

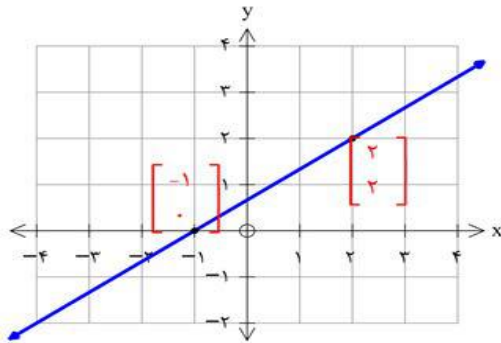
درس اول

آشنایی با مفهوم مشتق

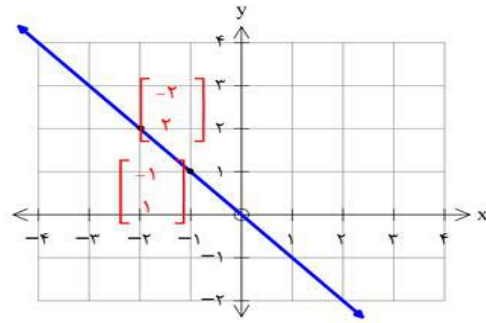
مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

فعالیت

۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



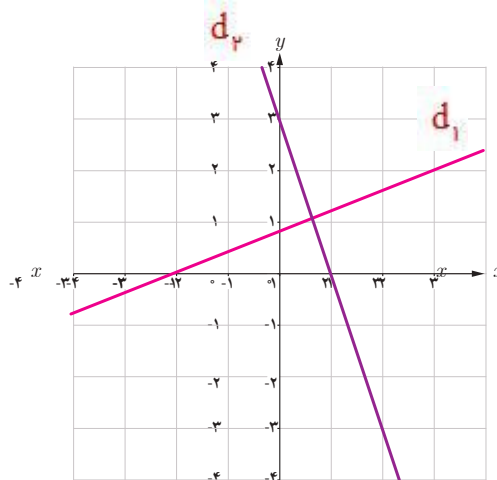
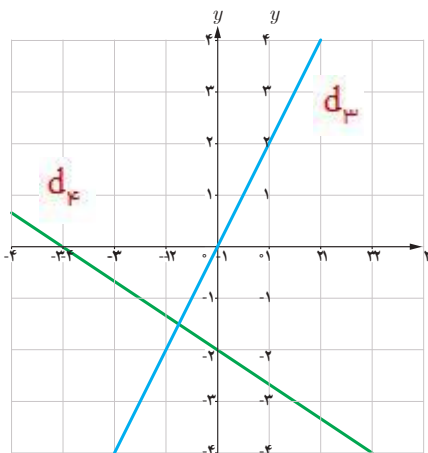
$$m = \frac{2 - 1}{2 - (-1)} = \frac{1}{3} > 0$$



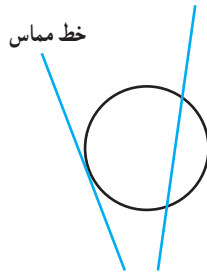
$$m = \frac{-1 - 1}{2 - (-1)} = \frac{-2}{3} < 0$$

خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{2}{5}$	-3	2	$-\frac{2}{3}$

۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1, d_2, d_3 و d_4 را روی شکل مشخص کنید.

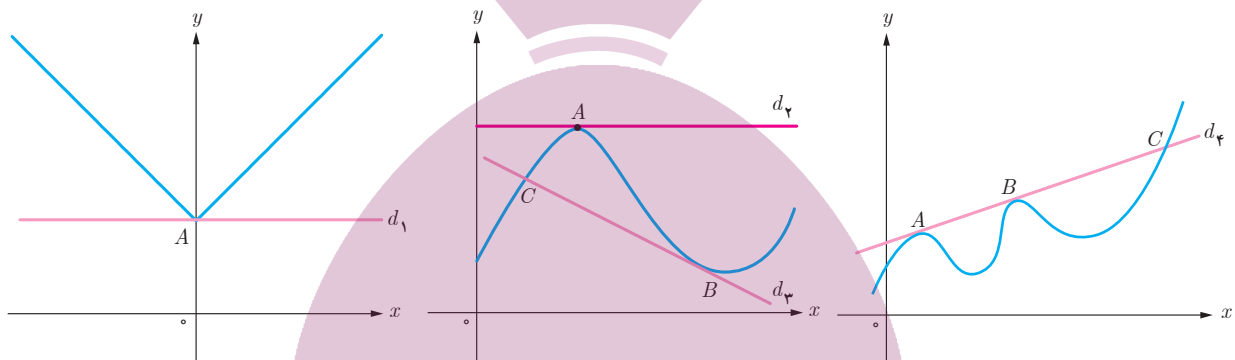


خط مماس بر یک منحنی



یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_4 در نقطه A ، خط d_3 در نقطه B و خط d_2 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_1 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_3 و d_4 در نقطه C بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



خواندنی

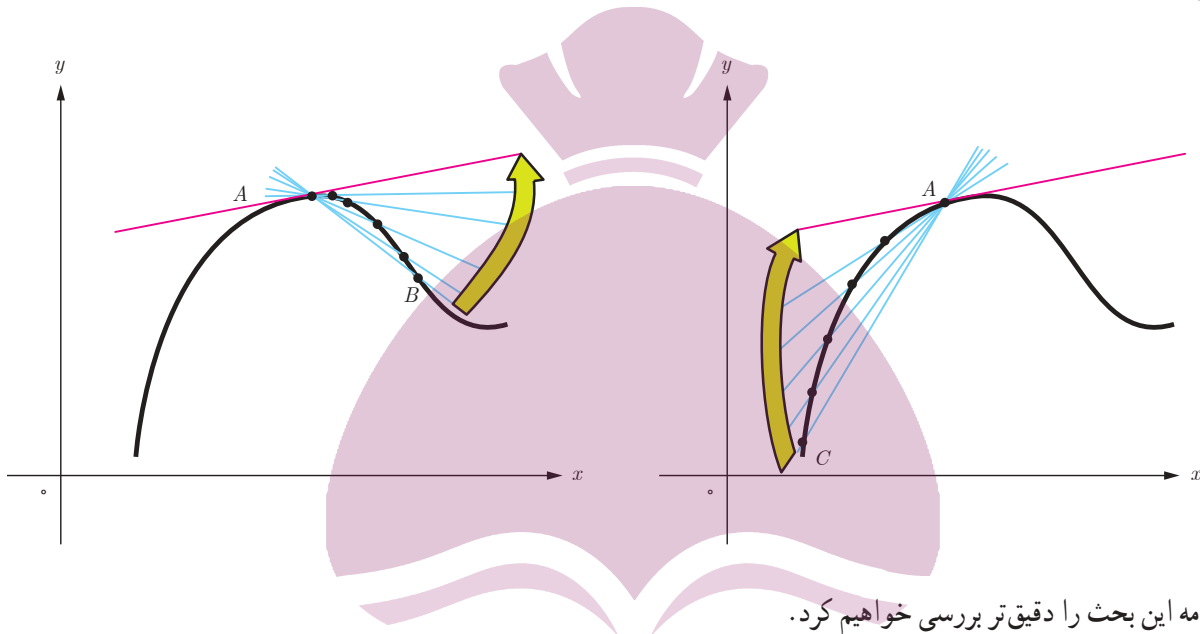
از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد باید افقی باشد. از این رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن نخستین بار در سال ۱۶۶۶ میلادی، توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایب‌نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایب‌نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.



اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به طور شهودی می‌توان گفت:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.



در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

ایران توننه

توشه‌ای برای موفقیت

فعالیت

الف) تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ داده شده است، اگر $0 \leq x \leq 10$. نقاط $E(3, f(3))$ و $D(4, f(4))$ ، $C(5, f(5))$ ، $B(6, f(6))$ ، $A(2, f(2))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به دست می‌آید:

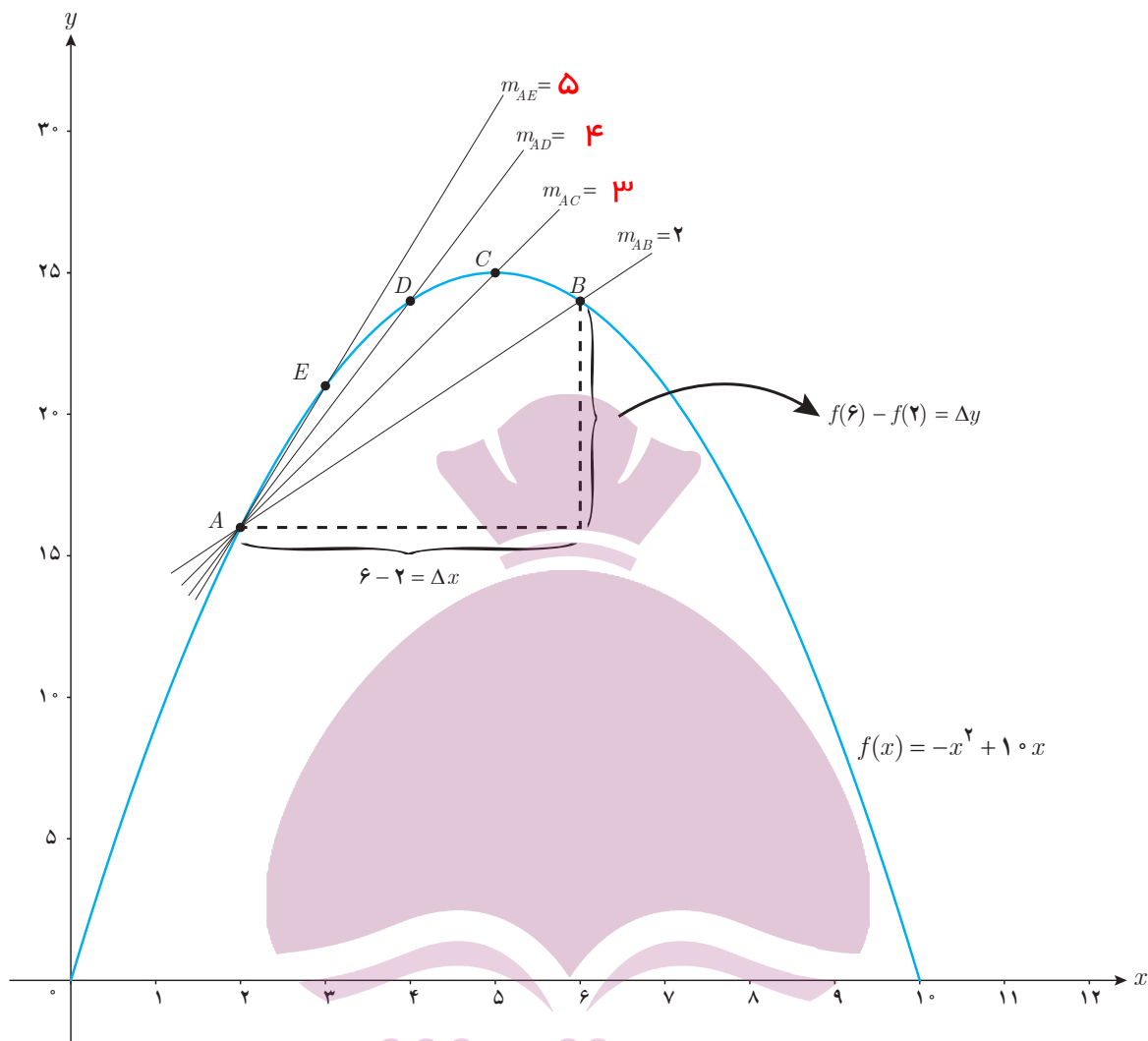
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{24 - 16}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 16}{3} = 3$$

به همین روش m_{AD} و m_{AE} را به دست آورید.

