دفترچه پاسخ

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

آزمون تعیین سطح پاییز ۴ مهر ۱۴۰۴

اختصاصی دوازدهم ریاضی

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	ریاضی‌پایه وحسابان ۲	کاظم اجلالی- علی آزاد- شاهین پروازی- عادل حسینی- مهران حسینی- محمد خندان- بابک سادات- یاسین سپهر- علی سلامت سامان سلامیان- علی شهرابی- سعید علم‌پور- حمید علیزاده- کیان کریمی‌خراسانی- حمید مام‌قادری- سیدسپهر متولیان جهانبخش نیکنام - وحید ون‌آبادی
	هندسه وآماروریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب- علی احمدی‌قزل‌دشت- حمیدرضا امیری- علی ایمانی- رضا توکلی- جواد حاتمی- نادر حاجی‌زاده سیدمحمدرضا حسینی‌فرد- افشین خاصه‌خان- فرزانه خاکپاش- امیرهوشنگ خمسه- محمد خندان- کیوان دارابی- سوگند روشنی فرشاد صدیقی‌فر- علیرضا طایفه‌تبریزی- رضا عباسی‌اصل- عزیزاله علی‌اصغری- علی اکبر علیزاده- احمدرضا فلاح - مهرداد ملوندی نیلوفر مهدوی- مجید نیکنام
	فیزیک	بابک اسلامی-عبدالرضا امینی‌نسب-زهره آقامحمدی-علیرضا رستم‌زاده-بهنام رستمی-رامین شادلویی-بهنام شاهینی-محمدرضا شیروانی‌زاده سعید طاهری‌بروجنی-عرفان عسگریان‌چایجان-پوریا علاقه‌مند-محمدجواد غلامی-عبداله فقه‌زاده-مصطفی کیانی-جلیل گلی-علیرضا گونه احسان محمدی-حسین مخدومی-مهرداد مردانی-سیدعلی میرنوری
	شیمی	محمدرضا پورجاوید-پیمان خواجوی‌مجد-فاطمه رحیمی-منصور سلیمانی‌ملکان-مبینا شرافتی‌پور-رسول عابدینی‌زواره محمد عظیمیان‌زواره-فاضل قهرمانی‌فرد-محمد کوهستانیان-جواد گتابی-حسن لشکری-محمدحسن محمدزاده‌مقدم-محمد وزیری

گروه علمی اختصاصی

نام درس	ریاضی‌پایه وحسابان ۲	هندسه وآماروریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	سیدسپهر متولیان	مهرداد ملوندی	حسام نادری	آرش ظریف
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب یاسین کشاورزی مهرداد ملوندی سینا صالحی	امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	سینا صالحی حسین بصیرترکمبور زهره آقامحمدی	یاسر راش مجتبی محجوب امیرعلی بیات فرزاد حلاج‌مقدم
مسئول درس	سیدسپهر متولیان	مهرداد ملوندی	حسام نادری	آرش ظریف
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران مستند	معصومه صنعت‌کار-مهسا محمدنیا-فرشته کمبرانی-احسان میرزینلی		سجاد بهارلویی ابراهیم نوری	محسن دستجردی آتیلا ذاکری

گروه فنی و تولید اختصاصی

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه:محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار و صفحه‌آرا	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۱

۱- **گزینهٔ «۴»** *(علی شهرابی)*

جواب‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند، پس داریم:

$$\alpha^۲ + ۵\alpha = ۲ \Rightarrow \alpha^۲ = ۲ - ۵\alpha$$

حال در عبارت داده شده داریم:

$$A = (\alpha^۲ + ۲\alpha)(\beta - \frac{۲}{۳}) = (۲ - ۳\alpha)(\beta - \frac{۲}{۳})$$

$$\Rightarrow A = ۲\beta - \frac{۴}{۳} - ۳\alpha\beta + ۲\alpha = ۲(\alpha + \beta) - ۳(\alpha\beta) - \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow A = ۲S - ۳P - \frac{۴}{۳}$$

از طرفی معادله به صورت $x^۲ + ۵x - ۲ = ۰$ است که در آن $S = -۵$ و $P = -۲$ است.

$$\Rightarrow A = ۲(-۵) - ۳(-۲) - \frac{۴}{۳} = -\frac{۱۶}{۳}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۷ تا ۹)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(حمید علیزاده)*

یک نقطه به مختصات $(\alpha, ۲\alpha - ۳)$ را روی خط $y = ۲x - ۳$ در نظر می‌گیریم و فاصله این نقطه از خط $x - ۳y = ۴$ را برابر $\sqrt{۱۰}$ قرار می‌دهیم:

$$h = \frac{|\alpha - ۳(۲\alpha - ۳) - ۴|}{\sqrt{۱^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{|۵ - ۵\alpha|}{\sqrt{۱۰}} = \sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow |۵ - ۵\alpha| = ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} ۵ - ۵\alpha = ۱۰ \Rightarrow \alpha = -۱ \\ ۵ - ۵\alpha = -۱۰ \Rightarrow \alpha = ۳ \end{cases}$$

مقادیر به دست آمده برای α طول نقاط A و B هستند، پس مختصات این نقاط $A(-۱, -۵)$ و $B(۳, ۳)$ است. فاصله این دو نقطه از هم برابر است با:

$$AB = \sqrt{(۳ - (-۱))^۲ + (۳ - (-۵))^۲} = \sqrt{۴^۲ + ۸^۲} = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۹ و ۳۰)

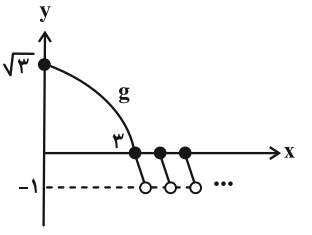
۳- **گزینهٔ «۲»** *(علی شهرابی)*

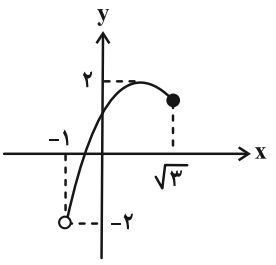
$$f^{-۱}(g^{-۱}(a)) = ۴ \Rightarrow f(۴) = g^{-۱}(a) \Rightarrow ۱۰ = g^{-۱}(a)$$

$$\Rightarrow g(۱۰) = a \Rightarrow \frac{۱۰ - ۱}{۱۰ + ۲} = a \Rightarrow a = \frac{۹}{۱۲} = ۰/۷۵$$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(بابک سادات)*





با رسم نمودار g به‌راحتی متوجه می‌شویم که برد g بازه $[-۱, \sqrt{۳})$ است که به عنوان دامنهٔ تابع f در نظر می‌گیریم. حال باید ببینیم که برد f با توجه به دامنه $[-۱, \sqrt{۳})$ چه بازه‌ای می‌شود. از روی نمودار مشخص است که برد تابع بازه $[-۲, ۲)$ بوده و در نتیجه $b - a = ۴$ است.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(علی شهرابی)*

با توجه به خط‌چین افقی رسم شده که معادله‌اش $y = -۹$ است، نتیجه می‌گیریم $-۹ = -b$ ، پس $b = ۹$ است.

تا این جا ضابطه به صورت $f(x) = ۳^{x+c} - ۹$ شد.

تابع از نقطهٔ $(۰, ۰)$ می‌گذرد، پس: $f(۰) = ۰ \Rightarrow ۳^c - ۹ = ۰ \Rightarrow c = ۲$

پس ضابطه تابع $f(x) = ۳^{x+۲} - ۹$ است و داریم:

$$f(b - ۵c) = f(-۱) = ۳^{-۱+۲} - ۹ = ۳ - ۹ = -۶$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(یاسین سپهر)*

از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم: $\log_۸ x = t$

$$۳t^۲ + ۲t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = +\frac{۱}{۳}, t = -۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_۸ x_۱ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x_۱ = ۸^{\frac{۱}{۳}} = ۲ \\ \log_۸ x_۲ = -۱ \Rightarrow x_۲ = ۸^{-۱} = \frac{۱}{۸} \end{cases}$$

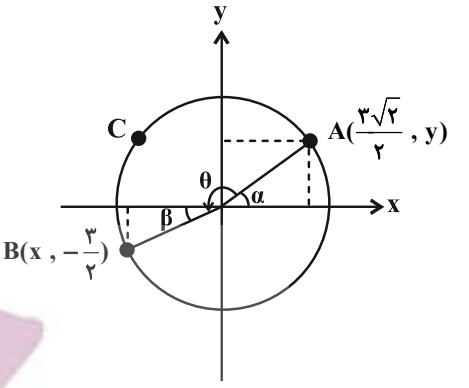
$$\Rightarrow x_۱ \times x_۲ = ۲ \times \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۴}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

ایران‌توشه — پیشنهاد اعتبار برای موفقیت

۷- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

با توجه به شکل زیر:



$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۴}\ ,\ \sin\beta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{۶}$$

$$\theta=(\frac{\pi}{۲}-\alpha)+\frac{\pi}{۲}+\beta=\frac{۱۱\pi}{۱۲}$$

$$\text{طول کمان ACB}=R\theta=۳\times\frac{۱۱\pi}{۱۲}=\frac{۱۱\pi}{۴}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۱۰۴)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(وحید ون‌آبادی)*

$$۱-۸\sin^۲\left(\pi+\frac{\pi}{۱۶}\right)\sin^۲\left(\frac{۹\pi}{۱۶}\right)=۱-۸\sin^۲\left(\frac{\pi}{۱۶}\right)\cos^۲\left(\frac{\pi}{۱۶}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۶}$$

$$=۱-۸\left(\sin\left(\frac{\pi}{۱۶}\right)\cos\left(\frac{\pi}{۱۶}\right)\right)^۲$$

$$=۱-۸\left(\frac{۱}{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۸}\right)\right)^۲=۱-۲\sin^۲\left(\frac{\pi}{۸}\right)=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

از اتحاد $\frac{۱}{۲}\sin۲\theta=\cos\theta\sin\theta$ **و** $۱-۲\sin^۲\theta=\cos۲\theta$ **استفاده کردیم.**

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(حمید علیزاده)*

حد عبارت مخرج برابر صفر است و از آنجا که حاصل حد نیز عددی حقیقی است، لازم است حد عبارت صورت نیز برابر صفر باشد:

$$\lim_{x\to a^-}\left(\sqrt[۳]{x-۱}-b\right)=\sqrt[۳]{a-۱}-b=۰\Rightarrow a=b^۳+۱\ \ (*)$$

حال با استفاده از اتحاد معروف به چاق و لاغر داریم:

$$\lim_{x\to a^-}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}-b}{-(x-a)}=\lim_{x\to a^-}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}-b}{-(x-a)}\times\frac{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}+b\sqrt[۳]{x-۱}+b^۲}{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}+b\sqrt[۳]{x-۱}+b^۲}$$

$$=\lim_{x\to a^-}\frac{x-۱-b^۳}{-(x-a)\left[\sqrt[۳]{(a-۱)^۲}+b\sqrt[۳]{a-۱}+b^۲\right]}\overset{*}{=}\lim_{x\to a^-}\frac{x-a}{-(x-a)(۳b^۲)}$$

$$=-\frac{۱}{۳b^۲}=-\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow b^۲=۴\Rightarrow\begin{cases}b=-۲\xrightarrow{(*)}a=-۷\\ b=۲\xrightarrow{(*)}a=۹\end{cases}$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(مهران حسینی)*

برای پیوستگی تابع f **در** $x=۲۷$ **باید حد تابع و مقدار آن با هم برابر باشد:**

$$۱)\ \lim_{x\to۲۷}f(x)=\lim_{x\to۲۷}\frac{\sqrt{۷-\sqrt[۳]{x}}-۲}{a(x-۲۷)}=\frac{۰}{۰}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to۲۷}\frac{\sqrt{۷-\sqrt[۳]{x}}-۲}{a(x-۲۷)}\times\frac{\sqrt{۷-\sqrt[۳]{x}}+۲}{\sqrt{۷-\sqrt[۳]{x}}+۲}$$

$$=\lim_{x\to۲۷}\frac{۷-\sqrt[۳]{x}-۴}{a(x-۲۷)(\sqrt{۷-\sqrt[۳]{x}}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to۲۷}\frac{۳-\sqrt[۳]{x}}{a(x-۲۷)(\sqrt{۷-\sqrt[۳]{x}}+۲)}\times\frac{۹+۳\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}}{۹+۳\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$=\lim_{x\to۲۷}\frac{۲۷-x}{a(x-۲۷)(\sqrt{۷-\sqrt[۳]{x}}+۲)(۹+۳\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}$$

$$=\frac{-۱}{a\times۴\times۲۷}=\frac{-۱}{۱۰۸a}$$

$$۲)\ f(۲۷)=\frac{۷}{۲۷+۱}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow-\frac{۱}{۱۰۸a}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲۷}$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

ریاضی ۱

۱۱- **گزینهٔ «۲»** *(سامان سلامیان)*

قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$r=\frac{\frac{1}{3\sqrt{3}}}{\frac{1}{9}}=\frac{9}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

پس جملهٔ عمومی دنباله به صورت زیر است:

$$t_n=\frac{1}{9}(\sqrt{3})^{n-1}=\frac{1}{3^2}\left(3^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}\right)=3^{\frac{1}{2}n-\frac{5}{2}}$$

حال باید $t_n<3\sqrt{3}$ باشد:

$$\Rightarrow 3^{\frac{n-5}{2}}<3\sqrt{3}=3^{\frac{3}{2}}\Rightarrow\frac{n-5}{2}<\frac{3}{2}\Rightarrow n<8$$

۷ جملهٔ این دنباله کمتر از $3\sqrt{3}$ است.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۱۲- **گزینهٔ «۲»** *(سیدسپهر متولیان)*

با توجه به این‌که $\tan\theta$ منفی است، نتیجه می‌گیریم $\sin\theta$ و $\cos\theta$ مختلف‌العلامت هستند. پس برای این‌که $\sin\theta$ بزرگ‌تر از $\cos\theta$ باشد، θ در ربع دوم مثلثاتی قرار می‌گیرد. با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ «۲» فقط در ربع دوم مثلثاتی قرار دارد.

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۳)

۱۳- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

ابتدا مقادیر a و b را به صورت اعداد با توان گویا می‌نویسیم:

$$a=\sqrt[3]{3\sqrt{27}}=3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}\quad\text{و}\quad b=\sqrt{9\sqrt[3]{3}}=3^{1}\times 3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{7}{6}}$$

$$\Rightarrow ab=3^{\frac{5}{6}}\times 3^{\frac{7}{6}}=3^{\frac{12}{6}}=3^2$$

$$\Rightarrow\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{3^2}=3^{\frac{2}{5}}\Rightarrow x=\frac{2}{5}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱۴- **گزینهٔ «۱»** *(کاظم اجلالی)*

$$x=\sqrt[6]{(2+\sqrt{3})^2}+\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$$

اکنون طرفین تساوی بالا را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x^3=\sqrt[3]{(2+\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}+3\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\times\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$$

$$\times(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}})$$

$$=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+3(\sqrt[3]{4-3})x=4+3x\Rightarrow x^3-3x=4$$

یادآوری: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(علی سلامت)*

سهمی از طرف بالا بر محور xها مماس است، بنابراین دهانهٔ سهمی رو به بالاست و چندجمله‌ای $p(x)$ دارای ریشهٔ مضاعف است.

$$3k+1>0\Rightarrow k>-\frac{1}{3}$$

$$\Delta=0\Rightarrow 16k^2-4(3k+1)=0\Rightarrow 4k^2-3k-1=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=1 & \text{قابل قبول}\\ k=-\frac{1}{4} & \text{قابل قبول}\end{cases}$$

$$k=1: p(x)=4x^2+4x+1\Rightarrow m=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow m+k=\frac{1}{2}$$

$$k=-\frac{1}{4}: p(x)=\frac{1}{4}x^2-x+1\Rightarrow m=-\frac{b}{2a}=2\Rightarrow m+k=\frac{7}{4}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۱۶- **گزینهٔ «۱»** *(شاهین پروازی)*

$$(x+1)(x^2+mx+m)<0$$

حالت اول: اگر عبارت x^2+mx+m همواره مثبت باشد $(\Delta<0\,,\,a>0)$، مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به صورت $x<-1$ خواهد بود.

$$\Delta<0\Rightarrow m^2-4m<0\Rightarrow m\in(0\,,4)$$

حالت دوم: اگر عبارت x^2+mx+m دارای ریشه مضاعف باشد، مجموعهٔ جواب‌ها می‌تواند به صورت $x<-1$ باشد:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$\Delta = m^۲ - ۴m = ۰ \Rightarrow m = ۰ , ۴$

$m = ۰ : (x+۱)(x^۲) < ۰ \Rightarrow x \in (-\infty , -۱)$

$m = ۴ : (x+۱)(x+۲)^۲ < ۰ \Rightarrow x \in (-\infty , -۱) - \{-۲\}$

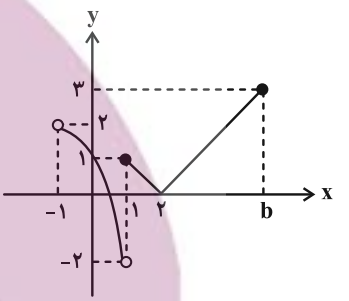
پس $m = ۴$ غیرقابل قبول است.

