

ایران تووشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود **۵۶** مجموعه **۵۶**
- دانلود آزمون **۶** جزو **۶** قلم **چیز** و **نحو**
- دانلود **فیلم** و **مقاله** آنلاین شی
- **لینک** و **منابع**



IranTooshe.Ir



@irantoooshe



IranTooshe



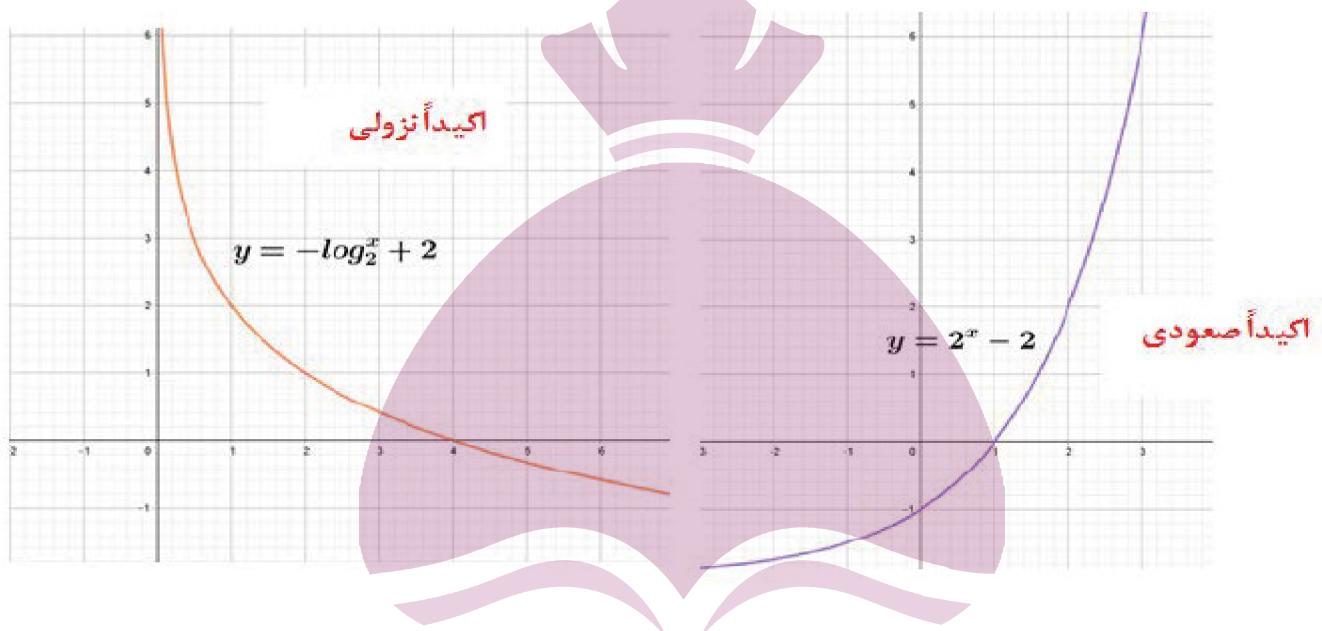
۱- تابع $y = |x|^2$ در بازه‌ی $[a, -\infty)$ نزولی است، حداقل مقدار a چه قدر است؟

پاسخ

صفر

۲- تابع نمایی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2 x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنواختی آنها در کلاس بحث کنید.

پاسخ



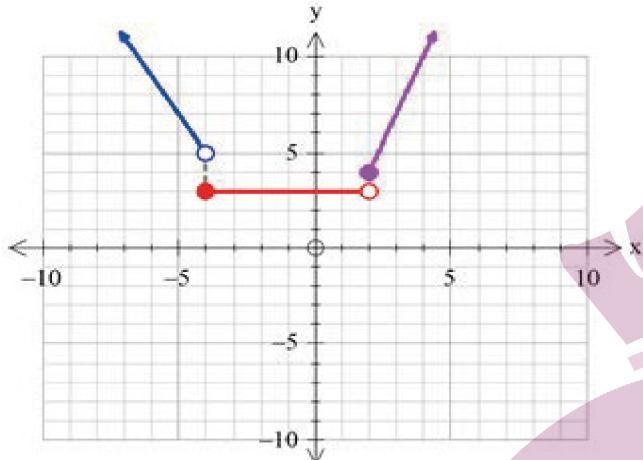
ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

۳- نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

پاسخ »



اکیدا صعودی $x \in [2, +\infty)$

اکیدا نزولی $x \in (-\infty, -4)$

ثابت $x \in [-4, 2)$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴- به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

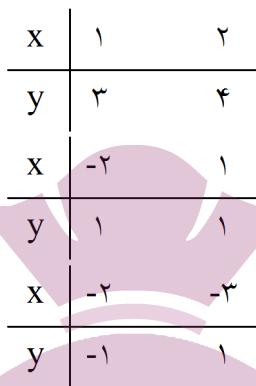
الف) تابع روبرو را رسم کنید.