$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{24 - 16}{2} = 4$$

$$m_{AE} = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{21 - 16}{1} = 5$$

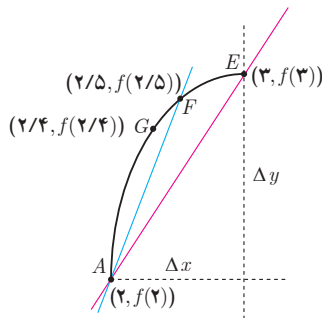


همان طور که می دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به دست می آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δx و Δy نمایش دهیم، داریم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب های بالا، توضیح دهید که Δx ها چگونه تغییر می کنند؟

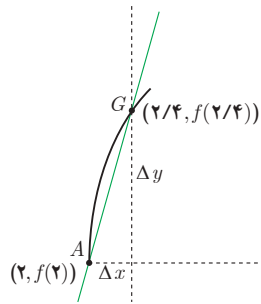
$[2, 6]$	۲ _____ ۶	$\Delta x = 6 - 2 = 4$	$\Delta y = 16 - 16 = 0$
$[2, 5]$	۲ _____ ۵	$\Delta x = 5 - 2 = 3$	$\Delta y = 25 - 16 = 9$
$[2, 4]$	۲ _____ ۴	$\Delta x = 4 - 2 = 2$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 3]$	۲ _____ ۳	$\Delta x = 3 - 2 = 1$	$\Delta y = 21 - 16 = 5$



$$m_{AF} = \frac{f(2.5) - f(2)}{2.5 - 2}$$

$$= \frac{18.75 - 16}{0.5}$$

$$= \frac{2.75}{0.5} = 5.5$$



$$m_{AG} = \frac{f(2.4) - f(2)}{2.4 - 2}$$

$$= \frac{18.24 - 16}{0.4}$$

$$= \frac{2.24}{0.4} = 5.6$$

ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x) = -x^2 + 10x$ در فاصله $[2, 3]$ رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه $[2, 2.4]$ رسم شده است.

اگر به همین ترتیب بازه های کوچک تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a, b]$	شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می گذرد.
$[2, 2.4]$	$\frac{f(2.4) - f(2)}{2.4 - 2} = \frac{18.24 - 16}{0.4} = \frac{2.24}{0.4} = 5.6$
$[2, 2.3]$	$\frac{f(2.3) - f(2)}{2.3 - 2} = \frac{17.71 - 16}{0.3} = \frac{1.71}{0.3} = 5.7$
$[2, 2.2]$	$\frac{f(2.2) - f(2)}{2.2 - 2} = \frac{17.16 - 16}{0.2} = \frac{1.16}{0.2} = 5.8$
$[2, 2.1]$	$\frac{f(2.1) - f(2)}{2.1 - 2} = \frac{16.59 - 16}{0.1} = \frac{0.59}{0.1} = 5.9$
$[2, 2.01]$	$\frac{f(2.01) - f(2)}{2.01 - 2} = \frac{16.0599 - 16}{0.01} = \frac{0.0599}{0.01} = 5.99$
$[2, 2.001]$	$\frac{f(2.001) - f(2)}{2.001 - 2} = \frac{16.005999 - 16}{0.001} = \frac{0.005999}{0.001} = 5.999$
$\vdots$	$\vdots$
$[2, 2+h]$ یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.	$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \longrightarrow ?$

اگر h به صفر میل کند مقادیر به ۶ نزدیک می شود

$$\frac{-(2+h)^2 + 10(2+h) - 16}{h} = \frac{-4 - 4h - h^2 + 20 + 20h - 16}{h} = \frac{6h - h^2}{h} = 6 - h$$

اگر بخواهیم دقیق تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است،

بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می کند که هر چقدر که بخواهیم می توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط بر

آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می زنیم که: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$ کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 1 \cdot (2+h) - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h^2 + 4h + 4) + 2 + 1 \cdot h - 16}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 4h - 14 + 1 \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 3h - 14}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(-h + 6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h + 6) = 6 \end{aligned}$$

به طریق مشابه می توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه هایی مانند، $[1/5, 2]$ ، $[1/6, 2]$ ، $[1/7, 2]$ ، $[1/8, 2]$ و ... را در نظر بگیریم شیب خط های قاطع برابر با $6/5$ ، $6/4$ ، $6/3$ ، $6/2$ ، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از سمت چپ به

صفر نزدیک شود، یعنی داریم: $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$

بنابراین به طور کلی می توان نوشت: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد. حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می نامند و با $f'(a)$ نمایش می دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می نامند.

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(2) = 6$. در ادامه $f'(3)$ برای $f(x) = -x^2 + 1 \circ x$ محاسبه شده است:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 1 \circ (3+h) - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 3 \circ + 1 \circ h - 21}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 4) = 4 \end{aligned}$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 1 \circ x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

$$A \text{ خط مماس در نقطه } f'(2) = 6$$

حل: با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد:

$$A(2, f(2)) = (2, 16)$$

$$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$$



کار در کلاس

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7 \quad f(-2+h) = (-2+h)^2 + 3 = 4 - 4h + h^2 + 3 = 7 - 4h + h^2$$

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول ۲ بنویسید.

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7 - 4h + h^2 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-4 + h) = -4$$

تذکر: با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به‌دست آورد، به‌طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

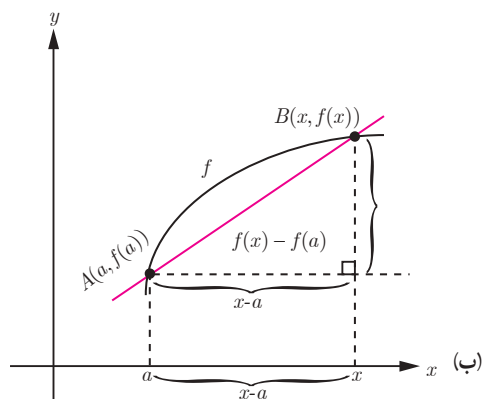
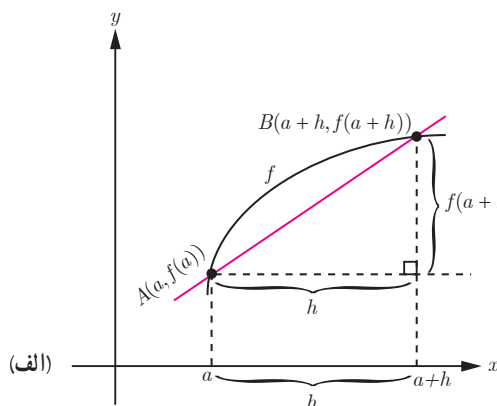
و از آنجا:

مثال: اگر $f(x) = -x^2 + 1 \circ x$ و $f'(2)$ را از دستور بالا به‌دست آورید:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2 + \Delta x)^2 + 1 \circ (2 + \Delta x) - 16}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4 - 4\Delta x - \Delta x^2 + 2 \circ + 1 \circ \Delta x - 16}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-\Delta x + 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x + 6) = 6 \end{aligned}$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه $x = a$ به‌صورت: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x = a$ می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.



با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$A \text{ در منحنی} \text{ شیب خط مماس بر} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x, f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$AB \text{ شیب خط} = m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به a نزدیک شود). به عبارت

$$\text{دیگر: } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال: اگر $f(x) = x^3$ ، $f'(3)$ را به دو روش به دست آورید.

حل:

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+3)^3 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 6h^2 + 9h - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 6h^2 + 9h}{h}$$

روش اول:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

روش دوم:

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد.

کار در کلاس

الف) برای تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ ، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

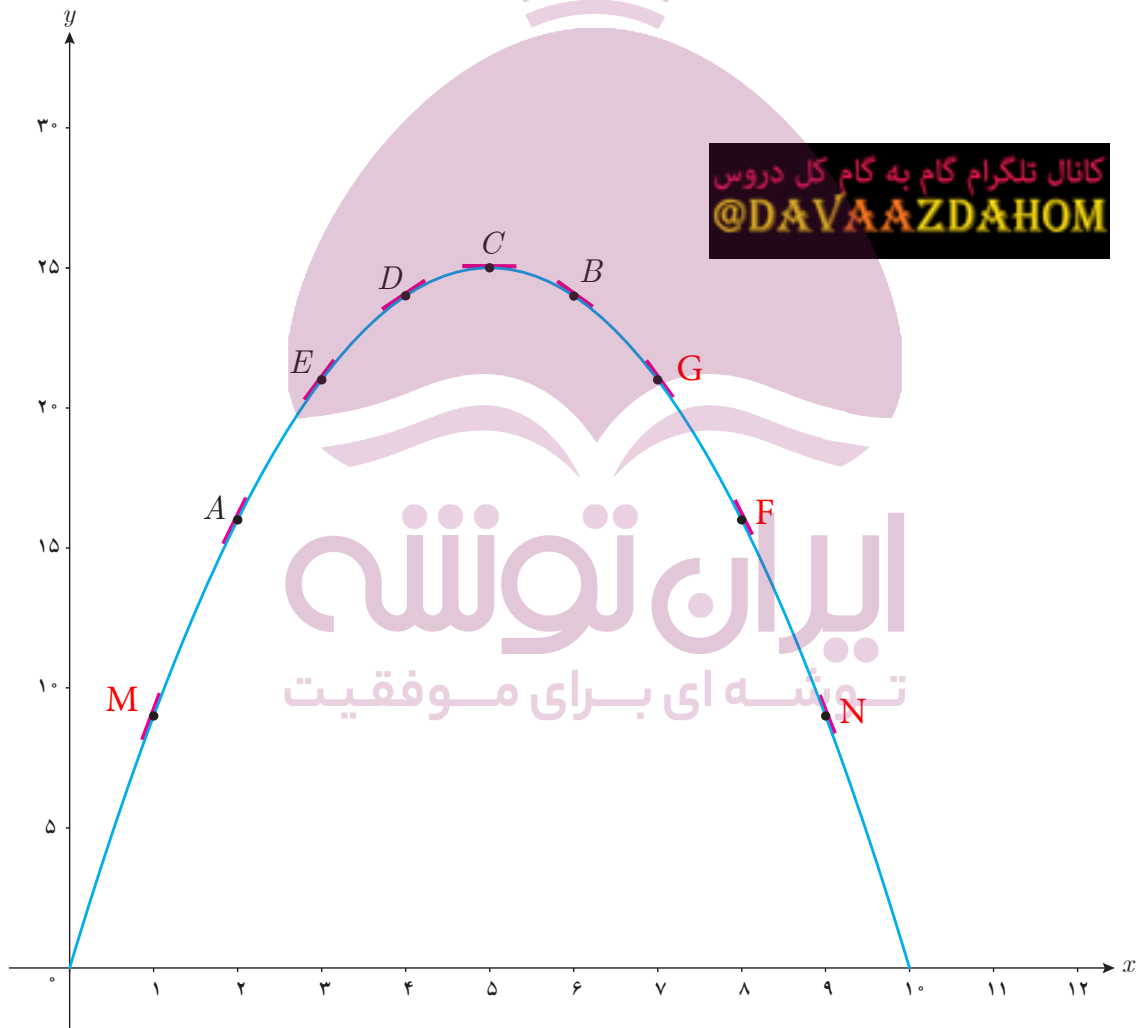
ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد. **A, F**

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید. **$m_E > m_D$**

ث) با محاسبه $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

پ) در نقاط M, A, E, D مشتق مثبت و در نقاط B, G, F, N مشتق منفی است



$$f(1) = -(1)^2 + 1 \circ (1) = 1 \quad f(5) = -(5)^2 + 1 \circ (5) = 25$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 1 \circ x - (-6 + 1 \circ 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 - 1 \circ x + 1 \circ 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)(x - 1)}{x - 1} = -6$$

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 + 1 \circ x - (-25 + 1 \circ 5)}{x - 5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x^2 - 1 \circ x + 25)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x - 5)(x - 5)}{x - 5} = 0$$

$$f(7) = -(7)^2 + 1 \circ (7) = 21 \quad f(4) = -(4)^2 + 1 \circ (4) = 24$$

$$f'(7) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x) - f(7)}{x - 7} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-x^2 + 1 \circ x - 21}{x - 7} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-(x - 7)(x - 7)}{x - 7} = \lim_{x \rightarrow 7} -(x - 7) = 4$$

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 1 \circ x - 24}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x - 4)(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} -(x - 4) = 3$$

ث)

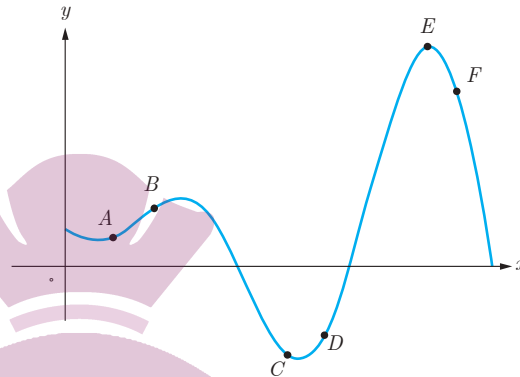
$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 9$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (3x+4) = 10$$

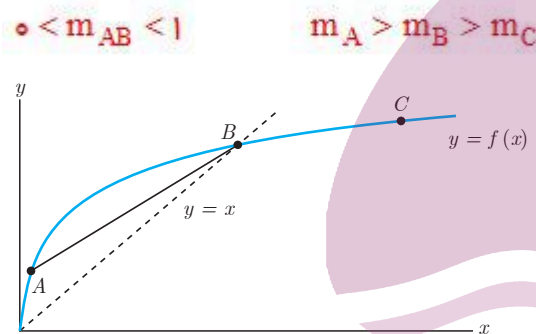
۱ اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید. **معادله خط مماس** $y - 9 = 10(x - 2) \rightarrow y = 10x - 11$

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D



۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A m_A

ب) شیب نمودار در نقطه B m_B

پ) شیب نمودار در نقطه C m_C

ت) شیب خط AB m_{AB}

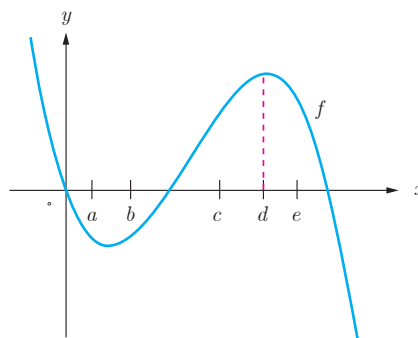
ث) شیب خط $y = 2$ $m_5 = 0$

ج) شیب خط $y = x$ $m_6 = 1$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_1, m_2, \dots, m_6$ در نظر بگیرید.