در نتیجه مجموعهٔ قابل قبول برای m بازهٔ $(۴ , ۰]$ است که مجموع اعداد صحیح آن برابر است با: $۰+۱+۲+۳ = ۶$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۲ تا ۸۸)

۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(حمید علیزاده)*

نمودار تابع f را به کمک انتقال نمودارهای $y = -x^۲$ و $y = |x|$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار بالا و اینکه برد تابع بازهٔ $[a,۳)$ است، مشخص می‌شود که $b > ۲$ و $|b-۲| = ۳$.

$\Rightarrow |b-۲| = ۳ \xrightarrow{b>۲} b-۲ = ۳ \Rightarrow b = ۵$

از طرفی در نمودار مشخص است که $a = -۲$ است. در نتیجه: $b - a = ۷$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

۱۸- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

فرض کنید $f(x) = ax^۲ + bx + c$، در این صورت داریم:

$$f(x)f(-x) = (ax^۲ + c + bx)(ax^۲ + c - bx)$$
$$= a^۲x^۴ + (۲ac - b^۲)x^۲ + c^۲$$

$$x^۲f(x-۱) + k = x^۲(a(x-۱)^۲ + b(x-۱) + c) + k$$
$$= ax^۴ + (b-۲a)x^۳ + (a-b+c)x^۲ + k$$

چون دو عبارت بالا به ازای هر مقدار حقیقی x برابرند، پس داریم:

$a^۲ = a \xrightarrow{a \neq ۰} a = ۱$

$b - ۲a = ۰ \Rightarrow b = ۲a = ۲$

$a + c - b = ۲ac - b^۲ \Rightarrow ۱ + c - ۲ = ۲c - ۴ \Rightarrow c = ۳$

$c^۲ = k \Rightarrow k = ۹$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحهٔ ۱۰۹)

۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(علی آزاد)*

اعدادی زوج هستند که یکان آن‌ها زوج باشد. بنابراین با توجه به خواستهٔ مسئله، حالت‌های مختلف را در نظر می‌گیریم:

۱) رقم صفر در یکان قرار گیرد:

$$\underline{۹} \times \underline{۸} \times \underline{۷} \times \underset{\{۰\}}{\underline{۱}} = ۵۰۴$$

۲) رقم غیرصفر در یکان قرار گیرد: در این صورت حتماً بایستی از رقم صفر استفاده کنیم، پس ۲ حالت برای قرارگیری صفر به وجود می‌آید:

$$\underline{۸} \times \underline{۷} \times \underset{\{۰\}}{\underline{۱}} \times \underset{\{۲,۴,۶,۸\}}{\underline{۴}} = ۲۲۴$$

$$\underline{۸} \times \underset{\{۰\}}{\underline{۱}} \times \underline{۷} \times \underset{\{۲,۴,۶,۸\}}{\underline{۴}} = ۲۲۴$$

تعداد کل حالات $= ۵۰۴ + ۲۲۴ + ۲۲۴ = ۹۵۲$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۴۰)

۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(کیان کریمی‌خراسانی)*

در پرتاب سه تاس، عدد ۶ یا به صورت جمع ۱، ۲، ۳ یا به صورت جمع ۱، ۱ و ۴ یا به صورت جمع ۲، ۲ و ۲ است. $۶ = ۳!$ = تعداد حالات $\Rightarrow 1,2,3$

۳ = تعداد حالات $\Rightarrow 1,1,4$

۱ = تعداد حالات $\Rightarrow 2,2,2$

پس $n(A) = ۳ + ۶ + ۱ = ۱۰$ و از طرفی $n(S) = ۶^۳$ است.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۱۰}{۶^۳} = \frac{۵}{۱۰۸}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

ایران زوشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۲

۲۱- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

فرض کنید $\overset{\frown}{BC} = 4x$ باشد. در این صورت داریم:

$$AB \parallel DC \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = 4x \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \frac{5}{4}\overset{\frown}{AD} = 5x$$

AC قطر دایره است، بنابراین داریم:

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = 180^\circ \Rightarrow 5x + 4x = 180^\circ$$
$$\Rightarrow 9x = 180^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{4\times 20^\circ}{2} = 40^\circ \quad \text{(زاویهٔ محاطی)}$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۲۲- **گزینهٔ «۲»** *(فرزانه ظاکپاش)*

شعاع هر دایره عددی مثبت است، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} R > 0 \Rightarrow 3m + 10 > 0 \Rightarrow m > -\frac{10}{3} \\ R' > 0 \Rightarrow -m > 0 \Rightarrow m < 0 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{10}{3} < m < 0 \quad (1)$$

شرط متداخل بودن دو دایرهٔ C و C' آن است که $OO' < |R - R'|$، بنابراین داریم:

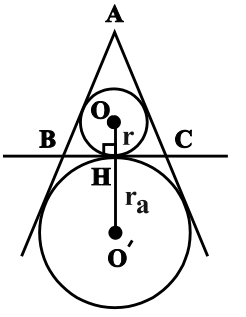
$$|R - R'| > OO' \Rightarrow |(3m+10) - (-m)| > 3$$
$$\Rightarrow |4m + 10| > 3$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 4m + 10 > 3 \Rightarrow 4m > -7 \Rightarrow m > -\frac{7}{4} \\ 4m + 10 < -3 \Rightarrow 4m < -13 \Rightarrow m < -\frac{13}{4} \end{cases} \quad (2)$$

اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) به صورت بازهٔ $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{13}{4}\right) \cup \left(-\frac{7}{4}, 0\right)$ است و در نتیجه تنها به ازای عدد صحیح $m = -1$، دو دایره متداخل‌اند.

(هندسه ۲- دایره؛ صفحهٔ ۲۰)

۲۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق شکل فاصلهٔ بین مراکز دو دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر مجموع شعاع‌های دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی مثلث است.



اگر مساحت مثلث را با S و نصف محیط آن را با P نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \quad , \quad P = \frac{3a}{2}$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

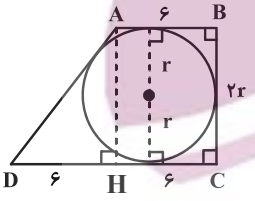
$$OO' = r + r_a = \frac{\sqrt{3}}{6}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{4\sqrt{3}}{6}a$$

در نتیجه نسبت فاصلهٔ مراکز دو دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی به طول ضلع مثلث برابر $\frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ است.

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۲۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمد خندان)*

اگر شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقه را با r نمایش دهیم، آن‌گاه مطابق شکل $BC = 2r$ است. طبق رابطهٔ چهارضلعی محیطی داریم:



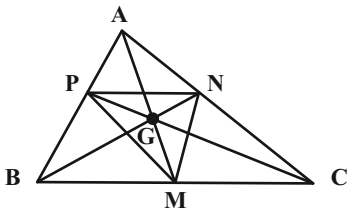
$$AB + CD = AD + BC$$
$$\Rightarrow 6 + 12 = AD + 2r \Rightarrow AD = 18 - 2r$$

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD داریم:

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 \Rightarrow (18-2r)^2 = (2r)^2 + 6^2$$
$$\Rightarrow 324 - 72r + 4r^2 = 4r^2 + 36$$
$$\Rightarrow 72r = 288 \Rightarrow r = 4$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*



مطابق شکل اگر نقطهٔ G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، آن‌گاه داریم:

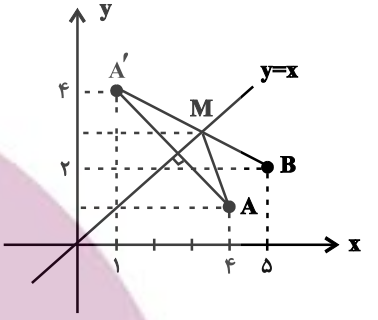
$$\frac{GA}{GM}=\frac{GB}{GN}=\frac{GC}{GP}=۲$$

از طرفی دو نقطهٔ M و A در دو طرف نقطهٔ G قرار دارند، پس در یک تجانس به مرکز G و نسبت (-۲) ، نقطهٔ M بر A تصویر می‌شود. به طور مشابه در این تجانس نقطهٔ N بر روی نقطهٔ B و نقطهٔ P بر روی نقطهٔ C تصویر می‌گردد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۲۶- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*

طبق روش هرون ابتدا قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط $y=x$ پیدا کرده و آن را A' می‌نامیم.



طبق ویژگی بازتاب اگر M نقطهٔ تقاطع $A'B$ با خط $y=x$ (محور بازتاب) باشد، آن‌گاه $MA=MA'$ است و در نتیجه داریم:

$$MA+MB=MA'+MB=A'B$$

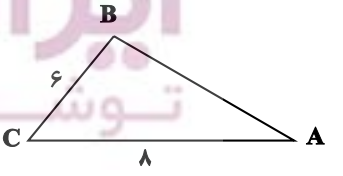
بنابراین کافی است مختصات نقطهٔ A' و سپس طول پاره‌خط $A'B$ را محاسبه کنیم.

$$A(۴,۱)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به خط } y=x}A'(۱,۴)$$

$$A'B=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۲-۴)^۲}=\sqrt{۱۶+۴}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحهٔ ۵۲)

۲۷- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*



طبق رابطهٔ سینوسی مساحت مثلث داریم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BC\times\sin\hat{C}$$

$$\Rightarrow ۱۲\sqrt{۳}=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۶\times\sin\hat{C}\Rightarrow\sin\hat{C}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat{C}=۶۰^\circ\\ \hat{C}=۱۲۰^\circ\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

(اگر $\hat{C}=۱۲۰^\circ$ باشد، آن‌گاه AB بزرگ‌ترین ضلع مثلث است.)

حال طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

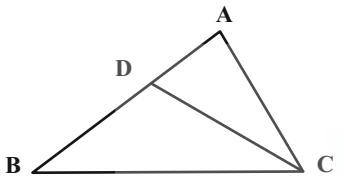
$$AB^۲=AC^۲+BC^۲-۲AC\times BC\times\cos\hat{C}$$

$$=۸^۲+۶^۲-۲\times ۸\times ۶\times\frac{۱}{۲}=۶۴+۳۶-۴۸=۵۲$$

$$\Rightarrow AB=۲\sqrt{۱۳}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷ و ۷۲)

۲۸- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*



طبق قضیهٔ نیمسازها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AC+BC}$$

$$\Rightarrow\frac{AD}{۷}=\frac{۴}{۱۴}\Rightarrow AD=۲\Rightarrow BD=۵$$

طبق رابطهٔ طول نیمساز داخلی داریم:

$$CD^۲=CA\times CB-AD\times BD=۴\times ۱۰-۲\times ۵=۳۰$$

$$\Rightarrow CD=\sqrt{۳۰}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

فرض کنید $۳a=۴b=۶c=۱۲t$ باشد. در این صورت داریم:

$$a=۴t\ ,\ b=۳t\ ,\ c=۲t$$

$$P=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۹t}{۲}$$

طبق قضیه هرون داریم:

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{\frac{۹t}{۲}\times\frac{t}{۲}\times\frac{۳t}{۲}\times\frac{۵t}{۲}}=\frac{۳\sqrt{۱۵}t^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{۳\sqrt{۱۵}t^۲}{۴}=۳\sqrt{۱۵}\Rightarrow t^۲=۴\xrightarrow{t>۰}t=۲$$

بنابراین اندازهٔ کوچک‌ترین ضلع مثلث، برابر $c=۴$ است.

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۳۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق قضیهٔ استوارت در مثلث ABC داریم:

$$AB^۲\times DC+AC^۲\times BD=AD^۲\times BC+BD\times DC\times BC$$

$$\Rightarrow ۴^۲\times ۵+۸^۲\times ۴=AD^۲\times ۹+۴\times ۵\times ۹$$

$$\Rightarrow ۸۰+۲۵۶=۹AD^۲+۱۸۰\Rightarrow ۹AD^۲=۱۵۶\Rightarrow AD^۲=\frac{۱۵۶}{۹}$$

$$\Rightarrow AD=\sqrt{\frac{۱۵۶}{۹}}=\sqrt{\frac{۴\times ۳۹}{۹}}=\frac{۲\sqrt{۳۹}}{۳}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحهٔ ۶۷)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

آمار و احتمال

۳۱- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

گزاره داده شده را به صورت زیر ساده‌تر می‌نویسیم:

$$p \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$$

$$\equiv \sim p \vee [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$$

$$\equiv \sim p \vee [\sim (p \Rightarrow q) \vee q] \equiv \sim p \vee [(p \wedge \sim q) \vee q]$$

$$\equiv \sim p \vee (q \vee p) \equiv (\sim p \vee p) \vee q \equiv T \vee q \equiv T$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۴ تا ۱۱)

۳۲- **گزینهٔ «۲»** *(رضا توکلی)*

در گزینهٔ «۲» به ازاء $x = ۱$، تمام اعداد طبیعی y بزرگ‌تر یا مساوی آن هستند.

نادرستی گزینه‌های دیگر را خودتان بررسی کنید.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

۳۳- **گزینهٔ «۱»** *(مجید نیکنام)*

$$C = (A' \cap B') \cup (A - B')$$
$$C = (A \cup B)' \cup (A \cap B)$$

$$C' = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$$
$$= (A \cup B) - (A \cap B)$$
$$= (A - B) \cup (B - A)$$

$$\Rightarrow C' - (B - A) = [(A - B) \cup (B - A)] - (B - A) = A - B$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

۳۴- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

تعداد حالت‌های فضای نمونه با در نظر گرفتن اینکه کتاب ریاضی، سمت چپ کتاب فیزیک قرار گرفته باشد، برابر است با: $n(S) = \frac{۵!}{۲} = ۶۰$

تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها حداقل یک کتاب بین ریاضی و فیزیک قرار داشته باشد، برابر است با کل حالت‌ها منهای حالت‌هایی که کتاب فیزیک بلافاصله بعد از کتاب ریاضی باشد که در این شرایط، دو کتاب به صورت یک بسته در نظر گرفته می‌شوند.

فیزیک ریاضی

$$\boxed{\text{O O}}\ \text{O O O}$$

$$۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

$$n(A) = ۶۰ - ۲۴ = ۳۶$$

$$P(A) = \frac{۳۶}{۶۰} = ۰/۶$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۲)

۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(امیرهوشنگ خمسه)*

احتمال برنده نشدن فرد B را برابر x در نظر می‌گیریم. در این صورت احتمال برنده شدن افراد A، B و C به‌ترتیب $x^۲$ ، $۱-x$ و $\frac{x^۲}{۲}$ است و در نتیجه داریم:

$$P(A) + P(B) + P(C) = ۱ \Rightarrow x^۲ + (۱ - x) + \frac{x^۲}{۲} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۳x^۲}{۲} - x = ۰ \Rightarrow x\left(\frac{۳x}{۲} - ۱\right) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$P(A) = x^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow P(A') - P(A) = \frac{۵}{۹} - \frac{۴}{۹} = \frac{۱}{۹}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۳۶- **گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهدوی)*

با توجه به قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$B \subseteq A \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = A \\ A \cap B = B \end{cases}$$

حال طبق قانون احتمال شرطی داریم:

$$P(B' \mid A) = \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A) - P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۷}}{\frac{۱}{۳}} = \frac{\frac{۴}{۲۱}}{\frac{۱}{۳}} = \frac{۴}{۷}$$

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

$$\frac{P(B'|A)}{P(A\cup B)}=\frac{P(B'|A)}{P(A)}=\frac{\frac{۴}{۷}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱۲}{۷}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۲)

۳۷- **گزینهٔ «۲»** *(علی‌اکبر علیزاده)*

در بین ۷ مهرهٔ موجود در کیسهٔ سوم، ۳ مهره از ابتدا به کیسهٔ اول، ۲ مهره از ابتدا به کیسهٔ دوم و ۲ مهره از ابتدا به کیسهٔ سوم تعلق داشته‌اند، پس طبق نمودار درختی زیر و قانون احتمال کل، احتمال سفید بودن مهرهٔ خارج شده از این کیسه برابر است با:

$$\begin{cases} \text{کیسهٔ اول} \Rightarrow \frac{۳}{۷} \xrightarrow{\text{سفید}} \frac{۳}{۸} \\ \text{کیسهٔ دوم} \Rightarrow \frac{۲}{۷} \xrightarrow{\text{سفید}} ۰ \\ \text{کیسهٔ سوم} \Rightarrow \frac{۲}{۷} \xrightarrow{\text{سفید}} ۱ \end{cases}$$

$$P(\text{سفید})=\frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۲}{۷}\times۰+\frac{۲}{۷}\times۱=\frac{۹}{۵۶}+\frac{۲}{۷}=\frac{۲۵}{۵۶}$$

طبق قانون بیز داریم:

$$P(\text{کیسهٔ سوم}|\text{سفید})=\frac{\frac{۲}{۷}\times۱}{\frac{۲۵}{۵۶}}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

۳۸- **گزینهٔ «۲»** *(فرزانه خاکپاش)*

میانگین وزنی نمرات برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{۵\times۱۰+۸\times۱۲+۷\times۱۴+۱۰\times۱۵+۶\times۱۷+۴\times۱۸}{۵+۸+۷+۱۰+۶+۴}=\frac{۵۶۸}{۴۰}=۱۴/۲$$

اگر نمرات را به ترتیب صعودی مرتب کنیم، دادهٔ بیستم برابر ۱۴ و دادهٔ بیست و یکم برابر ۱۵ است. میانهٔ داده‌ها برابر میانگین این دو داده (داده‌های وسط) است:

$$Q_۲=\frac{۱۴+۱۵}{۲}=۱۴/۵$$

در نتیجه داریم:

$$Q_۲-\bar{x}=۱۴/۵-۱۴/۲=۰/۳$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۳)

