



ایران تونل

توشه ای برای موفقیت

اکسترمم های تابع



بهینه سازی

درس اول

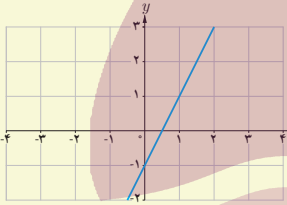
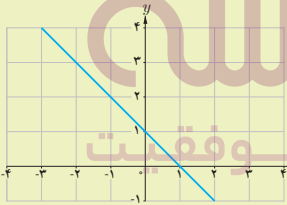
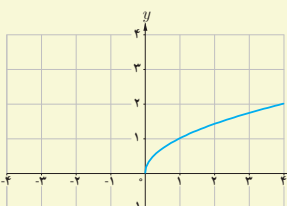
اکسترم‌های تابع

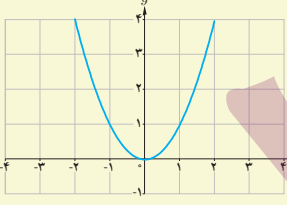
یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق

در فصل اول، تعریف تابع صعودی و تابع نزولی را دیدیم. در اینجا می‌خواهیم ارتباط علامت مشتق یک تابع را با صعودی یا نزولی بودن آن تابع بررسی کنیم.

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید. در این جدول ضابطه و نمودار چند تابع ارائه شده است که از قبل با آنها آشنا هستیم. همچنین یکنوایی این تابع‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه، مشتق هر کدام از این تابع‌ها، تعیین علامت شده است. جدول را کامل کنید.

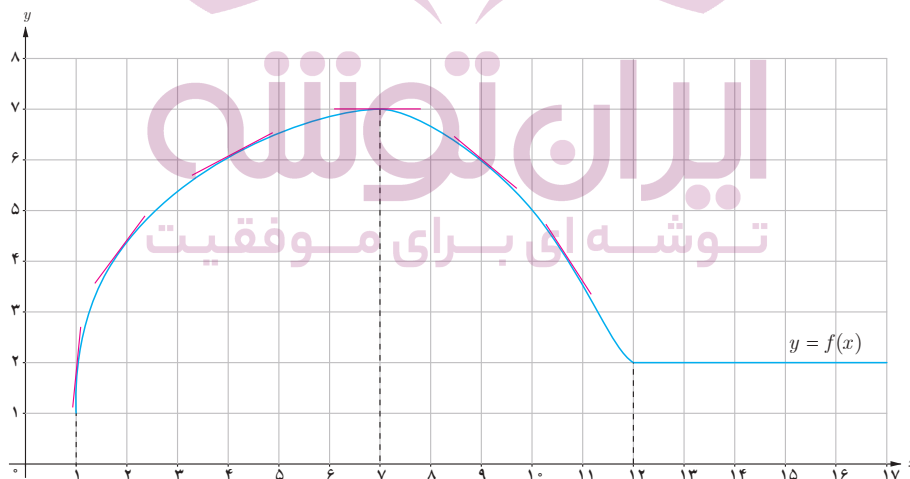
علامت مشتق	تابع مشتق	یکنوایی تابع	نمودار تابع	ضابطه تابع
f' همواره مثبت است	$f'(x) = 2$	تابع f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است		$f(x) = 2x - 1$
g' همواره ... است منفی	$g'(x) = -1$	تابع g در $\mathbb{R}$ اکیداً ... است نزولی		$g(x) = -x + 1$
h' در $(0, +\infty)$... است مثبت	$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	تابع h در $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است		$h(x) = \sqrt{x}$

$u(x) = -\sqrt{x}$		تابع u در $[0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.	$u'(x) = \dots$	u' در $(0, +\infty)$ ، همواره منفی
$k(x) = x^2$		تابع k در $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.	$k'(x) = 2x$	k' در $(-\infty, 0)$ منفی و در $(0, +\infty)$ مثبت است.
$l(x) = \dots$				

با بررسی جدول بالا، توضیح دهید که چه رابطه‌ای بین علامت مشتق تابع در یک بازه و یکنوایی تابع در آن بازه وجود دارد.

کار در کلاس

از فصل قبل می‌دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است. تابع زیر را در نظر بگیرید:



ملاحظه می‌شود که:

الف) در بازه $(1, 7)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f ، مثبت است؛ بنابراین در این بازه علامت f' مثبت است.
 نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f ، منفی است؛ بنابراین در این بازه علامت f' منفی است.

منفی

منفی

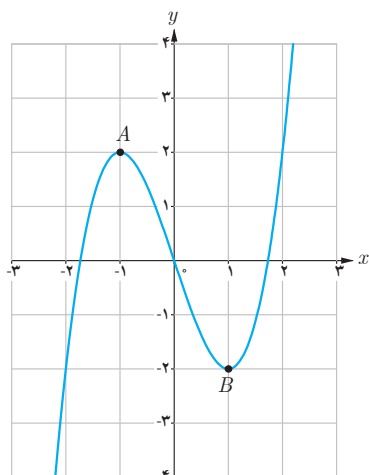
پ) در بازه $(12, +\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر است.

صفر

مطلب فوق برای توابع مشتق پذیر همواره درست است که آن را به شکل زیر بیان می کنیم :

آزمون یکنوایی تابع

- الف) در یک بازه از دامنه اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.
 ب) در یک بازه از دامنه اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.
 پ) در یک بازه از دامنه اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.



بنابراین برای مشخص کردن بازه های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابع f ، کافی است مانند مثال زیر، f' را تعیین علامت کنیم.

مثال^۱: تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه ها اکیداً نزولی است؟

حل: f' را به دست آورده و آن را تعیین علامت می کنیم.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
بازه		$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
علامت f'		+	-	+
یکنوایی f		اکیداً صعودی	اکیداً نزولی	اکیداً صعودی

نمودار تابع f مربوط به مثال قبل را رسم کرده ایم. آن را با جدول مقایسه کنید.

اکسترم های نسبی تابع

در نمودار این تابع، نقاط به طول ۱- و ۱ را که صفرهای تابع f' هستند مورد توجه قرار دهید. اهمیت این نقاط در این مثال از این جهت است که در هر یک از آنها، رفتار تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن عوض شده است (جدول ملاحظه شود). اگر این دو نقطه را به ترتیب A و B بنامیم، آنگاه A نقطهٔ ماکزیمم نسبی f و B نقطهٔ مینیمم نسبی آن است.

۱- رسم نمودار تابع های درجه سوم در حالت کلی در زمره اهداف کتاب حاضر نیست.

تعریف: گوئیم تابع f در نقطه ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می شود.

همچنان که گفته شد، تابع مثال قبل در نقطه 2 ، $A(-1)$ ماکزیمم نسبی دارد و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر 2 می باشد. مینیمم نسبی به روش مشابه تعریف می شود.

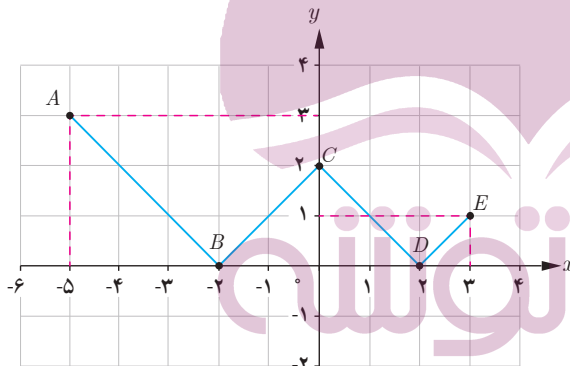
تعریف: گوئیم تابع f در نقطه ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می نامیم.

