

آموزش مفهومی از صفر تا صد
تمام مفاهیم به دقت بیان شده و با نمونه‌های متعدد تفهیم شده



پوشش محتوای کتاب
مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده کتاب عیناً طرح و بررسی شده



طرح و تشریح
صدها مثال و نمونه آموزشی ساده، متوسط و مد امتحانی



چکیج چالشی
مجموعه‌ای از سؤالات بسیار دشوار ولی صد در صد مرتبط با محتوا
(ویژه دانش‌آموزان نخبه؛ پاسخ‌نامه مختص اساتید.)



آموزش تشریحی
(درسنامه مفهومی)

هسته اصلی این یک
آموزشی، یک درسنامه دقیق
و مفهومی با مثال‌های
متنوع و فراوان است.

ایپران تفتنی

توشه‌ای برای موفقیت

فهرست کل بفش‌ها

۲	بررسی انواع جابجایی‌های نمودار و تکنیک‌های رسم، توابع چند جمله‌ای و رسم، بررسی یکنوایی توابع، تقسیم چندجمله‌ای و بخش‌پذیری + تمرینات پایانی	۱ تابع
۳۱	توابع متناوب، نمودار و تعیین دوره تناوب، بیان تابع تانژانت و نمودار آن، معادلات مثلثاتی و بسط نسبت‌ها + تمرینات پایانی	۲ مثلثات
۵۸	دامنه‌ی تابع و همسایگی نقاط، حدهای نامتناهی، حد تابع در بی‌نهایت، حد نامتناهی در بی‌نهایت، مجانب‌های قائم و افقی نمودار + تمرینات پایانی	۳ بی‌نهایت در حد
۸۵	مفهوم خط مماس، شیب مماس و تعریف مشتق، معادله‌ی مماس بر نمودار، بررسی نقش پیوستگی در بررسی مشتق، مشتق‌های یکطرفه + تمرینات پایانی	۴ مشتق تابع (۱)
۱۰۲	روش مشتق‌گیری و تابع مشتق، مشتق‌گیری از توابع مرکب، انواع آهنگ تغییرات تابع و برخی کاربردها + تمرینات پایانی	۵ مشتق تابع (۲)
۱۳۰	تشخیص صعودی یا نزولی بودن تابع، اکستریم‌های نسبی تابع، اکستریم‌های مطلق تابع و بهینه‌سازی + تمرینات پایانی	۶ کاربرد مشتق (۱)
۱۵۴	تعیین جهت تقعر نمودار و تعیین نقطه‌ی عطف نمودار، کاربرد مشتق در روش کلی رسم نمودار، آشنایی با تابع هموگرافیک + تمرینات پایانی	۷ کاربرد مشتق (۲)

توشه‌ای برای موفقیت



تابع

صفحه	فهرست
۳	▪ تغییرات افقی نمودار
۸	▪ تغییرات عمودی نمودار
۱۴	▪ توابع چندجمله‌ای
۱۷	▪ توابع یکنوا
۲۳	▪ تقسیم چندجمله‌ای و بخش‌پذیری
۲۸	▪ تمرینات

ایپران توفیقی
توشه‌ای برای موفقیت



روش‌های انتقال افقی نمودار به صورت زیر یادآوری می‌شود.

انتقال افقی:

انتقال افقی نمودار $y = f(x)$ به دو صورت است: ($a > 0$)

▪ برای رسم نمودار تابع $y = f(x+a)$:

نمودار $y = f(x)$ را به اندازه‌ی a به صورت **افقی به سمت چپ** منتقل می‌کنیم.

▪ برای رسم نمودار $y = f(x-a)$:

نمودار $y = f(x)$ را به اندازه‌ی a به صورت **افقی به سمت راست** منتقل می‌کنیم.

دلیل:

اگر نقطه‌ی (x_0, y_0) روی نمودار $y = f(x)$ باشد: $f(x_0) = y_0$ ، آنگاه انتقال یافته‌ی نقطه به اندازه‌ی a به چپ، یعنی: $(x_0 - a, y_0)$ روی نمودار $y = f(x+a)$ قرار دارد:

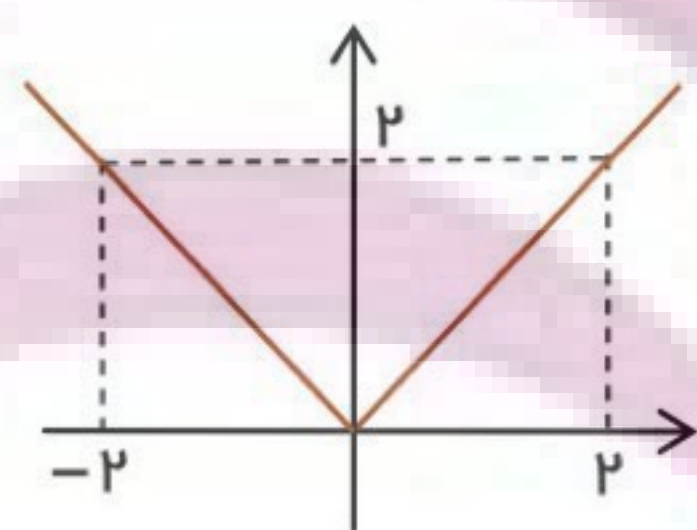
$$y = f(x+a) \xrightarrow{x=x_0-a} f((x_0-a)+a) = f(x_0) = y_0$$

به صورت مشابه:

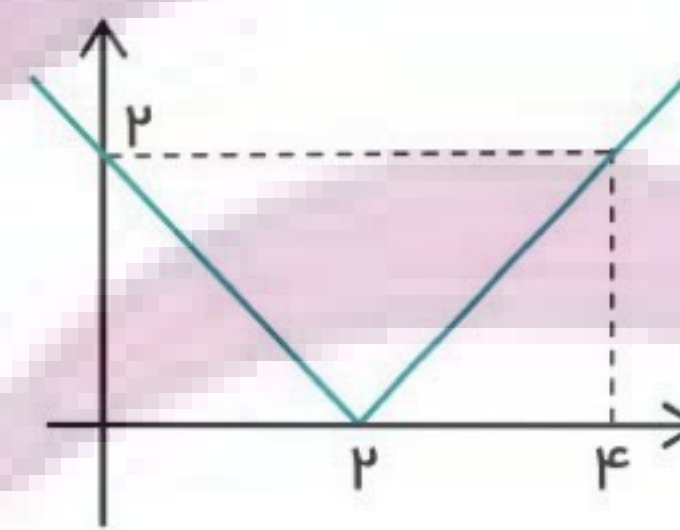
انتقال یافته‌ی نقطه به اندازه‌ی a به راست، یعنی: $(x_0 + a, y_0)$ روی نمودار $y = f(x-a)$ قرار دارد.

برای نمونه:

نمودار تابع $f(x) = |x-2|$ را با استفاده از انتقال نمودار $y = |x|$ رسم می‌کنیم:



$y = |x|$

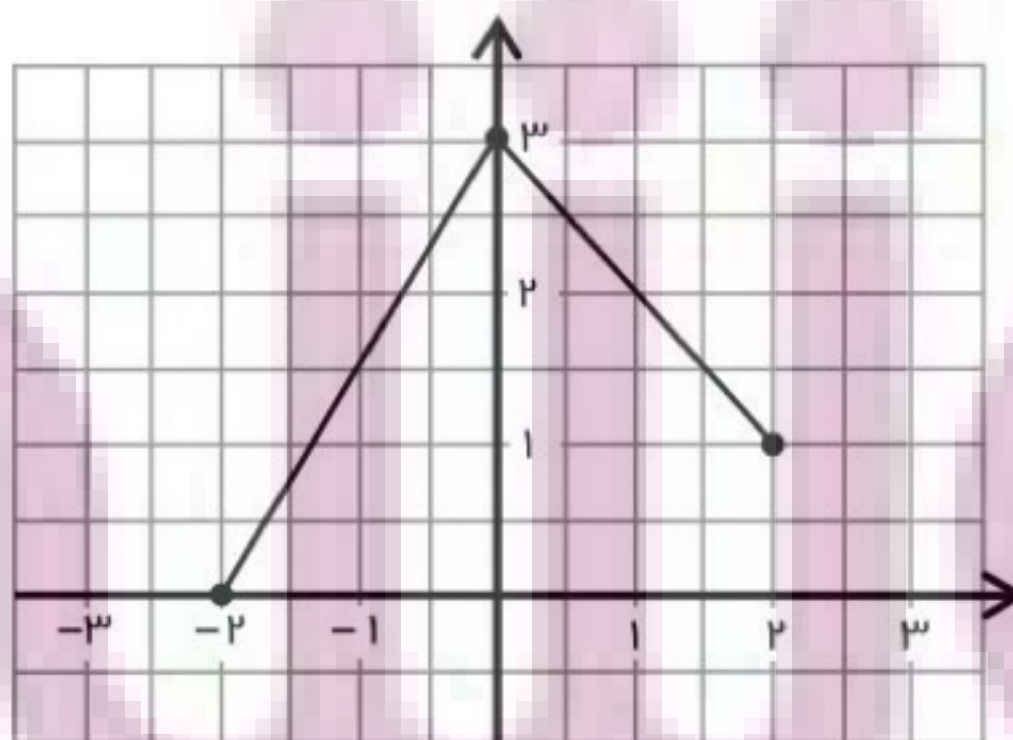


$y = |x-2|$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۱

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

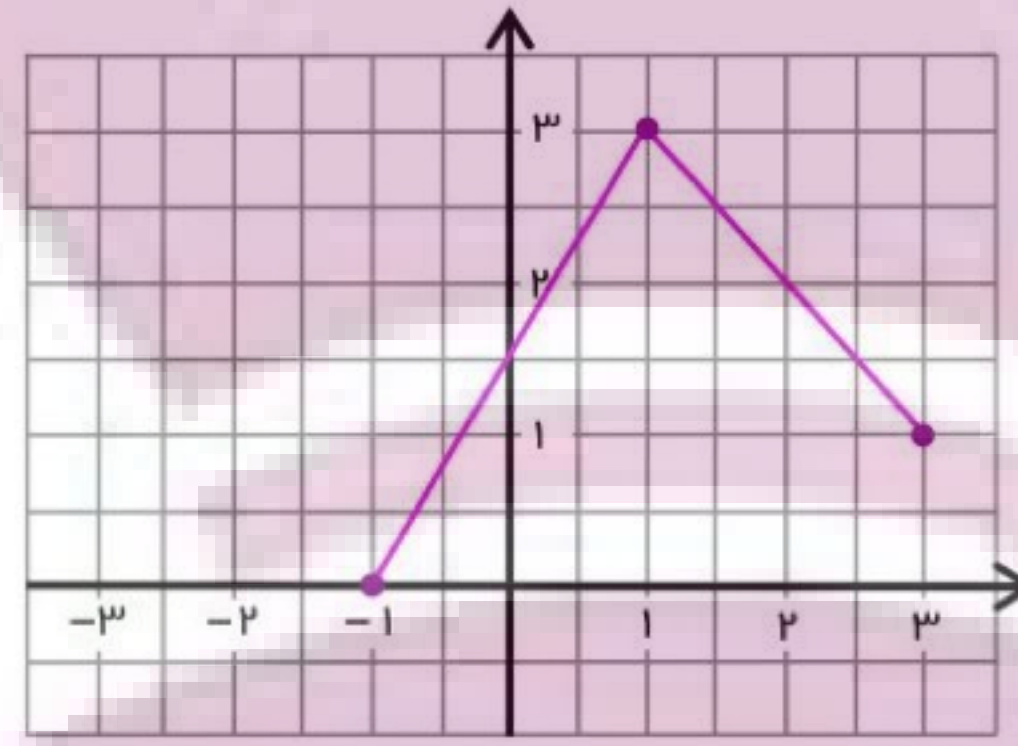
نمودار تابع $g(x) = f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید.





پاسخ ✓

باید نمودار یک واحد به راست منتقل شود.



می‌پینید:

دامنه‌ی تابع g برابر $[-1, 3]$ است.

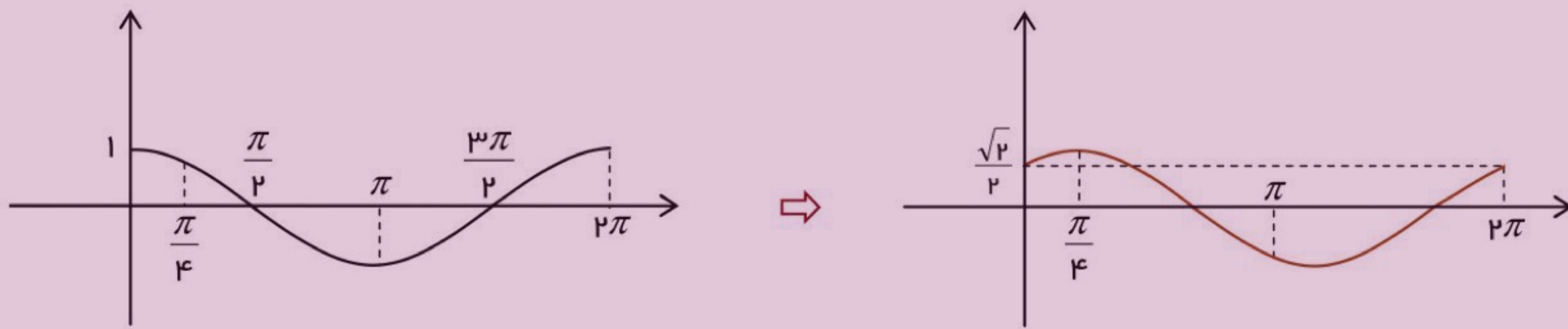


نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

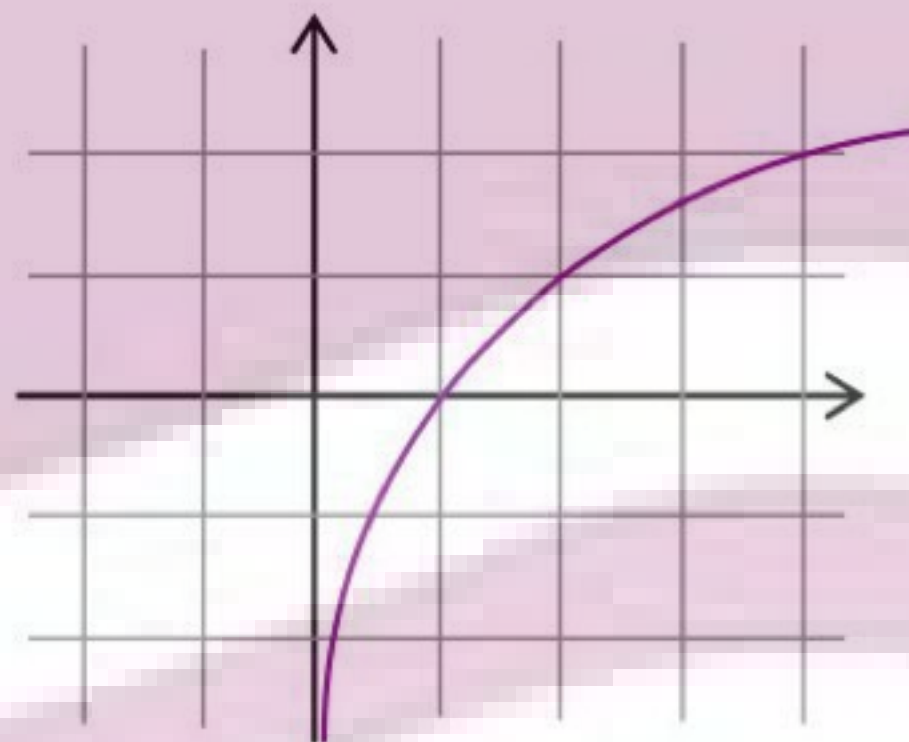
نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

پاسخ ✓

باید ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم کرده و سپس آن را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست انتقال دهیم:



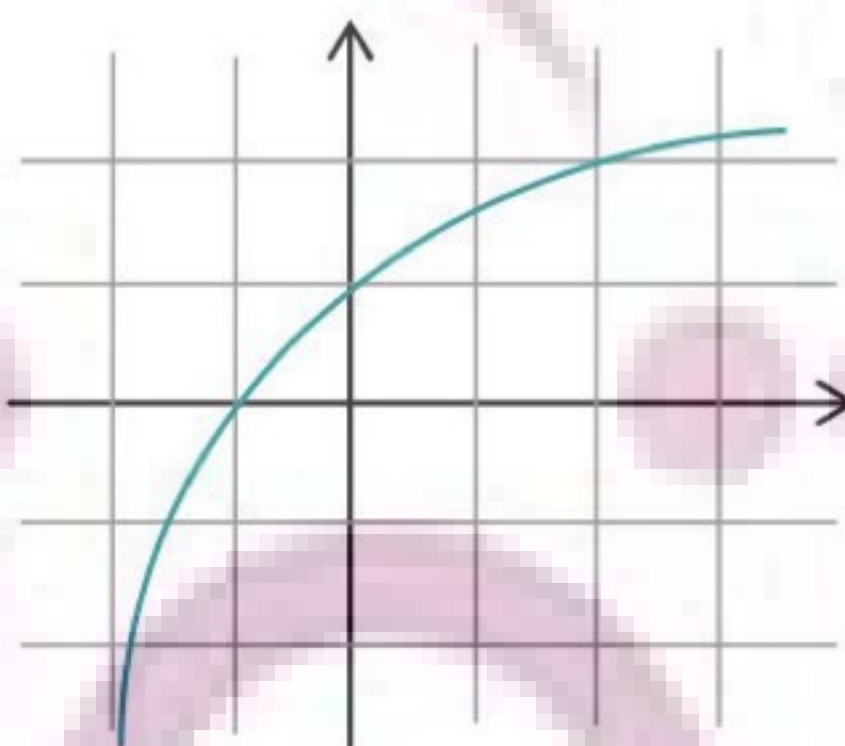
مثال: (از کتاب) نمودار تابع $y = \log_p x$ به صورت مقابل رسم شده است.



نمودار تابع $y = \log_p(x+2)$ را با انتقال رسم کنید.

پاسخ ✓

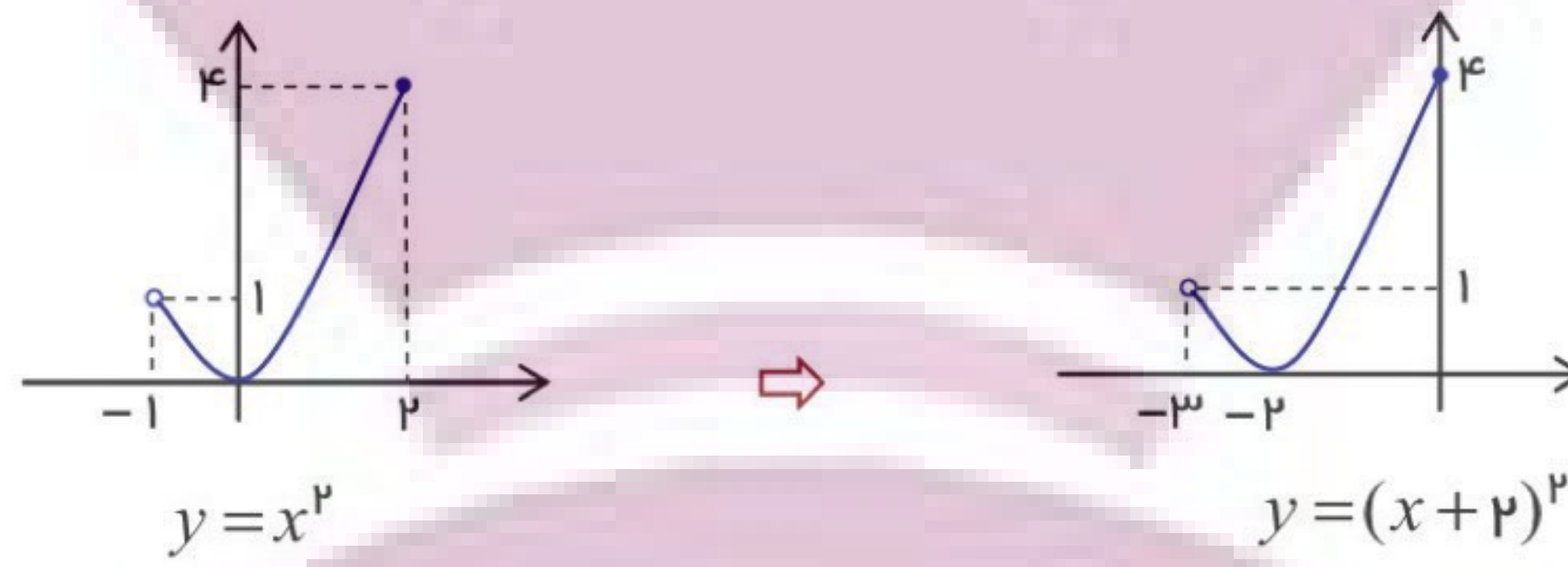
باید نقاط نمودار، دو واحد به چپ منتقل شوند:



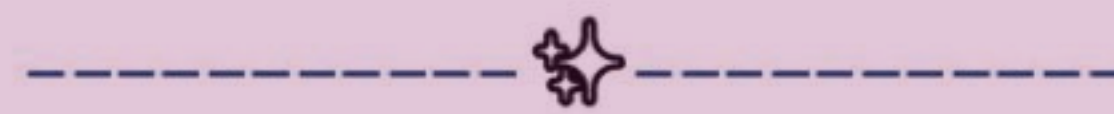
مثال: نمودار تابع $y = (x+2)^3$ را توسط انتقال در بازه‌ی $[-3, 0]$ رسم کرده و برد آن را معلوم کنید.

