سوالات **شبه نهایی** درس: **هندسه ۲**	پایه: **یازدهم** دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: **۱۰** تعداد سوال: **۶۷**
رشته: **ریاضی و فیزیک**	دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت **خرداد** ماه سال **۱۴۰۳**	

ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده بلامانع است.
۱	**جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید .** **الف) وتری از دایره که از مرکز دایره می گذرد، .... است.** **ب) چند ضلعی را .... می گوییم اگر و فقط اگر دایره ای باشد که بر همه ضلع های آن مماس باشد.** **پ) در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازهٔ هر ضلع به سینوس زاویهٔ روبه رو به آن ضلع برابر است با اندازهٔ .... دایرهٔ محیطی مثلث.** **ت) اگر دو دایره $C(O,R), C'(O',R'), OO'=d$ باشند دو دایره متقاطعند اگر ....** **ث) در حالت کلی، بازتاب شیب خط را ....** **ج) اگر فاصله ی یک خط از مرکز دایره .... شعاع دایره باشد آنگاه خط ودایره دو نقطه اشتراک دارند** **چ) تعداد نقاط ثابت در هر بازتاب................... است** **د) ناحیه ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است ......دایره می نامند.** **ذ) اگر فاصله ی یک خط از مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد آنگاه خط ودایره ....نقطه اشتراک دارند یعنی ....** **ر) اگر دایره ای بر تمام اضلاع یک چند ضلعی مماس باشد دراین صورت دایره را دایره ی ....می نامیم.** **ز) تبدیل یافته ی یک شکل را ، .... آن می نامیم.** **س) تبدیل هایی که طول پاره خط را حفظ می کنند ، تبدیلات .... نامیده می شوند.** **ش) در هر بازتاب تبدیل یافته یک مثلث، یک .... است که با مثلث اولیه .... است.** **ک) در تبدیل طولپا ، تبدیل یافته ی هر زاویه ، زاویه ای .... آن است.** **گ) یک خط و یک دایره .... اگر و تنها اگر خط در نقطه تماس بر شعاع .... باشد.** **ل)در تجانس به مرکز O و نسبت k :** **اگر .... تجانس را ، تجانس مستقیم و اگر .... تجاس را معکوس می نامیم.** **ن) اگر ....تصویر شکل کوچکتر می شود و آنرا انقباض و اگر.......... تصویر بزرگتر و آن را انبساط می نامیم.**
۲	**درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.** **الف) مستطیل هم محاطی و هم محیطی است.** **ب) مرکز دایره محاطی مثلث محل همراسی عمودمنصف ها است.** **ج) بازتاب جهت شکل را حفظ می کند.** **د) تبدیل همانی طولپاست.** **ه) طول کمان دایره ای به شعاع ۴ و زاویه ۴۵ درجه برابر π رادیان است.** **و) هفت ضلعی منتظم هم محاطی و هم محیطی است.**

ز) در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($A = 90^\circ$)، $AH = h_a$ همواره $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ درست است.

ح) دو شکل متشابه متجانس هستند.

خ) طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های ۲ و ۸ ، مماس خارج برابر ۸ است.

۳

پاسخ کوتاه دهید.

الف) در چه شرایطی تجانس همانی است؟

ب) مساحت هر شکل با مساحت مجانس آن چه رابطه ای دارند؟

پ) هرون به کمک کدام تبدیل دستور پیدا کردن کوتاه ترین مسیر را ارائه داد؟

ت) آیا در تجانس مستقیم جهت شکل حفظ می شود؟

ث) در هر تبدیل نقطه ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می شود چه می نامند؟

ج) ترکیب دو بازتاب که محورهای بازتاب متقاطع باشند چه تبدیلی است؟

چ) در حالی که که زاویه A قائمه باشد،رابطه کسینوس ها به چه قضیه ای تبدیل می شود؟

ح) اگر نقاط وسط وتر و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟

۴

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) در دایره ای به شعاع ۱۰، فاصله وتر AB از مرکز دایره برابر ۶ است طول وتر AB کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۸

ب) کدام یک از تبدیل های زیر نمی تواند نقاط ثابت داشته باشد؟

۱) انتقال غیر همانی ۲) دوران غیر همانی ۳) تجانس غیر همانی ۴) نقاط روی خط بازتاب

پ)درچند مورد از تبدیلات زیر مساحت شکل حفظ نمی شود؟ بازتاب – دوران-تجانس-انتقال

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

ت)مساحت مثلثی به اضلاع ۱۵و۱۴و۱۳ کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) ۸۱ ۳) ۸۳ ۴) ۸۴

ث) با کدام یک از دسته اعداد زیر می توان مثلثی با زاویه باز کشید؟

۱)۱۰و۶و ۹ ۲)۸ و ۴ و ۹ ۳) ۸ و۱۰ و۶ ۴)۸ و ۱۵ و ۱۷

ج) اگر در مثلث ABC داشته باشیم $2\sin A\sin B = ab$ شعاع دایره محیطی چقدر است ؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

چ) پاره خط AB و تبدیل انتقال T مفروض است. اگر $T(B) = B', T(A) = A'$ باشد آنگاه چهار ضلعی $ABB'A'$ کدام است؟

۱)مستطیل ۲)متوازی الاضلاع ۳)ذوزنقه متساوی الساقین ۴)کایت

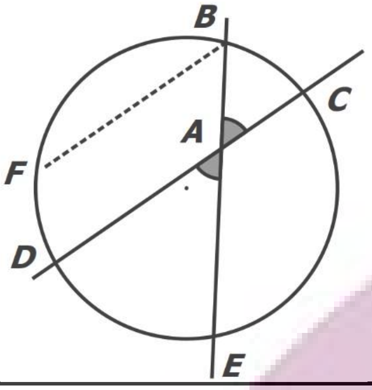
ح)اگر تصویربازتاب مثلث ABC تحت محور d_1 را $A'B'C'$ نامیده و سپس تصویر بازتاب مثلث $A'B'C'$ را تحت محور d_2 را $A''B''C''$ بنامیم و فاصله ی دوخط موازی d_1 و d_2 برابر ۱۰ واحد باشد دراین صورت مثلث $A''B''C''$ تصویر مثلث ABC تحت چه تبدیلی و طول AA'' کدام است؟

۱) بازتاب و $AA'' = 10$ ۲) بازتاب و $AA'' = 20$ ۳) انتقال و $AA'' = 10$ ۴) انتقال و $AA'' = 20$

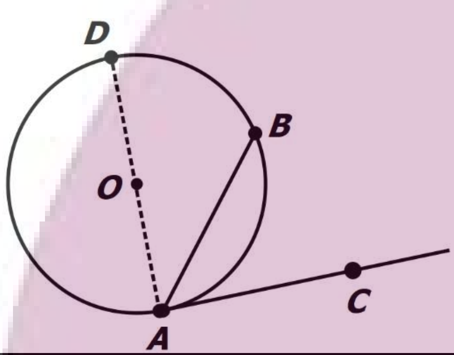
خ) زاویه بین دو مماس رسم شده از نقطه A خارج دایره $C(O,۱۰)$ برابر ۶۰° است طول پاره خط OA برابرکدام است؟

۱) ۲۰ ۲) $۱۰\sqrt{۳}$ ۳) ۱۰ ۴) ۵

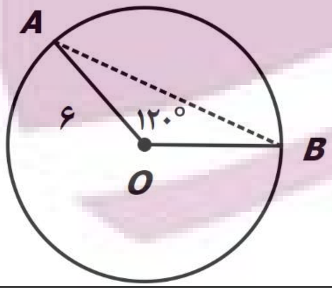
۵ در شکل زیر ثابت کنید: $DAE = \frac{۱}{۲}(BC + DE)$



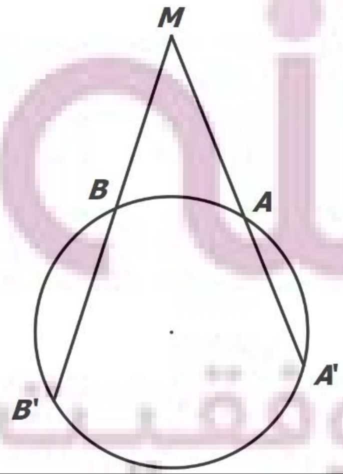
۶ قضیه: ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی برابر نصف کمان روبه رو است. $BAC = \frac{AB}{۲}$

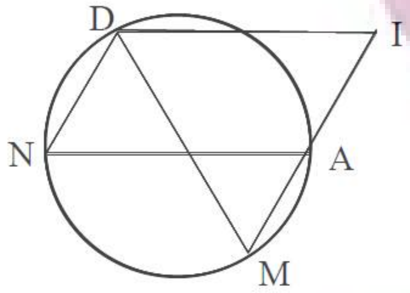
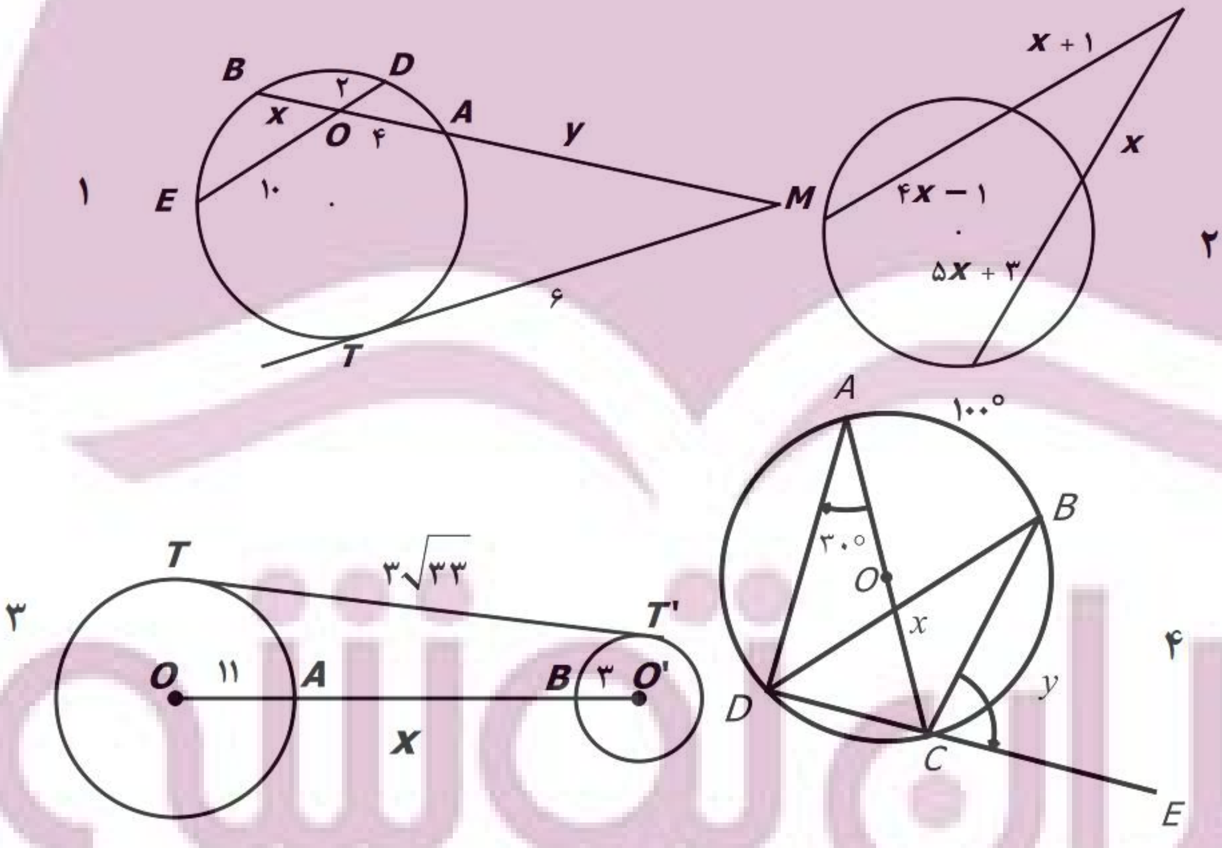