ب) بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

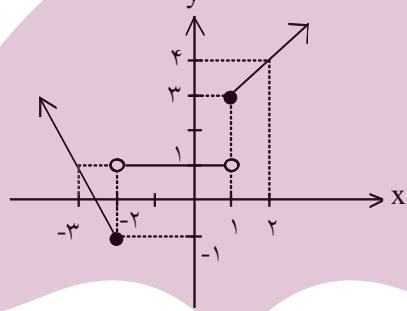
پاسخ »

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq 1 \\ 1 & ; -2 < x < 1 \\ -2x - 5 & ; x \leq -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq 1 \\ 1 & ; -2 < x < 1 \\ -2x - 5 & ; x \leq -2 \end{cases}$$



الف)



ب)

$(-\infty, -2] \Rightarrow$ نزولی
 $(-2, -1) \Rightarrow$ ثابت
 $[1, +\infty) \Rightarrow$ صعودی

ایران توشه
 توشه‌ای برای موفقیت

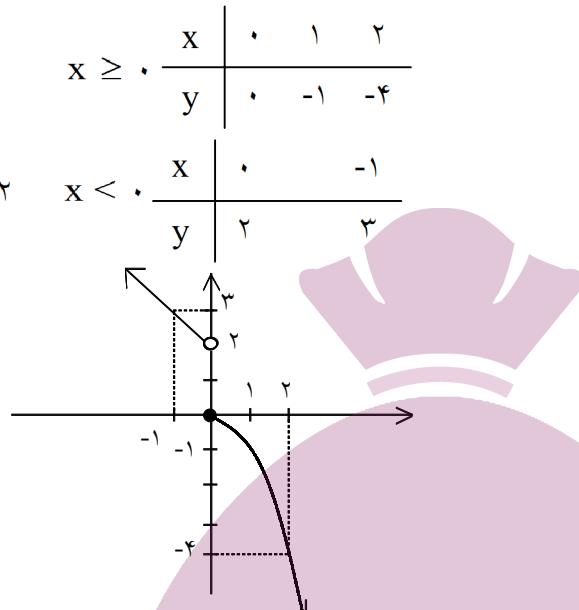
۵- با رسم نمودار یکنواهی تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ -x + 2 & x < 0 \end{cases}$$

پاسخ »

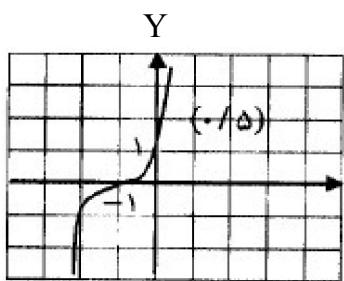
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ -x + 2 & x < 0 \end{cases}$$

تابع اکیدا نزولی است.



۶- نمودار تابع $f(x) = (x+1)^2$ را رسم کنید. این تابع در دامنه خود اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

پاسخ »



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

اکیداً صعودی (۰/۲۵)

۷- نمودار $y = -x^3$ از کدام ربع عبور نمی‌کند؟

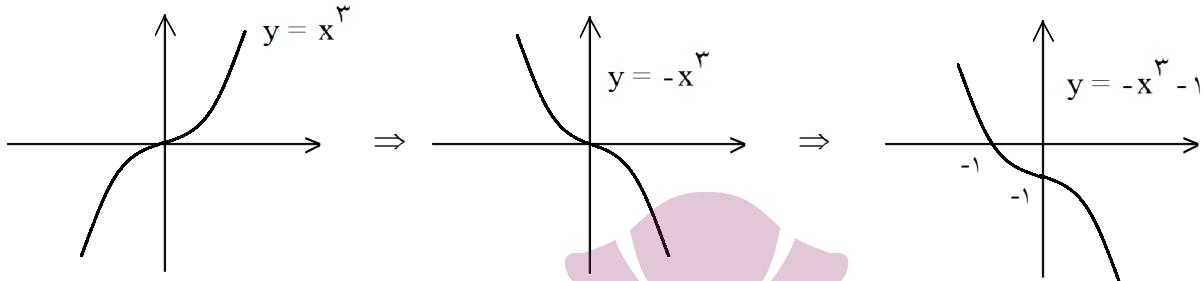
(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

» پاسخ «

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

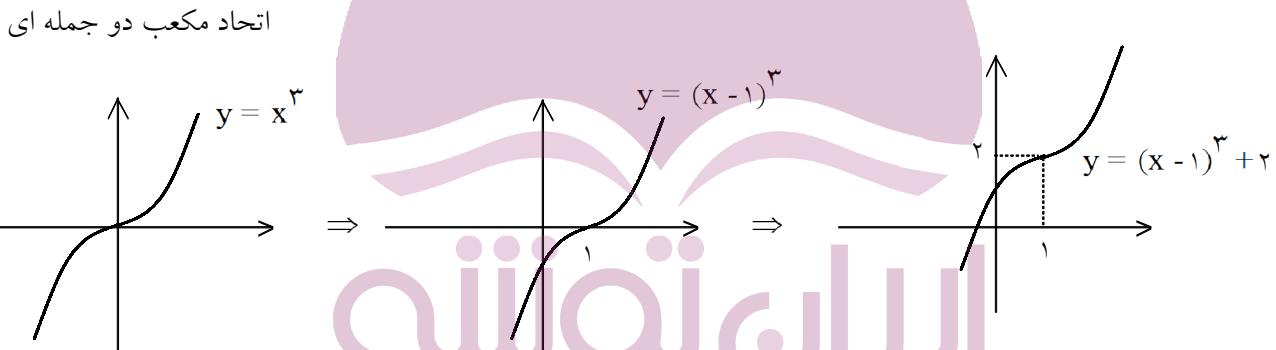


با توجه به نمودار رسم شده، تابع از ربع اول عبور نمی‌کند.

۸- نمودار $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

» پاسخ «

$$y = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_\text{اتحاد مکعب دو جمله‌ای} + 2 \Rightarrow y = (x - 1)^3 + 2$$

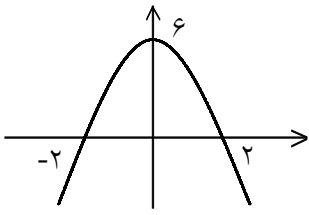


۹- در بازه (a, b) مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 3$ کمتر از ۱ می‌باشد، بیشترین مقدار $a - b$ را حساب کنید.

» پاسخ «

باید تابع $f(x)$ را کوچکتر از یک قرار دهیم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 3 < 1 &\xrightarrow{\times 4} x^2 - 9x + 12 < 4 \Rightarrow x^2 - 9x + 8 < 0 \Rightarrow 1 < x < 8 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \end{cases} \\ \Rightarrow b - a &= 8 - 1 = 7 \end{aligned}$$



۱۰- معادله سهمی زیر را بنویسید.

