

فصل ۱

تابع و معادله درجه ۲

ایران توشه

توشه ای برای موفقیت

معادله درجه ۲

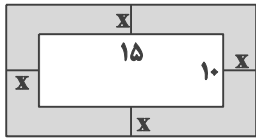
حل معادله درجه ۲

روش های حل معادله درجه دو را در فصل مقدمات به طور کامل بررسی کردیم. پس مستقیماً سراغ حل سوالات این قسمت می‌رویم.

تعرین ۱: در هر قسمت معادله را تشکیل داده و حل کنید

۱) به مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

۲) یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



۳) اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

۴) طول یک مستطیل، ۳ واحد بیشتر از ۲ برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۹۰ واحد مربع باشد، قطر آن کدام است؟

روابط بین ریشه‌های معادله درجه دو $(\Delta > 0)$ $(ax^2 + bx + c = 0)$

| | |
|--|--------------------------|
| $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}, \quad d = \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$ <p>نکته: معادله دو ریشه معکوس دارد وقتی که $a = c$ نکته: معادله دو ریشه قرینه دارد وقتی که $b = 0$</p> | روابط اصلی |
| $\begin{aligned} a^x + \beta^x &= (\alpha + \beta)^x - 2\alpha\beta \\ a^x + \beta^x &= (\alpha + \beta)^x - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ a^x + \beta^x &= (\alpha + \beta)^x - 2\alpha^x\beta^x \\ A &= \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta} \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \quad \frac{1}{a^x} + \frac{1}{\beta^x} = \frac{a^x + \beta^x}{a^x \cdot \beta^x} \end{aligned}$ | روابط متقارن (حفظی نیست) |
| با صدق دادن ریشه‌ها (ها) در معادله، رابطه داده شده را ساده می‌کنیم | روابط غیرمتقارن |

تعرین ۲: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مطلوب است محاسبه:

- | | | |
|---|---|---|
| ۱) $\alpha^2 + \beta^2$ | ۲) $\alpha^2 + \beta^2$ | ۳) $\alpha^2 - \beta^2$ |
| ۴) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ | ۵) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ | ۶) $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ |
| ۷) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ | ۸) $\alpha^2 + \beta^2$ | ۹) $9(\alpha^2 - 3\alpha + 1)(\beta^2 - 3\beta - 1)$ |
| ۱۰) $\alpha^2 + 3\beta$ | ۱۱) $\alpha^2 + 5\beta^2 - 12\beta$ | |

تعرین ۳: در معادله $2x^2 - ax + 15 = 0$ یک ریشه از دو برابر ریشه دیگر، ۲ واحد بیشتر است. مقادیر a ؟

تعرین ۴: در معادله $4ax^2 - 13ax + b = 0$ یکی از ریشه‌ها $\frac{b}{a}$ است.

تعرین ۵: در معادله $mx^2 - (m+3)x + 2m - 1 = 0$ مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۱۴ است. m ؟

$$1, -\frac{9}{17} \quad 1(2) \quad -\frac{9}{17}(3) \quad -1, \frac{9}{17}(4)$$

تذکر: در سوالاتی که دو مقدار برای مجهول بدست می‌آید، باید حواسمان به شرط $\Delta > 0$ باشد.

در معادله $mx^2 - (m+4)x + 5 - m = 0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر نصف معکوس مجموع ریشه‌هاست. m ؟

| تعداد و علامت ریشه | شرط لازم |
|---------------------|--|
| دو ریشه | $\Delta > 0$ |
| دو ریشه مثبت | $\Delta > 0, S > 0, P > 0$ |
| دو ریشه منفی | $\Delta > 0, S < 0, P > 0$ |
| دو ریشه مختلف علامت | $P < 0$ نیاز به بررسی $\Delta > 0$ نیست |
| یک ریشه مثبت | $\Delta = 0, \frac{-b}{2a} > 0$ |
| یک ریشه منفی | $\Delta = 0, \frac{-b}{2a} < 0$ |
| بدون ریشه | $\Delta < 0$ |

تذکره: در صورتی که در یک معادله ی درجه ۲، $\Delta = 0$ باشد، به هیچ وجه از روابط $\frac{-b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ استفاده نمی‌کنیم (چرا؟)

تمرین ۶: تابع $y = (2m - 1)x^2 + 6x + m - 2$ در چه صورت:

(الف) دارای دو ریشه حقیقی است؟

(ب) فاقد ریشه حقیقی است؟

(پ) دارای دو ریشه مثبت است؟

(ت) دارای دو ریشه منفی است؟

(ث) دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است؟ (محور x را در طرفین محور y قطع می‌کند- از هر ۴ ناحیه می‌گذرد)

(الف) اگر در یک معادله چندجمله‌ای، مجموع ضرایب تمام جملات برابر صفر باشد، یکی از ریشه‌ها حتماً برابر «۱» است و بقیه ریشه‌ها از تقسیم چند جمله‌ای بر « $x - 1$ » به دست می‌آید.