پاسخ ✓

باید نمودار $y = x^2$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنیم تا بعد از ۲ واحد حرکت به چپ، دامنه $[-3, 0]$ شود:



می‌بینید که برد تابع در هر دو نمودار $[0, 4]$ است.



روشی دیگر برای تغییر افقی نمودار به صورت زیر است:

انبساط و انقباض افقی:

وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$:

- ❖ نقاطی با طول و عرض مشخص از نمودار مشخص می‌کنیم.
- ❖ طول این نقاط بر k تقسیم شده و عرض نقطه ثابت می‌ماند.

بویژه:

- اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار به صورت افقی گسترده می‌شود، (انبساط می‌یابد).
- اگر $k > 1$ باشد، نمودار به صورت افقی جمع می‌شود، (انقباض می‌یابد).

دلیل:

اگر نقطه (x_0, y_0) روی نمودار $y = f(x)$ باشد: $f(x_0) = y_0$ ، نقطه $(\frac{x_0}{k}, y_0)$ روی نمودار $y = f(kx)$ قرار دارد:

$$y = f(kx) \xrightarrow{x = \frac{x_0}{k}} f(k(\frac{x_0}{k})) = f(x_0) = y_0$$

مثال: نمودار تابع $g(x) = |2x|$ را با تغییر مناسب نمودار $f(x) = |x|$ رسم کنید.

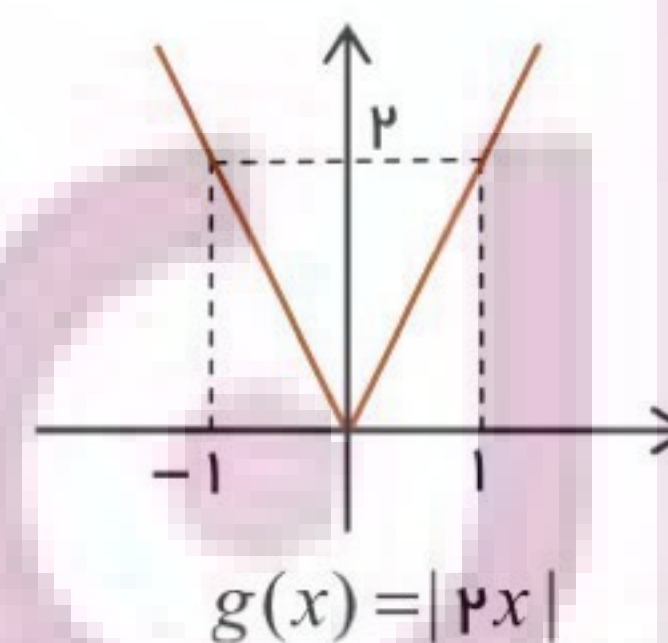
پاسخ

با توجه به نمودار $f(x) = |x|$ و طبق نکته‌ی قبل، نمودار $g(x) = f(2x)$ را رسم می‌کنیم:

$$(-2, 2) \in f \xrightarrow{k=2} (\frac{-2}{2}, 2) = (-1, 2) \in g$$

$$(0, 0) \in f \longrightarrow (\frac{0}{2}, 0) = (0, 0) \in g$$

$$(2, 2) \in f \longrightarrow (\frac{2}{2}, 2) = (1, 2) \in g$$





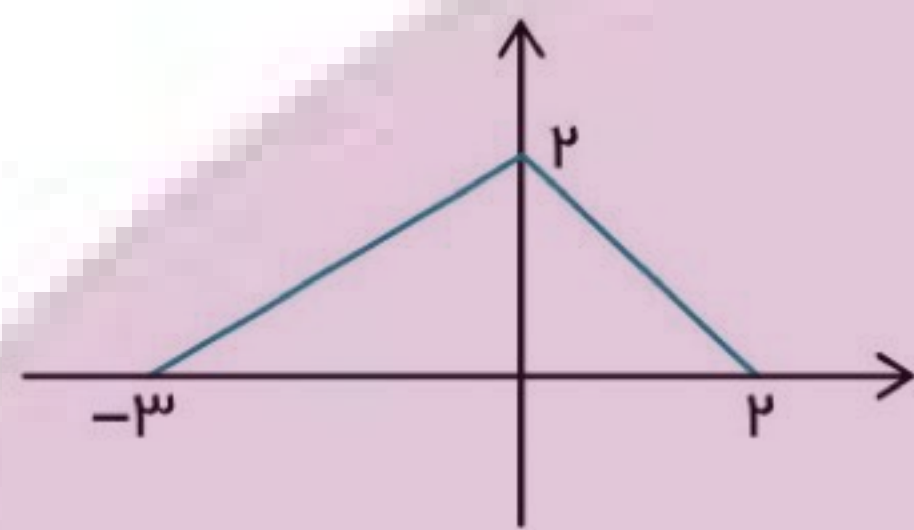
نهایی؛ خرداد ۱۳۹۸

اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید.

(درست - نادرست)

پاسخ

نادرست است؛ زیرا برای $k > 1$ نمودار به صورت افقی منقبض می‌شود.



مثال: نمودار تابع f به شکل مقابل است:

الف) نمودار $y = f(\frac{x}{2})$ را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع جدید را مشخص کنید.

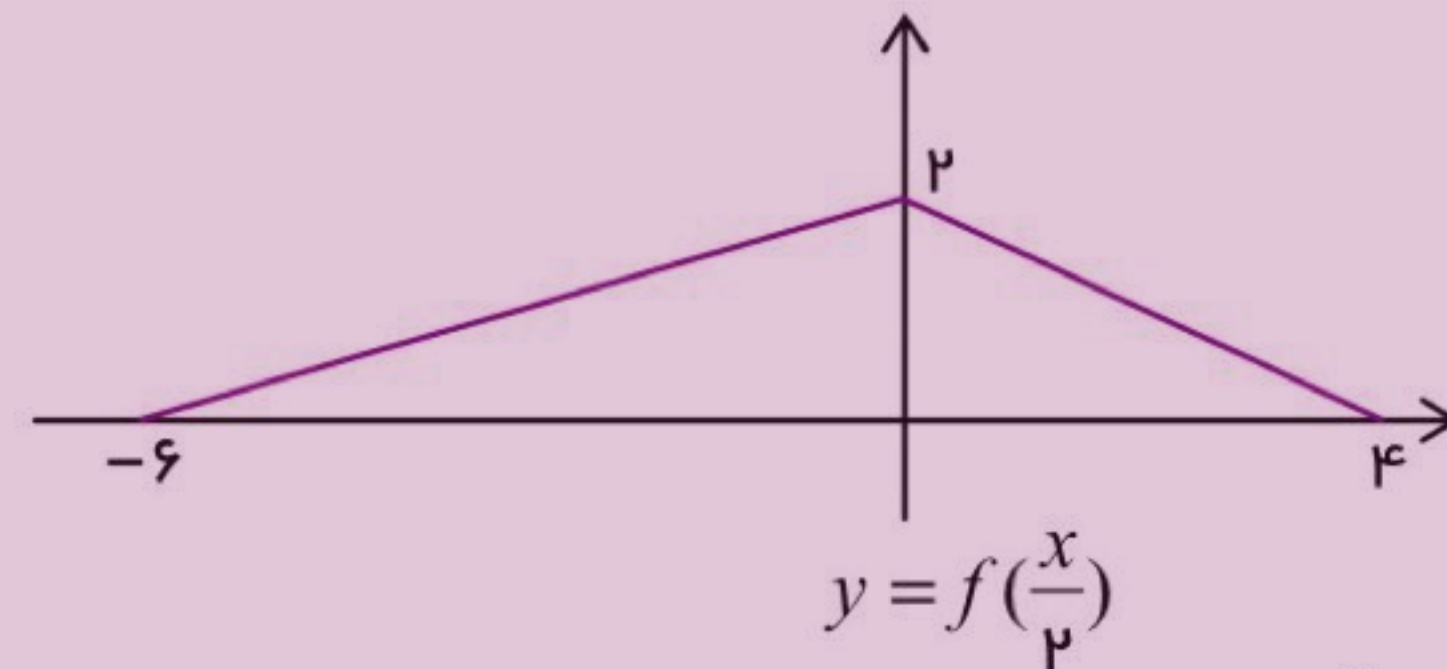
پاسخ

باید طول نقاط هر $k = \frac{1}{2}$ تقسیم شود؛ در واقع: طول نقاط در عدد ۲ ضرب می‌شود:

$$(-3, 0) \in f \xrightarrow{k = \frac{1}{2}} \left(\frac{-3}{\frac{1}{2}}, 0\right) = (-6, 0)$$

$$(0, 2) \in f \xrightarrow{0 \times 2 = 0} (0, 2)$$

$$(2, 0) \in f \xrightarrow{2 \times 2 = 4} (4, 0)$$



در نمودار حاصل شده، دامنه $[-6, 4]$ و برد $[0, 2]$ است.

حالت خاص: (مهم)

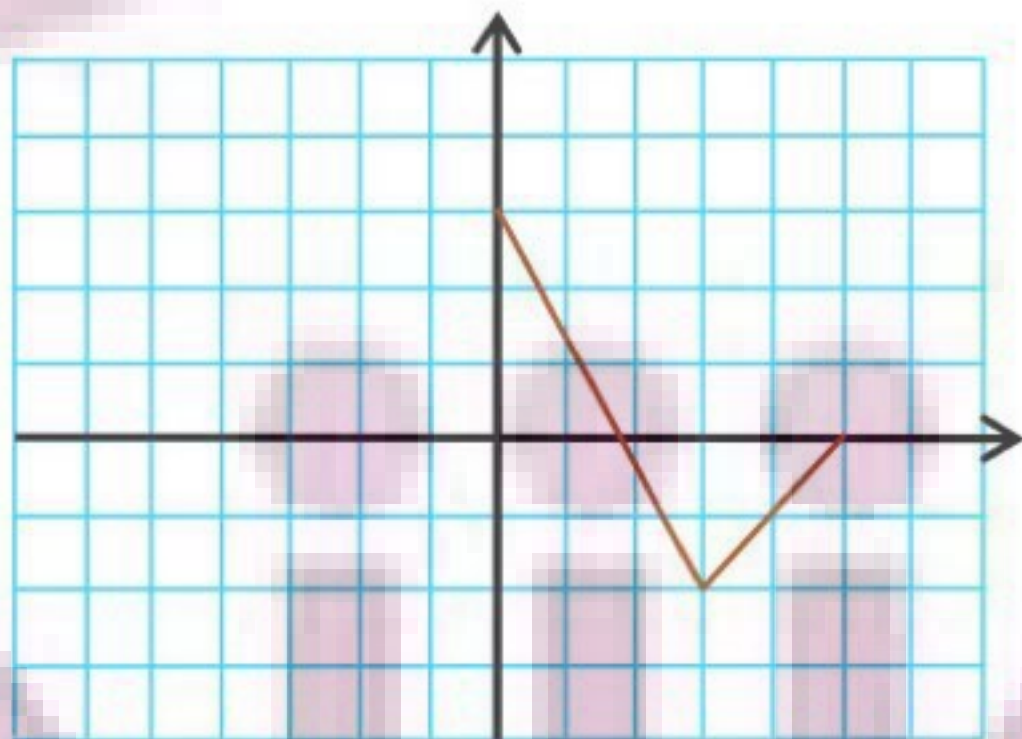
در رسم $y = f(kx)$ ، مقدار $k = -1$ ضابطه را به $y = f(-x)$ تبدیل می‌کند و برای رسم آن کافی است:

نمودار $f(x)$ نسبت به محور عرضها قرینه شود.

نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

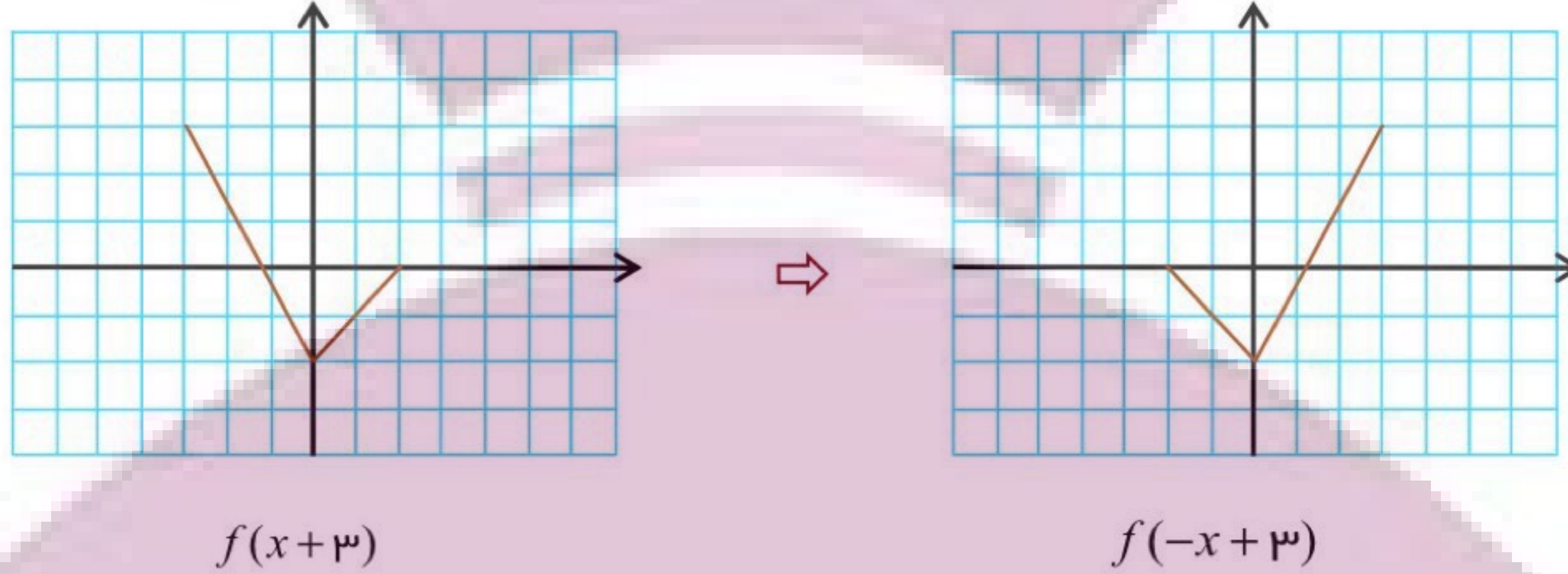
نمودار تابع $g(x) = f(3-x)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید.





پاسخ ✓

کافی است ابتدا $f(x+3)$ (سه واحد انتقال به چپ) و سپس $f(3-x)$ یعنی (قرینه نسبت به محور عرض) انجام گیرد:



در نمودار پایانی می‌بینید که:

$$D_g = [-2, 3]$$



توجه کنید:

در جابجایی افقی همیشه:

برد تابع ثابت مانده و فقط دامنه ممکن است تغییر کند.

توضیح بیشتر:

اگر دامنه‌ی تابع $f(x)$ به صورت $[x_1, x_2]$ باشد، آنگاه:

دامنه‌ی توابع $f(x-a)$ و $f(x+a)$ به ترتیب $[x_1+a, x_2+a]$ و $[x_1-a, x_2-a]$ هستند و دامنه‌ی $f(kx)$ برابر

$$\left[\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}\right] \text{ است. (اگر } k \text{ منفی باشد: } \left[\frac{x_2}{k}, \frac{x_1}{k}\right].)$$

برای نمونه:

اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-4, 1]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = -2f\left(-\frac{x}{2}\right) + 1$ برابر است با:

$$\xrightarrow{k=-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}}, \frac{-4}{-\frac{1}{2}}\right] = [-2, 8]$$

ایران تفتت

توشه‌ای برای موفقیت



ساده‌ترین نوع تغییر عمودی نمودار تابع به صورت زیر است:

انتقال عمودی:

وقتی نمودار f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + k$ ، طول نقاط ثابت مانده و فقط عرض آن‌ها را به اندازه‌ی k در جهت عمودی انتقال می‌دهیم. به طور دقیق‌تر:

- اگر k **مثبت** باشد، نمودار به اندازه‌ی k به **بالا** منتقل می‌شود.
- اگر k **منفی** باشد، نمودار به اندازه‌ی k به **پایین** منتقل می‌شود.

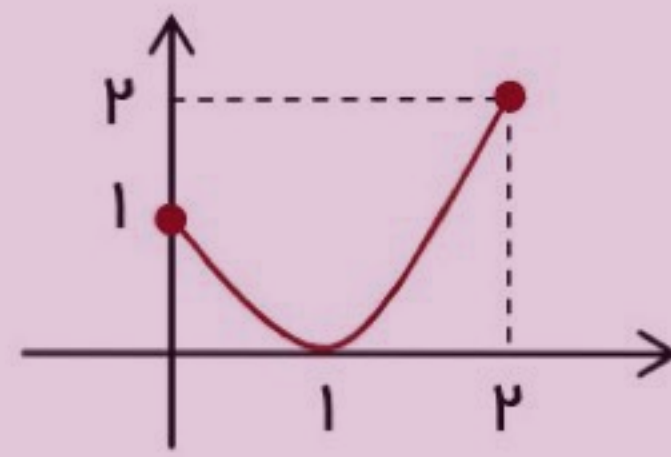
دلیل:

اگر نقطه‌ی (x_0, y_0) روی نمودار $y = f(x)$ باشد: $f(x_0) = y_0$ ، آنگاه انتقال یافته‌ی عمودی نقطه به اندازه‌ی k ، یعنی: $(x_0, y_0 + k)$ روی نمودار $y = f(x) + k$ قرار دارد:

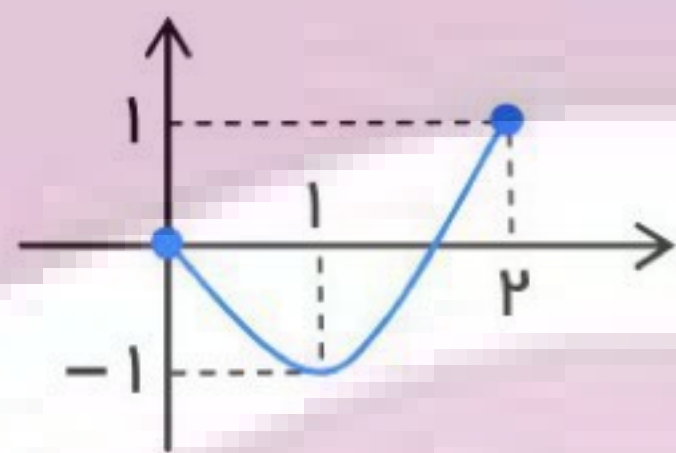
$$y = f(x) + k \xrightarrow{x=x_0} f(x_0) + k = y_0 + k$$

برای نمونه:

نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت روبرو داده شده است:



در رسم نمودار تابع $y = f(x) - 1$ ، عرض هر نقطه یک واحد کم می‌شود: دامنه و برد تابع جدید:

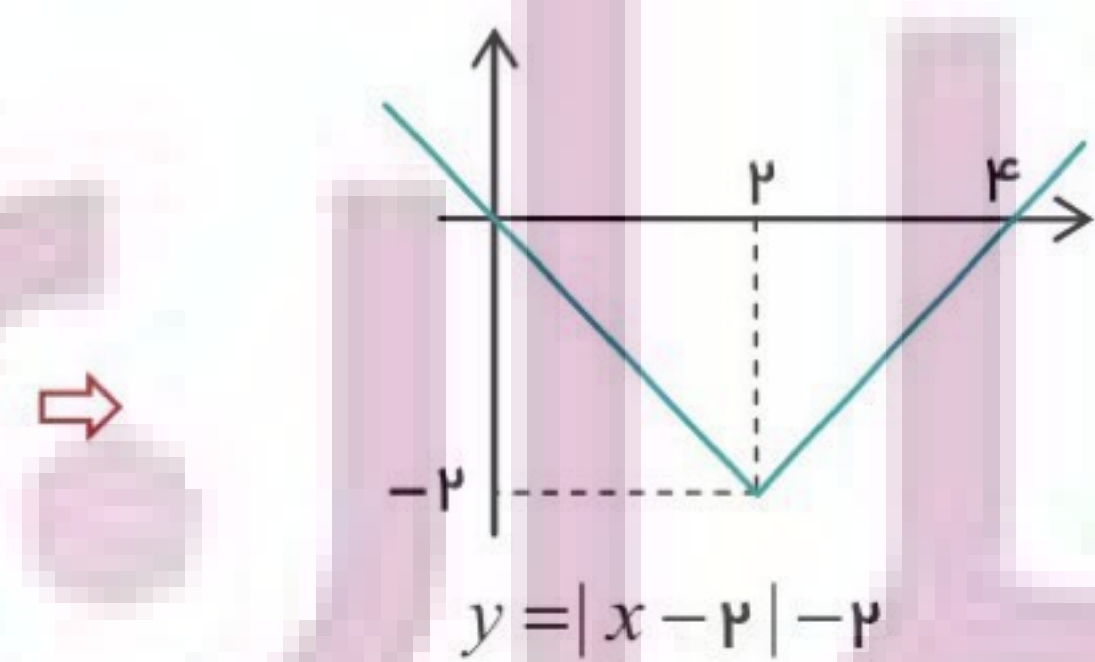
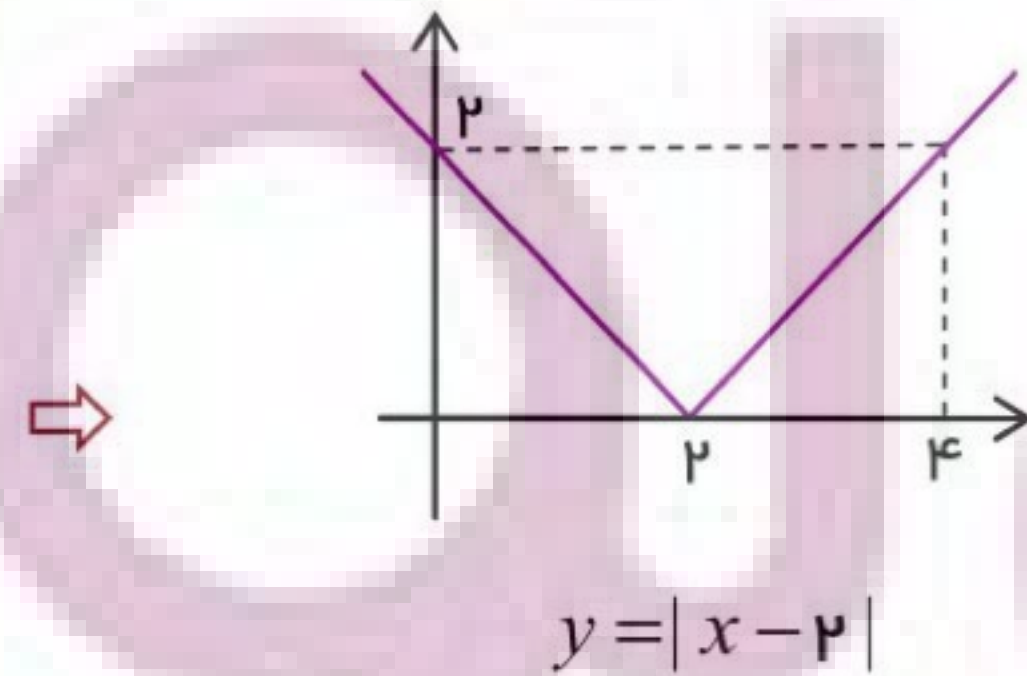
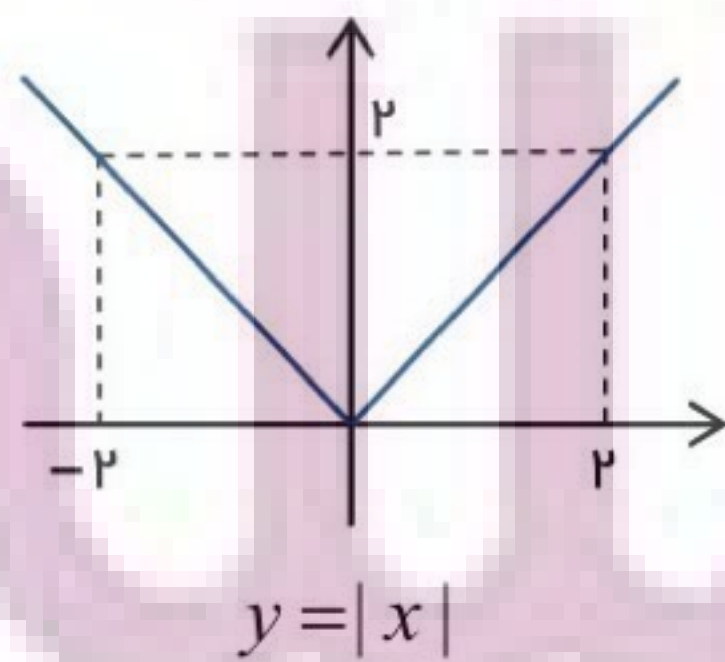


$$D = [0, 2] \quad \text{و} \quad R = [-1, 1]$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = |x - 2| - 2$ را با تغییرات مناسب نمودار $y = |x|$ رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.



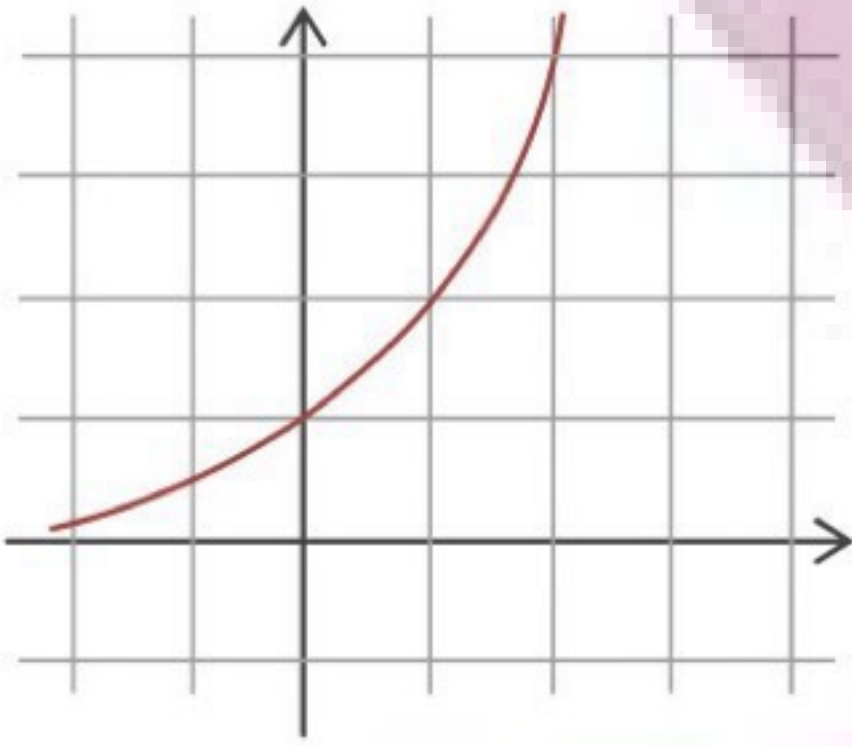
ابتدا انتقال به راست $|x - 2|$ و سپس انتقال به پایین:



می‌بینید که برد $R_f = [-2, +\infty)$ است.



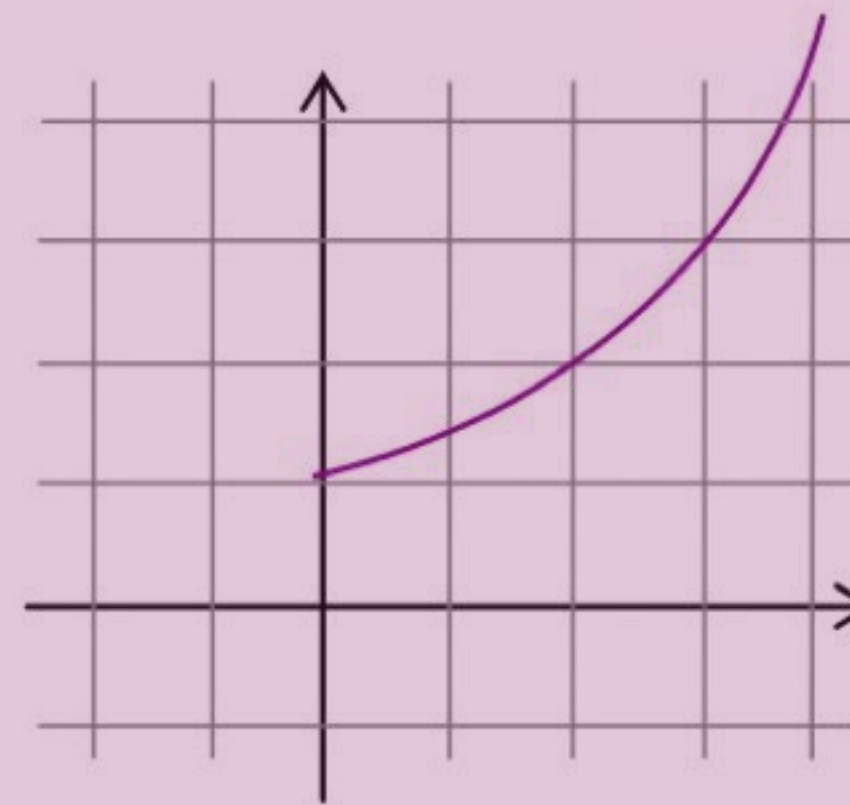
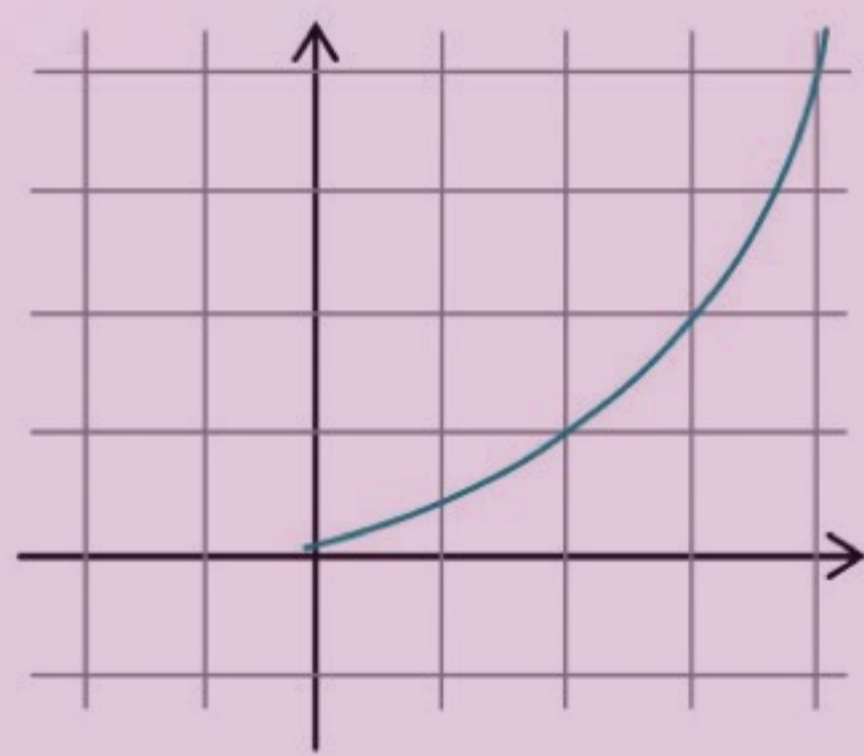
مثال: (مشابه کتاب) نمودار تابع $y = 2^x$ به صورت مقابل رسم شده است.



نمودار تابع $y = 2^{x-2} + 1$ را با انتقال رسم کنید.

پاسخ

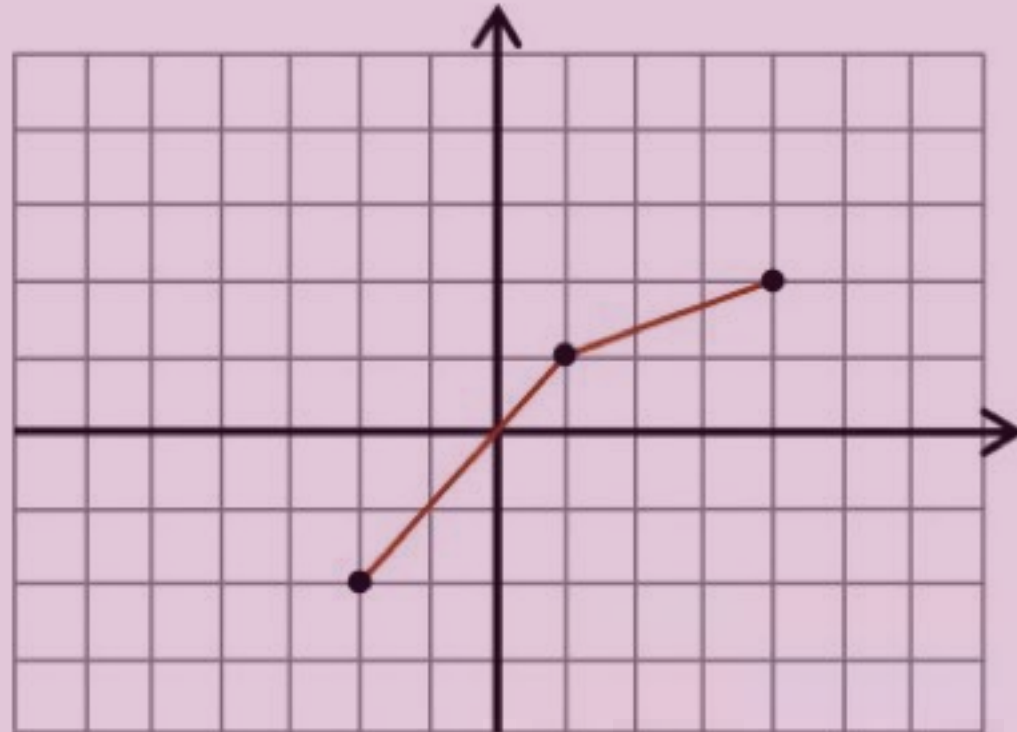
ابتدا دو واحد به راست $y = 2^{x-1}$ و سپس یک واحد به بالا:



نهایی؛ خرداد ۱۳۹۹

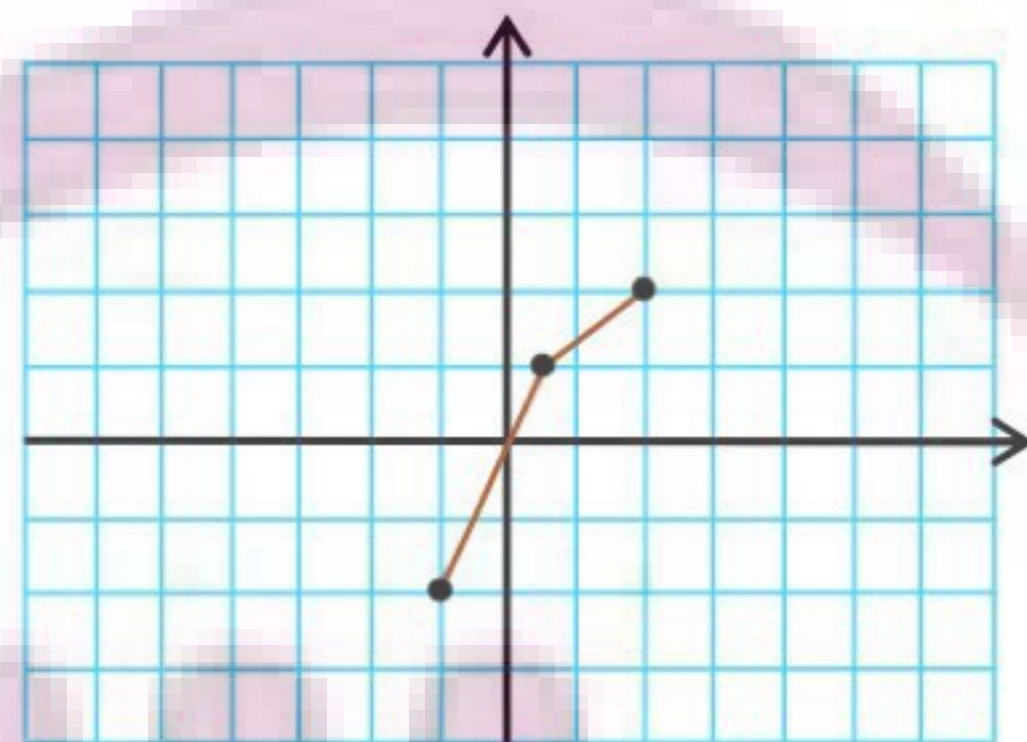
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

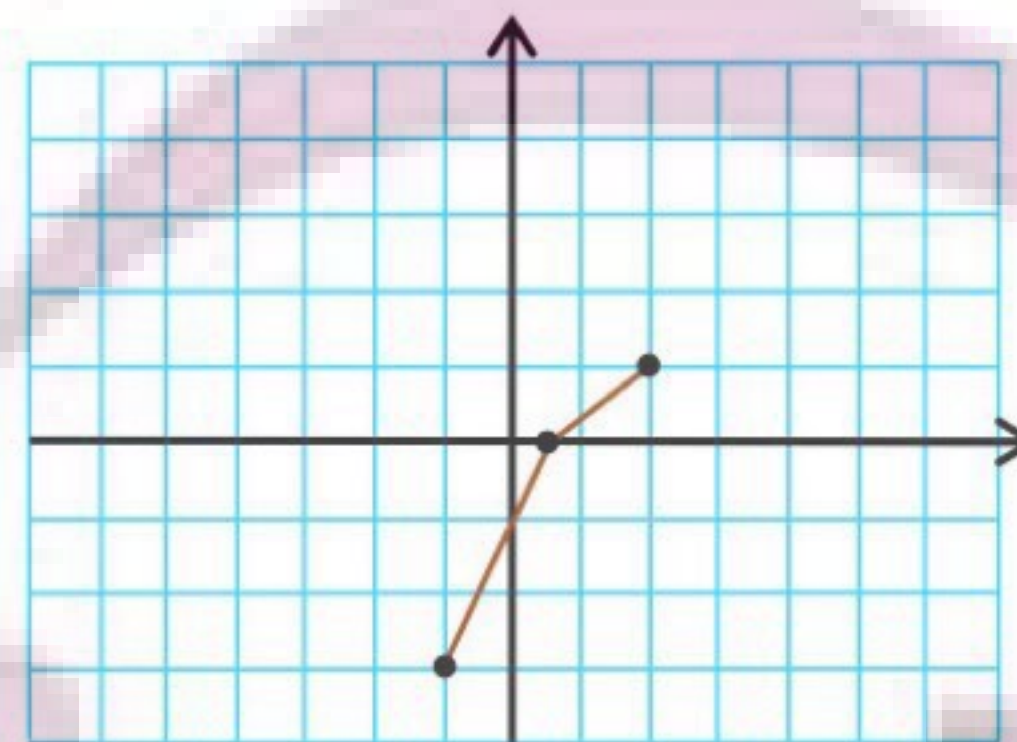


پاسخ

ابتدا $f(2x)$ (تقسیم طول نقاط بر ۲) و سپس $g(x) = f(2x) - 1$ (یک واحد به پایین):



$f(2x)$



$f(2x) - 1$

در نمودار پایانی می‌بینید که:

$$D_g = [-1, 2] \quad \text{و} \quad R_g = [-3, 1]$$



مثال: نمودار تابع $h(x) = \left|\frac{x}{2}\right| - 1$ را با تغییرات مناسب نمودار $f(x) = |x|$ رسم کنید.