» پاسخ «

ریشه‌های معادله $x = 2$ و $x = -2$ است. بنابراین داریم:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \xrightarrow{x_1 = 2 \\ x_2 = -2} y = a(x - 2)(x + 2)$$

سهمی محور y ها در نقطه‌ای به عرض ۶ قطع می‌کند.

$$\frac{y = 6}{x = 0} \Rightarrow 6 = a(0 - 2)(0 + 2) \Rightarrow a = \frac{6}{-4} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}(x - 2)(x + 2) = -\frac{3}{2}(x^2 - 4) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x^2 + 6$$

۱۱- اگر $S(-1, 4)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ باشد، a, b, c را حساب کنید.

» پاسخ «

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a$$

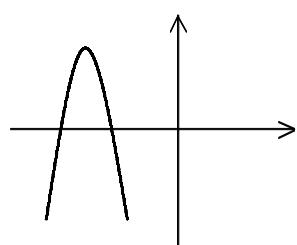
$$S(-1, 4) \xrightarrow{x = -1 \\ y = 4} 4 = a(-1)^2 + b(-1) + c \Rightarrow a - b + c = 4 \Rightarrow a - b = -1$$

$$a - b = -1 \xrightarrow{b = 2a} a - 2a = -1 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$y = x^2 + 2x + 5$$

ایران نویس

۱۲- در شکل زیر سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a, b, c و نیز تعداد جواب‌های این معادله را بنویسید.



» پاسخ «

$$a < 0$$

$$c < 0$$

$$b < 0 \quad \text{دو ریشه دارد.}$$

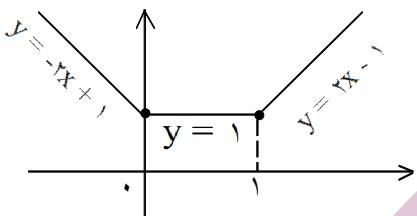
۱۳- آیا تابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ با ضابطه $f: R - \{0\} \rightarrow R$ صعودی است؟ نزولی چطور؟

پاسخ »

$$\left. \begin{array}{l} 1 > -1 \Rightarrow f(1) > f(-1) \Rightarrow f \text{ نزولی نیست} \\ 1 > \frac{1}{2} \Rightarrow f(1) < f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f \text{ صعودی نیست.} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ غیر یکنواست.}$$

۱۴- آیا تابع $f(x) = |x| + |x - 1|$ با ضابطه $f: R \rightarrow R$ صعودی است؟ نزولی چطور؟

پاسخ »



$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

با توجه به شکل، تابع f ، نه صعودی و نه نزولی است.

۱۵- آیا تابع $f(x) = \frac{1}{1-x}$ با ضابطه $f: (-1, 1) \cup (1, 2) \rightarrow R$ صعودی است؟ نزولی چطور؟

پاسخ »

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{1}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{3}{2}\right)\right) \Rightarrow f \text{ صعودی نمی باشد.} \\ \left(\frac{3}{2} < \frac{9}{10} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{9}{10}\right)\right) \Rightarrow f \text{ نزولی نیست.} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ غیر یکنواست.}$$

ایران توشه

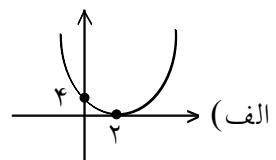
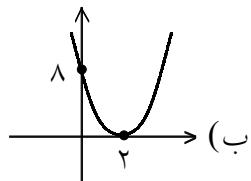
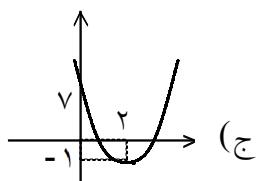
۱۶- نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y = (x - 2)^2$

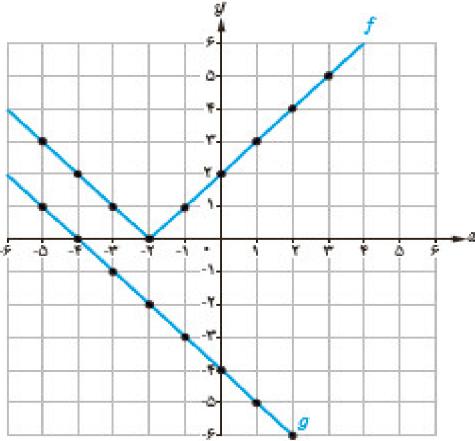
ب) $y = 2(x - 2)^2$

ج) $y = 2(x - 2)^2 - 1$

پاسخ »



۱۷- با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیاورد.



- الف) $(f \circ g)(-1)$
- ب) $(g \circ f)(0)$
- پ) $(f \circ g)(1)$
- ت) $(g \circ f)(-1)$

پاسخ »

- الف) $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 1$
- ب) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-2) = -6$
- پ) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(-5) = 3$
- ت) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(1) = -5$

۱۸- مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و $g(x) = x^2 - 4$ ؛ آن‌گاه $(f \circ g)(5) = -25$.

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $f(g(x)) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(v) = 7$ و $f(5) = v$ ، آن‌گاه $g(4) = 5$.

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x - 1}$ و $g(x) = 2x$ ، آن‌گاه $(f \circ g)(5) = g(2) = 10$.

پاسخ »

الف) نادرست $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = g(5)^2 - 4 = (\sqrt{5^2 - 4})^2 - 4 = (\sqrt{21 - 4})^2 - 4 = 17$

ب) نادرست $\begin{cases} f(x) = 3x \\ g(x) = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} fog(x) = f(g(x)) = 3(2x) = 6x \\ gof(x) = g(f(x)) = 2(3x) = 6x \end{cases} \Rightarrow fog(x) = gof(x)$

پ) درست $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(8) = 5$

ت) درست $\begin{cases} (f \circ g)(5) = f(g(5)) = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3 \\ g(2) = 2 \times 2 - 1 = 3 \end{cases}$

ایران توین
توشه‌ای برای موقیت

۱۹- اگر $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = 3x^2 - 6x + 14$ ضابطه‌ی تابع $f(g(x))$ را به دست آورید.