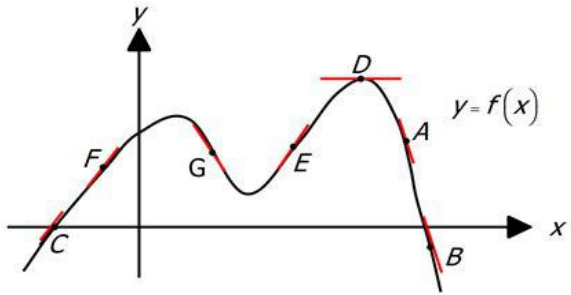
۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d, e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	۰
b	$0/5$
c	۲
a	$-0/5$
e	-۲



۵) نقاطی مانند A, B, C, D, E, F, G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.
پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.
ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.
ث) نقاط F و E نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.
ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



$$f(-1) = (-1)^3 - 1 = -1 - 1 = -2$$

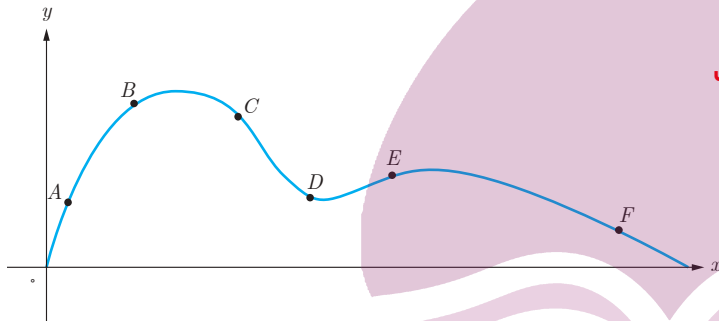
$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 1 - (-2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3$$

۶) اگر $f(x) = x^3 - 2$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید.

۷) نقاط A, B, C, D, E, F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک

نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. **نادرست**

ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را

با m_A نمایش داده‌ایم) **نادرست**

پ) $m_E < m_B < m_A$ **درست**

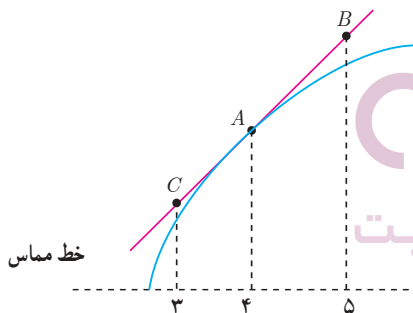
ت) شیب منحنی در نقاط C و D ، F منفی است. **درست**

ث) $m_F < m_D < m_C$ **نادرست**

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$ **درست**

۸) برای تابع f در شکل روبرو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل

مختصات نقاط A, B, C را بیابید.



۹) در هر ثانیه علی j متر با دوچرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می‌کنند، به طوری که

$j > s$. در یک زمان داده شده، چگونه می‌توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را

مقایسه کرد؟

سوال ۸:

$$m = \frac{f(B) - f(A)}{x_B - x_A} = \frac{f(C) - f(A)}{x_C - x_A} = f'(A)$$

$$\Rightarrow \frac{f(B) - 25}{5 - 4} = \frac{f(C) - 25}{3 - 4} = 1/5$$

$$\begin{cases} \frac{f(B) - 25}{1} = 1/5 \Rightarrow f(B) = 26/5 \\ \frac{f(C) - 25}{-1} = 1/5 \Rightarrow f(C) = 24/5 \end{cases} \Rightarrow B \left(5, \frac{26}{5} \right), A \left(4, \frac{25}{5} \right), C \left(3, \frac{24}{5} \right)$$

الف) علی $s - j$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ب) علی s . j متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

پ) علی j/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ت) علی s . j برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ث) علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد. **درست**

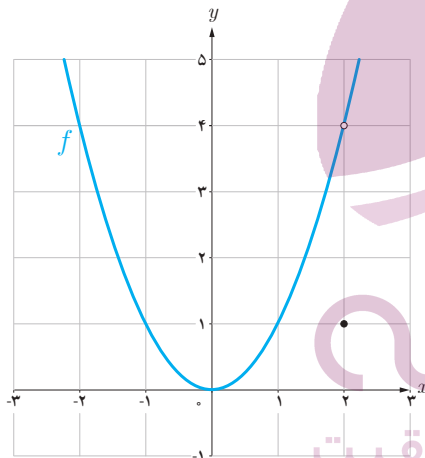
در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 به یکی از دو صورت زیر تعریف شد :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x_0 مشتق پذیر است.
در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست دارای اهمیت است.
در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم :



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟
اگر برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x = 2$ تعریف مشتق f در $x = 2$ را به کار بگیریم :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \frac{4 - 1}{0} = \frac{3}{0} = \pm \infty$$

چون در این نقطه پیوسته نیست پس خط مماس وجود ندارد

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \rightarrow 2$ ، داریم :

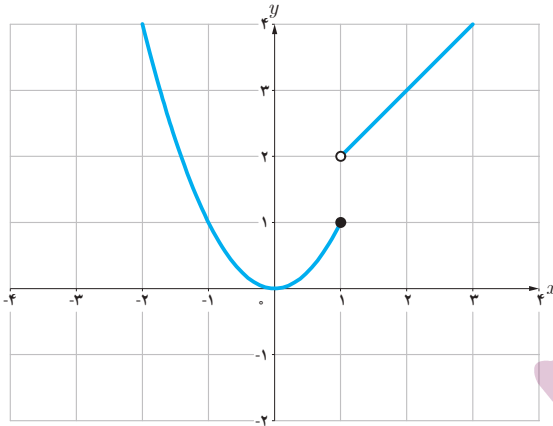
$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به جز $x = 2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

بله



تابع g (شکل روبه‌رو) را به صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟ چون در این نقطه تابع پیوسته نیست

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \end{cases} \Rightarrow g'(1) \text{ وجود ندارد}$$

توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x=2$ و $x=1$ ناپیوسته بودند و همان‌گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \left((x-a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0 \\ \text{بنابراین } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= 0 \text{ و از آنجا } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ (چرا؟)} \end{aligned}$$

با توجه به این قضیه به طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که:

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

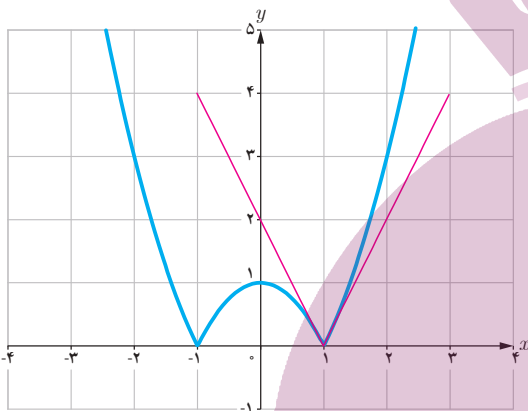
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$

کانال تلگرام کام به کام کل دروس
@DAVAAZDAHOM



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می توان با وجود نیم خط های مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=1$ نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر 2 و اگر از سمت چپ به $x=1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر -2 است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق های راست و چپ f در $x=1$ می نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می دهیم.

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق پذیر نیست.

نیم خط های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می نامیم.

در حقیقت:

$$f'_-(1) = \text{شیب نیم مماس چپ}$$

$$f'_+(1) = \text{شیب نیم مماس راست}$$

معادله این نیم مماس ها نیز به ترتیب عبارت اند از:

$$y - 0 = 2(x - 1) \quad \text{یا} \quad y = 2x - 2, \quad x \geq 1$$

$$y - 0 = -2(x - 1) \quad \text{یا} \quad y = -2x + 2, \quad x \leq 1$$

چون حد چپ و حد راست باهم برابر

کار در کلاس

نیست پس مشتق پذیر نیست

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-1$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم مماس های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^p - 1| - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^p - 1|}{x + 1}$$

حد راست $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^p - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x-1) = -2$

حد چپ $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(x^p - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} -(x-1) = 2$

$f'_+(-1) = -2 \Rightarrow y - 0 = -2(x+1) \rightarrow y = -2x - 2$ معادله نیم مماس چپ

$f'_-(-1) = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x+1) \rightarrow y = 2x + 2$ معادله نیم مماس راست

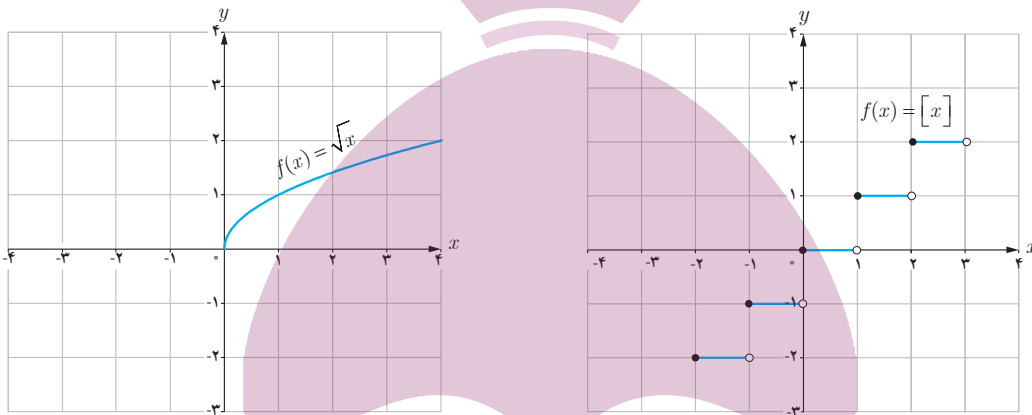
تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x = a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل:

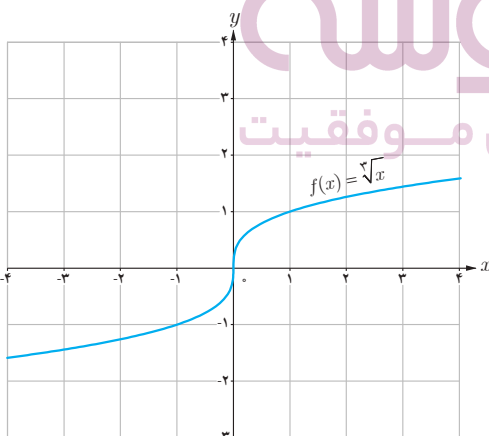
$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.



اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق پذیر نیست.

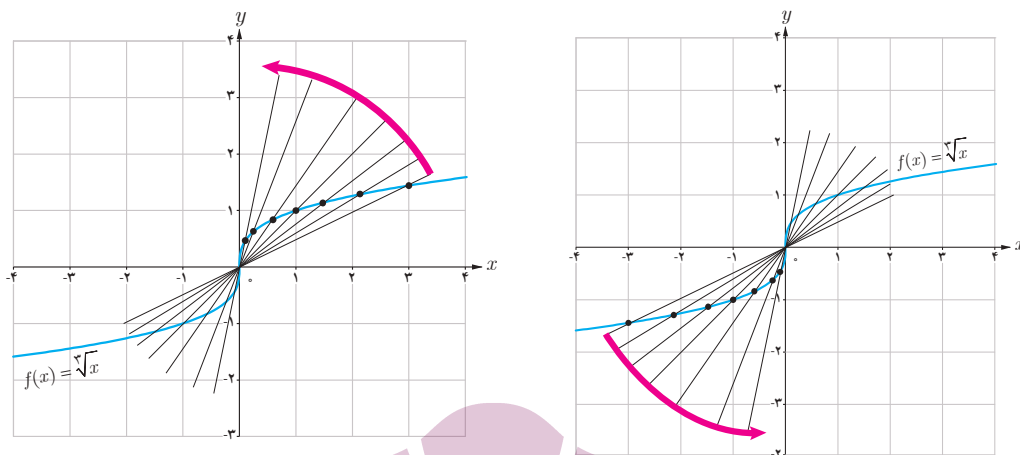
مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق پذیری این تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x = 0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. خط $x = 0$ را «**ماس**» **قائم**» منحنی می‌نامیم.