(ب) اگر در یک معادله ی چندجمله‌ای، مجموع ضرایب جملات درجه فرد با مجموع ضرایب جملات درجه زوج برابر باشد، یکی از ریشه‌ها حتماً برابر «-۱» است و بقیه ریشه‌ها از تقسیم چندجمله‌ای بر « $x + 1$ » به دست می‌آید.

نکته:

تمرین ۷: معادله $x^3 + ax^2 + (2 - a)x - 3 = 0$ دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است. حدود a ؟

تمرین ۸: در معادله $x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = 0$ ، مجموع ریشه‌ها؟

ساختن معادله درجه دو جدید:

اگر مجموع (S) و حاصلضرب (P) ریشه‌های یک معادله را داشته باشیم آن معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$x^2 - Sx + P = 0$$

۱- اول کار $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را برای معادله اولیه بدست می‌آوریم

۲- ریشه‌های معادله‌ی جدید را برحسب α و β می‌نویسیم.

۳- با توجه به گزینه‌ها جمع یا ضرب ریشه‌های معادله‌ی جدید را بدست می‌آوریم. (ممکنه نیاز باشه هر دوتا رو حساب کنی).

در معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ اگر:

(الف) جای a و c را عوض کنیم، ریشه‌ها می‌شوند.

(ب) b را قرینه کنیم، ریشه‌ها می‌شوند.

نکته:

تمرین ۹: معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ باشند.

تمرین ۱۰: معادله‌ی $x^2 - 6x + 4 = 0$ را با ریشه‌های $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ داریم. معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن:

(الف) یک واحد از ریشه‌های معادله اولیه بیشتر باشد.

(ب) از دو برابر ریشه‌های معادله اولیه یک واحد کمتر باشد.

(پ) از ۳ برابر قرینه‌ی ریشه‌های معادله اولیه دو واحد بیشتر باشد.

$$1) \quad x^2 - 14x + 4 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 14x - 4 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 14x + 6 = 0 \quad (4) \quad x^2 + 14x - 6 = 0$$

(ت) از قرینه معکوس ریشه‌های معادله اولیه یک واحد بیشتر باشد.

(ث) از مجذور ریشه‌های معادله اولیه دو واحد بیشتر باشد.

$$(۱) x^2 - 32x + 76 = 0 \quad (۲) x^2 + 32x + 76 = 0 \quad (۳) x^2 - 32x + 48 = 0 \quad (۴) x^2 + 32x + 48 = 0$$

(ج) جذر ریشه‌های معادله اولیه باشد.

(چ) توان سوم ریشه‌های معادله اولیه باشد.

(ح) $\frac{\alpha}{\beta} - 1, \frac{\beta}{\alpha} - 1$ باشند

(خ) $\frac{\alpha-2}{\beta}, \frac{\beta-2}{\alpha}$ باشند

(د) $\alpha^2 + \frac{1}{\beta}, \beta^2 + \frac{1}{\alpha}$ باشند

(ذ) $\frac{1}{(\alpha-1)^2}, \frac{1}{(\beta-1)^2}$ باشند.

معادلات تغییر متغیری

تعرین ۱: معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

۲) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۳) $(X^2 - X)^2 - 6(X^2 - X) - 72 = 0$

۴) $x^2 + x = \sqrt{3x^2 + 3x + 18}$

۵) $2^x + 2^{1-x} = \frac{9}{2}$

معادلات دو مجذوری . $ax^2 + bx^2 + c = 0$

با تغییر متغیر $x^2 \rightarrow t$ داریم: $at^2 + bt + c = 0$

نکات

- ۱- چون x^2 نامنفی است، فقط جواب‌های نامنفی برای t قابل قبولند. به ازای هر جواب مثبت برای t ، دو جواب **قرینه** برای x به دست می‌آید.
- ۲- مجموع جواب‌های این معادلات در صورت وجود، همواره **صفر** است.