۳۹- **گزینهٔ «۳»** *(عزیزاله علی‌اصغری)*

برای ۱۰ دادهٔ اولیهٔ داریم:

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\ldots+(x_{۱۰}-\bar{x})^۲}{۱۰}=۳۶$$

$$\Rightarrow (x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\ldots+(x_{۱۰}-\bar{x})^۲=۳۶۰$$

فرض کنید k دادهٔ برابر با میانگین به این داده‌ها اضافه کنیم. اگر انحراف معیار داده‌های جدید را با σ' نمایش دهیم، داریم:

$$\sigma'^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\ldots+(x_{۱۰}-\bar{x})^۲+k(\bar{x}-\bar{x})^۲}{۱۰+k}=\frac{۳۶۰}{۱۰+k}$$

$$\sigma'<۵\Rightarrow\sigma'^۲<۲۵\Rightarrow\frac{۳۶۰}{۱۰+k}<۲۵\Rightarrow۳۶۰<۲۵۰+۲۵k$$

$$\Rightarrow ۲۵k>۱۱۰\Rightarrow k>۴/۴$$

بنابراین حداقل باید ۵ دادهٔ برابر با میانگین به این داده‌ها اضافه کرد تا انحراف معیار کمتر از ۵ شود.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(فرزانه خاکپاش)*

میانگین این نمونه برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{۱+۱+۲+۳+۳+۴+۴+۴+۵}{۹}=\frac{۲۷}{۹}=۳$$

اگر μ میانگین جامعه و σ و n به ترتیب انحراف معیار و اندازهٔ نمونه باشند، آن‌گاه داریم:

$$\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow ۳-\frac{۲\times۱/۵}{۳}\le\mu\le۳+\frac{۲\times۱/۵}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲\le\mu\le۴\Rightarrow\mu\in[۲,۴]$$

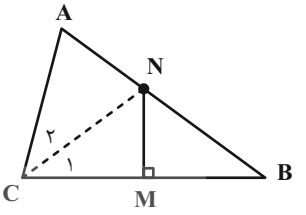
(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۱

۴۱- گزینهٔ «۲» *(علی احمدی قنزل‌دشت)*

چون N روی عمودمنصف است، پس از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و مثلث NBC متساوی‌الساقین خواهد بود.



$$\hat{B}=\hat{C}_1=x$$

$$AB=BC\Rightarrow \hat{C}=\hat{A}=39^\circ+x$$

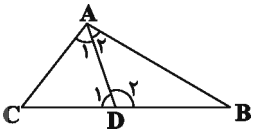
$$\hat{A}+\hat{C}+\hat{B}=180^\circ\Rightarrow (39^\circ+x)+(39^\circ+x)+x=180^\circ$$

$$\Rightarrow 78^\circ+3x=180^\circ\Rightarrow x=34^\circ$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۴۲- گزینهٔ «۱» *(علی ایمانی)*

فرض کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\ (\hat{A}=90^\circ)$ طول نیمساز AD بزرگ‌تر از طول ضلع AC باشد.



$$\overset{\Delta}{ADC}: AD>AC\Rightarrow \hat{C}>\hat{D}_1$$

$$\xrightarrow[\text{مثلث ADB است}]{\text{زاویهٔ خارجی } \hat{D}_1}\hat{C}>\hat{A}_2+\hat{B}$$

$$\xrightarrow{\hat{A}_2=45^\circ}\hat{C}-\hat{B}>45^\circ$$

$$\Rightarrow (\hat{B}+\hat{C})-2\hat{B}>45^\circ\xrightarrow{\hat{B}+\hat{C}=90^\circ}90^\circ-2\hat{B}>45^\circ$$

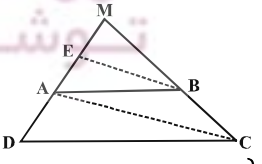
$$\Rightarrow 2\hat{B}<45^\circ\Rightarrow \hat{B}<22/5^\circ$$

بنابراین از میان گزینه‌های موجود، تنها به ازای $\hat{B}=20^\circ$، طول نیمساز AD می‌تواند از طول ضلع AC بزرگ‌تر باشد.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

۴۳- گزینهٔ «۴» *(کتاب آبی)*

اگر فرض کنیم $ME=x$ باشد، آنگاه داریم:



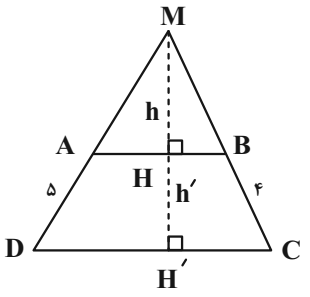
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{MAC}: BE\parallel AC\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\dfrac{ME}{AE}=\dfrac{MB}{BC}\\ \overset{\Delta}{MDC}: AB\parallel DC\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\dfrac{MA}{AD}=\dfrac{MB}{BC}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{ME}{AE}=\frac{MA}{AD}$$

$$\overset{\Delta}{MDC}: \frac{x}{3}=\frac{x+3}{4/5}\Rightarrow x=6$$

$$MD=ME+AE+AD=6+3+4/5=13/5$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۴۴- گزینهٔ «۴» *(افشین خاصه‌خان)*



راه‌حل اول: دو مثلث MAB و MCD متشابه‌اند و نسبت ارتفاع‌ها در این دو مثلث برابر نسبت تشابه است، پس داریم:

$$\frac{MH}{MH'}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow \frac{h}{h+h'}=\frac{4}{6}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}}\frac{h}{h'}=\frac{4}{2}=2$$

$$\frac{S_{MAB}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}h\times AB}{\frac{1}{2}h'(AB+CD)}=\frac{h}{h'}\times\frac{AB}{AB+CD}=2\times\frac{4}{4+6}=\frac{8}{10}=\%80$$

راه‌حل دوم: دو مثلث MAB و MCD متشابه‌اند. نسبت تشابه را k در نظر می‌گیریم، پس داریم:

$$k=\frac{AB}{CD}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

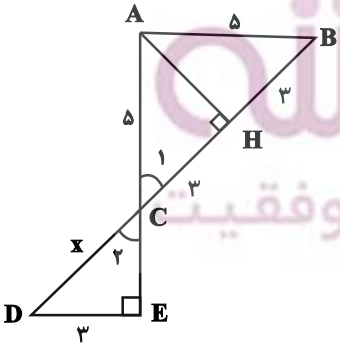
$$\frac{S_{MAB}}{S_{MCD}}=k^2\Rightarrow\frac{S_{MAB}}{S_{MAB}+S_{ABCD}}=\frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{S_{MAB}}{S_{ABCD}}=\frac{4}{5}=\%80$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۵)

۴۵- گزینهٔ «۴» *(علی احمدی قنزل‌دشت)*

در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع وارد بر قاعدهٔ BC، میانهٔ نظیر این ضلع است، پس داریم: $BH=CH=3$



$$\overset{\Delta}{AHC}: AH^2=AC^2-CH^2=25-9=16\Rightarrow AH=4$$

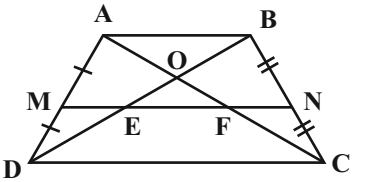
$$\left.\begin{array}{l}\hat{C}_1=\hat{C}_2\ (\text{متقابل به راس})\\ \hat{H}=\hat{E}=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AHC}\sim\overset{\Delta}{DEC}$$

$$\Rightarrow\frac{AC}{DC}=\frac{AH}{DE}\Rightarrow\frac{5}{x}=\frac{4}{3}\Rightarrow x=\frac{15}{4}=3/75$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۴۶- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

با توجه به آنکه M و N وسط دوساق است، مطابق شکل داریم:



$$\left.\begin{array}{l} MF \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MF}{CD}=\frac{AM}{AD}=\frac{1}{2} \Rightarrow MF=\frac{CD}{2} \\ FN \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FN}{AB}=\frac{CN}{CB}=\frac{1}{2} \Rightarrow FN=\frac{AB}{2} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow MN=\frac{AB+CD}{2}$$

به روش مشابه می‌توان ثابت کرد: $EF=\frac{CD-AB}{2}$

طبق فرض:

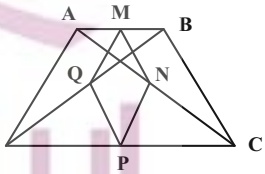
$$\left.\begin{array}{l} MN=\frac{AB+CD}{2}=6 \\ EF=\frac{CD-AB}{2}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} CD=9 \\ AB=3 \end{cases}$$

از طرفی مثلث‌های OAB و OCD متشابه بوده و نسبت تشابه آن‌ها همان نسبت دو ضلع متناظر یعنی $\frac{AB}{CD}=\frac{3}{9}$ می‌باشد. پس:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}}=\left(\frac{AB}{CD}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷ و ۴۵)

۴۷- **گزینهٔ «۳»** *(بهزاد حاتمی)*



در مثلث ABD، نقاط M و Q به‌ترتیب وسط اضلاع AB و BD هستند، پس طبق تعمیم قضیهٔ تالس، $MQ=\frac{1}{2}AD$ است. به دلیل مشابه به‌ترتیب در مثلث‌های ABC، ADC و BDC، $MN=\frac{1}{2}BC$، $NP=\frac{1}{2}AD$ و $PQ=\frac{1}{2}BC$ است و در نتیجه داریم:

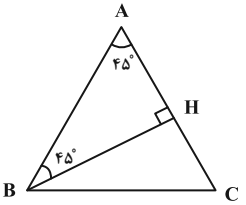
$$\text{محیط MNPQ}=\frac{1}{2}AD+\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AD+\frac{1}{2}BC$$

$$=AD+BC=4+4=8$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۴۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه واقع بر قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق مثلث برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است.



اگر ارتفاع وارد بر ساق AC را مطابق شکل رسم کنیم، آن‌گاه مثلث ABH، مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و در نتیجه داریم:

$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^2=AH^2+BH^2=2BH^2$$

$$\Rightarrow AB=AC=BH\sqrt{2}$$

طبق فرض، مساحت مثلث ABC برابر است با:

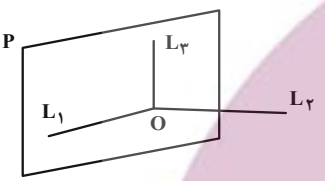
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BH\times AC \Rightarrow 8\sqrt{2}=\frac{1}{2}BH\times BH\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow BH^2=16 \Rightarrow BH=4$$

در نتیجه مجموع فواصل مورد نظر برابر ۴ است.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۸)

۴۹- **گزینهٔ «۱»** *(رضا عباسی‌اصل)*

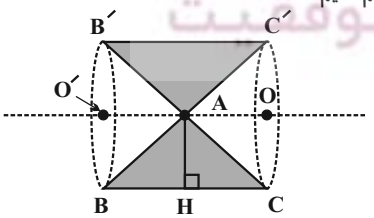


فرض کنید خط L_3 درون صفحهٔ P نباشد. در این صورت بر دو خط متقاطع L_1 و L_3، صفحه‌ای مانند P' می‌گذرد. چون خط L_2 بر دو خط متقاطع از صفحهٔ P' در محل تقاطع عمود است، پس $L_2 \perp P$، پس $P \parallel P'$. با توجه به اینکه دو صفحهٔ P و P' هر دو شامل خط L_1 هستند، پس نمی‌توانند موازی یکدیگر باشند و در نتیجه طبق برهان خلف، خط L_3 لزوماً درون صفحهٔ P قرار دارد.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۶)

۵۰- **گزینهٔ «۲»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

مطابق شکل $AH=\sqrt{3}$ و $BH=CH=1$ است، بنابراین برای محاسبهٔ حجم شکل حاصل از دوران، کافی است حجم دو مخروط هرکدام به ارتفاع ۱ و شعاع قاعدهٔ $\sqrt{3}$ را از حجم یک استوانه به ارتفاع ۲ و شعاع قاعدهٔ $\sqrt{3}$ کم کنیم:



$$\text{حجم استوانه}=\pi R_1^2 h_1=\pi\times(\sqrt{3})^2\times 2=6\pi$$

$$\text{حجم دو مخروط}=2\times\frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2=\frac{2}{3}\times\pi\times(\sqrt{3})^2\times 1=2\pi$$

$$\text{حجم مطلوب}=6\pi-2\pi=4\pi$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

فیزیک ۲

۵۱- گزینهٔ «۲» *(بهنام رستمی)*

طبق قانون سوم نیوتون (عمل و عکس‌العمل)، داریم: $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

$$\vec{F}_{AB} = ۶\vec{i} - ۸\vec{j} \Rightarrow \vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} = -۶\vec{i} + ۸\vec{j}$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۵ تا ۸)

۵۲- گزینهٔ «۳» *(بهنام رستمی)*

ذره الکترون از دست داده، در نتیجه دارای بار الکتریکی مثبت می‌شود:

$$q = +ne = ۸\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}C = ۱۲/۸\times ۱۰^{-۱۹}C$$

طبق شرط تعادل داریم:

$$F_E = mg \Rightarrow E|q| = mg$$

$$\Rightarrow E = \frac{mg}{|q|} \xrightarrow[g=۱۰\frac{N}{kg}]{m=۲۵/۶\times ۱۰^{-۱۵}\,kg} \Rightarrow E = \frac{۲۵/۶\times ۱۰^{-۱۵}\times ۱۰}{۱۲/۸\times ۱۰^{-۱۹}} = ۲\times ۱۰^{۵}\,\frac{N}{C}$$

در نهایت به کمک رابطهٔ $|\Delta V| = Ed$، اندازهٔ اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ رسانا را به‌دست می‌آوریم:

$$|\Delta V| = Ed \xrightarrow{d=۲cm=۲\times ۱۰^{-۲}m} |\Delta V| = ۲\times ۱۰^{۵}\times ۲\times ۱۰^{-۲} = ۴۰۰۰V = ۴kV$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۰ و ۲۶)

۵۳- گزینهٔ «۳» *(احسان محمدی)*

تا زمانی که خازن به باتری وصل است، اختلاف پتانسیل بین صفحات آن ثابت می‌ماند و به این ترتیب، با ثابت ماندن فاصلهٔ بین صفحات، اندازهٔ میدان الکتریکی بین صفحات خازن نیز تغییری نمی‌کند. $(E = \frac{V}{d})$

(فیزیک ۲- الکتریسیته ساکن؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۵۴- گزینهٔ «۳» *(سیدعلی میرنوری)*

با باز کردن کلید k (قطع کلید)، دیود در مدار قرار می‌گیرد و با توجه به جهت قرارگیری دیود (در خلاف جهت جریان)، جریان عبوری صفر می‌شود و آمپرسنج عدد کوچک‌تری را نسبت به حالت قبل نشان می‌دهد. از طرفی عددی که ولت‌سنج دو سر باتری نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.

$$\uparrow V = \varepsilon - rI \downarrow$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۰ تا ۶۶)

۵۵- گزینهٔ «۱» *(سعید طاهری‌بروجنی)*

ابتدا با استفاده از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A می‌توانیم جریان گذرنده از مدار را بیابیم، داریم: $V_E - IR = V_A \Rightarrow ۰ - ۴I = -۴ \Rightarrow I = ۱A$

بنابراین جریان در مدار پادساعتگرد است و در نتیجه باتری $\varepsilon_۲$ محرکه و $\varepsilon_۱$ ضدمحرکه است.

$$I = \frac{\varepsilon_۲ - \varepsilon_۱}{R_{eq} + r_۱ + r_۲} \Rightarrow ۱ = \frac{۲۴ - \varepsilon_۱}{(۸+۴)+۱+۱} \Rightarrow \varepsilon_۱ = ۱۰V$$

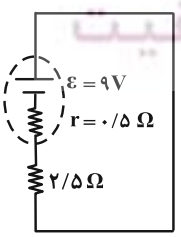
اختلاف پتانسیل دو سر باتری ضدمحرکهٔ $\varepsilon_۱$ برابر است با:

$$V_۱ = \varepsilon_۱ + Ir_۱ \Rightarrow V_۱ = ۱۰ + ۱\times ۱ = ۱۱V$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۵۶- گزینهٔ «۳» *(محمدجواد غلامی)*

مقاومت‌های قرار گرفته بین دو نقطهٔ هم پتانسیل، اتصال کوتاه شده و طبق شکل زیر، در مدار ساده شده داریم: $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{۹}{۲/۵ + ۰/۵} = \frac{۹}{۳} = ۳A$



در نتیجه توان خروجی باتری برابر با توان مصرفی در مقاومت $۲/۵\,\Omega$ است:

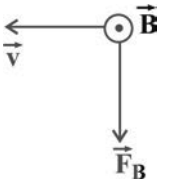
$$P = R_{eq}I^۲ = ۲/۵\times (۳)^۲ = ۲/۵\times ۹ = ۲۲/۵W$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۷۹)

ایران زوشته
توشه‌ای برای موفقیت

۵۷- **گزینهٔ «۲»** *(سیدعلی میرنوری)*

با استفاده از قاعدهٔ دست راست، چهار انگشت را به‌طرف غرب به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که کف دست به‌طرف جنوب باشد. در این صورت جهت انگشت شست رو به بالا خواهد بود که چون الکترون دارای بار منفی است، جهت نیروی به‌دست آمده را عکس کرده، یعنی جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون رو به پایین خواهد بود. حال برای تعیین بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر آن داریم:



$$F = |q|vB\sin\alpha \xrightarrow{\alpha = 90^\circ} F = 1/6\times10^{-19}\times10^{4}\times50\times10^{-4}\times1 = 8\times10^{-18}\,N$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۹ تا ۹۱)

۵۸- **گزینهٔ «۲»** *(رامین شادلویی)*

ابتدا تعداد دورهای پیچهٔ جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$N = \frac{L}{2\pi R} \xrightarrow{L_1 = L_2} \frac{N_2}{N_1} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{N_2}{250} = \frac{R_1}{\frac{R_1}{2}}$$

$$\Rightarrow N_2 = 500 \text{ دور}$$

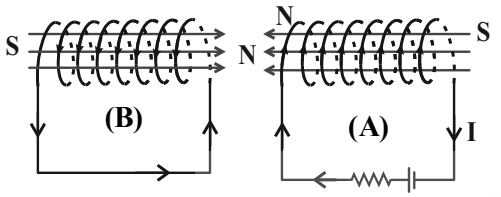
با استفاده از رابطهٔ میدان مغناطیسی پیچه داریم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \Rightarrow \frac{B_2}{B_1} = \frac{N_2}{N_1}\times\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{500}{250}\times\left(\frac{R_1}{\frac{R_1}{2}}\right) = 4$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹)

۵۹- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد مردانی)*

جهت میدان مغناطیسی در سیملولهٔ (A) با توجه به جهت جریان به‌طرف چپ است و در سیملولهٔ (B) با توجه به جهت جریان القا شده، به‌طرف راست می‌باشد. طبق قانون لنز، باید میدان مغناطیسی در سیملولهٔ (A) زیاد گردد تا میدان مغناطیسی القایی در سیملولهٔ (B) به‌طرف راست باشد. در نتیجه در سیملولهٔ (A) باید I زیاد شود و طبق رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$، مقاومت R رئوستا باید کاهش یابد. ضمناً چون قطب‌های هم‌نام کنار هم قرار دارند، نیروی مغناطیسی رانشی (دافعه) بین دو سیملوله به‌وجود می‌آید.