در مثال قبل مقدار مینیمم نسبی تابع چقدر است؟ **در نقطه $x=3$ دارای می نیمم نسبی هست که مقدار آن برابر 1 - است**

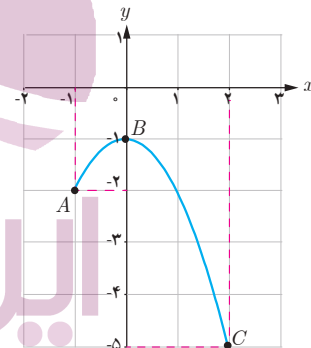
تذکر: نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع را نقاط اکسترم آن تابع هم می گوئیم. در تابع مثال قبل، نقاط A و B اکسترم های نسبی تابع هستند.

کار در کلاس

نوع اکسترم های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول ها را کامل کنید.



الف) $f(x) = ||x| - 2|, x \in [-5, 3]$



ب) $g(x) = -x^2 - 1, x \in [-1, 2]$

نقطه	نوع اکسترم نسبی	مقدار اکسترم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	-	-
B	min نسبی	0	$f'(-2)$ موجود نیست
C	max نسبی	2	$f'(0)$ موجود نیست
D	min نسبی	1	$f'(2)$ موجود نیست
E	نه min و نه max	-	-

نقطه	نوع اکسترم نسبی	مقدار اکسترم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترم نسبی نیست	-	-
B	max نسبی	-1	$f'(0)$ برابر صفر است
C	...	-	-

نقطه اکسترم نسبی ندارد

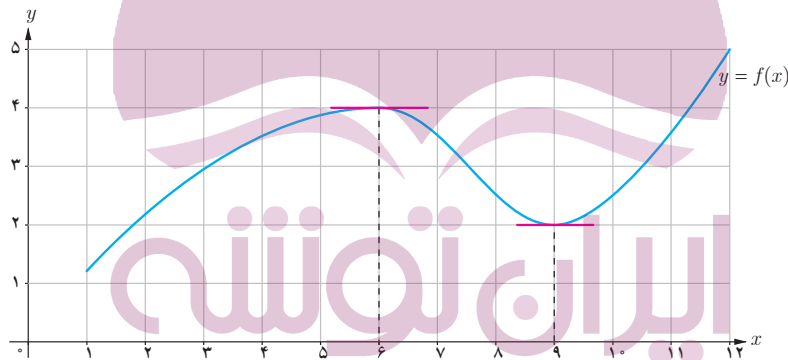
نقاط بحرانی تابع

حال این سؤال پیش می آید که در چه نقاطی از دامنه تابع f باید به دنبال اکسترم های نسبی آن باشیم؟ همان گونه که در تابع های قبلی دیده می شود، جواب عبارت است از نقاطی از دامنه f که f' در آنها تعریف نشده باشد و همچنین نقاطی که مقدار f' در آنها برابر صفر است. به لحاظ اهمیت این دو دسته از نقاط، شایسته است که نامی برای خود داشته باشند؛ آنها را نقاط بحرانی تابع می نامیم:

تعریف: فرض کنیم $c \in D_f$ و f در یک همسایگی از c تعریف شده باشد. نقطه c به طول c را یک نقطه بحرانی برای تابع f می نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال: در کار در کلاس قبل دیدیم که تابع $|x+2|$ در نقاط C, B و D مشتق ناپذیر است. به عبارت دیگر، نقاط به طول -2 ، صفر و 2 که جزو نقاط دامنه f هستند، در دامنه f نیستند. پس، این سه نقطه، نقاط بحرانی تابع f می باشند. همچنین در همین کار در کلاس، مشتق تابع $g(x) = -x^3 - 1$ به ازای صفر برابر صفر است؛ یعنی $g'(0) = 0$. بنابراین نقطه $(0, -1)$ ، نقطه بحرانی تابع g است.

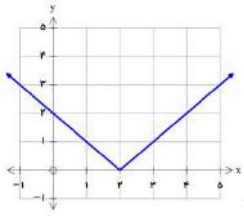
نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع زیر را در نظر بگیرید. دیده می شود که خط مماس بر نمودار f در این نقاط به صورت افقی، یعنی با شیب صفر است. از آنجا که مشتق تابع در یک نقطه، برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه است، لذا در این تابع داریم:

$$f'(9) = 0, \quad f'(6) = 0$$


این مطلب در مورد نقاط اکسترم نسبی هر تابع مشتق پذیر، درست است. قضیه زیر را در این مورد بیان می کنیم.

قضیه فرما^۱: اگر تابع f در نقطه c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$. به عبارت دیگر، هر نقطه اکسترم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

^۱ Pierre de Fermat (۱۶۰۱ - ۱۶۶۵)



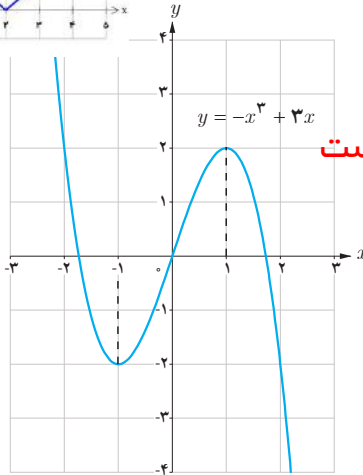
$$f(x) = |x - 2| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 2 & x > 2 \\ x - 2 & x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 2 \\ -1 & x < 2 \end{cases}$$

کار در کلاس

الف) با رسم نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ ، نشان دهید که در $x = 2$ مینیمم نسبی دارد.

ب) آیا $f'(2)$ موجود است؟ چرا؟ **خیر زیرا مشتق چپ و راست باهم برابر نیست**

پ) آیا $x = 2$ طول نقطه بحرانی تابع است؟ چرا؟ **بله زیرا تابع در 2 مشتق پذیر نیست**



$$f'(x) = -3x^2 + 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

۲) نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x$ را رسم کرده ایم.

الف) طول‌های نقاط اکسترم نسبی f را تعیین کنید.

ب) می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ریشه‌های معادله $f'(x)$ ، یعنی

$$f(1) = 2 \quad f(-1) = -2$$

طول‌های نقاط بحرانی تابع را به دست آورید.

پ) با توجه به الف و ب، درستی قضیه فرما را در مورد این تابع بررسی کنید.

قضیه فرما برقرار است

۳) تابع باضابطه $f(x) = -x^3 + 2x + 2$ را در نظر بگیرید. f همواره مشتق‌پذیر است.

$$\text{الف) } f'(x) \text{ را به دست آورید. } f'(x) = -3x^2 + 2 \xrightarrow{f'(x)=0} -3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

ب) ریشه معادله $f'(x) = 0$ را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به دست آید.

پ) با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطه اکسترم f منطبق بر نقطه بحرانی

آن است؟ **بله**

از مثال‌های قبل، این سؤال مطرح می‌شود که آیا صفرهای تابع مشتق، همواره طول نقاط اکسترم نسبی تابع را به دست می‌دهند؟ با وجود آنکه جواب این سؤال در مورد برخی از تابع‌های مورد بحث ما مثبت است، مثال زیر نشان می‌دهد که این مطلب همیشه هم درست نیست. به عبارت دیگر، عکس قضیه فرما در حالت کلی درست نیست.