| شروط لازم (برای معادله $at^2 + bt + c = 0$) | تعداد ریشه (برای x) |
|--|------------------------|
| دو ریشه مثبت $(\Delta > 0, S > 0, P > 0)$ | ۴ ریشه |
| حالت اول: دو ریشه مختلف علامت $(P < 0) (\Delta > 0 \text{ نیاز نیست})$ حالت دوم: یک ریشه مضاعف مثبت $(\Delta = 0, \frac{-b}{2a} > 0)$ | ۲ ریشه |
| حالت اول: دو ریشه منفی حالت دوم: یک ریشه مضاعف منفی حالت سوم: بدون ریشه | بدون ریشه |

تعرین ۲: معادله $x^4 - (m-1)x^2 + 2m - 5 = 0$ به ازای چه مقادیری از m :

الف) چهار ریشه حقیقی دارد؟

ب) دو ریشه حقیقی دارد؟

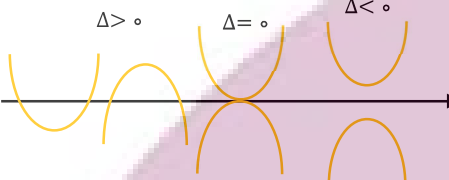
پ) فاقد ریشه حقیقی است؟

تعرین ۳: معادله $x - 2(m-2)\sqrt{x} + 14 - m = 0$ به ازای چه مقادیری از m :

الف) دو ریشه حقیقی دارد؟

الف) یک ریشه حقیقی دارد؟

تابع درجه ۲ (سهمی) ✓

| | | |
|---|---------------------------|----------------|
| $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ $S(x_0, y_0)$ در واقع از انتقال تابع $y = x^2$ بدست آمده است. | استاندارد (مربع کامل شده) | شیوه های نمایش |
| $y = ax^2 + bx + c$ $S(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})) = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ عرض از مبدا: c | گسترده (شایعتر) | |
| اگر $a > 0$ ، سهمی رو به بالا است و تابع min دارد. برد تابع به صورت $[y_s, +\infty)$ است. اگر $a < 0$ ، سهمی رو به پایین است و تابع max دارد. برد تابع به صورت $(-\infty, y_s]$ است. | | |
| در حالت $\Delta = 0$ ، تابع ریشه‌ی مضاعف دارد و در نقطه‌ی راس بر محور x مماس است $(x = \frac{-b}{2a})$  | | |
| برابر تفاضل ریشه هاست $(\frac{\sqrt{\Delta}}{ a })$ | | |
| تابع درجه ۲ یک تابع متقارن است (نسبت به $x = x_s$) یعنی اگر دو نقطه روی تابع درجه ۲ دارای عرض برابر باشند، قطعا به فاصله‌ی مساوی از نقطه‌ی راس قرار گرفته اند (به عبارت دیگر میانگین طول آن دو نقطه، برابر طول نقطه‌ی راس است) و برعکس * نتیجه مهم: اگر تابع درجه ۲ محور x را در دو نقطه‌ی x_1 و x_2 قطع کند، طول نقطه‌ی راس برابر میانگین ریشه هاست. $(x_s = \frac{x_1 + x_2}{2})$ | | |
| جهت سهمی a اگر تابع در محل برخورد با محور y صعودی باشد، $b > 0$ و اگر نزولی باشد $b < 0$ است. عرض از مبدا c | | |
| به چند چیز توجه می‌کنیم: جهت سهمی، نقطه‌ی راس، ریشه‌ها و عرض از مبدا الف) ریشه‌ها مشخص: ریشه‌ها را روی محور x مشخص می‌کنیم و با توجه به جهت سهمی و عرض از مبدا نمودار را کامل می‌کنیم. ب) ریشه‌ها نامشخص: نقطه‌ی راس را پیدا می‌کنیم $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ و با توجه به جهت سهمی و عرض از مبدا نمودار را رسم می‌کنیم. | | |
| الف) اگر مختصات راس را داشتیم (x_0, y_0) ← معادله استاندارد $(y = a(x - x_0)^2 + y_0)$ ← جایگذاری یک نقطه برای تعیین a ب) اگر ریشه‌ها را داشتیم $(x_1$ و $x_2)$ ← $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ← جایگذاری یک نقطه برای تعیین a ج) در غیر موارد بالا، نقاط سهمی را در معادله‌ی گسترده $(y = ax^2 + bx + c)$ جایگذاری کرده و با حل دستگاه معادلات، ضرایب را تعیین می‌کنیم. تذکر: اگر دو نقطه با عرض یکسان داشتیم، میانگین طول آن دو نقطه برابر طول نقطه‌ی راس است | | |

تمرین ۱۴: نمودار توابع زیر را به طور تقریبی رسم کنید.