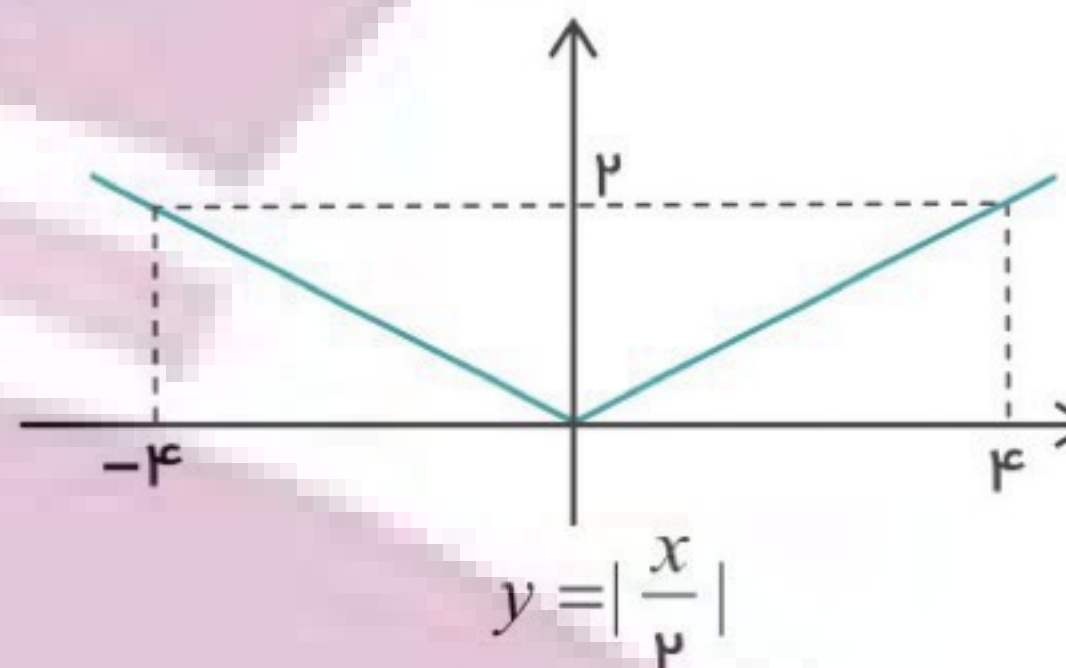
پاسخ ✓

ابتدا مشابه نمونه‌های بالا، انبساط افقی $|\frac{x}{2}|$ را رسم می‌کنیم:

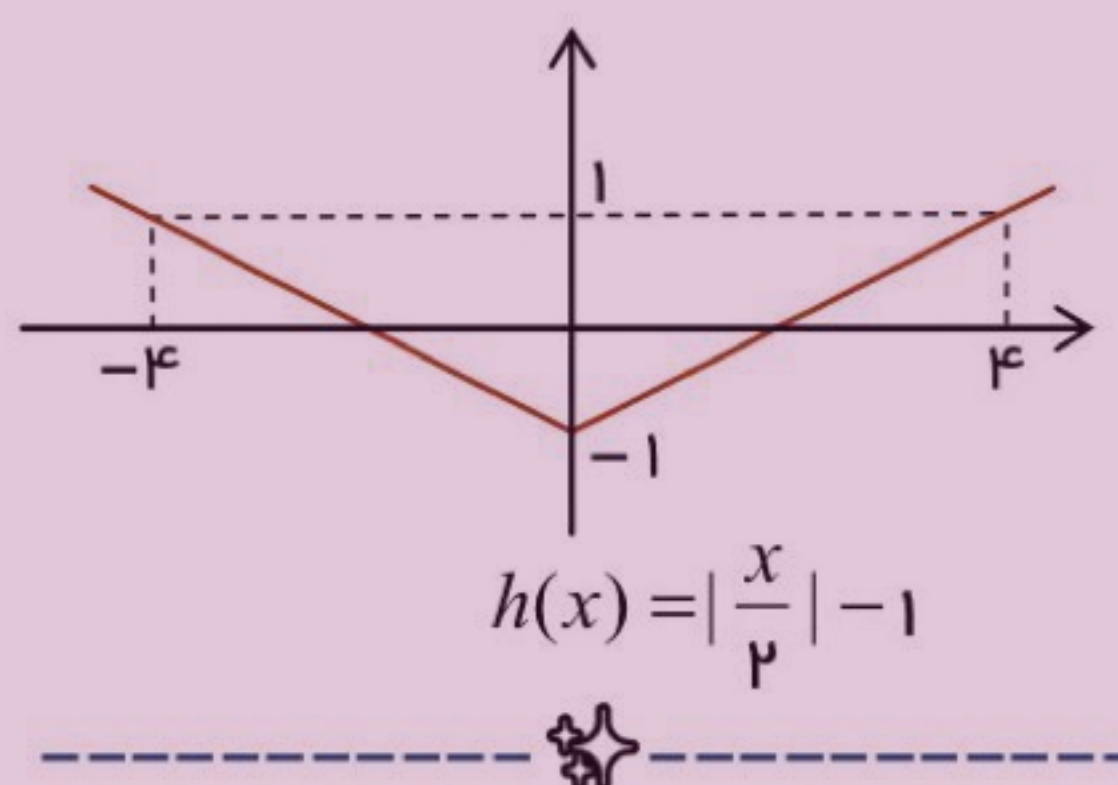
$$(-2, 2) \in f \xrightarrow{k=\frac{1}{2}} \left(\frac{-2}{\frac{1}{2}}, 2\right) = (-4, 2)$$

$$(0, 0) \in f \longrightarrow \left(\frac{0}{\frac{1}{2}}, 0\right) = (0, 0)$$

$$(2, 2) \in f \longrightarrow \left(\frac{2}{\frac{1}{2}}, 2\right) = (4, 2)$$



اکنون کافی است، عرض نقاط یک واحد کم شود:



روشی دیگر در تغییر عمودی نمودار:

انبساط و انقباض عمودی:

وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = k f(x)$ ، طول نقاط ثابت مانده و فقط عرض آن‌ها در عدد k ضرب می‌شود. به طور دقیق‌تر:

- اگر $k > 1$ باشد، اندازه‌ها بزرگ‌تر شده و نمودار به صورت عمودی گسترده می‌شود. (نمودار انبساط می‌یابد.)
- اگر $0 < k < 1$ باشد، اندازه‌ها کوچک‌تر شده و نمودار به صورت عمودی جمع می‌شود. (نمودار انقباض می‌یابد.)

دلیل:

اگر نقطه‌ی (x_0, y_0) روی نمودار $y = f(x)$ باشد: $f(x_0) = y_0$ ، آنگاه نقطه‌ی (x_0, ky_0) روی نمودار $y = k f(x)$ قرار دارد:

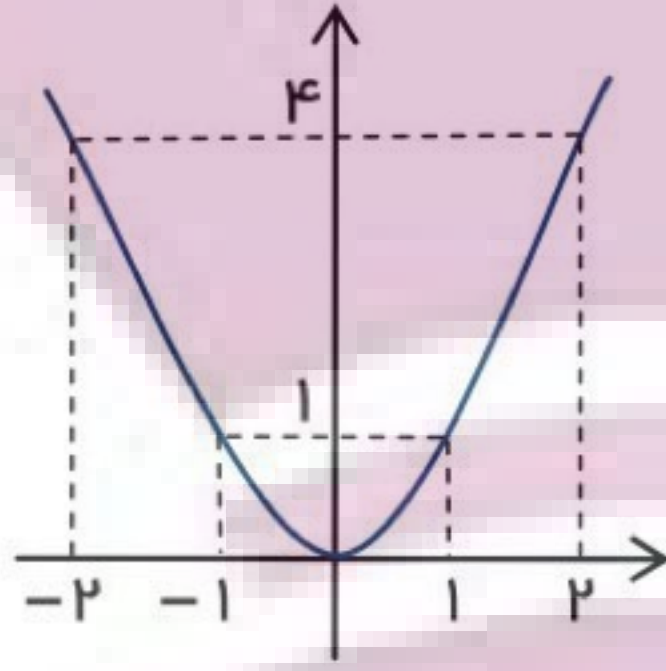
$$y = k f(x) \xrightarrow{x=x_0} k f(x_0) = ky_0$$

مثال: نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - 1$ را با تغییرات مناسب نمودار $y = x^2$ رسم کنید.

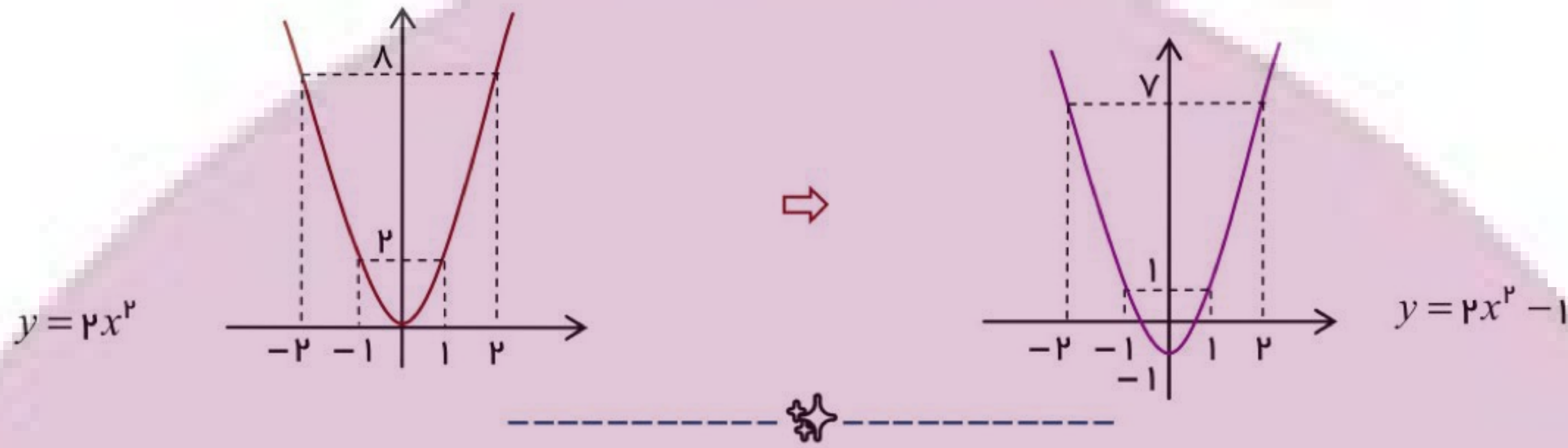


پاسخ ✓

ابتدا نمودار $y = x^2$ را رسم می‌کنیم:



اکنون در دو مرحله نمودار تابع g رسم می‌شود:



مثال: درستی یا نادرستی هر مورد را معلوم کنید.

(الف) اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-4, 1]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = -2f\left(\frac{x}{2}\right)$ برابر $[-2, \frac{1}{2}]$ است.

(ب) اگر نقطه‌ی $(-3, 1)$ روی نمودار f باشد، نقطه‌ی $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ روی نمودار تابع $y = -2f(2x)$ است.

(پ) برای رسم نمودار تابع $y = |2x - 1|$ توسط نمودار $y = |x - 1|$ ، کافی است طول هر نقطه از نمودار تابع دوم بر عدد ۲ تقسیم شود.

پاسخ ✓

الف) نادرست است؛

چون طول نقاط بر $\frac{1}{2}$ تقسیم شده و خواهیم داشت: $D = [-8, 2] \xrightarrow{\div \frac{1}{2}} [-4, 1]$

ب) نادرست است؛

طول نقطه بر ۲ تقسیم شده و به $-\frac{3}{2}$ تبدیل می‌شود، ولی عرض نقطه تغییر نمی‌کند: $(-3, 1) \rightarrow (-\frac{3}{2}, 1)$

پ) درست است؛

اگر قرار دهیم: $f(x) = |x - 1|$ ، در این صورت $f(2x) = |2x - 1|$ بوده و روش گفته شده برای رسم صحیح است.

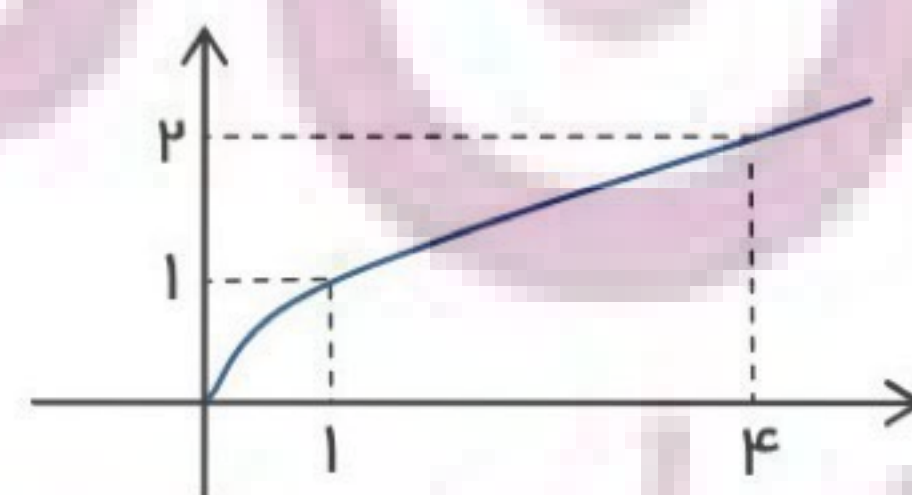


مثال: با رسم نمودار $y = \sqrt{x}$ توسط نقطه گذاری، نمودار تابع $y = -2\sqrt{x} + 1$ را رسم کنید.

پاسخ ✓

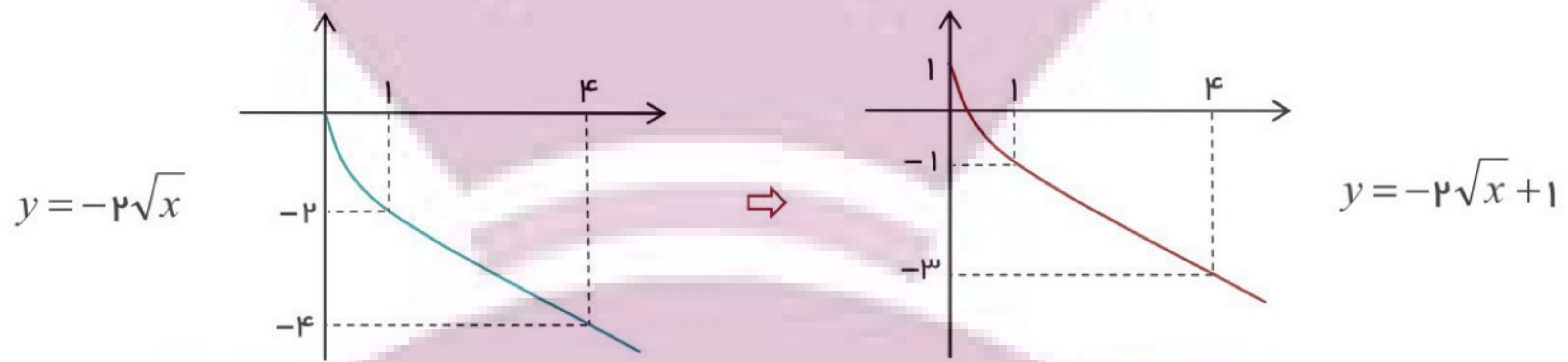
جدولی از مقادیر تابع با طول‌های نامنفی تشکیل داده و نمودار را رسم می‌کنیم:

x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲





اکنون در دو مرحله: ابتدا ضرب عرض‌ها در -۲ و سپس جمع عرض‌های جدید با عدد ۱ ، نمودار خواسته شده رسم می‌شود:



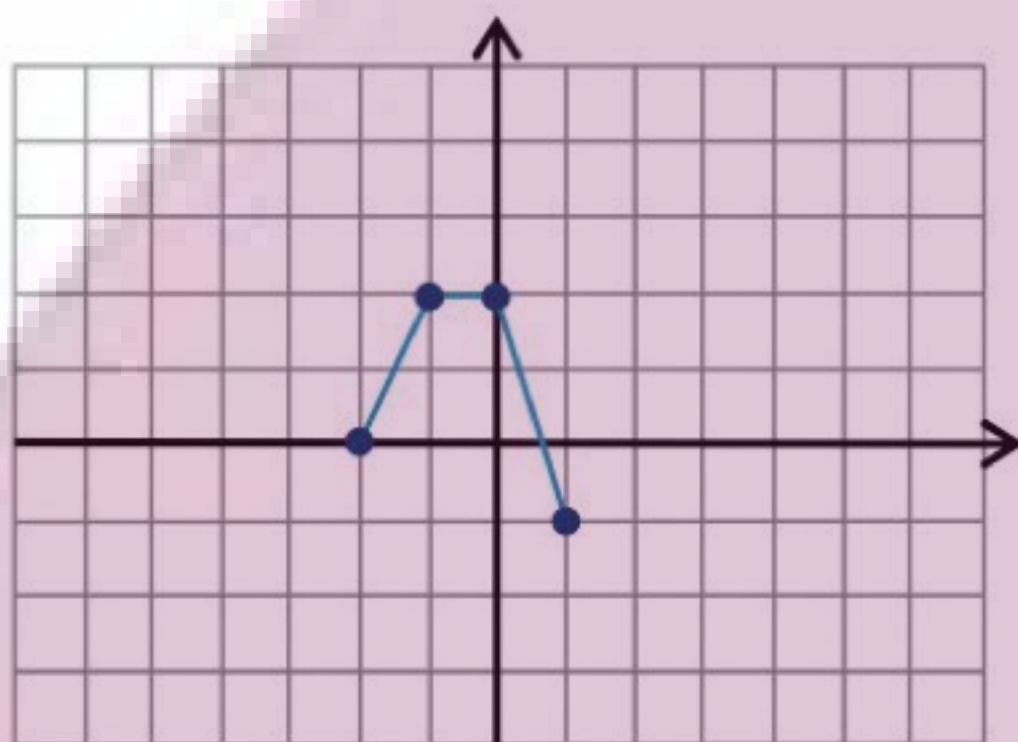
می‌بینید در تابع آخری، برد $R = (-\infty, 1]$ است.



نهایی؛ خرداد ۱۳۹۸

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

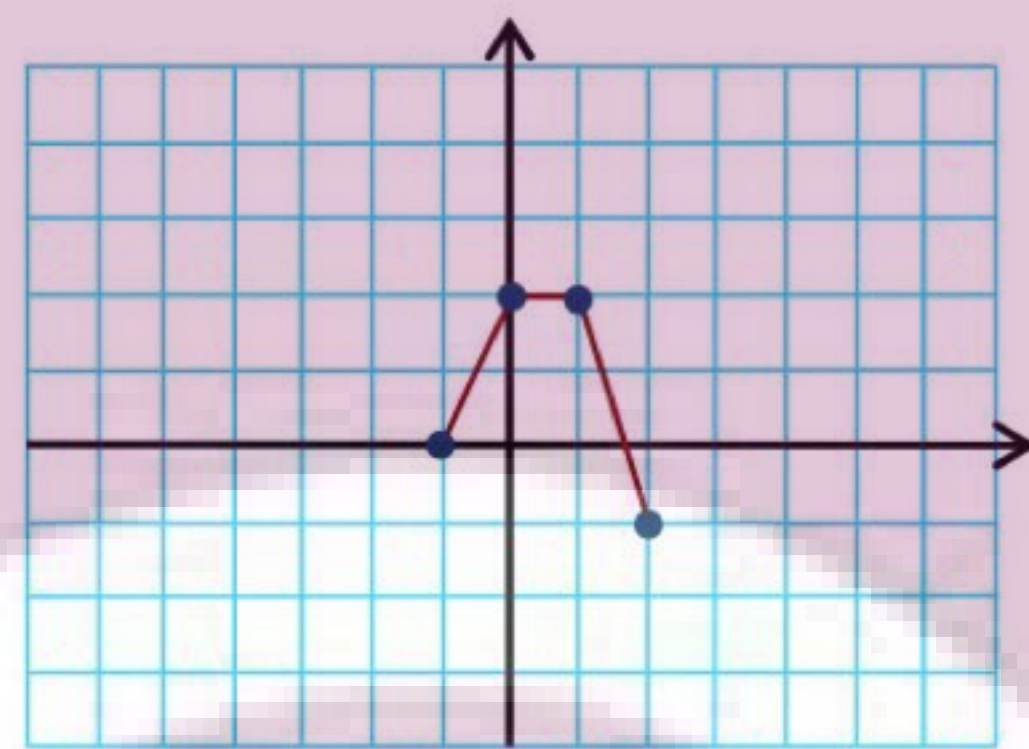


پاسخ ✓

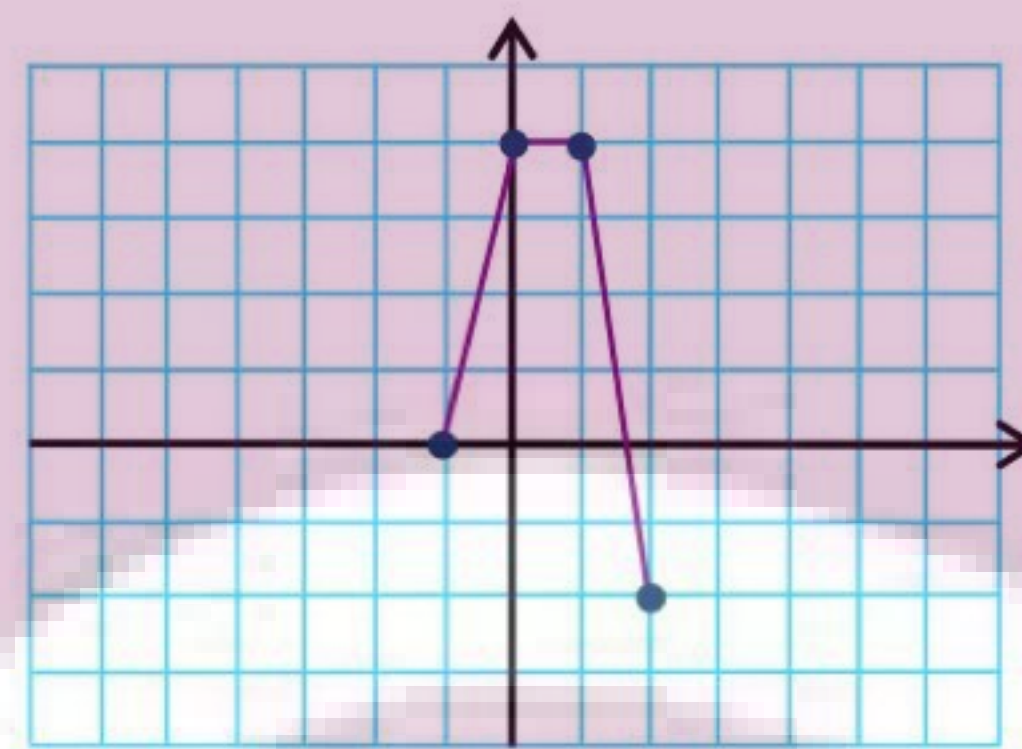
به آسانی و با دو تبدیل متوالی زیر، نمودار رسم می‌شود:

اول: تبدیل $(x \rightarrow x-1)$ ، یک واحد انتقال به راست.

دوم: تبدیل $f(x-1) \rightarrow 2f(x-1)$ ، انبساط عمودی با $k = 2$.



$f(x-1)$



$2f(x-1) = g(x)$

در نمودار پایانی می‌بینید که:

$R_g = [-2, 4]$ و $D_g = [-1, 2]$



توجه کنید:

در رسم نمودار $y = -f(x)$ وقتی نمودار تابع f داده شده، چون عرض‌ها قرینه می‌شوند:

نمودار تابع f نسبت به محور طول قرینه می‌شود.

نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

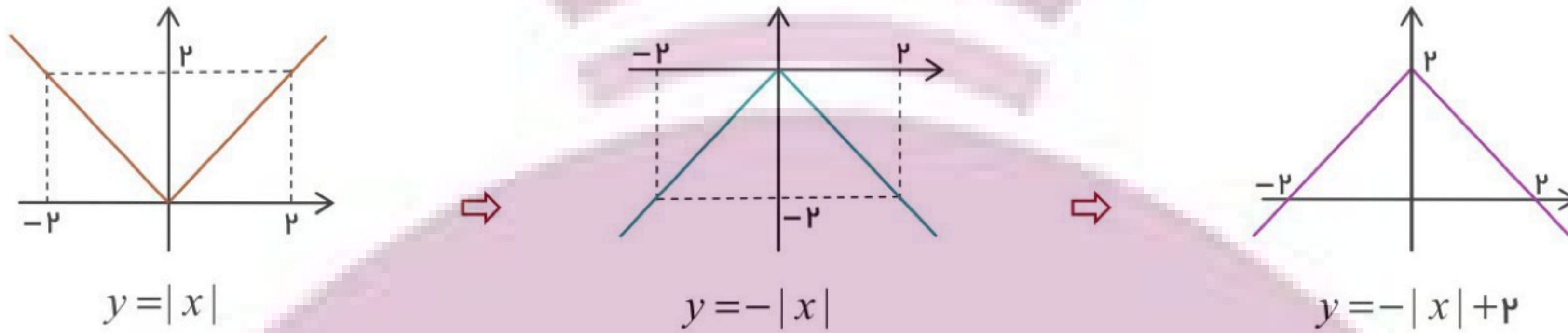
نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به کدام محور است؟

(پدیدهی: پاسخ محور طول است.)

مثال: مساحت محدود به نمودار $y = -|x| + 2$ و محور طولها را بیابید.

پاسخ

با دو چابچایی و په سادگی نمودار رسم می‌شود:



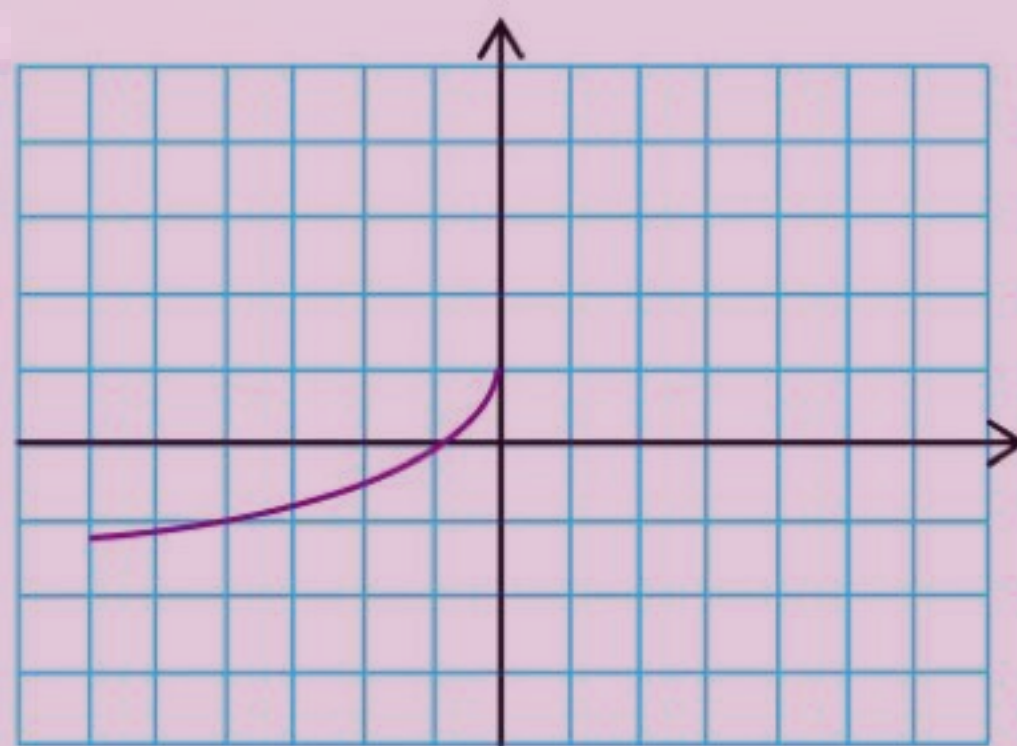
می‌بینید که محدوده‌ی مورد نظر، مثلثی با ارتفاع و قاعده‌ی مشخص است:

$$S = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$



مثال: (مشابه کتاب) نمودار مقابل فقط توسط دو عمل انتقال و قرینه

سازی از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه‌ی تابع مربوطه را بنویسید.



پاسخ

با قدری دقت می‌توان فهمید بعد از رسم نمودار $y = \sqrt{x}$:

اول: قرینه سازی نسبت به محور طول: $y = -\sqrt{x}$

دوم: قرینه سازی نسبت به محور عرض: $y = -\sqrt{-x}$

سوم: یک واحد انتقال عمودی به سمت بالا: $y = -\sqrt{-x} + 1$

پس ضابطه‌ی تابع به صورت $y = -\sqrt{-x} + 1$ است.



توجه کنید:

در انتقال عمودی همیشه:

دامنه‌ی تابع ثابت مانده و فقط برد تغییر خواهد کرد.

توضیح بیشتر:

اگر برد تابع $f(x)$ به صورت $[y_1, y_p]$ باشد، آنگاه:

برد توابع $f(x) + k$ و $f(x) - k$ به ترتیب $[y_1 + k, y_p + k]$ و $[y_1 - k, y_p - k]$ هستند و برد $kf(x)$ برابر $[ky_1, ky_p]$

است. (اگر k منفی باشد: $[ky_p, ky_1]$).

برای نمونه:

اگر برد تابع f بازه‌ی $[-4, 1]$ باشد، برد تابع $y = -2f(-\frac{x}{2}) + 1$ برابر است با:

$$[-2(1) + 1, -2(-4) + 1] = [-1, 9]$$



بخش ۳

توابع چند جمله‌ای

<http://www.darsamoz.com>

شکل کلی تابع چند جمله‌ای:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + l$$

که a, b, \dots, k, l عددهایی حقیقی و n عددی طبیعی و درجه‌ی تابع است.

چند حالت ویژه‌ی این توابع:

- **تابع ثابت:**

ساده‌ترین تابع به صورت $f(x) = c$ چند جمله‌ای درجه‌ی صفر است. (c عدد ثابت)

- **تابع خطی:**

تابع به صورت $f(x) = ax + b$ چند جمله‌ای درجه‌ی یک می‌باشد.

- **تابع درجه دوم:**

این تابع به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است، نمودارش همیشه یک سهمی است که در سال یازدهم بررسی گردید.

- **تابع درجه سوم:**

این توابع به صورت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هستند که بررسی بیشتری از نمودار آنها در ادامه‌ی این درس انجام خواهد شد.

نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

درجه‌ی تابع $f(x) = x^2(1-x)^5$ را مشخص کنید.پاسخ

درجه‌ی ۷ است، زیرا:

بزرگ‌ترین درجه‌ی $(1-x)^5$ با پنج بار ضرب $(1-x)$ در خودش، مربوط به جمله‌ی $-x^5$ است و در نتیجه، در $f(x) = x^2(1-x)^5$ ، بزرگ‌ترین درجه مربوط به $-x^7 = x^2(-x^5)$ خواهد بود.



🌟 **مثال:** در یک تابع خطی f ، رابطه‌ی $f(x+2) = f(x) + 2$ برقرار بوده و $f(2) = 5$ است. مقدار $f(-1)$ را حساب کنید.

پاسخ طبق شرط اول با قرار دادن $x = 2$ داریم:

$$f(2+2) = f(2) + 2 \Rightarrow f(4) = 5 + 2 = 7$$

تابع را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر گرفته و با جایگذاری مقادیر در ضابطه‌ی تابع می‌نویسیم:

$$f(2) = 5 \rightarrow 2a + b = 5$$

$$f(4) = 7 \rightarrow 4a + b = 7$$

از تفریق دو معادله $a = 1$ و سپس $b = 3$ بدست خواهند آمد و بنابراین:



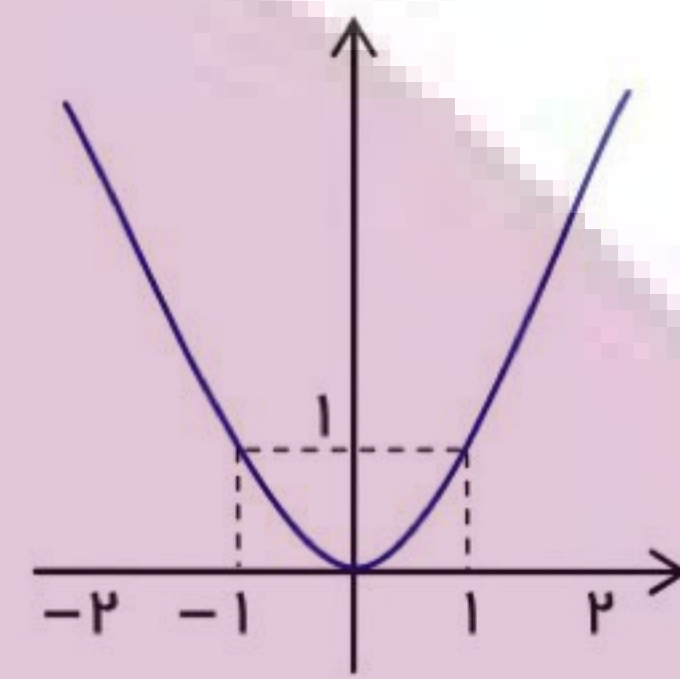
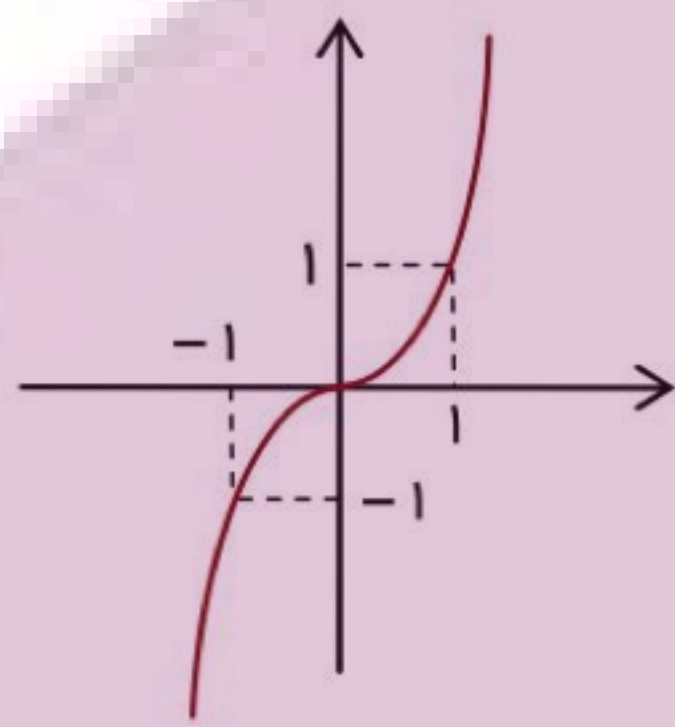
$$f(x) = x + 3 \Rightarrow f(-1) = -1 + 3 = 2$$



مثال: ابتدا نمودار تابع‌های $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ را رسم کنید و سپس توسط نمودار، مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x) > g(x)$ را مشخص کنید.

پاسخ

هر دو نمودار با تشکیل جدول مقادیر به آسانی رسم می‌شوند:



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = x^3$	-۸	-۱	۰	۱	۸

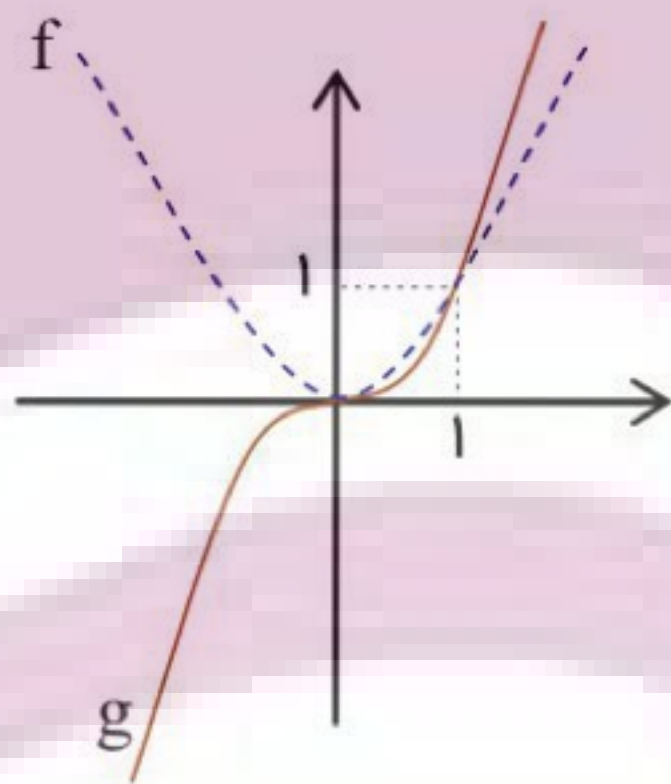
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = x^2$	۴	۱	۰	۱	۴

می‌دانیم:

عددهای بین صفر و یک هر قدر به توان بزرگ‌تری برسند، مقدارشان کوچک‌تر می‌شود. یعنی:

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^3 < x^2$$

بنابراین دو نمودار بالا در مقایسه با هم چنین خواهند بود:



اکنون:

مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x) > g(x)$ بخش‌هایی از محور طول‌هاست که در آن نمودار f بالاتر از نمودار g قرار داشته باشد:

$$f(x) > g(x) \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$$



نهایی؛ خرداد ۱۳۹۹

نمودار تابع $g(x) = x^3$ در فاصله‌ی $[0, 1]$ پایین‌تر از نمودار تابع $f(x) = x^2$ قرار دارد. (درست - نادرست)

پاسخ

نادرست است؛

در نقاط $x = 0$ و $x = 1$ نمودارها بر هم منطبق بوده، ولی بین 0 و 1 نمودار g پایین‌تر قرار دارد.



مثال: (از کتاب) نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک نمودار $y = x^3$ رسم کنید.

پاسخ ✓

با اضافه و کم کردن عدد ۱ در سمت راست، ضابطه قابل رسم توسط انتقال می‌شود:

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1$$

پس کافی است نمودار $y = x^3$ ابتدا یک واحد به راست و سپس یک واحد به بالا منتقل شود:



مثال: فقط توضیح دهید که نمودار تابع $y = -(x-1)^3 + 3$ چگونه توسط نمودار $y = x^3$ رسم می‌شود.

پاسخ ✓

نمودار در طی سه مرحله رسم می‌شود:

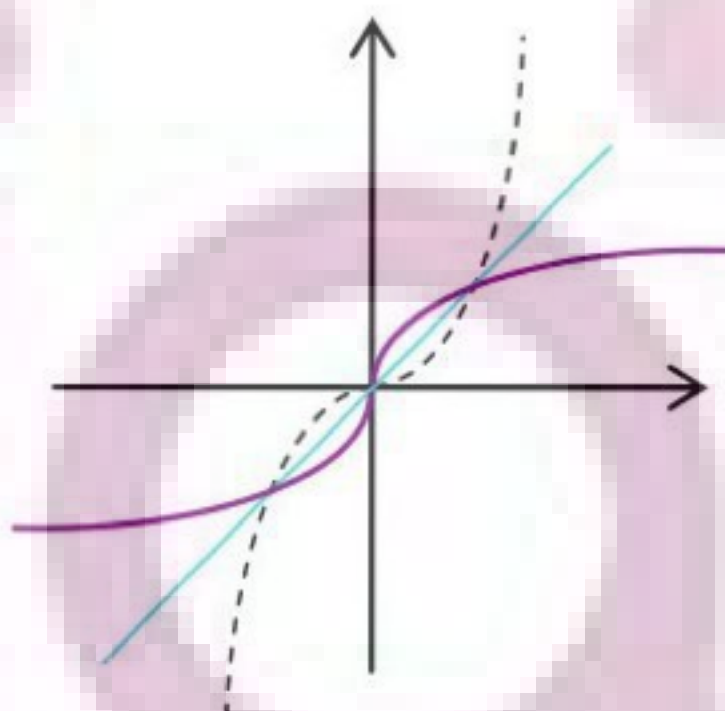
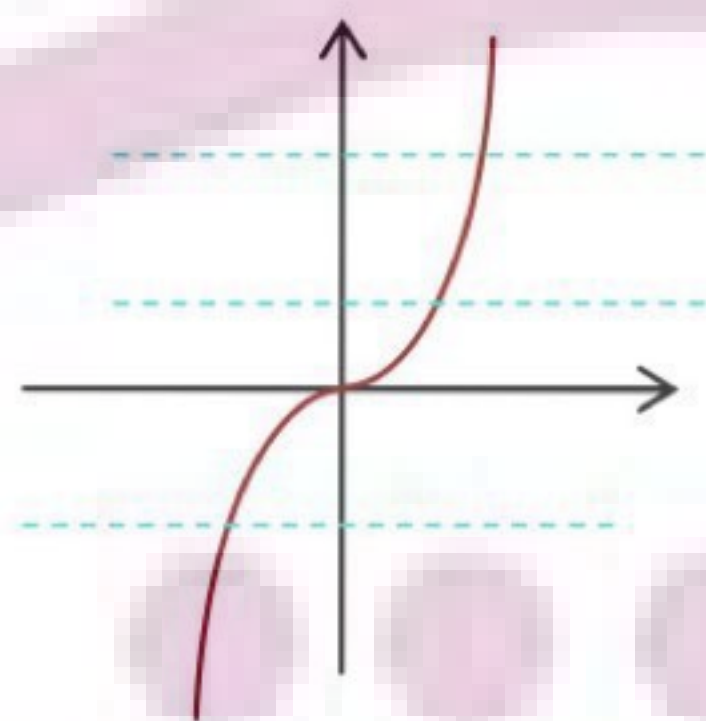
- بعد از رسم $y = x^3$ ، نمودار یک واحد به راست منتقل شده تا $y = (x-1)^3$ رسم شود.
- نمودار حاصل در مرحله‌ی قبل را نسبت به محور طول قرینه کرده تا $y = -(x-1)^3$ رسم شود.
- عرض نقاط نمودار حاصل از مرحله‌ی قبل را با عدد ۳ جمع کرده تا $y = -(x-1)^3 + 3$ رسم شود.

مثال: (از کتاب) با توجه به نمودار $f(x) = x^3$ ، نشان دهید این تابع وارون‌پذیر است. سپس، نمودار f^{-1} را رسم کرده و ضابطه‌ی تابع وارون را تعیین کنید.

پاسخ ✓

چون هر خط افقی نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند، تابع f یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

رسم با قرینه سازی نمودار نسبت به خط انجام می‌شود:



تعیین ضابطه‌ی وارون به روش گفته شده در پایه‌ی یازدهم:

$$y = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$



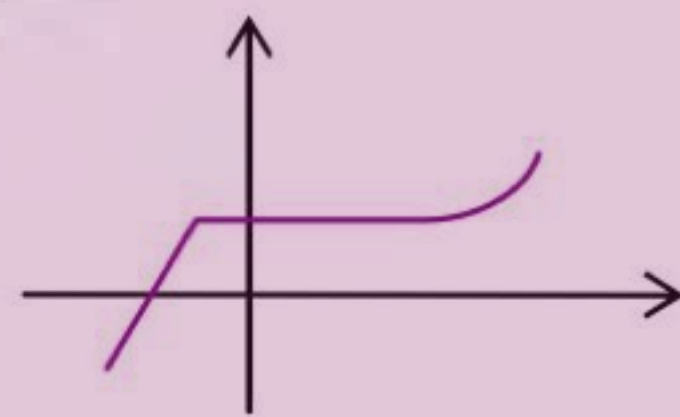
فرض کنید f یک تابع باشد.

❖ f را «صعودی» گوئیم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) \leq f(x_2)$. یعنی:

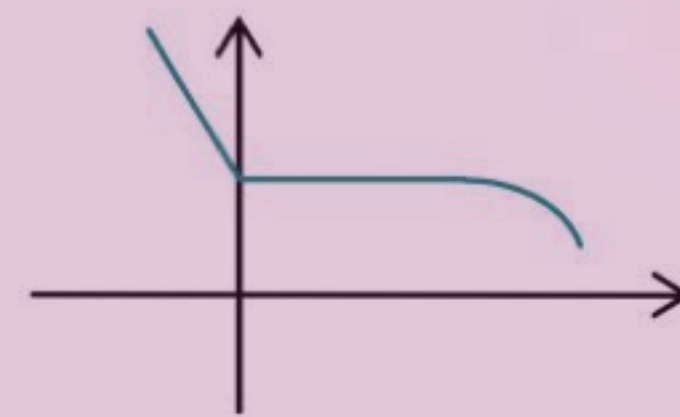
با زیاد شدن x ، مقدار تابع یا ثابت بماند و یا زیاد شود.

❖ f را «نزولی» گوئیم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) \geq f(x_2)$. یعنی:

با زیاد شدن x ، مقدار تابع یا ثابت بماند و یا کم شود.



تابع صعودی



تابع نزولی

❖ تابع f را «اکیداً صعودی» گوئیم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$. یعنی:

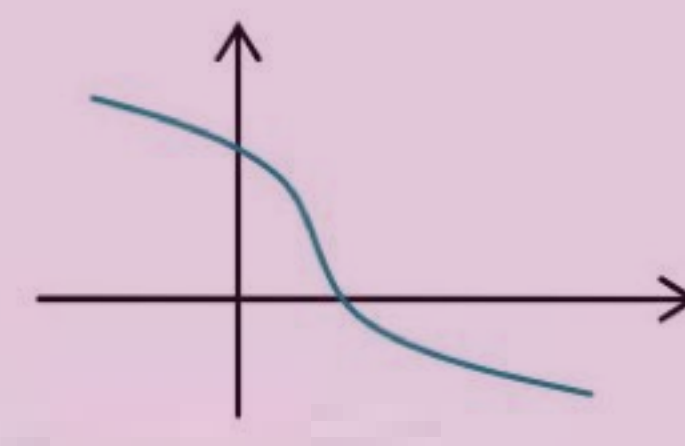
با زیاد شدن x ، مقدار تابع زیاد می‌شود.

