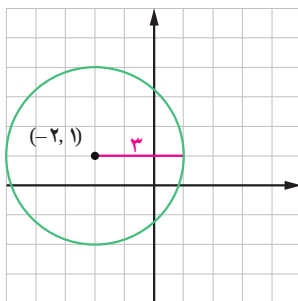
مجموعه جواب $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می کند که **درون دایره قرار دارند**

مجموعه جواب $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می کند که **خارج دایره قرار دارد**

مثال :

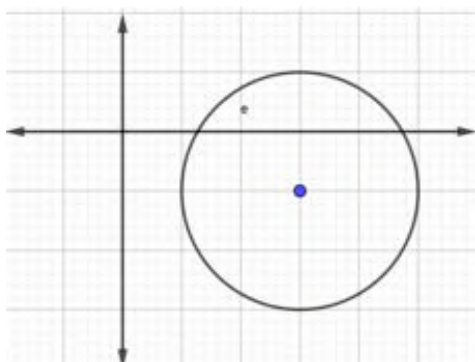
الف) اگر مرکز دایره ای نقطه $(-2, 1)$ و شعاع آن ۳ باشد، معادله استاندارد دایره به شکل زیر خواهد بود :

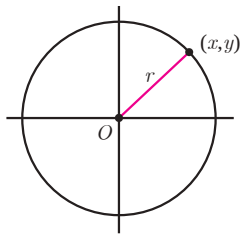
$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$



ب) اگر معادله ای به شکل $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ باشد، مختصات مرکز آن $(3, -1)$ و اندازه شعاع برابر با ۲ است.

رسم شکل برعهده دانش آموزان است.





۱ در حالت های زیر، معادله دایره را بنویسید:

$$x^2 + y^2 = 4$$

الف) دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ب) دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳.

پ) دایره ای که از نقطه $(1, -3)$ بگذرد و مرکز آن $(2, -1)$ باشد.

$$r = \sqrt{(2-1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$$

۲ با تکمیل جدول، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید:

معادله دایره	شعاع و مختصات مرکز دایره	نقاط		
		$A(1, 1)$ بیرون دایره	$B(0, 3)$ روی دایره	$C(-2, 4)$ درون دایره
$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$	$O(-2, 3), r=2$	$(1+2)^2 + (1-3)^2 = 4 > 4$	$(0+2)^2 + (3-3)^2 = 4 = 4$	$(-2+2)^2 + (4-3)^2 = 1 < 4$
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$	دایره به مرکز $(1, -2)$ و شعاع ۳	$(1-1)^2 + (1+2)^2 = 9 = 9$	بیرون دایره	بیرون دایره
		$(0-1)^2 + (3+2)^2 = 26 > 9$	$(0-1)^2 + (3+2)^2 = 26 > 9$	$(-2-1)^2 + (4+2)^2 = 37 > 9$

۳ اگر معادله دایره ای به شکل $(x+1)^2 + y^2 = 4$ باشد:

$$O(-1, 0), r=2$$

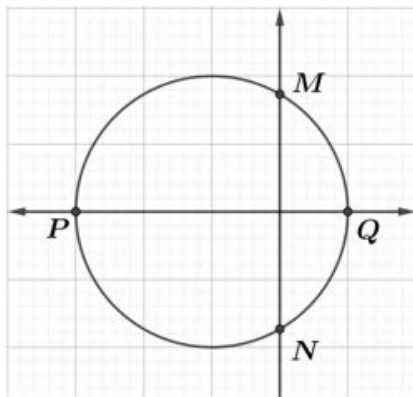
الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.

ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$$x=0 \rightarrow 1^2 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3} \quad N(0, -\sqrt{3}), M(0, \sqrt{3})$$

$$y=0 \rightarrow (x+1)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x+1=2 \rightarrow x=1 \\ x+1=-2 \rightarrow x=-3 \end{cases} \quad Q(1, 0), P(-3, 0)$$

پ) شکل این دایره را رسم کنید و صحت پاسخ های خود را به کمک شکل بررسی کنید.