- ۱) $y = -x^2 + 4$ ۲) $y = (x - 1)^2$ ۳) $y = (x + 2)^2 - 3$ ۴) $y = -2(x - 1)^2 - 1$
 ۵) $y = -x^2 + 2x$ ۶) $y = x^2 - 3x - 10$ ۷) $y = x^2 + 4x + 6$ ۸) $y = -x^2 + 2x - 5$

تیم یک رقمی‌های کنکور

تقرین ۱۵: راکتی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله‌ی آن به صورت $h(t) = 100t - 5t^2$ ($t \geq 0$) است.

- (الف) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟
 (ب) ارتفاع نقطه‌ی اوج را بیابید.
 (پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی‌گردد؟

تقرین ۱۶: دو پرتابگر وزنه‌ی A و B ، وزنه‌های خود را به گونه‌ای پرتاب می‌کنند که مسیر طی‌شده آن‌ها به ترتیب از رابطه‌های $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 2$ و $y = -2x^2 + 3x + 2$ به دست می‌آید. (y : ارتفاع وزنه از سطح زمین و x : مسافت افقی طی‌شده، برحسب متر است.)

- (الف) کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟
 (ب) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟

تقرین ۱۷: قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ی مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود. اگر تنها هزینه‌ی نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد. - اگر هر ۴ ضلع باید نرده‌کشی می‌شد چی؟

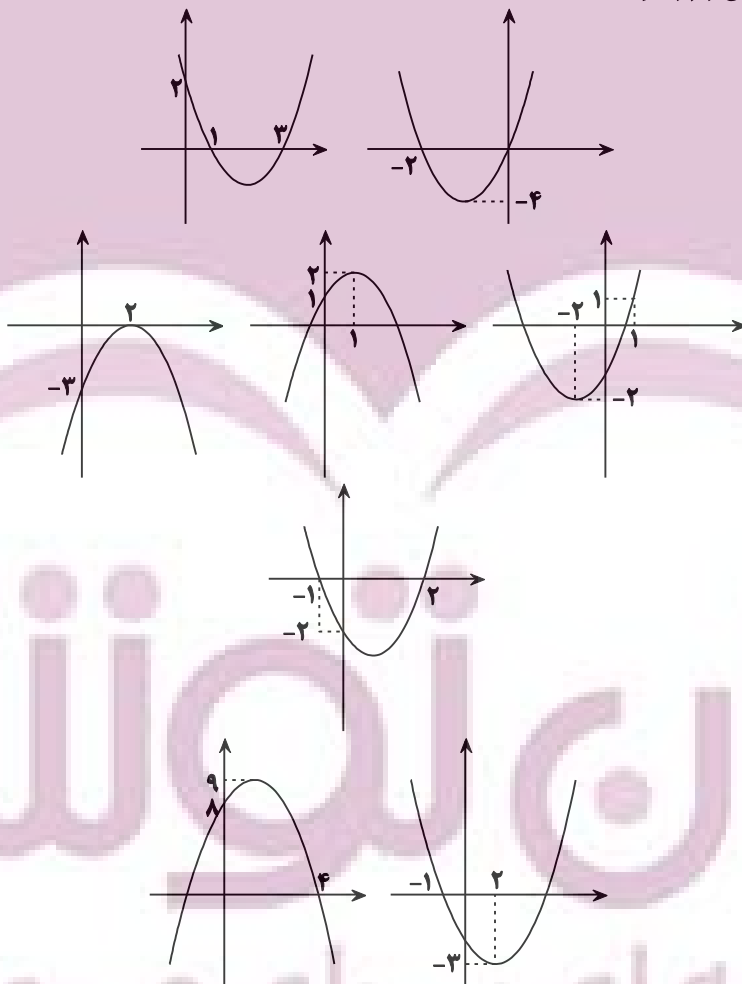
تست ۱: استادیومی را به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در نظر بگیرید. اگر محیط آن ۱۲۰۰ متر باشد، طول مستطیل چند متر باشد تا مساحت مستطیل، بیشترین مقدار ممکن گردد؟ ($\pi \simeq 3$)

(۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۳۰۰ (۴) ۴۰۰

تقرین ۱۸: یک پنجره‌ی از یک مستطیل و دو مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. اگر محیط پنجره برابر ۱۲ باشد، برای رسیدن به بیشترین نوردهی، طول ضلع مثلث کدام باید باشد؟



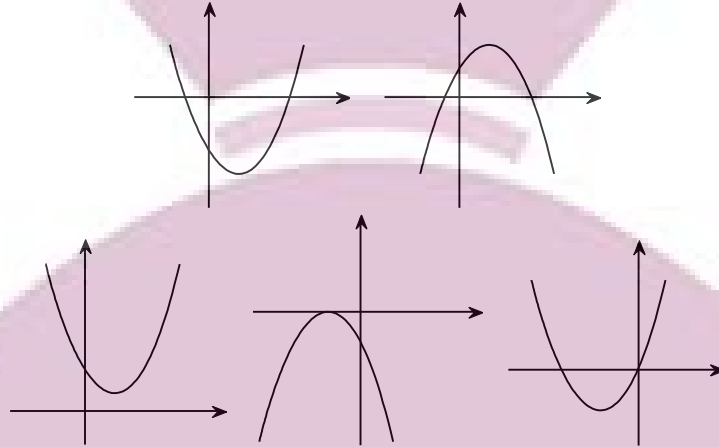
تقرین ۱۹: معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.



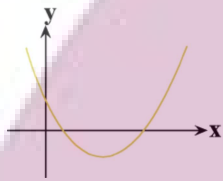
تمرین ۲۰: معادله سهمی را بنویسید که:

الف) از نقاط $(1, -2)$ و $(2, -3)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می‌کند
 الف) از نقاط $(0, 5)$ و $(2, 5)$ و $(-1, 11)$ می‌گذرد.

تمرین ۲۱: در هریک از سهمی‌های زیر علامت a ، b ، c و Δ را مشخص کنید $(y = ax^2 + bx + c)$



تست ۲: اگر نمودار سهمی $y = (m+2)x^2 - 2(m+1)x + m$ به صورت زیر باشد، حدود m کدام است؟



- (۱) $(\frac{1}{5}, +\infty)$
 (۲) $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$
 (۳) $(0, 2)$
 (۴) $(0, +\infty)$

تمرین ۲۲: کمترین مقدار تابع $y = ax^2 - 8x + a - 2$ برابر ۲- است. جمع ریشه‌ها و طول پاره‌خط جدا شده روی محور x ؟

تمرین ۲۳: تابع $y = (3-a)x^2 - (a+2)x - 12$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن است. ریشه‌ها و \min ؟

تمرین ۲۴: تابع $y = -x^2 + ax + b$ در بازه $(-2, 4)$ بالای محور x است. محور تقارن و \max ؟

تمرین ۲۵: $x = 3$ ریشه مضاعف معادله $(x+a)^2 = 2x + b$ است. a و b ؟

گذشتن از نواحی چهارگانه

| شروط لازم و کافی | شکل(های) صحیح | گذر از ناحیه |
|--|---------------|-------------------|
| $\Delta \leq 0$ $a > 0$ | | اول و دوم |
| $\Delta \leq 0$ $a < 0$ | | سوم و چهارم |
| $\Delta > 0$ $a > 0$ $b > 0$ $c \geq 0$ | | اول و دوم و سوم |
| $\Delta > 0$ $a > 0$ $b < 0$ $c \geq 0$ | | اول و دوم و چهارم |

| | | |
|--|-----------------|-------------------|
| $\Delta > 0$ $a < 0$ $b > 0$ $c \leq 0$ | | اول و سوم و چهارم |
| $\Delta > 0$ $a < 0$ $b < 0$ $c \leq 0$ | | دوم و سوم و چهارم |
| $\Delta > 0$ $p \geq 0$ | ۲ ریشه هم علامت | ۳ ناحیه |
| $\frac{c}{a} < 0$ $\Delta > 0$ نیاز نیست | | هر چهار ناحیه |

جمع بندی: در هر سوال شکل تقریبی نمودار را رسم می کنیم و سپس شرط ها را می نویسیم. موارد فوق نیاز به حفظ کردن ندارند.