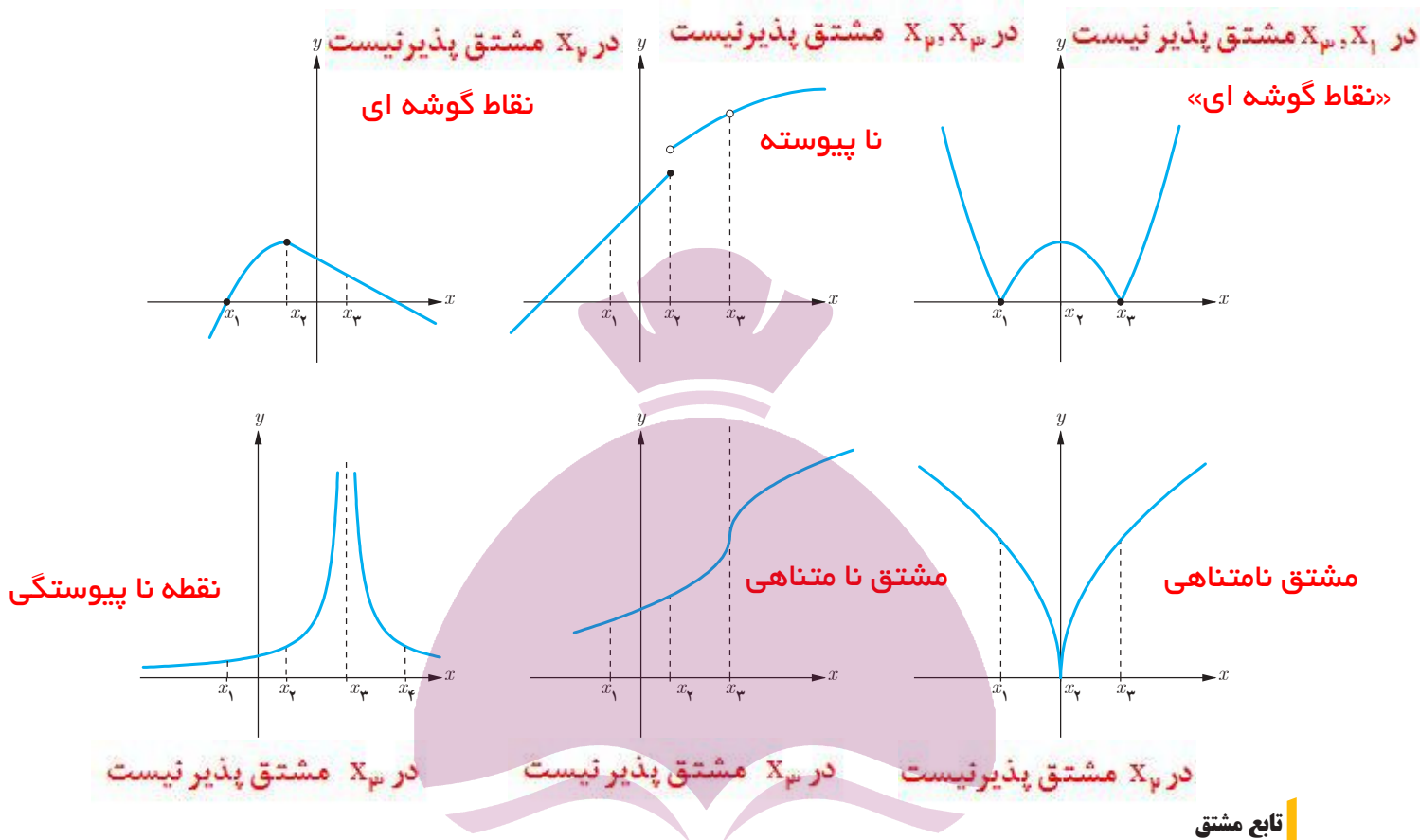
اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ در این صورت خط $x = a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

کانال تلگرام کام به کام کل دروس
 @DAVAAZDAHOM

به طور خلاصه می توان گفت :

- ۱- تابع f در $x = a$ مشتق پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.
 - الف) f در a پیوسته نباشد.
 - ب) f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$:
 - الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه ای).
 - ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه ای).
 - پ) هر دو نامتناهی باشند.

در شکل های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.



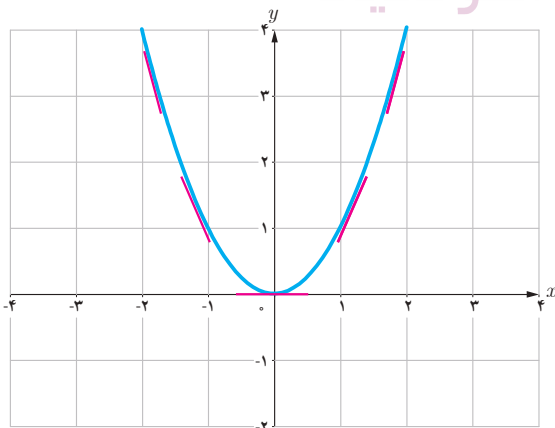
تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده اید. حال به دنبال یافتن رابطه ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

ایران نوشته
توشه ای برای موفقیت

فعالیت

تابع $f(x) = x^2$ را در نظر می گیریم.



جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده اند).

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	۲
$f'(x)$	-۶	-۴	-۲	۰	۱	$2\sqrt{3}$	۴

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^2$ وجود دارد؟

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می نامیم.

به طور مثال برای تابع $f(x) = x^2$ ، دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

بنابراین $f'(x) = 2x$. همان گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2$ در هر نقطه را می توان حساب کرد، به طور مثال:

$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, \quad f'(\sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \quad \text{و} \quad f'(50) = 100$$

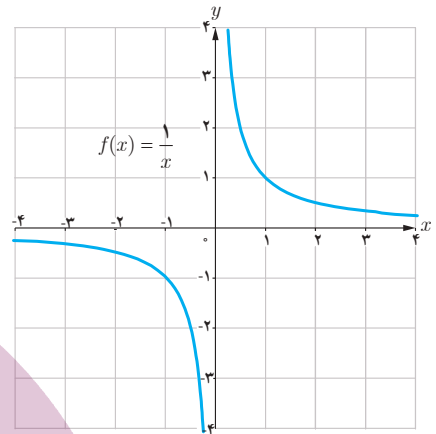
مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. $f'(3)$ را از دو روش به دست آورید:

با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x=3$.

حل: $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اگر $x \neq 0$ داریم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$



کانال تلگرام کام به کام کل دروس
@DAVAAZDAHOM

با استفاده از دستور فوق داریم: $f'(3) = -\frac{1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x \neq 0$) را نیز به کمک این دستور می توان محاسبه کرد، به طور مثال: $f'(\sqrt{5}) = -\frac{1}{5}$ و $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ را به طور مستقیم نیز می توان حساب کرد:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

توشه ای برای موفقیت

کار در کلاس

اگر $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

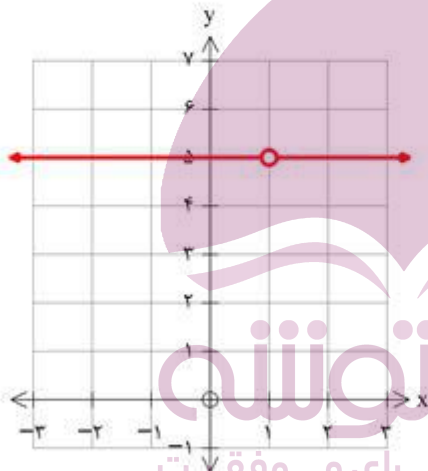
اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

$$D_f = \mathbb{R}$$

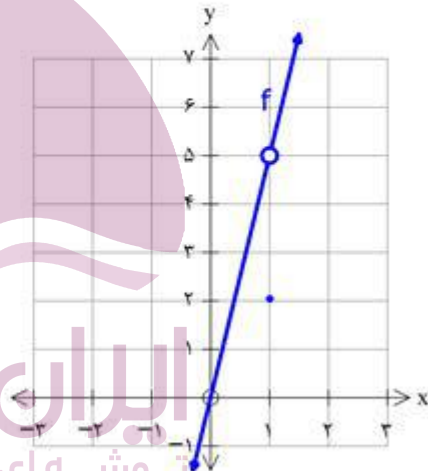
$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$$

تابع در نقطه ی $x=1$ پیوسته نیست لذا $f'(1)$ وجود ندارد

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x \neq 1 \\ \text{تعریف نشده} & x = 1 \end{cases}$$



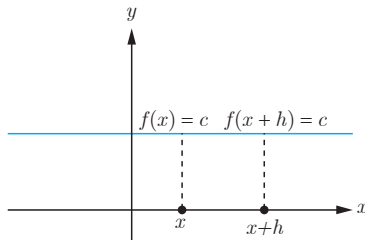
تابع مشتق: $f'(x)$



تابع $f(x)$

۱- اگر $f(x) = c$ آن گاه $f'(x) = 0$. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$



به طور مثال اگر $f(x) = 7$ و $g(x) = \frac{2}{5}$ آن گاه $f'(x) = 0$ و $g'(x) = 0$.

کانال تلگرام کام به کام کل دروس
@DAVAAZDAHOM

۲- اگر $f(x) = x^n$ و $n \in \mathbb{N}$ آن گاه $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبل از آنکه بگوییم که اگر $f(x) = x^2$ ، آن گاه $f'(x) = 2x$. همچنین اگر $f(x) = x^3$ ، به کمک این دستور نشان می دهیم که: $f'(x) = 3x^2$. ابتدا این رابطه آخر را ثابت می کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می کنیم. اگر $f(x) = x^3$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^2 + x(x+h) + x^2] = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

سومین تساوی در اثبات فوق بر اساس اتحاد $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ به دست آمده است.

در حالت کلی می توان نشان داد که: $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$ ($n \in \mathbb{N}$) از این اتحاد در ادامه برای محاسبه مشتق $f(x) = x^n$ استفاده شده است.

اکنون اگر $f(x) = x^n$ ، محاسبات کمی دشوارتر می شود، اما در عوض دستور مهم تری را ثابت کرده ایم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cancel{x} + h - \cancel{x})[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}] \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ بار}} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

۳- به طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

*۴- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

۵- اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \end{aligned}$$

۶- اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot A} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

*در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، مورد نظر است، رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

۷- اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن گاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ ، $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

پ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی پردازیم.
 مثال: مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x) = -\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$

پ) $h(x) = (2x^3 + 1)(-x^5 + 7x - 2) \Rightarrow h'(x) = 6x^2(-x^5 + 7x - 2) + (2x^3 + 1)(-5x^4 + 7)$

ت) $t(x) = \frac{x^2 - 4}{3x + 1} \Rightarrow t'(x) = \frac{2x(3x + 1) - 3(x^2 - 4)}{(3x + 1)^2}$

کار در کلاس

۱- مشتق تابع های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ ب) $g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$ پ) $h(x) = \frac{x}{2x^2+x-1}$

اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$ را به دست آورید.

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

-۱

کانال تلگرام کام به کام کل دروس
@DAVAAZDAHOM

$$f(x) = \frac{1}{x-4} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x-4)^2}$$

$$g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5} \right)^{\wedge} \rightarrow g'(x) = \wedge \times \left(\frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2} \right) \left(\frac{-3x-1}{x^2+5} \right)^{\wedge-1}$$

$$h(x) = \frac{x}{2x^2+x-1} \rightarrow h'(x) = \frac{1(2x^2+x-1) - x(4x+1)}{(2x^2+x-1)^2} = \frac{-2x^2-1}{(2x^2+x-1)^2}$$

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 5 \times \wedge + 3 \times (-6) = 40 - 18 = 22$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(2) = \frac{f'(2)g(2) - f(2)g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{5 \times \wedge - 3 \times (-6)}{\wedge^2} = \frac{40 + 18}{64} = \frac{58}{32}$$

-۲

مثال: اگر $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^4$ ، مطلوب است $h'(x)$.