❖ تابع f را «اکیداً نزولی» گوئیم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$. یعنی:

با زیاد شدن x ، مقدار تابع کم می‌شود.



تابع اکیداً صعودی



تابع اکیداً نزولی

بعلاوه:

تابع صعودی یا نزولی را «یکنوا» و تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی را «اکیداً یکنوا» گوئیم.

توجه کنید:

طبق تعریف، تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و تابع اکیداً نزولی، نزولی هم محسوب می‌شود.

🌟 **مثال:** تابع ثابت $f(x) = k$ شرط صعودی بودن را دارد، زیرا $f(x_1) \leq f(x_2)$ همان $k \leq k$ بوده که برقرار است. واضح

است که تابع ثابت نزولی هم هست. بنابراین:

تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است؛ ولی اکیداً یکنوا نیست.



نهایی؛ خرداد ۱۳۹۹

اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه اکیداً صعودی هم خواهد بود. (درست □ - نادرست □)



پاسخ ✓

نادرست است؛

برای نمونه، تابع ثابت $f(x) = 1$ صعودی است، ولی اکیداً صعودی نیست.



مثال: با رسم، یکنوایی توابع $y = [x]$ ، $y = x|x|$ ، $y = x^3$ و $y = |x| + x$ را روی \mathbb{R} بررسی کنید.

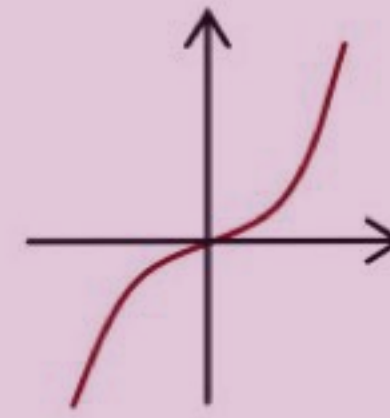
پاسخ ✓

• نمودار تابع پله‌ای $y = [x]$ صعودی است، ولی صعودی اکید نیست.

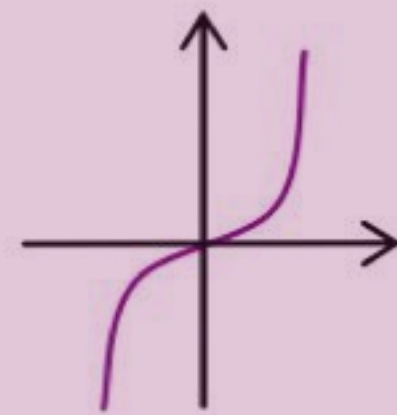


• نمودار تابع $y = x|x|$ به صورت زیر بوده و صعودی اکید است:

$$y = x|x| = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

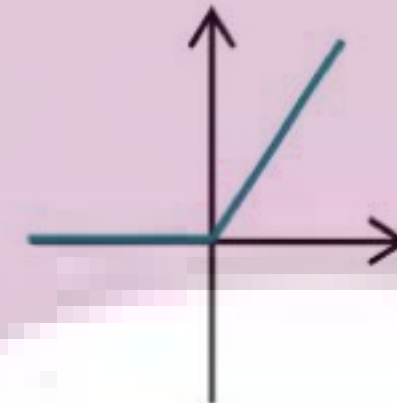


• نمودار تابع $y = x^3$ را قبلاً دیده‌ایم و صعودی اکید است:



• نمودار تابع $y = |x| + x$ به صورت زیر، صعودی هست، ولی صعودی اکید نیست:

$$y = x + |x| = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

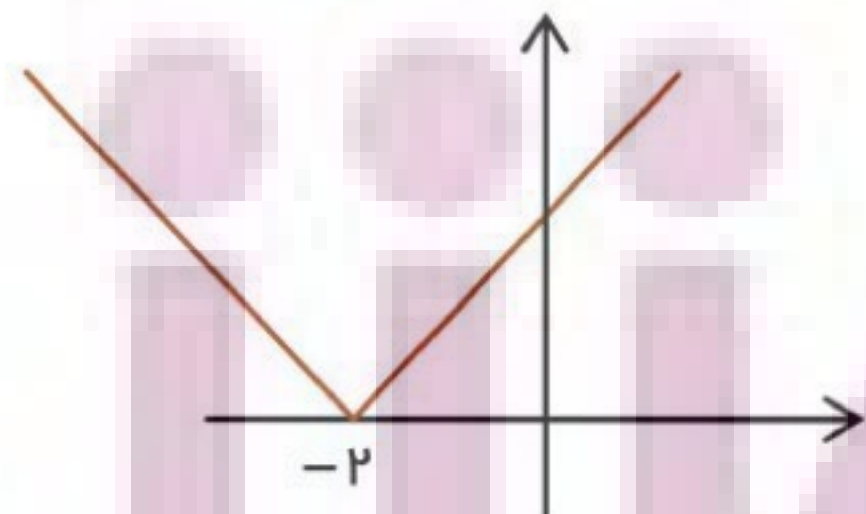


نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

تابع $h(x) = |x + 2|$ در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟

پاسخ ✓

به روش انتقال افقی، نمودار تابع رسم می‌شود:



تابع در بازه‌ی $[-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

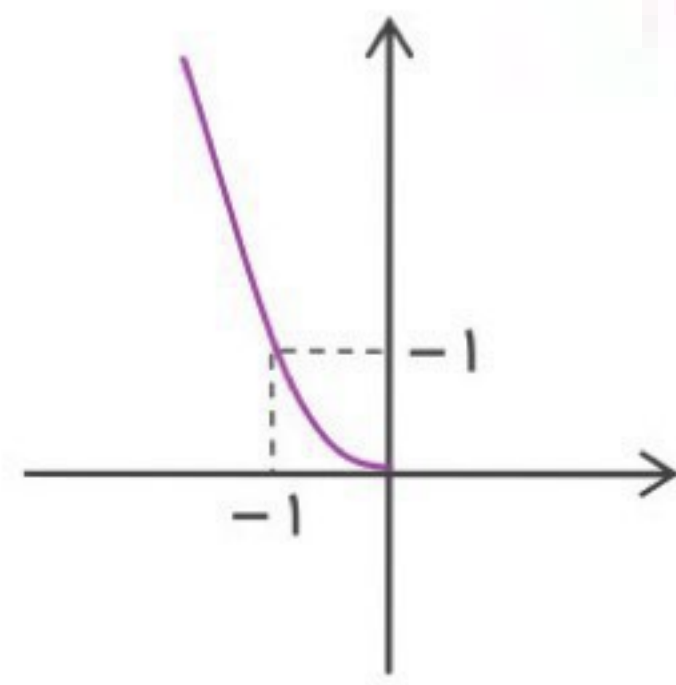


توجه کنید:

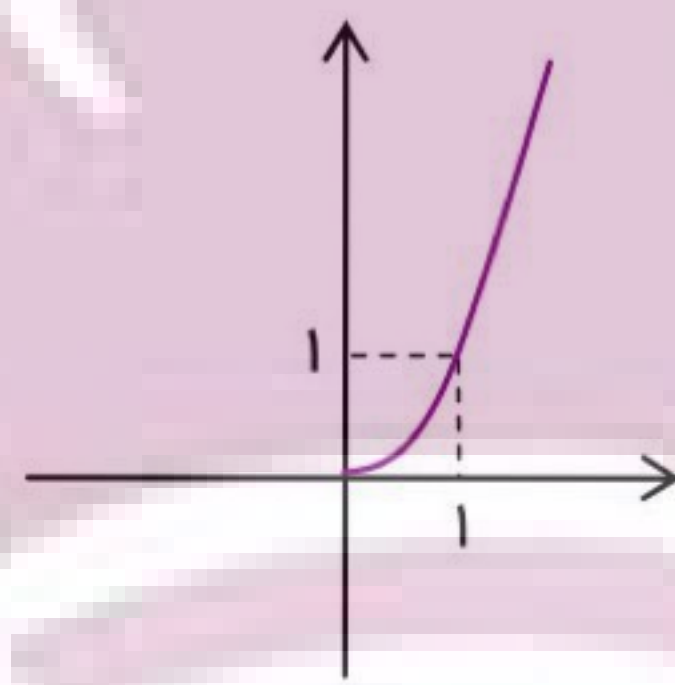
گاهی مانند نمونه‌ی قبل، تابع روی دامنه‌ی خود یکنوا نیست؛ اما:

می‌توانیم دامنه‌ی آن را طوری محدود کنیم، تا در آن دامنه یکنوا باشد. برای نمونه؛

تابع $y = x^3$ یکنوا نیست، ولی:



اکیداً نزولی



اکیداً صعودی

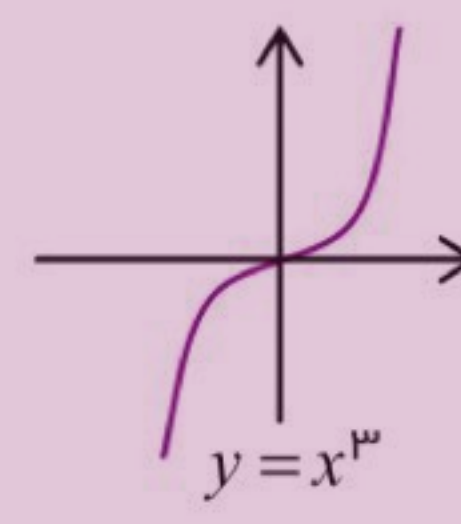
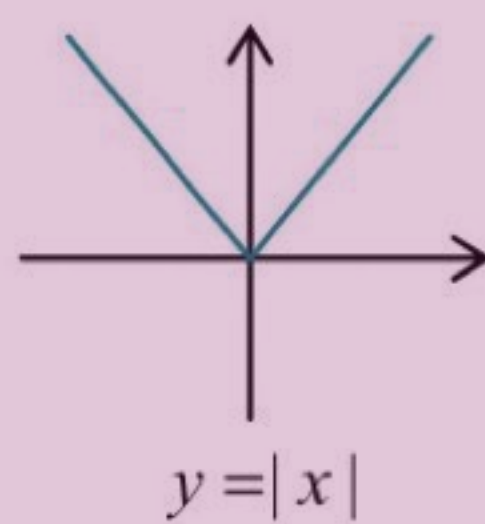
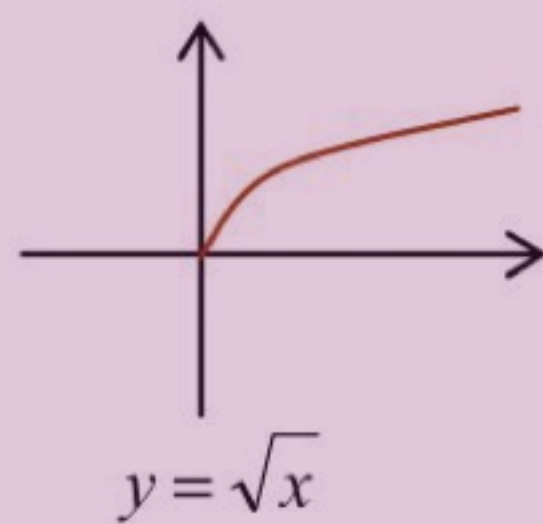
- روی بازه $[0, \infty)$ اکیداً صعودی است.
- روی بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است.

مثال: درستی یا نادرستی هر مورد را معلوم کنید:

- (الف) تابع $y = -x^3$ در بازه $(-\infty, 0)$ صعودی است.
 (ب) تابع $y = |x|$ در بازه $[0, 3]$ اکیداً نزولی است.
 (پ) تابع $y = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

پاسخ ✓

نمودارهای سه تابع زیر را در نظر می‌گیریم:



(الف) نادرست است؛

اگر نمودار $y = x^3$ را نسبت به محور طول قرینه کنید، نمودار همواره اکیداً نزولی خواهد شد.

(ب) با توجه به نمودار درست است.

(پ) با توجه به نمودار نادرست است.



نهایی؛ خرداد ۱۴۰۱

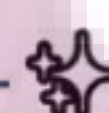
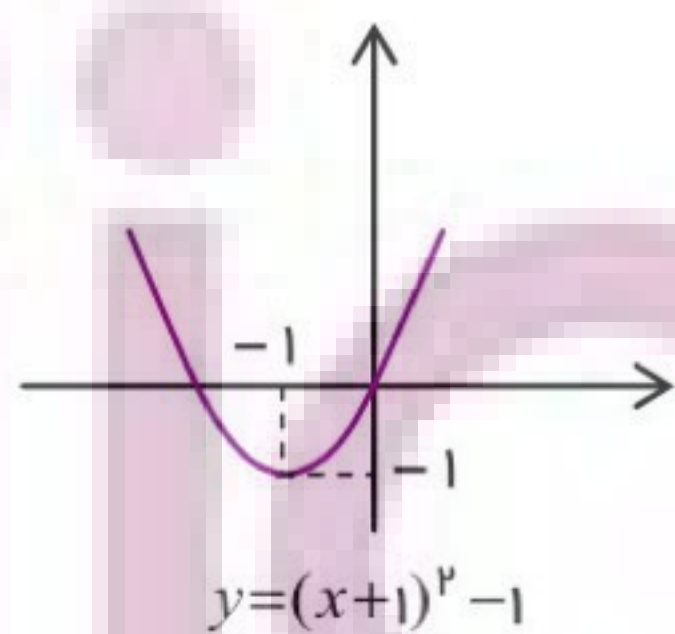
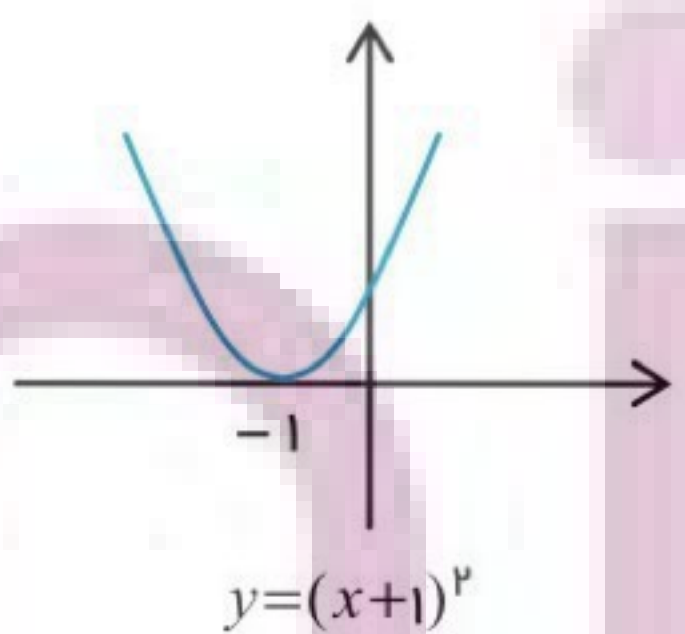
ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم کرده و سپس تعیین کنید این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

پاسخ ✓

ضابطه را به صورت مناسب زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$

کافی است نمودار $y = x^2$ یک واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین انتقال یابد. اکنون دیده می‌شود: نمودار در $(-\infty, -1]$ اکیداً نزولی و در $[-1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



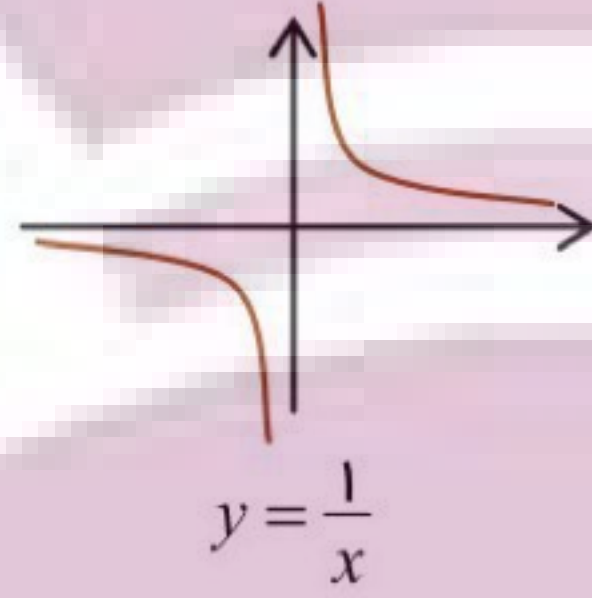
مثال: نمودار توابع $f(x) = -\frac{1}{x}$ و $g(x) = x - |x|$ را رسم کرده و فواصل یکنوایی هر یک را مشخص کنید.



پاسخ ✓

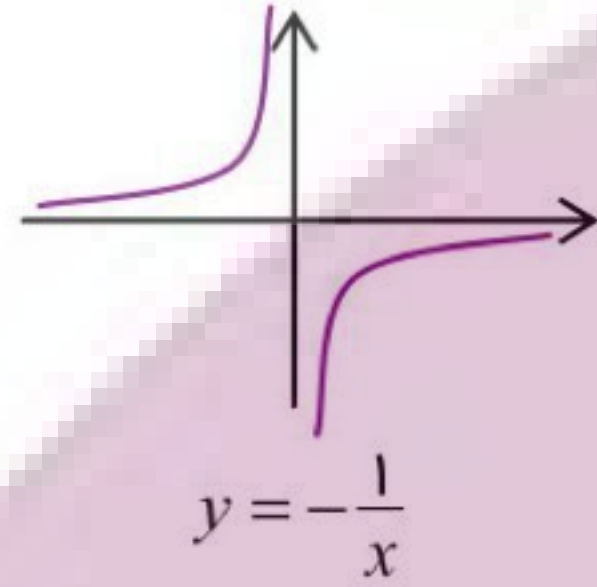
• نمودار f :

ابتدا نمودار شناخته شده $y = \frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم.



اکنون نمودار نسبت به محور طول قرینه می‌شود:
می‌بینید که:

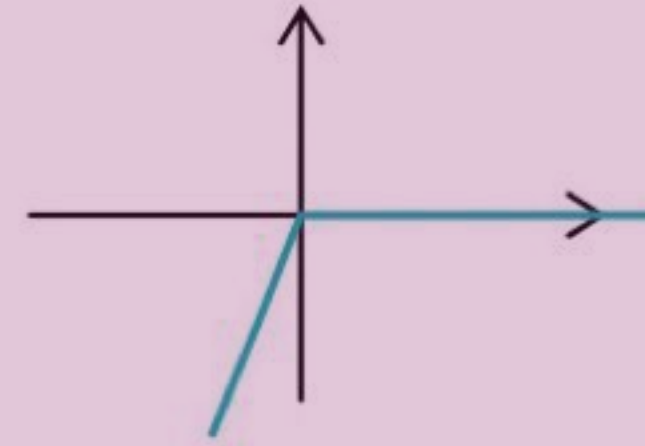
تابع در هر دو بازه $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$ اکیداً صعودی است.



• نمودار g :

ضابطه را باز کرده و نمودار متشکل از دو نیم‌خط را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$



می‌بینید که:

تابع در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً صعودی و در بازه $[0, +\infty)$ صعودی (و نزولی) است.



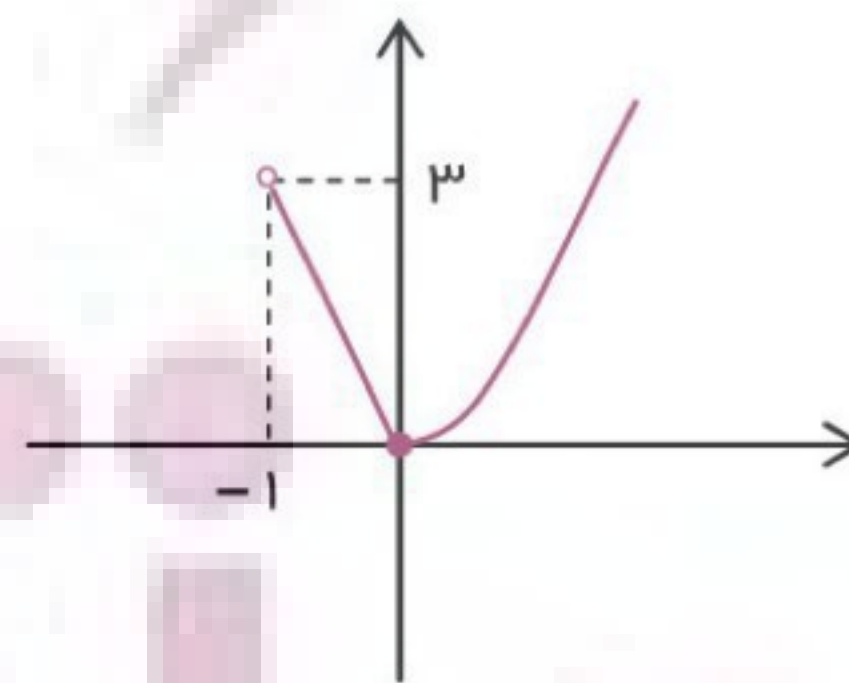
نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

با رسم نمودار تابع $y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

پاسخ ✓

برای $x \geq 0$ نمودار با انتقال نیم‌سهمی $y = x^2$ و برای $-1 < x < 0$ پاره‌خطی توسط $y = -3x$ رسم می‌شود:

$$y = -3x : \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 3 \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$



تابع در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(-1, 0]$ اکیداً نزولی است. (ولی در کل روی دامنه یکنوا نیست.)