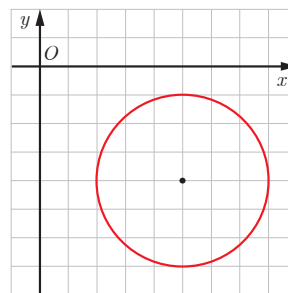
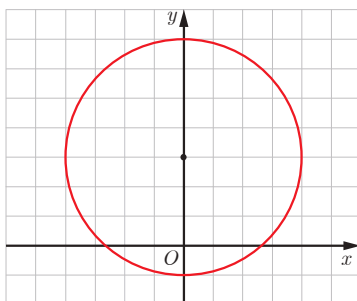


توشه ای برای موفقیت

۴ معادله دایره های زیر را بنویسید:

$$r=4, O(0, 3)$$

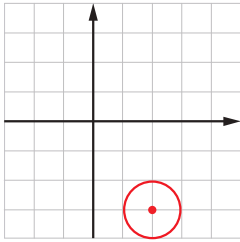
$$x^2 + (y-3)^2 = 16$$



$$r=3, O(5, -4)$$

$$(x-5)^2 + (y+4)^2 = 9$$

معادله گسترده یک دایره



معادله دایره $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ را در نظر بگیرید.

این معادله را به کمک اتحادها می توان به شکل زیر ساده کرد :

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 1$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$$

این رابطه را **معادله گسترده دایره** یا معادله ضمنی دایره می نامیم.

بدیهی است که معادله استاندارد دایره و معادله گسترده آن به یکدیگر قابل تبدیل اند.

مثال : فرض کنید معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ باشد. با استفاده از

مربع کامل کردن، سعی می کنیم معادله گسترده را به معادله استاندارد تبدیل کنیم. داریم :

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$$

$$\rightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) + 6 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + 6 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$$

مختصات مرکز و شعاع این دایره را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$r = 2, O(3, -1)$$

معادله گسترده یک دایره را به شکل $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر می گیریم. با تبدیل $x^2 + ax$ و $y^2 + by$ به دو مربع کامل داریم :

$$\rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

بدین ترتیب :

اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله گسترده یک دایره باشد، مختصات مرکز این

دایره $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ است. شعاع این دایره برابر است با : $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

بدیهی است که با توجه به مثبت بودن r ، معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره است اگر و تنها اگر رابطه $a^2 + b^2 > 4c$ برقرار باشد. (چرا؟)

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} > 0 \rightarrow a^2 + b^2 - 4c > 0 \rightarrow a^2 + b^2 > 4c$$

کار در کلاس

معادله گسترده دایره ای به شکل $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن را پیدا کنید و معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

$$O \left| \begin{array}{l} \frac{-a}{r} = -\frac{-r}{r} = 1 \\ \frac{-b}{r} = -\frac{-s}{r} = 3 \end{array} \right.$$

$$r = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 + b^2 - rc} = \frac{1}{r} \sqrt{1 + 36 - 12} = \frac{1}{r} \sqrt{16} = 2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \rightarrow \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + \underbrace{y^2 - 6y + 9}_{(y-3)^2} = \underbrace{10 - 6}_{4 = 2^2}$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

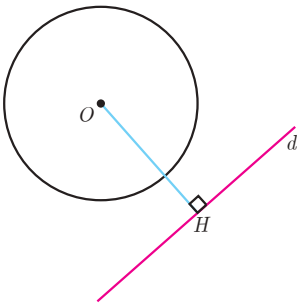
توشه ای برای موفقیت

اوضاع نسبی خط و دایره

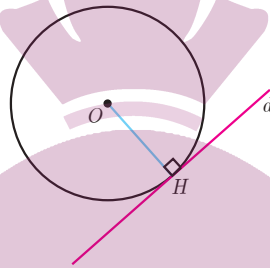
در سال های گذشته به طور شهودی با اوضاع نسبی خط و دایره آشنا شده اید. در این فعالیت قصد داریم به کمک معادله دایره و خط، این مفاهیم را مرور کنیم.

دایره $C(O, r)$ را در صفحه در نظر بگیرید. با توجه به شکل، به سادگی می توان دید که خط و دایره می توانند یک، یا دو نقطه اشتراک داشته، یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند.

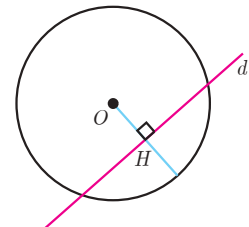
اگر خط d ، دایره را قطع نکند،
 $OH > r$ است.



اگر خط d بر دایره مماس باشد،
 $OH = r$ است.



اگر خط d با دایره متقاطع باشد،
 $OH < r$ است.



یادآوری

۱- خط مماس در نقطه تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.

۲- فاصله نقطه $A(x, y)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

در حالتی که معادله دایره $C(O, r)$ به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می توان وضعیت خطوط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد.

مثال:

وضعیت خط $x + y = 3$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ مشخص کنید.

حل:

کافی است فاصله مرکز دایره را از خط داده شده حساب کرده و اندازه آن را با اندازه شعاع دایره مقایسه کنیم.

مرکز دایره از رابطه $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ ، نقطه $(1, 0)$ و شعاع دایره از رابطه $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{c}{2}$ برابر است با ۲.

از طرفی فاصله مرکز دایره از خط داده شده برابر است با $d = \frac{|1(1) + 1(0) - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ و از آنجا که این مقدار از شعاع دایره کمتر

است، پس می توان چنین نتیجه گرفت که خط داده شده با دایره متقاطع است.

۱ در موارد زیر وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) دایره $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ و خط $x + y = 1$

ب) دایره $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ و خط $y = -1$

۲ معادله دایره ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن $C(1, 2)$ باشد.

$$d = \frac{|3 + 8 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2 \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

۳ مرکز دایره ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ و تری به طول ۶ جدا می کند. معادله این دایره را بنویسید.

$$d = \frac{|3(2) - 4(-3) + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\triangle OAH: r^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \rightarrow r = 5 \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

اوضاع نسبی دو دایره

نظیر آنچه برای اوضاع نسبی نقطه و دایره و همین طور خط و دایره دیدید، قصد داریم ابتدا به طور شهودی وضعیت های مختلفی را که دو دایره دلخواه می توانند نسبت به هم داشته باشند، مشخص کنیم و سپس وضعیت دو دایره را نسبت به یکدیگر، در صفحه مختصات و با داشتن معادله دو دایره بررسی کنیم.



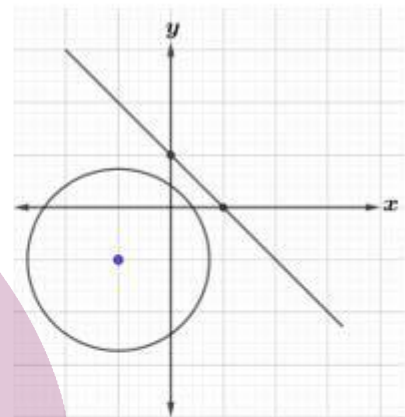
الف

کاردر کلاس ۱

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \rightarrow \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} + \underbrace{y^2 + 2y + 1}_{(y+1)^2} = \underbrace{1}_{(\sqrt{1})^2}$$

$$O \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad r = \sqrt{1} \quad d = \frac{|-1-1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d > r$$