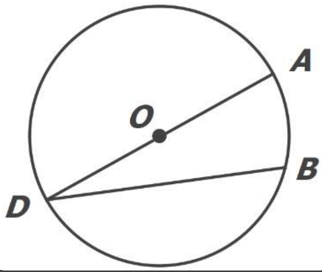
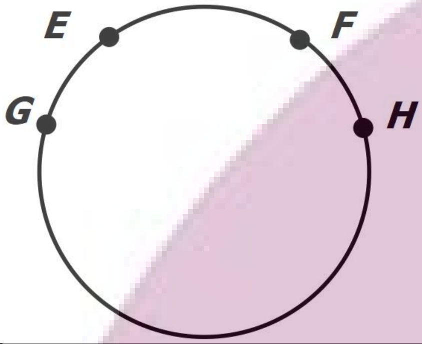
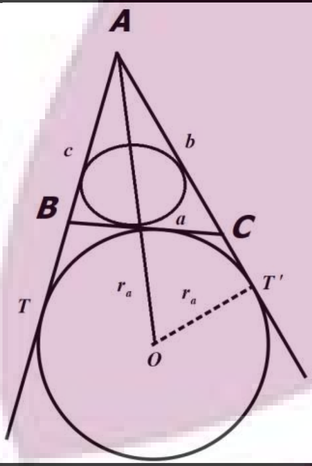
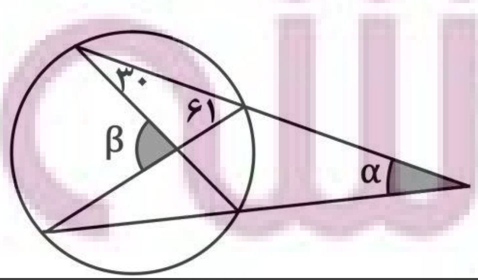
۷ در دایره زیر مساحت قطاع AOB و طول کمان AB و طول وتر AB را تعیین کنید. $AOB = ۱۲۰^\circ$

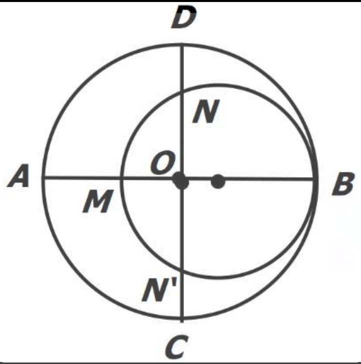


۸ ثابت کنید اگر امتداد وترهای و همدیگر را در نقطه M قطع کنند، آنگاه $MA \times MA' = MB \times MB'$



۹	دو دایره $C(O,۳)$, $C'(O',۳)$ مماس بیرون هستند. اگر مختصات مرکز های دو دایره نقاط $O(۳,-۲)$, $O'(m-۱,۲)$ باشند مقدار m را تعیین کنید.
۱۰	در شکل زیر چهارضلعی DIAN یک متوازی الاضلاع است و نقاط I ، A و M روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید : $DM = DI$ 
۱۱	مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را بدست آورید که در دایره به شعاع R محاط شده باشد .
۱۲	قضیه:ثابت کنید یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.
۱۳	قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر وفقط اگر مجموع اندازه های دوضلع مقابل برابر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل دیگر باشند.
۱۴	ثابت کنید یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.
۱۵	شعاع دایره محاطی داخلی مثلثی را بیابید که شعاع سه دایره محاطی خارجی آن ۲ ، ۳ و ۶ باشد.
۱۶	در هر شکل مقدار y , x را بیابید. 
۱۷	یک ذوزنقه هم محیطی و هم محاطی است. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن ها.
۱۸	ثابت کنید در هر مثلث نیمساز هر زاویه و عمود منصف ضلع مقابل آن زاویه در نقطه ای روی دایره محیطی مثلث یکدیگر را قطع می کنند.

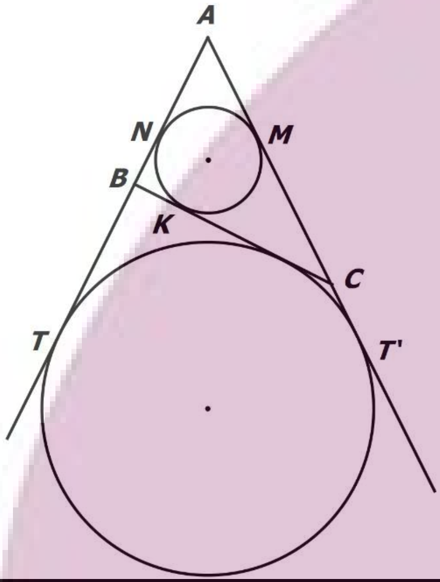
	
۱۹	ثابت کنید در شکل زیراندازه ی زاویه محاطی برابر نصف کمان روبروی آن است . 
۲۰	در شکل مقابل کمان های EG وFH هم اندازه هستند. الف) وتر های EF وGH و پاره خط EH را رسم کنید. ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟ پ) وتر های EF وGH نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟ 
۲۱	در هر مثلث اگر مساحت برابر S و محیط برابر ۲p و r_a شعاع دایره محاطی خارجی باشد ثابت کنید. $r_a = \frac{S}{P-a}$ 
۲۲	طول خط المرکزین دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه محدودآن ها ۳۶π سانتی مترمربع است. طول شعاع های دو دایره را به دست آورید.
۲۳	هرگاه M نقطه ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه های دو قطعه قاطع.
۲۴	در شکل مقابل اندازه ی α و β را بدست آورید. 
۲۵	در شکل مقابل دو دایره مماس درون و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $AM = ۱۶ , ND = ۱۰$ ، نسبت مساحت دایره کوچکتر به مساحت دایره بزرگتر چقدر است؟



۲۶ رسم خط مماس بر دایره ای از نقطه ای خارج دایره را با رسم شکل توضیح دهید.

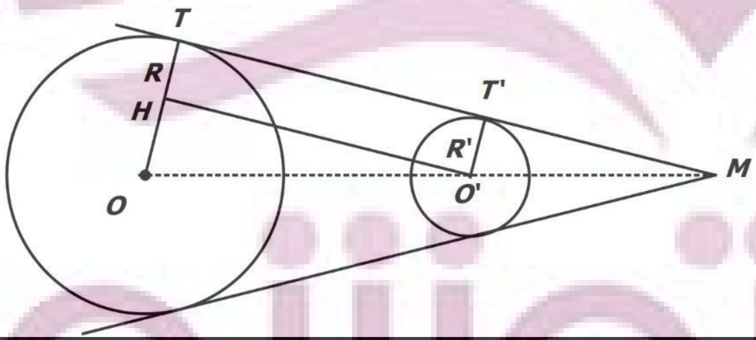
۲۷ با توجه به شکل های زیر($BC = a , AC = b \ , AB = c$) ثابت کنید:

$$AM = AN = P - a \quad , \ AT = AT' = P$$

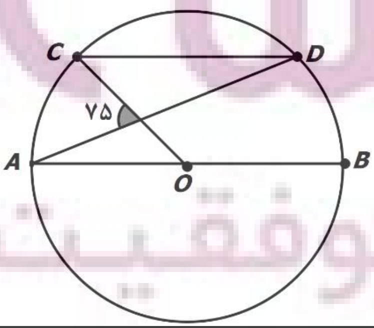


۲۸ ثابت کنید طول مماس مشترک خارجی دو دایره از رابطه زیر به دست می آید.

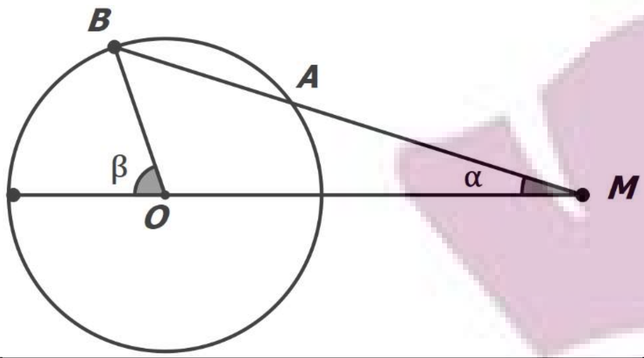
$$TT' = \sqrt{d^{2} - (R - R')^{2}}$$



۲۹ در دایره زیر $CD \parallel AB$ ، اندازه کمان CD را به دست آورید.