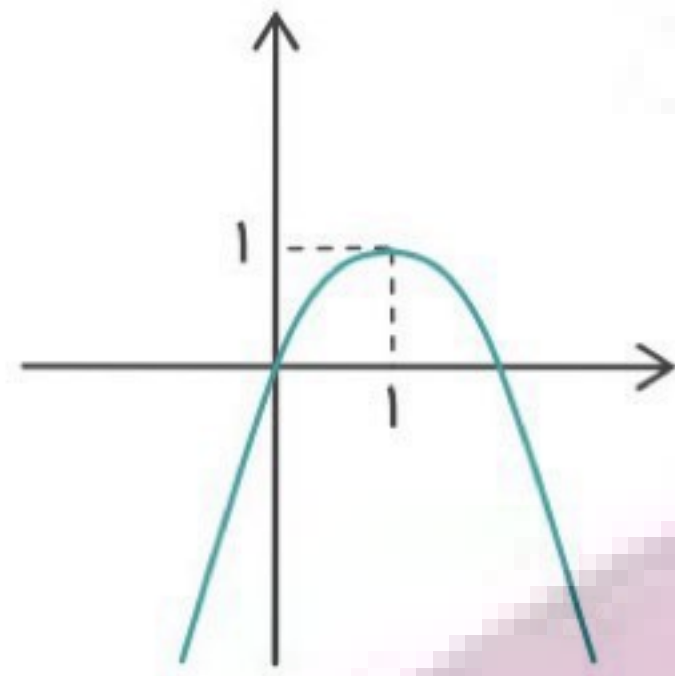
مثال: محدوده x را طوری تعیین کنید که تابع $y = 2x - x^2$ در آن محدوده نزولی باشد.

پاسخ ✓

ضابطه را با اضافه و کم کردن عدد ۱ به صورت مناسب زیر می‌نویسیم:

$$y = 2x - x^2 - 1 + 1 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 \Rightarrow y = -(x-1)^2 + 1$$

حالا می‌توانیم با تغییر نمودار $y = x^2$ ، نمودار تابع را رسم کنیم:



با نگاه به نمودار می‌بینید:

تابع در بازه $(1, +\infty)$ اکیداً نزولی (همچنین نزولی) است.



وقتی ضابطه شامل چند قدر مطلق است، برای رسم، ضابطه را باز کنید.

مثال: نمودار تابع $y = |x+2| + |x|$ را رسم کرده و محدوده‌های را مشخص کنید که تابع در آن صعودی است.

پاسخ ✓

با توجه به ریشه‌های داخل قدر مطلقها، ضابطه باز می‌شود:

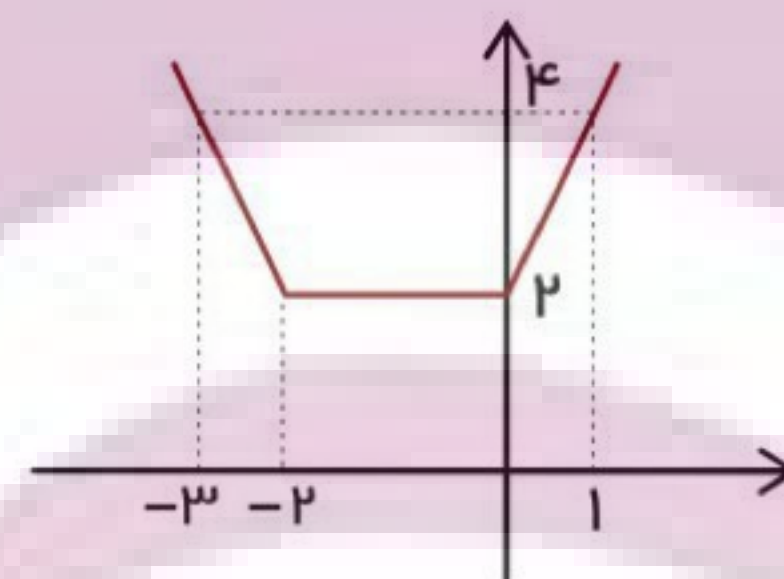
$$|x+2|: x+2=0 \rightarrow x=-2 \quad \text{و} \quad |x|: x=0$$

بنابراین با توجه به علامت داخل قدر مطلقها در هر محدوده:

$$y = \begin{cases} -(x+2) - x & x < -2 \\ x+2 - x & -2 \leq x \leq 0 \\ x+2 + x & x > 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -2x - 2 & x < -2 \\ 2 & -2 \leq x \leq 0 \\ 2x + 2 & x > 0 \end{cases}$$

با تشکیل جدول مقادیر، نمودار خط شکسته‌ی تابع رسم می‌شود:

x	-۳	-۲	۰	۱
y	۴	۲	۲	۴



تابع در $[-2, +\infty)$ صعودی است.



توجه کنید:

از یکنوایی تابع می‌توان در حل برخی نامعادلات کمک گرفت.

❖ اگر تابع f اکیداً صعودی باشد:

$$f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$$

❖ اگر تابع f اکیداً نزولی باشد:

$$f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \geq b$$



یادآوری:

هر دو تابع نمایی $y = a^x$ و لگاریتمی $y = \log_a x$ در حالت $a > 1$ اکیداً صعودی و در حالت $0 < a < 1$ اکیداً نزولی هستند. (البته: دامنه‌ی تابع نمایی \mathbb{R} و دامنه‌ی تابع لگاریتمی $(0, +\infty)$ است.)

مثال: نامعادله‌ی $(\sqrt{3}-1)^{x^2-2x} < (\sqrt{3}-1)^{2x}$ را حل کنید.

پاسخ ✓

چون $0 < \sqrt{3}-1 < 1$ است، تابع نمایی $y = (\sqrt{3}-1)^x$ اکیداً نزولی است و بنابراین:
 $(\sqrt{3}-1)^{x^2-2x} < (\sqrt{3}-1)^{2x} \rightarrow x^2 - 2x > 2x \rightarrow x^2 - 4x > 0$
 اگر جدول تعیین علامت رسم کنید، دو ریشه‌ی ۰ و ۴ خواهیم داشت و خارج دو ریشه عبارت مثبت است.
جواب: $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸

اگر $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ ، حدود x را بدست آورید.

پاسخ ✓

چون تابع $y = \log x$ اکیداً صعودی است، از نامعادله نتیجه می‌شود که: $(x+1) \leq (2x-3)$. بنابراین:
 $x - 2x \leq -1 - 3 \rightarrow -x \leq -4 \rightarrow x \geq 4$

توجه کنید:

طبق دامنه، باید شرایط $x+1 > 0$ و $2x-3 > 0$ نیز برقرار باشند که در محدوده‌ی جواب بالا، هر دو برقرار هستند.

ایران تفتت

توشه‌ای برای موفقیت



بخش ۵

تقسیم چند جمله‌ای‌ها
<http://www.darsamoz.com>

در این بخش، تقسیم چند جمله‌ای‌ها و کاربرد آن در تجزیه‌ی عبارات، در حد نیاز برای محاسبه‌ی حد توابع آورده می‌شود.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 4x - 5 \\ -(x^3 + 2x^2) \\ \hline - 4x - 5 \\ - (-4x - 8) \\ \hline + 3 \end{array}$$

مثال: تقسیم $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 5$ بر $x+2$ را ببینید:

توجه کنید:

هنگام تقسیم، باید مقسوم و مقسوم علیه از توان بزرگ به کوچک مرتب باشند.

در این تقسیم، خارج قسمت $x^2 - 4$ و باقی‌مانده عدد ۳ بدست آمده است.

**قضیه تقسیم:**

در تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر چند جمله‌ای $p(x)$ همواره:

دو چند جمله‌ای یکتای $q(x)$ و $r(x)$ یافت می‌شوند که:

اولاً: تساوی زیر برقرار باشد:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

ثانیاً: درجه‌ی $r(x)$ از درجه‌ی $p(x)$ کوچک‌تر باشد.

(به $q(x)$ خارج قسمت و به $r(x)$ باقی‌مانده‌ی تقسیم گفته می‌شود.)

درمثال قبل،

اگر ریشه‌ی $x+2$ (یعنی: مقسوم علیه) در عبارت $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 5$ (یعنی: مقسوم) قرار گیرد، می‌بینیم که:

$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 4(-2) - 5 = -8 + 8 + 8 - 5 = 3$$

این کار، روش سریع تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم است.

بخش پذیری:

باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ عبارت است از $R = f(a)$ ، بنابراین:

عبارت $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است، هرگاه $f(a) = 0$ باشد.

**توجه کنید:**

حتی اگر مقسوم علیه به صورت $ax+b$ باشد، تعیین باقی مانده و شرط بخش پذیری مانند بالاست. ریشه را تعیین می کنیم:

$$ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

سپس:

$f(x)$ بر $ax+b$ بخش پذیر است، هرگاه $f(-\frac{b}{a})=0$ باشد.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۱

باقی مانده ی تقسیم چند جمله ای $p(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2$ بر $2x+1$ را حساب کنید.

پاسخ ✓

چون ریشه ی $2x+1=0$ برابر $-\frac{1}{2}$ است:

$$8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 8\left(-\frac{1}{8}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$$

**نهایی؛ خرداد ۱۳۹۸**

اگر چند جمله ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد، باقی مانده ی تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ را حساب کنید.

پاسخ ✓

چون ریشه ی $x+1=0$ برابر -1 است، پس باید $f(-1)=0$ باشد:

$$(-1)^2 + a(-1) - 3 = 0 \Rightarrow a = -2$$

در نتیجه: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ بوده و باقی مانده ی آن بر $x-2$ برابر است با:

$$f(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = -3$$

**نهایی؛ شهریور ۱۳۹۸ - خرداد ۱۳۹۹**

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر باشد.

پاسخ ✓

باید $P(x)$ بر هر دوی $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر است:

$$x-2=0 \rightarrow x=2: P(2)=0 \rightarrow 8+4a+2b+1=0 \Rightarrow 4a+2b=-9$$

$$x+1=0 \rightarrow x=-1: P(-1)=0 \rightarrow -1+a-b+1=0 \Rightarrow a-b=0$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم: $a = -\frac{3}{2}$ و $b = -\frac{3}{2}$.





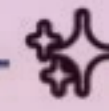
نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

باقی مانده‌های تقسیم عبارت‌های $P(x) = x^3 + ax + 1$ و $Q(x) = 2x^2 - x + 1$ بر $(x+2)$ یکسان می‌باشد. مقدار a را بیابید.

پاسخ ✓

با توجه به: $(x+2=0 \rightarrow x=-2)$ باید مقادیر $P(-2)$ و $Q(-2)$ برابر باشند:

$$(-2)^3 + a(-2) + 1 = 2(-2)^2 - (-2) + 1 \rightarrow -8 - 2a + 1 = 8 + 2 + 1 \rightarrow -2a = 18 \Rightarrow a = -9$$



مثال: باقی مانده‌ی تقسیم $p(x) = x^5 - 3x^4 + ax - 1$ بر $x-1$ ، برابر ۲ و خارج قسمت آن $q(x)$ است. مقدار $q(-1)$ را

تعیین کنید.

پاسخ ✓

ابتدا مقدار a را مشخص می‌کنیم:

$$(x-1=0 \rightarrow x=1): p(1) = 2 \rightarrow 1 - 3 + a - 1 = 2 \Rightarrow a = 5$$

اکنون $p(x)$ با توجه به خارج قسمت و باقی مانده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^5 - 3x^4 + 5x - 1 = (x-1)q(x) + 2$$

کافی است x را برابر -1 قرار دهیم:

$$(-1)^5 - 3(-1)^4 + 5(-1) - 1 = (-1-1)q(-1) + 2 \rightarrow -2q(-1) = -12 \Rightarrow q(-1) = 6$$



اطلاع از بخش پذیری $P(x)$ بر یک عبارت، به یک مرحله تجزیه‌ی آن منجر می‌شود:

روش برای تجزیه:

اگر عبارت $P(x)$ بر یک عبارت $Q(x)$ بخش پذیر باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \hline & A(x) \\ \hline & \vdots \\ & \circ \end{array}$$

$$P(x) = Q(x) \cdot A(x)$$

پس $P(x)$ یک مرحله تجزیه شد.

توجه کنید:

اگر عبارت‌های $Q(x)$ یا $A(x)$ قابل تجزیه باشند، با ادامه، تجزیه‌ی بهتری برای $P(x)$ بدست خواهد آمد.

مثال: اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $2x^3 + x^2 + mx - 4 = 0$ برابر $x = -2$ باشد،

الف) مقدار m را بیابید.

ب) سایر جواب‌های معادله را مشخص کنید.

پاسخ ✓

الف) جواب $x = -2$ باید در معادله صادق باشد:

$$2(-2)^3 + (-2)^2 + m(-2) - 4 = 0 \rightarrow -16 + 4 - 2m - 4 = 0 \Rightarrow m = -8$$

ب) چون چند جمله‌ای $2x^3 + x^2 - 8x - 4$ بر $x+2$ بخش پذیر است، با تقسیم معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x+2)(2x^2-3x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ 2x^2-3x-2=0 \end{cases}$$

از حل معادله‌ی دوم، سایر جواب‌ها معلوم می‌شوند:

$$2x^2-3x-2=0 \xrightarrow{\times 2} (2x)^2-3(2x)-4=0 \rightarrow (2x-4)(2x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \Rightarrow x=2 \\ 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

در پایان این بخش، به روش تجزیه‌ی یک نوع چندجمله‌ای خاص توجه کنید:

به اتحادهای زیر نگاه کنید:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \quad \text{و} \quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

با تقسیم a^n-b^n بر $a-b$ ، می‌بینیم بخش‌پذیری مانند بالا برقرار بوده و شکل کلی تجزیه‌ی عبارت a^n-b^n بدست می‌آید:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

برای نمونه:

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

چند نتیجه:

▪ در حالت خاص وقتی $b=1$ باشد، داریم:

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a+1) \quad n \in \mathbb{N}$$

در دو حالت بعد، زوج یا فرد بودن n لازم است:

▪ اگر n زوج باشد؛ و در تجزیه‌ی a^n-b^n ، جمله‌ی $-b$ را جایگزین b کنیم، داریم:

$$a^n-(-b)^n=(a-(-b))(a^{n-1}+a^{n-2}(-b)+\dots+a(-b)^{n-2}+(-b)^{n-1})$$

با ساده سازی، تجزیه‌ی a^n-b^n بر حسب عامل $a+b$ حاصل می‌شود:

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}-b^{n-1})$$

در پراتز سمت راست، جملات یک در میان مثبت و منفی هستند. برای نمونه:

$$a^4-b^4=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$$

▪ اگر n فرد باشد؛ و در تجزیه‌ی a^n-b^n ، جمله‌ی $-b$ را جایگزین b کنیم، داریم:

$$a^n-(-b)^n=(a-(-b))(a^{n-1}+a^{n-2}(-b)+\dots+a(-b)^{n-2}+(-b)^{n-1})$$

با ساده سازی، تجزیه‌ی a^n+b^n حاصل شده و بر $a+b$ بخش پذیر است:

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\dots-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

در پراتز سمت راست، جملات یک در میان مثبت و منفی هستند. برای نمونه:

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$



نهایی؛ خرداد ۱۳۹۸

چند جمله‌ای $x^6 - 1$ را بر حسب عامل $(x+1)$ تجزیه کنید.

پاسخ ✓

مانند حالت دوم پالامی نویسیم:

$$\begin{aligned}x^6 - 1 &= x^6 - 1^6 = (x+1)(x^5 - x^4(1) + x^3(1)^2 - x^2(1)^3 + x(1)^4 - 1^5) \\ &= (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)\end{aligned}$$