خط و دایره نقطه مشترک ندارند



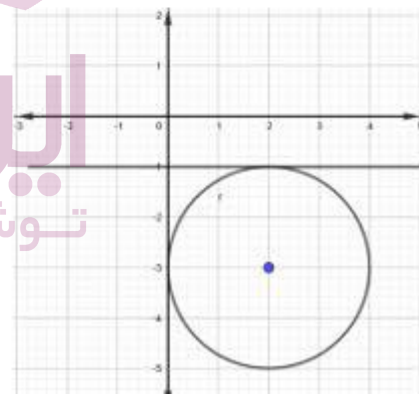
(ب)

$$O \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix} \quad r = 2 \quad d = \frac{|-3+1|}{\sqrt{0+1}} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow d = r$$

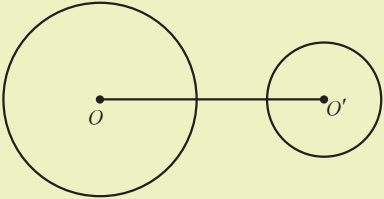
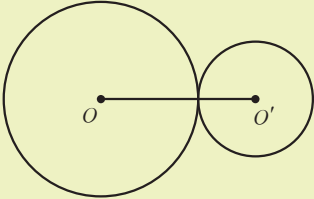
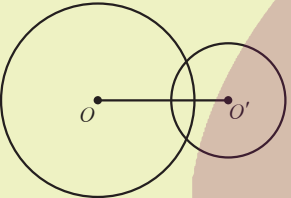
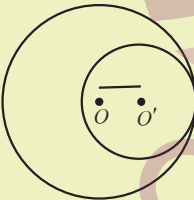
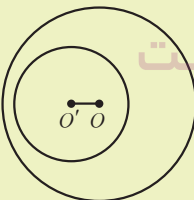
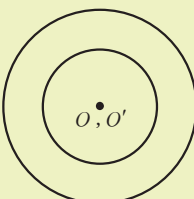
ایران تونش

توشه ای برای موفقیت

خط بر دایره مماس است.



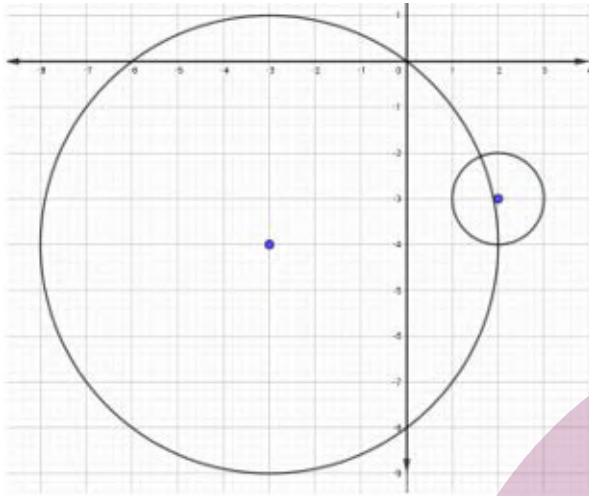
دو دایره دلخواه $C(O, r)$ و $C'(O', r')$ را با فرض $r > r'$ در نظر بگیرید. در جدول زیر حالت های مختلف دو دایره نسبت به هم داده شده و در هر مورد، رابطه بین اندازه شعاع های دو دایره با اندازه فاصله بین مرکزهای دو دایره بیان شده است. پاره خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می کند، **خط مرکزین** نامیده می شود. در اینجا اندازه خط مرکزین را با d نمایش داده ایم.

	$d > r + r'$	دو دایره بیرون هم (متخارج)
	$d = r + r'$	دو دایره مماس بیرون
	$r - r' < d < r + r'$	دو دایره متقاطع
	$d = r - r'$	دو دایره مماس درون
	$d < r - r'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دو دایره هم مرکز

در حالتی که معادله دو دایره را داشته باشیم، بدون رسم دو دایره می توانیم وضعیت آنها را نسبت به هم مشخص کنیم.

مثال: وضعیت دو دایره $x^2+y^2+6x+8y=0$ و $x^2+y^2-4x+6y+12=0$ را نسبت به هم مشخص کنید و سپس نمودار دو دایره را رسم کنید.