(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۸)

۶۰- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی کیانی)*

ابتدا با استفاده از نمودار $\Phi - t$، معادلهٔ شار مغناطیسی عبوری از پیچه را می‌یابیم. آن‌طور که شکل نشان می‌دهد $\frac{5T}{4} = 15\,s$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{5T}{4} = 15 \Rightarrow T = 12s$$

$$\Phi = \Phi_{max}\cos\frac{2\pi}{T}t \xrightarrow{\Phi_{max} = 0/05\,Wb} \Rightarrow \Phi = 0/05\cos\frac{\pi}{6}t$$

اکنون تغییر شار مغناطیسی در بازهٔ زمانی مورد نظر را پیدا می‌کنیم:

$$\Phi = 0/05\cos\frac{\pi}{6}t$$

$$\xrightarrow{t_1 = 0} \Phi_1 = 0/05\cos 0 = 0/05\,Wb$$

$$\xrightarrow{t_2 = 3s} \Phi_2 = 0/05\cos\left(\frac{\pi}{6}\times3\right) = 0$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 0 - 0/05 = -0/05\,Wb$$

در نهایت، نیروی محرکهٔ القایی متوسط را می‌یابیم و سپس R را حساب می‌کنیم:

$$\varepsilon_{av} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow[N=12]{\Delta t = 3-0 = 3\,s} \varepsilon_{av} = -12\times\frac{-0/05}{3} = 0/2V$$

$$I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R} \Rightarrow 1/8 = \frac{0/2}{R} \Rightarrow R = \frac{1}{9}\Omega$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶ و ۱۲۲ تا ۱۲۶)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۱

۶۱- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا رستم‌زاده)*

جرم هر ۴ مورد داده شده را به kg تبدیل می‌کنیم تا ببینیم چند مورد دقت ۰/۰۱kg دارند.

الف) $۵۹۶۱\text{dag}\times\frac{۱۰^{۱}\text{g}}{۱\text{dag}}\times\frac{۱\text{kg}}{۱۰^{۳}\text{g}}=۵۹/۶۱\text{kg}\xrightarrow{\text{دقت}}۰/۰۱\text{kg}$

ب) $۳/۷\times۱۰^{۵}\text{mg}\times\frac{۱۰^{-۳}\text{g}}{۱\text{mg}}\times\frac{۱\text{kg}}{۱۰^{۳}\text{g}}=۰/۳۷\text{kg}\xrightarrow{\text{دقت}}۰/۰۱\text{kg}$

پ) $۰/۷۷\times۱۰^{-۳}\text{Mg}\times\frac{۱۰^{۶}\text{g}}{۱\text{Mg}}\times\frac{۱\text{kg}}{۱۰^{۳}\text{g}}=۰/۷۷\text{kg}\xrightarrow{\text{دقت}}۰/۰۱\text{kg}$

ت) $۰/۰۶۵۶\times۱۰^{-۵}\text{Tg}\times\frac{۱۰^{۱۲}\text{g}}{۱\text{Tg}}\times\frac{۱\text{kg}}{۱۰^{۳}\text{g}}=۶۵۶\text{kg}\xrightarrow{\text{دقت}}۱\text{kg}$

موارد «الف»، «ب» و «پ» دقت ۰/۰۱kg دارند. پس این سه مورد می‌توانند با این ترازو اندازه‌گیری شده باشند.

(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

۶۲- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا رستم‌زاده)*

حجم استوانهٔ توخالی از رابطهٔ $V=\pi(R^{۲}-r^{۲})h$ به‌دست می‌آید و با توجه به رابطهٔ چگالی داریم:

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{\pi(R^{۲}-r^{۲})h}\Rightarrow h=\frac{m}{\rho\pi(R^{۲}-r^{۲})}$$

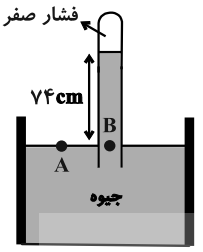
$$\xrightarrow{R=\frac{۴}{۳}r}h=\frac{m}{\rho\pi(\frac{۱۶}{۹}r^{۲}-r^{۲})}=\frac{۹m}{۷\pi\rho r^{۲}}$$

$$\xrightarrow{r=\frac{۳}{۴}R}h=\frac{۱۶m}{۷\pi\rho R^{۲}}$$

(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۶۳- **گزینهٔ «۱»** *(عبداله فقه‌زاده)*

در شکل (۱) می‌توان فشار هوا را اندازه‌گیری کرد.



$$P_A=P_B\Rightarrow P_{\circ}=۷۴\,\text{cm Hg}$$

و از طرفی در شکل (۲) فشار مخزن گاز به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$$P-P_{\circ}=\rho gh$$

$$\Rightarrow P-P_{\circ}=۲۴\,\text{cmHg}\Rightarrow P-۷۴=۲۴\Rightarrow P=۹۸\,\text{cmHg}$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۶۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا شیروانی‌زاده)*

فقط مورد (ب) نادرست است.

علت اینکه یک تیغ از سطح پهن آن روی آب شناور می‌ماند، نیروی کشش سطحی آب است.

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد؛ صفحه‌های ۲۹، ۴۰ تا ۴۲)

۶۵- **گزینهٔ «۲»** *(بهنام شاهینی)*

با توجه به نمودار و طبق رابطهٔ انرژی جنبشی داریم:

$$\Delta K=\frac{۱}{۲}m(v_{۲}^{۲}-v_{۱}^{۲})\xrightarrow[\Delta K=۸۴J]{m=۲kg}$$

$$۸۴=\frac{۱}{۲}\times۲\times(v_{۲}-v_{۱})(v_{۲}+v_{۱})\xrightarrow{v_{۲}-v_{۱}=۶\frac{m}{s}}$$

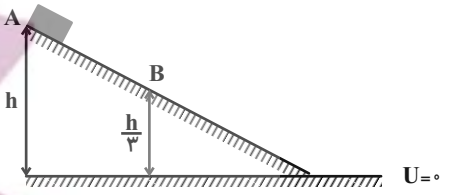
$$۸۴=۶(v_{۲}+v_{۱})\Rightarrow v_{۲}+v_{۱}=۱۴\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۶۶- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کیانی)*

مطابق شکل زیر، جسم در نقطهٔ A فقط انرژی پتانسیل گرانشی و در نقطهٔ B، هم انرژی جنبشی و هم انرژی پتانسیل گرانشی دارد. بنابراین با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی پتانسیل گرانشی را در بالای سطح شیبدار می‌یابیم. دقت کنید چون در نقطهٔ B، ارتفاع از مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی، $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع در نقطهٔ A است، بنابه رابطهٔ $U=mgh$ باید $U_B=\frac{۱}{۳}U_A$ باشد.



$$E_A=E_B \xrightarrow{E=U+K} U_A+K_A=U_B+K_B$$
$$\xrightarrow{U_B=\frac{۱}{۳}U_A\,,\,K_A=۰ \atop K_B=\frac{۱}{۲}mv_B^۲} U_A+۰=\frac{۱}{۳}U_A+\frac{۱}{۲}mv_B^۲ \xrightarrow[v_B=۱۰\frac{m}{s}]{m=۴kg} \frac{۲}{۳}U_A=\frac{۱}{۲}\times۴\times۱۰^۲$$
$$\Rightarrow U_A=۳۰۰J$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۶۷- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا رستم‌زاده)*

با استفاده از روابط گرما و همچنین انبساط حجمی داریم:

$$Q=mc\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta=\frac{Q}{mc} \xrightarrow{\rho=m/V} \Delta\theta=\frac{Q}{\rho Vc} \quad (۱)$$
$$\Delta V=۳\alpha V_۱\Delta\theta \xrightarrow{(۱)} \Delta V=۳\alpha V_۱\frac{Q}{\rho Vc} \xrightarrow{V_۱=V} \Delta V=\frac{۳\alpha Q}{\rho c}$$
$$\Delta V_A=\Delta V_B \Rightarrow \frac{۳\alpha_A Q_A}{\rho_A c_A}=\frac{۳\alpha_B Q_B}{\rho_B c_B} \xrightarrow[c_A=۳c_B]{\alpha_A=۲\alpha_B\,,\,\rho_A=\frac{۱}{۲}\rho_B}$$
$$\frac{۲Q_A}{\frac{۱}{۲}\times۳}=Q_B \Rightarrow \frac{Q_B}{Q_A}=\frac{۴}{۳}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۳، ۹۴ و ۹۷ تا ۹۹)

۶۸- **گزینهٔ «۴»** *(عرفان عسکریان‌چایجان)*

گرمایی که از آب گرفته می‌شود تا یخ بزند، صرف بالا بردن دمای یخ $-۱۰^\circ C$ می‌شود. اگر دنبال محاسبهٔ حداقل مقدار یخ باشیم، باید بیشترین دمای ممکن برای یخ، یعنی $۰^\circ C$ را در نظر بگیریم.

$$Q_{آب}+Q_{یخ}=۰ \Rightarrow -m_{آب}L_F+m_{یخ}c_{یخ}\Delta\theta_{یخ}=۰$$
$$\Rightarrow \frac{۵۰۰}{۱۰۰۰}\times۳/۳۶\times۱۰^۵=m_{یخ}\times۲۱۰۰\times(۰-(-۱۰))$$
$$\Rightarrow m_{یخ}=\frac{۰/۵\times۳/۳۶\times۱۰^۵}{۲۱۰۰\times۱۰}=۸kg$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۶)

۶۹- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

می‌دانیم که در انبساط $W<۰$ است. پس داریم: $W=-۶۸۰J$

از طرفی در فرایند بی‌دررو $Q=۰$ است. پس قانون اول ترمودینامیک به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\Delta U=Q+W \Rightarrow \Delta U=-۶۸۰J$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۰، ۱۳۷ تا ۱۳۹)

۷۰- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

می‌دانیم که تغییر انرژی درونی در یک چرخه، صفر است:

$$\Delta U_{چرخه}=۰ \Rightarrow \Delta U_{ab}+\Delta U_{bc}+\Delta U_{ca}=۰$$

با توجه به قانون اول ترمودینامیک، داریم:

$$\xrightarrow{\Delta U=Q+W}(Q_{ab}+Q_{bc}+Q_{ca})+(W_{ab}+W_{bc}+W_{ca})=۰ \quad (۱)$$

چون فرایند bc هم‌حجم است، $W_{bc}=۰$ می‌باشد. با توجه به اینکه فرایند ca یک انبساط بی‌دررو است، پس کار در این فرایند منفی است. یعنی داریم:

$$W_{ca}=-۲۴۰۰J$$

از طرفی در نمودار $P-V$، مساحت زیر نمودار برابر قدرمطلق کار انجام شده است. داریم:

$$W_{ab}=+(۸-۲)\times۱۰^{-۳}\times۱/۵\times۱۰^۵=۹\times۱۰^۲=۹۰۰J$$

پس داریم:

$$\xrightarrow{(۱)}Q_{abc}+۹۰۰+۰-۲۴۰۰=۰ \Rightarrow Q_{abc}=۱۵۰۰J$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۴۰)

شیمی ۲

۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(حسن لشکری)*

سیکلوهگزان آروماتیک نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: نام درست ۲- اتیل پنتان به‌صورت ۳- متیل هگزان و نام درست ۲ و ۳- دی متیل پروپان به‌صورت ۲- متیل بوتان می‌باشد.

گزینهٔ «۴»: فرمول مولکولی ۲- بوتن C_4H_8 و پروپین C_3H_4 است.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۴۲)

۷۲- **گزینهٔ «۳»** *(حسن لشکری)*

$$?\,\text{mol}\,CO_2 : 270000\,g\,C_6H_{12}O_6$$

$$\times \frac{1\,\text{mol}\,C_6H_{12}O_6}{180\,g\,C_6H_{12}O_6} \times \frac{2\,\text{mol}\,CO_2}{1\,\text{mol}\,C_6H_{12}O_6} \times \underbrace{\frac{75}{100}}_{\text{بازده درصدی}} = 2250\,\text{mol}\,CO_2$$

گاز CO_2 خارج شده از واکنشگاه ۲، ۱/۵ برابر واکنشگاه ۱ است. پس CO_2 خروجی از واکنشگاه ۲ برابر ۳۳۷۵ مول می‌باشد.

چون ضریب CO_2 و C_2H_5OH در واکنش انجام شده در واکنشگاه ۱ برابر است بنابراین تعداد مول C_2H_5OH تولید شده نیز برابر ۲۲۵۰ مول خواهد بود.

$$?\,\text{بازده واکنشگاه ۲} : 2250\,\text{mol}\,C_2H_5OH \times \frac{R}{100} \times \frac{2\,\text{mol}\,CO_2}{1\,\text{mol}\,C_2H_5OH}$$

$$= 3375\,\text{mol}\,CO_2 \Rightarrow R = 75$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۷۳- **گزینهٔ «۳»** *(منصور سلیمانی‌ملکان)*

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: شیر و فراورده‌های آن، منبع مهمی برای تأمین کلسیم است.

گزینهٔ «۲»: تولید آمونیاک به روش هابر به صورت:

$$N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g) + Q$$

بوده و گرماده است.

بنابراین پایداری فراورده بیشتر از واکنش‌دهنده‌ها است.

گزینهٔ «۴»: جریان گرما در بدن بیشتر ناشی از تفاوت انرژی پتانسیل در مواد واکنش‌دهنده و فراورده است. زیرا واکنش‌های شیمیایی درون بدن در شرایط هم‌دما رخ می‌دهند.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴ و ۶۱ تا ۶۴)

۷۴- **گزینهٔ «۱»** *(مبینا شراختی‌پور)*

ابتدا گرمای لازم برای افزایش دمای CO_2 را به‌دست می‌آوریم.

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = 60g \times 0/84 \frac{J}{g.^\circ C} \times 20^\circ C = 1008J$$

همین گرما برای افزایش دمای O_2 به‌کار می‌رود.