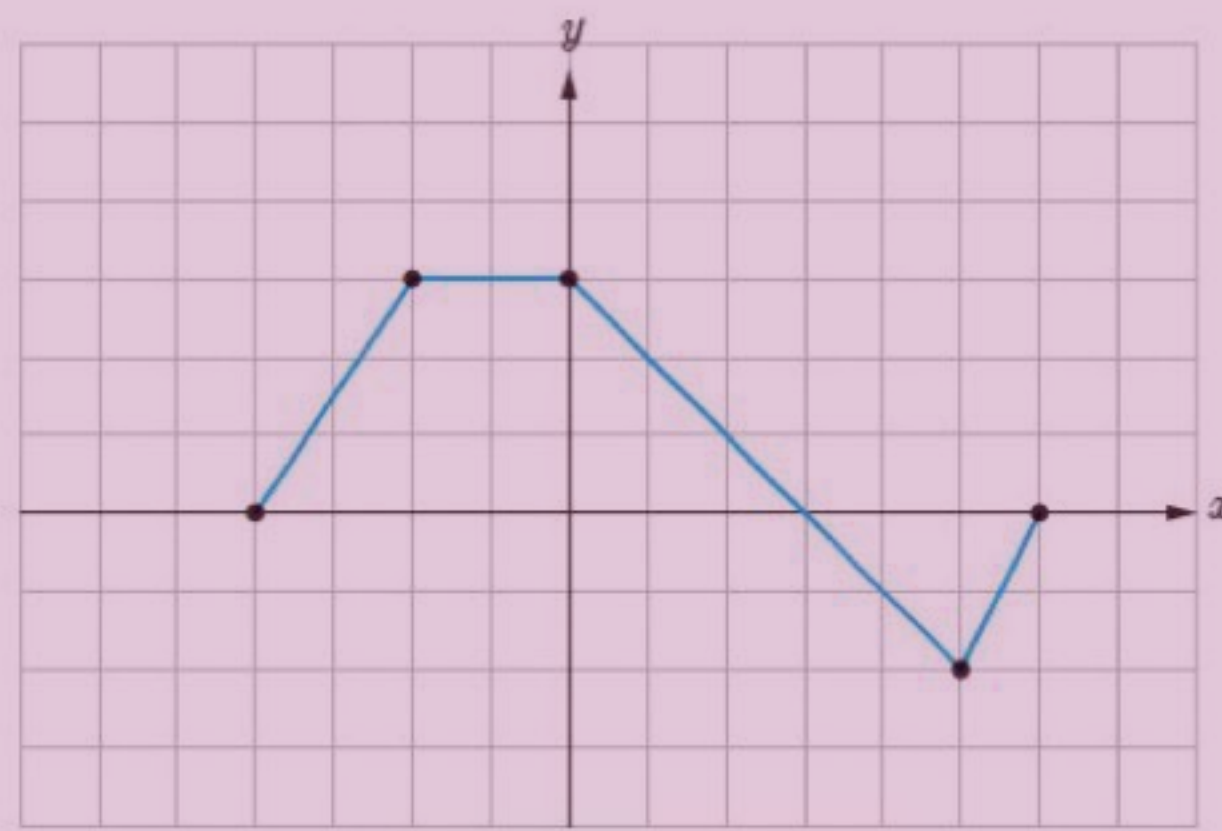
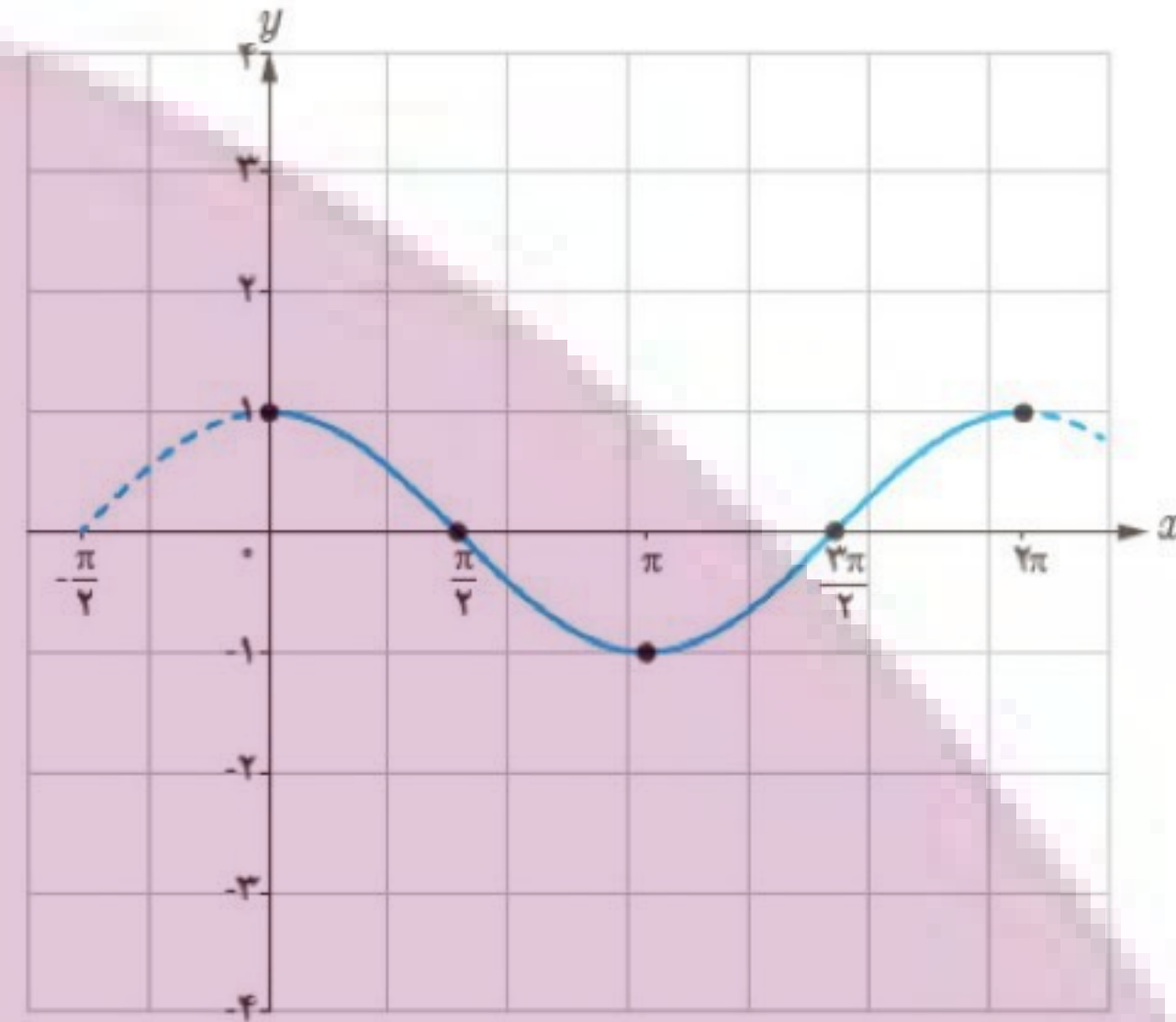
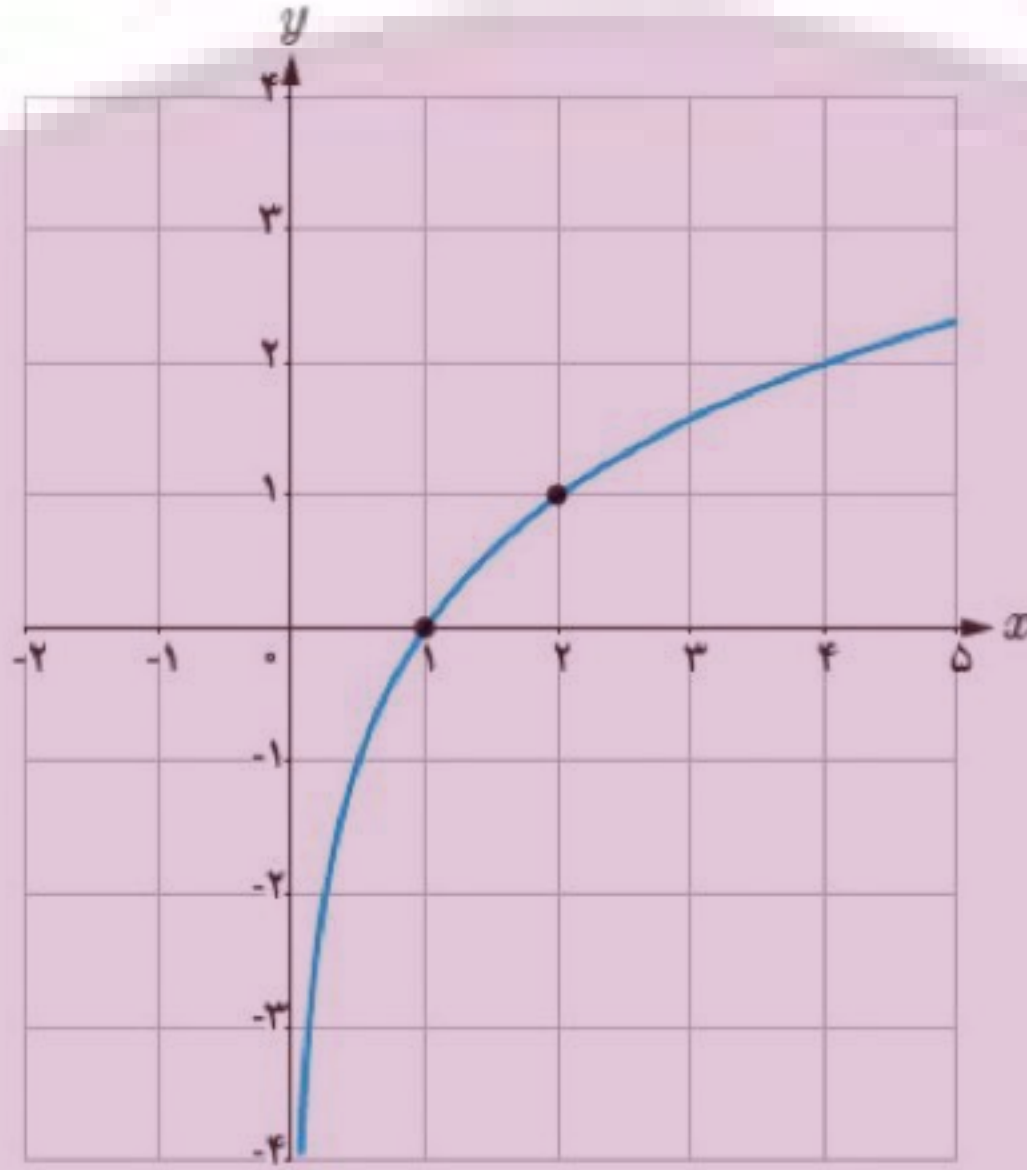
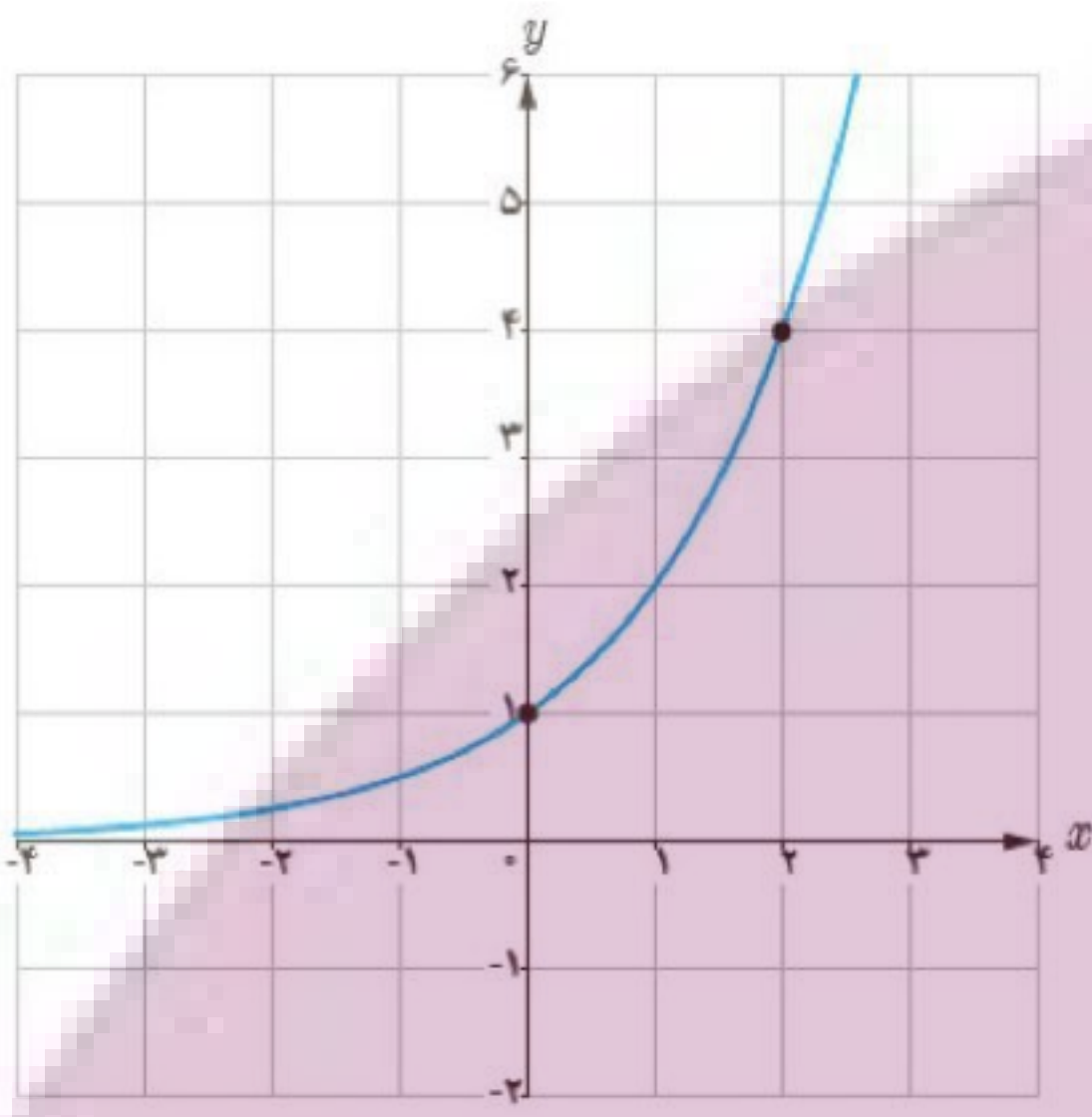
ایران توفنتی

توشه ای برای موفقیت



تمرینات
منتخب کتاب درسی

۱- در زیر، نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = \log_2 x$ و $y = \cos x$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y = 2^{x-1} + 2$ ، $y = \log_2(x+2)$ و $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ را به کمک انتقال رسم کنید. (متن کتاب)



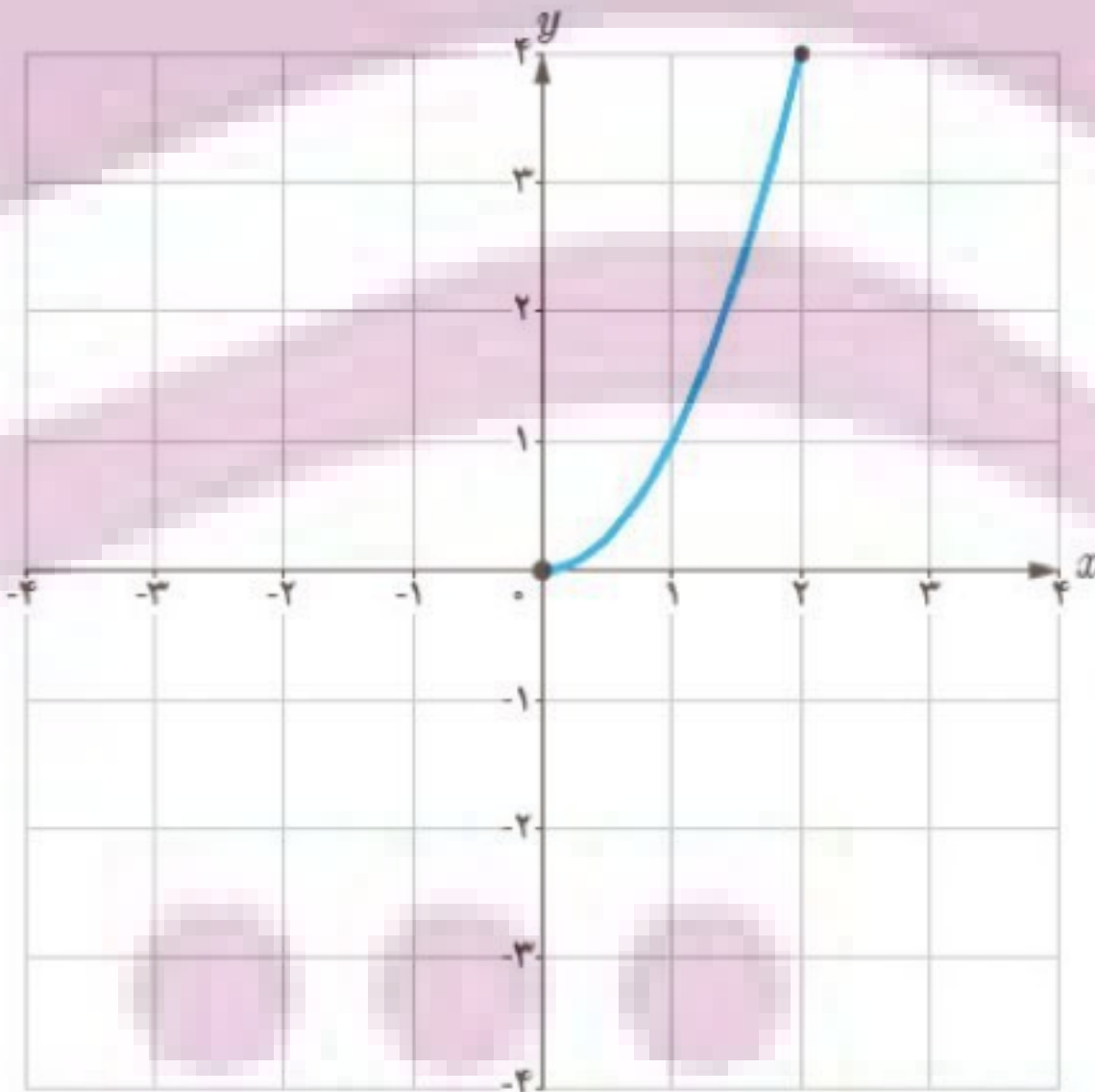
۲- نمودار تابع f به صورت مقابل است:

نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = f(-x) + 2$$

$$y = f(3-x)$$

$$y = f(2x-1)$$



۳- نمودار تابع f به صورت مقابل است:

نمودار توابع زیر را رسم کرده و با نمودار f مقایسه کنید.

$$y = f(-x)$$

$$y = -f(x)$$

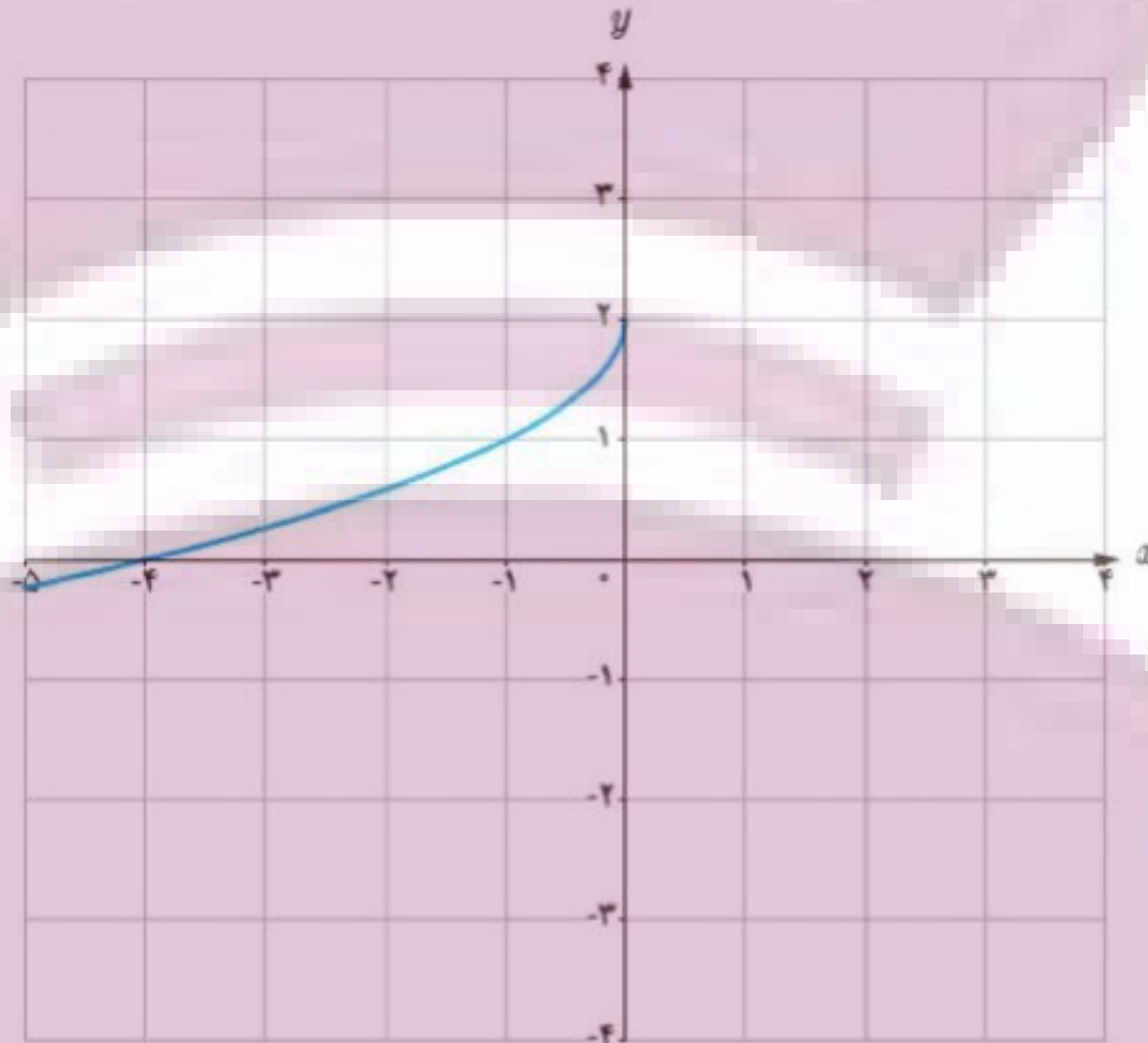
$$y = -f(-x)$$

ایران توشه

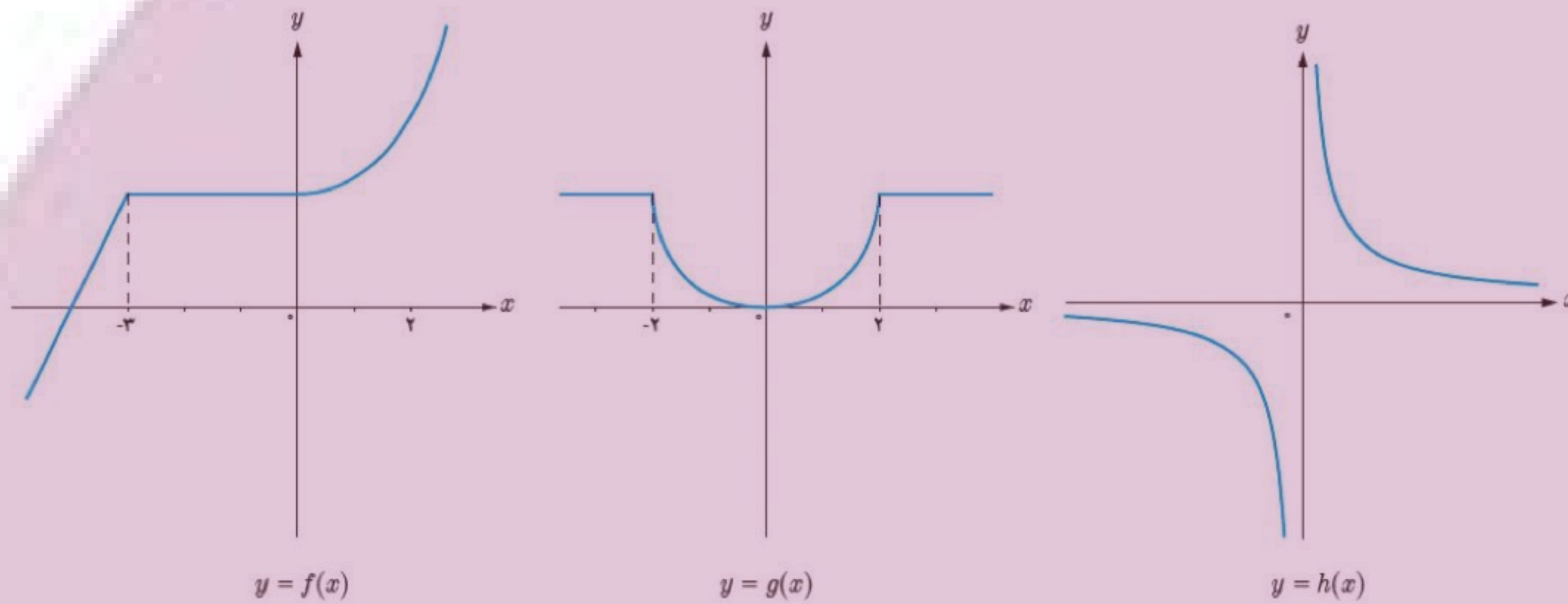
توشه ای برای موفقیت



۴- نمودار زیر فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ حاصل شده؛ ضابطه‌ی آن را بنویسید.



۵- نمودار توابع f ، g و h داده شده‌اند:



- الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟
 ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟
 ج) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

۶- الف) آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی باشد و هم نزولی؟
 ب) نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، ولی در \mathbb{R} اکیداً صعودی نباشد.

۷- هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل خواسته شده تجزیه کنید.

الف) $x^6 - 1$ با عامل $x - 1$.

ب) $x^6 - 1$ با عامل $x + 1$.

ج) $x^5 + 32$ با عامل $x + 2$.

۸- فرض کنید توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند.

الف) نشان دهید $f + g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است.

ب) نشان دهید $y = kf(x)$ با شرط $k > 0$ اکیداً صعودی و با شرط $k < 0$ اکیداً نزولی است.



پ) در مورد تابع $f - g$ چه می‌توان گفت؟

۹- الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی بوده و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ ، نشان دهید: $a \geq b$.

ب) اگر $\left(\frac{1}{p}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ ، حدود x را بیابید.

ایران توفته

توشه ای برای موفقیت