پاسخ

$$f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14 \quad f(x) = 3x - 4$$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 3(g(x)) - 4 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 14 = 3(g(x)) - 4 \Rightarrow 3(g(x)) = 3x^2 - 6x + 18 \\ \Rightarrow g(x) &= x^2 - 2x + 6 \end{aligned}$$

۲۰- اگر $f(x+5) = x^2 - 3x$ باشد، $f(x)$ را حساب کنید.

پاسخ

$$\begin{aligned} x + 5 &= t \Rightarrow x = t - 5 \Rightarrow f(t) = (t - 5)^2 - 3(t - 5) \Rightarrow f(t) = t^2 - 10t + 25 - 3t + 15 \\ \Rightarrow f(t) &= t^2 - 13t + 40 \Rightarrow f(x) = x^2 - 13x + 40 \end{aligned}$$

۲۱- تابع $f(x) = 2x - 1$ را درنظر بگیرید.

(الف) دامنه تابع $f(2x)$ را مشخص کنید. (در صورتی که دامنه $f(x)$ را $[7, -2]$ درنظر بگیریم.)

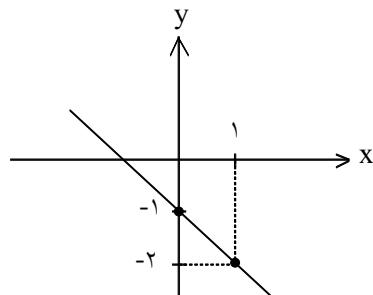
(ب) نمودار تابع $f\left(-\frac{x}{2}\right)$ را رسم کنید.

پاسخ

(الف)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 7 \xrightarrow{x \rightarrow 2x} -2 \leq 2x \leq 7 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x \leq 3.5 \\ D_{f(2x)} &= [-1, 3.5] \end{aligned}$$

$$f\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\left(-\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow f\left(-\frac{x}{2}\right) = -x - 1 \quad (ب)$$



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

۲۲- علی می خواهد یک دوچرخه با قیمت بیش از ۴ میلیون از فروشگاهی بخرد. این فروشگاه به مناسبت فرارسیدن سال نو در خریدهای بیش از ۴ میلیون، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می دهد. همچنین علی یک کارت تخفیف ۲۰ درصدی نیز برای خرید دارد. با استفاده ازتابع مرکب مشخص کنید کدام یک از راههای زیر به نفع علی است؟

(الف) اول از کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی استفاده کند.

(ب) اول از تخفیف نقدی و بعد کارت تخفیف استفاده کند.

پاسخ »

تابع تخفیف نقدی به صورت $f(x) = \frac{80}{100}x - 200000$ درصد به صورت $x - 200000$ و تابع کارت تخفیف ۲۰ درصد به صورت $g(x) = \frac{80}{100}x$ است.

اگر از راه (الف) استفاده کند، تابع خرید علی به صورت زیر است:

$$f(g(x)) = \frac{80}{100}x - 200000$$

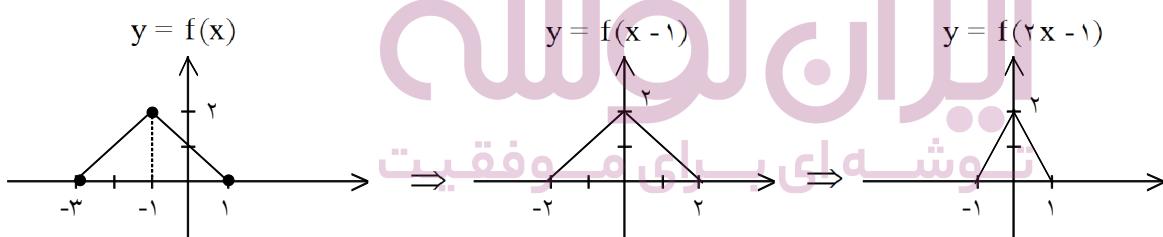
اگر از راه (ب) استفاده کند، تابع خرید علی به صورت زیر است:

$$f(g(x)) = \frac{80}{100}(x - 200000) = \frac{80}{100}x - 160000$$

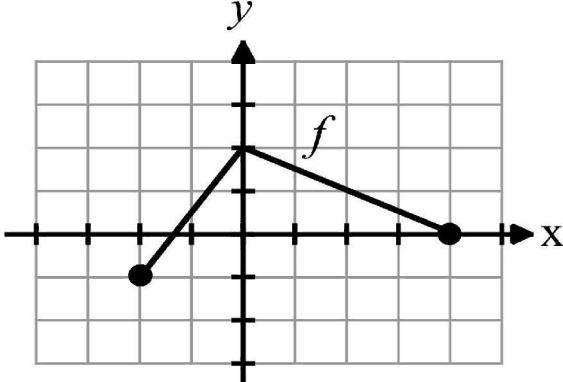
همان طور که مشاهده می کنید، راه (الف) به نفع علی است: زیر از $\frac{80}{100}$ قیمت دوچرخه مقدار بیشتری را کم می کند.

۲۳- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ را رسم کنید.

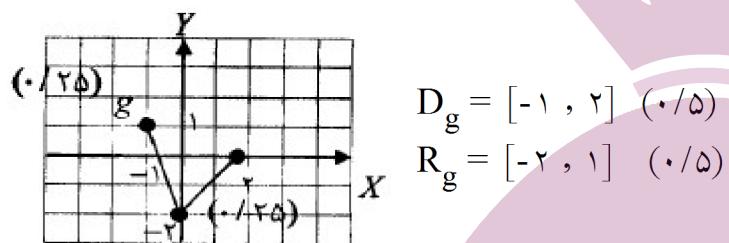
پاسخ »



۲۴- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -f(2x)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.