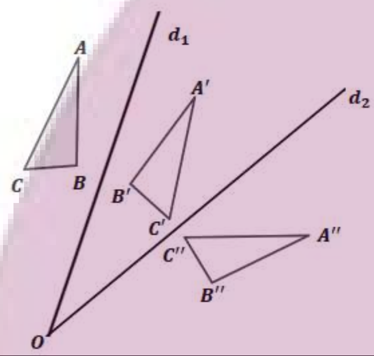
۳۰ در شکل زیر $MA = R$ است. ثابت کنید $\beta = 3\alpha$.



۳۱ در شکل مقابل دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر راقطع کرده اند . مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است . مثلث $A''B''C''$ بازتاب مثلث $A'B'C'$ نسبت به خط d_2 است .

الف) نشان دهید $AOA'' = 2\theta$.

ب) با چه تبدیلی می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست؟ چه نتیجه ای می گیرید؟



۳۲ قضیه : در هر بازتاب ، اندازه ی هر پاره خط و اندازه ی تصویر آن با هم برابرند.
فقط دو حالت زیر را ثابت کنید.

۱- فقط نقطه انتهایی پاره خط روی محور بازتاب است ۲- پاره خط با محور بازتاب نه موازی و نه متقاطع است.

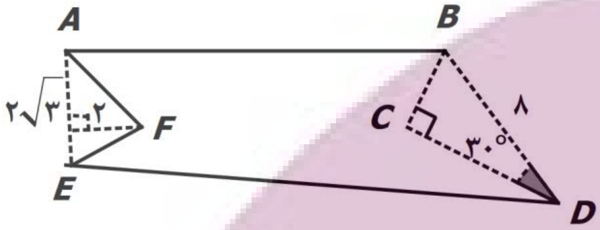
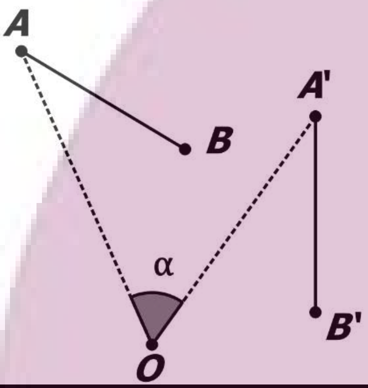
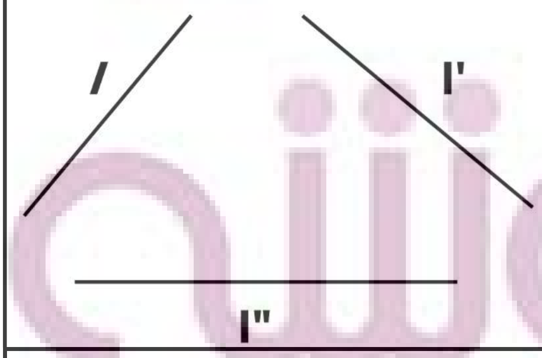
۳۳ اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد ، نشان دهید انتقال تحت بردار $\vec{v}$ ، تبدیل طولپاست .

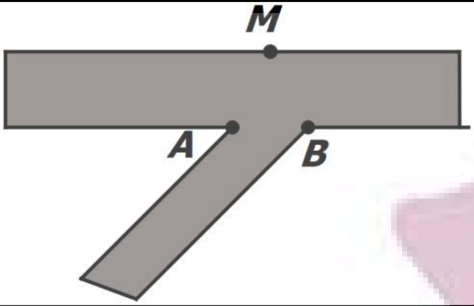
۳۴ نقطه ی A' تصویر نقطه ی A در بازتاب نسبت به خط L است . اگر $AA'=16$ و نقطه یO روی خط L و $OA=10$ باشد، فاصله ی نقطه ی A از خط OA' چقدر است؟

۳۵ در تجانس با نسبت $k > 0$ مرکز تجانس O (که نه روی راس قرار دارد و نه روی اضلاع زاویه) نشان دهید تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می کند .

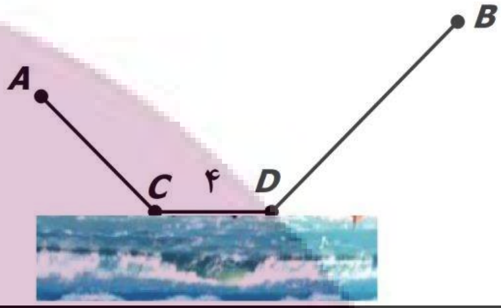
۳۶ فرض کنید پاره خط $A'B'$ در تجانس به مرکز دایره O (روی پاره خط AB قرار دارد. $k<0$ و $k>0$) نشان دهید.

$$\frac{A'B'}{AB} = |k|$$

۳۷	قضیه: ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می کند.(حالتی را ثابت کنید که مرکز تجانس روی خط AB نباشد $\mathbf{k} > ۰$)
۳۸	فاصله نقطه A به فاصله $۳\sqrt{۳}$ از خط d قرار دارد و تصویر نقطه A راتحت بازتاب نسبت به خط d نقطه A' می نامیم و سپس نقطه A را حول نقطه A' به اندازه ۶۰° دوران می دهیم طول AA'' را تعیین کنید.(رسم شکل دقیق)
۳۹	دور زمینABCDEF مطابق شکل زیر حصارکشی شده است. الف) با رسم شکل نشان دهید چگونه می توانیم بدون کم وزیاد کردن حصارها مساحت زمین را افزایش دهیم؟ ب)میزان افزایش مساحت را تعیین کنید. 
۴۰	قضیه: با توجه به شکل زیر نشان دهید:در هر دوران اندازه هر پاره خط و تصویر آن با هم برابرند. (O مرکز دوران و α زاویه دوران است.) 
۴۱	یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ و به مرکز محلی تلاقی قطرها تصویر کرده ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اولیه را بیابید.
۴۲	سه خط دو به دونا موازی $\mathbf{l}$ و $\mathbf{l'}$ و $\mathbf{l''}$ و زیر را در نظر بگیرید. پاره خطی به طول ۴ سانتی متر رسم کنید که دو سر آن روی $\mathbf{l}$ و $\mathbf{l'}$ و موازی $\mathbf{l''}$ باشد. 
۴۳	می خواهیم کنار رودخانه ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله A وB مطابق شکل مشخص است. اسکلهM را در چه نقطه ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه ترین مسیر را طی کنند؟



۴۴ دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقع اند. می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم بطوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود روی شکل محل جاده ساحلی را مشخص کنید به طوری که مسیر بدست آمده کوتاهترین مسیر باشد.



۴۵ توضیح دهید که در هر یک از تبدیل های زیر، آیا می توان نقاط ثابت تبدیل داشت؟

۱) انتقال غیر همانی:

۲) دوران غیر همانی:

۳) تجانس غیر همانی:

۴۶ الف) شرط اینکه تجانس طولپا شود چیست؟

ب) اگر مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC باشد، مرکز تجانس را چگونه می توان پیدا کرد؟

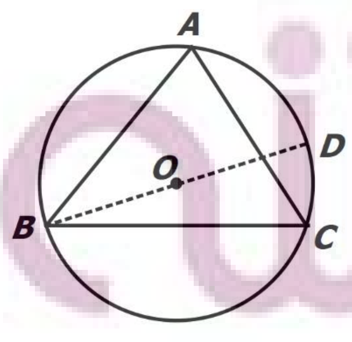
پ) اگر A' دوران یافته ی نقطه ی A در دوران به مرکز O و زاویه α باشد. نشان دهید عمود منصف AA' از نقطه O می گذرد؟

ت) شرط اینکه بازتاب شیب خط را حفظ کند، چیست؟

ث) آیا تجانس طولپا است؟ چرا؟

ج) به چه تبدیل هایی همانی می گوییم؟

۴۷ مثلث دلخواه ABC ($A < ۹۰^\circ$) و دایره محیطی آن به مرکز O را در نظر بگیرید.



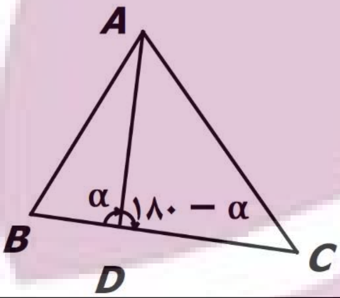
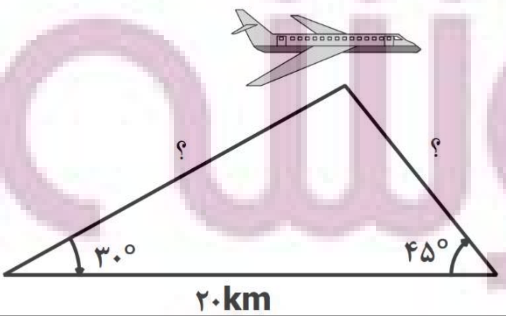
۱) زاویه های C و D چرا با هم برابرند؟

۲) چرا مثلث ABD در راس A قائم الزاویه است؟

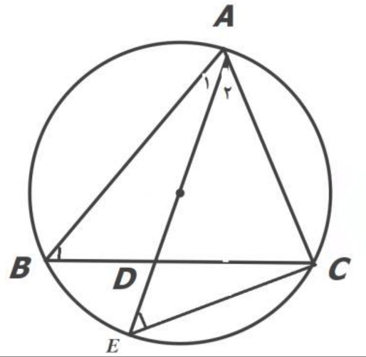
۳) با توجه به دو قسمت قبل جاهای خالی را پر کنید:

$$\sin C = \cdots = \frac{\cdots}{۲R} \Rightarrow \sin C = \frac{\cdots}{۲R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

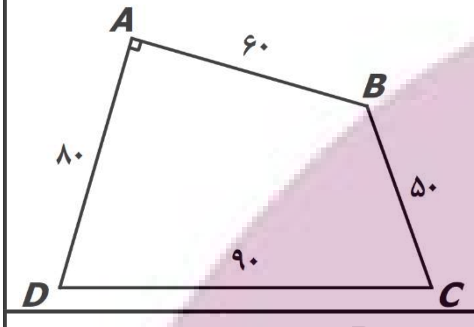
۴) بطور مشابه خواهیم داشت: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = ...$

۴۸	مثلث دلخواه ABC ، $B+C=۱۲۰^\circ$, $BC=۲۰, AC=\frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳}$ می باشد. مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زاویه های B,C را بدست آورید.
۴۹	دو قایق از یک نقطه در دریاچه ای با سرعت ۶۰ km/h و ۱۰۰ km/h و با زاویه ۱۲۰ درجه از هم دور می شوند . نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله ای از یکدیگر هستند ؟
۵۰	در مثلث ABC ، $A=۶۰^\circ , AC=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}, AB=۲\sqrt{۲}$ است طول ضلع BC را بدست آورید.
۵۱	در مثلث ABC میانه AM را رسم کرده ایم $AC=b, AB=c, MB=MC=\frac{a}{۲}$ با استفاده از قضیه کسینوس ها درستی تساوی زیر را ثابت کنید. $b^۲+c^۲=۲AM^۲+\frac{a^۲}{۲}$
۵۲	در مثلث ABC ، $BC=۲\sqrt{۳}, AC=\sqrt{۶}+\sqrt{۲} , AB=۲\sqrt{۲}$ اندازه ی زاویه ها را تعیین کنید .
۵۳	در مثلثی به اضلاع ۷ و ۸ و۹ اندازه ارتفاع وارد بر ضلع متوسط را حساب کنید.
۵۴	محیط باغچه مثلث شکلی به مساحت $۱۵\sqrt{۳}$ متر مربع و به اضلاع ۶ و ۱۰ و x متر(که همگی اعدادی صحیح می باشند) چند متر می باشد؟
۵۵	در مثلث ABC ، $BC=۷ , AC=۵ , AB=۳$است، طول نیمساز زاویه A را پیدا کنید .
۵۶	قضیه استوارت : در مثلث ABC ، نقطه دلخواه D روی BC مفروض است. ثابت کنید: $AB^۲.DC+AC^۲.DB=AD^۲.BC+DB.DC.BC$ 
۵۷	در مثلث ABC ، به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه ای که از اضلاع به طول های۵ و ۶ ، به فاصله ۲ و ۳ سانتی متر است که از ضلع بزرگ تر چه فاصله ای دارد؟
۵۸	دو ایستگاه رادار، که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع اند، هواپیمایی را با زاویه های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده اند. فاصله هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید. 

۵۹ در شکل زیرفرمول طول نیمساز زاویه داخلی زاویه A را بیان و اثبات کنید.

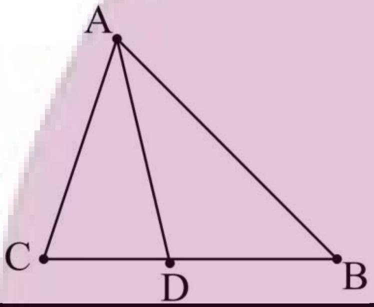


۶۰ در چهار ضلعی $ABCD$ ، $A = ۹۰^\circ , AB = ۶۰ , AD = ۸۰ , BC = ۵۰ , CD = ۹۰$ می باشد .
مساحت چهارضلعی را به دست آورید .



۶۱ قضیه: در مثلث ABC ، AD نیمساز راس A می باشد و ضلع BC را در نقطه ی D قطع می کند نشان دهید :

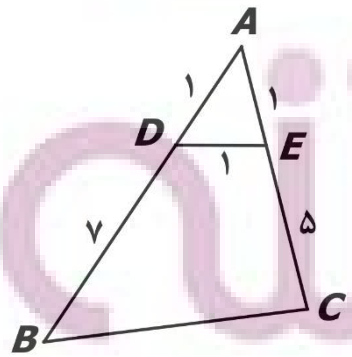
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



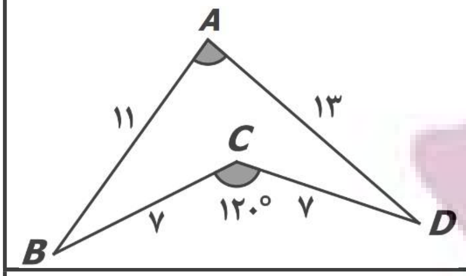
۶۲ ثابت کنید مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

۶۳ در مثلث ABC ، $A = ۶۰^\circ , AB = ۱۰ , AC = ۶$.
الف) طول BC را بیابید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\sin B$ را بیابید.

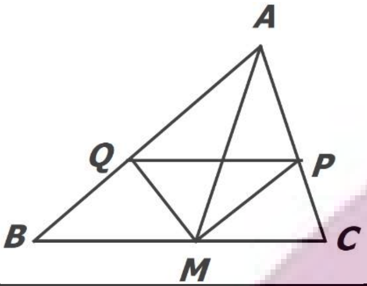
۶۴ در شکل مقابل اولا طول BC را بدست آورید، ثانیا مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.



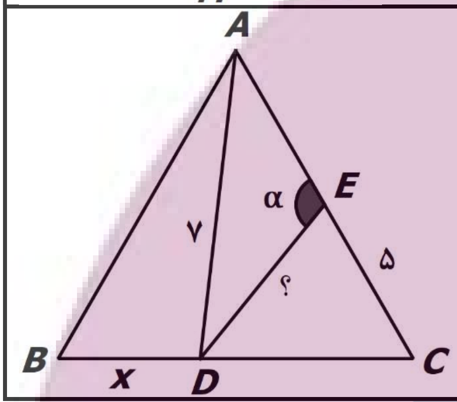
۶۵ در شکل زیر اولا اندازه A را به دست آورید، ثانیا مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.



۶۶ در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید BC موازی PQ است.



۶۷ در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D ، که به فاصله ۷ واحد از راس A قرار دارد از B و C چه فاصله ای دارد؟ نقطه E که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله ای است؟ اندازه زاویه AED چند درجه است؟



باسمه تعالی

پاسخ سوالات **شبه نهایی** درس: **هندسه ۲**	پایه: **یازدهم** دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: **۱۸** تعداد سوال: **۶۷**
رشته: **ریاضی و فیزیک**	دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت **خرداد** ماه سال **۱۴۰۳**	

ردیف	راهنمای تصحیح
۱	الف) قطر ب) محیطی پ) قطر ت) $R-R'<d<R+R'$ ث) حفظ نمی کند. ج) کمتر چ) بی شمار د) قطاع ذ) یک- خط بر دایره مماس است. ر) محاطی ز) تصویر س) ایزومتری ش)مثلث – هم نهشت ک) برابر گ) بر هم مماس - عمود ل) $k>0$ - $k<0$ ن) $\lvert k\rvert<1$ - $\lvert k\rvert>1$
۲	الف) نادرست ب) نادرست ج)نادرست د) درست ه) درست و) درست ز) درست ح) نادرست خ) درست
۳	الف) تجانس در صورتی همانی است که $k=1$ ب)توان دوم k پ) بازتاب ت) بله ث) نقطه ثابت ج) دوران چ) قضیه فیثاغورس ح) وسط کمان را به وسط وتر وصل می کنیم و ادامه می دهیم تا دایره را قطع کند.
۴	الف) ۳ ب) ۱ پ) ۱ ت) ۴ ث) ۲ ج) ۴ چ)۱ ح) ۴ خ) ۱
۵	روش اول) خط BF را موازی خط DC رسم می کنیم. $BF \parallel DC \Rightarrow FD = BC \quad (1)$ $FBE = \frac{FE}{2} \quad , \quad FBE = DAE$ $FE = FD + DE \Rightarrow FE = BC + DE$ $DAE = FBE = \frac{FE}{2} = \frac{BC+DE}{2}$ روش دوم: از D به B وصل می کنیم. زاویه DAE یک زاویه خارجی مثلث ABD است. پس داریم: $DAE = B + D$ و زاویه B و D محاطی هستند پس: $D = \frac{BC}{2} \; , \; B = \frac{DE}{2}$ پس داریم: $DAE = \frac{BC+DE}{2}$
۶	$DAC = 90^\circ \Rightarrow DAC = \frac{1}{2}ABD \quad (1)$ زاویه ABD محاطی است، پس $DAB = \frac{1}{2}DB \quad (2)$ $\xrightarrow{(1),(2)} DAC - DAB = \frac{1}{2}(DBA - DB) = \frac{1}{2}AB$

۷

$$AB=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰}=\frac{۱۲۰\times ۶\pi}{۱۸۰}=۴\pi$$

$$\overline{AB}=\sqrt{۶^۲+۶^۲-۲(۶)(۶)\cos ۱۲۰}=\sqrt{۷۲+۳۶}=\sqrt{۱۰۸}=۶\sqrt{۳}$$

$$S=\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰}=\frac{۳۶\times ۱۲۰\pi}{۳۶۰}=۱۲\pi$$

۸

از A به A' و از B به B' وصل می کنیم.

$$\begin{cases} A'=B' \\ M=M \end{cases} \xrightarrow{(زز)} \Delta MA'B \sim \Delta MAB'$$

تناسب اضلاع متناظر را می نویسم:

$$\frac{MB}{MA}=\frac{MA'}{MB'} \Rightarrow MA\times MA'=MB\times MB'$$

۹

$$OO'=d=R+R'=۶ \quad , OO'=\sqrt{(m-۴)^۲+(۲+۲)^۲}=۶$$

$$\Rightarrow (m-۴)^۲+۱۶=۳۶ \Rightarrow (m-۴)^۲=۲۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۴+۲\sqrt{۵} \\ m=۴-۲\sqrt{۵} \quad \times \end{cases}$$

۱۰

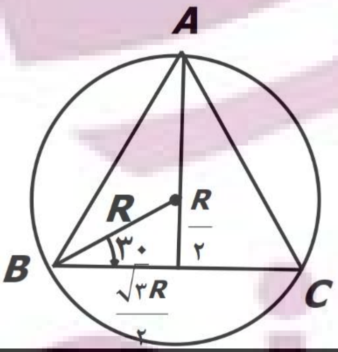
چهارضلعی DNAI متوازی الاضلاع است پس: $N=I$ از طرفی $N=M$ (محاطی رو به رو یک کمان)

پس $I=M$ در نتیجه مثلث DMI مثلث متساوی الساقین است در نتیجه: $DI=DM$

۱۱

مرکز دایره محیطی محل برخورد عمودمنصف های اضلاع مثلث است، چون مثلث متساوی الاضلاع است پس نقطه O محل برخورد نیمسازها است. ضلع روبه رو به زاویه ۳۰ و ۶۰ درجه به ترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.

$$BC=a=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}R=\sqrt{۳}R \Rightarrow S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳}R)^۲=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$



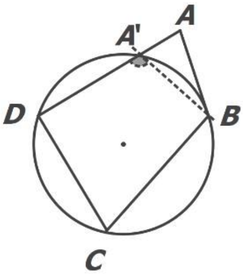
۱۲

فرض می کنیم ABCD محاطی است می خواهیم ثابت کنیم که هر دو زاویه مقابل آن مکمل است.

$$\begin{cases} A=\frac{BCD}{۲} \\ C=\frac{DCB}{۲} \end{cases} \Rightarrow A+C=\frac{BCD}{۲}+\frac{DCB}{۲}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰$$

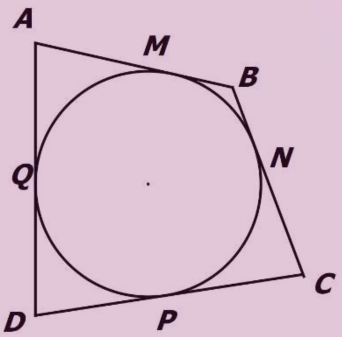
پس زوایای A و C مکمل اند و با استدلال مشابه می توان نشان داد که زوایای B و D مکل اند.