حل: اگر $f(x) = x^4$ و $g(x) = x^2 + 3x + 1$ ، آن گاه: $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = g'(x)f'(g(x)) = (2x + 3)f'(g(x))$$

اگر $g(x) = u$ آن گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u) = u^4 \Rightarrow f'(u) = 4u^3 = 4(g(x))^3 = 4(x^2 + 3x + 1)^3$$

بنابراین:

$$h'(x) = (2x + 3)(4)(x^2 + 3x + 1)^3$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می توان ارائه کرد،

اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

مثال: مشتق تابع $y = \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5$ را به دست آورید.

حل: با فرض $\frac{x^2}{3x-1} = u$ داریم: $y = u^5$ و از آنجا:

$$y' = u' \cdot 5u^4 = \frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2} \cdot 5\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4 = 5\left(\frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}\right)\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4$$

کانال تلگرام کام به کام کل دروس
@DAVAAZDAHOM

کار در کلاس

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. $f'(x) = 3(x^2 + 1)^2(2x)(5x - 1) + 5(x^2 + 1)^3 = (x^2 + 1)^3(35x^2 - 6x + 5)$

الف) $f(x) = (x^2 + 1)^3(5x - 1)$

ب) $g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$

$$g'(x) = 8 \times \left(\frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2} \right) \left(\frac{-3x-1}{x^2+5} \right)^7$$

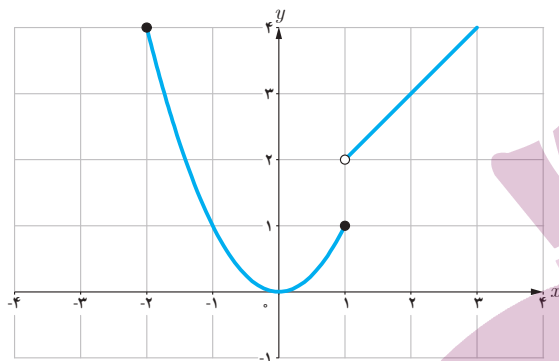
مشتق پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

مشتق پذیری روی بازه های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد



اگر $fD_f = \mathbb{R}$ در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد، گوئیم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق پذیر است.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر می گیریم.

f روی بازه های $[-2, 1]$ و $(1, \infty)$ مشتق پذیر است. ولی f روی بازه $[1, 2]$ مشتق پذیر نیست (چرا؟)

زیرا با اینکه روی بازه $(1, 2)$ مشتق پذیر است، اما در $x=1$ پیوستگی راست ندارد پس در $x=1$ مشتق راست ندارد

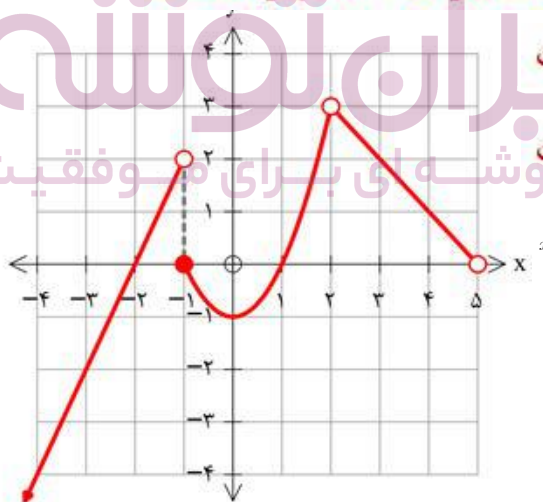
نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه های $[-1, 1]$ ، $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

تابع در بازه $[-2, 0]$ مشتق پذیر نیست زیرا در $x=-1$ نا پیوست است

تابع در بازه $(2, 5)$ مشتق پذیر است

تابع در بازه $[-1, 1]$ مشتق پذیر است



مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به $y'' = f''(x)$ نمایش می دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می گیریم.

مثال: اگر $y = 3x^4 + 2x^3 - 1$ آن گاه:

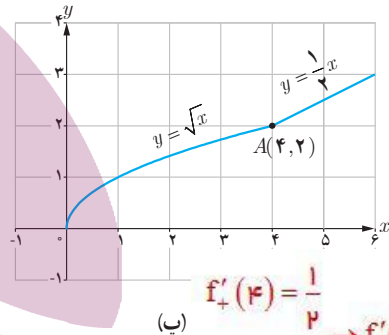
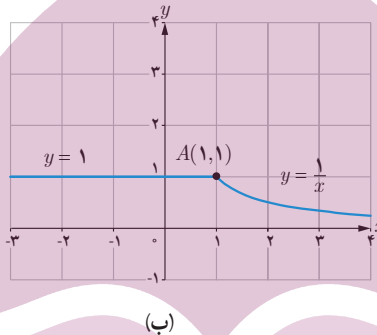
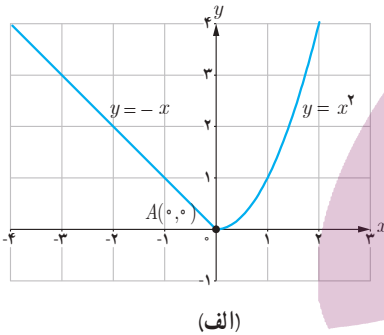
$$y' = 12x^3 + 6x^2, \quad y'' = 36x^2 + 12x$$

$$f(x) = |x - 2| \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ -x + 6 & x > 2 \end{cases}$$

تمرین

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x = 2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



$$f'_+(0) = 0, \quad f'_-(0) = -1 \rightarrow f'(0) \text{ وجود ندارد}$$

$$f'_+(1) = -1, \quad f'_-(1) = 0 \rightarrow f'(1) \text{ وجود ندارد}$$

$$f'_+(4) = \frac{1}{2}, \quad f'_-(4) = \frac{1}{4} \rightarrow f'(4) \text{ وجود ندارد}$$

۳ تابع $f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases}$ داده شده است.

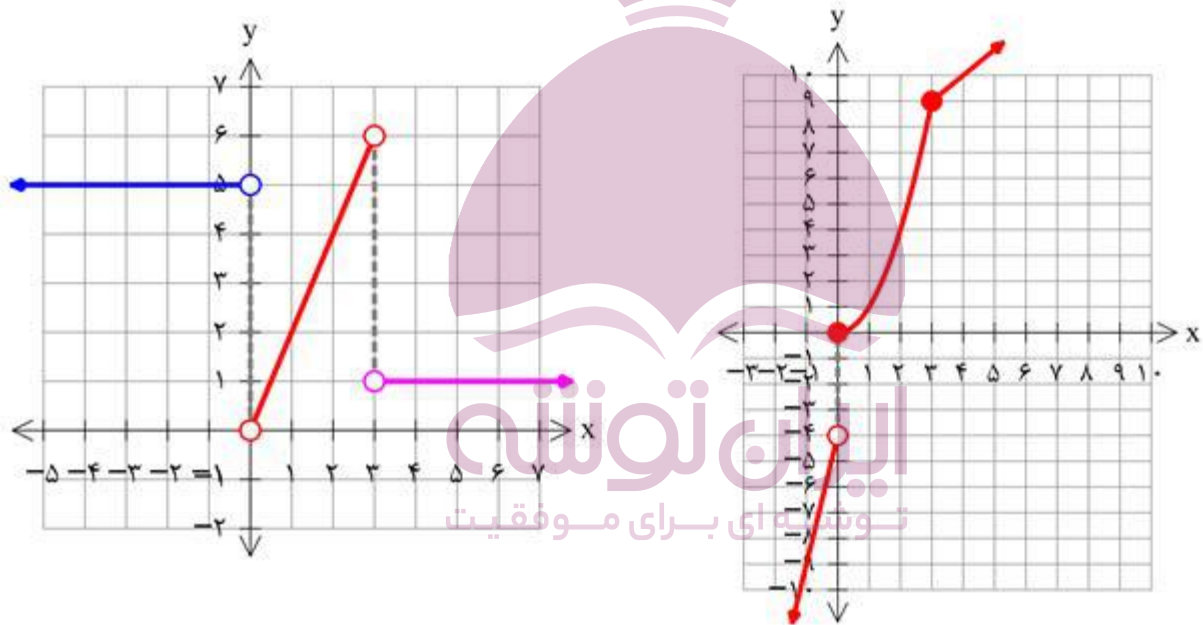
(الف) نمودار تابع f را رسم کنید. (ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.
(پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید. (ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

- (الف) در یک نقطه برابر صفر شود.
(ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.
(پ) در تمام نقاط مثبت باشد.
(ت) در تمام نقاط منفی باشد.

تمرین ۳ الف) نمودار $f(x)$

ب) نمودار $f'(x)$



(ب)

$$f(3) = 9$$

$$f(0) = 0$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 6 - 9}{x - 3} = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3) = 6$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x - 4 - 0}{x - 0} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

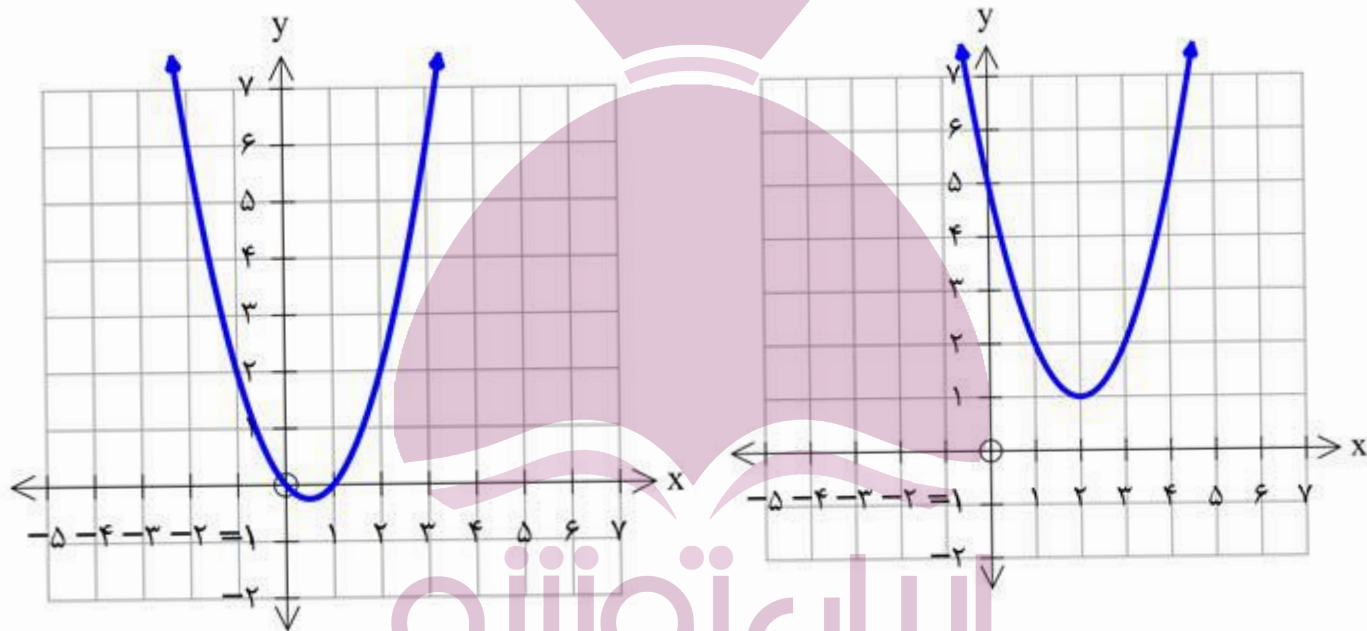
در $x=0, x=3$ مشتق پذیر نیست

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \text{ (پ)} \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

نقطه ای برای موفقیت

تمرین ۴ الف :

ب :



$$f(x) = x^2 - x$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$f'(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