پاسخ



۲۵- اگر $f(x) = x^2 - 11x + 30$ و $g(x) = 2x^2 + 7x + 11$ باشد، تمام ریشه‌های معادله $f(g(x)) = 0$ را بنویسید.

پاسخ

$$f(g(x)) = (g(x))^2 - 11g(x) + 30 = 0 \Rightarrow (g(x) - 5)(g(x) - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 5 \\ g(x) = 6 \end{cases}$$

$$2x^2 + 7x + 11 = 5 \Rightarrow x = -1, x = -\frac{5}{2}$$

$$2x^2 + 7x + 11 = 6 \Rightarrow x = -2, x = -\frac{3}{2}$$

بنابراین معادله دارای چهار جواب است.

ایران توپنجه

۲۶- اگر $f(x) = x^2 + 4x + 3$ و $g(x) = x^2 + 7x + 9$ ، آنگاه تمام ریشه‌های حقیقی معادله $f(g(x)) = 0$ بنویسید.

پاسخ

$$\begin{aligned} f(g(x)) = 0 &\Rightarrow (g(x))^2 + 4g(x) + 3 = 0 \Rightarrow (g(x) + 1)(g(x) + 3) = 0 \\ &\Rightarrow (x^2 + 7x + 9 + 1)(x^2 + 7x + 9 + 3) = 0 \Rightarrow (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) = 0 \\ &\Rightarrow (x + 2)(x + 5)(x + 3)(x + 4) = 0 \Rightarrow x = -2, x = -5, x = -3, x = -4 \end{aligned}$$

-۲۷- اگر $f(x) = x - 1$ و $g(x) = x^2 - 2x$ باشد، $fog(x)$ را حساب کنید.

پاسخ »

$$f(x - 1) = x^2 - 2x$$

$$f(x - 1) = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\text{اتحاد مربع}} - 1 \Rightarrow f(x - 1) = (x - 1)^2 - 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1$$

-۲۸- اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = x^2 - 6x + 8$ باشد $fog(x)$ را حساب کنید.

پاسخ »

$$f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f(g(x)) = (g(x))^2 + 2g(x)$$

$$f(g(x)) = x^2 - 6x + 8$$

$$(g(x))^2 + 2g(x) = x^2 - 6x + 8$$

$$\xrightarrow{+1} (g(x))^2 + 2g(x) + 1 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow (g(x) + 1)^2 = (x - 3)^2$$

$$g(x) + 1 = \pm(x - 3) \Rightarrow \begin{cases} g(x) + 1 = x - 3 \Rightarrow g(x) = x - 4 \\ g(x) + 1 = -x + 3 \Rightarrow g(x) = -x + 2 \end{cases}$$

-۲۹- دو تابع $f(x) = x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x + 2}$ را درنظر بگیرید:

الف) دامنهٔ تابع gof را بدون تشکیل $(gof)(x)$ به دست آورید.

ب) ضابطهٔ gof را به دست آورید.

پ) مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$ را محاسبه کنید.

پاسخ »

الف) $f(x) = x - 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ ، $g(x) = \sqrt{x + 2} \Rightarrow D_g = [-2, +\infty)$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x - 1}_{x \geq -1} \geq -2\} = [-1, +\infty)$$

$$\text{ب) } (gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) + 2} = \sqrt{x - 1 + 2} = \sqrt{x + 1}$$

$$\text{پ) } \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2 - 1}{\sqrt{2 + 2}} = \frac{1}{2}$$

-۳۰- توابع $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ و $g(x) = \sqrt{x-4}$ داده شده‌اند. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

پاسخ »

$$D_f = (4, +\infty) \quad (0/25), \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad (0/25)$$

$$= \left\{ D_{gof} = \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\} \mid x \geq 4 \mid \sqrt{x-4} \neq 1 \right\} \quad (0/25) \Rightarrow$$

$$D_{gof} = (4, +\infty) - \{5\} \quad (0/25)$$

-۳۱- برای دو تابع $f = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ و $g = \{(11, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ تابع fog را به صورت زوج مرتب بنویسید.

پاسخ »

$$fog = \{(2, 7), (4, 4), (6, -5), (3, -5)\} \quad (0/25)$$

-۳۲- اگر $f = \{(-1, 0), (1, 2), (2, 4), (5, 3)\}$ و $g = \{(-1, 1), (1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$ دو تابع باشند.:.

الف) مقدار $(3f-g)(-1)$ را حساب کنید.

ب) تابع fog را به صورت زوج مرتب بنویسید.

پاسخ »

$$(3f-g)(-1) = 3f(-1) - g(-1) = 3 - 0 = 3 \quad (0/25)$$

$$\text{الف) } fog = \{(1, 3), (2, 5)\} \quad (0/5)$$

$$\text{ب) } fog = \{(1, 3), (2, 5)\} \quad (0/5)$$

-۳۳- برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-4}$ و $g(x) = \frac{2}{x}$ بدون نوشتن ضابطه، دامنهٔ fog را به دست آورید.

پاسخ »

$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad (0/25)$$

$$D_{fog} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} \quad (0/25) \rightarrow \left\{ x \neq 0 \mid \frac{2}{x} \neq \pm 2 \right\} \quad (0/25)$$

$$\rightarrow D_{fog} = \mathbb{R} - \{0, 1, -1\} \quad (0/25)$$

۳۴- دو تابع $f(x) = \frac{x-1}{x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ داده شده اند.

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.

ب) ضابطه تابع fog را تشکیل دهید.