فرض می کنیم در چهارضلعی ABCD هر دو زاویه مقابل مکمل باشند، ثابت می کنیم که ABCD محاطی است. برهان خلف: فرض کنیم چهارضلعی که ABCD محاطی نباشد، از سه نقطه B ، C و D همواره یک دایره می گذرد.(هر مثلث محاطی است.) اگر این دایره از راس A نگذرد، خط AD را در نقطه ای چون A' قطع کند. چهارضلعی $A'BCD$ محاطی است.

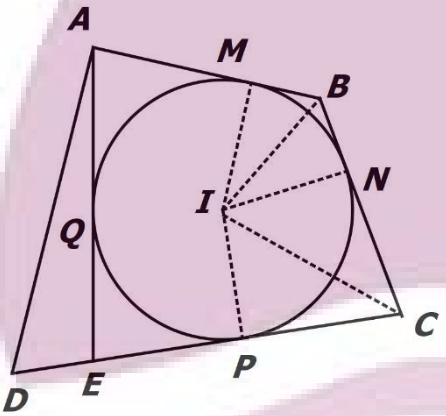


پس: $\times$ $\begin{cases} A+C=180 \\ A'+C=180 \end{cases} \Rightarrow A=A'$ زاویه A' یک زاویه خارجی برای مثلث $AA'B$ است. می دانیم اندازه هر زاویه خارجی از هر زاویه داخلی غیرمجاور بزرگتر است.($A'>A$) پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

۱۳ اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد. می دانیم اگر از نقطه ای بیرون دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم دو پاره خط مماس هم اندازه اند.



$$AB+DC=AM+MB+DP+PC$$
$$=AQ+BN+DQ+CN=AD+BC$$



برعکس: فرض کنیم : $AB+CD=BC+AD$ ابتدا نیمسازهای زوایای B,C را رسم می کنیم . دایره محیطی می توان بر سه ضلع AB ، BC و CD مماس رسم کرد. برای مماس بودن بر ضلع AD از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض کنیم دایره مفروض بر ضلع AD مماس نباشد و پاره خط دیگری مانند AE مماس بر دایره باشد.

$$\begin{cases} AB+CD=BC+AD & (1) \\ AB+CE=BC+AE & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} CD-CE=AD-AE$$

$$\Rightarrow DE=AD-AE \Rightarrow DE+AE=AD \quad \times$$

این رابطه با توجه به نامساوی مثلث امکان ندارد. زیرا در مثلث ADE داریم: $AE+ED>AD$

۱۴ فرض کنیم ABCD محاطی است ثابت می کنیم باید متساوی الساقین باشد.

$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{ق خ م}} \begin{cases} A+D=180 \\ A+C=180 \end{cases} \Rightarrow D=C \Rightarrow AD=BC$$ ذوزنقه متساوی الساقین

فرض می کنیم ذوزنقه متساوی الساقین باشد ثابت می کنیم که ذوزنقه محاطی است.

ق خ م
$$\begin{cases} A+D=۱۸۰ \xrightarrow{C=D} A+C=۱۸۰ \\ A+D=۱۸۰ \xrightarrow{C=D} B+D=۱۸۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه}}$$ ذوزنقه محاطی است.

۱۵

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{r} \Rightarrow ۱=\frac{۱}{r} \Rightarrow r=۱$$

۱۶

۱) $۴x=۲۰ \Rightarrow x=۵\ ,\ y(y+۹)=۳۶ \Rightarrow y^{۲}+۹y-۳۶=۰$

$$(y-۱۲)(y+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} y=۱۲ \\ y=-۳ \quad \times \end{cases}$$

۲) $۵\cancel{x}\,(x+۱)=\cancel{x}\,(۶x+۳) \Rightarrow ۵x+۵=۶x+۳ \Rightarrow x=۲$

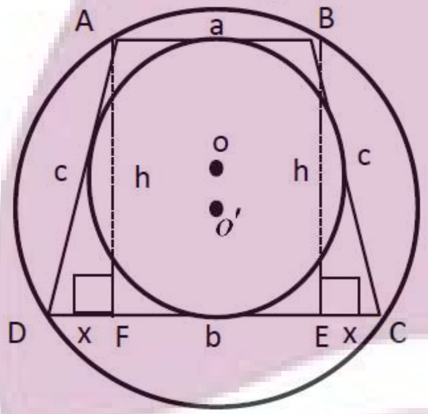
۳) $TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}} \Rightarrow ۲۹۷=(۱۴+x)^{۲}-(۱۱-۳)^{۲} \Rightarrow (۱۴+x)^{۲}=۳۶۱$

$\Rightarrow ۱۴+x=۱۹ \Rightarrow x=۵$

۴) $x=۱۸۰-۸۰=۱۰۰\ ,\ y=\frac{۸۰}{۲}=۴۰$

۱۷

چون ذوزنقه $ABCD$ محاطی است پس متساوی الساقین است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است در نتیجه $۲c=a+b$ و مثلث ADF قایم الزاویه است.



$$۲c=a+b \Rightarrow c=\frac{a+b}{۲},\ b=۲x+a \Rightarrow x=\frac{b-a}{۲}$$

$$h^{۲}=c^{۲}-x^{۲} \Rightarrow h^{۲}=\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{b-a}{۲}\right)^{۲} \Rightarrow h^{۲}=\frac{۴ab}{۴} \Rightarrow h=\sqrt{ab}$$

$$s_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(a+b)\times h=\frac{۱}{۲}(a+b)\sqrt{ab}$$

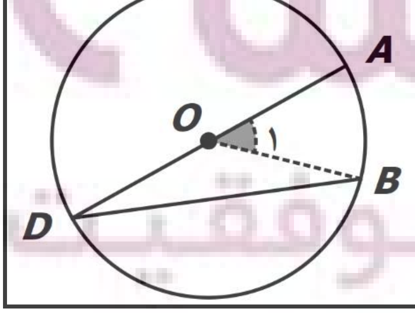
۱۸

$$A_۱=A_۲ \xrightarrow{\text{خ زاویه محاطی}} CD=DB \xrightarrow{\text{قضیه}} \overline{CD}=\overline{DB}$$

فاصله ی D از دو سر ضلع BC به یک فاصله است، پس D روی عمود منصف ضلع BC قرار دارد.

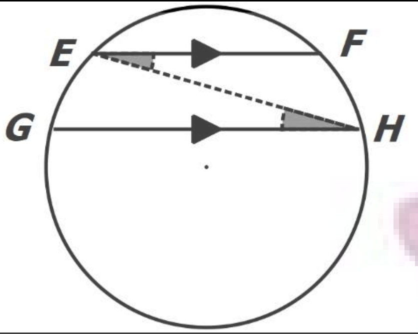
۱۹

از D به B وصل می کنیم. مثلث OBD متساوی الساقین است. $OB=OD \Rightarrow D=B$ و $O_۱$ زاویه خارجی است. $O_۱=D+B=۲D \Rightarrow D=\frac{O_۱}{۲}$ از طرفی پس $O_۱=AB$ پس $D=\frac{AB}{۲}$



۲۰

الف) رسم شکل



ب) $\widehat{FEH} = \widehat{GHE}$ چون محاطی روبه روی یک کمان برابر هستند.

پ)موازی اند، بنا بر عکس قضیه خطوط موازی و مورب

۲۱

$$S_{ABC} = S_{AOC} + S_{AOB} - S_{OBC} = \frac{۱}{۲} r_a \times b + \frac{۱}{۲} r_a \times c - \frac{۱}{۲} r_a \times a$$

$$S = \frac{۱}{۲} r_a (b + c - a) = \frac{۱}{۲} r_a (۲P - ۲a) = r_a (P - a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{P - a}$$

۲۲

$$d = r - r' = ۲ \quad , s = \pi r^۲ - \pi r'^۲ = ۳۶\pi \Rightarrow r^۲ - r'^۲ = ۳۶ \Rightarrow \underbrace{(r - r')}_{۲}(r + r') = ۳۶$$

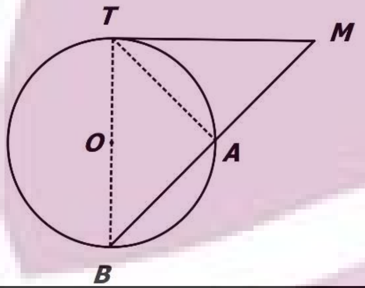
$$r + r' = ۱۸ \Rightarrow r = ۱۰ \quad , r' = ۸$$

۲۳

از T به A و B وصل می کنیم.

$$\widehat{MTA} = \frac{\widehat{TA}}{۲} = \widehat{TBA}$$

$$\begin{cases} \widehat{T} = \widehat{B} \\ \widehat{M} = \widehat{M} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \Delta MAT \sim \Delta MTB \Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB} \Rightarrow MT^۲ = MA \times MB$$



۲۴

$$\beta = \frac{۱۲۲ + ۶۰}{۲} = ۹۱ \quad , \alpha = \frac{۱۲۲ - ۶۰}{۲} = ۳۱$$

۲۵

شعاع دایره بزرگتر R و شعاع دایره کوچکتر R' است. $ON = R - ۱۰ , OM = R - ۱۶$

قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می کند. $ON = ON' = R - ۱۰$

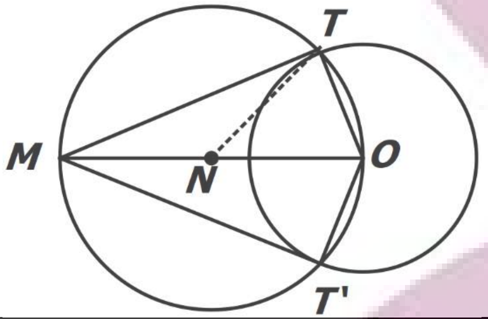
$$NO \times N'O = OM \times OB \Rightarrow (R - ۱۰)^۲ = R(R - ۱۶) \Rightarrow$$

$$\cancel{R^۲} - ۲۰R + ۱۰۰ = \cancel{R^۲} - ۱۶R \Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

$$R' = \frac{۱}{۲} MB = \frac{۱}{۲}(۲R - ۱۶) = ۱۷ \to \frac{S}{S'} = \frac{۱۷^۲}{۲۵^۲}$$

۲۶

ابتدا دایره ای به قطر OM رسم می کنیم.این دایره، دایره مفروض را در دو نقطه T و T' قطع می کند. خطوط MT و MT' برداریه مماس هستند. پاره خط های $MN = NO = NT$ با هم برابر هستند. در مثلث MOT میانه وارد بر وتر نصف وتر است. بنا بر قضیه ای این مثلث قائم الزاویه است. زوایای T و T' قائمه هستند، چون در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود است پس خط بر دایره مماس است.