مثال: به نمودار تابع $f(x) = (x-1)^3$ دقت کنید. تابع مشتق این تابع به صورت

$f'(x) = 3(x-1)^2$ است. با وجود آنکه مقدار $f'(x)$ در $x = 1$ برابر صفر است،

اما با توجه به نمودار f ، دیده می‌شود که نقطه به طول ۱ برای این تابع نه ماکزیمم

نسبی است و نه مینیمم نسبی. دلیل این مطلب، آن است که f' ، قبل و بعد از $x = 1$

همواره مثبت است؛ به عبارت دیگر، f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است و لذا نمی‌تواند

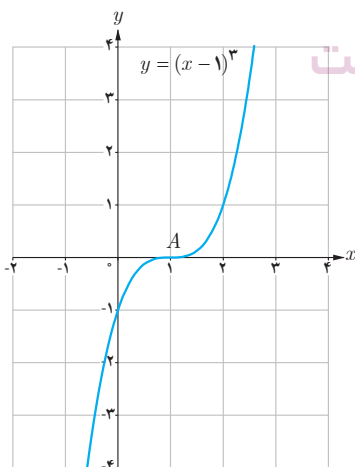
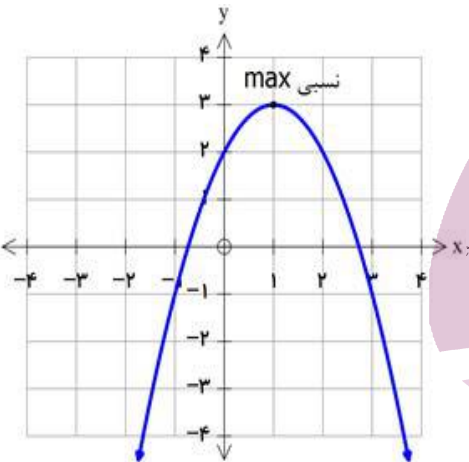
اکسترم نسبی داشته باشد.

تذکر: مثال بالا نشان می‌دهد که عکس قضیه فرما در حالت کلی درست نیست. در

واقع نقطه A به طول $x = 1$ برای تابع $f(x) = (x-1)^3$ یک نقطه بحرانی است، اما

اکسترم نسبی آن نیست. شما یک مثال نقض دیگر برای عکس این قضیه ارائه کنید

که نشان دهد یک نقطه بحرانی لزوماً اکسترم نسبی نیست.

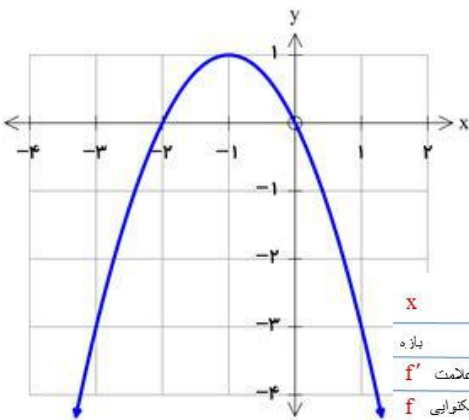


جدول تغییرات تابع $f(x) = -x^2 - 2x$ در زیر آمده است که در آن با تعیین علامت f' ، بازه هایی که تابع f در آنها صعودی است و همچنین بازه هایی که نزولی می باشد، تعیین شده است. همچنین، اکسترمم نسبی تابع در جدول مشخص شده است:

$$f'(x) = -2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ طول نقطه بحرانی}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
بازه	$(-\infty, -1)$		$(-1, +\infty)$
علامت f'	+	۰	-
یکنوایی f	صعودی اکید	نسبی max	نزولی اکید
	$-\infty$		$-\infty$



با توجه به جدول، مشخص است که نقطه به طول (-1) ، ماکزیمم نسبی تابع است؛ چرا که رفتار تابع در این نقطه از صعودی اکید به نزولی اکید تغییر کرده است. با توجه به جدول و در صورت لزوم با یافتن نقاط دیگری از تابع، نمودار آن را رسم کنید.

۲ جدولی مشابه جدول بالا برای تابع $g(x) = x^3 - 3x^2$ رسم کنید که نقاط اکسترمم نسبی تابع در آن مشخص شده باشد.

X	$-\infty$	۰	۲	$+\infty$		
بازه	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$			
علامت f'	+	۰	-	۰	+	
یکنوایی f	$-\infty$	صعودی	نسبی max	نسبی min	صعودی	$+\infty$

مثال های بالا از توابع پیوسته، این مطلب را القا می کنند که تغییر رفتار این گونه تابع ها در یک نقطه از صعودی بودن به نزولی بودن، نشان دهنده نقطه ماکزیمم نسبی آن تابع است. برای مینیمم نسبی هم می توان مطلب مشابهی را بیان کرد که در ادامه آمده است.

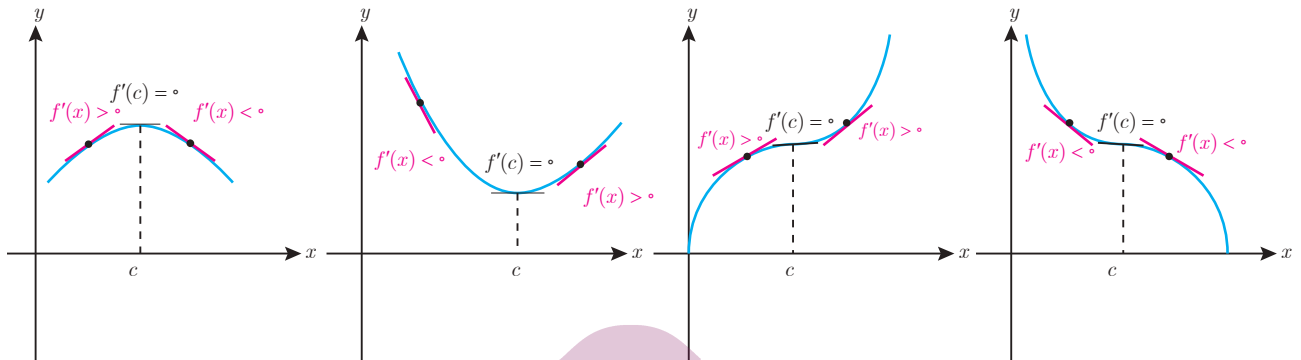
$$g(x) = 3x^2 - 6x \xrightarrow{g'(x)=0} 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

آزمون مشتق اول

فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر باشد.

- (الف) اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.
 (ب) اگر علامت f' در $x = c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f است.
 (پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آنگاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

درستی آزمون مشتق اول را در همسایگی نقطه c در هر یک از نمودارهای زیر مورد توجه قرار دهید.



$x=c$: طول ماکزیمم نسبی

$x=c$: طول مینیمم نسبی

$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی

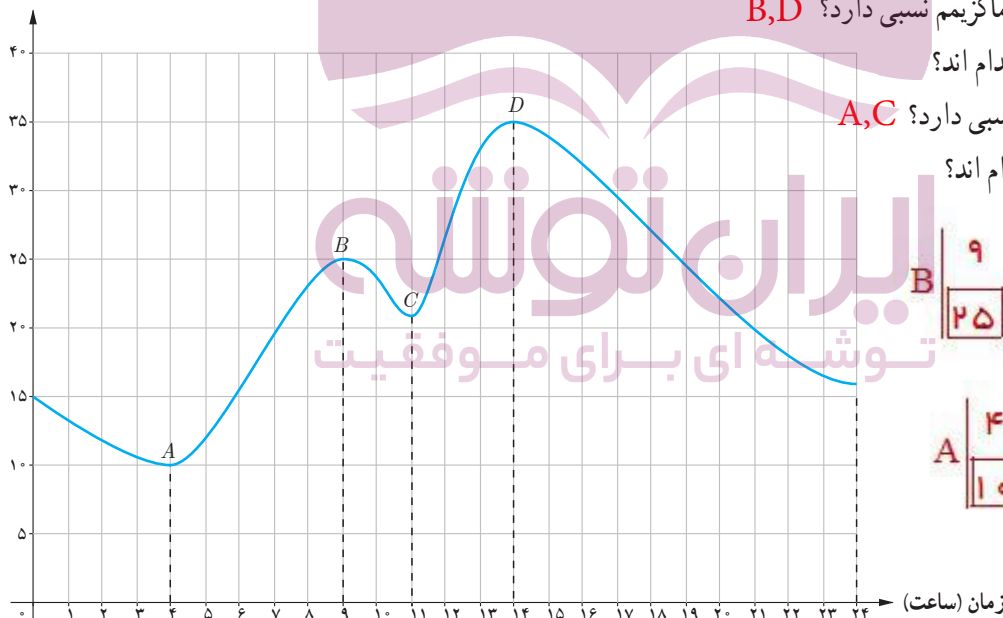
$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی

اکسترم‌های مطلق تابع

فعالیت

نمودار زیر نشان دهنده تغییرات دمایی برای یک شهر در طی ۲۴ ساعت است.