ج) حاصل عبارت $\left(\frac{2f}{g}\right)(5)$ را محاسبه کنید.

» باسخ «

الف) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ (۰/۲۵) ، $D_g = [1, +\infty)$ (۰/۲۵) صفحه ۶۳ و ۶۶

$$D_{fog} = \{x \in D_f \mid g(x) \in D_f\} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow$$

$$D_{fog} = \left\{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R} - \{0\}\right\} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow D_{fog} = (1, +\infty) \quad (۰/۲۵)$$

ب) $(fog)(x) = f(\sqrt{x-1}) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}} \quad (۰/۵)$

ج) $\frac{2f(5)}{g(5)} = \frac{2 \times \frac{4}{5}}{2} = \frac{4}{5} \quad (۰/۲۵) \quad (۰/۲۵)$

۳۵- دو تابع x و $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ را درنظر بگیرید.

الف) دامنه gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) تابع $P(x) = f(x) + g(x)$ را به دست آورید.

» باسخ «

الف) $D_f = (-\infty, 1]$ (۰/۲۵) ، $D_g = [1, +\infty)$ (۰/۲۵) صفحه ۶۳ و ۶۵

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow D_{gof} = \left\{x \in (-\infty, 1] \mid \sqrt{1-x} \in [1, +\infty)\right\} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow D_{gof} = (-\infty, 0] \quad (۰/۲۵)$$

$D_p = D_f \cap D_g = \underbrace{\{-1\}}_{(۰/۲۵)} \quad (۰/۲۵)$

)

$$P(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow P = \{(1, 0)\} \quad (۰/۲۵)$$

براهین

توشه‌ای برای موفقیت

۳۶- اگر $g(x) = \sqrt{x - 3}$ و $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ دو تابع باشند:

الف) مقدار $(f-g)(4)$ را به دست آورید.

ب) دامنهی تابع fog را بیابید.

پاسخ »

$$3(f(4)-g(4))=3\left(\frac{1}{4}-1\right) \textcircled{0/5} = -2 \textcircled{0/25}$$

)

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{1\} \\ D_g = [3, +\infty) \textcircled{0/25} \\ D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \textcircled{0/25} \rightarrow \\ D_{fog} = \{x \in [3, +\infty) \mid \sqrt{x-3} \neq 1\} \textcircled{0/25} = \{x \in [3, +\infty) \mid x \neq 4\} = [3, 4) \cup (4, +\infty) \textcircled{0/5} \end{cases}$$

۳۷- دامنهی gof را مشخص کنید.

پاسخ »

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

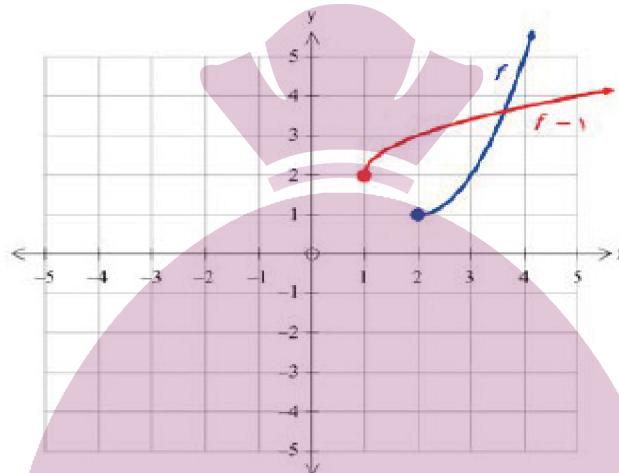
-۳۸- با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

پاسخ »

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \quad D_f = [2, +\infty) \quad R_f = [1, +\infty)$$

$$y = (x - 2)^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = (x - 2)^2 \Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{y - 1} \Rightarrow x = \pm\sqrt{y - 1} + 2$$

$$\xrightarrow{x \geq 2} f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1} + 2 \quad D_{f^{-1}} = [1, +\infty) \quad R_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$



-۳۹- توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آنها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه وارون آنها را به دست آورید.

(الف) $f(x) = |x|$

(ب) $g(x) = -x^2$

(پ) $h(x) = x^2 + 4x + 3$

ایران توشه

- توشه‌ای برای موفقیت**
- | | |
|--|----------------------------------|
| (الف) $f(x) = x \quad x \geq 0$ | (ب) $g(x) = -x^2 \quad x \leq 0$ |
| (پ) $h(x) = (x + 2)^2 - 1 \quad x \geq -2$ | |

پاسخ »

-۴۰- در مورد هریک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = \frac{-\sqrt{v}x - 3}{2}$ ، $g(x) = -\frac{2x + 6}{\sqrt{v}}$

ب) $f(x) = -\sqrt{x - \lambda}$ ، $g(x) = \lambda + x^2$; $x \leq 0$

پاسخ »

الف) $fog(x) = f(g(x)) = -\frac{\sqrt{v}}{2} \left(-\frac{2x + 6}{\sqrt{v}} \right) - 3 = x + 3 - 3 = x$

$gof(x) = g(f(x)) = -\frac{2 \left(\frac{-\sqrt{v}x - 3}{2} \right) + 6}{\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{v}x - 6 + 6}{\sqrt{v}} = x$

$fog(x) = f(g(x)) = -\sqrt{\lambda + x^2} - \lambda = -\sqrt{x^2} = -|x| \xrightarrow{x \leq 0} -(-x) = x$

ب) $gof(x) = g(f(x)) = \left(-\sqrt{x - \lambda} \right)^2 + \lambda = x - \lambda + \lambda = x$

-۴۱- ضابطه‌ی تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-\lambda x + 3}{2}$

ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x + 1}$

پاسخ »

$$f(x) = \frac{-\lambda x + 3}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \frac{-\lambda y + 3}{2} \Rightarrow -\lambda y = 2x - 3 \Rightarrow y = \frac{-2x + 3}{\lambda} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x + 3}{\lambda}$$

$$g(x) = -5 - \sqrt{3x + 1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = -5 - \sqrt{3y + 1} \Rightarrow -\sqrt{3y + 1} = x + 5$$

$$\Rightarrow 3y + 1 = (x + 5)^2 \Rightarrow 3y = (x + 5)^2 - 1 \Rightarrow y = \frac{(x + 5)^2 - 1}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{(x + 5)^2 - 1}{3}$$

-۴۲- درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.