۲۷

$$AM = AN = x \ , BN = BK = y \ , CK = CM = z$$

$$P - a = \frac{a+b+c}{۲} - a = \frac{b+c-a}{۲} = \frac{x+z+x+y-y-z}{۲} = \frac{۲x}{۲} = x = AM$$

$$AT + AT' = x+y+y+x+z+z = ۲x+۲y+۲z = ۲p \Rightarrow ۲AT = ۲P \Rightarrow AT = AT' = P$$

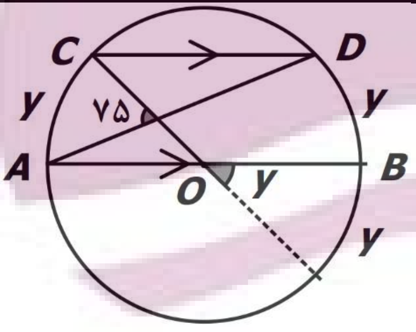
۲۸

شعاع های OT و OT' بر خط مماس MT عمود است. $T = T' = H_۱ = ۹۰$ پس چهارضلعی $TT'O'H$ مستطیل است، پس $O'H = TT' \ , OT = OT' = R'$ در مثلث قائم الزاویه $OO'H$ بنا بر رابطه فیثاغورس داریم:

$$OO'^۲ = OH^۲ + O'H^۲ \ , O'H = TT' \ , d = OO' \ , OH = R - R'$$

$$d^۲ = OH^۲ + TT'^۲ \Rightarrow TT' = \sqrt{d^۲ - OH^۲} \Rightarrow TT' = \sqrt{d^۲ - (R-R')^۲}$$

۲۹

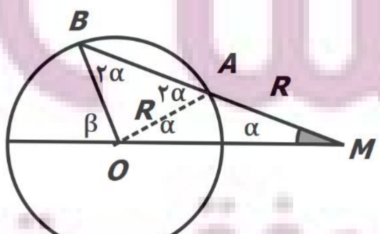


$$\frac{y+۲y}{۲} = ۷۵ \Rightarrow ۳y = ۱۵۰ \Rightarrow y = ۵۰ \ , CD = ۱۸۰ - ۲ \times ۵۰ = ۸۰$$

۳۰

زاویه β یک زاویه خارجی مثلث OBM است. مثلث های AOM و OAB متساوی الساقین است.

$$\beta = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha$$



۳۱

الف) خط d_1 محور بازتاب است پس نیمساز زاویه AOA' است، یعنی $O_1 = O_2$

خط d_2 محور بازتاب است پس نیمساز زاویه $A'OA''$ است، یعنی $O_3 = O_4$

$$AOA'' = O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 2O_2 + 2O_3 = 2(O_2 + O_3) = 2\theta$$

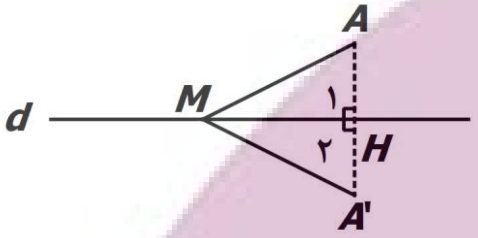
ب) با یک دوران به مرکز O و زاویه دو برابر اندازه زاویه بین دو خط می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست.

نتیجه: دو بازتابی که محورهای بازتاب متقاطع داشته باشند، یک دوران را نتیجه می دهد.

۳۲

۱) بازتاب A نسبت به خط d نقطه ی A' و بازتاب M خود M است. یعنی

$$S(A) = A', S(M) = M$$

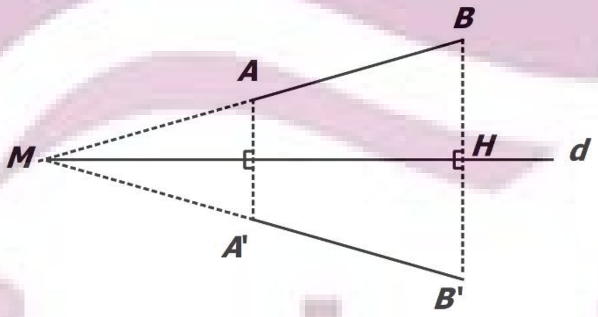


$$\begin{cases} AH = A'H \\ MH = MH \\ H_1 = H_2 = 90 \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta MHA \sim \Delta MHA' \xrightarrow{\text{تام}} MA = MA'$$

روش دوم: (خاصیت عمودمنصف) اگر نقطه ای روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است. (خط d عمود منصف پاره خط AA' است.)

۲) پاره خط AB را امتداد می دهیم تا خط بازتاب را در نقطه M قطع کند. نقطه B' بازتاب نقطه ی B نسبت به خط بازتاب پیدا می کنیم و پاره خط MB' را رسم می کنیم.

$$\begin{cases} AB = MB - MA \\ A'B' = MB' - MA' \\ MB = MB', MA = MA' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

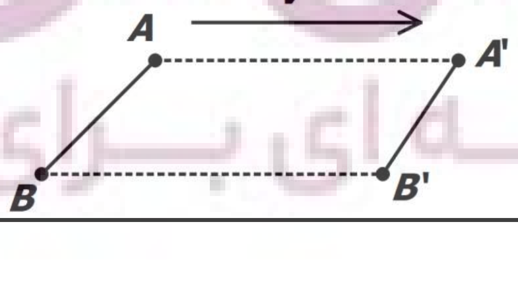


۳۳

تبدیل یافته ی پاره خط AB را تحت بردار v انتقال می دهیم و آن را $A'B'$ می نامیم.

در یک چهارضلعی، دو ضلع روبه رو موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است. چهار ضلعی $AA'B'B$ متوازی الاضلاع است ، پس $AB = A'B'$

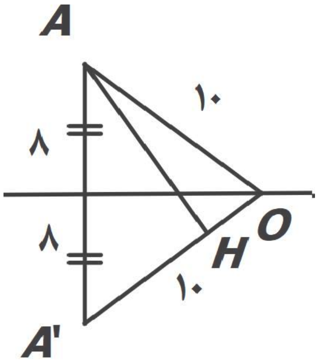
$$\begin{cases} AA' = \vec{v} \\ BB' = \vec{v} \end{cases}, AA' \parallel BB'$$



۳۴

$OH=\sqrt{۱۰^۲-۸^۲}=۶ \quad ,OA=OA'=۱۰$

$S_{OAA'}=\frac{۱}{۲}\times۱۶\times۶=۴۸ \ ,S_{OAA'}=\frac{۱}{۲}\times۱۰\times AH=۵AH \Rightarrow ۵AH=۴۸ \Rightarrow AH=۹/۶$



۳۵

بنا بر قضیه ای می دانیم که تجانس شیب خط را حفظ می کند.

$$\begin{cases} AB \parallel A'B' \ ,OB \ \text{م} \quad \text{ق خ م} \quad B_۱=B'_۱ \quad (۱) \\ BC \parallel B'C' \ ,OB' \ \text{م} \quad \text{ق خ م} \quad B_۲=B'_۲ \quad (۲) \end{cases}$$

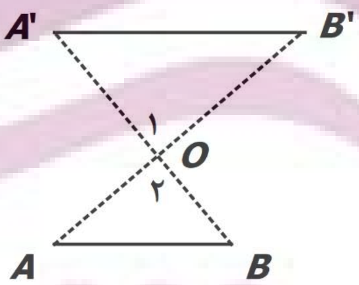
از جمع روابط (۱) و (۲) داریم: $B_۱+B_۲=B'_۱+B'_۲ \Rightarrow ABC=A'B'C'$

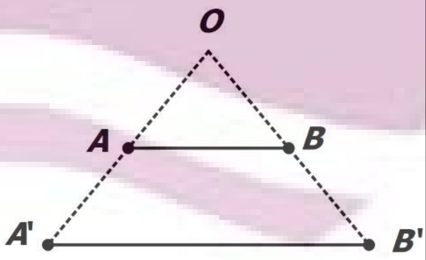
۳۶

حالت اول فرض کنیم ($k>۰$)

$$\left.\begin{matrix} OA'=k.OA \\ OB'=k.OB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB'}=k \xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} AB \parallel A'B'$$

قضیه تالس $\quad \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB'}=\frac{A'B'}{AB}=K$





حالت اول فرض کنیم.($k<۰$)

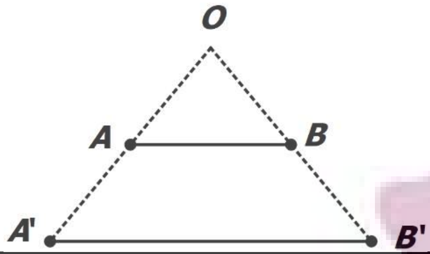
$$\left.\begin{matrix} OA'=k.OA \\ OB'=k.OB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB'}=k \\ O_۱=O_۲ \end{matrix}\right\} \text{ق ۲ تشابه} \quad \Delta AOB \sim \Delta A'OB'$$

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB'}=\frac{A'B'}{AB}=K$$

۳۷

اگر نقاط A' و B' به ترتیب مجانس های نقاط A و B باشند. طبق تعریف تجانس داریم:

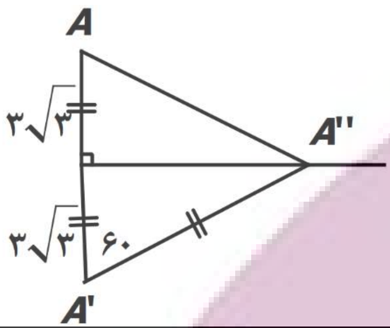
$$\begin{cases} OA'=k.OA \\ OB'=k.OB \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=k \ \text{ق عکس تالس} \ AB \parallel A'B'$$



۳۸

با استفاده از قضیه کسینوس ها داریم:

$$AA'' = \sqrt{(۶\sqrt{۳})^{۲} + (۶\sqrt{۳})^{۲} - ۲(۶\sqrt{۳})(۶\sqrt{۳})\cos ۶۰} = \sqrt{۱۰۸ + ۱۰۸ - ۱۰۸} = ۶\sqrt{۳}$$



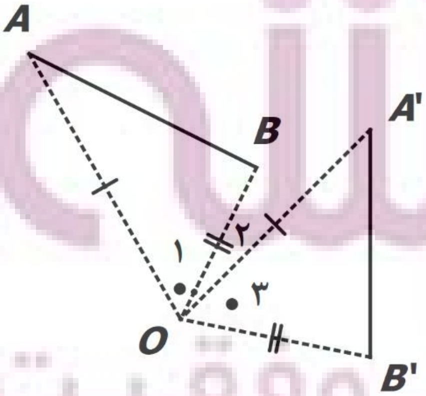
۳۹

$$\begin{cases} S_{AFE} = \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۳} \times ۲ = ۲\sqrt{۳} \\ BC = \frac{۱}{۲} \times ۸ = ۴ \,,\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۸ = ۴\sqrt{۳} \ ,\ S_{BCD} = \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۳} \times ۴ = ۸\sqrt{۳} \\ S = ۲(۲\sqrt{۳}) + ۲(۸\sqrt{۳}) = ۲۰\sqrt{۳} \end{cases}$$

۴۰

$$\begin{cases} O_{۱} + O_{۲} = \alpha \\ O_{۲} + O_{۳} = \alpha \end{cases} \Rightarrow O_{۱} = O_{۳}$$

$$\begin{cases} OA = OA' \\ OB = OB' \\ O_{۱} = O_{۳} \end{cases} \overset{\text{ض ز ض}}{} \ \Delta OAB \sim \Delta OA'B' \xrightarrow{\text{تام}} AB = A'B'$$



۴۱

روش اول:

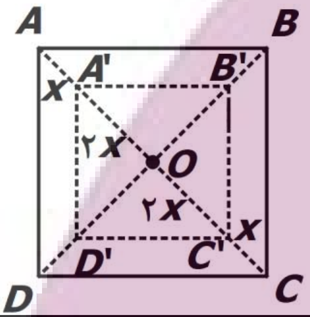
$$\frac{S}{S'}=k^۲\Rightarrow\frac{S}{S'}=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹}\Rightarrow S=\frac{۴}{۹}S'\Rightarrow S'-S=۵\Rightarrow S'-\frac{۴}{۹}S'=۵$$

$$۹S'-۴S'=۴۵\Rightarrow S'=۹\Rightarrow p=۴\times۳=۱۲$$

روش دوم:

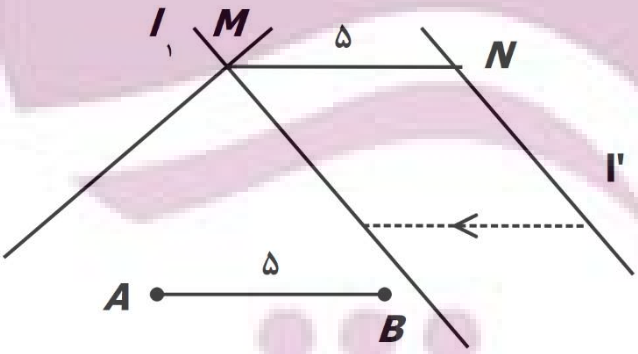
$$\left(\frac{۶x\times۶x}{۲}\right)-\left(\frac{۴x\times۴x}{۲}\right)=۵\Rightarrow ۱۸x^۲-۸x^۲=۵\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$AC=۶x=\frac{۶}{\sqrt{۲}}\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۶}{\sqrt{۲}}=۳\Rightarrow p=۴\times۳=۱۲$$

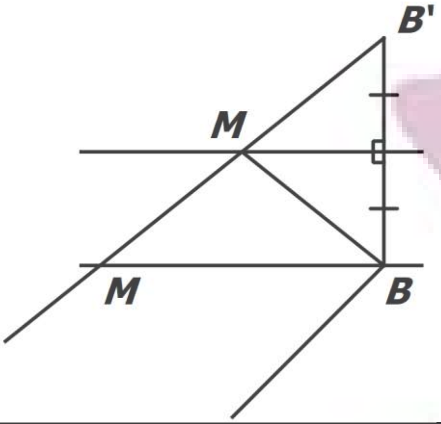


۴۲

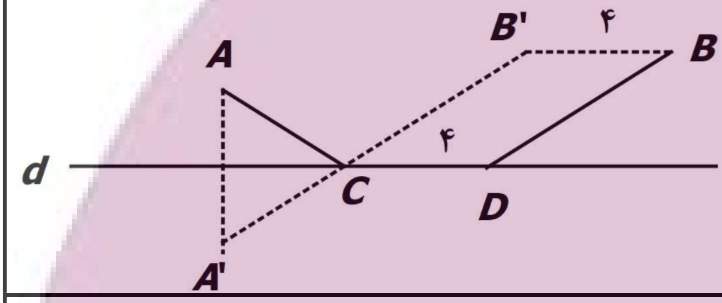
ابتدا پاره خط AB را به طول ۵ روی خط l مشخص می کنیم. خط l' را تحت بردار $\overrightarrow{BA}$ انتقال می دهیم تا خط $l_۱'$ بدست آید. این خط، خط l را در نقطه ای مانند M قطع می کند. از نقطه ی M موازی خط l'' خطی رسم می کنیم تا خط l' را در نقطه ی N قطع کند. پاره خط MN جواب مساله است.



۴۳ با توجه به شکل،عرض رودخانه در طول مسیر ثابت است.پس از نقطه B یا A روش هرون را برای پیدا کردن نقطه M اجرا می کنیم.



۴۴ ابتدا در انتقال با بردار v که موازی خط d و به اندازه ۴ کیلومتر و در جهت BA است. نقطه ی B را تصویر می کنیم که نقطه ی B' بدست می آید. قرینه ی نقطه ی A را نسبت به خط d بدست می آوریم و آن را A' می نامیم.سپس پاره خط $A'B$ را رسم می کنیم تا خط d را در نقطه ی C قطع کند. پاره خط CD را برابر ۴ کیلومتر روی خط d جدا می کنیم. بنا بر مساله هرون مسیر ACDB کوتاه ترین مسیر ممکن است.



۴۵ الف) خیر، زیرا هر نقطه باید تحت یک بردار غیرصفر در صفحه بلغزد، بنابراین می تواند بر روی خودش بلغزد.

ب) مرکز دوران تحت هر دورانی ثابت می ماند، پس نقطه ثابت تبدیل است.

پ) مرکز تجانس تصویرش روی خودش قرار می گیرد، پس نقطه ثابت تبدیل است.

۴۶ الف) $|k| = ۱ \Rightarrow k = \pm ۱$

ب) خطوط AA' ، BB' و CC' در مرکز تجانس یعنی نقطه O همراسند.

پ) طبق تعریف دوران $OA = OA'$، طبق خاصیت عمودمنصف O روی عمودمنصف AA' است.

ت) وقتی خط داده شده در راستای عمود بر محور بازتاب یا موازی با محور بازتاب باشد.

ث) خیر زیرا، $A'B' = k.AB$

ج) هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می کند. ($\forall A \in P \Rightarrow T(A) = A$)

۴۷ ۱) زاویه های D , C محاطی روبه روی کمان AB و اندازه آن ها برابر نصف کمان روبه رو است.

۲) مثلث ABD در راس A قائم الزاویه است، چون محاطی روبه روی قطر است.

۳) $\sin C = \sin D , \sin D = \dfrac{AB}{BD} \Rightarrow \sin C = \dfrac{c}{۲R} \Rightarrow \dfrac{c}{\sin C} = ۲R$

۴) $\dfrac{a}{\sin A} = ۲R , \dfrac{b}{\sin A} = ۲R$

$B+C=۱۲۰\Rightarrow A=۶۰\Rightarrow \frac{a}{\sin A}=۲R\Rightarrow \frac{۲۰}{\sin ۶۰}=۲R\Rightarrow R=۱۰\times\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۳}}$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=۲R\Rightarrow \frac{\frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin B}=\frac{۴۰}{\sqrt{۳}}\Rightarrow \sin B=\frac{۲۰\sqrt{۱۸}}{۱۲۰}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۶}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow B=۴۵\Rightarrow C=۷۵$	۴۸
$۶۰\times ۰/۵=۳۰\ ,\ ۱۰۰\times ۰/۵=۵۰$ $x^۲=۳۰^۲+۵۰^۲-۲\times۳۰\times۵۰\times\cos۱۲۰=۹۰۰+۲۵۰۰+۱۵۰۰=۴۹۰۰\Rightarrow x=۷۰$	۴۹
$x^۲=(۲\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۲-\cancel{۲}\times۲\sqrt{۲}\times(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\times\cancel{\cos۶۰}$ $x^۲=۸+۶+۲+۲\sqrt{۱۲}-۲\sqrt{۱۲}-۴=۱۲\Rightarrow x=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$	۵۰
$\Delta AMC\ ;b^۲=AM^۲+(\frac{a}{۲})^۲-۲AM\times\frac{a}{۲}\times\underbrace{\cos(۱۸۰-\alpha)}_{-\cos\alpha}$ $\Rightarrow b^۲=AM^۲+\frac{a^۲}{۴}+AM\times a\times\cos\alpha \qquad (۱)$ $\Delta ABM\ ;c^۲=AM^۲+(\frac{a}{۲})^۲-۲AM\times\frac{a}{۲}\times\cos\alpha$ $\Rightarrow b^۲=AM^۲+\frac{a^۲}{۴}-AM\times a\times\cos\alpha \qquad (۲)$ $\xrightarrow{(۱)+(۲)} b^۲+c^۲=۲AM^۲+\frac{a^۲}{۲}$	۵۱
$(۲\sqrt{۳})^۲=(۲\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۲-۲\times۲\sqrt{۲}\times(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\times\cos\alpha$ $۱۲=۸+۶+۲+۲\sqrt{۱۲}+(-۴\sqrt{۱۲}-۸)\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۴+۲\sqrt{۱۲}}{۸+۴\sqrt{۱۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=۶۰$ $\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin۶۰}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}\Rightarrow\sin C=\frac{۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow C=۴۵\Rightarrow B=۷۵$	۵۲
$p=\frac{۷+۸+۹}{۲}=۱۲\Rightarrow S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۱۲\times۴\times۵\times۳}=۱۲\sqrt{۵}$ $S=\frac{۱}{۲}\times AB\times h=۱۲\sqrt{۵}\Rightarrow\frac{۷h}{۲}=۱۲\sqrt{۵}\Rightarrow h=\frac{۲۴\sqrt{۵}}{۷}$	۵۳

$S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=۱۵\sqrt{۳}\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۶\times ۱۰\times \sin C=۱۵\sqrt{۳}\Rightarrow ۳۰\sin C=۱۵\sqrt{۳}\Rightarrow$ $\sin C=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow C=۶۰\vee C=۱۲۰$ $\begin{cases} x^{۲}=۱۰^{۲}+۶^{۲}-۲(۱۰)(۶)\cos ۶۰=۱۰۰+۳۶-۶۰=۷۶\Rightarrow x=\sqrt{۷۶} \quad \times \\ x^{۲}=۱۰^{۲}+۶^{۲}-۲(۱۰)(۶)\cos ۱۲۰=۱۰۰+۳۶+۶۰=۱۹۶\Rightarrow x=\sqrt{۱۹۶}=۱۴ \end{cases}$ $p=۶+۱۴+۱۰=۳۰$	۵۴
$AD=x\ ,\ DB=y\ , x+y=۷\ ,\frac{CA}{CB}=\frac{AD}{DB}\Rightarrow \frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}=\frac{x}{y}$ $\Rightarrow \frac{x+y}{y}=\frac{۲+۵}{۵}\Rightarrow y=۵\ ,\ x=۲$ $CD^{۲}=AC\times BC-AD\times DB\Rightarrow CD=\sqrt{۴\times ۱۰-۲\times ۵}=\sqrt{۳۰}$	۵۵
$\Delta ADB;AB^{۲}=AD^{۲}+BD^{۲}-۲AD.BD.\cos\alpha$ $\Delta ADC;AC^{۲}=AD^{۲}+DC^{۲}-۲AD.DC.\underbrace{\cos(۱۸۰-\alpha)}_{-\cos\alpha}$ $AB^{۲}.DC+AC^{۲}.DB=DC(AD^{۲}+BD^{۲}-۲AD.BD.\cos\alpha)$ $+DB(AD^{۲}+DC^{۲}+۲AD.DC.\cos\alpha)=$ $AD^{۲}.DC+DC^{۲}.DC-۲AD.DB.DC.\cos\alpha+$ $AD^{۲}.DB+DC^{۲}.DB+۲AD.DB.DC.\cos\alpha=$ $AD^{۲}(DC+DB)+BD.DC(BD+DC)=AD^{۲}.BC+BD.DC.BC$	۵۶
$p=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۵+۶+۷}{۲}=۹$ $S_{ABC}=\sqrt{۹\times ۴\times ۳\times ۲}=۶\sqrt{۶}$ $S_{ABC}=S_{AOB}+S_{AOC}+S_{OBC}\Rightarrow ۶\sqrt{۶}=\frac{۱}{۲}(۲\times ۵+۳\times ۶+۷x)$ $۱۰+۱۸+۷x=۱۲\sqrt{۶}\Rightarrow x=\frac{۱۲\sqrt{۶}-۲۸}{۷}$	۵۷

۵۸

$$\sin ۱۰۵ = \sin(۶۰+۴۵) = \sin ۶۰ \times \cos ۴۵ + \sin ۴۵ \times \cos ۶۰ = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

$$\frac{x}{\sin ۳۰} = \frac{y}{\sin ۴۵} = \frac{۲۰}{\sin ۱۰۵} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{۲۰\sin ۳۰}{\sin ۱۰۵} = \dfrac{۱۰}{\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}} = \dfrac{۴۰}{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}} \\ y = \dfrac{۲۰\sin ۴۵}{\sin ۱۰۵} = \dfrac{۴۰\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}} = \dfrac{۴۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}} \end{cases}$$

۵۹

$E = B$ ، زیرا محاطی رو به یک کمان هستند.

$$\begin{cases} A_۱ = A_۲ \\ B = E = \dfrac{AC}{۲} \end{cases} \xrightarrow{ز\ ز} \Delta ABD \sim \Delta AEC \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{EC}{BD}$$

$$AB \times AC = AD \times AE = AD \times (AD + DE) = AD^۲ + AD.DE$$

$$AD \times DE = BD \times DC$$

$$AD^۲ = AB \times AC - BD \times DC$$

۶۰

$$S_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۸۰ \times ۶۰ = ۲۴۰۰ \quad , p = \frac{۱۰۰+۵۰+۹۰}{۲} = ۱۲۰$$

$$S_۲ = \sqrt{۱۲۰ \times ۲۰ \times ۷۰ \times ۳۰} = \sqrt{۲^۷ \times ۵^۴ \times ۳^۲ \times ۷} = ۲^۳ \times ۵^۲ \times ۳\sqrt{۱۴} = ۶۰۰\sqrt{۱۴}$$

$$S = S_۱ + S_۲ = ۲۴۰۰ + ۶۰۰\sqrt{۱۴} \simeq ۴۶۴۵$$

۶۱

از نقطه C خطی به موازات نیمساز AD رسم می کنیم. تا امتداد AB رادر نقطه E قطع کند.

$$AD \parallel EC , EC \quad \text{مورب} \rightarrow A_۱ = E \ , \ A_۱ = A_۲ \Rightarrow E = C$$

$$AD \parallel EC , AC \quad \text{مورب} \rightarrow A_۲ = C$$

پس مثلث AEC متساوی الساقین است یعنی AE=AC طبق قضیه تالس خواهیم داشت:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

۶۲

$$\begin{cases} S_{ABCD} = DC \times AH \\ \Delta ADH \Rightarrow \sin D = \dfrac{AH}{AD} \Rightarrow AH = AD \times \sin D \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD} = DC \times AD \times \sin D$$

۶۳

الف) $BC^۲ = ۱۰^۲ + ۶^۲ - \cancel{۲} \times ۶ \times ۱۰ \times \cancel{\cos ۶۰} = ۱۰۰ + ۳۶ - ۶۰ = ۷۴ \Rightarrow BC = \sqrt{۷۴}$

ب) $S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times AC \times AB \times \sin A = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$

پ) $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{۶}{\sin B}=\frac{۲\sqrt{۱۹}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow\sin B=\frac{۳\sqrt{۱۳}}{۲\sqrt{۱۹}}\times\frac{\sqrt{۱۹}}{\sqrt{۱۹}}=\frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$	
مثلث ADE متساوی الاضلاع است، پس $A=۶۰^\circ$ $BC^۲=۸^۲+۶^۲-\cancel{۲}\times۸\times۶\times\cancel{\cos۶۰}=۱۰۰+۳۶-۴۸=۵۲\Rightarrow BC=\sqrt{۵۲}=۲\sqrt{۱۳}$ $S_{DECB}=S_{ABC}-S_{ADE}=\frac{۱}{۲}\times۸\times۶\times\sin۶۰-\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱)^۲=$ $\frac{۴۸\sqrt{۳}}{۴}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۴۷\sqrt{۳}}{۴}$	۶۴
$BD^۲=۷^۲+۷^۲-\cancel{۲}\times۷\times۷\times\cancel{\cos۱۲۰}=۴۹+۴۹+۴۹=۳\times۴۹\Rightarrow BD=\sqrt{۳\times۴۹}=۷\sqrt{۳}$ $BD^۲=۱۱^۲+۱۳^۲-۲\times۱۱\times۱۳\times\cos A\Rightarrow۱۲۱+۱۶۹-۲۸۶\cos A=۱۴۷\Rightarrow$ $۲۸۶\cos A=۱۴۳\rightarrow\cos A=\frac{۱}{۲}\rightarrow\widehat{A=۶۰}$ $S_{ABCD}=S_{ABD}-S_{CBD}=\frac{۱}{۲}\times۱۱\times۱۳\times\sin۶۰-\frac{۱}{۲}\times۷\times۷\times\sin۱۲۰\Rightarrow$ $S_{ABCD}=\frac{۱۴۳\sqrt{۳}}{۴}-\frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۹۴\sqrt{۳}}{۴}$	۶۵
MP نیمساز زاویه AMC است پس: $\frac{AM}{MC}=\frac{AP}{PC}$، از طرفی MQ نیمساز زاویه AMB است. پس خواهیم داشت: $\frac{AM}{MB}=\frac{AQ}{QB}$ در نتیجه خواهیم داشت: $\frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QB}$ بنا بر عکس قضیه تالس داریم: $PQ \parallel BC$	۶۶
$\Delta ABD\ ;\ ۷^۲=۸^۲+x^۲-\cancel{۲}\times۸\times x\times\cancel{\cos۶۰}\Rightarrow$ $۴۹=۶۴+x^۲-۸x\rightarrow x^۲-۸x+۱۵=۰$ $(x-۳)(x-۵)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۳\\x=۵\end{cases}\xrightarrow{CD>BD}x=۳\ ,DC=۸-۳=۵$ **برای محاسبه ی DE دو روش داریم:** **روش اول:** $EC=DC=۵$ **در نتیجه مثلث EDC متساوی الساقین است و زاویه C برابر ۶۰ درجه است پس :** $E=D=۶۰$ **پس مثلث EDC متساوی الساقین است درنتیجه** $ED=۵$. **روش دوم:** $ED^۲=۵^۲+۵^۲-۲\times۵\times۵\times\cos۶۰=۲۵+۲۵-۲۵=۲۵\rightarrow ED=۵$ $AED=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$	۶۷