حل: به کمک آنچه دیدیم، ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع هر دایره را پیدا می کنیم و سپس با مقایسه مقادیر مجموع و تفاضل دو شعاع با طول خط مرکزین، وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص می کنیم.



در دایره $x^2+y^2+6x+8y=0$ با پیدا کردن مرکز دایره و اندازه شعاع داریم: مرکز دایره نقطه $O(-3, -4)$ و اندازه شعاع برابر ۵ است.

به روش مشابه در دایره $x^2+y^2-4x+6y+12=0$ ، مرکز دایره نقطه $O'(2, -3)$ و اندازه شعاع $r'=1$ است.

از طرفی طول خط مرکزین برابر است با: $OO' = \sqrt{(-3-2)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{26}$ بنابراین از آنجا که داریم: $5-1 < \sqrt{26} < 5+1$ یعنی $r-r' < d < r+r'$ دایره های فوق، متقاطع هستند.

رسم دو دایره و بررسی صحت پاسخ به کمک شکل، به دانش آموزان واگذار شده است.

کار در کلاس

۱) با انجام مراحل زیر، معادله دایره ای را بنویسید که بر دایره $x^2+y^2+2x-4y=0$ مماس بیرون و مرکز آن نقطه $O(2, -2)$ باشد:

$$r' = \frac{1}{2} \sqrt{4+16+16} = 3$$

$$O' \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

— اندازه r' یعنی شعاع دایره داده شده برابر است با:
— طول OO' برابر است با: $OO' = \sqrt{(2+1)^2 + (-2-2)^2} = 5$
— شرط اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند این است که: $5 = 2 + 3$ پس شعاع r باید برابر ۲ باشد.

— معادله مطلوب را با معلوم بودن اندازه شعاع و مختصات مرکز آن بنویسید: $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$

پیش از نوشتن جواب، وضعیت دو دایره را با دوستان مقایسه کنید.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

$$OO' = 0$$

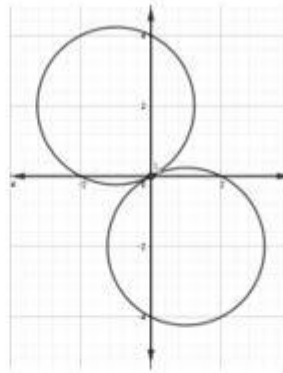
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R'^2$$

(ب) دو دایره بیرون هم باشند. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4, x^2+y^2=1$

۳) برای موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید:

$$x^2+y^2+2x-4y=0 \text{ و } x^2+y^2-2x+4y=0 \text{ (الف)}$$

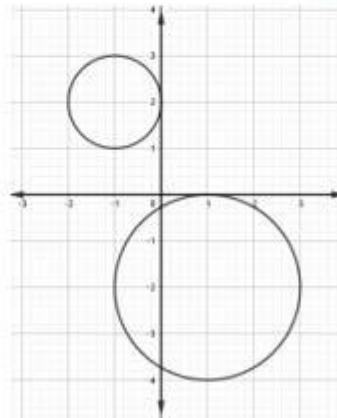
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1 \text{ و } x^2+y^2-2x+4y+1=0 \text{ (ب)}$$



$$O \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad r = \frac{1}{1} \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$O' \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad r' = \frac{1}{1} \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow OO' = r + r' \rightarrow \text{دو دایره مماس خارجند}$$



(ب)

$$O \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$r = 1$$

$$O' \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$r' = \frac{1}{1} \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow OO' > r + r' \rightarrow \text{دو دایره متخارجند}$$

تمرین

۱ در هر دایره مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید، محل تقاطع هر دایره را با محورهای مختصات، در صورت وجود مشخص کنید و درستی پاسخ خود را به کمک رسم دایره بررسی کنید.