کانال تلگرام گام به گام کل دروس
@DAVAAZDAHOM

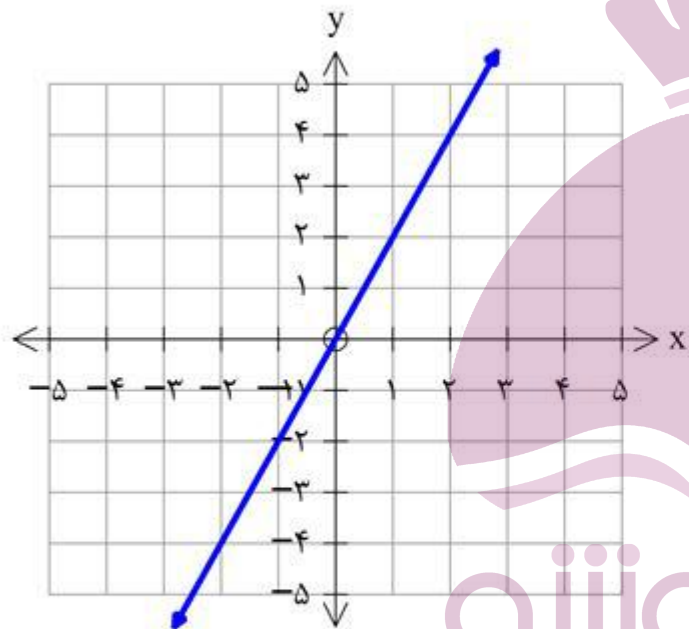
$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

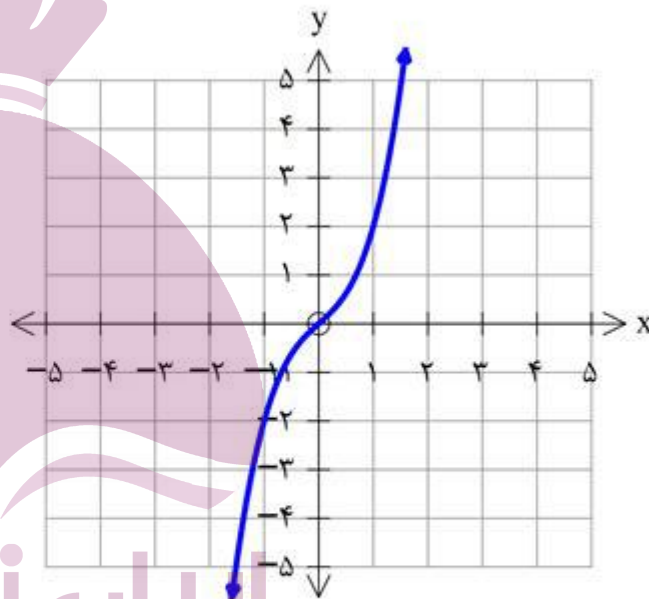
۱:

ش:



$$f(x) = 2x$$

$$f'(x) = 2$$



$$f(x) = x^3 + x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

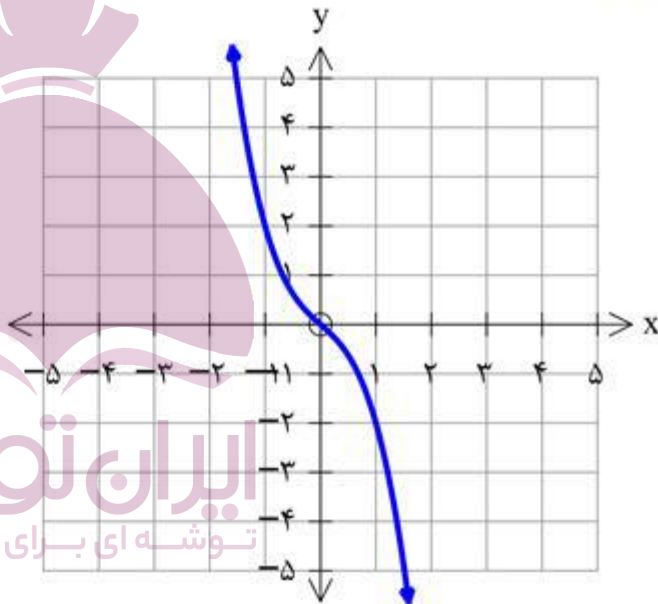
ایران تونش

کابل تلگرام به گام به گام دروس
@DAVAZDAHOM

ش:

$$f(x) = -x^3 - x$$

$$f'(x) = -3x^2 - 1 < 0$$



ایران توننده
توشه ای برای موفقیت

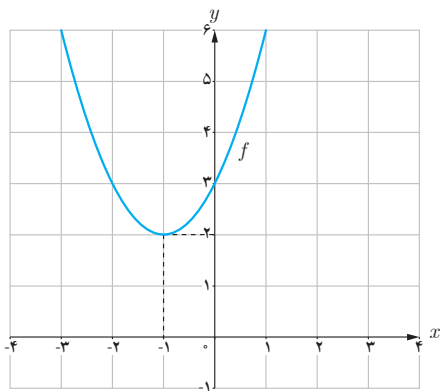
۵

الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$$f'(2), f'(-1), f'(0), f'(3)$$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2 \quad f(1) = 4$$

۶ مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

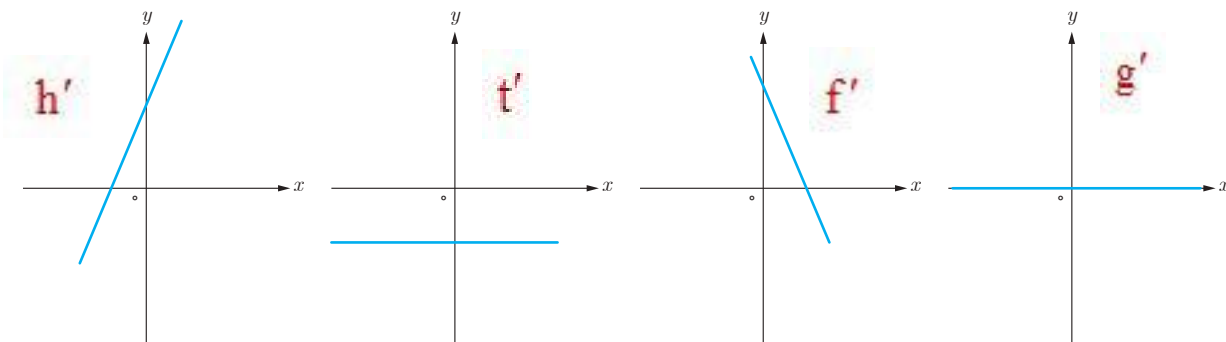
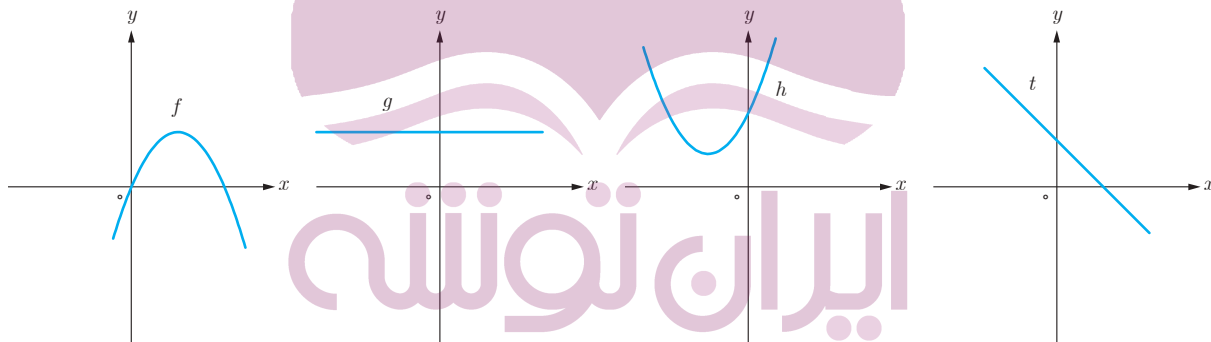
حد چپ با حد راست در نقطه $x = 1$ برابر نیست پس پیوسته نیست و در نتیجه مشتق پذیر نیست

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$$f_1(x) = 5x - 3 \rightarrow f_1'(x) = 5 \quad f_2(x) = 5x + 1 \rightarrow f_2'(x) = 5 \quad f_3(x) = 5x + 4 \rightarrow f_3'(x) = 5$$

۸ اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.

۹ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



تمرین ۵ الف :

(ب)

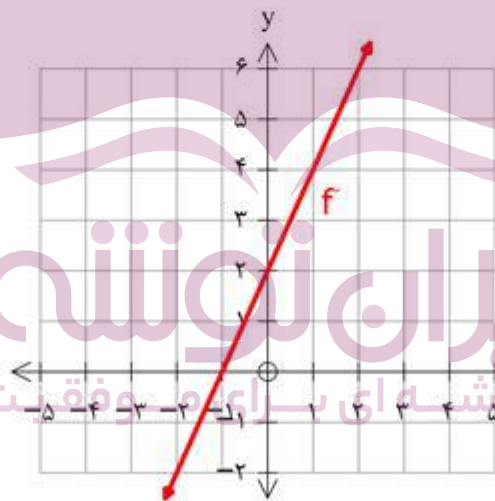
$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(3) = 8, f'(2) = 6, f'(0) = 2, f'(-1) = 0$$

$$f'(3) > f'(2) > f'(0) > f'(-1)$$

$$f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$$

پ) تابع مشتق:



$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x + 2) = -4$$

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x^2 - 4) - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} -(x - 2) = 4$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4 - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x - 2) = -4$$

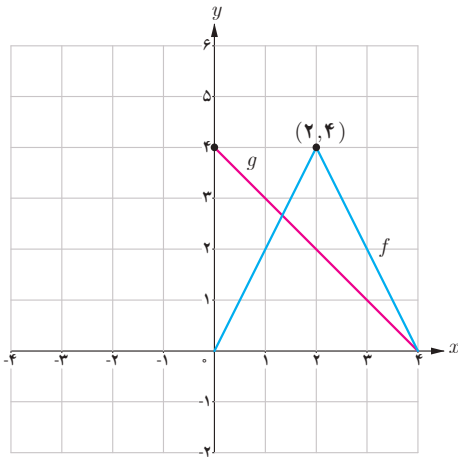
$$f'_+(2) \neq f'_-(2) \quad f'_+(-2) \neq f'_-(-2)$$

نتیجه می گیریم تابع در نقاط ۲ و -۲ مشتق پذیر نیست

۱۰ نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$



۱۱ اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

۱۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$

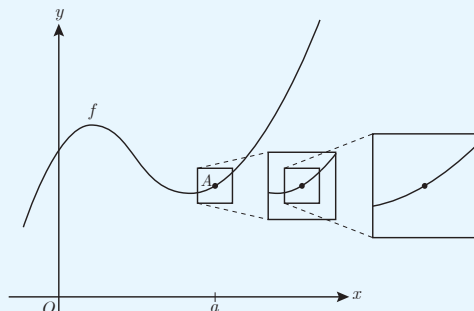
پ) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$

ب) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

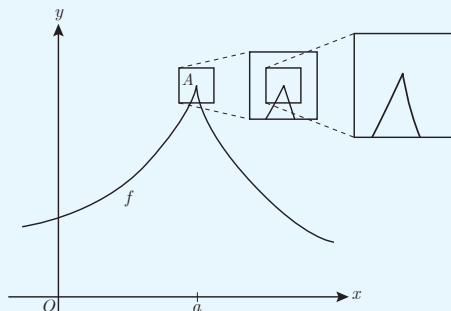
ت) $f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$

خواندنی

مشتق پذیری در یک نقطه به صورت شهودی می تواند بر حسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً نمای نزدیک تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می شود.



تابع در a مشتق پذیر است.



تابع در a مشتق پذیر نیست.