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 1008J = 36/5 \times c \times 30^\circ C \Rightarrow c \simeq 0/92 J.g^{-1}.^\circ C^{-1}$$

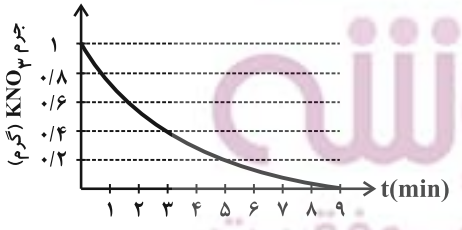
(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۷۵- **گزینهٔ «۳»** *(محمدحسن محمدزاده‌مقدم)*

ابتدا معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$2KNO_3(s) \longrightarrow 2KNO_2(s) + O_2(g)$$

با توجه به نمودار مقدار KNO_3 مصرف شده را تعیین کرده و سپس حجم گاز O_2 را به‌دست می‌آوریم:



$$KNO_3 \text{ مصرف شده} = 1 - 0/2 = 0/8g$$

$$?\,LO_2 \text{ تولید شده} : 0/8g\,KNO_3 \times \frac{1\,\text{mol}\,KNO_3}{101\,g\,KNO_3} \times \frac{1\,\text{mol}\,O_2}{2\,\text{mol}\,KNO_3}$$

$$\times \frac{22/4\,L\,O_2}{1\,\text{mol}\,O_2} \simeq 0/089\,L\,O_2$$

$$\bar{R}_{O_2} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{0/089\,L}{5\,\text{min}} \Rightarrow \bar{R}_{O_2} \simeq 0/018 \frac{L}{\text{min}}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۸)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۷۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

گرمای سوختن الماس بیشتر از گرافیت است. بنابراین می‌توان گفت؛ گرافیت پایدارتر از الماس است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۵، ۶۴ و ۶۵)

۷۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

واکنش بسپارش مونومر A به صورت زیر است:

$$n\ CH_2=\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{C}}-CH_3 \xrightarrow[\text{فشار}]{\text{گرما}} -\left(CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}\right)_n-$$

یا $\left(\quad\right)_n$

برای تعیین مونومر سازندهٔ پلیمر (B) نیز می‌توان گفت:

$$-\left(\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{H}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}-\underset{\displaystyle C_2H_5}{\overset{H}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}\right)_n \longrightarrow n\ \underset{\displaystyle CH_3}{\overset{H}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}=\underset{\displaystyle C_2H_5}{\overset{H}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}$$

یا n

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۵)

۷۸- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی جامع کنکور)*

با توجه به این‌که نمودار مربوط به یکی از فراورده‌ها است، می‌توانیم به کمک اطلاعات داده شده تعیین کنیم که نمودار متعلق به کدام فراورده است.

$$\bar{R}_{\text{ماده}}=\frac{\frac{2\ mol}{3\ L}}{\frac{1}{6}\ min}=4\ \frac{mol}{L.min} \Rightarrow \bar{R}_{\text{واکنش}}=\frac{\bar{R}_{\text{ماده}}}{\text{ضریب}} \Rightarrow 2=\frac{4}{\text{ضریب}}$$

$\Rightarrow$ نمودار برای B است. $\Rightarrow$ ضریب $=2$

$$\Delta n_A=-\frac{1}{2}\Delta n_B=\frac{1}{2}\times -10=-5mol \Rightarrow 8-5=3molA$$

$$\Rightarrow [A]=\frac{3mol}{3L}=1mol.L^{-1}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)

۷۹- **گزینهٔ «۲»** *(پیمان خوابوی‌مجد)*

ترکیب A ویتامین (آ) با فرمول $C_{20}H_{30}O$ و ترکیب B ویتامین (ث) با فرمول $C_6H_8O_6$ است. ویتامین (آ) در آب حل نمی‌شود پس مادهٔ حل نشده مربوط به این ماده است.

$$28/6g\,C_{20}H_{30}O\times\frac{1mol\,C_{20}H_{30}O}{286g\,C_{20}H_{30}O}=0/1mol\,C_{20}H_{30}O$$

پس ۰/۲ مول $C_6H_8O_6$ داریم:

جرم کربن ویتامین (آ) $=0/1\times20\times12=24g$

جرم کربن ویتامین (ث) $=0/2\times6\times12=14/4g$

جرم ویتامین (ث) برابر است با:

$$0/2mol\ C_6H_8O_6\times\frac{176g\,C_6H_8O_6}{1mol\,C_6H_8O_6}=35/2g\,C_6H_8O_6$$

درصد جرمی اتم کربن برابر است با:

$$\text{درصد جرمی کربن}=\frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم کل}}\times100=\frac{24+14/4}{35/2+28/6}\times100$$

$$=\frac{38/4}{63/8}\times100\simeq\%60/19$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۰، ۱۱۱ و ۱۱۳)

۸۰- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

نمایش فرمول عمومی پلی‌استرها به صورت

$$+\underset{\displaystyle \square}{\overset{O}{\overset{\|}{C}}}-\square-\underset{\displaystyle \square}{\overset{O}{\overset{\|}{C}}}-O-\square-O+_n$$

می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) درست، در ویتامین C بخش‌های قطبی برناقطبی غلبه داشته و در چربی حل نمی‌شود.

۲) درست

۳) درست، استر سازندهٔ طعم آناناس: اتیل بوتانوآت و استر سازندهٔ طعم سیب متیل بوتانوآت می‌باشد.

الکل سازندهٔ این دو استر به ترتیب اتانول و متانول است و این دو الکل در دمای اتاق به هر نسبتی در آب محلول می‌باشند.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۱، ۱۱۳ و ۱۱۴)

شیمی ۱

۸۱- **گزینهٔ «۳»** (محمد وزیری)

درصد فراوانی ایزوتوپ ^{71}X برابر ۱۵٪ است.

درصد فراوانی ^{70}X را برابر F_1 و ^{72}X را برابر F_2 در نظر می‌گیریم. با توجه به تعریف جرم اتمی میانگین داریم:

$$\bar{M}=\frac{F_1M_1+F_2M_2+F_3M_3}{100}$$

$$F_1+F_2+F_3=100\Rightarrow F_1+F_2+15=100\Rightarrow F_1=85-F_2$$

$$\Rightarrow 70/75=\frac{(85-F_2)\times 70+F_2\times 72+15\times 71}{100}$$

$$\Rightarrow 7075=5950-70F_2+72F_2+1065$$

$$\Rightarrow 60=2F_2\Rightarrow F_2=30\%\Rightarrow F_1=85-30=55\%$$

بنابراین ایزوتوپ ^{70}X بیشترین درصد فراوانی (55%) را داشته و ایزوتوپ ^{71}X به دلیل داشتن کمترین درصد فراوانی، کمترین میزان پایداری را دارد.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحهٔ ۱۵)

۸۲- **گزینهٔ «۲»** (محمدحسن محمدزاده‌مقدم)

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»:

$$_{24}X^{2+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^4$$

($2p^6$: $l=1$، $3p^6$: $l=1$)

تعداد الکترون‌های لایهٔ سوم $= 2+6+4=12$

تعداد الکترون‌های با $l=1$ $= 6+6=12$

گزینهٔ «۲»: با توجه به آرایش الکترونی $_{31}A^{3+}$، الکترونی با $n=4$ و $l=0$ (زیر لایه 4s) در آن وجود ندارد. $_{31}A^{3+}:[_{18}Ar]3d^{10}$

گزینهٔ «۳»: با توجه به آرایش الکترونی M و D نتیجه می‌گیریم که این عناصر در دورهٔ چهارم قرار داشته و تعداد الکترون‌ها در آخرین زیرلایهٔ آن‌ها برابر ۲ است.

$$_{27}M:[_{18}Ar]3d^7\underline{4s^2}$$

$$_{32}D:[_{18}Ar]3d^{10}\underline{4s^2 4p^2}$$

گزینهٔ «۴»: $_{28}T:[_{18}Ar]3d^8\underline{4s^2}$

در نتیجه مجموع عددهای کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های لایهٔ ظرفیت برابر است با: $(3+2)\times 8+(4+0)\times 2=48$

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴)

۸۳- **گزینهٔ «۱»** (محمد وزیری)

^3_1H بیشترین نیم‌عمر را در بین ایزوتوپ‌های ناپایدار هیدروژن دارد.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۳ و ۶ تا ۸)

۸۴- **گزینهٔ «۲»** (محمد عظیمیان‌زواره)

$$C_9H_8O_4=180\,g.mol^{-1}$$

$$CH_3COOH=60\,g.mol^{-1}$$

$$?\,atom\,O=28/8\,g\,C_9H_8O_4\times\frac{1\,mol\,C_9H_8O_4}{180\,g\,C_9H_8O_4}\times\frac{4\times N_A\,atom\,O}{1\,mol\,C_9H_8O_4}=0/64N_A$$

$$?\,g\,CH_3COOH=0/64N_A\,atom\times\frac{1\,mol\,CH_3COOH}{4N_A\,atom\,H}\times\frac{60\,g\,CH_3COOH}{1\,mol\,CH_3COOH}=9/6\,g\,CH_3COOH$$

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

۸۵- **گزینهٔ «۱»** (کتاب آبی جامع کنکور)

ابتدا مقدار مول یون کلرید موجود در نمونهٔ آب دریا را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,Cl^-=10\,mL\,\text{آب دریا}\times\frac{1/6\,g}{1\,mL}\times\frac{1900\,g\,Cl^-}{10^6\,g\,\text{آب دریا}}\times\frac{1\,mol\,Cl^-}{35/5\,g\,Cl^-}$$

$$\simeq 0/00086\,mol\,Cl^-$$

مقدار یون نقره را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,Ag^+=0/002\,L\times\frac{0/2\,mol\,Ag^+}{1\,L}=0/0004\,mol\,Ag^+$$

یون نقره با یون کلرید واکنش می‌دهد و رسوب نقره کلرید تشکیل می‌دهد، پس در اثر واکنش از غلظت یون کلرید کاسته می‌شود.

$$Ag^+(aq)+Cl^-(aq)\rightarrow AgCl(s)$$

غلظت کلرید باقی‌مانده پس از تشکیل رسوب:

$$0/00086-0/00040=0/00046\,mol\,Cl^-$$

$$\text{غلظت مولی یون کلرید}=\frac{\text{مول حل‌شونده}}{\text{حجم محلول}}=\frac{0/00046}{(0/01+0/002)}$$

$$\simeq 0/038\,mol.L^{-1}$$

(شیمی ۱- آب آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۱)

۸۶- **گزینهٔ «۴»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: در صنعت از اوزون (دگر شکل اکسیژن) برای گندزدایی میوه‌ها و ... استفاده می‌شود.

گزینهٔ «۲»: از گاز He (هلیم) برای خنک کردن دستگاه‌های تصویربرداری استفاده می‌شود، اما فراوان‌ترین عنصر در سیاره مشتری، هیدروژن است.

گزینهٔ «۳»: از واکنش نیتروژن دی‌اکسید و اکسیژن درحضور نور خورشید اوزون تروپوسفری ایجاد می‌شود.

گزینهٔ «۴»: به ازای تولید هر کیلووات ساعت برق، گاز طبیعی ۰/۳۶؛ زغال سنگ ۰/۹ و نفت خام ۰/۷ کیلوگرم کربن دی‌اکسید تولید می‌کنند.

(شیمی ۱- ترکیبی؛ صفحه‌های ۳، ۵۱، ۶۶، ۷۶، ۷۹ و ۸۰)

۸۷- **گزینهٔ «۲»** *(فاطمه رحیمی)*

$$2Al(s)+3CuSO_4(aq)\rightarrow Al_2(SO_4)_3(aq)+3Cu(s)$$

ابتدا از روی محلول $CuSO_4$، جرم مس تولید شده و آلومینیم مصرف شده را حساب می‌کنیم.

$$?g\ Cu=150mL\ محلول\times\frac{1L}{1000mL}\times\frac{0/8mol\ CuSO_4}{1L\ محلول}$$

$$\times\frac{1mol\ Cu}{1mol\ CuSO_4}\times\frac{64g\ Cu}{1mol\ Cu}=7/68g\ Cu$$

$$?g\ Al\ مصرف\ شده=7/68g\ Cu\times\frac{1mol\ Cu}{64g\ Cu}\times\frac{2mol\ Al}{3mol\ Cu}\times\frac{27g\ Al}{1mol\ Al}$$

$$=2/16g\ Al\ مصرف\ شده$$

جرم Cu تولید شده + جرم Al باقی‌مانده = جرم مخلوط باقی‌مانده در ظرف

$7/68$ + جرم Al باقی‌مانده = $16/35$

$\Rightarrow$ جرم Al باقی‌مانده = $8/67g\ Al$

مقدار باقی‌مانده Al + مقدار مصرف شده Al = جرم اولیه Al

جرم اولیه Al = $2/16+8/67=10/83\ g$

(شیمی ۱- آب آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۸ و ۹۹)

۸۸- **گزینهٔ «۱»** *(کتاب آبی جامع کنکور)*

رسوب $68-56=12g$

$$90^\circ C\Rightarrow 170g\ محلول\ سیرشده\times\frac{12g\ رسوب}{68g\ محلول\ سیرشده}$$

$\Rightarrow x=30g$ رسوب

$60^\circ C\Rightarrow$ انحلال‌پذیری در دمای ثانویه $\Rightarrow 40=30-70$

$$درصد\ جرمی\ آب=\frac{100g\ آب}{(100+40)g\ محلول}\times100\simeq71/4\ \%$$

(شیمی ۱- آب آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)

۸۹- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

فقط عبارت اول نادرست است.

با توجه به فرمول شیمیایی ترکیب‌های داده شده، X می‌تواند یون‌های X^+ و X^{2+} تولید کند. بنابراین می‌تواند اتم $_{29}Cu$ باشد.

X نمی‌تواند در گروه ۱۲ از دوره چهارم باشد، چرا که این عنصر $(_{30}Zn)$ در ترکیب‌های خود تنها به شکل یون X^{2+} وجود دارد.

مجموع $n+l$ الکترون‌های ظرفیت $_{24}Cr$ برابر با ۲۹ می‌باشد.

$$_{24}Cr:[Ar]\,3d^5\,4s^1$$

$$5(3+2)+1(4)=29$$

آرایش الکترونی X می‌تواند به صورت $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^{10}\,4s^1$ باشد که بیانگر وجود ۱۸ الکترون در لایهٔ سوم آن است. اتم $_{29}Cu$ نخستین عنصری است که سه لایهٔ الکترونی آن از الکترون پر شده است.

هیچ‌یک از یون‌های X^+ و X^{2+} آرایش الکترونی پایدار گاز نجیب را ندارند.

(شیمی ۱- ترکیبی؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴، ۹۱ و ۹۲)

۹۰- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

$$I)\ 4KNO_3(s)\rightarrow 2K_2O(s)+2N_2(g)+5O_2(g)$$

$$II)\ 2KClO_3(s)\rightarrow 2KCl(s)+3O_2(g)$$

کاهش جرم ایجاد شده در واکنش (I) با مجموع جرم N_2 و O_2 تولید شده یکسان است. به ازای ۲۱۶ گرم کاهش جرم، ۵ مول O_2 و ۲ مول N_2 تولید می‌شود.

$$?LO_2=32/4g\ کاهش‌جرم\times\frac{5mol\ O_2}{216g\ کاهش‌جرم}$$

$$\times\frac{22/4LO_2}{1mol\ O_2}=16/8LO_2$$

$$?mol\ KClO_3=16/8LO_2\times\frac{1mol\ O_2}{22/4L\ O_2}$$

$$\times\frac{2mol\ KClO_3}{3mol\ O_2}=0/5mol\ KClO_3$$

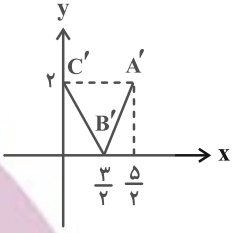
(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

حسابان ۲

۹۱- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

روش اول: نمودار تابع f را ابتدا سه واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y_1 = f(x+3)$ به دست آید، سپس طول نقاط آن را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار $y_2 = f(2x+3)$ به دست آید، سپس برای به دست آوردن نمودار تابع $y_3 = -f(-2x+3)$، نمودار y_2 را نسبت به مبدأ مختصات (قرینه نسبت به هر دو محور طول و عرض) قرینه می‌کنیم. در انتها نمودار y_3 را دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید.

روش دوم: نقاط $A(-2,0)$، $B(0,2)$ و $C(3,0)$ روی نمودار تابع f به نقاط $A'(\frac{5}{2},2)$، $B'(\frac{3}{2},0)$ و $C'(0,2)$ روی نمودار تابع g متناظر می‌شود. با وصل کردن نقاط A'، B' و C' نمودار g حاصل می‌شود.



(حسابان ۲- تابع؛ مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۲)

۹۲- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

ابتدا ضابطهٔ g را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=(x+3)^2 \xrightarrow{\text{طول نقاط نصف می‌شود.}} y=(2x+3)^2$$

$$\xrightarrow[\text{یک واحد به راست}]{\text{دو واحد به پایین}} g(x)=(2(x-1)+3)^2-2 \Rightarrow g(x)=(2x+1)^2-2$$

$$\xrightarrow{f(x)=g(x)} x^2+6x+9=4x^2+4x-1$$

$$\Rightarrow 3x^2-2x-10=0$$

معادلهٔ بالا دو جواب حقیقی دارد که مجموع آن‌ها برابر $S=-\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$ است. پس مجموع طول نقاط برخورد نمودارهای f و g برابر $\frac{2}{3}$ است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۹۳- **گزینهٔ «۳»** *(سعید علم‌پور)*

تابع f روی $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ اکیداً نزولی است.

$$f(3x+2)\le f(5x-6) \Rightarrow 3x+2\ge 5x-6 \Rightarrow 8\ge 2x \Rightarrow x\le 4 \quad (1)$$

هم‌چنین ورودی تابع f نباید برابر ۱- باشد پس داریم:

$$(3x+2)\in \mathbb{R}-\{-1\} \Rightarrow 3x+2\neq -1 \Rightarrow x\neq -1 \quad (2)$$

$$(5x-6)\in \mathbb{R}-\{-1\} \Rightarrow 5x-6\neq -1 \Rightarrow x\neq 1 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} \text{مجموعه جواب نامعادله} = (-\infty,4]-\{-1,1\}$$

این بازه سه عدد طبیعی ۲، ۳ و ۴ را شامل می‌شود.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

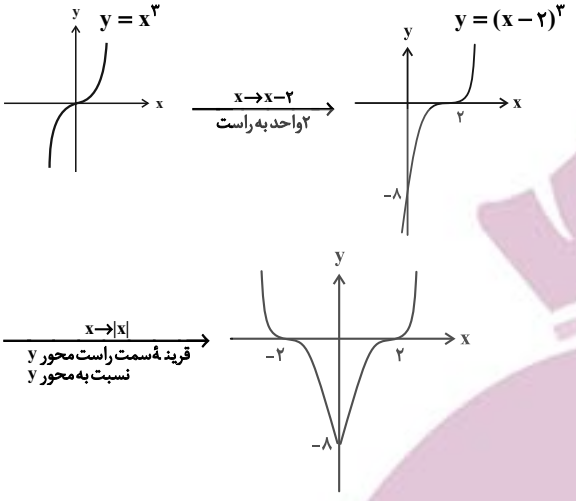
۹۴- **گزینهٔ «۳»** *(علی شهرابی)*

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=|x|^3-6x^2+12|x|-8$$

$$=|x|^3-6|x|^2+12|x|-8=(|x|-2)^3$$

سپس نمودار f را رسم می‌کنیم:



تابع نهایی، در بازهٔ $[0,-2)$ نزولی اکید است، پس حداکثر مقدار a برابر صفر است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۸)

۹۵- **گزینهٔ «۲»** *(کاظم ابلالی)*

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر $P(1)$ است. چون $P(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، $P(1)$ برابر صفر است:

$$P(1)=0 \Rightarrow a+3+b=0 \Rightarrow a=-3-b \quad (*)$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ برابر $Q(2)$ است. پس $Q(2)=21$ است.