دما (سانتی‌گراد)



الف) تابع مقابل در چه نقاطی ماکزیمم نسبی دارد؟ B, D

ب) مقادیر ماکزیمم نسبی تابع کدام اند؟

پ) تابع در چه نقاطی مینیمم نسبی دارد؟ A, C

ت) مقادیر مینیمم نسبی تابع کدام اند؟

B	$\begin{array}{ c } \hline 9 \\ \hline 25 \\ \hline \end{array}$	D	$\begin{array}{ c } \hline 14 \\ \hline 35 \\ \hline \end{array}$	ب:
A	$\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline 10 \\ \hline \end{array}$	C	$\begin{array}{ c } \hline 11 \\ \hline 22 \\ \hline \end{array}$	ت:

با توجه به نمودار، دیده می‌شود که دمای هوا در ساعت ۱۴ بیشترین مقدار و برابر با ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است. در این حالت می‌گوییم، نقطه $D(14, 35)$ ماکزیمم مطلق تابع است و مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۳۵ می‌باشد. نقطه مینیمم مطلق این تابع و همچنین مقدار مینیمم مطلق آن را بنویسید.

تابع در نقطه A دارای می‌نیمم مطلق است و مقدار آن هم برابر ۱۰ می‌باشد.

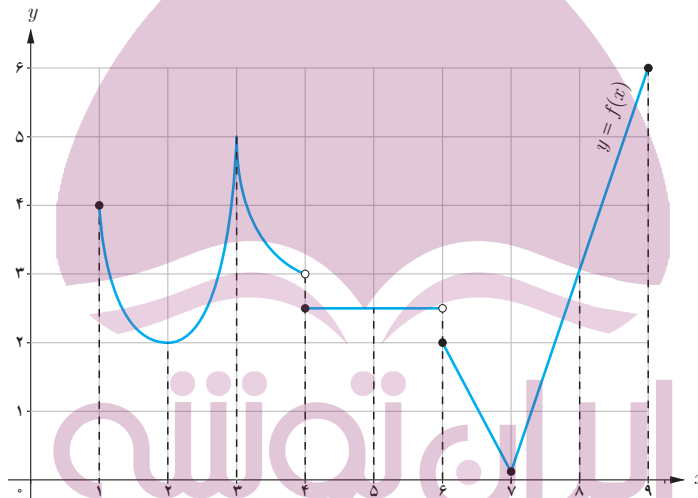
تعریف: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ ، یک نقطه ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

تعریف: با فرض $c \in D_f$ ، نقطه $(c, f(c))$ ، یک نقطه مینیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

در تابع صفحه قبل، اکسترم‌های مطلق تابع f یعنی نقاط A و D ، به ترتیب نقاط مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع هستند.

کار در کلاس

۱ با تکمیل جدول زیر، اکسترم‌های مطلق و نسبی تابع زیر و همچنین نقاط بحرانی آن را در نقاط مشخص شده تعیین کنید.



طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$\max$ مطلق	×	×	×	×	×	×	×	×	✓
$\min$ مطلق	×	×	×	×	×	×	✓	×	×
$\max$ نسبی	×	×	✓	×	✓	×	×	×	×
$\min$ نسبی	×	✓		✓	✓	×	✓	×	×
نقطه بحرانی	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×

۲ به کمک رسم نمودار تابع، مقادیر اکسترم نسبی و مطلق تابع های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

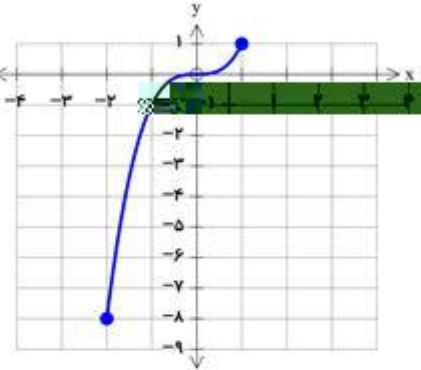
الف) $t(x) = x^2; x \in [-2, 1]$

ب) $g(x) = -x^2; x \in [-2, 3]$

—

پ) $u(x)$

(الف)



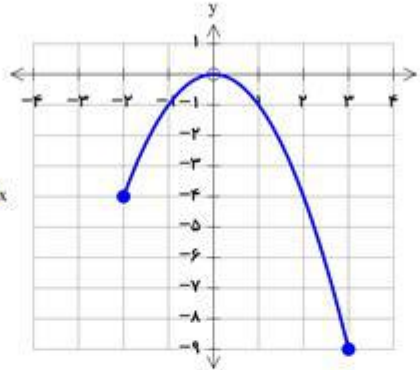
در ۲- می نیمم مطلق دارد که

$$\begin{vmatrix} -2 \\ -8 \end{vmatrix} \quad \text{مقدار آن برابر } -8 \text{ است}$$

در ۱ ماکزیمم مطلق دارد

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{که مقدار آن } 1 \text{ است}$$

(ب)



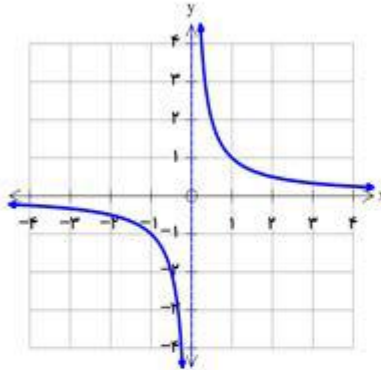
در صفر دارای ماکزیمم مطلق ونسبی است

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{که مقدار آن برابر صفر است}$$

در ۳ می نیمم مطلق دارد که مقدار آن

$$\begin{vmatrix} 3 \\ -9 \end{vmatrix} \quad \text{برابر } -9 \text{ است}$$

(پ)

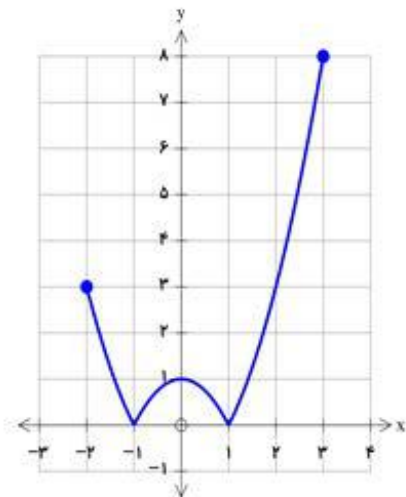


نه ماکزیمم دارد

نه می نیمم

در صفر دارای ماکزیمم نسبی است

در ۱- دارای می نیمم مطلق و نسبی است



تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید و با توجه به نمودار، نقاط اکسترمم مطلق را تعیین کنید.

در ۳ ماکزیمم مطلق دارد

در فعالیت قبل دیده می شود که تابع پیوسته $f(x) = |x^2 - 1|$ در بازه بسته $[-2, 3]$ هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق که این مطلب همواره درست است. همچنین مشاهده می شود که نقاط اکسترمم مطلق، در نقاط بحرانی تابع یا نقاط انتهایی بازه واقع اند. این موضوع نیز همواره درست است.

قضیه: فرض کنیم تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

قضی فوق، تنها وجود اکسترمم های مطلق توابع پیوسته را در بازه های بسته تضمین می کند و به روش یافتن این نقاط اشاره ای ندارد. مراحل یافتن اکسترمم های مطلق تابع پیوسته f در بازه بسته $[a, b]$ به شرح زیر است:

- ۱- مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می یابیم.
- ۲- مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می کنیم.
- ۳- در مرحله ۲، بزرگ ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک ترین آنها مینیمم مطلق تابع در بازه $[a, b]$ است.

مثال: نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = 2x^2 + 3x^3 - 12x$ را در بازه $[-1, 3]$ تعیین کنید.