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^r}$$

$$f(1) = ۲ \quad f'(1) = ۲$$

$$f(۲) = ۴ \quad f'_+(۲) = -۲, f'_-(۲) = ۲$$

$$f(۳) = ۲ \quad f'(۳) = -۲$$

$$g(1) = ۳ \quad g'(1) = -1$$

$$g(۲) = ۲ \quad g'(۲) = -1$$

$$g(۳) = 1 \quad g'(۳) = -1$$

$$h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = ۲ \times ۳ + (-1) \times ۲ = ۴$$

$$h'(۲) = \begin{aligned} f'_+(۲)g(۲) + f(۲)g'(۲) &= (-۲) \times ۲ + ۴(-1) = -۸ \\ f'_-(۲)g(۲) + f(۲)g'(۲) &= ۲ \times ۲ + ۴(-1) = ۰ \end{aligned}$$

در $x=۲$ مشتق پذیر نیست

$$h'(۳) = f'(۳)g(۳) + f(۳)g'(۳) = (-۲) \times 1 + ۲ \times (-1) = -۴$$

$$k'(1) = \frac{۲ \times ۳ - ۲ \times (-1)}{(۳)^۲} = \frac{۸}{۹} \quad k'_+(۲) = \frac{-۲ \times ۲ - ۴ \times (-1)}{(۲)^۲} = \frac{۰}{۹} = ۰$$

در $x=۲$ مشتق پذیر نیست

$$k'(۳) = \frac{-۲ \times 1 - ۲ \times (-1)}{(1)^۲} = ۰ \quad k'_-(۲) = \frac{۲ \times ۲ - ۴ \times (-1)}{(۲)^۲} = ۲$$

تمرین ۱۱

$$(\mathfrak{w}f + \mathfrak{v}g)'(1) = \mathfrak{w}f'(1) + \mathfrak{v}g'(1) = \mathfrak{w} \times \mathfrak{w} + \mathfrak{v} \times \mathfrak{A} = 19$$

$$(f + g)'(1) = f'(1) + g'(1) = \mathfrak{w} + \mathfrak{A} = 8$$

تمرین ۱۲:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$\rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0)$ وجود ندارد
توشه ای برای موفقیت

$$f'(x) = 6x(2x - 5)^2 + 4(2x - 5)(3x^2 - 4) = (2x - 5)(12x^2 - 30x - 16)$$

(الف)

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right) (x^3 + 1) + 3x^2 (\sqrt{3x+2})$$

(ب)

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(-3x + 2) + 3(x^2 - 3x + 1)}{(-3x + 2)^2} = \frac{-3x^2 + 4x - 3}{(-3x + 2)^2}$$

(پ)

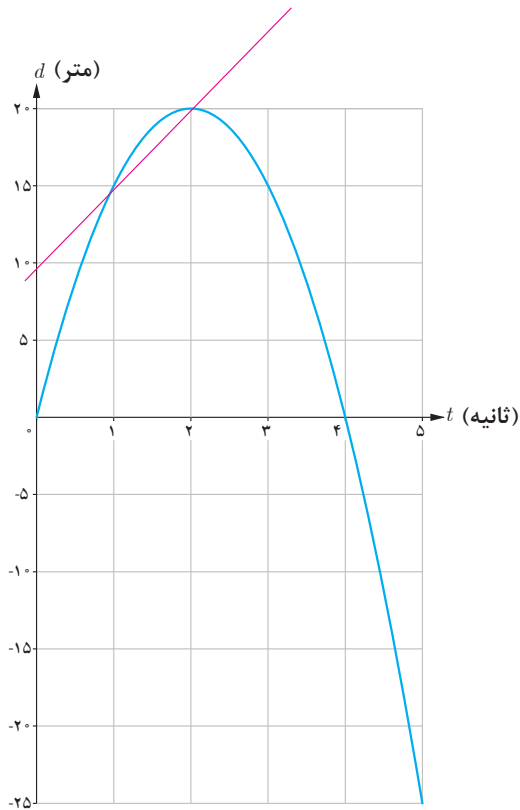
$$f'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$$

(ت)

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت 28° کیلومتر را در ۴ ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان 7° $\frac{28^{\circ}}{4}$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه ای نزدیک است. اگر نمودار مکان – زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان – زمان را در آن دو لحظه قطع می کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه ای در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس های گذشته ملاحظه کردید، می توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان – زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده های دیگر نیز می توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.





مثال: خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان-زمان (شکل):

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه های زمانی $[1, 2]$ ، $[1, 1/5]$ و $[1, 1/4]$ به دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه های کوچک تری مانند $[1, 1/3]$ و $[1, 1/2]$ و ... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه ها به چه عددی نزدیک می شود؟

پ) سرعت لحظه ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t = 1$ به دست آورید.

ت) سرعت لحظه ای در $t = 2$ و $t = 3$ چقدر است؟

حل:

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 2] = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 15}{1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/5] = \frac{d(1/5) - d(1)}{1/5 - 1} = \frac{18/5 - 15}{-4/5} = \frac{3/5}{-4/5} = -3/4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1, 1/4] = \frac{d(1/4) - d(1)}{1/4 - 1} = \frac{18/2 - 15}{-3/4} = \frac{3/2}{-3/4} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه های زمانی کوچک تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه ای در $t = 1$ نزدیک می شود.

$$\text{پ) } d'(1) = 10, \text{ پس } d'(t) = -10t + 20$$

$$\text{ت) } d'(2) = 0, \quad d'(3) = -10$$

سرعت در لحظه $t = 2$ ، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور x هاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه های $t = 3$ و $t = 4$ برابر است و علامت منفی در مورد $d'(3)$ نشان می دهد که جهت حرکت در $t = 3$ برخلاف جهت حرکت در $t = 4$ است.

به جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

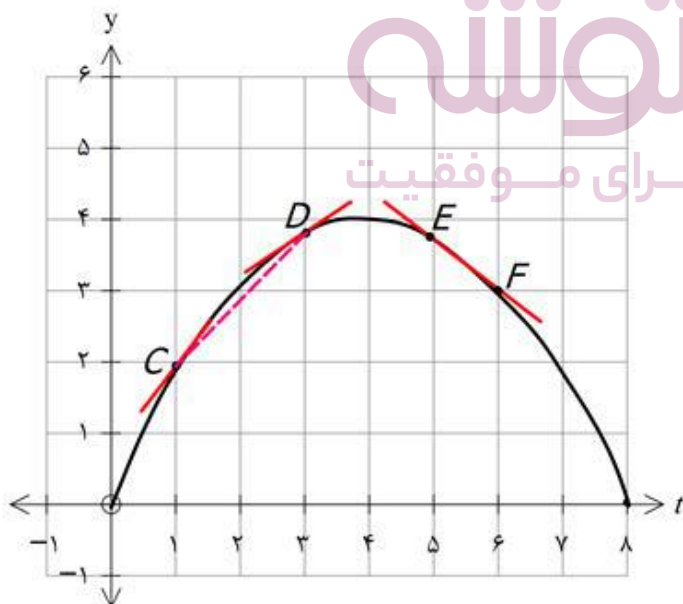
همچنین آهنگ تغییر لحظه ای تابع f را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x = a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

کار در کلاس

۱) نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: (محاسبه عددی لازم نیست.)



A سرعت متوسط بین $t = 1$ و $t = 3$

B سرعت متوسط بین $t = 5$ و $t = 6$

C سرعت لحظه ای در $t = 1$

D سرعت لحظه ای در $t = 3$

E سرعت لحظه ای در $t = 5$

F سرعت لحظه ای در $t = 6$

$$F < B < E < D < A < C$$

$$f(t) = k(t - 4)^2 + 4$$

$$\xrightarrow{f(0)=0} k(0 - 4)^2 + 4 = 0 \rightarrow 16k + 4 = 0 \rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

$$f(t) = -\frac{1}{4}(t - 4)^2 + 4$$

$$f'(t) = -\frac{1}{2}(t - 4)$$

$$f(1) = -\frac{1}{4}(1 - 4)^2 + 4 = \frac{-9}{4} + 4 = \frac{7}{4}$$

$$f(3) = -\frac{1}{4}(3 - 4)^2 + 4 = \frac{-1}{4} + 4 = \frac{15}{4}$$

$$f(5) = -\frac{1}{4}(5 - 4)^2 + 4 = \frac{-1}{4} + 4 = \frac{15}{4}$$

$$f(6) = -\frac{1}{4}(6 - 4)^2 + 4 = -1 + 4 = 3$$

$$A: \frac{\frac{15}{4} - \frac{7}{4}}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$B: \frac{3 - \frac{15}{4}}{6 - 5} = -\frac{3}{4}$$

$$C: f'(1) = -\frac{1}{2}(1 - 4) = \frac{3}{2}$$

$$D: f'(3) = -\frac{1}{2}(3 - 4) = \frac{1}{2}$$

$$E: f'(5) = -\frac{1}{2}(5 - 4) = \frac{-1}{2}$$

$$F: f'(6) = -\frac{1}{2}(6 - 4) = -1$$

$$-1 \quad -\frac{3}{4} \quad \frac{-1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

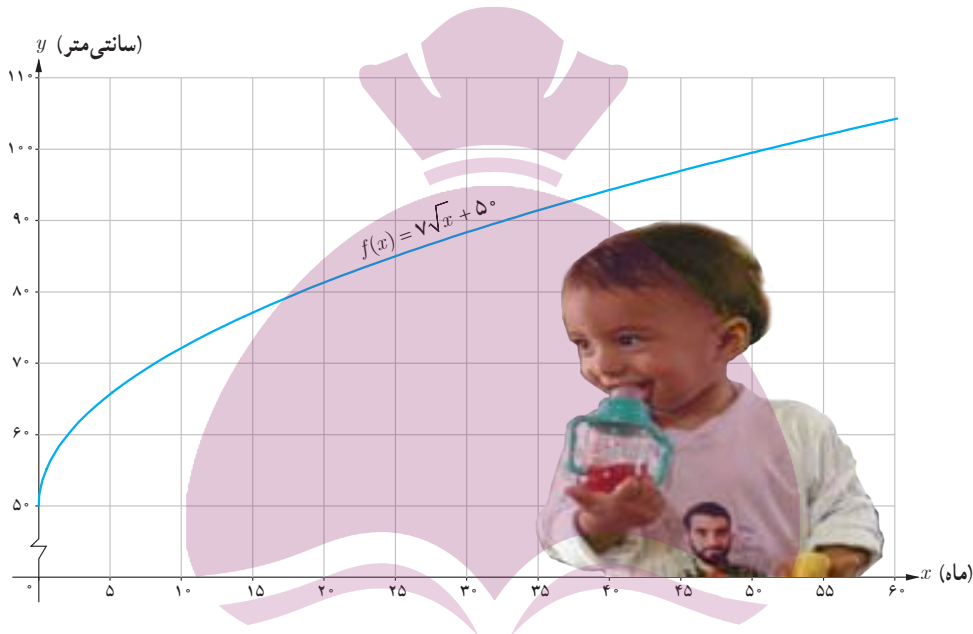
F B E D A C

کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ رشد: تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. به طور مثال $f(25) = 85$ آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 60]$ چنین است:

$$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{7\sqrt{60} + 50 - 50}{60} \approx 0.9 \text{ سانی متر ماه}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانی متر در هر ماه است.



ایران تونش
توشه‌ای برای موفقیت

کار در کلاس

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانی متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانی متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

حل کار در کلاس صفحه ۹۶

$$f(۲۵) = ۷\sqrt{۲۵} + ۵۰ = ۸۵$$

$$\frac{f(۲۵) - f(۰)}{۲۵ - ۰} = \frac{۸۵ - ۵۰}{۲۵} = \frac{۳۵}{۲۵} = ۱/۴$$

(الف)

$$f'(x) = \frac{۷}{۲\sqrt{x}} \quad f'(۲۵) = \frac{۷}{۲\sqrt{۲۵}} = ۰/۷ \quad f'(۴۹) = \frac{۷}{۲\sqrt{۴۹}} = ۰/۵$$

(ب)

(پ)

$$f(۱۶) = ۸۰ \rightarrow \text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۳۶) - f(۱۶)}{۳۶ - ۱۶} = \frac{۹۵ - ۸۰}{۳۶ - ۱۶} = ۰/۷۵$$

$$f(۳۶) = ۹۵$$

$$f(۱۶) = ۷\sqrt{۱۶} + ۵۰ = ۷۸ \rightarrow \text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۳۶) - f(۱۶)}{۳۶ - ۱۶} = \frac{۹۲ - ۷۸}{۳۶ - ۱۶} = ۰/۷۰$$

$$f(۳۶) = ۷\sqrt{۳۶} + ۵۰ = ۹۲$$

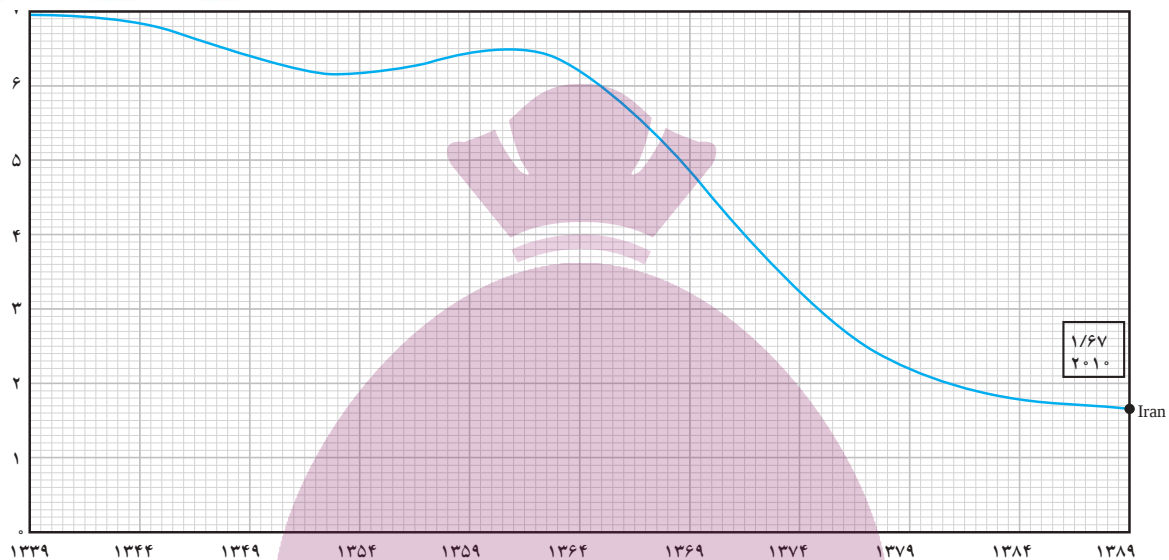
نرخ باروری: نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم قرن نمایش می دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۳۹, ۱۳۸۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با:

$$\frac{1/6 - 7}{1389 - 1339} = \frac{-5/4}{50} = -0.0108$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۶۴, ۱۳۷۹] را به دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

$$\frac{f(1379) - f(1364)}{1379 - 1364} = \frac{2/2 - 6/2}{15} = \frac{-4}{15} = -0.27$$

[۱۳۵۴, ۱۳۶۲]



میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

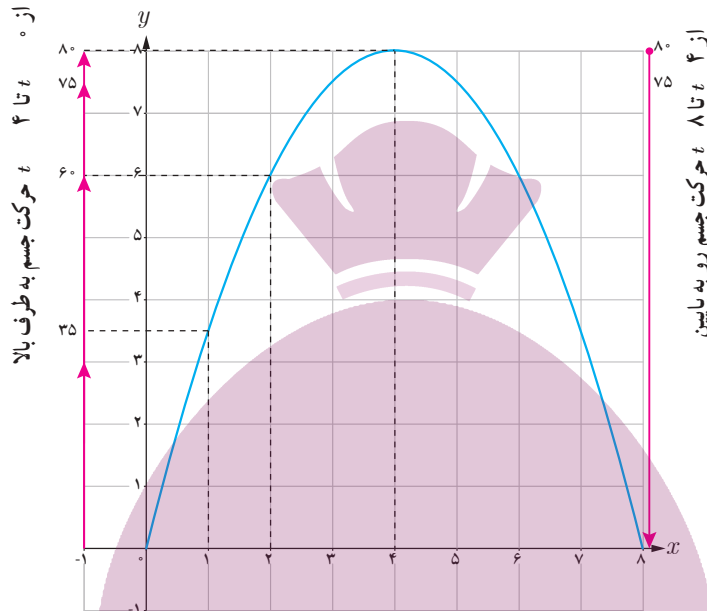
خواندنی

نرخ باروری در ایران در سال های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی ها نشان می دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ ترین و سریع ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه های وزارت بهداشت، براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می کند که این سیاست ها تا دست یابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

مثال: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. به طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان-زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.



اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی $[0, 2]$ ، $[2, 3]$ ، $[3, 4]$ را به ترتیب با v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 نمایش دهیم، داریم:

$$v_1 = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} = \frac{75 - 60}{1} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5 \text{ m/s}$$

$$v_4 = \frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = \frac{75 - 80}{1} = -5 \text{ m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ ، $t=3$ و $t=4$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به دست می‌آید:

$$h(t) = -5t^2 + 40t \Rightarrow h'(t) = -10t + 40$$

$$h'(1) = 30 \text{ m/s}, \quad h'(2) = 20 \text{ m/s}, \quad h'(3) = 10 \text{ m/s}, \quad h'(4) = 0 \text{ m/s}$$

در $t=4$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس

جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه $[4, 5]$ برابر $\frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = \frac{75 - 80}{1} = -5 \text{ m/s}$ و سرعت لحظه‌ای در $t=5$ برابر $h'(5) = -10 \text{ m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

هنگام پرتاب $f'(0) = -10 \times (0) + 40 = 40 \text{ m/s}$ هنگام برخورد به زمین $f'(8) = -10 \times 8 + 40 = -40 \text{ m/s}$

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی $[0, 8]$ به دست آورید.

$$\frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{(-5(8)^2 + 40(8)) - (-5(0)^2 + 40(0))}{8} = \frac{0 - 75}{8} = -9.375 \text{ m/s}$$

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم 35 m/s و -35 m/s است.

$$h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow \begin{aligned} \xrightarrow{h'(t)=35} -10t + 40 = 35 &\rightarrow -10t = -5 \rightarrow t = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ s} \\ \xrightarrow{h'(t)=-35} -10t + 40 = -35 &\rightarrow -10t = -75 \rightarrow t = \frac{75}{10} = 7.5 \text{ s} \end{aligned}$$

تمرین

۱) جدول زیر درجه حرارت T (سانتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

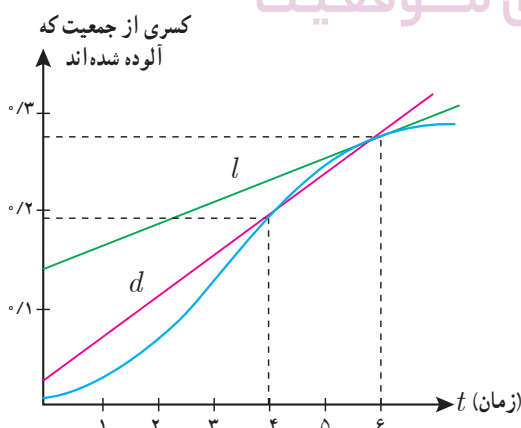
آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

پ) پاسخ ها را تفسیر کنید.

۲) کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده اند بر حسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

الف) شیب های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می دهند.ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان های $t = 1$ ، $t = 2$ ، یا $t = 3$ بیشتر است؟پ) قسمت ب را برای $t = 4$ ، $t = 5$ و $t = 6$ بررسی کنید.

حل تمرین

کانال تلگرام گام به گام کل دروس
@DAVAAZDAHOM

$$T(8) = 11$$

$$T(12) = 19$$

$$\frac{19-11}{12-8} = \frac{8}{4} = 2$$

سانتی گراد
ساعت

۱-الف

$$T(12) = 19$$

$$T(18) = 9$$

$$\frac{9-19}{18-12} = \frac{-10}{6} = -1\frac{5}{3} = -1\frac{1}{6}$$

سانتی گراد
ساعت

ب:

از ساعت ۸ تا ۱۶ بطور متوسط هوا گرمتر می شود. از ساعت ۱۲ تا ۱۸ بطور متوسط هوا سردتر
توشه ای برای موفقیت

می شود

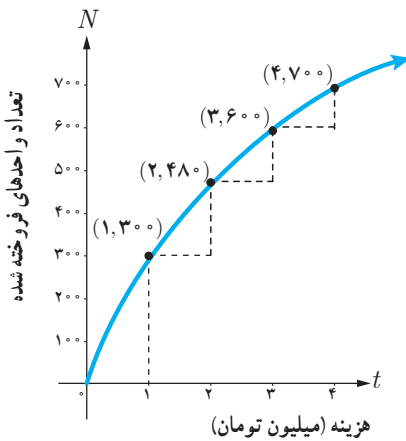
۲- الف) در هفته سوم آهنگ آلوده شدن از هفته ششم بیشتر است یعنی هرچه زمان بیشتر گذشته

جمعیت کمتری از شهر آلوده شدند

ب) در $t=3$ شیب خط مماس بیشتر است

$$m_A > m_B$$

پ) در $t=6$ از همه کمتر است.



۳ نمودار روبه رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می کند به دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می یابند، در حال کاهش است؟

۴ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 1$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

t	ثانیه	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

۵ توبی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می شود.

$f(t)$ نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه رو نمایش داده شده است.

بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

الف) ۱/۲۳ m/s ب) ۱۴/۹۱ m/s پ) ۱۱/۵ m/s ت) ۱۶/۰۳ m/s

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار تقریبی $f'(x)$	-۶	-۳	-۱/۸	-۰/۴	—

۶ با توجه به مقادیر تابع f در جدول روبه رو، f' را برای

نقاط داده شده تخمین بزنید. به طور مثال $f'(0) \approx -6$. بقیه جدول را کامل کنید.

$$\frac{f(30) - f(15)}{30 - 15} = \frac{40 - 46}{15} = \frac{-6}{15} = -0.4$$

$$\frac{f(10) - f(5)}{10 - 5} = \frac{55 - 70}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

$$\frac{f(15) - f(10)}{15 - 10} = \frac{46 - 55}{5} = \frac{-9}{5} = -1.8$$

۷ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است:

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$

۸ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

۹ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه

از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{10})^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می شود؟

$$\frac{N(1) - N(0)}{1 - 0} = \frac{300 - 0}{1} = 300$$

$$\frac{N(2) - N(1)}{2 - 1} = \frac{480 - 300}{1} = 180$$

$$\frac{N(3) - N(2)}{3 - 2} = \frac{600 - 480}{1} = 120$$

$$\frac{N(4) - N(3)}{4 - 3} = \frac{700 - 600}{1} = 100$$

ب) چون شیب مماس ها کم می شود. (چون آهنگ لحظه ایی در حال کاهش است) (تقعر رو به پایین است)

$$f'(t) = 2t - 1$$

$$f(5) = 25 - 5 + 10 = 30$$

$$f(0) = 0 - 0 + 10 = 10$$

$$\text{سرعت لحظه ای} = \frac{30 - 10}{5 - 0} = 4$$

$$2t - 1 = 4 \rightarrow 2t = 5 \rightarrow t = 5/2 \text{ s}$$

متوسط

ایران توننده

توسعه ای برای موفقیت

$$\frac{f(0/5) - f(0/4)}{0/5 - 0/4} = \frac{17/4 - 16/3}{0/1 - 0/1} = \frac{1/1}{0/1} = 11$$

$$\frac{f(0/4) - f(0/3)}{0/4 - 0/3} = \frac{16/3 - 15/2}{0/1 - 0/1} = \frac{1/1}{0/1} = 12$$

→ میانگین

$$= \frac{11 + 12}{2} = 11/5$$

۷- الف) نادرست است زیرا تابع $y = \sqrt[3]{x}, y = x^3$ هر دو از $(0,0), (1,1)$ می گذرند

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

$\swarrow$
 $\searrow$

$\xrightarrow{y=x^3} f'(x) = 0$
 $\xrightarrow{y=\sqrt[3]{x}} f'(x) = 0$

ب) نادرست است زیرا $x_1 < x_p \rightarrow f(x_1) < f(x_p)$ $f(x) = \sqrt{x}$ تابعی که تقعرش به پایین است

یعنی آهنگ تغییرات متوسط همواره مثبت است اما ضرورتی ندارد که مقادیر همواره صعود کنند باشد

$$f(x) = (x-a)^3 \rightarrow f(a) = (a-a)^3 = 0$$

$$f'(x) = 3(x-a)^2 \rightarrow f'(a) = 3(a-a)^2 = 0$$

پ) نادرست است زیرا

تمرین ۸-الف)

$$m(4) = \sqrt{4} + 4 \times 4^3 = 136 \rightarrow 136 - 17/4 = 112/4$$

$$m(2) = \sqrt{2} + 2 \times 2^3 = 17/4$$

ب)

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \quad f(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 6 \times 3^2 = 0/28 + 54 = 54/28$$

تمرین ۹-الف)

$$v(1) = 40 \left(1 - \frac{1}{100} \right)^2 = 39/204$$

$$\rightarrow \bar{v} = \frac{39/204 - 40}{1 - 0} = -0/796$$

$$v(0) = 40 \left(1 - \frac{0}{100} \right)^2 = 40$$

ب)

$$v' = 40 \times 2 \left(1 - \frac{t}{100} \right) \times \left(-\frac{1}{100} \right) = -0/8 \left(1 - \frac{t}{100} \right)$$

$$-0/8 \left(1 - \frac{t}{100} \right) = -0/4$$

$$v(100) = 40 \left(1 - \frac{100}{100} \right)^2 = 0 \Rightarrow -0/8 + \frac{0/8t}{100} = -0/4$$

$$\bar{v} = \frac{0 - 40}{100 - 0} = -0/4$$

$$\frac{8t}{1000} = \frac{4}{10} \rightarrow t = 50 \text{ s}$$

$$v(0) = 40 \left(1 - \frac{0}{100} \right)^2 = 40$$