اکنون رابطهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ را می‌نویسیم.

$$P(x)=(x-1)Q(x)+0$$

$$ax^4+3x^3+b=(x-1)Q(x)$$

در این تساوی به جای x مقدار ۲ را قرار می‌دهیم.

$$16a+24+b=Q(2) \Rightarrow 16a+24+b=21$$

$$\xrightarrow{(*)} 16(-3-b)+24+b=21 \Rightarrow b=-3$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۹۶- **گزینهٔ «۴»** *(علی شهرابی)*

باقی‌ماندهٔ $f(3x-2)$ بر x^2-x-2 برابر با $3x+1$ است:

$$f(3x-2)=(x-2)(x+1)q(x)+3x+1$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$x=۲$ و $x=-۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=۲: & f(۴)=۷ \\ x=-۱: & f(-۵)=-۲ \end{cases}$$

باقی‌مانده را $ax+b$ در نظر می‌گیریم.

$$f(x)=(x+۵)(x-۴)q'(x)+ax+b$$

با جای‌گذاری $x=۴$ و $x=-۵$ داریم:

$$\begin{cases} f(۴)=۴a+b=۷ \\ f(-۵)=-۵a+b=-۲ \end{cases} \Rightarrow a=۱\,,\ b=۳$$

$$\Rightarrow \text{باقی‌مانده} = x+۳$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۹۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمد خندان)*

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=a-b\cos(\frac{\pi}{۲}+cx)=a+b\sin cx$$

مقدار ماکزیمم تابع برابر ۳ و مقدار مینیمم برابر ۱- است:

$$\Rightarrow \begin{cases} a+|b|=۳ \\ a-|b|=-۱ \end{cases} \Rightarrow a=۱\,,\ |b|=۲$$

اما نمودار تابع در همسایگی راست $x=۰$ نزولی است. پس در کل ضریب sin باید منفی باشد، یعنی $bc<۰$ باشد، b را منفی و c را مثبت می‌گیریم.

$$\Rightarrow b=-۲$$

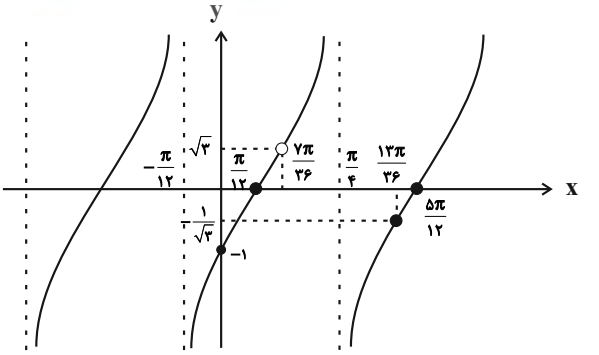
از طرفی $\frac{۳}{۴}$ دورهٔ تناوب برابر $\frac{۳\pi}{۱۰}$ شده است:

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}T=\frac{۳\pi}{۱۰} \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۵}=\frac{۲\pi}{|c|} \xrightarrow{c>۰} c=۵ \Rightarrow abc=-۱۰$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ مشابه مثال صفحهٔ ۲۸)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** *(شاهین پروازی)*

برای رسم نمودار تابع f، نمودار $y=\tan x$ را $\frac{\pi}{۴}$ واحد به راست منتقل می‌کنیم و سپس طول نقاط نمودار آن را بر ۳ تقسیم می‌کنیم. نمودار نهایی به صورت زیر است:



با توجه به نمودار قبل، اگر دامنه تابع $(\frac{۷\pi}{۳۶},\frac{۱۳\pi}{۳۶})-\{\frac{\pi}{۴}\}$ باشد، برد آن بازهٔ $(-\infty,-\frac{۱}{\sqrt{۳}}]\cup(\sqrt{۳},+\infty)$ است.

$$\Rightarrow R_f=\mathbb{R}-(-\frac{۱}{\sqrt{۳}},\sqrt{۳}] \Rightarrow ab=-۱$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۹۹- **گزینهٔ «۱»** *(حمید مام‌قادری)*

$$\sin x-\sqrt{۳}\cos x=۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x=۱$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{۳}\sin x-\sin\frac{\pi}{۳}\cos x=۱ \Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{۳})=۱$$

$$\Rightarrow x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$$

(حسابان ۲ - مثلثات؛ مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۴۴)

۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** *(جهانبخش نیکنام)*

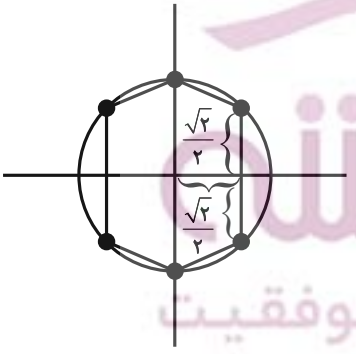
معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$۲(\frac{۱-\cos ۲x}{۲})+۱-\cos^۲ ۲x=۲ \Rightarrow \cos^۲ ۲x+\cos ۲x=۰$$

$$\Rightarrow \cos ۲x(\cos ۲x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۲x=۰ \Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} \\ \cos ۲x=-۱ \Rightarrow ۲x=۲k\pi+\pi \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \end{cases} ;k\in\mathbb{Z}$$

این جواب‌ها روی دایرهٔ مثلثاتی شکل زیر، مشخص شده‌اند:



شش ضلعی شکل بالا از دو ذوزنقه هم‌نهشت با قاعده‌های ۲ و $\sqrt{۲}$ و ارتفاع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ تشکیل شده است. پس داریم:

$$S=۲\left(\frac{(۲+\sqrt{۲})\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}\right)=۱+\sqrt{۲}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۳

۱۰۱- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$$A=\begin{bmatrix}1 & b+1\\ 4 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b & -2b\\ 2a & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b+2a(b+1) & -b+1\\ -4b+2ab & -7b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-b+1=0\Rightarrow b=1\\ -4b+2ab=0\xrightarrow{b=1}2a=4\Rightarrow a=2\end{cases}$$

پس ماتریس A به صورت $A=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & -7\end{bmatrix}$ به دست می‌آید. داریم:

$$A^n=\begin{bmatrix}7^n & 0\\ 0 & (-7)^n\end{bmatrix}$$

بنابراین توان‌های زوج در ماتریس A اسکالر هستند.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۲ و ۱۷ تا ۲۱)

۱۰۲- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

ابتدا درایه‌های ماتریس A و B را می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix}1^2-1 & 2-1\\ 2-1 & 2^2-1\\ 3-1 & 3-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1^2+1 & 1-2+2 & 1-3+2\\ 2+1 & 2^2+1 & 2-3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

ماتریس $B\times A$ را تشکیل می‌دهیم:

$$B\times A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 7 & 19\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس مورد نظر برابر ۳۲ می‌شود.

(هندسه ۳- مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

۱۰۳- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا طایفه‌تبریزی)*

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=4I=2^2I$$

$$A^{1404}=(A^2)^{702}=(2^2I)^{702}=2^{1404}I$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱۰۴- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

از رابطهٔ $A^2=A$ نتیجه می‌شود $A^n=A$، بنابراین داریم:

$$B+A^4=B+A=I$$

$$\Rightarrow B=I-A\Rightarrow B^2=(I-A)^2=I-2A+A=I-A=B$$

پس برای ماتریس B نیز رابطهٔ $B^n=B$ برقرار است:

$$A^{50}+B^{100}=A+B=A+(I-A)=I$$

توجه: با جای‌گذاری $A=\bar{O}$ و $A=I$ (که در شرایط سؤال صدق می‌کند) می‌توان گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ را رد کرد.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱۰۵- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

طبق فرض داریم:

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$$

$$\Rightarrow (A+B)^{-1}(A+B)=(A^{-1}+B^{-1})(A+B)$$

$$\Rightarrow I=\underbrace{A^{-1}A}_{I}+A^{-1}B+B^{-1}A+\underbrace{B^{-1}B}_{I}$$

$$\Rightarrow A^{-1}B+B^{-1}A=-I$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱۰۶- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

طبق فرض، B وارون A است، پس:

$$A\times B=I\Rightarrow\begin{bmatrix}۲a+۱ & ۴\\ b+۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۳-b & ۲-۳a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-۲a-۱+۱۲-۴b & \overbrace{۸a+۴+۸-۱۲a}^{۱۲-۴a}\\ \underbrace{-b-۱+۳-b}_{۲-۲b} & ۴b+۴+۲-۳a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱۲-۴a=۰\Rightarrow a=۳\\ ۲-۲b=۰\Rightarrow b=۱\end{cases}$$

در نتیجه: $A=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۷\times۱-۴\times۲=-۱$

(هندسه ۳- مشابه مسئلهٔ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۱۰۷- **گزینهٔ «۳»** (سراسری ریاضی - ۷۷)

با توجه به آنکه دو معادله، نشان‌دهندهٔ معادلات دو خط گذرنده از مبدأ مختصات هستند، پس هر دو خط یک جواب بدیهی $(۰,۰)$ را دارند. حال برای آنکه دستگاه جواب غیرصفر داشته باشد، باید دو خط بر یکدیگر منطبق باشند یا به عبارت دیگر دترمینان ماتریس ضرایب برابر با صفر باشد، پس داریم:

$$|A|=۰\Rightarrow\begin{vmatrix}a & b\\ a+b & c\end{vmatrix}=۰\Rightarrow ac-b(a+b)=۰$$

$$\Rightarrow ac-ab-b^۲=۰\Rightarrow b^۲=ac-ab$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

۱۰۸- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

با توجه به ماتریس $A^۳$ داریم:

$$|A^۳|=(۴)(۲)-(۰)a=۸\Rightarrow|A|^۳=۸\Rightarrow|A|=۲$$

$$\Rightarrow\big||A|A\big|=|A|^۲|A|=|A|^۳=۸$$

نکته: اگر $k\in\mathbb{N}$ و ماتریس مربعی A از مرتبهٔ n باشد، آن‌گاه:

$$|kA|=k^n|A|$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۱۰۹- **گزینهٔ «۱»** (مهرداد ملوندی)

دترمینان ماتریس A را نسبت به سطر اول (که تعداد صفر بیشتری دارد) بسط می‌دهیم:

$$|A|=-۳\begin{vmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۲\end{vmatrix}=-۳((-۱)(-۲)-۰\times۰)=-۶$$

در این صورت داریم:

$$|-A^۳|=(-۱)^۳|A^۳|=-|A|^۳=-(-۶)^۳=۲۱۶$$

(هندسه ۳- مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی)

۱۱۰- **گزینهٔ «۱»** (سراسری ریاضی - ۷۷)

نکته: چنانچه درایه‌های یک سطر (یا یک ستون) ماتریس مربعی A در عدد k ضرب شود، دترمینان ماتریس حاصل نیز k برابر می‌شود.

طبق نکتهٔ فوق داریم:

$$\begin{vmatrix}-۳a & ۱۸ & -۳\\ ۲ & -۲b & -۲\\ -۱ & -۴ & c\end{vmatrix}=(-۳)\begin{vmatrix}a & -۶ & ۱\\ ۲ & -۲b & -۲\\ -۱ & -۴ & c\end{vmatrix}$$

$$=(-۳)(-۲)\begin{vmatrix}a & ۳ & ۱\\ ۲ & b & -۲\\ -۱ & ۲ & c\end{vmatrix}=(-۳)(-۲)(۲)=۱۲$$

(هندسه ۳- مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۳۱)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ریاضیات گسسته

۱۱۱- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

اثبات گزینهٔ «۴»:

مربع کامل: $۴n(n+۱)+۱=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲$

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

گزینهٔ «۱»: $۲k=۱۰=۵+۳+۲$

گزینهٔ «۲»: عدد ۲ را نمی‌توان به صورت $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ نوشت.

گزینهٔ «۳»: $(\sqrt{۲}+۱)-(\sqrt{۲}-۱)=۲\in\mathbb{Q}$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲ و ۳)

۱۱۲- **گزینهٔ «۲»** *(حمیدرضا امیری)*

$$a^۲\mid bc\xrightarrow{\times a}a^۳\mid abc\quad(۱)$$

$$ac\mid b^۲\xrightarrow{\times b}abc\mid b^۳\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow a^۳\mid b^۳\Rightarrow a\mid b$$

$$\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}}a^۲\mid b^۲\xrightarrow{b^۲\mid b^۳}a^۲\mid b^۳$$

به عنوان مثال نقض برای سایر گزینه‌ها، فرض کنید $a=۸$، $b=۱۶$ **و** $c=۴$ **باشد.**

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

داریم: $\begin{cases}۸m=۲^۳m\\ ۱۲m^۳=۲^۲\times۳^۱m^۳\end{cases}\Rightarrow(۸m\ ,\ ۱۲m^۳)=۲^۲m=۴m$

توجه داشته باشید که طبق فرض، m عددی فرد است و عامل ۲ ندارد و در محاسبهٔ ب. م. م بالا، عامل ۲ اضافی تولید نمی‌کند.

در نتیجه $[۴m\ ,\ ۱۸m^۲]$ مطلوب است که حاصل آن به صورت زیر می‌شود:

$$[۲^۲m\ ,\ ۲\times۳^۲m^۲]=۲^۲\times۳^۲\times m^۲=۳۶m^۲$$

(ریاضیات گسسته- مشابه تمرین ۱۶ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

۱۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(جواد حاتمی)*

طبق قضیهٔ تقسیم، $a=bq+r$ **است که** $۰\le r<b$ **می‌باشد. بنابراین داریم:**

$$۸۴=bq+۴\Rightarrow ۸۰=bq\Rightarrow q=\frac{۸۰}{b}\qquad(b>۴)$$

یعنی b یکی از مقسوم‌علیه‌های ۸۰ می‌باشد که از ۴ بزرگ‌تر است.

$$b=۵\ ,\ ۸\ ,\ ۱۰\ ,\ ۱۶\ ,\ ۲۰\ ,\ ۴۰\ ,\ ۸۰$$

پس برای b، ۷ عدد طبیعی وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۱۱۵- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

رقم یکان یک عدد طبیعی، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن عدد بر ۱۰ است که معادل با همنهشتی به پیمانهٔ ۱۰ می‌باشد. طبق فرض داریم:

$$۳a-۲b\overset{۱۰}{\equiv}۲a+b\Rightarrow a\overset{۱۰}{\equiv}۳b$$

داریم:

$$۶a+۲b\overset{۱۰}{\equiv}۱۸b+۲b\overset{۱۰}{\equiv}۲۰b\overset{۱۰}{\equiv}۰$$

پس رقم یکان این عدد برابر صفر است.

(ریاضیات گسسته- مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی)

۱۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(جواد حاتمی)*

اگر $n\in\mathbb{N}$ **و** $a,b\in\mathbb{Z}$ **باشند، آنگاه رابطهٔ** $(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$ **برقرار است.**

اگر به‌جای a و b، اعداد ۴ و ۵ و به جای n، عدد ۱۰۰ را قرار دهیم، داریم:

$$(۴+۵)^{۱۰۰}\overset{۲۰}{\equiv}۴^{۱۰۰}+۵^{۱۰۰}$$

$$۹^{۱۰۰}\overset{۲۰}{\equiv}۴^{۱۰۰}+۵^{۱۰۰}\Rightarrow ۴^{۱۰۰}+۵^{۱۰۰}-۹^{۱۰۰}\overset{۲۰}{\equiv}۰$$

(ریاضیات گسسته- مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۹)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۱۱۷- **گزینهٔ «۴»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

عدد مورد نظر مضرب ۱۱ است، بنابراین داریم:

$$\overline{ababab}\overset{11}{\equiv}0 \Rightarrow b-a+b-a+b-a\overset{11}{\equiv}0 \Rightarrow 3b-2a\overset{11}{\equiv}5$$

چون به دنبال بزرگ‌ترین عدد شش‌رقمی با فرم داده شده هستیم، پس a را برابر ۹ در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$3b-18\overset{11}{\equiv}5 \Rightarrow 3b\overset{11}{\equiv}23\overset{11}{\equiv}12 \xrightarrow[(3,11)=1]{\times 3} b\overset{11}{\equiv}4$$

بنابراین تنها مقدار قابل قبول برای b، برابر ۴ بوده و عدد موردنظر به صورت ۹۴۹۴۵۴ خواهد بود که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۹، برابر است با:

$$949454\overset{9}{\equiv}9+4+9+4+5+4\overset{9}{\equiv}27\overset{9}{\equiv}8$$

توجه: (قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۱۱) برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد بر ۱۱، کافیست ارقام آن عدد را از سمت راست جدا کرده و به صورت یک در میان، مثبت و منفی در نظر گرفته و عدد حاصل را بر ۱۱ تقسیم کنیم.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱۱۸- **گزینهٔ «۴»** (افشین خاصه‌خان)

عددی مضرب ۴۴ است که مضرب ۴ و ۱۱ باشد.

$$\overline{4a8b6}\overset{4}{\equiv}0 \Rightarrow \overline{b6}\overset{4}{\equiv}0 \Rightarrow b=1,3,5,7,9$$

$$\overline{4a8b6}\overset{11}{\equiv}0 \Rightarrow 6-b+8-a+4\overset{11}{\equiv}0 \Rightarrow a+b\overset{11}{\equiv}18\overset{11}{\equiv}7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a+b=18 \end{cases}$$

$$b=1 \xrightarrow{a+b=7} a=6 \Rightarrow a\times b=6$$

$$b=3 \xrightarrow{a+b=7} a=4 \Rightarrow a\times b=12$$

$$b=5 \xrightarrow{a+b=7} a=2 \Rightarrow a\times b=10$$

$$b=7 \xrightarrow{a+b=7} a=0 \Rightarrow a\times b=0$$

$$b=9 \xrightarrow{a+b=18} a=9 \Rightarrow a\times b=81$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار $a\times b$، برابر ۸۱ است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱۱۹- **گزینهٔ «۳»** (نازر حاجی‌زاده)

اگر $(a,b)=d$ باشد، آنگاه با توجه به این که معادلهٔ $ax+by=6$ در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است، پس $d\mid 6$. در نتیجه داریم:

گزینهٔ «۱»: $d\mid 6$ و $6\mid 18$، پس $d\mid 18$ و در نتیجه معادلهٔ $ax+by=18$ قطعاً در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است.