حل: ابتدا به کمک f' ، نقاط بحرانی تابع را به دست می آوریم.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [-1, 3] \\ x = 1 \text{ نقطه بحرانی} \end{cases}$$

x	-1	1	3
$f(x)$	13	-7	45

علاوه بر نقطه بحرانی، مقدار تابع را در نقاط انتهایی بازه هم به دست می آوریم که در جدول مقابل آمده است.

با توجه به جدول، دیده می شود که بزرگ ترین مقدار برای تابع در بازه $[-1, 3]$ برابر ۴۵ و کوچک ترین مقدار، مساوی ۷- است. به همین دلیل، این دو مقدار به ترتیب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع در این بازه اند.

تمرین

- ۱ بزرگ ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟
- ۲ با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ مشخص کنید تابع در چه بازه هایی صعودی اکید و در کدام بازه ها نزولی اکید است؟
- ۳ نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.
- (الف) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (ب) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ (پ) $h(x) = \sqrt[3]{x}$
- ۴ در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.
- (الف) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ (ب) $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ (پ) $h(x) = -x^3 - 3x + 2$
- ۵ مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.
- (الف) $f(x) = -2x^2 + 9x - 13$; $x \in [-1, 2]$
 (ب) $g(x) = x^2 + 2x - 5$; $x \in [-2, 1]$
- ۶ اگر نقطه $(1, 2)$ ، نقطه کسیرم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.
- ۷ نمودار تابعی مانند f با دامنه $\mathbb{R}$ را رسم کنید به طوری که هر نقطه دلخواه از D_f ، یک نقطه بحرانی f باشد. مسئله چند جواب دارد؟

ایران توشه

توشه ای برای موفقیت

تمرین ۱:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad \xrightarrow{f'(x)=0} \quad 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
f'		+	-	+
f		$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$	

بزرگترین بازه که تابع در آن نزولی اکید است بازه $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ است

تمرین ۲:

$$g'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \quad \xrightarrow{g'(x)=0} \quad -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	+	-	
g		1	

صعودی
نزولی

دربازه $(-\infty, 1)$ صعودی اکید و در بازه $(1, +\infty)$ نزولی اکید است

تمرین ۳:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \quad x = 0 \rightarrow (0, 2) \quad \text{نقطه بحرانی}$$

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \rightarrow g'(x) = 3x^2 + 6x \xrightarrow{g'(x)=0} 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x = 0, x = -2$$

نقاط بحرانی: $(0, -4), (-2, 0)$

$$h(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow h'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

در $x=0$ مشتق پذیر نیست و نقطه $(0, 0)$ نقطه بحرانی است

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$3(x-1)(x+3) = 0 \rightarrow x=1, x=-3$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$		
f'		+	0	-	0	+
f			17	-15		

نقاط بحرانی $(-3, 17), (1, -15)$

$$\max \left| \begin{array}{c} -3 \\ 17 \end{array} \right| \quad \min \left| \begin{array}{c} 1 \\ -15 \end{array} \right|$$

$$g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9 \rightarrow g'(x) = -6x^2 + 6x + 12 \xrightarrow{g'(x)=0} -6x^2 + 6x + 12 = 0$$

$$-6(x-2)(x+1) = 0 \rightarrow x=2, x=-1$$

X	$-\infty$	-1	μ	$+\infty$
g'		-	+	-
g		-16	11	

نقاط بحرانی $(-1, -16), (2, 11)$

$$\min \left| \begin{array}{c} -1 \\ -16 \end{array} \right| \quad \max \left| \begin{array}{c} 2 \\ 11 \end{array} \right|$$

ایران تونل

توشه ای برای موفقیت

$$h(x) = -x^3 - 3x + 2 \rightarrow h'(x) = -3x^2 - 3 \rightarrow g'(x) \neq 0$$

نقطه بحرانی ندارد

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 13 \quad x \in [-1, 2]$$

$$f'(x) = -3x^2 + 18x = 0 \rightarrow -3x(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 6 \end{matrix} \quad \text{ق ق ن}$$

$$x = -1 \rightarrow y = -2$$

$$x = 0 \rightarrow y = -13 \quad \min(0, -13) \quad \max(2, 7)$$

$$x = 2 \rightarrow y = 7 \quad \text{مطلق} \quad \text{مطلق}$$

$$g(x) = x^3 + 2x - 5 \quad x \in [-2, 1]$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{2}{3} \quad \text{ق ق ن}$$

$$x = -2 \rightarrow y = -17$$

$$x = 1 \rightarrow y = -3 \quad \min(-2, -17) \quad \max(1, -3) \\ \text{مطلق} \quad \text{مطلق}$$

تمرین ۶:

$$f(x) = x^3 + bx^2 + d \xrightarrow{(P,1)} 1 = 1 + 4b + d \rightarrow 4b + d = -7 \quad (1)$$

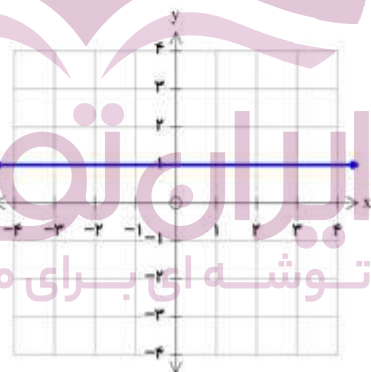
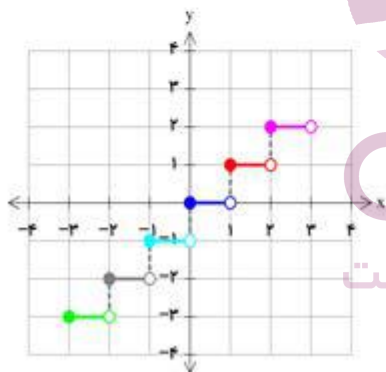
$$f'(x) = 3x^2 + 2bx = 0 \xrightarrow{x=2} 12 + 4b = 0 \rightarrow b = -3$$

$$\xrightarrow{(1)} 4(-3) + d = -7 \rightarrow d = 5$$

تمرین ۷:

$$f(x) = [x] \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = k \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{تابع های جزء صحیح و تابع های ثابت}$$



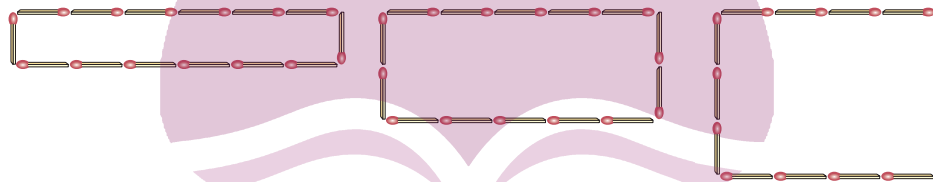
مسئله بی شمار جواب دارد

ایران توانسته
توشه ای برای موفقیت

افراد در طول روز کارهای بسیاری انجام می دهند؛ به جاهای مختلفی می روند، از وسایل متنوعی استفاده می کنند، خرید می کنند، درس می خوانند و ... در تمام این فعالیت ها، هدف آن است که بهترین تصمیم ها اتخاذ گردند. به عنوان مثال، مدیر یک شرکت تولیدی همواره به دنبال آن است که بیشترین سود را با صرف کمترین هزینه کسب نماید. یا اینکه یک باغدار را در نظر بگیرید که با استفاده از روش های نوین کشاورزی، درصدد آن است که با صرف کمترین هزینه، بیشترین مقدار محصول را از واحد سطح برداشت کند. چنین مسئله هایی در زمره مسائل بهینه سازی هستند که برخی از آنها به کمک مشتق قابل حل اند. در اینجا مسائلی را با هدف ماکزیمم کردن مساحت، حجم، سود یا مینیمم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

۱ فرض کنید ۱۴ چوب کبریت در اختیار داشته باشیم و طول هرکدام از آنها را یک واحد در نظر بگیریم. با استفاده از همه این چوب کبریت ها، مستطیل می سازیم. نتیجه کار در سه حالت مختلف در شکل زیر آمده است:



الف) در هر سه حالت، محیط مستطیل ها ثابت و برابر 14 ... واحد است.