(الف) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

(ب) $x^2 + (y + 3)^2 - 4 = 0$

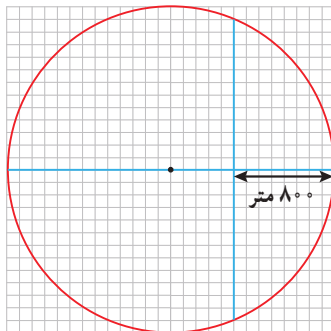
۲ در حالت های زیر معادله دایره را بنویسید :

(الف) دایره ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2, -1)$ باشد.

(ب) دایره ای که مرکز آن $(2, 3)$ و نقطه $(-3, -9)$ نقطه ای روی آن باشد.

(پ) دایره ای که نقاط $(0, 3)$ و $(-4, -1)$ دو سری یکی از قطرهای آن باشند.

۳ وضعیت نقاط $(1, 0)$ ، $(-1, 0)$ ، $(-2, -1)$ و $(0, 0)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مشخص کنید.



۴ شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره ای شکل به شعاع 1300 متر، دو مسیر پیاده روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(13, 13)$ و هر واحد برابر 100 متر باشد :

(الف) معادله این دایره چیست؟

(ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

(پ) دو مسیر در چه نقطه ای با یکدیگر متقاطع اند؟

(ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟

۵ معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید و معادله آن را به شکل استاندارد بنویسید.

۶ وضع خط های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

(الف) $6x + 4y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

(ب) $y = -x - 2$ و $x^2 + y^2 = 2$

۷ اگر بدانیم خط l در نقطه $A(3, 4)$ بر دایره ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادله خط مماس چیست؟

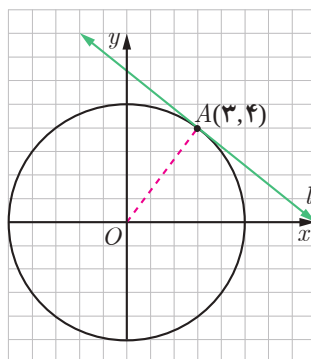
۸ معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن، نقطه $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.

۹ مشخص کنید در حالت های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

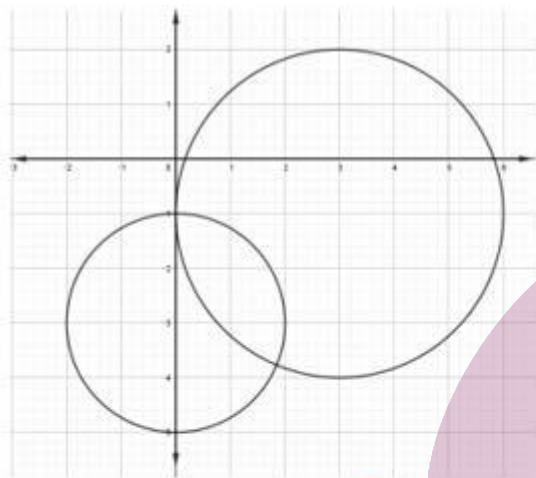
(الف) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ و $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9$

(ب) $x^2 + (y - 5)^2 = 5$ و $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 7$

۱۰ معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد.



حل تمرین ۱:



$$r = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4 - 4} = 3$$

$$O \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

الف

$$r' = 2$$

$$O' \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \end{vmatrix}$$

ب

الف $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$y^2 + 2y + 1 = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow A \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

بر محور y مماس است

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow x_1, x_2 = 3 \pm 2\sqrt{2} > 0$$

دایره در سمت راست مبدا محور x ها را قطع می کند

ایران نوشته

توشه ای برای موفقیت

ب $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$(y + 3)^2 = 4 \rightarrow y = -1, y = -5$$

$$x^2 + 9 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = -5$$

پس محور x ها را قطع نمی کند

تمرین ۲:

$$OC = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} = r \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