گزینهٔ «۲»: $d=(a,b)$ است، پس $d\mid b$ و در نتیجه معادلهٔ $ax+by=b$ قطعاً در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است.

گزینهٔ «۴»: $d\mid a$، پس $d\mid 5a$ و در نتیجه معادلهٔ $ax+by=5a$ قطعاً در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است.

اما وجود جواب برای معادلهٔ $ax+by=9$ قطعی نیست.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۳ و ۲۶ تا ۳۰)

۱۲۰- **گزینهٔ «۲»** (افشین خاصه‌خان)

$$3x-2y=15 \Rightarrow 3x\overset{2}{\equiv}15 \Rightarrow x\overset{2}{\equiv}1 \Rightarrow x=2k+1 (k\in\mathbb{Z})$$

$$3(2k+1)-2y=15 \Rightarrow 2y=6k-12$$

$$\Rightarrow y=3k-6$$

$$\begin{cases} x\geq 0 \Rightarrow 2k+1\geq 0 \Rightarrow k\geq -\frac{1}{2} \\ y\geq 0 \Rightarrow 3k-6\geq 0 \Rightarrow k\geq 2 \end{cases} \Rightarrow k\in\{2,3,4,\ldots\}$$

مجموع جواب‌ها باید دو رقمی باشد، پس:

$$x+y=2k+1+3k-6=5k-5$$

$$10\leq x+y<100 \Rightarrow 10\leq 5k-5<100 \Rightarrow 15\leq 5k<105$$

$$\Rightarrow 3\leq k<21 \Rightarrow k=3,4,\ldots,20$$

۱۸ مقدار برای k مطلوب است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

فیزیک ۳

۱۲۱- **گزینهٔ «۴»** *(بهنام رستمی)*

با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط داریم: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۲۵۰-۱۵۰}{۲۰۰}=۰/۵\frac{m}{s}$

این عدد (سرعت متوسط) یعنی این که شخص به‌طور متوسط در هر ثانیه $۰/۵m$ به مقصد خود نزدیک‌تر شده است.

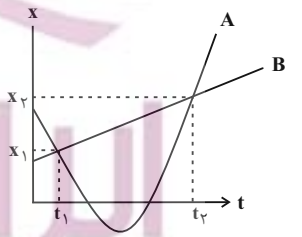
(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

(مشابه مثال ۱-۱ صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

۱۲۲- **گزینهٔ «۲»** *(بابک اسلامی)*

چون متحرک B با سرعت ثابت در مسیری مستقیم در حال حرکت است، بنابراین سرعت متوسط متحرک B با سرعت لحظه‌ای آن در هر بازهٔ زمانی دلخواه یکسان است. برای محاسبهٔ سرعت متحرک B داریم:

$$v_B=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱} \quad (۱)$$



از طرفی $x_۱$ و $x_۲$ در لحظه‌هایی رخ می‌دهد که دو متحرک A (که با شتاب ثابت در حال حرکت است) و B (که با سرعت ثابت در حال حرکت است. در یک مکان قرار دارند. بنابراین با توجه به معادلهٔ حرکت متحرک A (حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم)، داریم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t=t_۱} x_۱=\frac{۱}{۲}at_۱^۲+v_۰t_۱+x_۰ \\ \xrightarrow{t=t_۲} x_۲=\frac{۱}{۲}at_۲^۲+v_۰t_۲+x_۰ \end{cases} \quad (۲)$$

بنابراین از (۱) و (۲) داریم:

$$v_B=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{(\frac{۱}{۲}at_۲^۲+v_۰t_۲+x_۰)-(\frac{۱}{۲}at_۱^۲+v_۰t_۱+x_۰)}{t_۲-t_۱}$$

$$\Rightarrow v_B=\frac{\frac{۱}{۲}a(t_۲-t_۱)(t_۲+t_۱)+v_۰(t_۲-t_۱)}{t_۲-t_۱}$$

$$\Rightarrow v_B=\frac{a(t_۲+t_۱)+۲v_۰}{۲}$$

$$\Rightarrow v_B=\frac{(at_۲+v_۰)+(at_۱+v_۰)}{۲} \Rightarrow v_B=\frac{v_A(t_۲)+v_A(t_۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow v_B=\frac{۷+(-۵)}{۲}=۱\frac{m}{s} \Rightarrow (v_{av})_B=v_B=۱\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۱۲۳- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

شتاب در هر بازهٔ زمانی ثابت است، بنابراین در بازهٔ زمانی $t_۰=۰s$ تا $t_۱=۸s$ داریم:

$$v_۱=a_۱t_۱+v_۰ \Rightarrow v_۱=(-۱)\times ۸+۰ \Rightarrow v_۱=-۸\frac{m}{s}$$

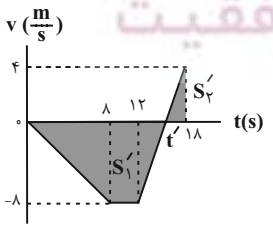
در بازهٔ زمانی $t_۱=۸s$ تا $t_۲=۱۲s$ سرعت متحرک ثابت است و بنابراین:

$$v_۲=v_۱=-۸\frac{m}{s}$$

در بازهٔ زمانی $t_۲=۱۲s$ تا $t_۳=۱۸s$ داریم:

$$v_۳=a_۳t_۳+v_۲ \Rightarrow v_۳=۲\times ۶+(-۸) \Rightarrow v_۳=۴\frac{m}{s}$$

درنتیجه نمودار سرعت – زمان متحرک مطابق شکل زیر است:



با توجه به نمودار مشخص است که متحرک در بازهٔ ۱۲ ثانیه تا ۱۸ ثانیه یک‌بار در لحظهٔ t' تغییر جهت می‌دهد.

$$v'=a_۳(t'-۱۲)+v_۲ \xrightarrow{v'=۰} ۰=۲(t'-۱۲)-۸ \Rightarrow t'=۱۶s$$

ایران نوشه توشه‌ای برای موفقیت

می‌دانیم که مساحت محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان برابر با جابه‌جایی است و حاصل جمع قدر مطلق جابه‌جایی‌ها مسافت را می‌دهد.

بنابراین داریم:

$$\ell = S'_1 + S'_2 = \frac{16+(12-8)}{2}\times 8 + \frac{4\times(18-16)}{2} = 80+4 = 84m$$

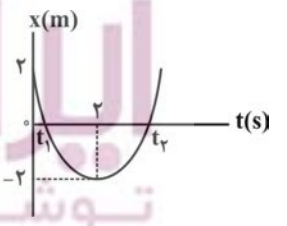
حال تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم: $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{84}{18} = \frac{14}{3}\frac{m}{s}$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۲۴- **گزینهٔ «۴»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

چون نمودار مکان – زمان به‌صورت سهمی است، بنابراین شتاب حرکت ثابت است. برای به‌دست آوردن معادلهٔ مکان – زمان در حرکت با شتاب ثابت، باید سه کمیت a، v_0 و x_0 را محاسبه کنیم و در رابطهٔ $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ جایگذاری کنیم.

مطابق شکل، متحرک در لحظات t_1 و t_2 از مبدأ مکان می‌گذرد و چون مسافت طی شده توسط متحرک در این بازهٔ زمانی $4m$ می‌باشد، با توجه به تقارن سهمی، مکان متحرک در لحظهٔ $t = 2s$، برابر $x_2 = -2m$ است. داریم:



در بازهٔ زمانی صفر تا $2s$ داریم: $\Delta x = \frac{v_0 + v_2}{2}\times\Delta t$

$$\Rightarrow -4 = \frac{v_0+0}{2}\times 2 \Rightarrow v_0 = -4\frac{m}{s}$$

اکنون برای محاسبهٔ شتاب در بازهٔ زمانی صفر تا $2s$ داریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_0}{2} = \frac{0-(-4)}{2} \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$$

در نهایت با نوشتن معادلهٔ حرکت داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x = t^2 - 4t + 2$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۲۵- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا گونه)*

اگر کل زمان سقوط گلوله را t فرض کنیم، با درنظر گرفتن محل رها کردن گلوله به عنوان مبدأ مکان و با استفاده از معادلهٔ حرکت در سقوط آزاد برای لحظه‌های $t_1 = 1s$، $t_2 = (t-1)s$ و $t_3 = t$ داریم:

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\xrightarrow{t_1=1s} y_1 = \frac{1}{2}\times 10\times 1^2 = 5m$$

$$\xrightarrow{t_2=(t-1)s} y_2 = \frac{1}{2}\times 10\times(t-1)^2 \Rightarrow y_2 = 5t^2 - 10t + 5$$

$$\xrightarrow{t_3=t} y_3 = \frac{1}{2}\times 10\times t^2 \Rightarrow y_3 = 5t^2$$

طبق فرض صورت سؤال داریم:

$$y_3 - y_2 = 7y_1 \Rightarrow 5t^2 - (5t^2 - 10t + 5) = 7\times 5$$

$$\Rightarrow 10t - 5 = 35 \Rightarrow t = 4s$$

بنابراین مدت زمان کل حرکت برابر با $4s$ است. در نتیجه ارتفاع h برابر است با: $h = y_3 = \frac{1}{2}\times 10\times(4)^2 = 80m$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا گونه)*

بر اساس قانون اول نیوتون، یک جسم حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود را حفظ می‌کند، مگر آن‌که نیروی خالص غیر صفری به آن وارد شود. به این خاصیت اجسام لختی گفته می‌شود. بنابراین هنگامی‌که سریعاً مقوا را حرکت می‌دهیم، سکه تمایل دارد حالت سکون خود را حفظ کند و بنابراین داخل لیوان می‌افتد ولی هنگامی‌که به آرامی مقوا را حرکت می‌دهیم، سکه به همراه مقوا حرکت خواهد کرد.

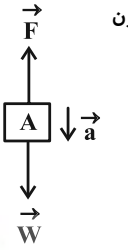
(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

(مشابه پرسش ۳-۲ صفحهٔ ۳۲ کتاب درسی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۷- **گزینهٔ «۳»** *(جلیل کلی)*

با توجه به اینکه جهت شتاب آسانسور به‌طرف پایین است، عددی که باسکول نمایش می‌دهد، کوچک‌تر از اندازهٔ وزن (W) است. یعنی $F < W$.



$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \Rightarrow W - F = ma$$

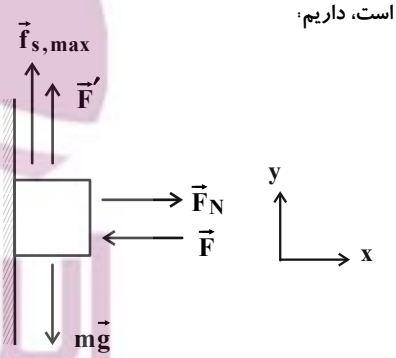
$$\Rightarrow F = W - ma \Rightarrow F < W$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۹)

(مشابه پرسش ۲-۶ صفحهٔ ۳۹ کتاب درسی)

۱۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(حسین مخرومی)*

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و با توجه به اینکه جسم ساکن است، داریم:



$$F_{net,x} = 0 \Rightarrow F_N - F = 0 \Rightarrow F_N = F$$

$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F' + f_{s,max} - W = 0$$

$$\Rightarrow f_{s,max} = W - F' = mg - F' = 40 - 10 = 30N$$

از طرفی داریم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \Rightarrow 30 = 0/6 \times F_N \Rightarrow F_N = 50N$$

پس نتیجه می‌گیریم: $F = F_N = 50N$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۴۳)

۱۲۹- **گزینهٔ «۴»** *(پوریا علاقه‌مند)*

موارد پ و ت نادرست‌اند.

درست است که در نقطه اوج سرعت صفر است ولی نیروی وزن در تمام مسیر حرکت به جسم وارد می‌شود، پس نیروی وارد بر گلوله صفر نیست.

(نادرستی پ)

هر چه لختی جسم کمتر باشد، به حرکت درآوردن آن راحت‌تر است.

(نادرستی ت)

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۱۳۰- **گزینهٔ «۴»** *(پوریا علاقه‌مند)*

در حالت اول داریم:

$$m_1 = m\ ,\ a_1 = a\ ,\ F_1 = 21N\ ,\ f_{k_1} = f_k$$

$$F_1 - f_{k_1} = m_1 a_1 \Rightarrow 21 - f_k = ma \qquad (1)$$

در حالت دوم داریم:

$$f_k = \mu_k mg \xrightarrow{m_2 = 4m_1} f_{k_2} = 4f_{k_1} = 4f_k$$

$$m_2 = 4m\ ,\ a_2 = \frac{a}{2}\ ,\ F_2 = 63N\ ,\ f_{k_2} = 4f_k$$

$$F_2 - f_{k_2} = m_2 a_2 \Rightarrow 63 - 4f_k = 4m\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow 63 - 4f_k = 2ma \qquad (2)$$

با حل هم‌زمان معادله‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\Rightarrow f_k = \frac{21}{2}N \Rightarrow f_{k_2} = 4f_k = 42N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۴۳)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۳

۱۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمد کوهستانیان)*

گزینهٔ «۱»: شیمی‌دان‌ها از جمله آرنیوس، قبل از توصیف علمی اسیدها و بازها، با برخی ویژگی‌ها و واکنش‌های بین این مواد آشنا بودند.

گزینهٔ «۳»: نادرست است زیرا سرکه یک اسید است و در محلول‌های اسیدی $\frac{[H_3O^+]}{[OH^-]} > 1$ یا $\frac{[OH^-]}{[H_3O^+]} < 1$ می‌باشد.

گزینهٔ «۴»: اسیدهای چرب، زنجیرهای بلندکربنی هستند که به گروه‌های کربوکسیل انتهایی $(COOH)$ ختم می‌شوند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳ تا ۵ و ۱۴ تا ۱۶)

۱۳۲- **گزینهٔ «۴»** *(محمدحسن محمدزاده‌مقدم)*

از انحلال ترکیب‌های $NaOH$ و NH_3 در آب، محلول‌های بازی پدید می‌آید.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

(مطابق با هم بیندیشیم صفحه‌های ۱۴ و ۱۵ کتاب درسی)

۱۳۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمد کوهستانیان)*

موادی مانند هیدروکلریک اسید (جوهرنمک)، سدیم هیدروکسید (سود) و سفید کننده‌ها از جمله پاک‌کننده‌هایی هستند که از نظر شیمیایی فعال هستند و همچنین خاصیت خورندگی دارند. اما صابون‌ها و پاک کننده‌های غیرصابونی خاصیت خورندگی ندارند.

(شیمی ۳- صفحهٔ ۱۲)

۱۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمد وزیری)*

این عنصر یک نافلز $(_{16}S)$ است و اکسیدهای نافلزی اسید آرنیوس محسوب می‌شوند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳ تا ۵ و ۱۴ تا ۱۶)

۱۳۵- **گزینهٔ «۲»** *(مبینا شراختی‌پور)*

$$2RCOONa(aq) + CaCl_2(aq) \rightarrow (RCOO)_2Ca(s) + 2NaCl(aq)$$

$$?gCaCl_2 = 292/5gNaCl \times \frac{1molNaCl}{58/5gNaCl} \times \frac{1molCaCl_2}{2molNaCl}$$

$$\times \frac{111gCaCl_2}{1molCaCl_2} = 277/5gCaCl_2$$

$$ppm\ \text{غلظت} = \frac{(g)\ \text{جرم حل شونده}}{(g)\ \text{جرم محلول}} \times 10^6$$

$$= \frac{277/5gCaCl_2}{3m^3 \times \frac{1000L}{1m^3} \times \frac{1000mL}{1L} \times \frac{1g}{1mL}} \times 10^6 = 92/5ppm$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۸ و ۹)

(مطابق کاوش کنید صفحه‌های ۸ و ۹ کتاب درسی)

۱۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(محمدحسن محمدزاده‌مقدم)*

گزینهٔ «۱»: نادرست. از واکنش فلز و اسید، نمک فلز و گاز هیدروژن تولید می‌شود. به عنوان مثال:

$$Mg(s) + 2HCl(aq) \longrightarrow MgCl_2(aq) + H_2(g)$$

گزینهٔ «۲»: با توجه به شکل، تعداد حباب‌های تشکیل شده در ظرف (۱) بیشتر بوده که این به معنای بیشتر بودن غلظت یون هیدرونیوم در محلول (۱) است. در شرایط یکسان (غلظت اولیه اسید و دما) ثابت یونش اسید موجود در ظرف (۱) بیشتر است.