نکته: اگر $a > 0$ باشد نمودار تابع الزاما از ناحیه های اول و دوم می گذرد و اگر $a < 0$ باشد نمودار تابع الزاما از نواحی سوم و چهارم می گذرد.

تمرین ۲۵: تابع $y = (1-m)x^2 + 4x + m + 2$ فقط از ناحیه چهارم نمی گذرد. حدود m ؟

تمرین ۲۶: تابع $y = (m+3)x^2 + mx + 1$ از ناحیه سوم نمی گذرد. حدود m ؟

$m \leq 6$ (۱) $-3 < m \leq 6$ (۲) $m \geq -2$ (۳) $0 < m \leq 6$ (۴)

توجه: اگر "فقط" نداشتیم از گزینه ها استفاده می کنیم. چون باید دو حالت را بررسی کنیم.

حل تست

معادله درجه دو

۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دو

$$x^2 + 6x + m - 2 = 0 \quad (2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$$

(ریاضی ۹۸)

۱) $-2 < m < 2/5$ ۲) $-2 < m < 3/5$

۳) $-1 < m < 3/5$ ۴) $-1 < m < 2/5$

۲- به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی معادله

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2$$

معکوس یکدیگرند؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۳- طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای $2x+1$ و $2x-1$ و x است.

طول ضلع متوسط کدام است؟ (ریاضی داخل ۷۶)

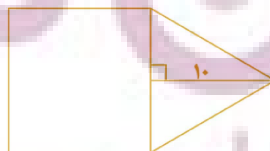
۱) 13 ۲) 15 ۳) 17 ۴) 19

۴- حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی از ۵ برابر عدد کوچکتر 32 واحد

بیشتر است. مجموع آن دو عدد کدام است؟ (ریاضی داخل ۷۶)

۱) 21 ۲) 19 ۳) 17 ۴) 15

۵- در شکل زیر، مساحت مثلث متساوی الساقین، از $\frac{2}{3}$ مساحت مربع به



اندازهی $\frac{8}{3}$ واحد مربع، کمتر است.

مساحت مثلث کدام است؟ (انسانی ۹۹)

۱) 30 ۲) 35

۳) 40 ۴) 45

روابط بین ریشه های معادله درجه دو

۶- به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه ی معادله درجه دو

$$2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$$

برابر ۲ می باشد؟ (ریاضی ۹۶)

۱) 3 ۲) 4 ۳) 5 ۴) 6

۷- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$$

برابر ۶ می باشد؟ (تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) 1 ۳) 1 و $-\frac{9}{5}$ ۴) $-\frac{9}{5}$ و -1

۸- اگر α و β ریشه های معادله $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام

مقدار k ، مجموعه جواب های معادله $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت

$$\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$$

است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) 5 ۲) 6 ۳) 7 ۴) 9

۹- به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه های معادله درجه دو

$$8x^2 - mx - 8 = 0$$

توان سوم ریشه های معادله

$$2x^2 - x - 2 = 0$$

می باشد؟ (ریاضی خارج ۹۶)

۱) 9 ۲) 11 ۳) 13 ۴) 15

۱۰- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \text{یک واحد کمتر است؟ (تجربی ۹۴)}$$

$$(1) \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (2) \quad x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$(3) \quad x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (4) \quad x^2 + 5x + 2 = 0$$

۱۱- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(\Delta x + 3) = 2$ باشند، به ازای

کدام مقدار k مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ ، به

صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟ (ریاضی ۹۰)

$$(1) \quad 27 \quad (2) \quad 29 \quad (3) \quad 28 \quad (4) \quad 31$$

۱۲- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ ، یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است، مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟ (تجربی خارج ۸۴)

$$(1) \quad 3/5 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 4/5 \quad (4) \quad 5$$

۱۳- اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه

جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{1 + \frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{1}{\beta}\right\}$ است؟ (ریاضی داخل ۹۲)

$$(1) \quad 4x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (2) \quad 4x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(3) \quad 4x^2 - 5x - 1 = 0 \quad (4) \quad 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

۱۴- در معادله‌ی $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی

دیگر ۳ واحد بیش‌تر است. m کدام است؟ (ریاضی داخل ۸۷)

$$(1) \quad 9 \quad (2) \quad 10 \quad (3) \quad 12 \quad (4) \quad 15$$

۱۵- به‌ازای کدام مقدار m عدد $\sqrt{2}$ واسطه‌ی هندسی بین ریشه‌های

حقیقی معادله‌ی $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟ (ریاضی خارج ۸۴)

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad -1 \quad (3) \quad 3 \quad (4) \quad -3$$

۱۶- اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر

معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، α کدام است؟

(تجربی داخل ۸۶)

$$(1) \quad -14 \quad (2) \quad -12 \quad (3) \quad -8 \quad (4) \quad -6$$

۱۷- معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌های آن $2 - \sqrt{4-a}$ و

$2 + \sqrt{4-a}$ باشد، کدام است؟ (ریاضی داخل ۶۸)

$$(1) \quad x^2 - 4x + a = 0 \quad (2) \quad x^2 + ax - 4 = 0$$

$$(3) \quad x^2 + 4x - a = 0 \quad (4) \quad x^2 - ax + 4 = 0$$

۱۸- در معادله‌ی درجه دوم $x^2 + 2x - 1 = 0$ حاصل

$x_1^4 + 4x_2^2 - 4x_2$ چه قدر است؟ (آزاد ۸۴ عصر)

$$(1) \quad 32 \quad (2) \quad 33 \quad (3) \quad 31 \quad (4) \quad 34$$

۱۹- در معادله‌ی درجه دوم $x^2 - 2x - 4 = 0$ اگر ریشه‌ها α و β باشند،

حاصل $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$ چه قدر است؟ (آزاد ۸۴ عصر)

$$(1) \quad 48 \quad (2) \quad 12 \quad (3) \quad 16 \quad (4) \quad 24$$

۲۰- در معادله‌ی $7x^2 - 6x + 1 = 0$ اگر ریشه‌ها x_1 و x_2 باشند،

کدام درست است؟ (آزاد ۸۳ صبح)

$$(1) \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$$

$$(2) \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$$

$$(3) \quad x_1(1 + x_2) = 1 - x_2$$

$$(4) \quad x_1 + x_2 > \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

۲۱- به‌ازای کدام مقدار k ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + 3x - k = 0$ دو

واحد از ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 5x + 1 = 0$ کمتر است؟ (ریاضی داخل ۷۶)

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4) \quad 4$$

بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله درجه ۲

۲۲- به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم

$(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

(تجربی ۹۷)

$$(1) \quad m < -6 \quad (2) \quad m > 3$$

$$(3) \quad 3 < m < 6 \quad (4) \quad 3 < m < 6$$

۲۳- به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی

$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز

مثبت است؟ (تجربی خارج ۹۴)

$$(1) \quad a < -4 \quad (2) \quad a > -4$$

$$(3) \quad a < 4 \quad (4) \quad a > 4$$

۲۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله‌ی

$y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور x ها را در دو نقطه به

طول‌های منفی، قطع می‌کند؟ (ریاضی ۹۵)

$$(1) \quad m > 2 \quad (2) \quad -1 < m < 2$$

$$(3) \quad \text{هر مقدار } m \quad (4) \quad \text{هیچ مقدار } m$$

۲۵- به ازای کدام مقدار a ، معادله‌ی درجه‌ی دوم

$x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه‌ی مثبت است؟ (ریاضی ۹۶)

$$(1) \quad -2 < a < 2 \quad (2) \quad 2 < a < 5$$

$$(3) \quad 2 < a < 14 \quad (4) \quad 5 < a < 14$$

۲۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = ax^2 +$

$(a+3)x - 1$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (ریاضی خارج ۹۲)

$$(1) \quad a < -9 \quad (2) \quad a < -3$$

$$(3) \quad a > -1 \quad (4) \quad -3 < a < 0$$

۲۷- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y =$

$m - 3x + (m+2)x^2$ ، محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟ (ریاضی خارج ۹۵)

$$(1) \quad m > 1 \text{ یا } m < -2 \quad (2) \quad -2 < m < 1$$

$$(3) \quad \text{فقط } m < -2 \quad (4) \quad \text{فقط } m > 1$$

تیم یک رقیه‌های کنکور

۳۷- یک کارگاه نوعی کالا تولید و هر واحد آن را ۲۴۰ ریال می‌فروشد. اگر صاحب کارگاه در هر روز، x واحد کالا تولید کرده و تابع هزینه‌ی آن $C(x) = x^2 + 60x + 200$ باشد، بیشترین سود روزانه‌ی آن، کدام است؟ (انسانی خارج ۹۹)

- (۱) ۵۶۰۰ (۲) ۶۱۰۰
(۳) ۷۹۰۰ (۴) ۸۱۰۰

۳۸- به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور x ها است؟ (ریاضی خارج ۱۳۹۶)

- (۱) $a < 1$ (۲) $a < -2$
(۳) $a > 3$ (۴) $-2 < a < 1$

۳۹- اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{x}(x-3)$ ، آنگاه مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $f \circ g$ که در زیر محور x ها قرار می‌گیرند برابر کدام است؟ (تجربی خارج ۱۳۹۱)

- (۱) $(-5, 1)$ (۲) $(-1, 5)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, 5)$

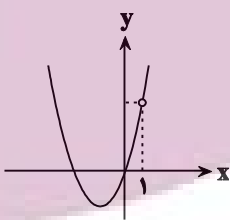
۴۰- به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله‌ی $y = ax^2 - (a+2)x$ ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی ۸۹)

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $a \leq -2$
(۳) $a > 0$ (۴) $-2 \leq a < 0$

۴۱- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۷)

- (۱) -۲ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۲- شکل زیر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{4x^2 + ax + b}{x-1}$ است.



دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟ (تجربی داخل ۸۷)

- (۱) $(0, -4)$ (۲) $(-4, 0)$
(۳) $(-2, 1)$ (۴) $(4, 0)$

۴۳- منحنی توابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + bx + 3$ بر خط $y=7$ مماس‌اند، فاصله دوتقطه تماس کدام است؟ (تجربی خارج ۸۵)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۴- اگر بیش‌ترین مقدار تابع m ، از معادله‌ی $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟ (ریاضی داخل ۸۳)

- (۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۴

۴۵- اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ و تابع هزینه‌ی آن به صورت $R(x) = \frac{1}{4}x^2 - 8x + b$ است، اگر فاصله‌ی دو نقطه‌ی سر به سر تابع سود این شرکت، ۱۲ واحد کالا باشد، مقدار b کدام است؟ (انسانی ۱۴۰۰)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۴۶- در معادله‌ی درجه دوم $7x^2 + 6x + 1 = 0$ حاصل $[x_1] + [x_2] + [x_1 + x_2]$ چه قدر است؟ (آزاد ۸۴ صبح)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) -۳ (۴) -۲

۲۸- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم

$$2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$$

- (۱) $-3 < m < 5$ (۲) $-3 < m < 4$
(۳) $-2 < m < 4$ (۴) $-1 < m < 5$

۲۹- منحنی به معادله‌ی $y = mx$ با خطوط $y = (2x+1)(x+8)$ نقطه مشترک ندارد، مجموعه مقادیر m چگونه است؟ (ریاضی داخل ۸۸)

- (۱) $5 < m < 13$ (۲) $15 < m < 23$
(۳) $9 < m < 35$ (۴) $7 < m < 15$

معادلات تغییر متغیری

۳۰- مجموعه ریشه‌های معادله‌ی $(x^2 + x) - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

- (۱) ۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) -۴

۳۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، از معادله‌ی $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟ (تجربی خارج ۸۸)

- (۱) $m \geq 1$ (۲) $m < 2$
(۳) $1 \leq m < 2$ (۴) هیچ مقدار m

۳۲- به ازای کدام مقادیر m ، از معادله‌ی $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟ (تجربی داخل ۸۸)

- (۱) $-\frac{3}{2} < m < 2$ (۲) $0 < m < 2$
(۳) $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2} < m < 2$

۳۳- اگر معادله‌ی $x^4 - (m+3)x^2 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ (تجربی داخل ۸۵)

- (۱) $m < -4$ (۲) $m > 4$
(۳) $-4 < m < 4$ (۴) $4 < m < 9$

۳۴- معادله‌ی $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ چند ریشه دارد و مجموع مجذورات ریشه‌ها چقدر است؟ (آزاد ۸۶ صبح)

- (۱) دو ریشه و سه (۲) دو ریشه و شش
(۳) چهار ریشه و سه (۴) چهار ریشه و شش

تابع درجه دو (سه‌می)

۳۵- تابع درآمد شرکتی به ازای تولید x واحد از یک کالای مصرفی به صورت

$$R(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 8x + b$$

۳۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی ۹۲)

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$
(۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$