(الف)

$$CA = \sqrt{(2+3)^2 + (3+9)^2} = 13 = r \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 = 169$$

(ب)

(پ)

وسط دو نقطه $C \left(\frac{0+(-4)}{2} = -2, \frac{-1+3}{2} = 1 \right)$ $2r = \sqrt{(-4-0)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2} \rightarrow r = 2\sqrt{2}$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

تمرین ۳:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

$$p(1,0) = 1 + 0 - 2 + 0 + 1 = 0$$

روی دایره

$$p(0,0) = 0 + 0 - 0 + 0 + 1 = 1 > 0$$

خارج دایره

$$p(-1,-2) = 1 + 4 - 2 - 8 + 1 = 0$$

روی دایره

$$p(2,3) = 4 + 9 - 4 + 12 + 1 = 22 > 0$$

خارج دایره

ایران تونش

تمرین ۴:

$$(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$$

(الف)

$$x=18 \rightarrow 25 + (y-13)^2 = 169 \rightarrow (y-13)^2 = 144 \rightarrow \begin{cases} y-13=12 \rightarrow y=25 \\ y-13=-12 \rightarrow y=1 \end{cases}$$

(ب)

$$A \begin{vmatrix} 18 \\ 1 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 18 \\ 25 \end{vmatrix}$$

$$AB = 25 - 1 = 24 \rightarrow 24 \text{ متر}$$

(ت)

تمرین ۵:

$$O \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad r = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} r = \sqrt{2}$$

$$x + y + 2 = 0 \quad d = \frac{|0 + 0 + 2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$$

$$d = r = \sqrt{2} \quad \text{خط بردایره مماس است.}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{vmatrix} r = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 - 28} = 1$$

$$d = \frac{|6(2) + 4(2)|}{\sqrt{36 + 16}} = \frac{20}{\sqrt{52}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

$$d = \frac{10\sqrt{13}}{13} > r = 1 \quad \text{خط ودایره نقطه مشترک ندارند}$$

غیرمقاطع اند

$$OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = r$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$m_{OA} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3} \rightarrow m' = -\frac{3}{4} \quad A \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \rightarrow 3x + 4y - 25 = 0$$

ایران زونتنه
توشه ای برای موفقیت

تمرین ۸:

$$d = \frac{|\mu(o) - \mu(\mu) - \mu|}{\sqrt{\mu^2 + (-\mu)^2}} = \frac{1\Delta}{\Delta} = \mu = r$$

$$(x - o)^2 + (y - \mu)^2 = 9 \rightarrow x^2 + (y - \mu)^2 = 9$$

تمرین ۹: الف)

$$O \begin{vmatrix} 1 \\ -\mu \end{vmatrix} \quad r = \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu^2 + 16 + 16} = \mu$$

$$O' \begin{vmatrix} -1 \\ \mu \end{vmatrix} \quad r' = \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu^2 + 16 + 16\mu^2} = \sqrt{17}$$

$$OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-\mu-\mu)^2} = \mu\sqrt{5} \Rightarrow r - r' < OO' < r + r' \rightarrow \text{مقاطعند}$$

$$O \begin{vmatrix} \mu \\ -\mu \end{vmatrix} \quad r = \sqrt{2}$$

$$O' \begin{vmatrix} o \\ \Delta \end{vmatrix} \quad r' = \sqrt{5}$$

(ب)

$$OO' = \sqrt{(\mu - o)^2 + (-\mu - \Delta)^2} = \mu\sqrt{17} \Rightarrow OO' > r + r' \rightarrow \text{متخارجند}$$

تمرین ۱۰:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 13 + 4 + 9 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 14$$

$$O \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad r = 4 \quad O' \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad d = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$d = |r - r'| \rightarrow 5 = |r - 4| \Rightarrow \begin{aligned} r - 4 &= 5 \rightarrow r = 9 \\ r - 4 &= -5 \rightarrow r = -1 \end{aligned} \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 = 11$$