گزینهٔ «۳»: درست. قبل از انجام واکنش، غلظت یون هیدرونیوم در ظرف (۱) بیشتر از ظرف (۲) بوده و pH آن کمتر است.

گزینهٔ «۴»: نادرست. پیش از انجام واکنش، غلظت یون هیدرونیوم در ظرف (۱) بیشتر از ظرف (۲) است. بنابراین، غلظت یون هیدروکسید آن کمتر است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۷)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳۷- **گزینهٔ «۳»** *(جواد کتابی)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: مقدار ثابت یونش اسیدها تنها به عامل دما وابسته است و با افزایش غلظت در دمای ثابت، تغییر نمی‌کند.

گزینهٔ «۲»: سرعت تولید فراورده‌ها و سرعت مصرف واکنش‌دهنده‌ها تا لحظهٔ رسیدن به تعادل کاهش می‌یابد.

گزینهٔ «۴»: غلظت تعادلی گونه‌های موجود در محلول ثابت (نه برابر) می‌ماند زیرا سرعت تولید هرگونه با سرعت مصرف آن یکسان است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۹ تا ۲۲)

۱۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمدحسن محمدزاده مقدم)*

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$۲HA(aq)+Ba(OH)_۲(aq)\rightarrow BaA_۲(aq)+۲H_۲O(l)$$

حال غلظت $Ba(OH)_۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$pH=۱۳\rightarrow [H^+]=۱۰^{-۱۳}mol.L^{-۱}$$

$$\rightarrow [H^+]\times[OH^-]=۱۰^{-۱۴}\rightarrow [OH^-]=۰/۱mol.L^{-۱}$$

به ازای انحلال هر مول باریم هیدروکسید دو مول یون هیدروکسید تولید می‌شود. بنابراین:

$$[Ba(OH)_۲]=\frac{[OH^-]}{۲}=\frac{۰/۱}{۲}=۵\times۱۰^{-۲}mol.L^{-۱}$$

حال، شمار مول HA مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?molHA=۲L\,\text{محلول}\times\frac{۵\times۱۰^{-۲}molBa(OH)_۲}{۱L\,\text{محلول}}\times\frac{۲molHA}{۱molBa(OH)_۲}=۰/۲molHA$$

$$\Rightarrow M_{HA}=\frac{۰/۲}{۲}=۰/۱mol.L^{-۱}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶ و ۳۰ تا ۳۲)

۱۳۹- **گزینهٔ «۲»** *(فاضل قهرمانی‌فرد)*

$$\frac{[OH^-]}{[H_۳O^+]}=۱۰^۸\Rightarrow [OH^-]=۱۰^۸[H_۳O^+]$$

$$[H_۳O^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴}\xrightarrow{[OH^-]=۱۰^۸[H_۳O^+]}[H_۳O^+]^۲\times۱۰^۸$$

$$=۱۰^{-۱۴}\Rightarrow [H_۳O^+]=۱۰^{-۱۱}$$

$$pH=-\log۱۰^{-۱۱}=۱۱$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

(مطابق با هم بیندیشیم صفحه‌های ۲۶ و ۲۷ کتاب درسی)

۱۴۰- **گزینهٔ «۱»** *(حسن لشکری)*

$$\theta=۲۵^\circ C\rightarrow [H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴}\Rightarrow [OH^-]=\frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]}$$

$$۹\times۱۰^۲=\frac{[H^+]}{[OH^-]}\Rightarrow ۹\times۱۰^۲=\frac{[H^+]}{\frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]}}\Rightarrow [H^+]=۳\times۱۰^{-۶}mol.L^{-۱}$$

$$HA\rightarrow \text{اسید ضعیف}:[H^+]=M.\alpha\Rightarrow ۳\times۱۰^{-۶}=M\times۰/۰۲$$

$$\Rightarrow M=۱/۵\times۱۰^{-۴}mol.L^{-۱}$$

$$NaHCO_۳+HA\rightarrow NaA+CO_۲+H_۲O$$

$$۱/۵\times۱۰^{-۴}\frac{mol}{L}\times۰/۲L=۳\times۱۰^{-۵}molHA$$

$$?mgNaHCO_۳=۳\times۱۰^{-۵}molHA$$

$$\times\frac{۱molNaHCO_۳}{۱molHA}\times\frac{۸۴gNaHCO_۳}{۱molNaHCO_۳}\times\frac{۱۰۰g\,\text{کل}}{۸۰g\,\text{خالص}}\times\frac{۱۰۰۰mg}{۱g}$$
$$=۳/۱۵mg$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی

دفترچه پاسخ

آزمون هوش و استعداد

(دورهٔ دوم)

مهر

تعداد کل سؤالات آزمون: ۲۰
زمان پاسخ‌گویی: ۳۰ دقیقه

گروه فنی تولید

مسئول آزمون	حمید لنجان‌زاده اصفهانی
مسئول دفترچه	حامد کریمی
ویراستار	پوریا کریمی جبلی، مهدی میر
مدیر گروه مستندسازی	محیا اصغری
مسئول درس مستندسازی	علیرضا همایون‌خواه
طراحان	حمید اصفهانی، فاطمه راسخ، حمید گنجی، حامد کریمی، فرزاد شیرمحمدلی
حروف‌چینی و صفحه‌آرایی	معصومه روحانیان
ناظر چاپ	حمید عباسی

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

استعدادتحلیلی

۲۵۱- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

نویسنده، مردم عامی و ساده‌دل را همچون گلهٔ گوباره می‌داند. واژهٔ گلّه نیز نشان می‌دهد که با موجوداتی سروکار داریم که گلّه‌ای زندگی می‌کنند و ویژگی مهمّ آنان، بلاهت آنان است. واژهٔ «گوباره» معنای «گاو» دارد.

(درک متن، هوش کلامی)

۲۵۲- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

در متن می‌خوانیم «صاحبان قدرت و حکّام جبّاری که . . . مردم تحت امر آنها» که یعنی مردم تحت امر این پادشاهان.

(درک متن، هوش کلامی)

۲۵۳- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

متن سراسر به بررسی برخی عوامل تقدیرگرایی در دنیای اسلام می‌پردازد و حکّام، برخی علما و مردم ساده‌دل را نام می‌برد.

(درک متن، قرابت معنایی، هوش کلامی)

۲۵۴- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

متن باید با بیتی از حافظ تمام شود که در بیان و در ستایش اختیار باشد، نه جبر. بیت گزینهٔ پاسخ است که در ستایش اختیار است و دیگر ابیات ابیاتی جبری است.

(درک متن، هوش کلامی)

۲۵۵- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

شکل درست بیت: قضا کشتی آنجا که خواهد برد / و گر ناخدا جامه بر تن درد

(ترتیب کلمات، هوش کلامی)

۲۵۶- گزینهٔ «۲» *(کتاب استعدادتحلیلی، هوش کلامی)*

موذی: آزاردهنده، نیرنگ‌کار

(معنای واژگان، هوش کلامی)

۲۵۷- گزینهٔ «۱» *(کتاب استعدادتحلیلی، هوش کلامی)*

قُبور: جِ قبر،گورها

(معنای واژگان، هوش کلامی)

۲۵۸- گزینهٔ «۲» *(حامد کریمی)*

تقی در طبقهٔ بالای تخت است و پتوی طبقهٔ پایین او قرمز است. پتوی آبی و سبز به یک تخت متعلقند، پس تقی پتوی آبی و سبز ندارد. رنگ پتوی او قرمز هم که نیست، پس زرد است.

(حقیقت‌یابی، هوش منطقی ریاضی)

۲۵۹- گزینهٔ «۲» *(حامد کریمی)*

اگر پتوی تخت بالای اسحاق سبز باشد، پتوی خود اسحاق آبی است. شخص طبقهٔ بالای اسحاق هم قطعاً ابراهیم نیست پس یا اسماعیل است یا تقی. حال هشت حالت داریم که فقط ۲ تا مطلوب است، یعنی احتمال $\frac{۲}{۸}$ یا $\frac{۱}{۴}$ است:

تقی قرمز / ابراهیم قرمز تقی زرد / ابراهیم زرد	اسماعیل سبز
ابراهیم زرد / تقی زرد ابراهیم قرمز / تقی قرمز	اسحاق آبی

اسماعیل قرمز / ابراهیم زرد اسماعیل زرد / ابراهیم قرمز	تقی سبز
ابراهیم زرد / اسماعیل قرمز ابراهیم قرمز / اسماعیل زرد	اسحاق آبی

(حقیقت‌یابی، هوش منطقی ریاضی)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۶۰- گزینهٔ «۱» *(فرزاد شیرمحمدلی)*

اگر هفده سال پیش سن برادرها ○ و □بوده باشد، داریم:

$$\begin{cases} ○+□=۱۱ \\ ○\times□=۲۸ \end{cases}$$

می‌توان معادله را به‌صورت کلامی بیان کرد و گفت کدام دو عدد هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۸ و حاصل‌جمع آن‌ها ۱۱ است. اما برای حل ریاضی سؤال، از معادلهٔ بالا داریم:

$$○=۱۱-□$$

با جایگذاری در معادلهٔ پایین: $(۱۱-□)\times□=۲۸$

$$\Rightarrow □^۲-۱۱□+۲۸=۰$$

$$\Rightarrow (□-۴)\times(□-۷)=۰ \Rightarrow □,○=۴,۷$$

اختلاف سن این دو برادر، $۳=۴-۷$ سال است.

(ترکیبی، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۱- گزینهٔ «۱» *(فاطمه راسخ)*

عدد باید فرد باشد تا در تقسیم بر چهار، باقی‌ماندهٔ یک یا سه داشته باشد. پس یکان باید ۳، ۵ یا ۷ باشد. اما عدد مضرب پنج هم نیست، پس یکان یا ۳ است یا ۷. همچنین عدد بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ است. پس صدگان ۴، ۵ یا ۶ است. حال با توجه به این یکان و صدگان‌ها، دهگان را باید به شکلی قرار دهیم که عدد مضرب سه باشد، یعنی مجموع ارقام آن بر ۳ بخشپذیر باشد:

صدگان	دهگان	یکان
۴	۳	$\rightarrow ۴۵۳,۴۸۳$
۴	۷	$\rightarrow ۴۴۷,۴۷۷$
۵	۳	$\rightarrow ۵۴۳,۵۷۳$
۵	۷	$\rightarrow ۵۳۷,۵۶۷$
۶	۳	$\rightarrow ۶۳۳,۶۶۳$
۶	۷	$\rightarrow ۶۵۷,۶۸۷$

(بخشپذیری، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۲- گزینهٔ «۴» *(حمید کنعی)*

اگر برای پر کردنِ مخزن، شیر «الف» به ○ دقیقه زمان نیاز داشته باشد، شیر «ب» به $○-۲$ دقیقه و شیر «ج» به $○+۲$ دقیقه زمان نیاز دارند.

پس این سه شیر در هر دقیقه به‌ترتیب $\frac{۱}{○}$، $\frac{۱}{○-۲}$ و $\frac{۱}{○+۲}$ را از مخزن پُر می‌کنند. پس دو شیر «ب» و «ج» در هر دقیقه به اندازهٔ کسر زیر را از مخزن پر می‌کنند:

$$\frac{۱}{○+۲}+\frac{۱}{○-۲}=\frac{(○+۲)+(○-۲)}{(○+۲)\times(○-۲)}=\frac{۲○}{○^۲-۴}$$

هر دقیقه ۶۰ ثانیه است و دو شیر «ب» و «ج» که در ۲۲۵ ثانیه، معادل $\frac{۲۲۵}{۶۰}=\frac{۱۵}{۴}$ دقیقه کل مخزن را پر می‌کند، در هر دقیقه $\frac{۴}{۱۵}$ از مخزن را پر می‌کنند. پس داریم:

$$\frac{۲○}{○^۲-۴}=\frac{۴}{۱۵} \Rightarrow \frac{○}{○^۲-۴}=\frac{۲}{۱۵} \Rightarrow ۲○^۲-۸=۱۵○$$

$$\Rightarrow ۲○^۲-۱۵○-۸=۰ \Rightarrow (○-۸)\times(۲○+۱)=۰$$

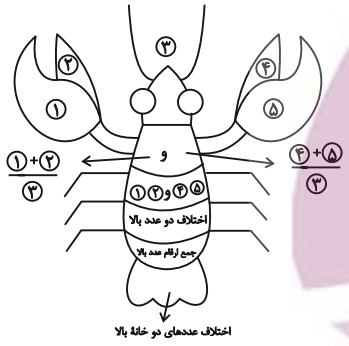
$$\Rightarrow \begin{cases} ○=-\frac{۱}{۲} \rightarrow \text{پذیرفتنی نیست} \\ ○=۸ \end{cases}$$

پس شیر «الف» در هر دقیقه، $\frac{۱}{۸}$ را از مخزن پر می‌کند. این یعنی شیر «الف» کل مخزن را در ۸ دقیقه پُر می‌کند.

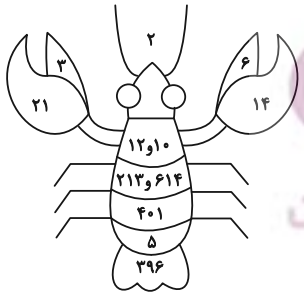
(کسر و تناسب، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۳- گزینهٔ «۱» *(حمید کنعی)*

ابتدا الگو را کشف می‌کنیم:



در این سؤال داریم:



پس: $○=۴۰۱$

(الگوهای عددی، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۴- گزینهٔ «۱» *(حمید کنعی)*

طبق پاسخ قبل $۴۰۱=۳۹۶+۵=$ ■ $+$ □

(الگوهای عددی، هوش منطقی ریاضی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶۵- گزینهٔ «۳» *(حمید کنبی)*

طبق پاسخ قبل، عددهای △، ▲ و ▽ برابرند با:

△=۱۲, ▲=۱۰

▽=۲۱۳, ▼=۶۱۴

(الگوهای عددی، هوش منطقی ریاضی)

۲۶۶- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

در الگوی صورت سؤال، سه طرح اصلی هست که در هر مرحله به‌ترتیب از چپ به راست یک شکل مشابه ولی رنگی به یکی از آن طرح‌ها اضافه می‌شود:

[□△○] [■□△○] [■□▲△○]

[■□▲△●○]

■■□▲△●○

و حالا در ادامه باید داشته باشیم:

که در گزینهٔ «۳» هست.

(الگوی خطی، هوش غیرکلامی)

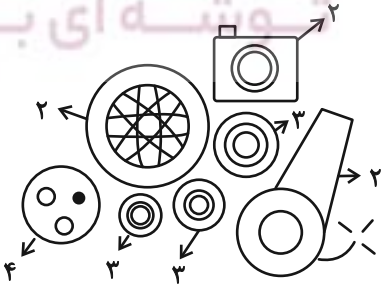
۲۶۷- گزینهٔ «۲» *(فاطمه راسخ)*

در هر ردیف از الگو، هر شکلی هست. به دو حالت رنگی و بی‌رنگ هست. پس در ردیف نخست هم به‌جای علامت سؤال باید دایرهٔ بی‌رنگ و مثلث رنگی قرار بگیرد.

(الگوی خطی، هوش غیرکلامی)

۲۶۸- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

دایره‌های شکل صورت سوال:

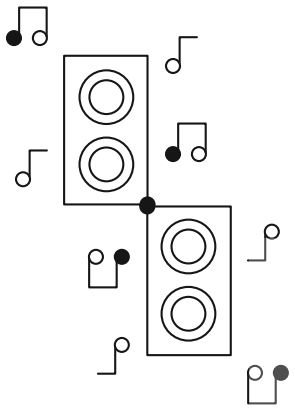


۴+(۳×۳)+(۳×۲)=۴+۹+۶=۱۹

(شمارش، هوش غیرکلامی)

۲۶۹- گزینهٔ «۲» *(حمید کنبی)*

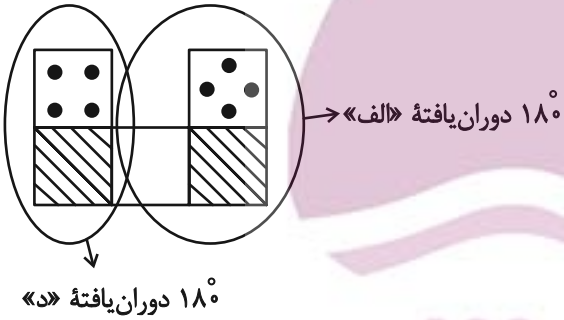
تقارن نقطه‌ای در شکل صورت سؤال به معنای دوران ۱۸۰ درجه است:



(قرینه‌یابی، هوش غیرکلامی)

۲۷۰- گزینهٔ «۲» *(فرزاد شیرممدّلی)*

شکل صورت سؤال:



(جزءیابی، هوش غیرکلامی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت