

۲

مثلثات



انشعاب رگ ها در بدن انسان به گونه ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به هم است. در شبیه سازی کامپیوتری از شبکه رگ ها این خاصیت مورد توجه قرار می گیرد.

تناوب و تانژانت

معادلات مثلثاتی

درس اول

درس دوم

تعریف: تابع f را متناوب گوئیم هرگاه عدد حقیقی و مخالف صفر مانند T وجود داشته باشد بطوریکه

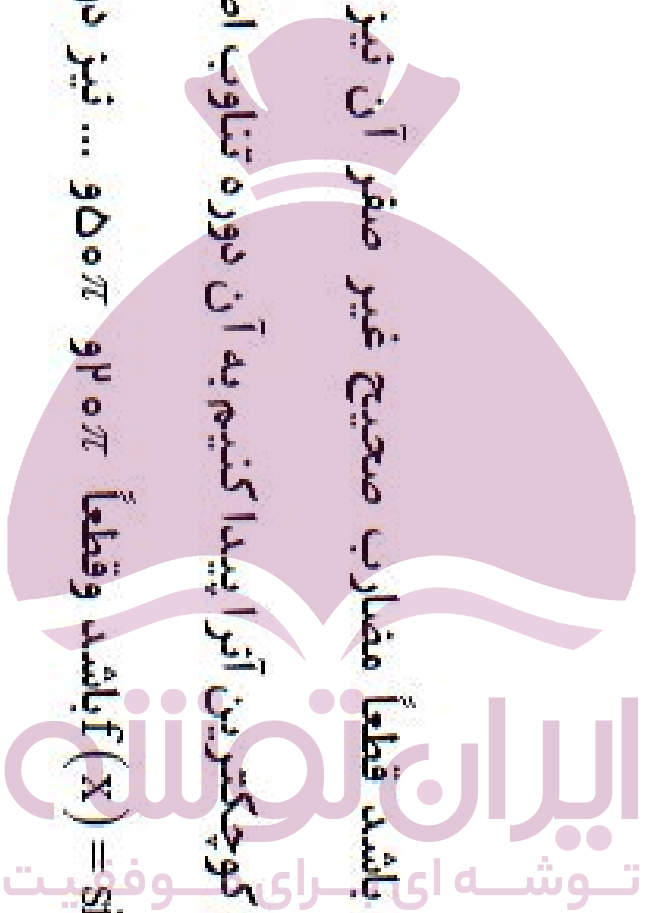
$$x \in D_f \rightarrow \begin{cases} x \pm T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

مقدار آن می باشیم. با این تعریف چیزی که دستگیرمان می شود این است که است که دامنه نمی تواند از بالا یا پایین محدود باشد این جمله منزله آن است که $D_f = \mathbb{R}$ بلکه اگر $x_0 \in D_f$ آنگاه قطعاً $f(x) = \tan x$ که نقاطی به فاصله دوره تناوب از یکدیگر با هم تعریف

شده هستند یا با هم تعریف نشده بنابر این انتظار متناوب بودن توابعی مانند $f(x) = \sin \sqrt{x} - 1$ یا

$$f(x) = \tan \sqrt{x^r - 5x + 6}$$

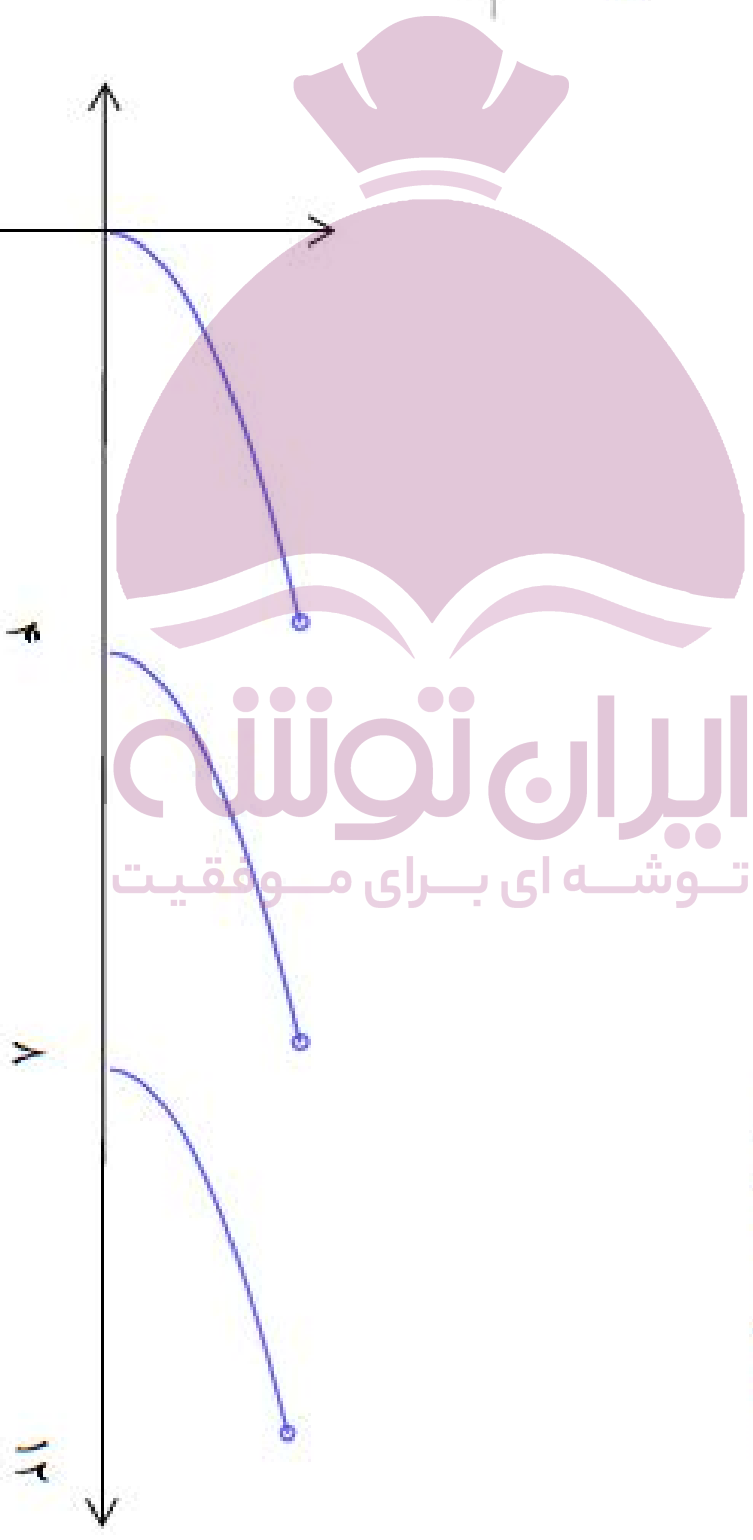
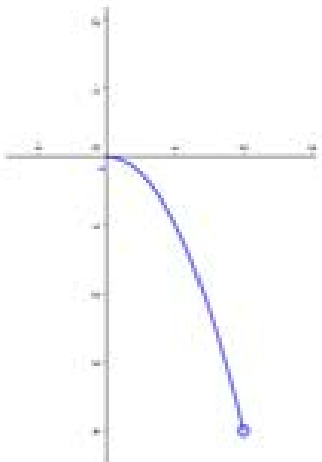
را نداشته باشیم.



اگر T دوره تناوب یک تابع باشد قطعاً مضارب صحیح غیر صفر آن نیز می توانند دوره تناوب محسوب شوند اما اگر بتوانیم کوچکترین اثر پیداکنیم به آن دوره تناوب اصلی گوئیم مثلاً π را می تواند دوره تناوب برای $f(x) = \sin x$ باشد و قطعاً 2π و 5π و ... نیز دوره تناوب می گردند اما مایلیم عددی کوچکتر از π ه امالند 2π را دوره تناوب اصلی این تابع معرفی می کنیم هرچند که ممکن است تابعی متناوب باشد اما کوچکترین دوره تناوب آن پیدا نشود مانند توابع ثابت $f(x) = c$ بطوریکه $k = f(x + T) = f(x)$ که T می تواند هر عدد حقیقی باشد.

مثال: تابع f در بازه $[0.4]$ بصورت $f(x) = \sqrt{x}$ تعریف شده است اگر تابع g متناوب شده تابع f باشد

آنگاه $g(1397)$ چیست؟



$$g(1397) = g\left(\underbrace{1397}_{34 \times 4} + 1\right) = g(1) = f(1) = \sqrt{1} = 1$$

ایران توننده
توشه ای برای موفقیت



مثال: اگر تابع $f(x) = \frac{\mu x + 1}{\mu x - 1}$ (بطول ۲) را متناوب نمایشیم قانون تابع در فاصله $[-\mu, \mu]$

چه خواهد شد؟

حل: چون طول دوره تناوب ۵ می باشد پس دوره تناوب می تواند ۱ هم باشد یعنی دو دوره تناوب

$$f(x) = f(x - \mu \times 5) \quad \mu < x \leq 1\mu \Rightarrow -\mu < \underbrace{x - 1\mu}_{=t} \leq \mu \Rightarrow -\mu < t \leq \mu \quad x - 1\mu = t \rightarrow x = t + 1\mu$$

$$f(t) = f(x) \rightarrow f(x - 1\mu) = \frac{\mu x + 1}{\mu x - 1} \rightarrow f(t) = \frac{\mu(t + 1\mu) + 1}{\mu(t + 1\mu) - 1} = \frac{\mu t + \mu + 1}{\mu t + 1\mu - 1}$$

نکته: اگر T دوره تناوب اصلی تابع $y = f(x)$ باشد آنگاه T دوره تناوب اصلی

اصلی $f(x)$ نیز می باشد اما دوره تناوب اصلی $a - f(x), \frac{a}{f(x)}, f(x) + a, f(a + x), (a \neq 0)af(x), -f(x)$

$(a \neq 0) \frac{T}{|a|}$ برابر است با: $y = f(ax)$

بنابر این دوره تناوب اصلی برای توابع زیر همگی 2π می باشد.

$$f(x) = -5 \sin \left(x + \frac{\pi}{5} \right) \quad g(x) = \frac{\mu}{\cos(x - \mu)} \quad h(x) = \sqrt{5} \sin \left(-x - \sqrt{5} \right)$$

و دوره تناوب اصلی برای توابع زیر همگی π می باشد.

$$f(x) = \tan \left(x - \frac{\pi}{\mu} \right) \quad g(x) = -\sqrt{\mu} \cotan \left(-x + \frac{\pi}{9} \right)$$

سوال: ثابت کنید تابع $y = \sin x$ دوره تناوب اصلی کوچکتر 2π از ندارد.

اثبات: از برهان خلف استفاده می کنیم فرض می کنیم دوره تناوب کوچکتری مانند T' داشته باشد

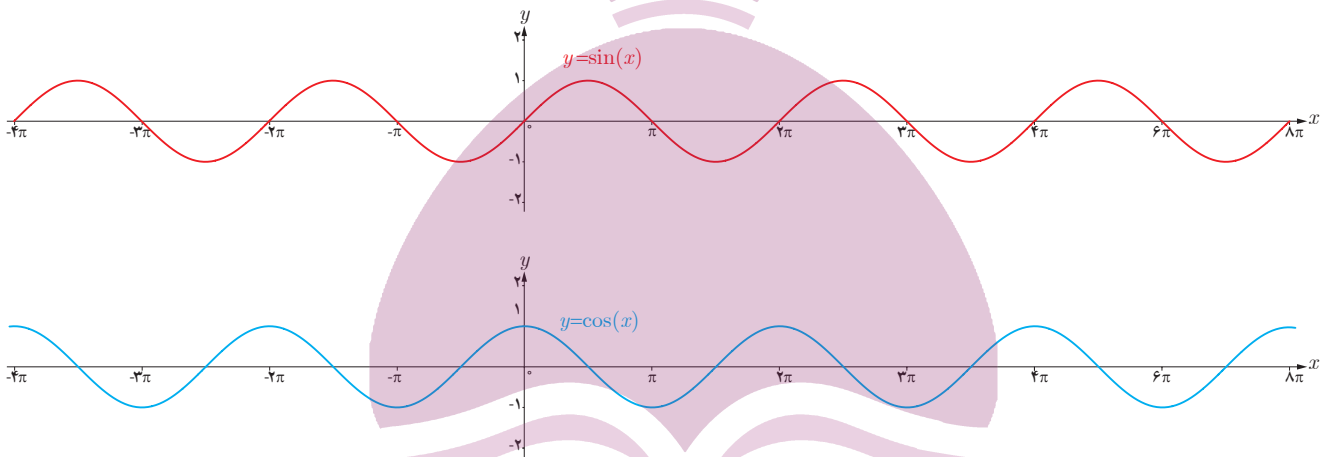
یعنی $0 < T' < 2\pi$ و $f(x) = f(x + T')$ در اینصورت داریم

$$f(x + T') = f(x) \Rightarrow \sin(x + T') = \sin x \rightarrow \sin x \cdot \cos T' + \cos x \cdot \sin T' = (\sin x)(1)$$

از آنجاییکه x را می توانیم هر کمائی بگیریم در نظر می گیریم $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} f(x + T') &= f(x) \Rightarrow \sin(x + T') = \sin x \xrightarrow{=1} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos T' + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin T' = \left(\sin \frac{\pi}{2} \right)(1) \rightarrow \cos T' = 1 \\ &\rightarrow T' = 0 \quad \times \quad 0 < T' < 2\pi \end{aligned}$$

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است ($\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$) به عبارتی اگر تکه ای از نمودار این توابع را در بازه ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می توانید در شکل های زیر مشاهده نمایید.



با دقت به نمودار توابع فوق می توان مشاهده کرد که نمودار در بازه هایی به طول 2π ، 4π ، 6π و ... تکرار می شود. اما کوچک ترین بازه ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابعی را توابع متناوب و 2π را دوره تناوب آنها می نامیم.

تعریف: تابع f را متناوب می نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$.
کوچک ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می نامیم.

۱) می دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و -۱ است. در ادامه می خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

تذکر: برای تعیین دوره تناوب باید تابع را حتی الامکان ساده کرد.

مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را بدست آورید.

$$1) f(x) = \sin 3x - \cos 5x$$

$$\begin{cases} \sin 3x & T_1 = \frac{2\pi}{3} \\ \cos 5x & T_2 = \frac{2\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow T = 2\pi$$

$$2) h(x) = \sin 4x - \cos \pi x$$

$$\begin{cases} \sin 4x & T_1 = \frac{2\pi}{4} = \pi \\ \cos \pi x & T_2 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \end{cases}$$

عدد گویا و π عددی گنگ هستند پس نمی

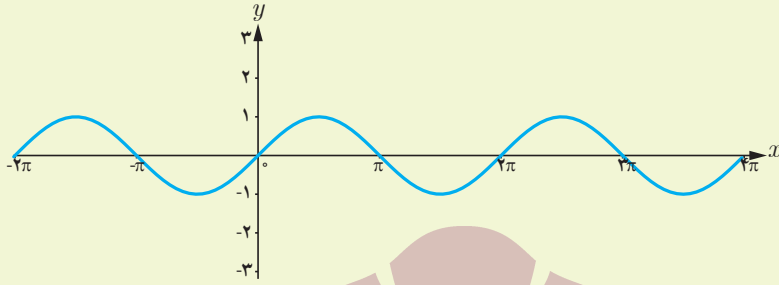
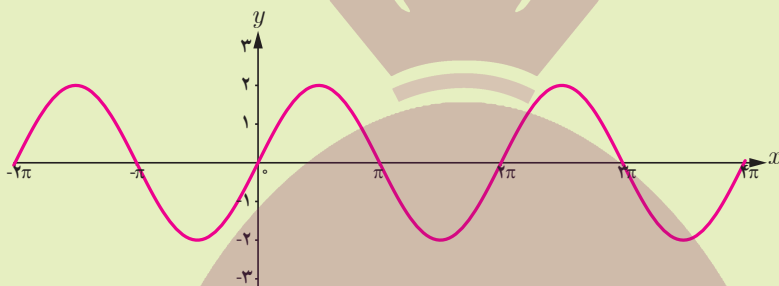
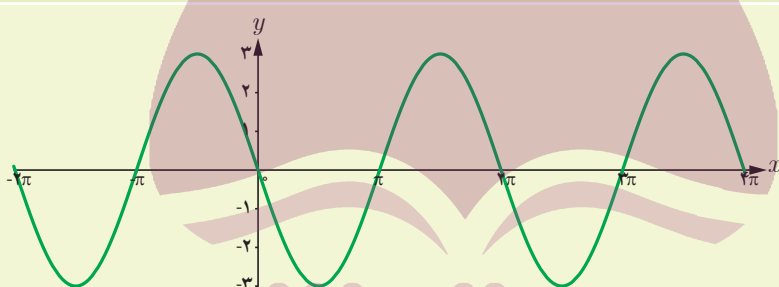
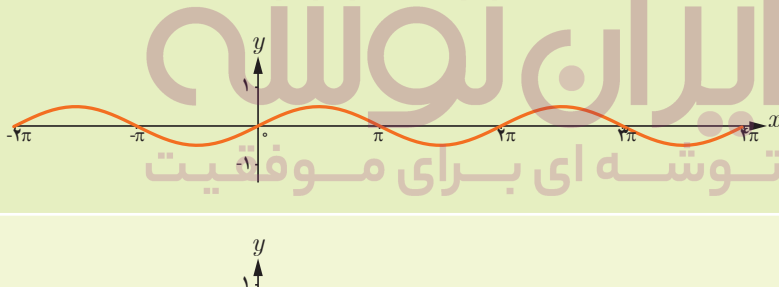
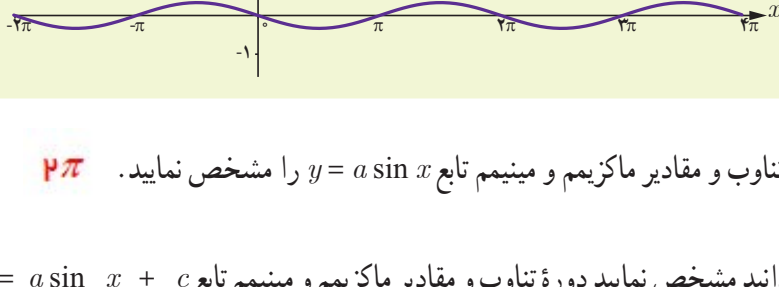
توان ک.م.م پیدا کرد

$$3) g(x) = \cos^2 15x - \tan^2 6x + \sin^2 9x$$

$$\begin{cases} \cos^2 15x & T_1 = \frac{\pi}{15} \\ \tan^2 6x & T_2 = \frac{\pi}{6} \\ \sin^2 9x & T_3 = \frac{\pi}{9} \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{9}$$

$$4) s(x) = \frac{2 \sin x - 3 \cos x}{4 \sin x + 5 \cos x}$$

$$s(x) = \frac{\cos x}{4 \sin x + 5 \cos x} = \frac{2 \tan x - 3}{4 \tan x + 5} \rightarrow T = \pi$$

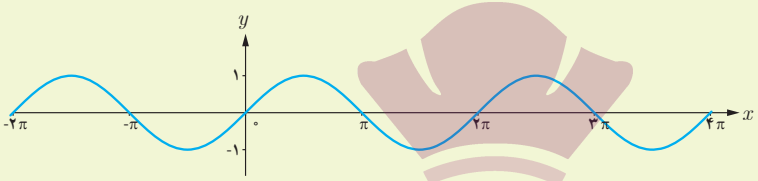
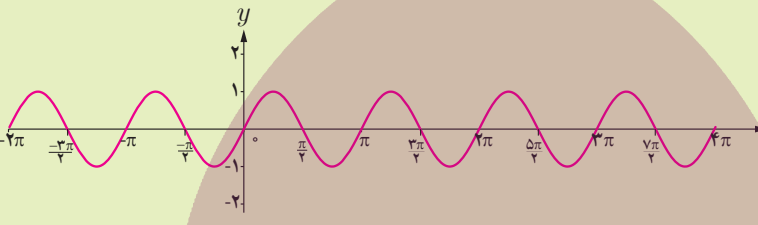
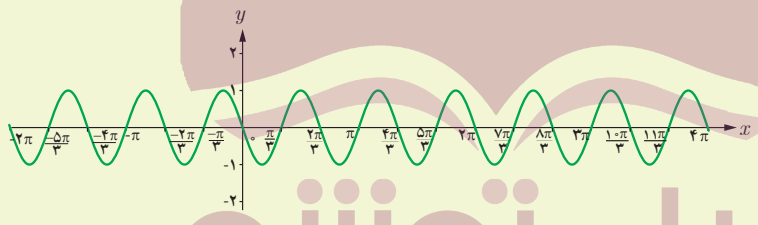
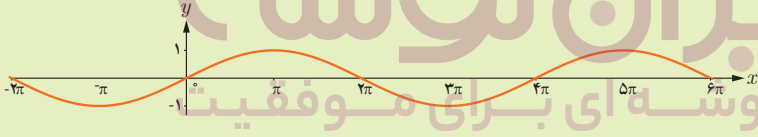
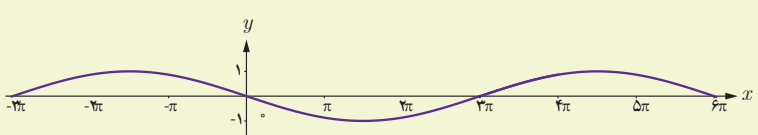
تابع	نمودار تابع	ماکزیم	مینیم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$y = 2 \sin x$		۲	-۲	2π
$y = -3 \sin x$		۳	-۳	2π
$y = \frac{1}{2} \sin x$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2π
$y = -\frac{1}{3} \sin x$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2π

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نمایید. 2π

2π

با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانید مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = a \sin x + c$ چگونه است. با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم توابع $y = a \cos x$ و $y = a \cos x + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

۱ با دقت در نمودار هریک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هریک را تشخیص دهید. در ادامه می خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$y = \sin 2x$		۱	-۱	π
$y = \sin(-3x)$		۱	-۱	$\frac{2\pi}{3}$
$y = \sin \frac{x}{2}$		۱	-۱	4π
$y = \sin(-\frac{x}{3})$		۱	-۱	6π

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانیم، مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است.

با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \cos bx + c$ و $y = \cos bx$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

نکاتی در مورد توابع متناوب :

۱- دوره تناوب اصلی توابع $\sin^{rn-1}(ax+d)$, $\cos^{rn-1}(ax+d)$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ می باشد $(a \neq 0, n \in \mathbb{Z})$

۲- دوره تناوب اصلی توابع $\sin^{rn}(ax+d)$, $\cos^{rn}(ax+d)$, $\tan^n(ax+d)$, $\cotan^n(ax+d)$

برابر $\frac{\pi}{|a|}$ می باشد

۳- اگر g تابعی متناوب با دوره تناوب T و f تابعی دلخواه باشد آنگاه تابع fog در صورت معین بودن

متناوب خواهد بود که دوره تناوب اصلی آن T و یا کوچکتر از T می باشد. چنانچه f تابعی یک به یک باشد دوره تناوب اصلی fog همان T است (کوچکتر نمی شود)

۴- اگر f متناوب با دوره تناوب T_1 و g تابعی متناوب با دوره تناوب T_2 باشد در صورتیکه T کوچکترین مضرب

مشترک T_1 و T_2 باشد آنگاه دوره تناوب توابع $f \pm g$, $f \times g$, $f - \frac{f}{g}$ حد اکثر T می گردد. (و شاید کوچکتر از T)

مراحل رسم تابع $y = a \sin(bx + c) + d$

$$y = \sin x - 1$$

تابع شناخته شده است که از مبدأ مختصات بصورت صعودی جدا شده و دوره تناوب آن $\frac{2\pi}{1}$ می باشد.

$$y = \sin(bx) - 2$$

باز هم از مبدأ مختصات می گذرد که اگر $+ > b$ باشد صعودی و اگر $+ < b$ نزولی خارج می شود .

همچنان $(\sin - \Delta x = -\sin \Delta x)$ که $\min = -1$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ می باشد.

$$y = \sin(bx + c) - 3$$

همان نمودار $y = \sin(bx)$ می باشد که به اندازه $\frac{c}{b}$ به سمت چپ یا راست حرکت می کنیم

$\min = -1$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ می باشد.

$$y = a \sin x - 4$$

همان نمودار $y = \sin x$ می باشد که با توجه به ضرب a خواهیم داشت. $\min = -|a|$, $\max = |a|$

که در مبدأ مختصات اگر $a > 0$ باشد صعودی و اگر $a < 0$ نزولی عبور می کند

$$y = a \sin (bx) - 5$$

مانند هر حله دوم تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ می باشد که $\max = |a|$, $\min = -|a|$ می باشد.

$$y = a \underbrace{\sin(bx + c)}_{g(x)}$$

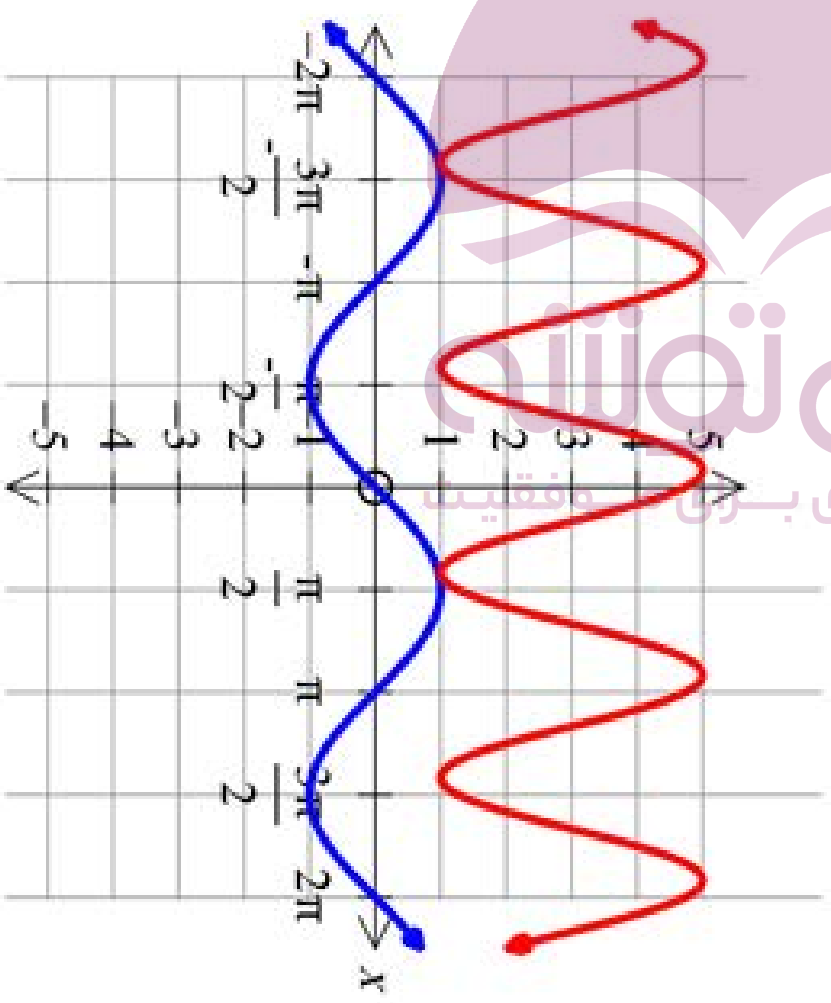
مانند نمودار $y = \sin(bx + c)$ می باشد که بستگی به مقدار و علامت a ممکن است ماگزیمم

ومی نیمه غیر از 1 - داشته باشیم و از مبدأ خارج شود

$$y = a \sin(bx + c) + d - y$$

همان نمودار $y = \sin(bx + c)$ می باشد به اندازه d به سمت بالا یا پایین حرکت کرده است.

نمودار تابع $g(x) = \mu \sin\left(\mu x - \frac{\pi}{\mu}\right) + \mu$ را رسم کنید با انتقال



سوال: در یک شهر در آبان ماه به‌طور متوسط در هر شبانه روز حداکثر دما 32°C درجه سانتیگراد و حداقل 2°C درجه سانتیگراد است یک معادله سینوسی برای تعیین درجه حرارت در شبانه روز بنویسید.

$$C = \frac{32^{\circ}\text{C} + 2^{\circ}\text{C}}{2} = 17^{\circ}\text{C} \quad a = \frac{32^{\circ}\text{C} - 2^{\circ}\text{C}}{2} = 15^{\circ}\text{C}$$

$$\frac{2\pi}{b} = 24 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$$

$$y = 15 \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 17^{\circ}\text{C}$$

سوال: در یک مخزن آب شهری از یک طرف آب وارد می شود و پس از تصفیه آب از راه دیگر خارج می

شود ارتفاع ب در این مخزن طبق یک رابطه سینوسی است که هر روز تکرار می شود اگر در ساعت ۳ صبح ارتفاع آن ماکزیمم و برابر ۱۵ متر در ساعت ۱۵ عصر کمترین ارتفاع به اندازه کمتر داشته باشیم معادله این تابع را بنویسید. در ساعت ۱۲ ارتفاع آب چقدر است ؟

$$a = \frac{1}{\mu} \Delta - \delta = \mu / \Delta \quad c = \frac{1}{\mu} \Delta + \delta = 1 \text{ } \circ / \Delta \quad \frac{T}{\mu} = 1 \Delta - \mu = 1 \mu \rightarrow T = \mu \mu = \frac{\mu \pi}{b} \rightarrow b = \frac{\pi}{1 \mu}$$

$$\max (\mu, 1 \Delta) \rightarrow 1 \Delta = \mu / \Delta \sin \left(\frac{\pi}{1 \mu} \times \mu + \alpha \right) + 1 \text{ } \circ / \Delta \rightarrow \mu / \Delta \sin \left(\frac{\pi}{\mu} + \alpha \right) = \mu / \Delta \rightarrow \sin \left(\frac{\pi}{\mu} + \alpha \right) = 1 = \sin \frac{\pi}{\mu}$$

$$\frac{\pi}{\mu} + \alpha = \frac{\pi}{\mu} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\mu}$$

$$\min (1 \Delta, \delta) \rightarrow \delta = \mu / \Delta \sin \left(\frac{\pi}{1 \mu} \times 1 \Delta + \alpha \right) + 1 \text{ } \circ / \Delta \rightarrow \mu / \Delta \sin \left(\frac{\Delta \pi}{\mu} + \alpha \right) = -\mu / \Delta \rightarrow \sin \left(\frac{\Delta \pi}{\mu} + \alpha \right) = -1 = \sin \frac{\mu \pi}{\mu}$$

$$\frac{\Delta \pi}{\mu} + \alpha = \frac{\mu \pi}{\mu} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\mu}$$

$$t = 1 \mu \rightarrow y = \mu / \Delta \sin \left(\frac{\pi}{1 \mu} \times 1 \mu + \frac{\pi}{\mu} \right) + 1 \text{ } \circ / \Delta = \mu / \Delta \left(-\sin \frac{\pi}{\mu} \right) + 1 \text{ } \circ / \Delta = -\mu / \Delta \times \text{ } \circ / \vee + 1 \text{ } \circ / \Delta = \vee / \mu$$

سوال: جمعیت نوعی از حیوانات طبق معادله $p(t) = 10000 \cos \frac{\pi t}{5} + 8000$ باشد که $p(t)$ می باشد

تعداد یا جمعیت در سال t می باشد دوره تناوب جمعیت چند سال است ماگزیمم و می نیمم جمعیت چقدر است؟ نمودار آنرا رسم کنید (در یک دوره تناوب) معادله را بر حسب سینوس بنویسید.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$$

زمانی ماگزیمم رخ میدهد که کسینوس عدد ۱ برگرداند

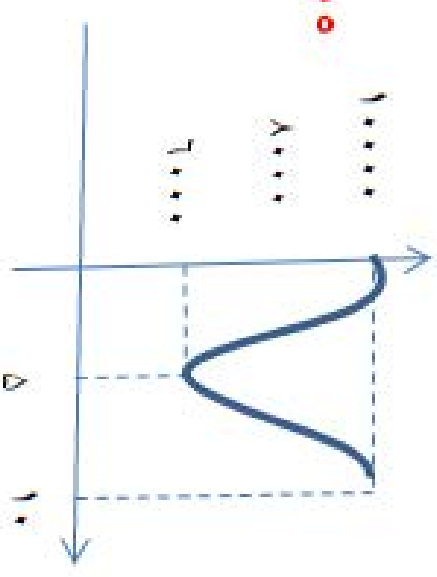
$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow \cos \frac{\pi t}{5} = 1 \Rightarrow p(0) = 10000 \times 1 + 8000 = 18000 \\ t = 10 \Rightarrow \cos \frac{\pi t}{5} = \cos 2\pi = 1 \Rightarrow p(10) = 10000 \times 1 + 8000 = 18000 \end{cases}$$

یا هر مضربی از ۱۰

می نیمم زمانی رخ میدهد که کسینوس کمترین مقدار خود یعنی -۱ برگرداند یعنی در نقاط $5 + 10k$

$$t = 5 \Rightarrow \cos \frac{\pi t}{5} = \cos \pi = -1 \Rightarrow p(5) = 10000 \times -1 + 8000 = 6000$$

$$p(t) = 10000 \sin \left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{2} \right) + 8000$$



سوال: معادله ولتاژ یک دستگاه خانگی بر حسب تابع $\cos$ نسبت به زمان دارای فرکانس (دوره تناوب) $\frac{1}{60}$ می

باشد بطوریکه تغییرات ولتاژ را به این ولتاژ را بنویسید.

$$y = p(t) = a \cos(bt) + c, \quad \frac{2\pi}{b} = \frac{1}{60} \Rightarrow b = 120\pi$$

$$a = \frac{170 - (-170)}{2} = 170, \quad c = \frac{170 + (-170)}{2} = 0$$

$$p(t) = 170 \cos(120\pi t)$$

همان طور که در فعالیت های قبل دیدیم در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ضریب a در دوره تناوب تابع بی تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می شود، در دوره تناوب بی تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$

و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد.
مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

پ) $y = \pi \sin(-x) + 1$

ت) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

حل:

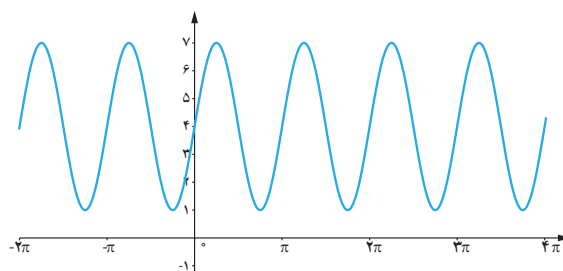
الف) $\max = 3 - 2 = 1$ $\min = -3 - 2 = -5$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ب) $\max = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$ $\min = -\left| -\frac{1}{4} \right| = -\frac{1}{4}$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

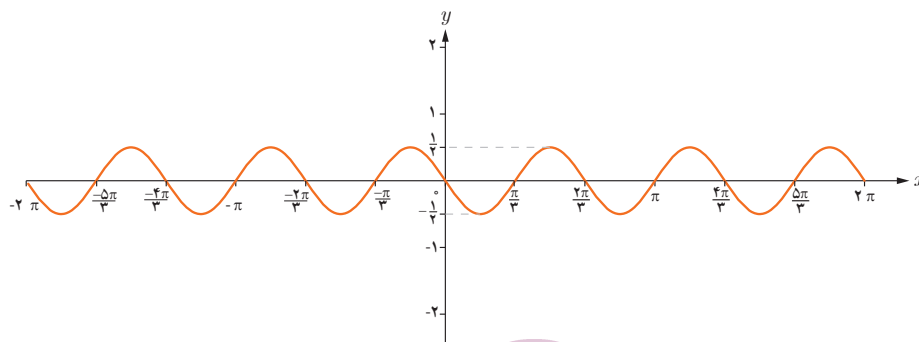
پ) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$ $\min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$ $T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

ت) $\max = 8$ $\min = -8$ $T = \frac{2\pi}{\left| \frac{1}{3} \right|} = 6\pi$

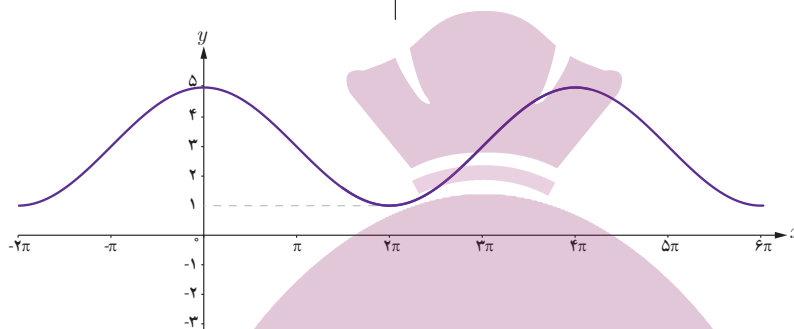
مثال: هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.



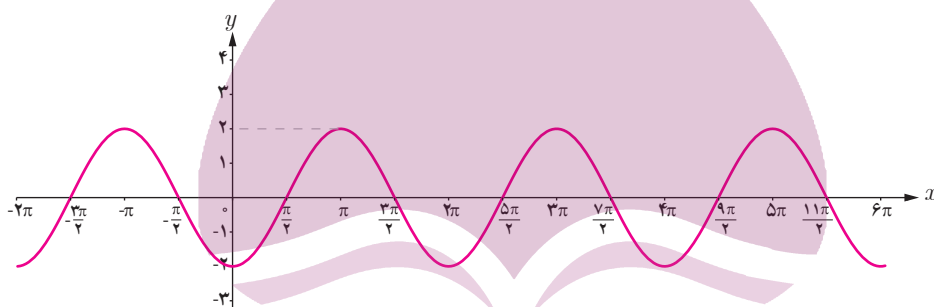
الف)



(ب)



(پ)



(ت)

حل : الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محوره های x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است :

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

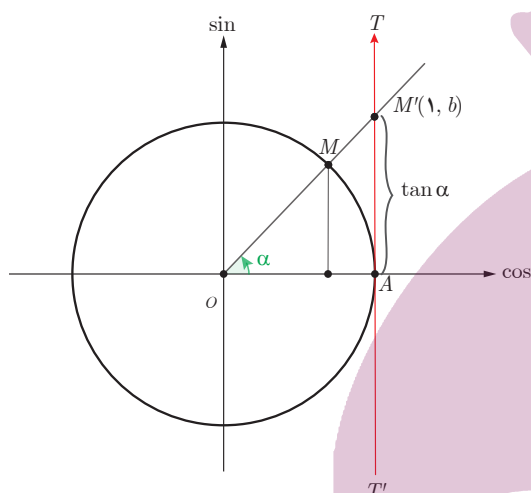
ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $a \neq \frac{1}{3}$ و $|b| = 3$ به دست می آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -\frac{1}{3} \sin 3x$.

پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| \neq \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$. لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم $y = 2 \cos(\frac{x}{4}) + 3$.

ت) ضابطین نمودار نیز می تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -2 \cos x$

تانژانت

فعالیت



در دایره مثلثاتی روبه رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس ها عمود است. الف) زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می گیریم و پاره خط OM را امتداد می دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan \alpha = AM' = b$$

می توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار

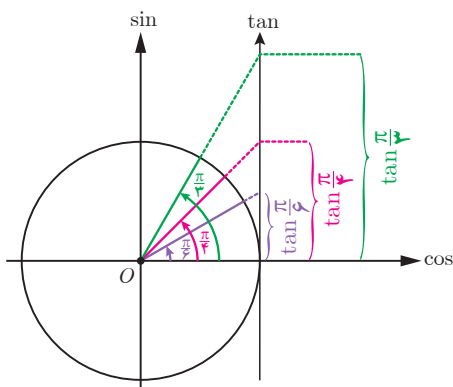
دارد، مقداری منفی است؟
چون در ناحیه اول و سوم سینوس و کسینوس هم علامت هستند ولی در ناحیه های دوم و چهارم مختلف علامه هستند
پ) آیا مقدار $\tan \frac{\pi}{4}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{\pi}{4}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

خیر

خیر

تغییرات تانژانت

فعالیت



با تغییر زاویه α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می کنیم. اگر $\alpha = 0$ ، مقدار $\tan \alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α ، مقدار $\tan \alpha$ نیز افزایش می یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$ ، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می یابد؟

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می توان زاویه ای مانند α یافت، به طوری که $\tan \alpha = a$.

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟
 ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

ربع	دوم	سوم	چهارم
زوايا			
افزایشی یا کاهشی	افزایشی	افزایشی	افزایشی
بازه تغییرات	$\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6} < \alpha < \frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6} < \alpha < \frac{11\pi}{6}$

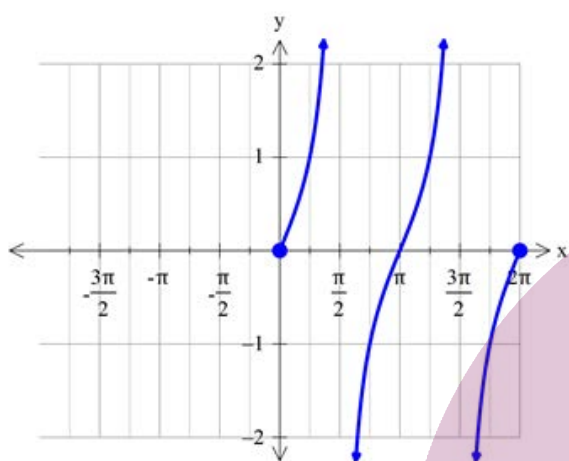
پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت $\nearrow$ به معنی افزایش یافتن و علامت $\searrow$ به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$

تابع تانژانت

همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), عددی حقیقی به عنوان $\tan \alpha$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan \alpha$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan \alpha$, تابعی متناوب است^۱ و دوره تناوب آن π است، زیرا:

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$



کار در کلاس

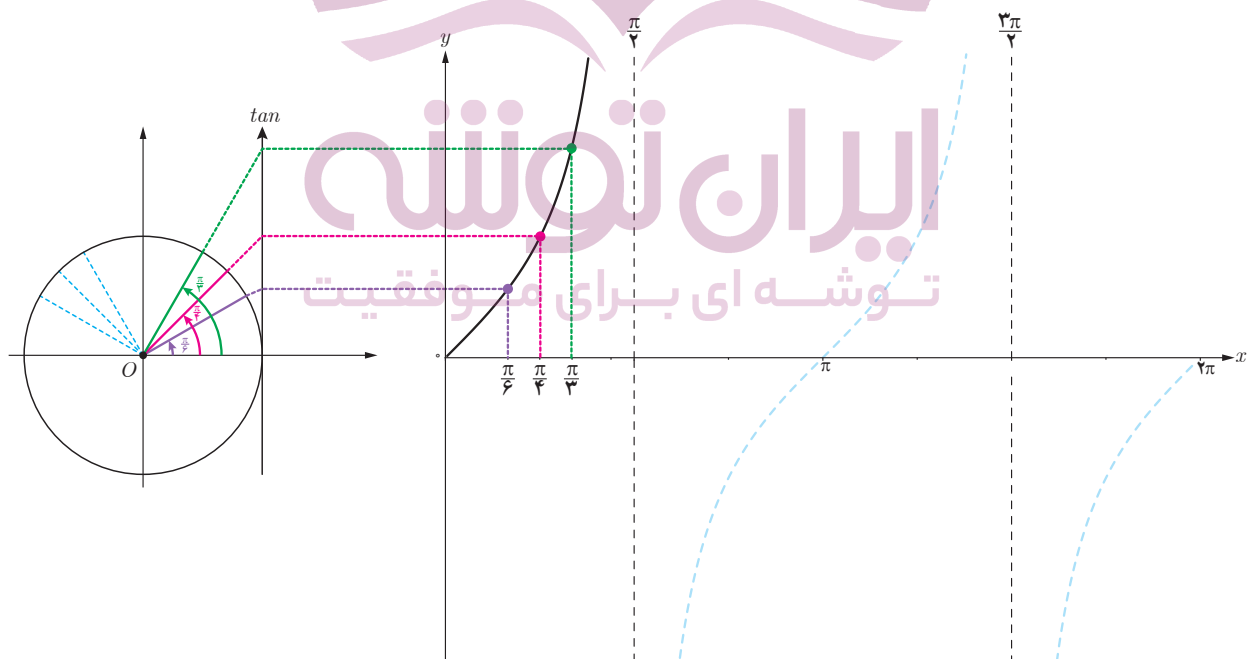
صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan \alpha$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بررسی کنید.

تابع در دامنه خود همواره صعودی است

رسم تابع $y = \tan \alpha$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan \alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



۱- به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل $\tan$ مدنظر نیست.

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2 \sin 7x$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4} x$

پ) $y = -\pi \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) - 2$

ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

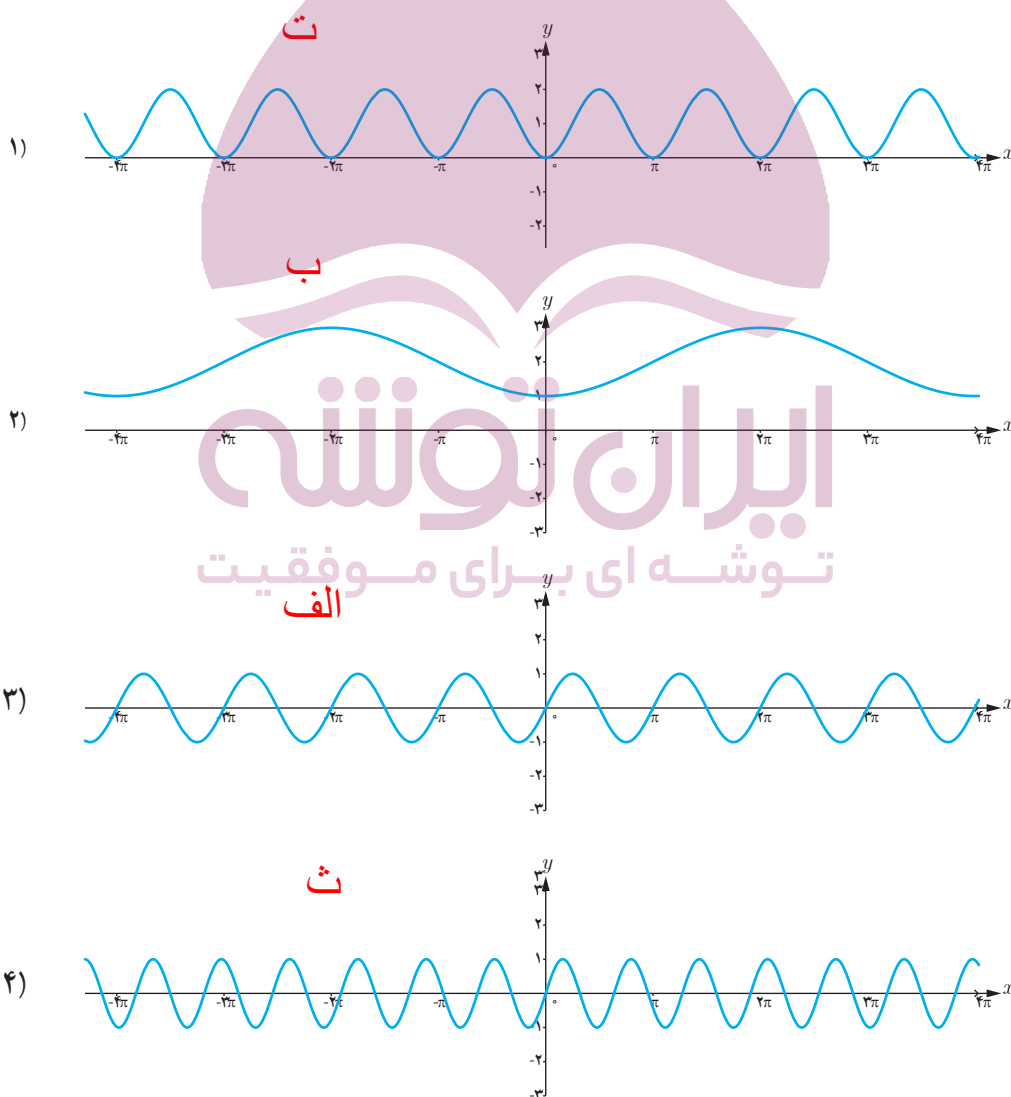
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

ت) $y = 1 - \cos 2x$

پ) $y = \sin 2x$

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{4} x$

الف) $y = \sin \pi x$



حل تمرین صفحه ۴۰ تمرین ۸:

$$y = 1 + p \sin \sqrt{x} \quad \begin{array}{l} y = a \sin bx + c \\ \max = |a| + c, \min = -|a| + c \end{array} \quad \begin{array}{l} T = \frac{p\pi}{|b|} \\ T = \frac{p\pi}{|\sqrt{x}|} = \frac{p\pi}{\sqrt{x}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \max = |p| + 1 = p \\ \min = -|p| + 1 = -1 \end{array}$$

$$y = \sqrt{p^2 - \cos \frac{\pi}{p}} x \quad \begin{array}{l} y = a \cos bx + c \\ \max = |a| + c, \min = -|a| + c \end{array} \quad \begin{array}{l} T = \frac{p\pi}{|b|} \\ T = \frac{p\pi}{\left|\frac{\pi}{p}\right|} = p \end{array} \quad \begin{array}{l} \max = |-1| + \sqrt{p^2} = 1 + \sqrt{p^2} \\ \min = -|-1| + \sqrt{p^2} = -1 + \sqrt{p^2} \end{array}$$

$$y = -\pi \sin \left(\frac{x}{p} \right) - p \quad \begin{array}{l} y = a \sin bx + c \\ \max = |a| + c, \min = -|a| + c \end{array} \quad \begin{array}{l} T = \frac{p\pi}{|b|} \\ T = \frac{p\pi}{\left|\frac{1}{p}\right|} = p\pi \end{array} \quad \begin{array}{l} \max = |-\pi| - p = \pi - p \\ \min = -|-\pi| - p = -\pi - p \end{array}$$

$$y = -\frac{p}{p} \cos px \quad \begin{array}{l} y = a \cos bx + c \\ \max = |a| + c, \min = -|a| + c \end{array} \quad \begin{array}{l} T = \frac{p\pi}{|b|} \\ T = \frac{p\pi}{p} = \frac{p}{p} \pi = \pi \end{array} \quad \begin{array}{l} \max = \left| -\frac{p}{p} \right| = -\frac{p}{p} \\ \min = -\left| -\frac{p}{p} \right| = -\frac{p}{p} \end{array}$$

۳ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

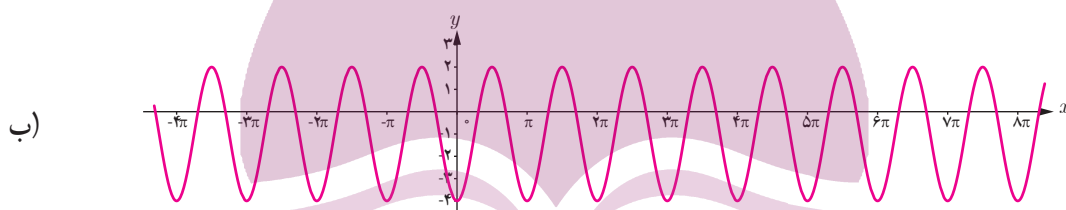
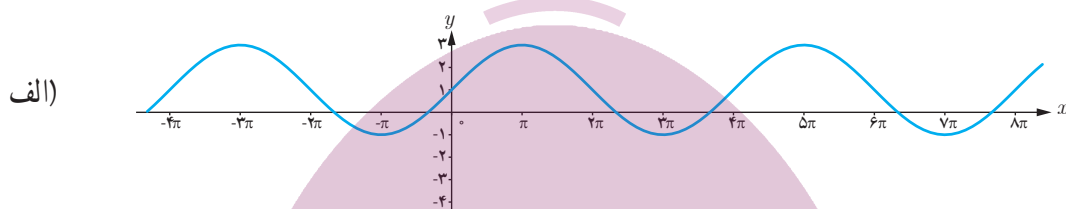
الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

پ) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

ت) $T = \frac{\pi}{2}$, $\max = 1$, $\min = -1$

۴ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است. **نادرست**

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. **نادرست**

پ) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد. **نادرست**

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. **درست**

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است

در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است

	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$	2π
sin	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tan	تن	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تن

مرکز ۳:

$$y = a \sin bx + c \quad \max = |a| + c, \min = -|a| + c$$

$$T = \pi \quad \max = \mu \quad \min = -\mu \Rightarrow a = \frac{\mu - (-\mu)}{\mu} = \mu \quad c = \frac{\mu + (-\mu)}{\mu} = 0 \quad \pi = \frac{\mu\pi}{|b|} \Rightarrow b = \mu \Rightarrow y = \mu \sin \mu x$$

$$T = \mu \quad \max = 9 \quad \min = \mu \Rightarrow a = \frac{9 - \mu}{\mu} = \mu \quad c = \frac{9 + \mu}{\mu} = 5 \quad \mu = \frac{\mu\pi}{|b|} \Rightarrow b = \frac{\mu}{\pi} \Rightarrow y = \mu \sin \frac{\mu\pi}{\mu} x + 5$$

$$T = \pi \pi \quad \max = -1 \quad \min = -\gamma \Rightarrow a = \frac{-1 - (-\gamma)}{\mu} = \mu \quad c = \frac{-1 + (-\gamma)}{\mu} = -\pi \quad \pi\pi = \frac{\mu\pi}{|b|} \Rightarrow b = \frac{1}{\mu} \Rightarrow y = \mu \sin \left(\frac{1}{\mu} x \right) - \pi$$

$$T = \frac{\pi}{\mu} \quad \max = 1 \quad \min = -1 \Rightarrow a = \frac{1 - (-1)}{\mu} = 1 \quad c = \frac{1 + (-1)}{\mu} = 0 \quad \frac{\pi}{\mu} = \frac{\mu\pi}{|b|} \Rightarrow b = \mu \Rightarrow y = \sin(\mu x)$$

$$\max = \rho, \min = -1, T = \rho\pi$$

$$c = \frac{\rho + (-1)}{\rho} = 1, a = \frac{\rho - (-1)}{\rho} = \rho, |b| = \frac{\rho\pi}{T} = \frac{\rho\pi}{\rho\pi} = 1$$

$$y = \rho \sin \left(\frac{1}{\rho} x \right) + 1$$

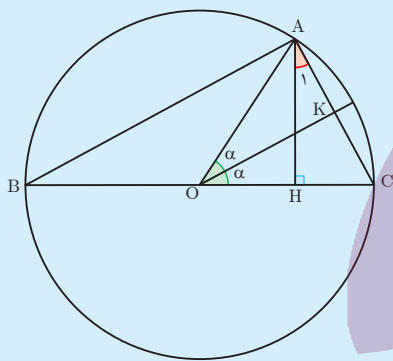
$$\max = \rho, \min = -\rho, T = \pi$$

$$c = \frac{\rho + (-\rho)}{\rho} = -1, a = \frac{\rho - (-\rho)}{\rho} = \rho, |b| = \frac{\rho\pi}{T} = \frac{\rho\pi}{\pi} = \rho$$

$$y = \rho \cos(\rho x) - 1$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به دست آورد. اگر مقدار $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 30^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 30° است و نیز می‌دانیم $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos 30^\circ$ می‌توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می‌شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن.^۱



دایره روبه رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که روبه رو به وتر AC است. از این رو در مثلث $\triangle OAK$ داریم:

$$AK = \sin \alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2\sin \alpha \quad (1)$$

همچنین $\widehat{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه رو به $\widehat{AC}$ است، لذا نصف آن است پس: $B = \alpha$.

از طرفی A یک زاویه محاطی روبه رو به قطر BC است و لذا: $A = 90^\circ$. همچنین از مجموع زوایای $\triangle ABC$ به دست می‌آید:

$$\triangle ABC: A + B + C = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + C = 180^\circ \Rightarrow C = 90^\circ - \alpha$$

به طور مشابه در $\triangle AHC$ داریم:

$$\triangle AHC: H + A_1 + C = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + A_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow A_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در $\triangle OAC$ و $\triangle AHC$ به دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OAC: AH = \sin 2\alpha \\ \triangle AHC: \cos A_1 = \cos \alpha = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cos \alpha \xrightarrow{(1)} AH = 2\sin \alpha \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

همچنین در $\triangle OAH$ داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در $\triangle AHC$ داریم:

$$\sin A_1 = \sin \alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin \alpha \times AC = \sin \alpha (2\sin \alpha) = 2\sin^2 \alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ به دست می‌آوریم $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$.

۱- این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی‌ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

مثال: مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 30^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cos 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

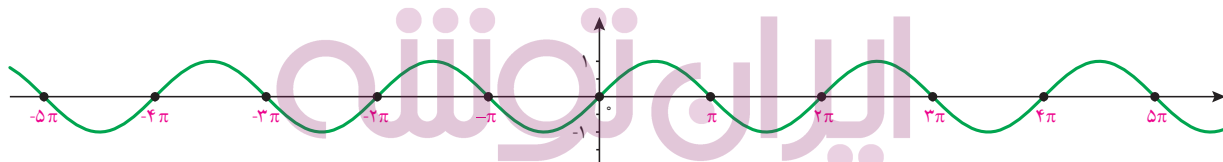
$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cos 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

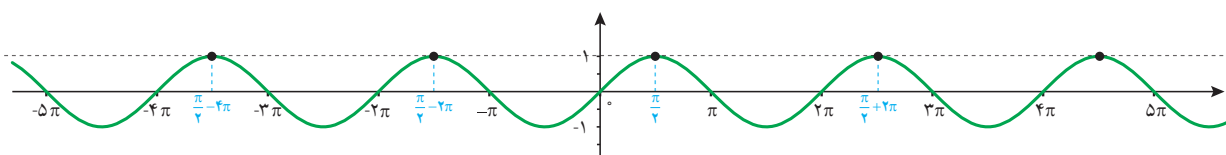
$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

معادلات مثلثاتی

معادله ای که در آن اطلاعاتی از نسبت های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.
مثال: تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می باشد. به عبارت دیگر جواب های این معادله که به صورت $\dots, 2\pi, \pi, 0, -\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$ می باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور x ها) و تابع $y = \sin x$ است. این جواب ها را می توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.
به طور مشابه جواب های معادله $\sin x = 1$ مقداری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می شود. این مقادیر محل تقاطع $y = 1$ و $y = \sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده اند.



جواب های معادله صفحه قبل به صورت

$$x = \dots, \frac{\pi}{6} - 4\pi, \frac{\pi}{6} - 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + 2\pi, \dots$$

می باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ را در نظر می گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می کند تا جواب های این معادله را بیابید.

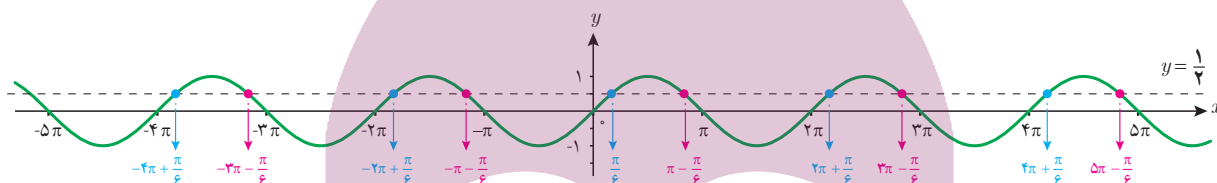
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}, \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \dots$$

فعالیت

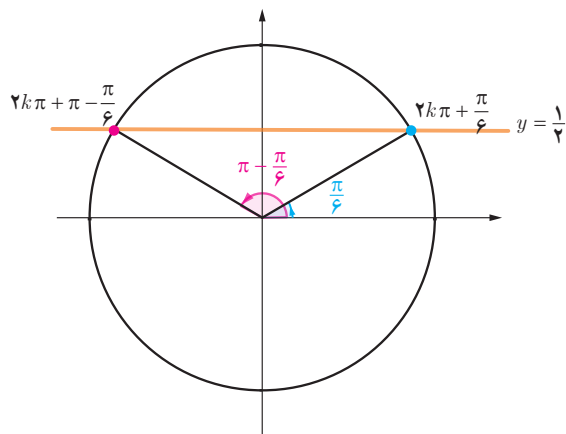
۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است مثال بزنید.

۲ خط $y = \frac{1}{4}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده ایم. مقادیری را که مثال زده اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ **بله**



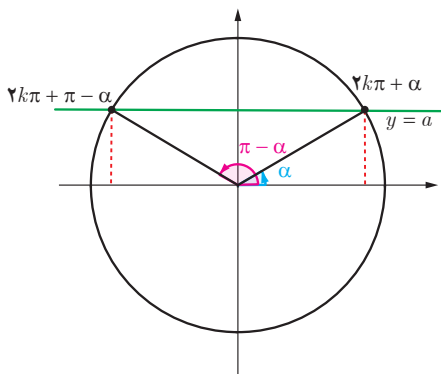
۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{4}$ را که در شکل فوق مشخص شده اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می کنند؟ چه نتیجه ای می گیرید؟ **این معادله بی شمار جواب دارد**

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{4}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است رسم شده اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



$$\dots, -2\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots \text{ هم انتها با } \frac{\pi}{6}$$

$$\dots, -\pi - \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, \dots \text{ هم انتها با } \pi - \frac{\pi}{6}$$



برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$ ، زاویه ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می شود. اکنون برای یافتن جواب های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان های x و α را بیابیم. با توجه به دایره مثلثاتی روبه رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان های مجهول x به طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران های مختلف به صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.
الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$$\sin x = \frac{-\sqrt{1}}{2} = \frac{-\sqrt{1}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ب) } 2\sin x + \sqrt{1} = 0$$

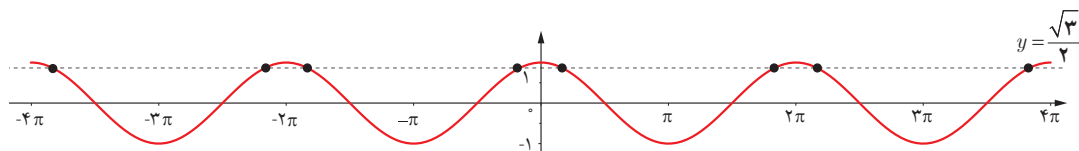
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

فعالیت

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.

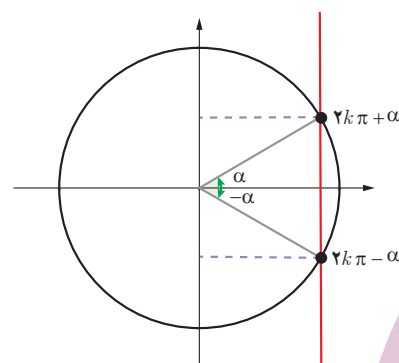
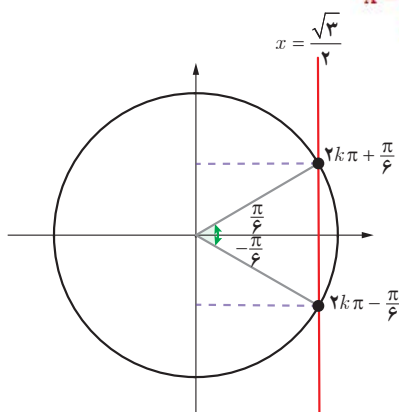


$$x = \frac{\pi}{6}, x = 2\pi - \frac{\pi}{6}, x = 2\pi + \frac{\pi}{6}, x = -\frac{\pi}{6}, x = -2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots$$

الف) برخی از جواب های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب های معادله فوق را به دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ در معادله $\cos x = a$ زاویه ای چون α وجود دارد که $\cos \alpha = a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ب: $\frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ زاویه هایی هم انتها یا

$-\frac{\pi}{6}, -2\pi - \frac{\pi}{6}, -4\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$ زاویه هایی هم انتها یا

جواب های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: جواب های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را به دست آورید. کدام جواب ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می باشند؟

می دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می باشد. بنابراین جواب های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می شود که جواب های $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -2\pi - \frac{\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می باشند.

مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می دانیم که جواب های این معادله به شکل زیر هستند:

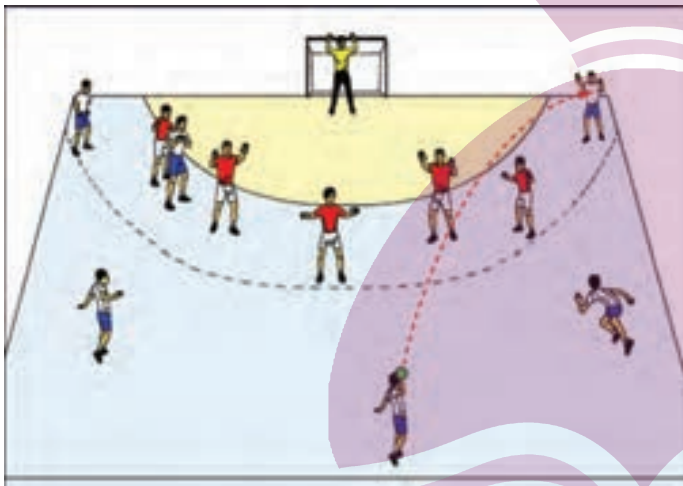
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = -2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2 \sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت 16 m/s برای هم تیمی خود که در $12/8$ متری او قرار دارد پرتاب می کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$

از رابطه داده شده به دست می آید :

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ می باشد.

مثال : جواب های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $\cos x (2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x = t$ می توان معادله فوق را به معادله درجه دوم

$2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده

$\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست می آوریم.

زیرا مقادیر کسینوس همواره بین مثبت یک و منفی یک می باشد

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k = \mathbb{Z}$$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.
الف) $\cos^2 \alpha$
ب) $\sin^2 \alpha$

۲ نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{3} = \sin 3x$

پ) $\cos x = \cos^2 x$

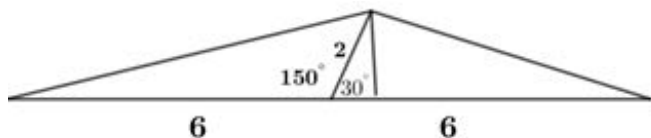
ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

ت) $\cos^2 x - \sin x + 1 = 1$

ج) $\sin x - \cos^2 x = 0$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟



$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin C = 3 \rightarrow \sin C = \frac{1}{2} \rightarrow C = 30^\circ, 150^\circ$$

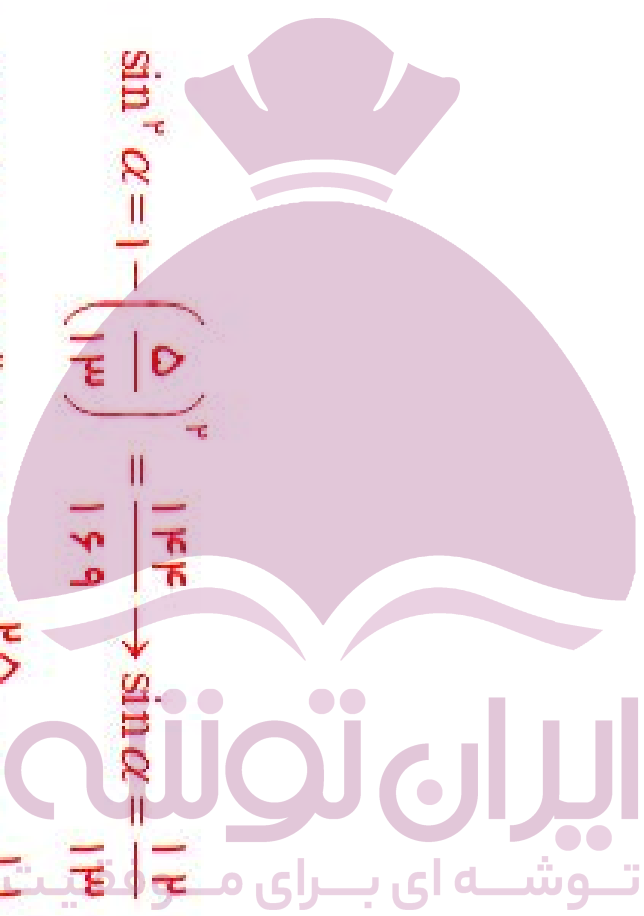
(الف)

$$\sin^p \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13} \right)^p = \frac{144}{169} \rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\cos^p \alpha = p \cos^p \alpha - 1 = p \times \frac{5}{13} - 1 = -\frac{11}{13}$$

(ب)

$$\sin^p \alpha = p \sin \alpha \cdot \cos \alpha = p \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$



حل تمرین ۳:

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2} = \frac{1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{2}}{2} \rightarrow \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{2} = \frac{1 + \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{2}}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{2}$$



$$\sin \frac{\pi}{\mu} = \sin \mu x$$

(الف)

$$1 = \sin \mu x \rightarrow \mu x = \mu k \pi + \frac{\pi}{\mu} \rightarrow x = \frac{\mu k \pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu}$$

(ب)

$$\cos \mu x - \cos x + 1 = e$$

$$\mu \cos^{\mu} x - 1 - \cos x + 1 \rightarrow \cos x (\mu \cos x - 1) = e \rightarrow \begin{cases} \mu \cos x - 1 = e \rightarrow \cos x = \frac{1}{\mu} = \cos \frac{\pi}{\mu} \rightarrow x = \mu k \pi \pm \frac{\pi}{\mu} \\ \cos x = e \rightarrow x = k \pi + \frac{\pi}{\mu} \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \mu x \rightarrow \begin{cases} x = \mu k \pi + \mu x \rightarrow x = -\mu k \pi \\ x = \mu k \pi - \mu x \rightarrow x = \frac{\mu k \pi}{\mu} \end{cases} \quad (\text{پ})$$

(ث)

$$\cos \mu x - \sin x + 1 = 1 \rightarrow 1 - \mu \sin' x - \sin x = 0 \rightarrow \mu \sin' x + \sin x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\sin x=t} & t' + t - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 + \mu = 0 \rightarrow t = \frac{-1 \pm \mu}{\mu} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{\mu} = \sin \frac{\pi}{\mu} \Rightarrow x = \mu k \pi + \frac{\pi}{\mu} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = \mu k \pi - \frac{\pi}{\mu} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$(k \in \mathbb{Z})$$

(ج)

$$\cos' x - \sin x = \frac{1}{\mu} \rightarrow 1 - \sin' x - \sin x = \frac{1}{\mu} \rightarrow \sin' x + \sin x - \frac{1}{\mu} = 0$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\sin x=t} & t' + t - \frac{1}{\mu} = 0 \rightarrow \Delta = 1 + \mu = 0 \rightarrow t = \frac{-1 \pm \mu}{\mu} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{\mu} = \sin \frac{\pi}{\mu} \Rightarrow x = \mu k \pi + \frac{\pi}{\mu} \\ \sin x = -\frac{1}{\mu} \end{array} \right. \end{aligned}$$

غير ممكن



$$\sin X - \cos \mu X = 0$$

$$\sin X = \cos \mu X = \sin \left(\frac{\pi}{\mu} - \mu X \right) \rightarrow \begin{cases} X = \mu k \pi + \frac{\pi}{\mu} - \mu X \rightarrow X = \frac{\mu k \pi}{2} + \frac{\pi}{\mu} \\ X = \mu k \pi + \pi - \left(\frac{\pi}{\mu} - \mu X \right) \rightarrow X = -\mu k \pi + \frac{\pi}{\mu} \end{cases}$$