ب) در این مستطیل های هم محیط، دیده می شود که مساحت ها برابر نیستند و به ترتیب برابر 6 ، 10 و 12 ... واحد مربع هستند.

پ) مشاهده می شود که هرچه قدر اندازه طول و عرض یک مستطیل به هم نزدیک تر می شود، مساحت آن **افزایشی** یابد.

۲ جدول زیر را مورد توجه قرار دهید که در آن ابعاد و مساحت چند مستطیل با محیط 14 واحد آمده است.

ابعاد مستطیل	0.5×6.5	1×6	2×5	2.5×4.5	3×4	3.5×3.5	...
محیط مستطیل	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴
مساحت	3.25	۶	۱۰	11.25	۱۲	12.25	...

الف) در این جدول، بزرگ ترین عددی که برای مساحت مستطیل دیده می شود، $12/25$ است. اگر برای طول و عرض مستطیل تنها به اعداد

طبیعی محدود نباشیم، آیا می توانید مستطیل دیگری با محیط 14 واحد ارائه کنید که مساحت آن از عدد $12/25$ واحد مربع هم بزرگ تر باشد؟ **بله**

ب) برای حالتی که مساحت مستطیل بزرگ ترین مقدار ممکن می شود، چه حدسی می زنید؟ **$12/25$**

درستی نتیجه ای را که در این فعالیت حدس زدیم، در مثال بعد با استفاده از مشتق بررسی می کنیم.

مثال ۱: نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشند.

حل: فرض کنیم ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است:

$$S = x \cdot l \quad (1)$$

برای آنکه S به صورت تابعی از x بیان شود، می‌توانیم l را برحسب x به دست آوریم:

$$P = 14: \text{ محیط مستطیل}$$

$$2(x + l) = 14 \Rightarrow x + l = 7 \Rightarrow l = 7 - x \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت:

$$S(x) = x(7 - x)$$

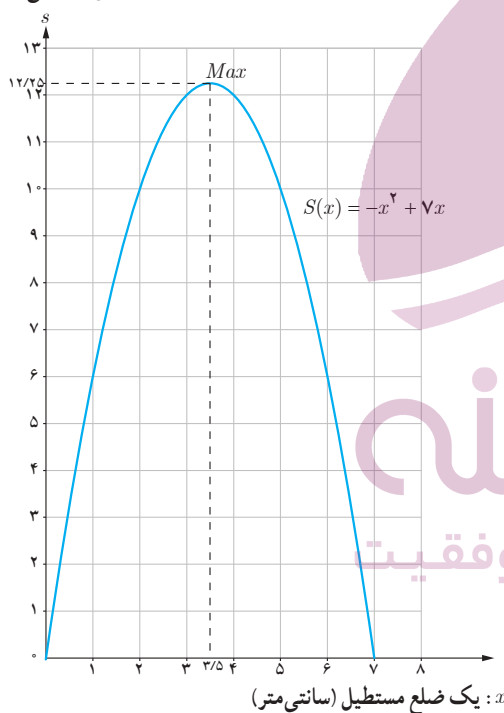
$$S(x) = -x^2 + 7x, \quad x \in [0, 7]$$

از آنجا که S همواره مشتق پذیر است، برای یافتن نقاط بحرانی آن کافی است ریشه معادله $S'(x) = 0$ را بیابیم.

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 7 = 0 \Rightarrow x = 3/5 \quad (\text{طول نقطه بحرانی تابع})$$

جدول تغییرات تابع S در بازه موردنظر به شکل زیر است:

مساحت مستطیل (سانتی متر مربع)

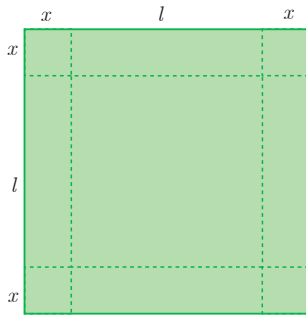


x	۰	۳/۵	۷
$S'(x) = -2x + 7$	+	۰	-
$S(x) = -x^2 + 7x$	۰	۱۲/۲۵ ماکزیمم مطلق	۰

از جدول دیده می‌شود که بیشترین مقدار مساحت، $12/25$ سانتی متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می‌شود که طول و عرض مستطیل هم اندازه و مساوی $3/5$ سانتی متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع $3/5$ سانتی متر داشته باشیم. نمودار تابع S نیز رسم شده است. به نقطه ماکزیمم S در نمودار آن توجه کنید.

تذکر: در مثال قبل، تابعی که به دنبال مقدار اکسترمم مطلق آن بودیم، یک تابع درجه ۲ بود. از پایه‌های قبل هم می‌دانستیم که نقطه

نقطه اکسترمم تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را به دست می‌دهد. اما همیشه تابع‌های موردنظر، درجه ۲ نیستند. با این حال، مراحل کار مشابه مثال قبل خواهد بود. مثال‌های بعد را مورد توجه قرار دهید.



مثال ۲: ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل می خواهیم از چهار گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین های مشخص شده در شکل، یک جعبه در باز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

حل: ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض قاعده آن را با l نمایش می دهیم. آنچه قرار است ماکزیمم شود، مقدار حجم مکعب مستطیل است:

$$V = x \cdot l^2$$

باید l را بر حسب x در این رابطه قرار دهیم تا V تابعی یک متغیره از x شود.

$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x \Rightarrow V = x(30 - 2x)^2$$

$$V(x) = x(900 - 120x + 4x^2) \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x, \quad x \in [0, 15]$$

نقاط بحرانی تابع $V(x)$ را به دست می آوریم:

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=15 \end{cases} \quad (\text{نقطه بحرانی تابع } V)$$

جدول تغییرات تابع V در بازه مورد نظر به صورت زیر است:

x	۰	۵	۱۵
$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$	+	۰	-
$V(x)$	۰	۲۰۰۰	۰

ماکزیمم مطلق

با توجه به جدول، بیشترین حجم ممکن برای مکعب مستطیل مورد نظر، $2000 \text{ (cm}^3\text{)}$ است که به ازای $x = 5 \text{ (cm)}$ حاصل می شود.

مثال ۳: می خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل در باز بسازیم که حجم آن 10 m^3 بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع 100 هزار تومان و این قیمت برای دیواره ها در هر متر مربع 60 هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟

حل: لازم است هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود. تابع هزینه را به شکل زیر می توان نوشت:

$$C = 100(x \cdot l) + 60[2xh + 2lh]$$

$$= 100xl + 120h(x + l)$$

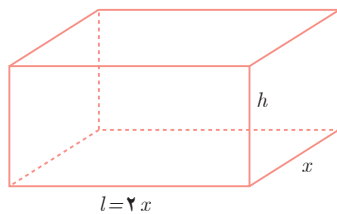
$$= 100x(2x) + 120h(x + 2x)$$

$$C = 200x^2 + 360xh \quad (1)$$

لازم است که C را به شکل تابعی یک متغیره از x بنویسیم.

$$V = 10 \text{ (m}^3\text{)} \Rightarrow x \cdot l \cdot h = 10 \Rightarrow x(2x)h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2} \quad (2)$$

$$V = 10 \text{ (m}^3\text{)} \Rightarrow x \cdot l \cdot h = 10 \Rightarrow x(2x)h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2} \quad (2)$$



با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت :

$$C(x) = 200x^2 + 360x\left(\frac{5}{x}\right) \Rightarrow C(x) = 200x^2 + \frac{1800}{x} \quad x \in (0, +\infty)$$

نقطه بحرانی تابع $C(x)$ را به دست می آوریم :

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 400x + \frac{-1800}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{400x^3 - 1800}{x^2} = 0 \Rightarrow 400x^3 - 1800 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{4/5} \approx 1/65(m) \quad (C \text{ تابع بحرانی تابع})$$

برای رسم جدول تغییرات تابع C ، لازم است مشتق آن یعنی $C'(x) = \frac{400x^3 - 1800}{x^2}$ را تعیین علامت کنیم. علامت C' در هر بازه، همان علامت صورت مشتق یعنی $(400x^3 - 1800)$ است. چرا؟

x	0	$\sqrt[3]{4/5}$	$+\infty$
$C'(x)$		$-$	$+$
$C(x)$	$+\infty$	≈ 1635	$+\infty$

$\swarrow$ **مینیمم مطلق C** $\searrow$

از جدول دیده می شود که اگر عرض قاعده مخزن برابر $\sqrt[3]{4/5} \approx 1/65(m)$ انتخاب شود، هزینه مصالح کمترین مقدار ممکن و حدود ۱۶۳۵ (برحسب هزار تومان)، یعنی ۱،۶۳۵،۰۰۰ تومان خواهد شد.