دو تابع $f(x) = \frac{-\sqrt{v}x - 3}{2}$ و $g(x) = -\frac{2x + 6}{\sqrt{v}}$ وارون یکدیگرند. (درست، نادرست)

پاسخ »

۴۳- تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}^x$ یک به یک و در نتیه ه معکوس پذیر

» پاسخ »

است - است

۴۴- اگر تابع خطی f از نقاط $(1, 2)$ و $(4, 5)$ عبور کند، ضابطهٔ تابع وارون آنرا به دست آورید.

» پاسخ »

ابتدا ضابطهٔ خطی تابع f را می‌یابیم:

$$\begin{cases} (1, 2) \in f \\ (4, 5) \in f \end{cases} \Rightarrow y - 1 = \frac{5 - 1}{4 - 1}(x - 1) \Rightarrow y = f(x) = 2x - 1$$

$$y = 2x - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y + 1}{2} \Rightarrow y = \frac{x + 1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$$

۴۵- تابع $f = \{(m^4 + 2, 5), (n^3 + 1, 4)\}$ مفروض است. m و n را طوری تعیین کنید که برد وارون f ، $\{-7, 18\}$ باشد.

» پاسخ »

$$f = \{(m^4 + 2, 5), (n^3 + 1, 4)\}$$

$$f^{-1} = f = \{(5, m^4 + 2), (4, n^3 + 1)\} \Rightarrow R_{f^{-1}} = \{m^4 + 2, n^3 + 1\}$$

اگر $\{m^4 + 2, n^3 + 1\} = \{-7, 18\}$ باشد، پس:
 $m^4 + 2 = 18 \Rightarrow m^4 = 16 \Rightarrow m = \pm 2$
 $n^3 + 1 = -7 \Rightarrow n^3 = -8 \Rightarrow n^3 = (-2)^3 \Rightarrow n = -2$

$$\begin{cases} m^4 + 2 = 18 \\ n^3 + 1 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^4 = 16 \\ n^3 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ n = -2 \end{cases}$$

ایران توین

توشه‌ای برای موفقیت

-۴۶ اگر $f(x) = 2x - 6$ و $g(x) = 5 + 2x$ باشد، دامنه $h(x) = \sqrt{f^{-1}(x)} + \frac{3x - 1}{g^{-1}(x)}$ را حساب کنید.

پاسخ

$$f(x) = 2x - 6 \Rightarrow y = 2x - 6 \Rightarrow y + 6 = 2x \Rightarrow x = \frac{y + 6}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x + 6}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 6}{2}$$

$$g(x) = 5 + 2x \Rightarrow y = 5 + 2x \Rightarrow y - 5 = 2x \Rightarrow x = \frac{y - 5}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x - 5}{2}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$$

$$h(x) = \sqrt{f^{-1}(x)} + \frac{3x - 1}{g^{-1}(x)} \Rightarrow h(x) = \sqrt{\frac{x + 6}{2}} + \frac{3x - 1}{\frac{x - 5}{2}}$$

$$\begin{cases} \frac{x + 6}{2} \geq 0 \Rightarrow x \geq -6 \\ x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5 \end{cases} \Rightarrow D_h = [-6, +\infty) - \{5\}$$

-۴۷ اگر $f(x) = \left[\frac{vx}{3} \right]$ تابعی یک به یک و $f = \{(2, m^2 + 3m), (5, 10), (2, 4), (5m, 11), (-4, 5)\}$ باشد، مقدار $(f + g)(m)$ را حساب کنید. ([نماد جزء صحیح است.)

پاسخ

$$m^2 + 3m = 4 \Rightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Rightarrow (m - 1)(m + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$$

$$\frac{m = -4}{f = \{(2, 4), (5, 10), (2, 4), (-20, 11), (-4, 5)\}}$$

$$(f + g)(m) \xrightarrow{m = -4} f(-4) + g(-4) = 5 + \left[\frac{-28}{3} \right] = 5 - 10 = -5$$

۴۸- اگر تابع خطی f دارای شیب k باشد به ازای چه مقدار k شیب تابع f^{-1} برابر $9k$ است. ($k \neq 0$)

پاسخ

$$f(x) = kx + b \Rightarrow y = kx + b \Rightarrow y - b = kx \Rightarrow \frac{1}{k}y - \frac{b}{k} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{1}{k}x - \frac{b}{k}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{k}x - \frac{b}{k}$$

در خود سوال گفته شده شیب تابع وارون $9k$ است. بنابراین:

$$\frac{1}{k} = 9k \Rightarrow 9k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{3}$$

۴۹- ضابطه و دامنهٔ وارون $f(x) = \frac{x^2 - 13x + 36}{x - 9}$ را به دست آورید.

پاسخ

$$D_f = \mathbb{R} - \{9\} \Rightarrow f(x) = \frac{(x - 4)(x - 9)}{(x - 9)} = x - 4$$

تابع در $(5, 9)$ تعریف نشده است. بنابراین وارون آن در $(9, 5)$ تعریف نشده است.

$$y = x - 4 \Rightarrow y + 4 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = x + 4$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{5\}$$

۵۰- اگر $1 < x - 1$ باشد و دامنهٔ دو تابع $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ برابر باشند، a, b را حساب کنید.