مثال ۴: غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27}$ به دست می آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟
حل: ابتدا نقاط بحرانی تابع C را به دست می آوریم.

$$C'(t) = \frac{3(t^3 + 27) - 3t^2(3t)}{(t^3 + 27)^2}$$

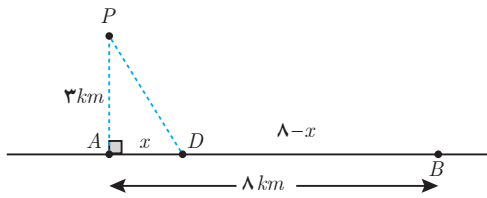
$$C'(t) = 0 \Rightarrow 3(t^3 + 27) - 9t^3 = 0 \Rightarrow (t^3 + 27) - 3t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = \frac{27}{2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2/38 \text{ (ساعت)} \quad (\text{نقطه بحرانی تابع } C)$$

در $C'(t)$ ، علامت مخارج همواره مثبت است، پس علامت $C'(t)$ در واقع همان علامت صورت مشتق خواهد بود. بنابراین، جدول تغییرات تابع C به شکل زیر است :

t	0	$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$+$	∞
$C'(t)$		$+$	0	$-$
$C(t)$	0	$\nearrow$ $\approx 0/18$ $\searrow$ ماکزیمم مطلق C	0	0

با توجه به جدول، دیده می شود که $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2/38$ ساعت پس از تزریق، میزان غلظت دارو در خون، حداکثر میزان ممکن خواهد بود.



مثال ۵: آرمان درون قایقی در نقطه P قرار دارد که فاصله آن از نزدیک ترین نقطه ساحل یعنی نقطه A ، معادل ۳ کیلومتر است. او می خواهد به نقطه B در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق 2 km/h و سرعت پیاده روی آرمان در ساحل 4 km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده روی کند؟

حل: نقطه ای از ساحل را که آرمان پیاده می شود، D می نامیم. می دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، رابطه $x = vt$ یا معادل آن $t = \frac{x}{v}$ برقرار است. بنابراین:

$$D \text{ تا } P \text{ مسیر} : t_1 = \frac{PD}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 9}$$

$$B \text{ تا } D \text{ مسیر} : t_2 = \frac{DB}{4} = \frac{8-x}{4} = 2 - \frac{1}{4}x$$

$$B \text{ به } P \text{ زمان کل رسیدن از} : t = t_1 + t_2$$

$$t(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 9} + \left(2 - \frac{1}{4}x\right) \quad x \in [0, 8]$$

به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t هستیم. نقطه بحرانی t را به دست می آوریم.

$$t'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{4} = \frac{x - \sqrt{x^2 + 9}}{4\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow x - \sqrt{x^2 + 9} = 0 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow x = \sqrt{3} \approx 1.73 \text{ (km)}$$

جدول تغییرات $t(x)$ به صورت زیر است:

x	$\sqrt{3}$		
$t'(x)$	-	۰	+
$t(x)$ بر حسب ساعت	$\frac{3}{5}$	$\frac{8+3\sqrt{3}}{4} \approx \frac{3}{3}$ مینیمم مطلق t	$\frac{\sqrt{73}}{2} \approx \frac{4}{27}$

از جدول ملاحظه می شود که اگر x یعنی فاصله D از A ، برابر $\sqrt{3} \approx 1.73$ کیلومتر انتخاب شود، زمان رسیدن آرمان از P به B کمترین زمان ممکن یعنی تقریباً $\frac{3}{3}$ ساعت معادل سه ساعت و ۱۸ دقیقه خواهد بود.

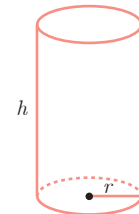
۱ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

حل: باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.

$$۱ \text{ (lit)} = ۱۰۰۰ \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \pi r^2 h = ۱۰۰۰ (\text{cm}^3) \Rightarrow h = \frac{۱۰۰۰}{\pi r^2}$$

سطح جانبی + مساحت قاعده = S : مساحت کل استوانه



$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{۱۰۰۰}{\pi r^2}\right) \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + \frac{۲۰۰۰}{r}$$

با یافتن نقطه بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r ، مقدار $S(r)$ مینیمم می‌گردد.

$$S(r) = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r \times \frac{۱۰۰۰}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{۲۰۰۰}{r} + \pi r^2$$

$$S'(r) = \frac{-۲۰۰۰}{r^2} + 2\pi r \xrightarrow{S'(r)=0} 2\pi r^3 = ۲۰۰۰ \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{۱۰۰۰}{\pi}} = \frac{۱۰}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$S\left(\frac{۱۰}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = \frac{۲۰۰۰}{\frac{۱۰}{\sqrt[3]{\pi}}} + \pi \left(\frac{۱۰}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2$$

r	$\circ$	$\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$	$+\infty$
$S'(r)$	$-$	$\circ$	$+$
$S(r)$	$+\infty$	$\frac{2000}{\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}} + \pi \left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2$	$+\infty$

۲ هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $۳۲۰v^2$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

حل: اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم:

$$\text{هزینه } t \text{ ساعت حرکت: } C = ۸۰۰۰۰۰t + (۳۲۰v^2)t$$

$$\text{هزینه } x \text{ کیلومتر حرکت: } C = ۸۰۰۰۰۰\left(\frac{x}{v}\right) + (۳۲۰v^2)\left(\frac{x}{v}\right)$$

$$\text{هزینه } ۱ \text{ کیلومتر حرکت: } C(v) = \frac{۸۰۰۰۰۰}{v} + ۳۲۰v$$

نقطه بحرانی تابع C را بیابید و با تشکیل جدول تغییرات آن، سرعت بهینه را پیدا کنید.

$$C'(v) = \circ \rightarrow -\frac{۸۰۰۰۰۰}{v^2} + ۳۲۰ = 0 \rightarrow ۳۲۰v^2 = ۸۰۰۰۰۰ \rightarrow v^2 = \frac{۸۰۰۰۰۰}{۳۲۰} = ۲۵۰۰ \rightarrow v = \pm\sqrt{۲۵۰۰}$$

v	$-\infty$	$-\sqrt{۲۵۰۰}$	$\circ$	$\sqrt{۲۵۰۰}$	$+\infty$
C'	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$
C		$\nearrow$ max	$\searrow$	$\nearrow$ min	

۳ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

$$x - y = 10 \rightarrow x = 10 + y$$

$$p(y) = xy = y(10 + x) = y^2 + 10y \quad p'(y) = 2y + 10 \quad p'(y) = 0 \rightarrow y = -5 \rightarrow x = 10 + (-5) = 5$$

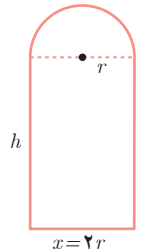
دو برخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم دایره ای بر روی آن می باشد به طوری که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.
حل: باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

$$\text{محیط} = 4/5 \Rightarrow 2h + x + \frac{1}{2}(2\pi r) = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 2h + 2r + \pi r = \frac{9}{4} \rightarrow h = \frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}$$