پاسخ

$$y = 2x - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y + 1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{x + 1} = \frac{2}{x + 1} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

ایران نویس

توشه‌ای برای موفقیت

۵۱- یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

$$y = \sqrt{2x - 3}$$

$$y = \frac{x + 6}{3x - 4}$$

پاسخ »

(الف)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x_1 - 3} &= \sqrt{2x_2 - 3} \quad \text{به توان ۲ می‌رسانیم} \\ \frac{x_1 + 6}{3x_1 - 4} &= \frac{x_2 + 6}{3x_2 - 4} \\ 3x_1 x_2 + 18x_2 - 4x_1 - 24 &= 3x_1 x_2 + 18x_1 - 4x_2 - 24 \Rightarrow 22x_1 = 22x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

هر دو تابع یک به یک هستند.

۵۲- اگر $f = \{(-1, 2), (0, 3), (4, -1)\}$ باشد، تابع f^{-1} را بباید و دامنه و برد آنرا مشخص کنید.

پاسخ »

$$f = \{(-1, 2), (0, 3), (4, -1)\}$$

$$f^{-1} = \{(2, -1), (3, 0), (-1, 4)\}$$

$$D_{f^{-1}} = \{2, 3, -1\} = R_f$$

$$R_{f^{-1}} = \{-1, 0, 4\} = D_f$$

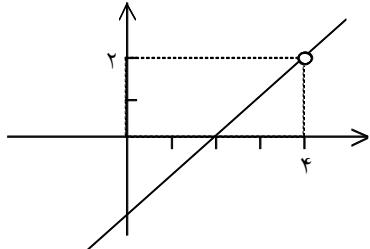
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۳- وارون تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ را رسم کنید و همچنین دامنه و برد وارون تابع را حساب کنید.

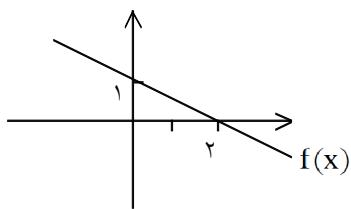
پاسخ »

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 (x \neq 2)$$

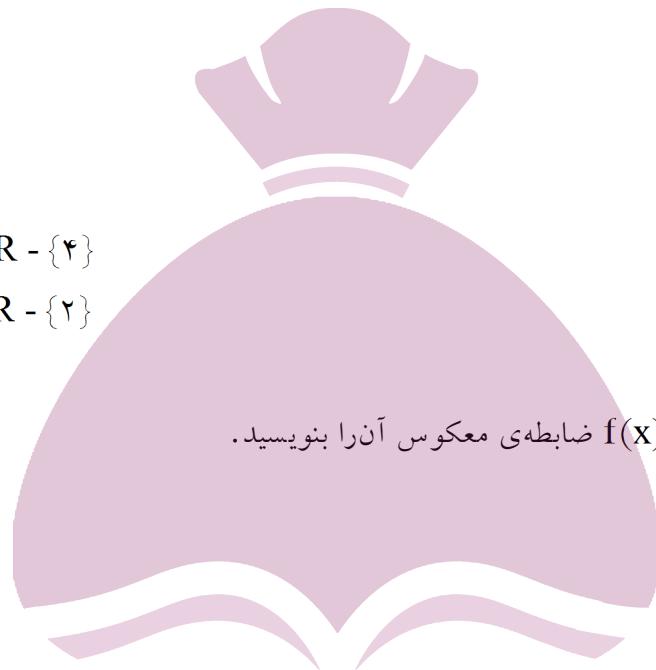
$\begin{array}{c cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 2 & 4 \end{array}$	در تابع معکوس	$\begin{array}{c cc} x & 2 & 4 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array}$
---	---------------	---



$$\left\{ \begin{array}{l} D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{4\} \\ R_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{2\} \end{array} \right.$$
با توجه به نمودار



۵۴- با توجه به نمودار تابع خطی $f(x)$ ضابطهٔ معکوس آنرا بنویسید.



پاسخ »

چون $f(x)$ یک تابع خطی است بنابراین ضابطهٔ آن به صورت $f(x) = ax + b$ است.

$$A(0, 1) \Rightarrow a(0) + b = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$B(2, 0) \Rightarrow a(2) + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}x \xrightarrow{\times(-2)} -2y + 2 = x$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -2x + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 2$$

-۵۵- اگر $x = 5 - 2x$ را حساب کنید. ([نماد جزء صحیح است.)

پاسخ »

$$y = 5 - 2x \Rightarrow 2x = 5 - y \Rightarrow x = \frac{5 - y}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{5 - x}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5 - x}{2} \Rightarrow [f^{-1}(10)] = [-2/5] = -3$$

-۵۶- اگر تابع $f(x) = (b - 2)x^3 + 4x - b + 1$ را حساب کنید.

پاسخ »

برای آنکه تابع در کل اعداد حقیقی یک به یک باشد، ضریب x^2 را صفر قرار می‌دهیم.
 $b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = 4x - 1$

$$f^{-1}(3) = a \Rightarrow f(a) = 3 \Rightarrow 4a - 1 = 3 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

-۵۷- اگر تابع $f = \{(1, a+2b), (-2, 3), (2a-b, 3), (1, 4), (2, 5)\}$ تابعی یک به یک باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

پاسخ »

$$(1, a+2b), (1, 4) \in f \xrightarrow{\text{تابع است } f} a+2b = 4 \quad (1)$$

$$(-2, 3), (2a-b, 3) \in f \xrightarrow{\text{تابعی یک به یک است } f} 2a-b = -2 \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \begin{cases} a+2b=4 \\ 2a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=4 \\ 4a-2b=-4 \end{cases} \Rightarrow 5a=0 \Rightarrow a=0$$

$$\xrightarrow{(1)} 0+2b=4 \Rightarrow b=2$$

ایران نوشه

نوشه‌ای برای موفقیت