مساحت نیم دایره + مساحت مستطیل = S : مساحت پنجره

$$S = xh + \frac{1}{2}(\pi r^2) \Rightarrow S(r) = 2r\left(\frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S(r) = -\left(\frac{\pi+4}{2}\right)r^2 + \frac{9}{2}r$$



با پیدا کردن نقطه بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r ، مقدار $S(r)$ بیشترین مقدار ممکن می شود.

$$S'(r) = -2\left(\frac{\pi+4}{2}\right)r + 9/2 \xrightarrow{S'(r)=0} r = \frac{-4/5}{-(\pi+4)} = \frac{4/5}{\pi+4}$$

	$\frac{4/5}{\pi+4}$	
r		
$S'(r)$	+	-
	max	

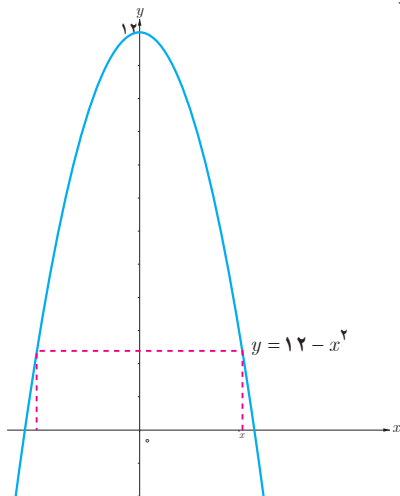


دبیرستان ماندگار حکیم نظامی، اولین دبیرستان قم و ثبت شده در فهرست آثار ملی ایران (تأسیس: ۱۳۱۷، مساحت: ۲/۵ هکتار)

تمرین

- ۱ کشاورزی می خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت 10000 متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی 2 میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی 8 میلیون تومان است.
الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.
ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

- ۲ الف) می خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را زده کشی کنیم. اگر تنها هزینه 100 متر زده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟
ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.



- ۳ ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشند.

$$S(x) = pxy = px(12 - x^2) = 12px - px^3$$

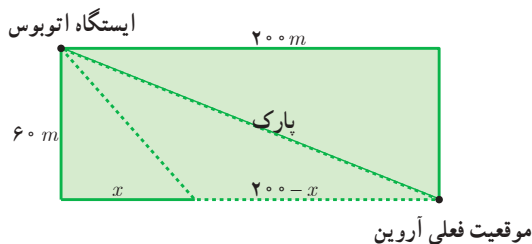
$$S'(x) = 12p - 3px^2 \xrightarrow{S'(x)=0} 12p - 3px^2 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2$$

$$\xrightarrow{y=12-x^2} y = 12 - 4 = 8$$

طول مستطیل برابر با ۸ و عرض آن برابر با ۴ است

- ۴ هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت 32 cm^2 خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه های بالا و پایینی هر صفحه 2 cm و حاشیه های کناری هر کدام یک سانتی متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

- ۵ آروین می خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در 200 متری غرب و 60 متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می تواند با سرعت 3 متر بر ثانیه از پیاده رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می تواند از درون پارک و تنها با سرعت 2 m/s عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



تمرین ۱: الف

x



y

$$xy = 10000 \rightarrow y = \frac{10000}{x}$$

$$P(x) = 2(2000000x) + 2\left(10000000 \times \frac{10000}{x}\right) = \frac{4 \times 10^6 (x^2 + 4000000)}{x}$$

$$P'(x) = 4 \times 10^6 \left(\frac{2x^2 - x^2 - 4000000}{x^2} \right) = 4 \times 10^6 \left(\frac{x^2 - 4000000}{x^2} \right)$$

ب:

$$\xrightarrow{P'(x)=0} 4 \times 10^6 \left(\frac{x^2 - 4000000}{x^2} \right) = 0 \rightarrow x^2 - 4000000 = 0 \rightarrow x^2 = 4000000 \rightarrow x = 2000$$

$$x = 2000 \xrightarrow{y = \frac{10000}{x}} y = 50$$

توشه ای برای موفقیت

تمرین ۲ : الف:

$$h^2 + x^2 = 50^2 \rightarrow h = \sqrt{2500 - x^2}$$

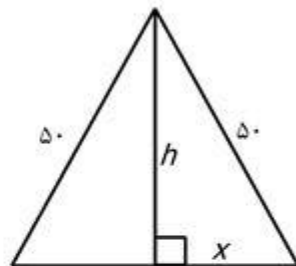
$$S(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times h = x \left(\sqrt{2500 - x^2} \right) \quad D = [0, 50]$$

$$S'(x) = \sqrt{2500 - x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{2500 - x^2}} = \frac{2500 - x^2 - x^2}{\sqrt{2500 - x^2}} = \frac{2500 - 2x^2}{\sqrt{2500 - x^2}}$$

$$\xrightarrow{S'(x)=0} 2500 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{2500}{2} = 1250 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{1250} = 25\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{h = \sqrt{2500 - x^2}} h = \sqrt{2500 - 1250} = \sqrt{1250} \rightarrow \boxed{h = 25\sqrt{2}}$$

$$S(x) = (25\sqrt{2})(\sqrt{2500 - 1250}) = 625 \times 2 = 1250$$



ب) توجه به $S = \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \times \sin \theta$ بیشترین مساحت وقتی است که $\sin \theta = 1$ باشد پس

$$S = \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \times 1 = 1250 \quad \theta = 90^\circ \text{ می شود پس خواهیم داشت:}$$

تمرین ۴:

$$S_{(x)} = (x + 2)(y + 4) = xy + 4x + 2y + 8$$

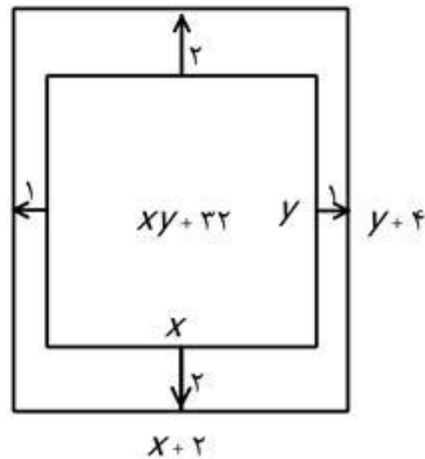
$$\xrightarrow{xy=24} S_{(x)} = 4x + 2y + 8 \xrightarrow{y=\frac{24}{x}} S_{(x)} = 4x + \frac{48}{x} + 8$$

$$S'_{(x)} = 4 - \frac{48}{x^2} = \frac{4x^2 - 48}{x^2} \xrightarrow{S'_{(x)}=0}$$

$$4x^2 - 48 = 0 \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = 4$$

$$\xrightarrow{y=\frac{24}{x}} y = \frac{24}{4} = 6$$

ابعاد جعبه برابر است با $(4+2=6)$ و $(4+4=8)$



$$t_1 = \frac{100 - X}{3} \quad t_2 = \frac{\sqrt{3600 + X^2}}{4}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{100 - X}{3} + \frac{\sqrt{3600 + X^2}}{4} = \frac{1}{12} (400 - 4X + 3\sqrt{3600 + X^2})$$

$$t' = \frac{1}{12} \left(-4 + 3 \times \frac{X}{\sqrt{3600 + X^2}} \right) \xrightarrow{t'=0} 4 = \frac{3X}{\sqrt{3600 + X^2}} \rightarrow 4\sqrt{3600 + X^2} = 3X$$

$$\xrightarrow{(\quad)^2} 16(3600 + X^2) = 9X^2 \rightarrow 5X^2 = 16 \times 3600 \rightarrow X^2 = 2880 \rightarrow X = \sqrt{2880} = 24\sqrt{5}$$

$$t = \frac{1}{12} (400 - 4 \times 24\sqrt{5} + 3\sqrt{3600 + 2880}) = 100$$